Лаба: Вариант 12

$f(x) = -x^3 + 2x \quad [-1, 2]$

τ - равномерно $\left(\frac{1}{n}\right)$ на $[-1, 2]$

Заметим, что $f(-x) = -f(x)$

1) $\underset{[-1,2]}{s}(f) = \underset{[0;2]}{s}(f) - \underset{[0,1]}{s}(f) = \frac{1}{2n}\sum_{i=0}^{2n-1}\left(\left(-\frac{i}{n}\right)^3 + 2\left(\frac{i}{n}\right)\right) - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\left(-\frac{i}{n}\right)^3 + 2\frac{i}{n}\right) =$

$= \frac{1}{2n}\left(\sum_{i=0}^{2n-1}\left(-\frac{i}{n}\right)^3 + 2\sum_{i=0}^{2n-1}\left(\frac{i}{n}\right)\right) - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left(-\frac{i}{n}\right)^3 + 2\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{i}{n}\right)\right) =$

$= \left(-4n - \frac{1}{n} + 4\right) \cdot \frac{1}{2n} + (2n-1) \cdot \frac{1}{n} + \frac{(n-1)^2}{4n} \cdot \frac{1}{n} -$

$- \frac{n-1}{2} \cdot \frac{2}{n}$

$\lim(s_\tau) = -2 + 2 + \frac{1}{4} - 1 = -0,75.$

$\underset{[-1;2]}{S_\tau} = \underset{[0;2]}{S_\tau}(f) - \underset{[0;1]}{S_\tau}(f) = \frac{1}{2n}\left(\sum_{i=1}^{2n}\left(-\frac{i}{n}\right)^3 + \sum_{i=1}^{2n}\left(2\frac{i}{n}\right)\right) - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{i}{n}\right)^3 + \sum_{i=1}^{n} 2\frac{i}{n}\right)$

$= -\frac{1}{2n}\left(\frac{(2n+1)^2}{n}\right) + \frac{1}{2n}(4n+2) + \frac{1}{n}\left(\frac{(n+1)^2}{4n}\right) - \frac{1}{n}(n+1)$

$\lim(S_\tau) = -2 + 2 + \frac{1}{4} - 1 = -0,75.$

2) Критерий Римана: $\lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0}(S_\tau - s_\tau) = 0$

$\lim(S_\tau) - \lim(s_\tau) = 0$

$\lim(S_\tau) = \lim(s_\tau)$

$-0,75 = -0,75$

③ $\Rightarrow \lim (s_\tau) = \lim(S_\tau) = \int\limits_{-1}^{2} f = -0{,}75$.

④ $\int f = -\frac{x^4}{4} + x^2 + C$

$\int\limits_{-1}^{2} f = F(2) - F(-1) = 0 - 0{,}75 = -0{,}75$

2add (Это был Дарбу, а не Риман)
(Риман по определению)

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \tau : S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon.$

доказать, что $S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$ при моём τ.

$$\left(-\frac{(1+2n)^2}{2n^2} + \frac{n+1}{n} + \frac{(n+1)^2}{4n^2} - \frac{n+1}{n}\right) -$$
$$-\left(\frac{-(2n-1)^2}{2n^2} + \frac{2n-1}{n} + \frac{(n-1)^2}{4n^2} - \frac{(n-1)}{n}\right) < \varepsilon$$

$$\frac{-8n}{2n^2} + \frac{2}{n} + \frac{4n}{4n^2} - \frac{2}{n} < \varepsilon.$$

$$\frac{-4+2+1-2}{n} < \varepsilon.$$

$$\frac{-3}{n} < \varepsilon$$

$$n_0 = \left\lceil \frac{-3}{\varepsilon} \right\rceil + 1.$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \mid \exists \tau_{n_0} \mid S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon.$