

# Grundlagen der Informationstheorie

## Konzepte und Prinzipien

Digitale AV Technik, MIB 5

# Was ist Information?

- Information ist die **Reduktion von Unsicherheit**.
- Claude Shannon definierte Information als eine Größe, die quantifizierbar ist.

# Was enthält Information?

- **Nachrichten** enthalten Information.
  - Eine Nachricht kann z.B. ein Text in deutscher Sprache sein.
  - Ein Binärcode enthält nur Nullen und Einsen, diese bilden eine Nachricht.

## Formale Definition einer Nachricht

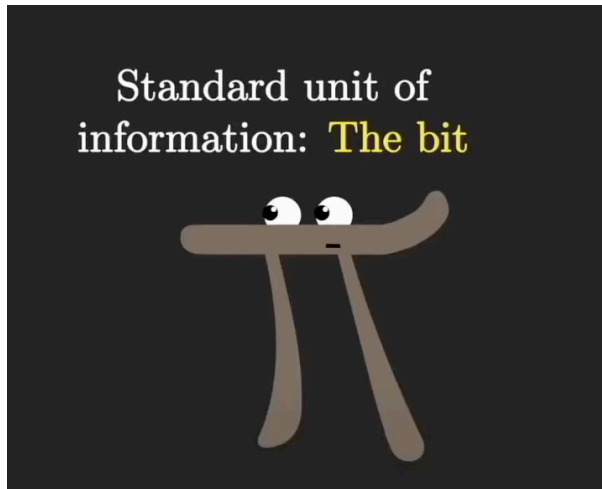
- Eine Nachricht besteht aus beliebig vielen Zeichen hintereinander. Also zum Beispiel:
  - AABACAABADDA
  - 001110101001
  - Hallo, das ist eine Nachricht.
- Eine Nachricht muss mit einem beliebigen Alphabet codiert werden, um übertragen werden zu können.

# Nachrichtentechnik

- **Nachricht:** Folge von Zeichen, die von Sender (Quelle) an Empfänger (Senke) übermittelt wird.
- **Information:** intuitiv: alles was durch eine Nachricht übermittelt wird, Bedeutung der Nachricht
- **Informationstheorie nach Shannon:** Versuch, den Begriff der Information rein statistisch zu erfassen

# Was ist ein Bit?

## Wie viel Information steckt in einem Bit?



[image from [3Blue1Brown](#)]

# Informationsgehalt

Der Informationsgehalt eines Zeichens  $x$  mit einer Auftretswahrscheinlichkeit  $P(x)$  ist definiert als

$$I(x) = \log_a \left( \frac{1}{P(x)} \right) = \log_a(1) - \log_a(P(x)) = -\log_a(P(x))$$

- mit  $a$  als Kardinalität des Alphabets
  - also der Anzahl der möglichen Zeichen
  - also  $a = 2$  bei binären Codes.

## Beispiel: Informationsgehalt eines Buchstaben

In deutschen Texten tritt das B mit der Wahrscheinlichkeit 0.016 auf und wir wollen es binär codieren, also

$$I(b) = \log_2\left(\frac{1}{0.016}\right) \approx 5.97 \text{ Bit}$$

Bemerkung:  $\log_b(x) = \log_{10}(x) / \log_{10}(b)$



## Maßeinheit des Informationsgehalts: Bit (Binary Digit)

- 1 Bit = Entscheidung zwischen zwei gleich wahrscheinlichen Alternativen
  - z.B. Ja/Nein, 0/1, True/False
- Pseudoeinheit für die Anzahl der Stellen in Binärdarstellung
  - daraus folgt  $P(x) = 2^{-x} = \frac{1}{2^x}$

## Beispielrechnung

- Eine 8 Bit Darstellung ermöglicht 256 verschieden Zeichen.
- Bei gleicher Wahrscheinlichkeit tritt jedes Zeichen  $x$  mit  $P(x) = 2^{-8} = \frac{1}{2^8} = \frac{1}{256}$  auf.
- Der Informationsgehalt ist daher
$$I(x) = -\log_2(P(x)) = -\log_2\left(\frac{1}{256}\right)$$
$$= -\log_2\left(\frac{1}{2^8}\right) = \log_2(2^8) = 8 \text{ Bit.}$$

# Shannons Entropie

- **Entropie (H)**: Maß für den mittleren Informationsgehalt pro Zeichen einer **Nachricht**.
- Je höher die Entropie, desto **mehr Information** trägt eine Nachricht.
  - **Achtung**: es geht nur um den statistischen Informationsgehalt, nicht um die Bedeutung.

## Formel der Entropie

$$H(X) = \sum_{i=1}^n P(x_i) I(x_i) = - \sum_{i=1}^n P(x_i) \log_2 P(x_i)$$

- $H$ : die Entropie einer (binären) Nachricht  $X$
- $P(x_i)$ : Wahrscheinlichkeit des Auftretens des Zeichen  $x_i$

## Beispiel: Entropie einer Nachricht

- Beispiel: Ein Alphabet mit 4 Buchstaben (A, B, C, D) und der Nachricht AABBCDCD

- gleichverteilte Wahrscheinlichkeit:

$$P(A) = P(B) = P(C) = P(D) = 0.25$$

- Entropie:

$$H = -(0.25 \log_2 0.25 + 0.25 \log_2 0.25 + 0.25 \log_2 0.25 + 0.25 \log_2 0.25) = 2 \text{ Bits}$$

- Um diese Nachricht optimal zu codieren, benötigt man 2 Bit pro Zeichen.

## Beispiel 2: Entropie einer ähnlichen Nachricht

- Beispiel: Ein Alphabet mit 4 Buchstaben (A, B, C, D) und der Nachricht AAAABCCD

- nicht gleich verteilte Wahrscheinlichkeiten:

$$P(A) = 0.5, P(B) = P(D) = 0.125, P(C) = 0.25$$

- Entropie:

$$H = -(0.5 \log_2 0.5 + 0.125 \log_2 0.125 + 0.25 \log_2 0.25 + 0.125 \log_2 0.125) = 1.75 \text{ Bits}$$

- Um diese Nachricht optimal zu codieren, benötigt man 2 Bit pro Zeichen.

## Entropie intuitiv

Anzahl der Bits, die notwendig sind, um eine Nachricht in einem (bzgl. der Wortlänge optimalen) Code binär zu codieren.

- hängt von der Auftrittswahrscheinlichkeit der Zeichen ab
  - hier Wahrscheinlichkeit = relative Häufigkeit

# Informationsquelle und Redundanz

- **Redundanz:** Wiederholung von Information zur Fehlervermeidung.
- Nachrichten enthalten oft **mehr Daten**, als zur Übertragung nötig sind.
- Redundanz hilft bei der **Fehlerkorrektur** und **Kompression**.

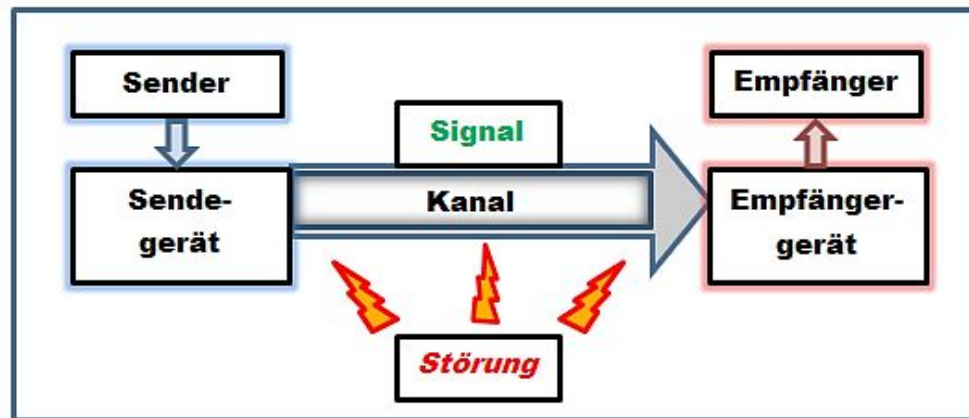


## Folgen der Redundanz

- Eine wiederholte Nachricht ("AAAAA") hat geringe Entropie, weil sie wenig Unsicherheit enthält.
- Nachrichten mit **hoher Entropie** sind schwerer zu komprimieren.

# Sender - Empfänger Modell

- Das Modell beschreibt die **Übertragung von Informationen** in einem System.
- Benannt nach Shannon und Weaver, 1948 veröffentlicht in "A Mathematical Theory of Communication" von C. Shannon



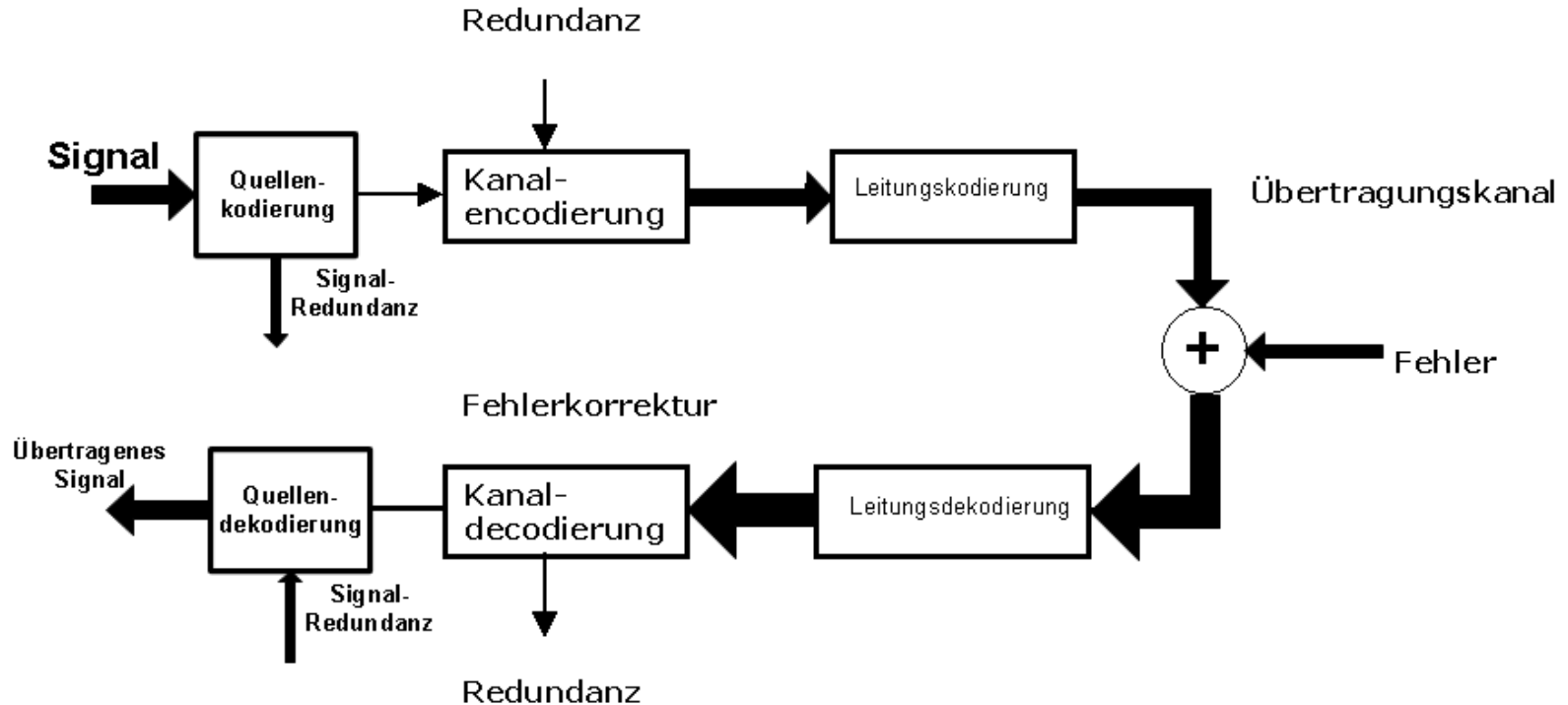
## Shannon-Weaver Modell Komponenten

- **Informationsquelle:** Erzeugt die Nachricht
- **Sender:** Kodiert die Nachricht in Signale
- **Kanal:** Überträgt die Signale (z.B. Kabel, Funk)
- **Empfänger:** Dekodiert das Signal
- **Ziel:** Erhält die Nachricht
- **Störungen:** Fehler oder Rauschen während der Übertragung

# Perspektiven

<i>Problem</i>	<b>Kompression</b>	<b>Fehlerkorrektur</b>
<i>Ziel</i>	Effizienz	Verlässlichkeit
<i>Anwendung</i>	Quellencodierung	Kanalcodierung

# Signalflussmodell



Bildquelle: Dantor, [CC BY-SA 3.0](#), via [Wikimedia Commons](#)

# Datenkompression

## Ziel

- Erhöhung der **Effizienz** durch Reduktion der **Datenmenge**, ohne Information zu verlieren.
- Komprimierte Daten haben eine **niedrigere Redundanz**.

# Varianten

## Verlustfreie Kompression

- Alle Daten bleiben vollständig erhalten (z.B. ZIP, PNG).

## Verlustbehaftete Kompression

- Redundante oder unwichtige Daten werden verworfen (z.B. MP3, JPEG).

## Beispiel

- Eine Nachricht mit hoher Redundanz kann stärker komprimiert werden als eine zufällige Nachricht.

# Fehlerkorrektur

- In der Praxis gibt es bei der Übertragung oft **Fehler** (z.B. durch Rauschen).
- **Fehlerkorrigierende Codes** helfen, diese Fehler zu erkennen und zu beheben.



# Anwendungen der Informationstheorie

- **Datenübertragung:** Internet, Mobilfunk, Satellitenkommunikation.
- **Datenkompression:** MP3, JPEG, ZIP.
- **Kryptographie:** Sicherung der Kommunikation durch Verschlüsselung.
- **Fehlerkorrektur:** DVDs, CDs, moderne Speichertechnologien.

# Zusammenfassung der Konzepte

1. **Information und Entropie:** Maß für den Informationsgehalt.
2. **Redundanz:** Hilft bei der Fehlervermeidung und Kompression.
3. **Kanal-Kapazität:** Maximale Übertragungsrate ohne Fehler.
4. **Datenkompression:** Reduktion der Datenmenge.
5. **Fehlerkorrektur:** Methoden zur fehlerfreien Übertragung.