Fehlerkorrektur (Teil 2)

Digitale AV Technik, MIB 5

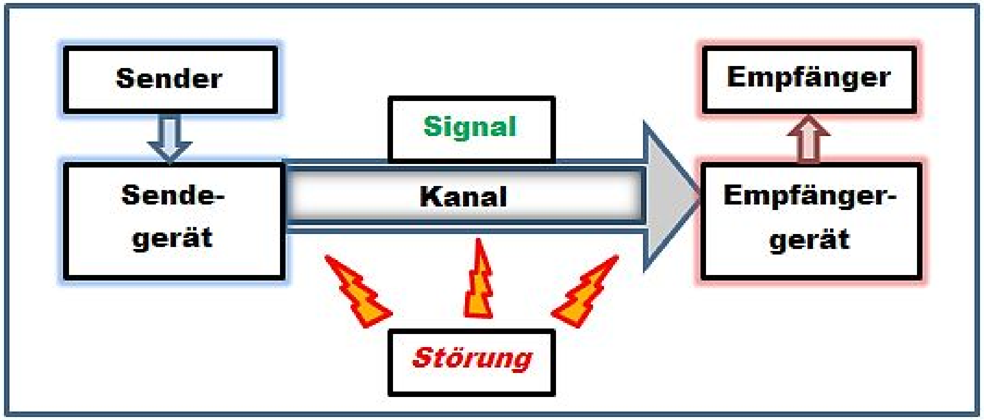
Aus Sicht der Informationstheorie

Problem	Kompression	**Fehlerkorrektur**
Ziel	Effizienz	Verlässlichkeit
Anwendung	Quellencodierung	**Kanalcodierung**

Algorithmische Perspektive

Problem	**Fehlerkorrektur**
Algorithmen	Hamming code
	Reed-Solomon Code
	Turbo-Code

Fehlererkennung



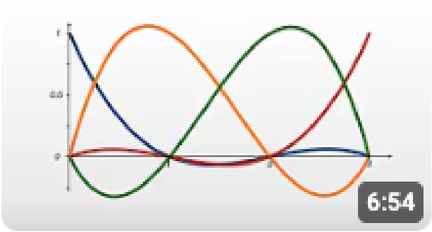
Störungen sind unvermeidlich. Hamming Codes ermöglichen die Korrektur eines einzelnen Bitfehlers. Aber geht auch mehr?

Einführung in Reed-Solomon Codes

"We're going to talk about going from Galois fields to Reed-Solomon codes. We must be mad. Really, I mean, so many of you have said: 'Just do Reed-Solomon, you know. You've done Hamming codes. They [Reed-Solomon] can't be that much more complex?'
Oh yes they can!"
David Brailsford in Reed Solomon Encoding - Computerphile

Weitere Quellen

- Francesco Mazzoli: The essence of Reed-Solomon coding
- Die folgenden Folien enthalten Screenshots aus diesen YouTube Videos:
  - 

    - What are Reed-Solomon Codes? How computers recover lost data by vcubingx
  - 

    - Lagrange Interpolation by Dr. Will Wood

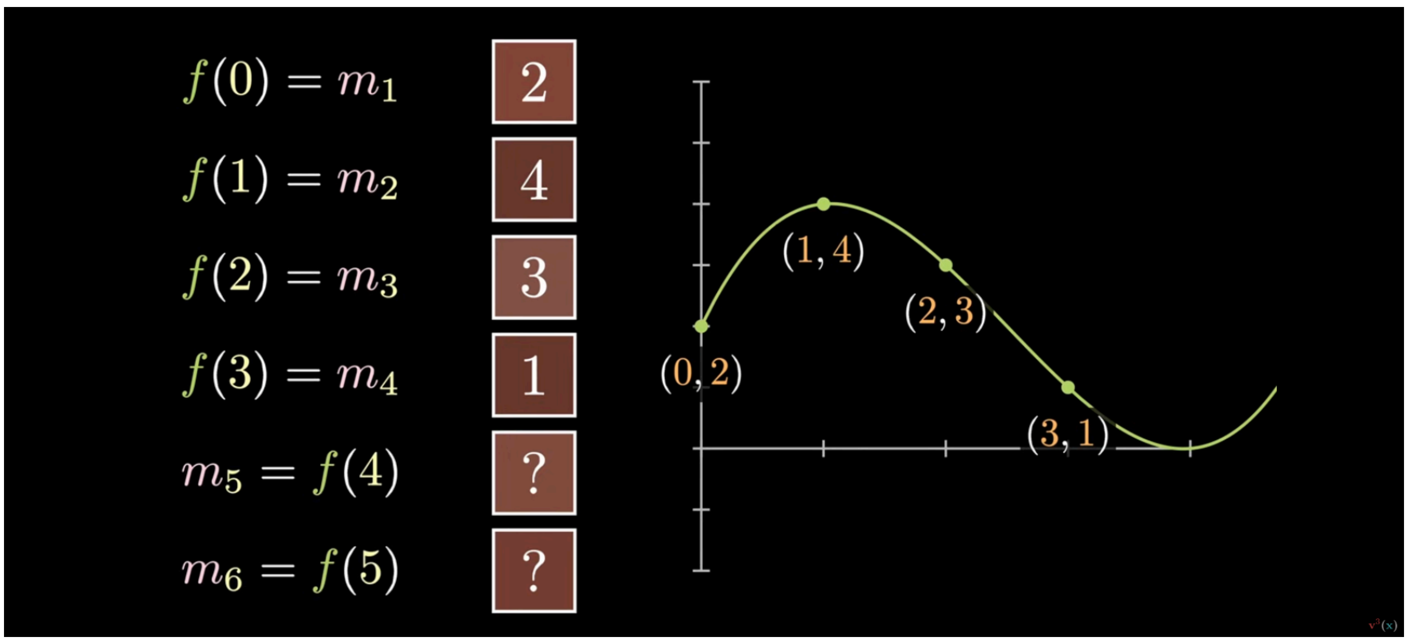
Geschichte der Reed-Solomon Codes

- Originalpaper: Polynomial Codes Over Certain Finite Fields by *I. S. Reed and G. Solomon*, 1960
- Effiziente Dekodierung erst in den 1970ern möglich
- Einsatz in der Praxis:
  - NASA voyager (launched 1977)
  - CD 1980
  - QR Codes

derivative work: Dzucconi (talk) CD_autolev_crop.jpg: Ubern00b, CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons

Mathematische Grundlagen: Polynome

- Idee: Nachricht definiert ein Polynom
- Man sendet mehr Information als notwendig
- Wenn Daten fehlen, lässt sich das Polynom trotzdem rekonstruieren



Mathematische Grundlagen: Lagrange Polynome (1)

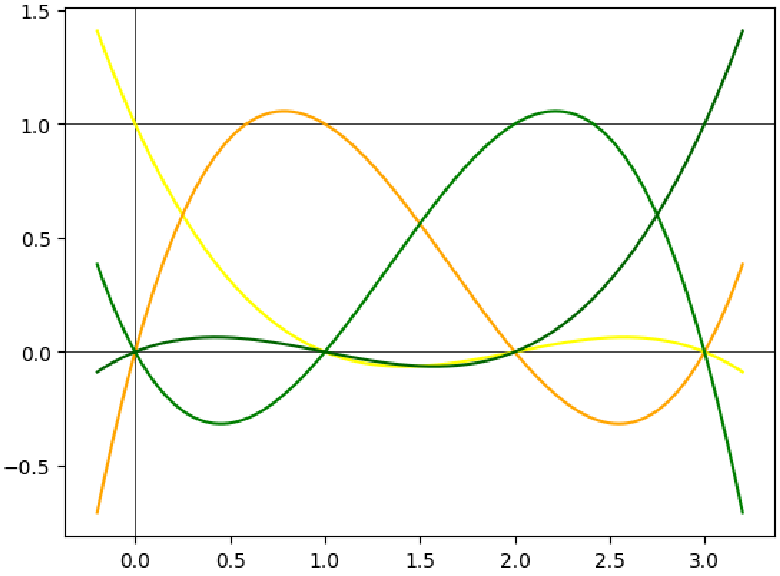
Ein Polynom als Kombination aus anderen (sog. Lagrange) Polynomen definieren.
Diese lassen sich einfach ermitteln und sind eindeutig: **Es gibt genau ein Polynom vom Grad $n-1$ durch n Stützstellen**.

- Beispiel:
  - Stützstellen: $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, \ldots$ usw.
  - Werte aus der Nachricht: $y_0 = 2, y_1 = 4, y_2 = 3, y_3 = 1$
- Lagrange Polynome haben für eine Stützstelle den Wert 1, für alle anderen den Wert 0. Dadurch lassen sie sich einfach ermitteln.

Mathematische Grundlagen: Lagrange Polynome (2)

Wir arbeiten mit vier Stützstellen, also hat das Polynom max. Grad 3

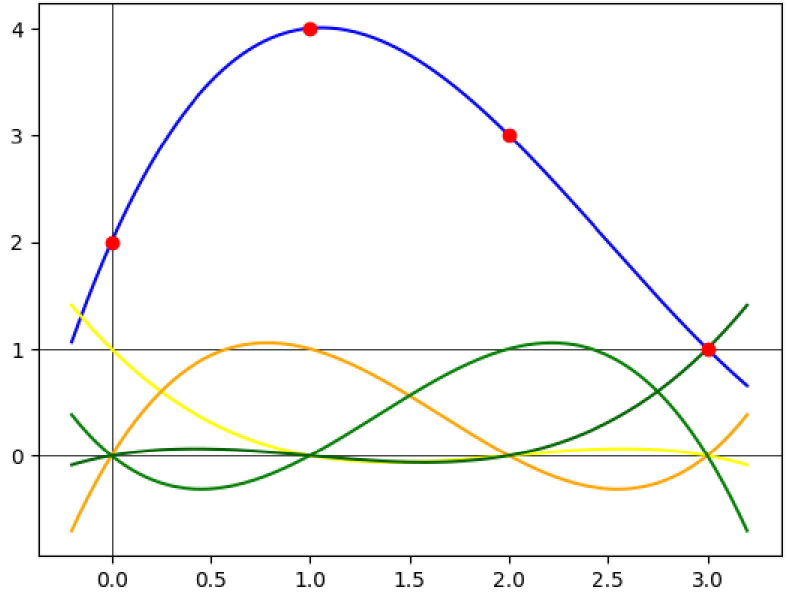
Die Lagrange Basispolynome l_0 bis l_3 sind fest definiert und hängen nur vom Grad ab.



Mathematische Grundlagen: Lagrange Polynome (3)

Das Lagrange Polynom durch alle vier Stützstellen ergibt sich als gewichtete Kombination der Basispolynome. Die Gewichte sind die **y-Werte der Stützstellen**.

$$\begin{aligned} l(x) &= y_0 * l_0 + y_1 * l_1 + y_2 * l_2 + y_3 * l_3 \\ &= 2 * l_0 + 4 * l_1 + 3 * l_2 + 1 * l_3 \end{aligned}$$



Mathematische Grundlagen: Lagrange Polynome (4)

Allgemein lässt sich also das Polynom so berechnen:

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \ell_i(x),$$

wobei

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Mathematische Grundlagen: Lagrange Polynome (5)

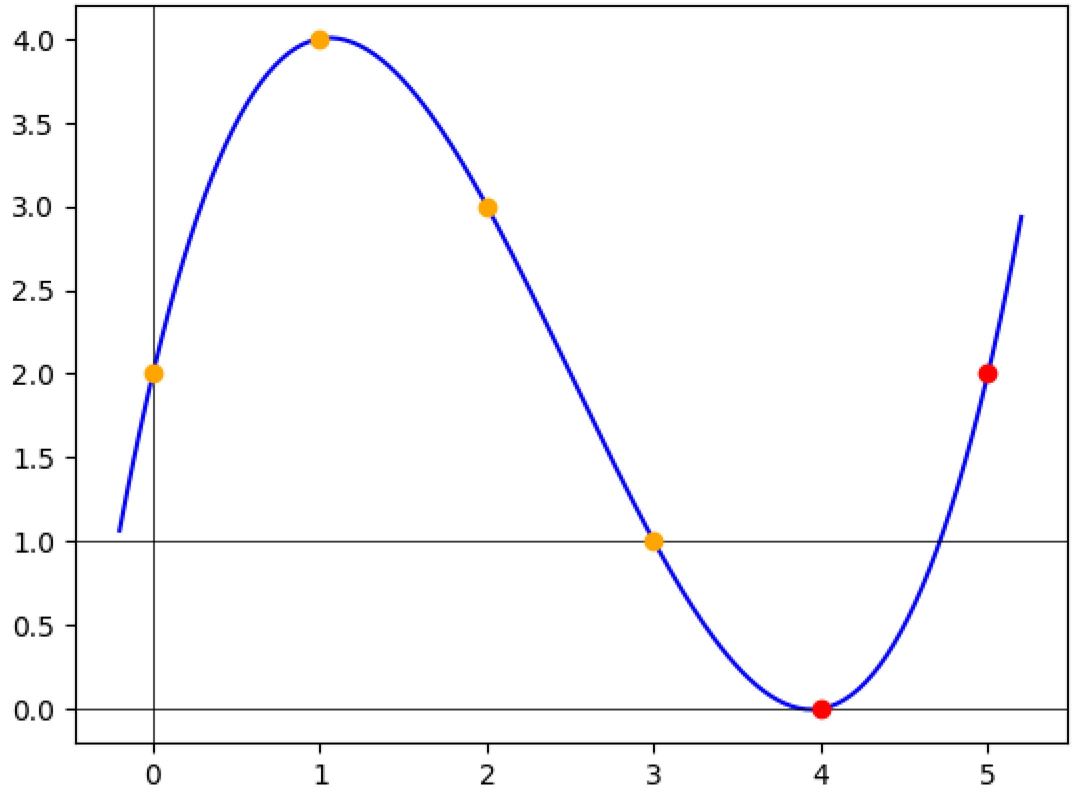
Python Code: lagrange.py

```
def lagrange(x, x_i, y_i):
    n = len(x_i)
    m = len(x)
    y = np.zeros(m)
    for i in range(n):
        p = lagrange_polynomial(i, x, x_i)
        y += y_i[i] * p
    return y

def lagrange_polynomial(j, x, x_i):
    n = len(x_i)
    p = 1
    for m in range(n):
        if m != j:
            p *= (x - x_i[m]) / (x_i[j] - x_i[m])
    return p
```

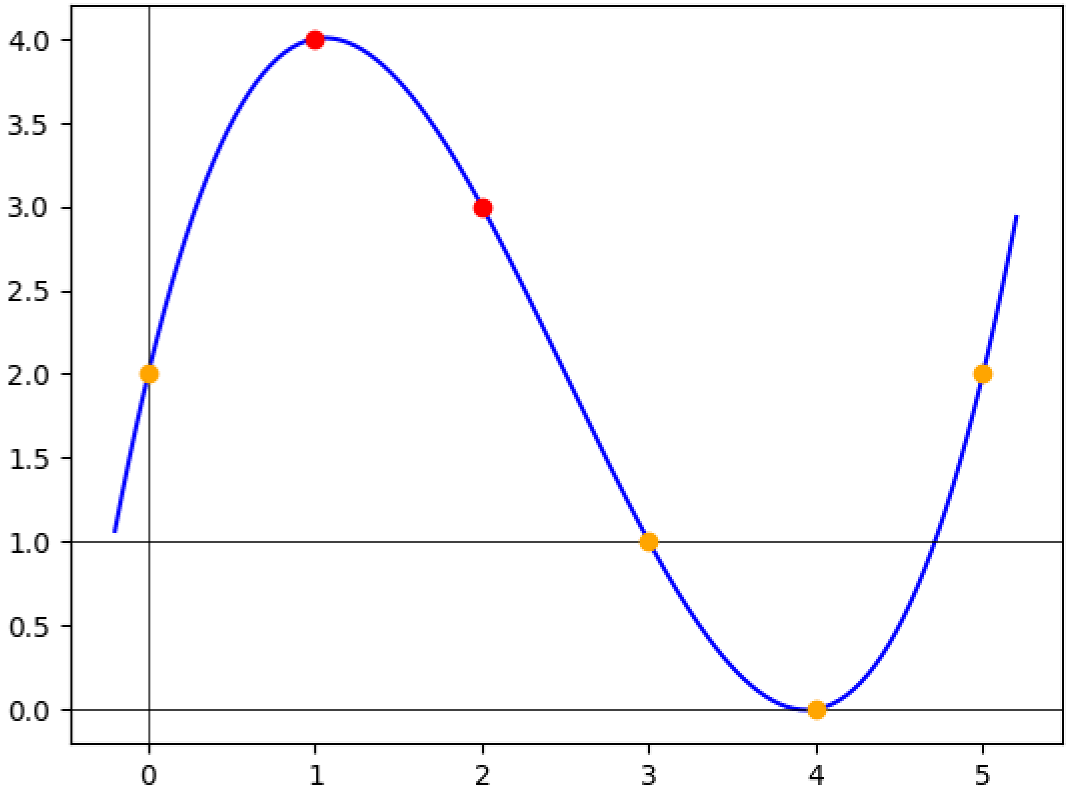
Mathematische Grundlagen: Lagrange Polynome (6)

Das Polynom ist eindeutig und kann aus vier Punkten (orange) rekonstruiert werden:



Mathematische Grundlagen: Lagrange Polynome (7)

Also auch aus anderen vier Punkten (orange):

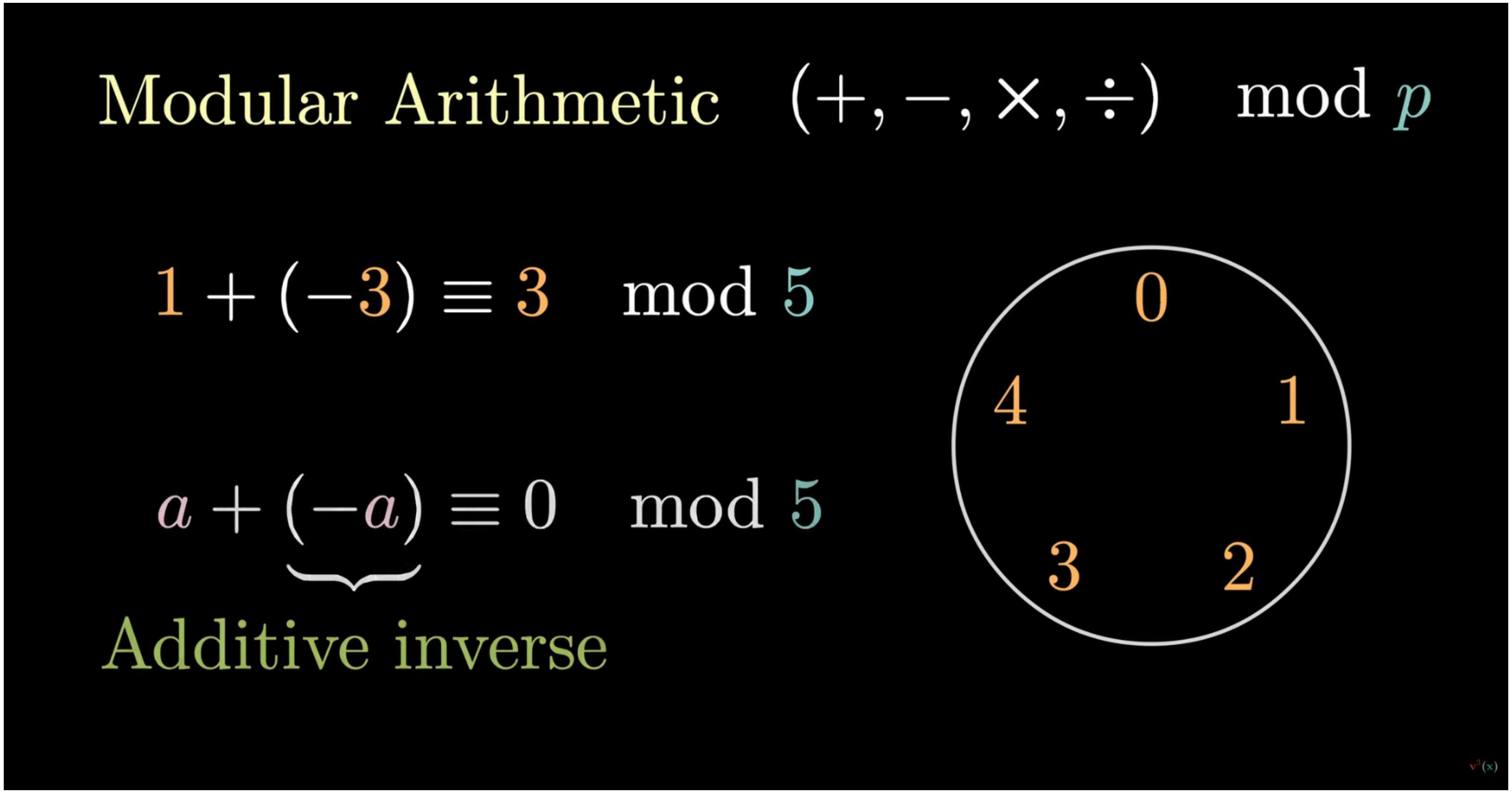


Dann könnte man das doch so direkt zur Fehlerkorrektur nutzen, oder?

Problem

Ein Code besteht aus einem endlichen Alphabet. Die reellen Zahlen sind unendlich.

Lösung: Rechnen mit Modulo



from What are Reed-Solomon Codes? How computers recover lost data by vcubingx

Lösung: Rechnen auf einem endlichen Körper

Mathematisch spricht man von einem endlichen Körper oder Galois-Körper (engl. finite or Galois field). Man kann mit Addieren und Multiplizieren den Zahlenbereich nicht verlassen.

Weitere algebraische Strukturen

Körper

Definition:

1. Ein Ring $(R, +, 0, \cdot, 1)$ heißt **Körper** (engl. *field*), wenn $(R \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ eine Gruppe ist.

Folie aus dem ersten Semester!

Fazit Fehlerkorrektur

- Reed-Solomon (RS) Codes gibt es in vielen Varianten. Wir haben nur das zugrundeliegende Prinzip betrachtet. Sie arbeiten aber immer mit Symbolen die aus mehreren Bits bestehen.
- RS Codes nutzen ein festgelegtes Generatorpolynom, das sowohl dem Sender (Encoder) als auch dem Empfänger (decoder) bekannt sein muss.
- RS Codes können sowohl falsche Werte erkennen, als auch fehlende Werte ersetzen.

Fazit und Ausblick

- In neueren Anwendungsbereichen werden RS-Codes zunehmend durch leistungsfähigere Codes wie die Low-Density-Parity-Check-Codes (LDPC) oder Turbo-Codes (TPC) abgelöst. Quelle: Wikipedia