Hausübungen

Aufgabe H 1. *Szene und zentralperspektivischer Abbildung durch eine Kamera*

Wir nehmen an, dass ein kartesisches Koordinatensystem $K = (O;\, \widehat{x},\, \widehat{y},\, \widehat{z})$ fest im Raum plaziert wird. Zur Unterscheidung von anderen Koordinatensystemen, die wir später verwenden müssen, nennen wir K das *Weltkooordinatensystem*. Ein Industriegebäude werde durch ein einfaches Modell mit zehn Punkten modelliert. Die Koordinaten dieser Punkte werden bzgl. des Weltkoordinatensystems K angegeben. Die vier Punkte des Bodens liegen in der Ebene $\sigma := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\; y = -2\right\}$, die wir die **Standebene** nennen.

Boden:	$Ab = (3, -2, 3),\ Bb = (-3, -2, 3),$	$Cb = (-3, -2, 6),\ Db = (3, -2, 6)\,;$
Decke:	$Ac = (3, 2.5, 3),\ Bc = (-3, 2.5, 3),$	$Cc = (-3, 2.5, 6),\ Dc = (3, 2.5, 6)\,;$
Schrägdach:		$Cr = (-3, 3.5, 6),\ Dr = (3, 3.5, 6)\,.$

Die Abbildung 1 zeigt eine Darstellung des Gebäudes, die von einer CAS (Computer Algebra Software) mehr oder weniger beliebig, also ohne besondere Spezifikation von Kameraposition und -pose, generiert wurde.

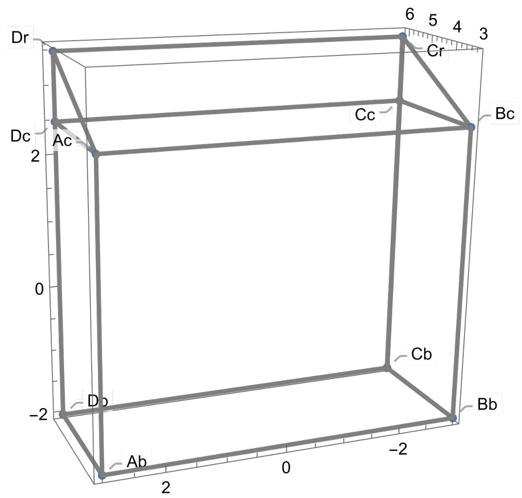

Abbildung 1: Ansicht des Modells eines Fabrikgebäudes, generiert mit einer CAS-Software.

Wir bilden das Gebäude nun mit einer (Loch-)Kamera ab. Um deren Lage und Pose zu spezifizieren, orientieren wir uns an der Abbildung 2, die Sie allerdings gleich noch etwas modifizieren müssen (siehe unten).

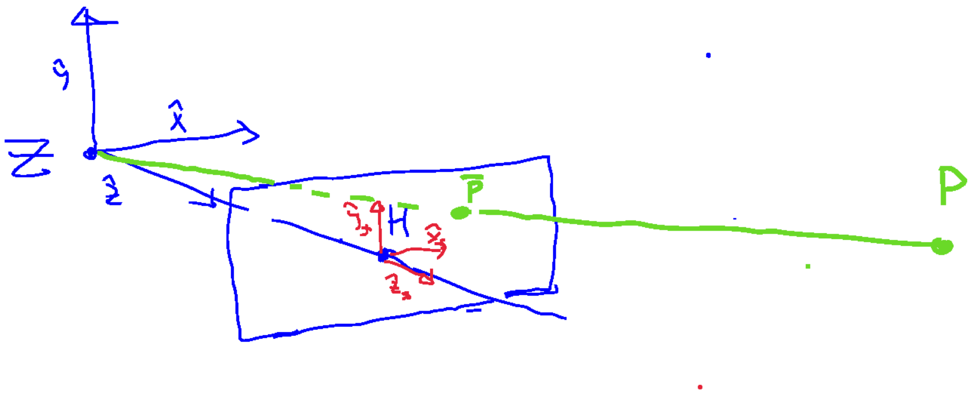

Abbildung 2: Grundkonfiguration: Einheitskamera, ausgerichtet am Weltkoordinatensystem

Das Projektionszentrum Z_1 unserer Kamera soll im Ursprung O des Weltkoordinatensystems liegen. Somit gilt $(Z_1)_K = (0,0,0)$. Der Hauptpunkt H_1 habe die Koordinaten $(H_1)_K = (0,0,1)$, damit hat die Distanz $d_1 = \overline{Z_1 H_1}$ den Wert $d_1 = 1$. Die Bildebene π_1 (der Sensor der Kamera) liegt parallel zur x-y-Ebene des Weltkoordinatensystems. Wir führen auf der Bildebene ein Koordinatensystem K_{B_1} ein und wählen $K_{B_1} = (O_1;\ \widehat{x},\ \widehat{y},\ \widehat{z})$ mit $O_1 = H_1$, vgl. Abbildung 2. Die so spezifizierte Kamera wird mitunter **Einheitskamera** genannt.

(a) Fertigen Sie von Hand eine eigene Skizze analog zu Abbildung 2 an, in der Sie die Lage des Hauptpunkts, der Bildebene und des Kamerakoordinatensystems gemäß der obigen Angaben einzeichnen. *Hinweis: In Abbildung 2 ist die Distanz nicht gleich* 1, *sondern größer als* 1.

In der Abbildung 2 ist ein Raumpunkt P sowie dessen Projektionsbild $\overline{P}$ in der Bildebene gezeigt. Das Projektionsbild $\overline{P}$ entsteht als Schnittpunkt der Verbindungsgeraden $Z_1 \vee P$ mit der Bildebene. Es gibt **verschiedene Möglichkeiten**, bei gegebener Kamerakonfiguration und bekannter Lage eines Raumpunktes (z.B. des Punktes Ab unseres Gebäudes) den zugehörigen Bildpunkt zu bestimmen.

1 Eine geometrisch-konstruktive Vorgehensweise, die auf dem sogenannten *Satz von Desargues* beruht, haben Sie zu Beginn des Projekts gelernt und mithilfe von `Geogebra` umgesetzt.

2 Wir **berechnen** den Schnittpunkt der Geraden $Z_1 \vee A_b$ mit der Bildebene π_1. Hierzu verwenden wir für die Gerade $Z_1 \vee A_b$ eine **Parametergleichung**, welche die auf der Geraden liegenden Punkte X mit ihren Weltkoordinaten (x_1, x_2, x_3) beschreibt. Eine Möglichkeit hierfür ist

$$X(t) \;=\; Ab \,+\, t\,\overrightarrow{AbZ_1} \;=\; (3,-2,3) \,+\, t\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},\; t \in \mathbb{R}\,.$$

Der Bequemlichkeit halber wollen wir nun auch die Koordinatentripel von Punkten als Spaltenvektoren darstellen. Damit gilt

$$X(t) \;=\; \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 3-3t \\ -2+2t \\ 3-3t \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}\,.$$

3 Eine alternative und weitaus elegantere Vorgehensweise verwendet homogene Koordinaten und Projektionsmatrizen, vgl. Aufgabe H 2.

Die Bildebene π_1 ist durch die Gleichung $z = 1$ bzw. $x_3 = 1$ gegeben. Zur Berechnung des Schnittpunkts $(Z_1 \vee A_b) \wedge \pi_1$ müssen wir also den Wert von t so bestimmen, dass $1 = x_3(t) = 3 - 3t$ gilt. Dies ist genau für $t = \frac{2}{3}$ der Fall. Einsetzen dieses Wertes in den Ausdruck für $X(t)$ ergibt

$$\overline{Ab} \;=\; X\left(\tfrac{2}{3}\right) \;=\; \begin{pmatrix} 3-3\cdot\frac{2}{3} \\ -2+2\cdot\frac{2}{3} \\ 3-3\cdot\frac{2}{3} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) **Berechnen Sie** auf analoge Weise die Bildpunkte $\overline{Db}$ sowie $\overline{Dr}$ und vergleichen Sie Ihre Rechenergebnisse mit den Konstruktionsergebnissen, die Sie mithilfe von `Geogebra` erzielt haben.

Aufgabe H 2. *Projektionsmatrix für Kamera 1*

Wir nehmen an, dass eine Kamera durch Angabe ihres Projektionszentrums Z und ihrer Bildebene π spezifiziert wird. Im Falle des Projektionszentrums Z werden typischerweise die Koordinaten $(Z)_K = (Z_1, Z_2, Z_3)$ bzgl. des Weltkoordinatensystems angegeben. Die Bildebene π lässt sich auf mehrerlei Weisen spezifizieren, z.B. durch eine *Allgemeine Koordinatengleichung (AKG)* der Form

$$A\,x_1 + B\,x_2 + C\,x_3 + D = 0,$$

wobei die Konstanten A, B, C, D je nach Lage der Ebene geeignet gewählt werden müssen Es gilt dann

$$\pi \;=\; \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; A\,x_1 + B\,x_2 + C\,x_3 + D = 0 \right\}.$$

Wir können die Konstanten der AKG in einer Zeilenmatrix $[L] = \begin{bmatrix} A & B & C & D \end{bmatrix}$ zusammenfassen. Dann lässt sich die AKG mithilfe der Matrixmultiplikation $\cdot$ in knapper Form so schreiben:

$$[L] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix} \;=\; 0.$$

Setzen wir noch $[X] := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix}$, so nimmt die AKG die Kurzform $[L] \cdot [X] = 0$ an.

Wir beobachten, dass $[L]$ und $[X]$ jeweils **vier** Komponenten besitzen und wollen nun auch Z durch eine vierte Komponente zu einem *homogenen Vektor* ergänzen: $[Z] = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Nun sind wir in der Lage, die Abbildung von Raumpunkten auf die Bildebene der Kamera per Zentralprojektion durch eine 4×4-Projektionsmatrix $[P]$ zu beschreiben: Wir setzen*

$$[P] \;=\; [E_4] - \frac{1}{[L] \cdot [Z]}\, [Z] \cdot [L],$$

hierbei steht das Symbol $[E_4] = \begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$ für die 4×4-Einheitsmatrix.

(a) Wir stellen die Projektionsmatrix für die in der vorigen Aufgabe spezifizierte Kamera auf, diese wollen wir im Folgenden *Kamera 1* nennen. Das Projektionszentrum von Kamera 1 besitzt den homogenen Koordinatenvektor $[Z] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Die Bildebene von Kamera 1 wird durch die Gleichung $x_3 = 1$ beschrieben, die wir nun in die Form

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 - 1 \;=\; 0$$

bringen und hieraus die Zeilenmatrix $[L] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ablesen.

Damit ist die 4×4-Projektionsmatrix $[P]$ der Kamera 1 wie folgt:

$$\begin{aligned}
[P] \;&=\; [E_4] - \frac{1}{L \cdot [Z]}\, [Z] \cdot [L] \\
&= \begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} - \frac{1}{\begin{bmatrix} 0&0&1&-1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} - \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&1&-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&1&0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(b) Nun sind wir in der Lage, für jeden Szenenpunkt den zugehörigen Bildpunkt auf dem Sensor von Kamera 1 **zu berechnen**. Wir führen dies am Beispiel des (zu unserem Gebäudemodell aus Aufgabe H 1 gehörigen) Punktes Ab vor. Dieser besitzt den homogenen Koordinatenvektor $[Ab] = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Die homogenen Koordinaten des Bildpunktes

* Ganz präzise wäre die Notation $[P] = \left[E_4 - \frac{1}{(L)\cdot(Z)}\,(Z) \cdot (L)\right]$, wobei im Zuge der Berechnung *standardisierte* Matrizen bzw. Vektoren verwendet werden.

$\overline{Ab}$ erhalten wir nun durch Matrixmultiplikation wie folgt:

$$\left[\overline{Ab}\right] = [P] \cdot [Ab] = \begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&1&0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Um nun die gewöhnlichen Koordinaten des Bildpunktes $\overline{Ab}$ im Raum ablesen zu können, müssen wir den Ergebnisvektor **standardisieren**, d.h. alle Komponenten des Vektors $\left[\overline{Ab}\right]$ durch die vierte Komponente dividieren:

$$\left[\overline{Ab}\right]_S = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \cdot 3 \\ \frac{1}{3} \cdot (-2) \\ \frac{1}{3} \cdot 3 \\ \frac{1}{3} \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Die oberen drei Komponenten sind nun die Koordinaten des Bildpunktes $\overline{Ab}$ bzgl. des Weltkoordinatensystems, also

$$\overline{Ab} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{vgl. Aufgabe H 1.}$$

Die Tatsache, dass die dritte Komponente von $\overline{Ab}$ den Wert 1 hat, überrascht nicht, denn **alle** Punkte, die auf dem Sensor liegen, haben ja die z-Komponente 1.

(c) **Berechnen Sie** auf analoge Weise die Bildpunkte $\overline{Db}$ sowie $\overline{Dr}$ und vergleichen Sie Ihre Rechenergebnisse mit den Ergebnissen der Aufgabe H 1 sowie mit den Konstruktionsergebnissen, die Sie mithilfe von `Geogebra` erzielt haben.

Hinweis: Sie brauchen die Projektionsmatrix nicht noch einmal berechnen, verwenden Sie die oben angegebene Projektionsmatrix.

Aufgabe H 3. *Kamera 2*

Wir betrachten nun eine zweite Kamera (Kamera 2), deren Lage relativ zur Kamera 1 und zum Gebäudesgrundriss Sie der Abbildung 3 entnehmen können. Die Bildebene π_2 von Kamera 2 ist gegenüber der Bildebene von Kamera 1 um $-45°$ verdreht (und zusätzlich verschoben). Die Distanz d_2 habe bei Kamera 2 den gleichen Wert wie bei Kamera 1, d.h., es gilt $d_2 = 1$.

Wie in Aufgabe H 1 werden wir (bzw. Sie) nun die Bildpunkte $\overline{Ab}'$, $\overline{Db}'$ und $\overline{Dr}'$ berechnen, die auf der Bildebene π_2 der Kamera 2 durch Zentralprojektion aus deren Projektionszentrum Z_2 entsteht. Hierzu benötigen wir die Koordinaten von Z_2 und eine Allgemeine Koordinatengleichung für π_2, jeweils bezüglich des Weltkoordinatensystems:

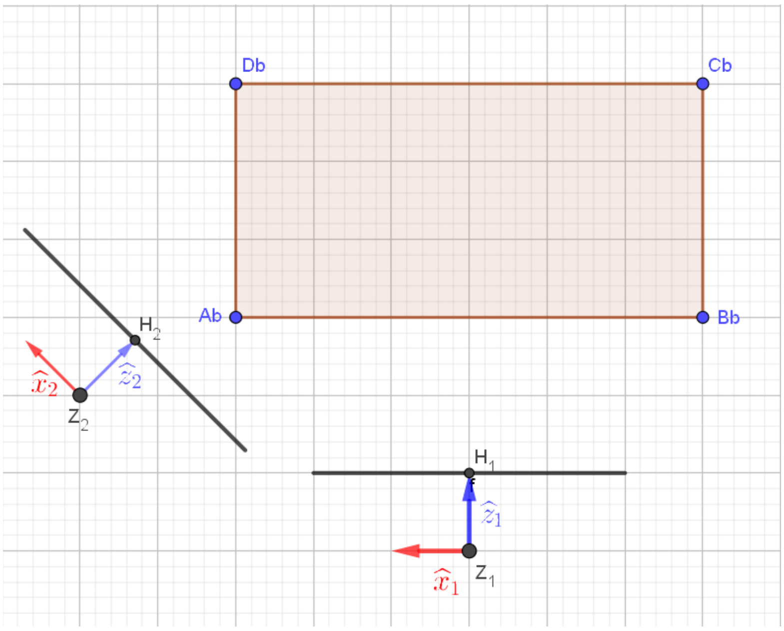

Abbildung 3: Konfiguration mit zwei Kameras – Ansicht von oben / Grundriss-Darstellung.

Mit der Zusatzinformation, dass die Projektionszentren der beiden Kameras dieselbe Höhe über der Standebene des Gebäudes, also dieselbe y-Koordinate besitzen, können wir der Abbildung 3 unmittelbar entnehmen, dass $(Z_2)_K = (5, 0, 2)$ gilt. Die Bestimmung einer AKG für π_2 ist etwas anspruchsvoller.[†] Man kann aber der Abbildung 3 einen Normalenvektor für π_2 entnehmen, nämlich den mit $\widehat{z}_2$ bezeichnet Vektor, dieser ist ein Vielfaches des Vektors ℓ_2 mit den Weltkoordinaten $(\ell_2)_K = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Hieraus ergibt sich (unter Berücksichtigung des Zusammenhangs zwischen Allgemeinen Koordinatengleichungen und Hesse'schen Normalengleichungen) eine AKG der Form

$$-1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + D = 0 \tag{1}$$

mit noch zu bestimmender Konstante D. Den Wert dieser Konstanten erhalten wir, wenn wir die Koordinaten des Punktes H_2 in die noch unfertige Gleichung 1 einsetzen. Der Abbildung entnehmen wir, dass $(H_2)_K = \left(5 - \frac{1}{\sqrt{2}},\, 0,\, 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ gilt, hieraus folgt nacheinander

$$-1 \cdot \left(5 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 1 \cdot \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + D = 0$$

[†] Eine alternative Berechnung verwendet die Transformationsmatrix

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

mit der Punkte der Ebene π_1 auf Punkte der Ebene π_2 abgebildet werden und ermittelt eine Zeilenmatrix $[L_2]$, welche die Koeffizienten einer AKG für π_2 enthält, so: $[L_2] = [L_1] \cdot T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot T^{-1}$.

und $D = 3 - \sqrt{2}$ sowie die fertige AKG

$$-1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 3 - \sqrt{2} = 0 \tag{2}$$

Für spätere Zwecke (Projektionsmatrix) fassen wir die Einträge der AKG wieder in einer Zeilenmatrix zusammen:

$$[L_2] = \left[-1,\ 0,\ 1,\ 3-\sqrt{2} \right].$$

Nun sind wir bereit für die Berechnung des Bildpunkts $\overline{Ab}'$, der auf der Bildebene π_2 der Kamera 2 durch Zentralprojektion des Punktes Ab aus dem Projektionszentrum Z_2 entsteht.

Zur Berechnung von $\overline{Ab}'$ stellen wir im ersten Schritt, analog zum Vorgehen in Aufgabe H 1 (vgl. auch Abbildung 3), eine Parametergleichung für die Gerade $Z_2 \vee A_b$ auf, welche den Punkt A_b mit dem Projektionszentrum Z_2 verbindet.

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5-3 \\ 0-(-2) \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2t \\ -2+2t \\ 3-1t \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}.$$

Zur Bestimmung des Schnittpunkts $(Z_2 \vee A_b) \wedge \pi_2$ müssen wir nun den Wert von t so bestimmen, dass sich nach Einsetzen der Komponenten $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2t \\ -2+2t \\ 3-1t \end{pmatrix}$ in die Gleichung 2 eine wahre Aussage ergibt:

$$\begin{aligned} & -1 \cdot (3 + 2t) + 1 \cdot (3 - 1t) + 3 - \sqrt{2} = 0 \\ \rightsquigarrow \quad & -3 \cdot t = \sqrt{2} - 3 \\ \rightsquigarrow \quad & t = -\tfrac{\sqrt{2}}{3} + 1 \end{aligned}$$

Einsetzen dieses Wertes für t in den Ausdruck $X(t) = \begin{pmatrix} 3+2t \\ -2+2t \\ 3-1t \end{pmatrix}$ ergibt die Weltkoordinaten des Bildpunktes $\overline{A_b}'$ auf dem Sensor π_2 der Kamera 2:

$$\left(\overline{A_b}'\right)_K = \begin{pmatrix} 5 - \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 2 + \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}.$$

Numerisch ausgewertet ergibt sich nach Rundung auf zwei Nachkommstellen das Koordinatentripel

$$\left(\overline{A_b}'\right)_K = \begin{pmatrix} 4.06 \\ -0.94 \\ 2.47 \end{pmatrix}.$$

Ein Vergleich mit Abbildung zeigt die Übereinstimmung mit diesem Rechenergebnis. *Hinweis: Bitte denken Sie daran, dass die positive x-Achse in dieser Darstellung nach links weist.*

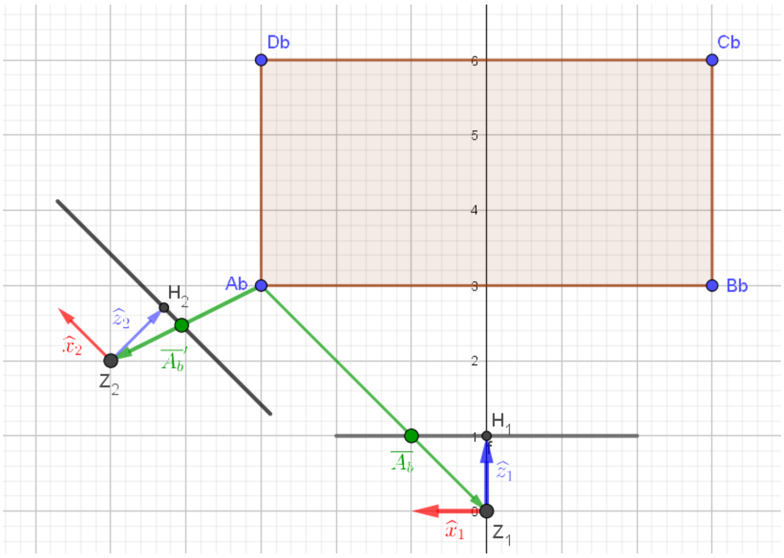

Abbildung 4: Bildpunkte von Ab auf Sensorebene 1 von Kamera 1 bzw. Sensorebene 2 von Kamera 2 – Grundriss-Darstellung.

(a) **Berechnen Sie** auf analoge Weise die Bildpunkte $\overline{Db}'$ sowie $\overline{Dr}'$ auf dem Sensor π_2ß, der Kamera 2 und vergleichen Sie Ihre Rechenergebnisse mit den Konstruktionsergebnissen, die Sie mithilfe von `Geogebra` erzielt haben.

Aufgabe H 4. *Projektionsmatrix für Kamera 2*

(a) **Stellen Sie** die Projektionsmatrix P' für die Kamera 2 **auf**. Wie das geht, steht in Aufgabe H 2.

(b) **Berechnen Sie** mithilfe von P' die Bildpunkte $\overline{Ab}'$ $\overline{Db}'$ und $\overline{Dr}'$ auf dem Sensor π_2ß, der Kamera 2 und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit denen der vorigen Aufgabe.

Hinweis: Arbeitsteilung ist bei den Aufgaben dieses Blattes möglich und durchaus erwünscht. Bitte bleiben Sie miteinander in Verbindung und besprechen Sie, wer was rechnet bzw. überprüft.