データと数理I
第7回

6章 固有値・固有ベクトル

武蔵野大学 データサイエンス学部データサイエンス学科
中西 崇文

授業評価アンケート

- ＜WEBアンケートURL＞
  https://musashino-u.e-qs.jp/
  ＜ID/PW＞
  MUSE/MUSCATのものと同様です。

基底

- ベクトル空間Vの$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots \boldsymbol{u}_N$が線形独立であり、$V$の任意の要素がこれらのベクトルの線形結合で表現できるとき、集合$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots \boldsymbol{u}_N\}$のことを$V$の基底とよぶ。また$N$を$V$の次元と呼ぶ。
  - $dimV = N$
  - $\boldsymbol{u}_i$を基底ベクトルと呼ぶ

復習

線形独立/線形従属

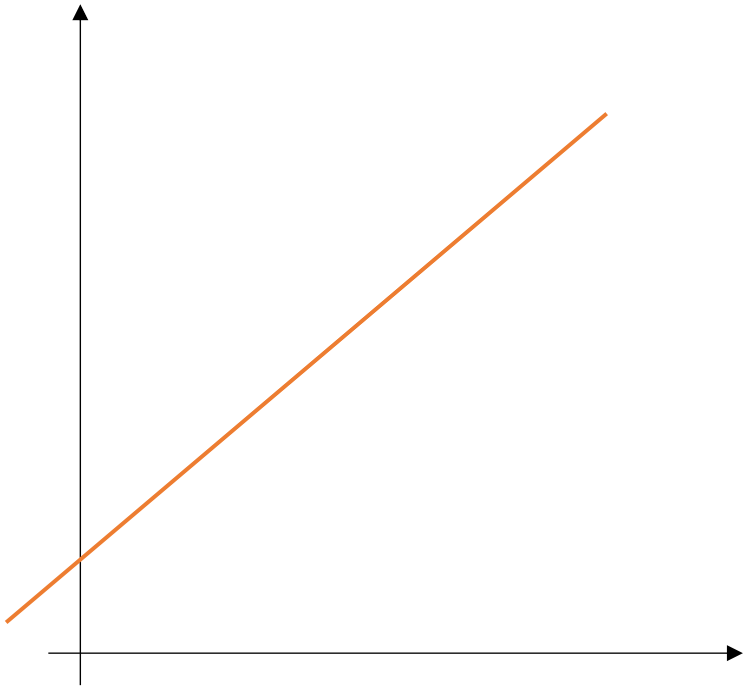
- N個のスカラー$a_1, a_2 \cdots, a_N$、N個のベクトル$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots \boldsymbol{u}_N$に対して$a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + a_N\boldsymbol{u}_N$を線形結合($Linear\ combination$)といい

$$a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + a_N\boldsymbol{u}_N = \boldsymbol{0}$$

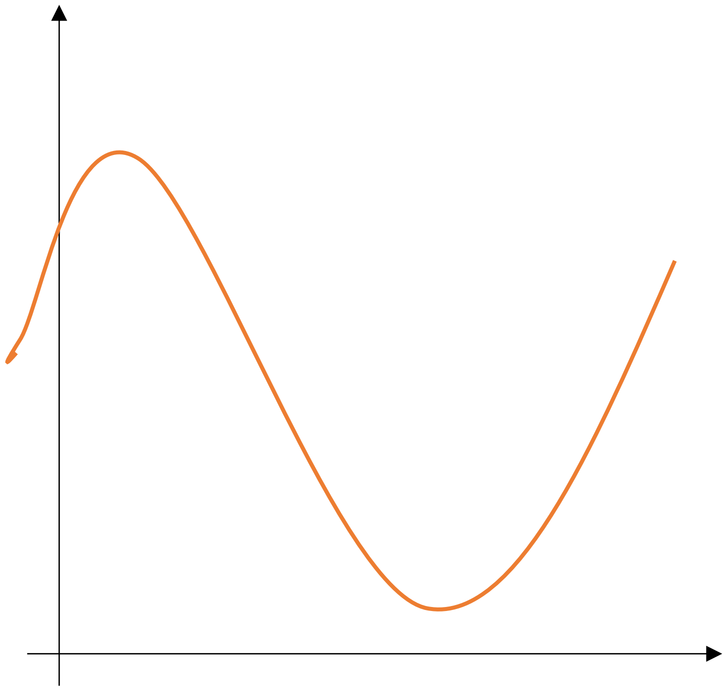
となる必要十分条件が$a_1 = a_2 = \cdots = a_N = 0$であるとき、$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots \boldsymbol{u}_N$は線形独立(linearly independent)といい、そうでない場合は線形従属(linearly dependent)であるという。

線形独立を一次独立、線形従属を一次従属という場合もある

線形・非線形

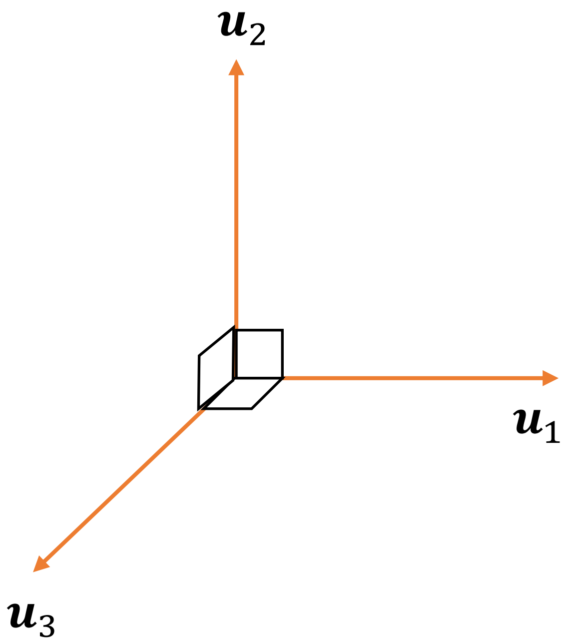


線形



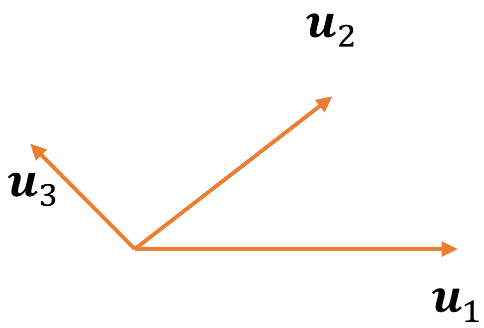
非線形

線形独立/線形従属のイメージ



$\boldsymbol{u}_3$を$a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2$で表すことは**できない**
$\boldsymbol{u}_2$を$a_1\boldsymbol{u}_1 + a_3\boldsymbol{u}_3$で表すことは**できない**
$\boldsymbol{u}_1$を$a_2\boldsymbol{u}_2 + a_3\boldsymbol{u}_3$で表すことは**できない**

線形独立



$\boldsymbol{u}_3$を$a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2$で表すことは**できる**
$\boldsymbol{u}_2$を$a_1\boldsymbol{u}_1 + a_3\boldsymbol{u}_3$で表すことは**できる**
$\boldsymbol{u}_1$を$a_2\boldsymbol{u}_2 + a_3\boldsymbol{u}_3$で表すことは**できる**

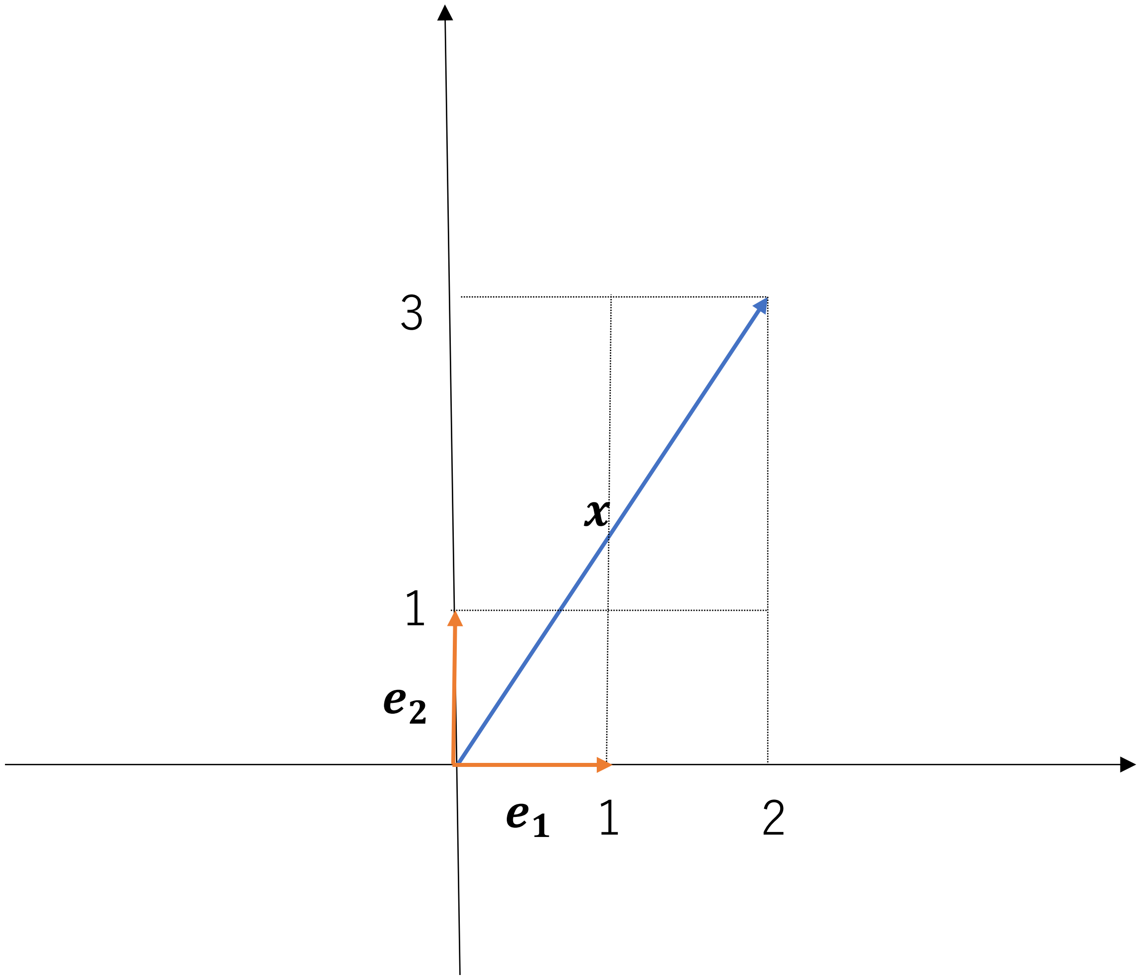
線形従属

復習

ベクトルの分解[1/2]

- $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ は$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ の単位ベクトルを用いて、
$$\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2$$
と表現できる

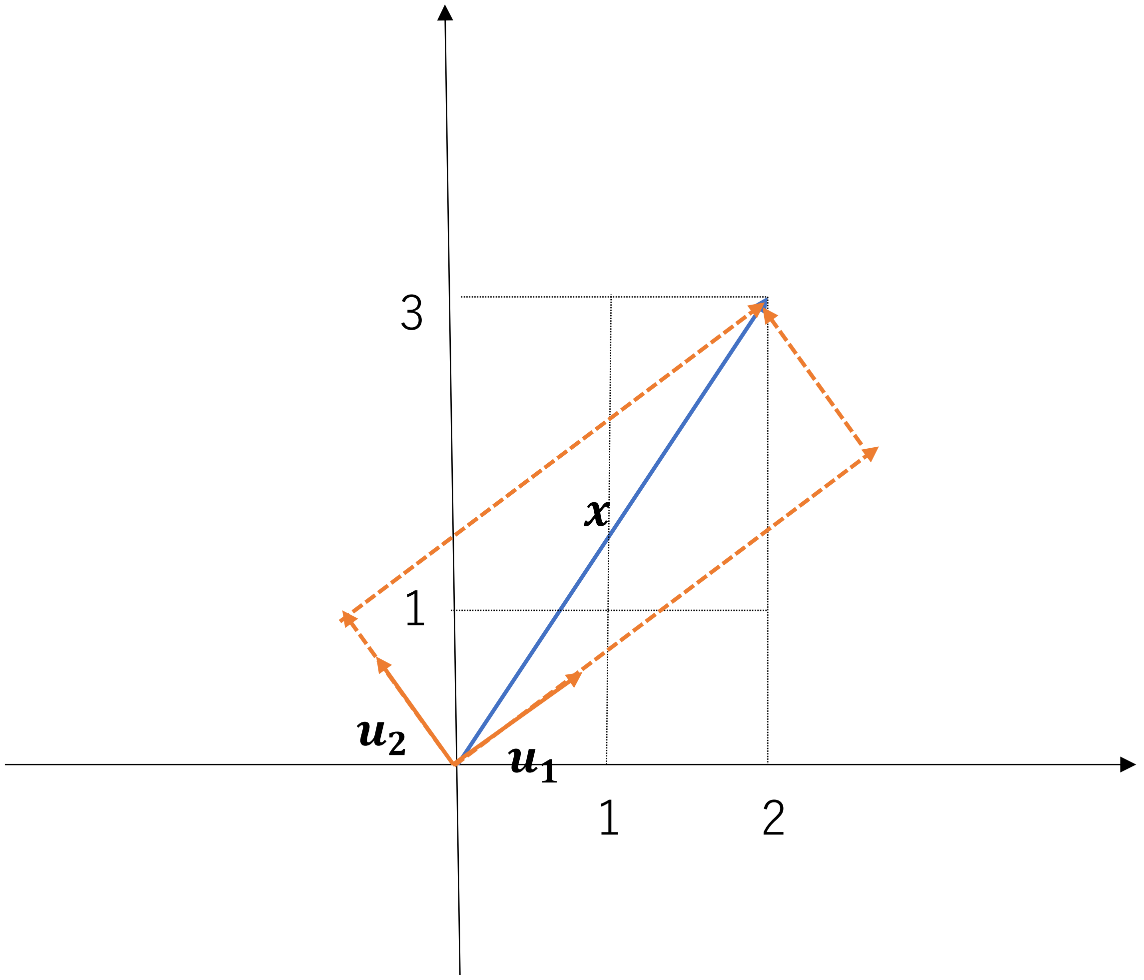
- これをベクトルの分解と呼ぶ



ベクトルの分解[2/2]

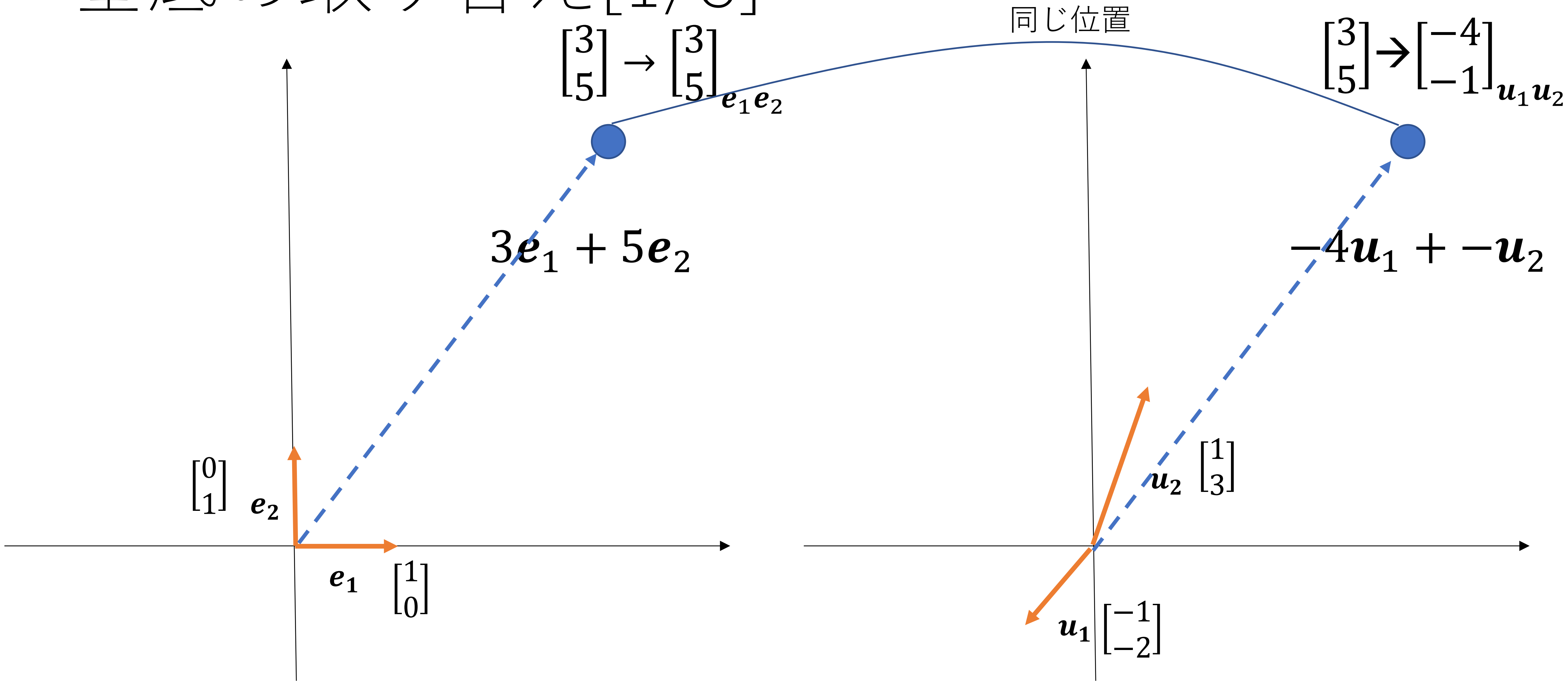
- $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ は他のベクトル $\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}$ でも分解可能
  - $x = \mathrm{a}_1\boldsymbol{u_1} + \mathrm{a}_2\boldsymbol{u_2}$ と表現できる

  - これを線形結合と呼ぶ



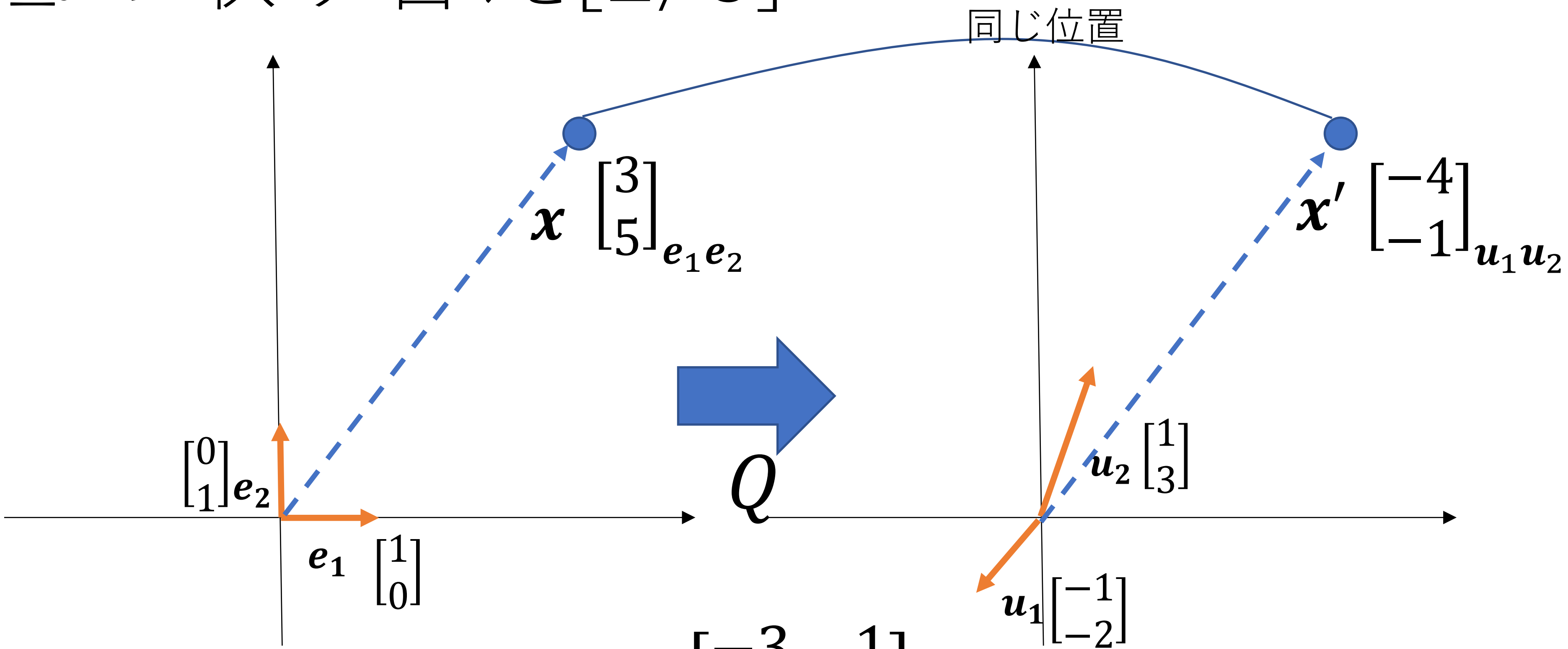
教科書p.163〜p.171参照

基底の取り替え[1/3]



教科書p.163〜p.171参照

基底の取り替え[2/3]



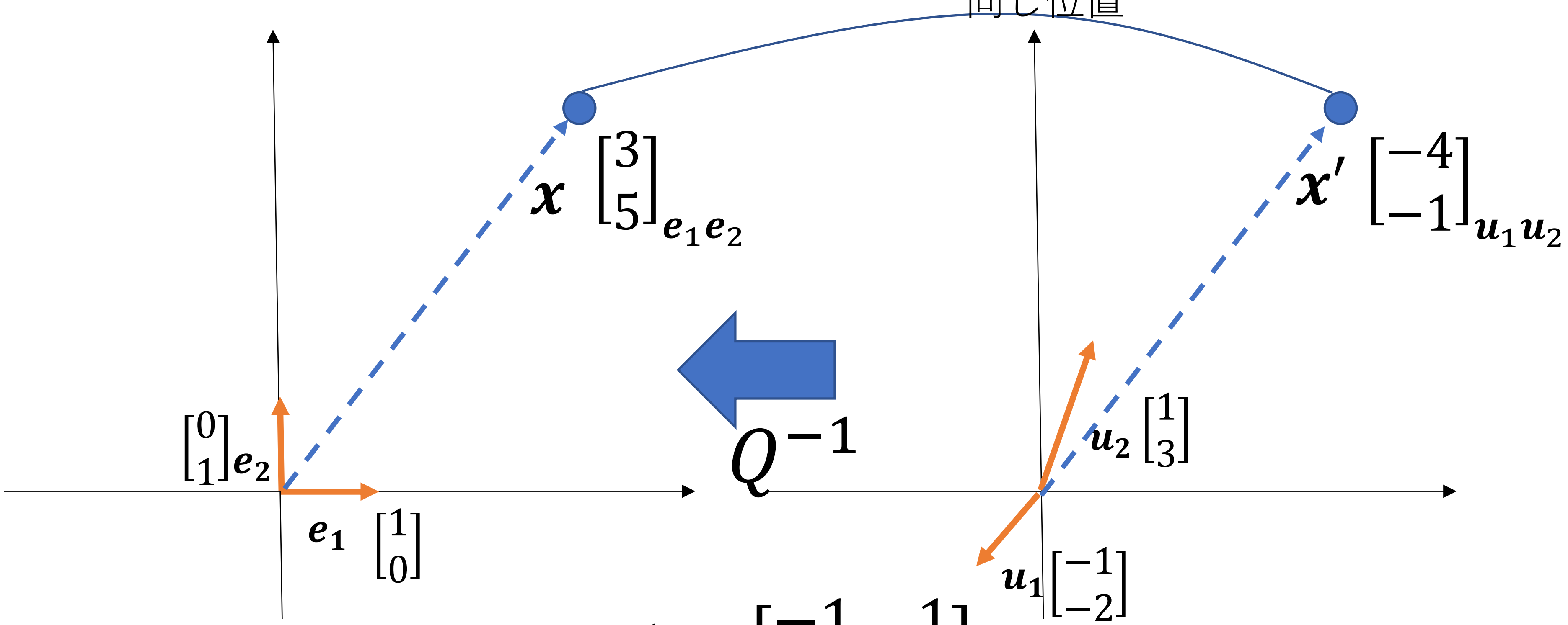
$$Q = \begin{bmatrix}-3 & 1\\-2 & 1\end{bmatrix}$$

基底の取り替えも線形変換で表現可

$$\boldsymbol{x}' = Q\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}-3 & 1\\-2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-9+5\\-6+5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4\\-1\end{bmatrix}$$

教科書p.163～p.171参照

基底の取り替え[3/3]



$$Q^{-1} = \begin{bmatrix}-1 & 1\\ -2 & 3\end{bmatrix}$$

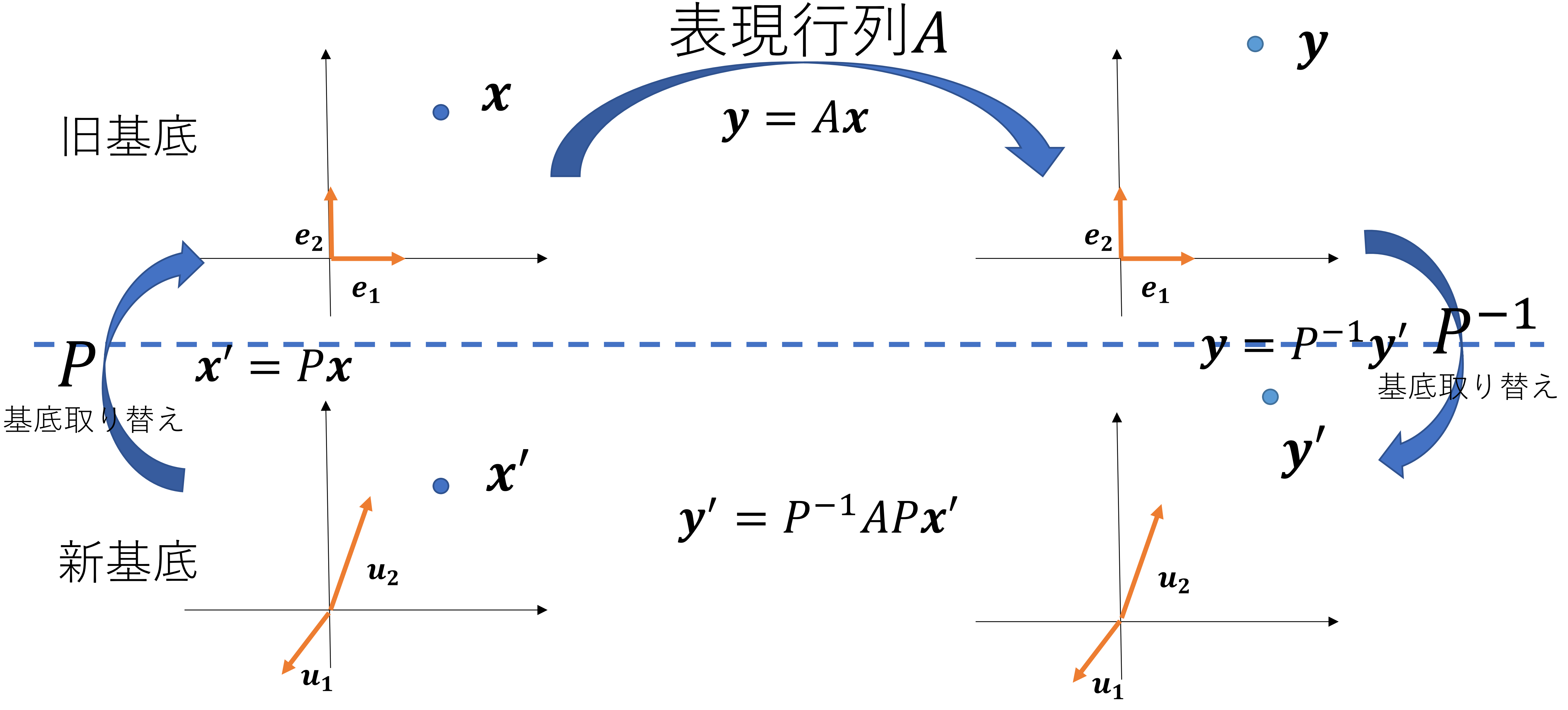
基底の取り替えも線形変換で表現可

$$\boldsymbol{x}' = Q^{-1}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}-1 & \\ -2 & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$$

Pythonで求めてみよう

教科書p.163～p.171参照

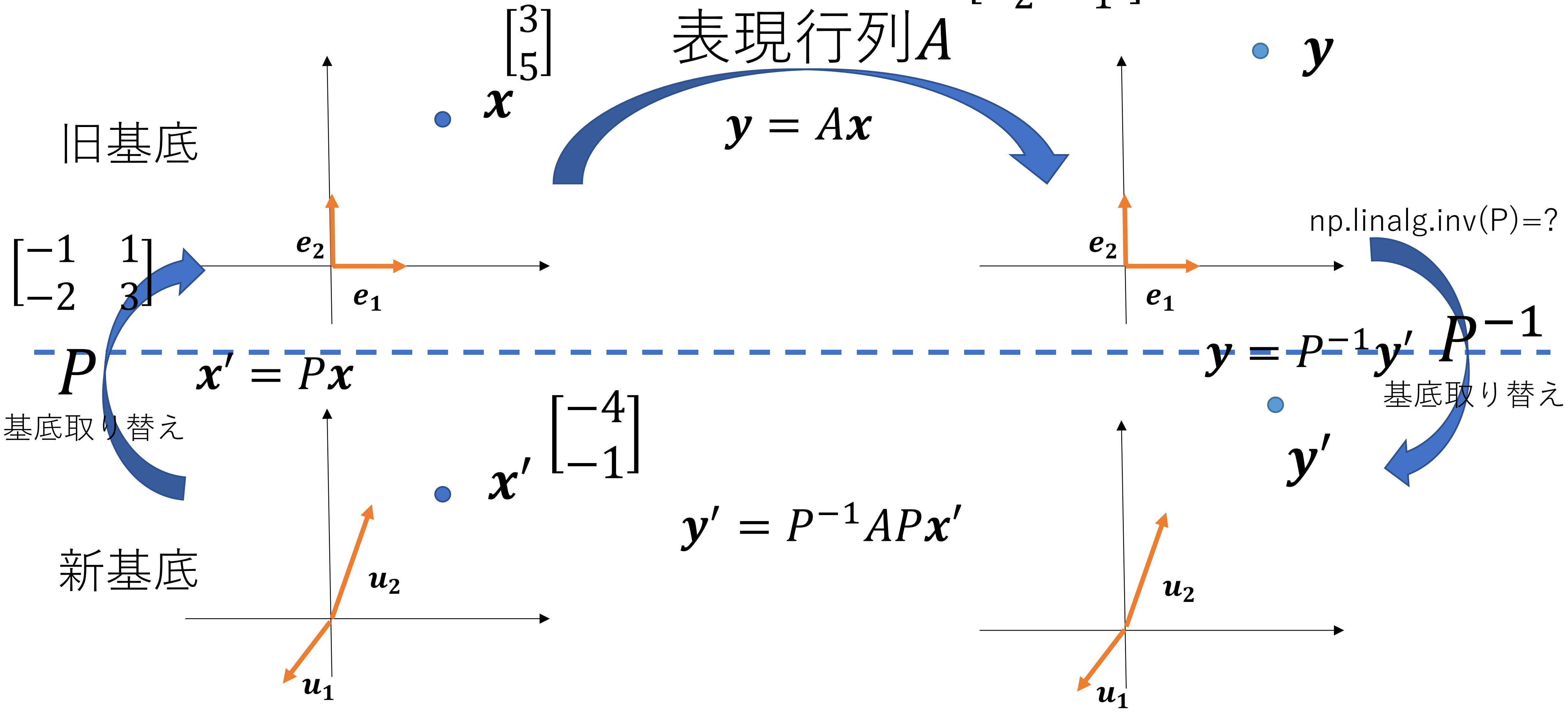
基底の取り替えをしながら線形写像



Pythonで計算してみよう

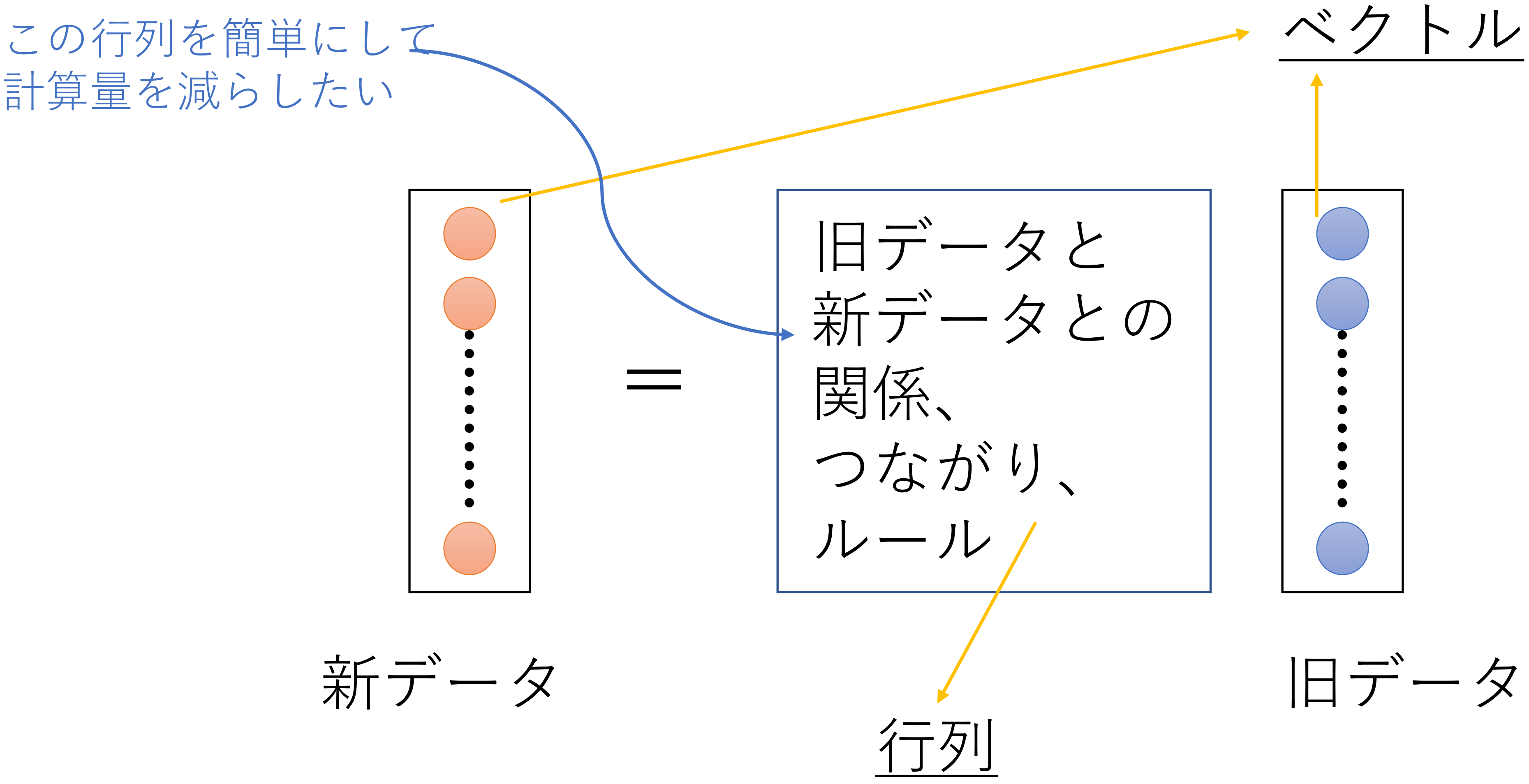
教科書p.163〜p.171参照

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$



線形写像/線型変換

旧データから新データへの変換(Transformation)を追求する学問



教科書p.171～p.173参照

対角行列

- 表現行列AをうまくPを定めることで、$P^{-1}AP$を簡単な行列にできないだろうか？
- -->対角行列

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

対角行列の性質

教科書p.171～p.173参照

Pythonでも計算してみよう

- 行列と行列の積が対角要素同士の掛け算で済む
  - $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times(-1) & 0 & 0 \\ 0 & 3\times(-2) & 0 \\ 0 & 0 & (-4)\times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$
- 行列と行列の積にも関わらず交換法則が成り立つ
  - $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$
- 逆行列は対角要素を逆数にしたもの
  - $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \dashrightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$
- 行列のn乗が計算しやすい
  - $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow A^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & -4^n \end{bmatrix}$

教科書p.173～p.178参照

対角化を考える

- 線形変換$f: R^n \to R^n$の表現行列Aを対角化することを考える
- $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$
- $AP = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$

- $P = [\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{x}_n]$ とおくと、
- $A\boldsymbol{x}_i = \lambda_i \boldsymbol{x}_i,$
  $\boldsymbol{x}_i \neq 0,\ i = 1,2,\ldots n$

教科書p.173～p.178参照

固有値、固有ベクトル

- 与えられた$n \times n$行列Aおよびスカラーλに対し、

  $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$　かつ　$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$

  となる$\boldsymbol{x}$が存在するとき、λをAの固有値(eigenvalue)という。
  また、この$\boldsymbol{x}$を固有値λに属するAの固有ベクトル(eigenvector)という。

教科書p.173〜p.178参照

固有値、固有ベクトルの求め方[1/2]

$$(A-\lambda E)^{-1}(A-\lambda E)\boldsymbol{x} = (A-\lambda E)^{-1}\cdot\boldsymbol{0}$$
$$E\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$
$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$
$$A\boldsymbol{x} = \lambda E\boldsymbol{x}$$
$$A\boldsymbol{x} - \lambda E\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$
$$(A-\lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

この逆行列があるとすると, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$となってしまう

$(A-\lambda E)$は逆行列を持ってはいけない。

逆行列を持たない条件？

行列式$|A-\lambda E|$=0を満たせばよい！

復習

行列式とは

- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$の行列式(determinant)は
- $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$　となる

- 行列式が0のときは逆行列が存在しない

- 行列式$|A| \neq 0$が行列Aの逆行列A^{-1}が存在する必要十分条件

教科書p.173～p.178参照

固有値、固有ベクトルの求め方[2/2]

- 固有方程式$|A-\lambda E|$=0の解λが固有値
- λを代入した$(A-\lambda E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$の非自明解が固有ベクトル

教科書p.173～p.178参照

具体的に固有値、固有ベクトルを求める[1/3]

- $A=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 4 & 2\end{bmatrix}$の固有値、固有ベクトルを求める。

- $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 5\\ 4 & 2-\lambda\end{vmatrix}$
  $=(1-\lambda)(2-\lambda)-20=\lambda^2-3\lambda-18=(\lambda+3)(\lambda-6)=0$
- $(\lambda+3)(\lambda-6)=0$
- λ=-3,6
- よって、 Aの固有値は-3,6

皆本晃弥, “基礎からすっきりわかる線形代数, “ 近代科学社, 2019 より問題

教科書p.173～p.178参照

具体的に固有値、固有ベクトルを求める[2/3]

- 固有値λ=-3のとき
  - $(A-\lambda E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$は
    $\begin{bmatrix} 1-\lambda & 5 \\ 4 & 2-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$=0
    $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$=0より
    $4x_1+5\ x_2$=0
  - $x_1=5m, x_2=-4m$ (mは実数)

  - よって、固有値λ=-3に属するAの固有ベクトルは$m\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$ (mは実数)

教科書p.173～p.178参照

具体的に固有値、固有ベクトルを求める[3/3]

- 固有値λ=6のとき
  - $(A-\lambda E)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$は
    $\begin{bmatrix} 1-\lambda & 5 \\ 4 & 2-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$=0
    $\begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$=0より
    x_1-x_2=0
  - $x_1=m, x_2=m$ (mは実数)

  - よって、固有値λ=6に属するAの固有ベクトルは$m\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (mは実数)

注意：固有値は大きさは定まっていないが、方向が定まっている

教科書p.173～p.178参照

Pythonで計算してみよう

- $A=\begin{bmatrix}1 & 5\\4 & 2\end{bmatrix}$の固有値、固有ベクトル
  - 固有値λ=6に属するAの固有ベクトルは$m\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ (mは実数)
  - 固有値λ=-3に属するAの固有ベクトルは$m\begin{bmatrix}5\\-4\end{bmatrix}$ (mは実数)

- 固有値、固有ベクトルを求める関数として、numpy.linalg.eig(A)がある

教科書p.178～p.184参照

対角化可能

- $n \times n$行列(正方行列)Aが適当な正則行列Pによって
- $$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$
- と変形できるとき、 Aは対角化可能(diagonalizable)であるという。このときPをAの対角化行列(matrix for diagonalization)という

教科書p.178～p.184参照

対角化可能性

- $n\times n$行列(正方行列)Aが対角化可能であるための必要十分条件は線形独立な$\boldsymbol{n}$個のAの固有ベクトルが存在することである。

- $n\times n$行列(正方行列)Aが適当な正則行列$P=[\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\ldots\boldsymbol{p}_n]$によって、

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n\end{bmatrix}$$

と変形できるとき、$\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_n$はすべて$A$の固有値であり、$\boldsymbol{p}_i(i=1,2,\ldots,n)$は固有値$\lambda_i$に属する固有ベクトルである。

教科書p.178～p.184参照

固有値とその固有ベクトルの関係

- スカラー$\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$が$n \times n$行列(正方行列)$A$の相異なる固有値だとすると、それぞれに属する固有ベクトル$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \cdots \boldsymbol{p}_n$は線形独立である。

- $n \times n$行列(正方行列)Aがn個の固有値$\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$をもてば$A$は対角化可能、正則行列$P$によって、

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

となる。

教科書p.178～p.184参照

Pythonで計算してみよう

- $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 4 & 6 & 4 \\ -5 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

  を対角化し、そのときの対角化行列を求めてみよう。

皆本晃弥, “基礎からすっきりわかる線形代数, “ 近代科学社, 2019 より問題

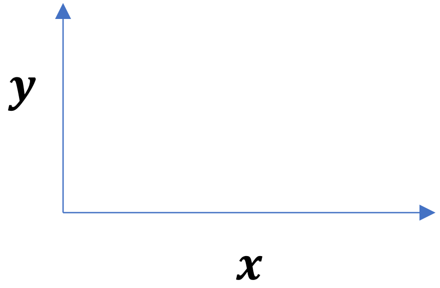
教科書p.178～p.184参照

対角化とはつまり

- 対角化とは、線形変換fの表現行列Aについて、新しい基底として表現行列Aの固有ベクトルの組を取ることで、線形変換fの表現行列を固有ベクトルと対となる固有値を対角成分とした対角行列にすること

直交

- ベクトル$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$が内積$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0$を満たすとき、ベクトル$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$は直交する(orthogonal)という



$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| cos\theta$$

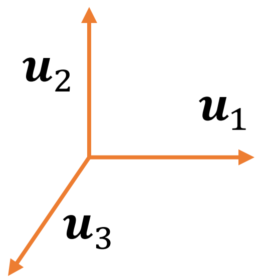
$cos 90° = 0$だから

$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0$

正規直交基底

- ベクトル空間Vの$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots \boldsymbol{u}_N$が線形独立であり、$V$の任意の要素がこれらのベクトルの線形結合で表現できるとき、集合$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots \boldsymbol{u}_N\}$のことを$V$の基底という。

- 上記の基底となる$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots \boldsymbol{u}_N$のどの2つも互いに直交し、かつ$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots \boldsymbol{u}_N$それぞれのノルム が1に等しいとき正規直交基底(orthonormal basis)であるという



正規直交基底だと何がうれしいか？[1/2]

- 2つのベクトル$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$のとき基底が$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$であれば、
  $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + x_3\boldsymbol{u}_3$,
  $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{u}_1 + y_2\boldsymbol{u}_2 + y_3\boldsymbol{u}_3$と表せる。

正規直交基底だと何がうれしいか？[2/2]

- $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + x_3\boldsymbol{u}_3$,
  $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{u}_1 + y_2\boldsymbol{u}_2 + y_3\boldsymbol{u}_3$のとき、
- 内積は
- $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = (x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + x_3\boldsymbol{u}_3)\,(y_1\boldsymbol{u}_1 + y_2\boldsymbol{u}_2 + y_3\boldsymbol{u}_3)$

$$
\begin{aligned}
&= x_1y_1\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1 + x_2y_1\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_1 + x_3y_1\boldsymbol{u}_3\boldsymbol{u}_1 \\
&\qquad + x_1y_2\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2 + x_2y_2\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_2 + x_3y_2\boldsymbol{u}_3\boldsymbol{u}_2 \\
&\qquad + x_1y_3\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_3 + x_2y_3\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_3 + x_3y_3\boldsymbol{u}_3\boldsymbol{u}_3
\end{aligned}
$$

ごっちゃり

もし、基底$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$が正規直交基底だとしたら、

$$\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3\boldsymbol{u}_3 = 1$$

$$\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_3 = 0$$

なので

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

すっきり

正規直交基底では

- 正規直交基底では、内積やベクトルの大きさの計算が標準基底(軸上の単位ベクトルからなる基底)と同じように計算ができる

つまり計算が楽になる！

教科書p.178～p.184参照

対称行列

T：転置

- $A = A^T$を満たす正方行列を対象行列$(symmetric\ matrix)$という。

例)

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

結構データをみてみると対称行列になっていることが多い

教科書p.178～p.184参照

対称行列の固有ベクトルの性質

- 対称行列の異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する
  - 固有ベクトルの大きさを1にすれば固有ベクトルを正規直交基底にすることができる

教科書p.178～p.184参照

Pythonで計算してみよう

- $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$
  を対角化し、そのときの対角化行列を求めてみよう。
- Aの異なる固有値に属する固有ベクトルは直交することを確かめてみよう。
- 正規直交基底を並べて作った行列を直交行列(orthogonal matrixと呼ぶ)

皆本晃弥, “基礎からすっきりわかる線形代数, “ 近代科学社, 2019 より問題

教科書p.178～p.184参照

対称行列の対角化

- $n \times n$対称行列Aがn個の固有値$\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$をもてば、直交行列$P$によって、

$$P^T A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

が成り立つ。

逆行列ではなく、転置行列であることに注目

教科書p.178～p.184参照

固有値分解(スペクトル分解)

- 対称行列Aを

$$A = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} P^T$$

とすることを、対称行列Aの固有値分解(スペクトル分解)($spectral\ decomposition, eigenvalue\ decomposition$)という。

教科書p.178～p.184参照

Pythonで計算してみよう

- $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$について対角化したものが$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$であるが、$P^T AP$が同じ値になることを確かめてみよう。

教科書p.185～p.188参照

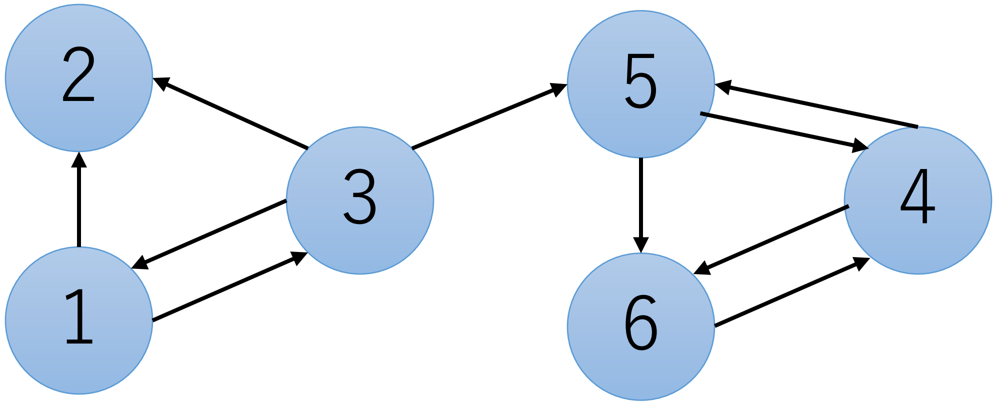
Webページの重要度をどうきめるのか？PageRank(Google)

- 検索エンジン
  - 検索された各Webページは単にキーワードがマッチしただけでなく、各ページの重要度を計算し、その重要度が高いほど上位にランキングされるようになっている
  - 重要度→PageRank(Google, Sergey Brin & Larry Page)

- PageRankの考え方
  - 多くの重要度の高いページからリンクされているページは重要度が高いページである
    - どれだけリンクされているか
    - そのリンクされたページのPageRankはどれくらいか

教科書p.185～p.188参照

Webページとリンクの関係



$$G = (P, L),$$
$$P = \{1,2,3,4,5,6\},$$
$$L = \{(1,2),(1,3),(3,1),(3,2),(3,5),(4,5),(4,6),(5,4),(5,6),(6,4)\}$$

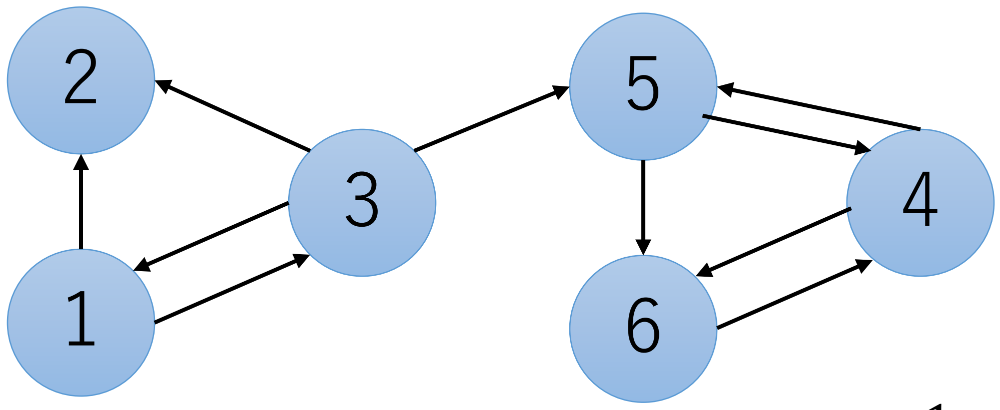
Webページiから出るリンク数をO_iとして、WebページjのPageRank r_jは次のように表せる

$$r_j = \sum_{(i,j)\in L} \frac{r_i}{O_i}$$

Amy N.Langvill, Carl D.Meyer著, 岩野和生, 黒川利明, 黒川洋訳, Google PageRankの数理ー最強検索エンジンのランキング手法を求めてー, 共立出版, 2009

教科書p.185～p.188参照

PageRankの求め方



$$r_1 = \frac{r_3}{3}$$
$$r_2 = \frac{r_1}{2} + \frac{r_3}{3}$$
$$r_3 = \frac{r_1}{2}$$
$$r_4 = \frac{r_5}{2} + \frac{r_6}{1}$$
$$r_5 = \frac{r_3}{3} + \frac{r_4}{2}$$
$$r_6 = \frac{r_4}{2} + \frac{r_5}{2}$$

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \end{bmatrix}$$

教科書p.185～p.188参照

実は固有値1の固有ベクトルがPageRank?

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \end{bmatrix}$$

固有値・固有ベクトルの定義
与えられた$n \times n$行列Aおよびスカラーλに対し、

$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$

となる$\boldsymbol{x}$が存在するとき、λをAの固有値(eigenvalue)という。また、この$\boldsymbol{x}$を固有値λに属するAの固有ベクトル(eigenvector)という。

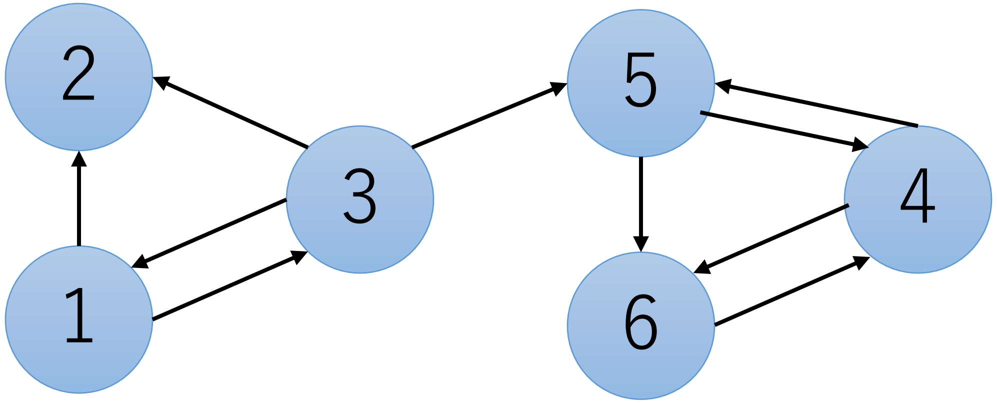
$$\boldsymbol{r} = A\,\boldsymbol{r}$$

$\lambda = 1$

固有値1の固有ベクトルを求めればよい

教科書p.185～p.188参照

Pythonで計算してみよう



$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \end{bmatrix}$$

実行結果例）

```
# 固有値1に対応する(lmの2番目(つまりindex=1))固有ベクトル
v[:,1].reshape(-1,1)

array([[-8.89913143e-16],
       [-4.27609337e-16],
       [-7.27716498e-16],
       [-7.42781353e-01],
       [-3.71390676e-01],
       [-5.57086015e-01]])
```

(注意)
導出した固有ベクトルの成分すべてマイナスの場合
固有ベクトルは向きだけ決まって、大きさはきまっていない。
なので、マイナスをかけて全て正にしてもかまわない。

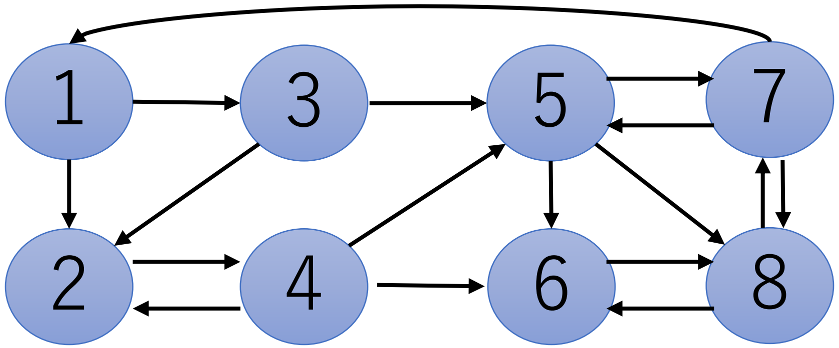
ランダムサーファーモデルによるPageRankの拡張

- 基本のPageRankではユーザはリンクを辿り続ける行動のみを十分な回数を行った後のそのWebページを訪問中である確率とみることができる→リンクがなくても他のWebページいくよね？
  - 行動1:
    - 現在、Webページiを訪問中であり、 Webページiにはリンクがないとする。この場合。リンクを辿る代わりに、次のページjにそれぞれ$\frac{1}{n}$(nは全ページ数)で遷移する。
    - これは、Webブラウザのブックマーク、URLの入力等、直接任意のページに行くこと。
  - 行動2：
    - 現在、 Webページiを訪問中であり、 Webページiにはリンクがあるとする。この場合、確率dでWebページiからリンクを無作為に1つ選びそのページに遷移するだけでなく、確率$(1-d)$でリンクを辿らず、任意のページに遷移する。
    - 後者はWebブラウザのブックマーク、URLの入力等、直接任意のページに行くこと。
    - PageとBrinは$d = 0.85$を提案。

原田史子, 島川博光, 線形代数学に基づくデータ分析法, 共立出版, 2016

個人課題

1. 下記のWebページのリンクの張られ方から、固有値1に属する固有ベクトルを求めることで、各ページのPagerankを求めてみよう。



Austin, David. "How Google finds your needle in the web’s haystack." *American Mathematical Society Feature Column* 10.12 (2006).

2. データと数理Iで学修したことで、今後自分の未来創造pjのテーマに役立てられそうなことを具体的な線形代数の用語を使ってA4 1枚でまとめてみよう。
    - 授業の感想、要望等も盛り込んでください。(これについては成績には入りませんので、遠慮なく授業の要望をお知らせください)

- 1についてはipynbファイルを提出すること、2についてはdocxファイルかpdfファイルを提出すること(つまり、一人2ファイル提出すること。)
- Google Classroomで提出のこと(締切はGoogle Classroom参照)