3章 行列の基本/連立1次方程式

武蔵野大学 データサイエンス学部データサイエンス学科
中西 崇文

連立1次方程式

解き方がわからない方は教科書p.62参照

- 下記の連立1次方程式を解いてみよう

$$
\begin{aligned}
4x - 7y + 4z &= 1 \\
x + y - z &= 6 \\
2x + 5y - 8z &= 3
\end{aligned}
$$

石井俊全, “意味がわかる線形代数,” ベレ出版, 2011.　より問題

連立1次方程式を解いてみる

$$4x - 7y + 4z = 1 \quad \cdots\cdots ①$$
$$x + y - z = 6 \quad \cdots\cdots ②$$
$$2x + 5y - 8z = 3 \quad \cdots\cdots ③$$

②式×2-③式

$$\begin{array}{r} 2x + 2y - 2z = 12 \\ 2x + 5y - 8z = 3 \\ \hline -3y + 6z = 9 \end{array} \quad \cdots\cdots ④$$

④式 $\times -\frac{1}{3}$

$$y - 2z = -3 \quad \cdots\cdots ④'$$

②式×4-①式

$$\begin{array}{r} 4x + 4y - 4z = 24 \\ 4x - 7y + 4z = 1 \\ \hline -11y + 8z = 23 \end{array} \cdots\cdots ⑤$$

④'式×4-⑤式

$$\begin{array}{r} 4y - 8z = -12 \\ -11y - 8z = \quad 23 \\ \hline -7y \qquad = -35 \\ y \qquad = \quad 5 \end{array}$$

④'式にyを代入

$$5 - 2z = -3$$
$$z = \quad 4$$

②式にy,zを代入

$$\mathrm{x} + 5 - 4 = 6$$
$$x \qquad = 5$$

代入法と消去法を駆使して解いていた

もっと華麗に書きたい
アルゴリズムとして書きづらくない？
システマティックに解きたい！

答え
$\underline{x = 5, y = 5, z = 4}$

行列とベクトルで綺麗に表現してみる

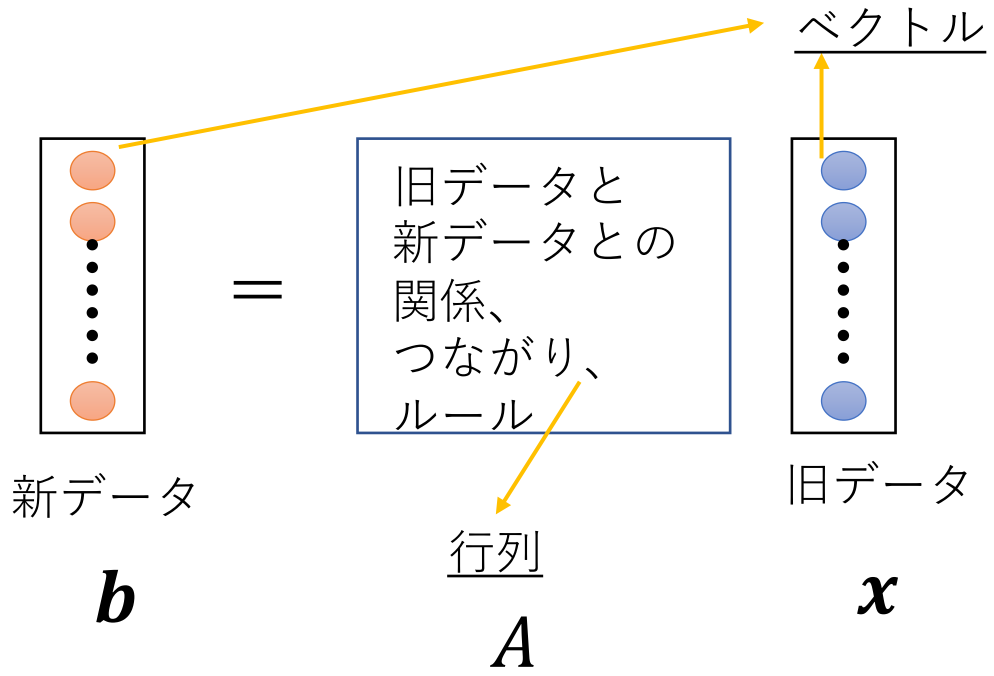
$$4x - 7y + 4z = 1$$
$$x + y - z = 6$$
$$2x + 5y - 8z = 3$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -7 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -8 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

行列　ベクトル

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

連立1次方程式は、
「新データ」と「関係、つながり、ルール」が
分かっていたときに「旧データ」を求めること



教科書p63～p.65参照

行列とベクトルで綺麗に展開してみる

- $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$
  - 左辺のAが気になる

ベクトル・行列ではなく単なる
スカラーの場合を思い出して…

$$3x = 6$$

$$\frac{1}{3}\times 3x = \frac{1}{3}\times 6$$

$$\frac{1}{3} = 3^{-1}$$

$$3^{-1}\times 3x = 3^{-1}\times 6$$

1になるように逆数をかける

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

というA^{-1}が分かれば解けるということにしたい

逆行列

教科書p.65～p71を参照してください

単位行列

- 単位行列(Identity matrix, Unit matrix)とは、対角成分が1で、それ以外の成分が0である正方行列を単位行列という。
- すなわち、$N\times N$の行列Eが下記を満たすとき単位行列という
  - $E_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases} \quad (i,j=1,2,\ldots,\mathrm{N})$
- つまり、

2×2の単位行列

$$E=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

3×3の単位行列

$$E=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

教科書p.65～p71を参照してください

単位行列の性質

- 単位行列とベクトルの積
  - $\boldsymbol{E}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$
  - 例)
    - $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

行列の掛け算の仕方は
この授業の後半でやります

- 単位行列と行列の積
  - $EA = AE = A$
  - 例)
    - $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -7 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -7 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -7 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -8 \end{bmatrix}$

教科書p.65～p71を参照してください

逆行列

- 行列A, Bについて、$AB = BA = E$となるとき、行列Bは行列Aの逆行列といい、 $B = A^{-1}$で表される。

- つまり、
  - $AA^{-1} = A^{-1}A = E$

- n×n行列Aに逆行列が存在するとき、 Aを正則行列(regular matrix)という
  - n×n行列であること(行・列ともに同じサイズである)➔正方行列
  - 逆行列が存在する➔行列式が0ではない(後で示す)

教科書p.65～p71を参照してください

単位行列・逆行列の定義、性質から

$$4x - 7y + 4z = 1$$
$$x + y - z = 6$$
$$2x + 5y - 8z = 3$$

$$\Downarrow$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -7 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -8 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

両辺に逆行列を掛けて

$$A^{-1}A\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$$

$E\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$（逆行列の定義より）

$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$（単位行列の性質より）

教科書p.65～p71を参照してください

逆行列を求める(2×2行列の場合)

- $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$の逆行列$A^{-1}$は
- $A^{-1}=\dfrac{1}{\boxed{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$となる

行列式(determinant)　$|A|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

行列式が0のときは逆行列が存在しない

$\boxed{\text{行列式}|A|\neq 0\text{が行列}A\text{の逆行列}A^{-1}\text{が存在する必要十分条件}}$

逆行列をもつ行列を正則行列と呼ぶ

行列式とは

教科書p.71～p.83を参照

- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$の行列式(determinant)は
- $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$　となる

- 行列式が0のときは逆行列が存在しない

- 行列式$|A| \neq 0$が行列Aの逆行列A^{-1}が存在する必要十分条件

サラスの公式

教科書p.71～p.83を参照

- 3×3行列の場合の行列式の求め方

- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$$|A| = \underline{a_{11}a_{22}a_{33}} + \underline{a_{12}a_{23}a_{31}} + \underline{a_{13}a_{21}a_{32}} - \underline{a_{13}a_{22}a_{31}} - \underline{a_{12}a_{21}a_{33}} - \underline{a_{11}\,a_{23}a_{32}}$$

教科書p.71～p.83を参照

サラスの公式を使って行列式を導出

- $A = \begin{bmatrix} 4 & -7 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -8 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} |A| &= 4\times1\times(-8) + (-7)\times(-1)\times2 + 4\times1\times5 - 4\times1\times2 - (-7)\times1\times(-8) - 4\times(-1)\times5 \\ &= (-32) + 14 + 20 - 8 - 56 + 20 = -42 \end{aligned}$$

行列式$|A| \neq 0$のため、逆行列が存在する

教科書p.71～p.83を参照

余因子展開

$$\begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$の行列式$|A|$ は

$$|A| = (-1)^{1+1}\, a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\, a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\, a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{2+1}\, a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}\, a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}\, a_{13} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+1}\, a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}\, a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}\, a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

教科書p.71～p.83を参照

Pythonで計算してみよう

- $A = \begin{bmatrix} 4 & -7 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -8 \end{bmatrix}$
- 行列式$|A|$はnumpy.linalg.det(A)で求めることができる。

教科書p.75～p.84を参照

行列式の性質(転置行列の行列式と等しい)

- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$のとき、$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

(転置行列)

- $|A| = |A^T|$

教科書p.75～p.84を参照

行列式の性質(多重線形性)

①
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}+b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i}+b_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni}+b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

②
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ca_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ca_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ca_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \mathrm{c} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

教科書p.75～p.84を参照

行列式の性質(交代性)

- $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= -\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

教科書p.75～p.84を参照

行列式の性質(単位行列の行列式)

- $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$

- $|E| = 1$

教科書p.75～p.84を参照

行列式の性質(三角行列の行列式)

- $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}$

教科書p.75～p.84を参照

行列式の性質(積)

① $|AB| = |A||B|$

② $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

教科書p.84～p89を参照

逆行列の求め方
(ガウスの消去法)

- $A = \begin{bmatrix} 4 & -7 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -8 \end{bmatrix}$の逆行列$A^{-1}$を求める

- 単位行列$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$と列で結合する

- $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -7 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

行をスカラー倍して
他の行を引いたり足したりすることで、
左側を単位行列にする。
そのとき、右側が逆行列になる。

後ほど詳しく述べる

Pythonで計算してみよう

- $A = \begin{bmatrix} 4 & -7 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -8 \end{bmatrix}$

- 行列A^{-1}はnumpy.linalg.inv(A)で求めることができる。

Pythonで計算してみよう

- $$\begin{gathered} 4x - 7y + 4z = 1 \\ x + y - z = 6 \\ 2x + 5y - 8z = 3 \end{gathered}$$

- $\rightarrow A = \begin{bmatrix} 4 & -7 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -8 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$
- 行列式$|A| \neq 0$なので、$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$で連立1次方程式の解が求まる
  - ただし、行列とベクトルの積はPythonではnumpy.dot(A,b)を使用する
- つまり、np.dot(np.linalg.inv(A),b)

教科書p.84～p89を参照

ガウスの消去法で連立1次方程式を解く

- $$\begin{aligned} 2x + y - z &= 0 \\ x - y + 3z &= 12 \\ -x + 5y + 2z &= -1 \end{aligned}$$
- $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ -1 \end{bmatrix}$
- $A, \boldsymbol{b}$を列で結合する $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 12 \\ -1 & 5 & 2 & -1 \end{array}\right]$

田中聡久, “信号・データ処理のための行列とベクトル,” コロナ社, 2019.　より問題

教科書p.84～p89を参照

ガウスの消去法で連立1次方程式を解く

- 1行目-2×2行目で2行目を置き換る
  - $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 12 \\ -1 & 5 & 2 & -1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & -24 \\ -1 & 5 & 2 & -1 \end{array}\right]$
- 1行目+2×3行目で3行目を置き換える
  - $\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & -24 \\ -1 & 5 & 2 & -1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & -24 \\ 0 & 11 & 3 & -2 \end{array}\right]$

教科書p.84～p89を参照

ガウスの消去法で連立1次方程式を解く

- 2行目×11-3行目×3で3行目を置き換える
  - → $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & -24 \\ 0 & 11 & 3 & -2 \end{array}\right]$ → $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & -24 \\ 0 & 0 & -86 & -258 \end{array}\right]$
- あとは
  - (-86)z=(-258), z=3,
  - 3y-21=24, y=-1
  - 2x-1-3=0, x=2

前進消去
後退代入

教科書p.84～p89を参照

前進消去をプログラムする

- $$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right]$$

Ab = np.concatenate((A, b), axis=1)

方針：行階段形にしたい
→行のスカラー倍、行同士の足し算引き算でa_{21}, a_{31}, a_{32}を0にしたい

① まずa_{21}, a_{31}を0にする
 - 2行 − 1行×$\frac{a21}{a_{11}}$
 - 3行 − 1行×$\frac{a21}{a_{11}}$

② a_{32}を0にする
 - 3行 − 2行×$\frac{a32}{a_{22}}$

教科書p.84～p89を参照

後退代入をプログラムする

- $\begin{bmatrix} a_{11}' & a_{12}' & a_{13}' & \bigg| & b_1' \\ 0 & a_{22}' & a_{23}' & \bigg| & b_2' \\ 0 & 0 & a_{33}' & \bigg| & b_3' \end{bmatrix}$

方針：対角要素(a_{11}', a_{22}', a_{33}')を1にして、a_{12}', a_{13}', a_{23}'を0にしたい
→行のスカラー倍、行同士の足し算引き算でやる

① まずa_{33}を1にする
- 3行×$\frac{1}{a_{33}}$

② a_{23}', a_{13}'を0にする
- 2行 − 3行×a_{23}
- 1行 − 3行×a_{13}

③ a_{22}を1にする
- 2行×$\frac{1}{a_{22}}$

③ a_{12}を0にする
- 1行 − 2行×$\frac{a12}{a_{22}}$

ガウス消去法をプログラムする

教科書p.84～p89を参照

- $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & | & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & | & b_3 \end{bmatrix}$

① まずa_{11}を1にする
- 1行×$\frac{1}{a_{11}}$

② a_{21}, a_{31}を0にする
- 2行$-$1行×a_{21}
- 3行$-$1行×a_{31}

③ a_{22}を1にする
- 2行×$\frac{1}{a_{22}}$

④ a_{12}, a_{32}を0にする
- 1行$-$2行×a_{12}
- 3行$-$2行×a_{32}

⑤ a_{33}を1にする
- 3行×$\frac{1}{a_{33}}$

④ a_{13}, a_{23}を0にする
- 1行$-$3行×a_{13}
- 2行$-$3行×a_{23}

Ab = np.concatenate((A, b), axis=1)

方針：Aを単位行列にしたい
→行のスカラー倍、行同士の足し算引き算でa_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{23}, a_{31}, a_{32}を0にしたい

教科書p.89～p.93参照

階数(ランク)

- $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & -24 \\ 0 & 0 & -86 & -258 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & -86 \end{bmatrix}$

行列$[A|\boldsymbol{b}]$のランク：3

行列Aのランク：3

行階段形

3×4行列

3×3行列

行階段形において
行のうちすべてが0でない行の数を
階数(ランク)と呼ぶ

行列$[A|\boldsymbol{b}]$のランク：3
行列Aのランク：3
行列Aは3×3行列

<u>このとき、解は一意に定まる</u>

行列のサイズと階数(ランク)の関係で
連立1次方程式の解がどのようになっているかが分かる

教科書p.89～p.93参照

不定

- $$\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

解が一意に定まらない→不定

行列$[A|\boldsymbol{b}]$のランク：2
行列Aのランク：2
行列Aは3×3行列

このとき、不定である

田中聡久, “信号・データ処理のための行列とベクトル,” コロナ社, 2019.　より問題

教科書p.89～p.93参照

不能

- $$\begin{aligned} x - y + 2z &= 2 \\ x + y + z &= 1 \\ 3x + y + 4z &= 3 \end{aligned} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & 3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

解なし→不能

行列$[A|\boldsymbol{b}]$のランク：3
行列Aのランク：2
行列Aは3×3行列
<u>このとき、不能である</u>

田中聡久, “信号・データ処理のための行列とベクトル,” コロナ社, 2019.　より問題

教科書p.89～p.93参照

つまり

- 連立1次方程式　$\boldsymbol{A x}=\boldsymbol{b}$
  - Aは$M\times N$行列
  - $\boldsymbol{x}$はN列ベクトル
  - $\boldsymbol{b}$はM列ベクトル

- 行列$[A|\boldsymbol{b}]$のランク=行列Aのランク　のとき解は存在し
  - 行列Aのランク$=N$であれば、解は一意に定まる
  - 行列Aのランク$<N$であれば、不定(解は一意に定まらない)
- 行列$[A|\boldsymbol{b}]$のランク≠行列Aのランク　のとき不能(解は存在しない)

Pythonで計算してみよう

- 次の3つの連立1次方程式が解が一意に存在するか、不定か、不能かを判定しよう

$$\begin{aligned} 4x - 7y + 4z &= 1 \\ x + y - z &= 6 \\ 2x + 5y - 8z &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y - 5z &= 4 \\ 2x + 3y - 7z &= 7 \\ 4x - y + 7z &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y - 5z &= 4 \\ 2x + 3y - 7z &= 7 \\ 4x - y + 7z &= 8 \end{aligned}$$

- 行列の階数(ランク)は、Pythonではlinalg.matrix_rank(A)を使用する

石井俊全, “意味がわかる線形代数,” ベレ出版, 2011.　より問題

教科書p.93～p.104を参照

行列の基本演算

- 行列の和
- スカラー倍
- 行列と列ベクトルの積
- 行列と行列の積

教科書p.93～p.104を参照

行列の和

- 注意）同じサイズの行列同士でないと定義されない
- $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$について、
- $A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{bmatrix}$

教科書p.93～p.104を参照

スカラー倍

- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$について

- $kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{bmatrix}$

Pythonで計算してみよう

- $A = \begin{bmatrix} 4 & -7 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & -7 \\ 4 & -1 & 7 \end{bmatrix}, k = 10$のとき
- $A + B = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -1 \\ 3 & 4 & -8 \\ 6 & 4 & -1 \end{bmatrix}, A - B = \begin{bmatrix} 3 & -9 & 9 \\ -1 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & -15 \end{bmatrix}$
- $kA = \begin{bmatrix} 40 & -70 & 40 \\ 10 & 10 & -10 \\ 20 & 50 & -80 \end{bmatrix}$

教科書p.93～p.104を参照

行列の和とスカラー倍の性質

- 行列A, B, Cをそれぞれ$m \times n$行列、k, lを実数とするとき、行列の和とスカラー倍は、次の性質がある
  - $(A+B)+C = A+(B+C)$（結合法則）
  - $A+B \ = B+A$　(交換法則)
  - $A+O \ = O+A = A$ $\left(O\text{は零行列(全ての成分が}0\text{の行列)}\right)$
  - $A+(-A) = (-A)+A = O$

  - $1 \cdot A = A$
  - $k(A+B) = kA+kB$
  - $(k+l)A = kA+lA$
  - $(kl)A = k(lA)$

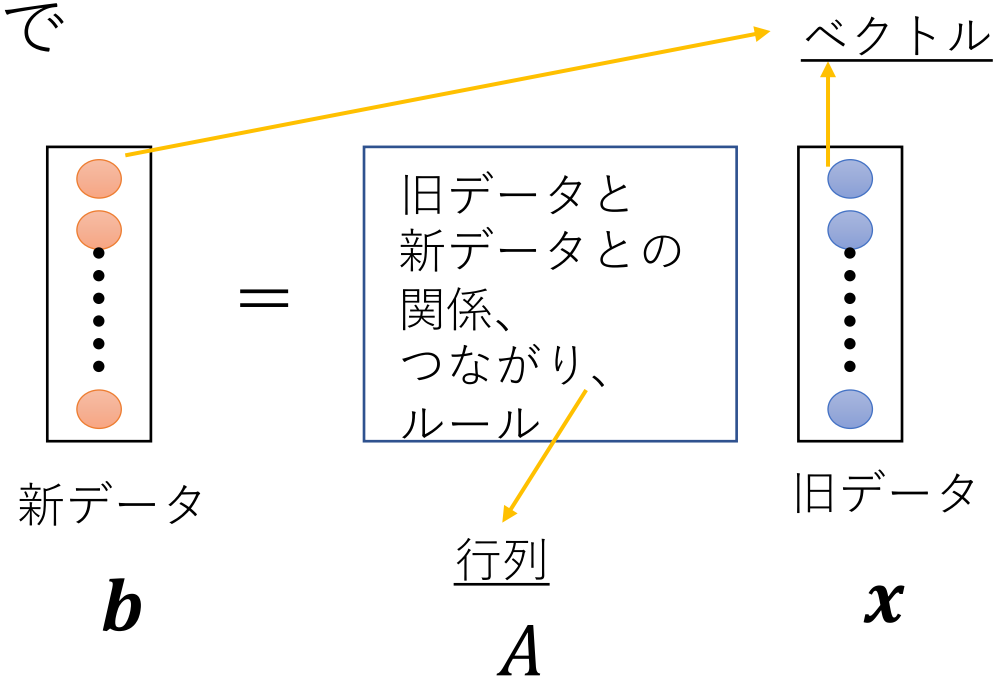
教科書p.93〜p.104を参照

行列とベクトルの積

- 注意）$m \times n$行列とn個の成分の列ベクトルで計算可能

- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

- $A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$



Pythonで計算してみよう

- $A=\begin{bmatrix}4 & -7 & 4\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 5 & -8\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 2 & -5\\ 2 & 3 & -7\end{bmatrix}, \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$について
- $A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}4 & -7 & 4\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 5 & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\times 1+(-7)\times 2+4\times 3\\ 1\times 1+1\times 2+(-1)\times 3\\ 2\times 1+5\times 2+(-8)\times 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 0\\ -12\end{bmatrix}$
- $B\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -5\\ 2 & 3 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times 1+2\times 2+(-5)\times 3\\ 2\times 1+3\times 2+(-7)\times 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10\\ -13\end{bmatrix}$
- 行列とベクトルの積はPythonではnumpy.dot(A,b)を使用する

教科書p.93～p.104を参照

行列と行列の積

- 注意）$l\times m$行列Aと$m\times n$行列Bのみ定義される
  - つまり行列Aの列数と行列Bの行数が同じでないといけない
- $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{lm} \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$について、
-
- $AB=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{l1} & c_{l2} & \cdots & c_{ln} \end{bmatrix}$,
- ただし，$c_{ij}=\sum_{k=1}^{m} a_{ik}\, b_{kj} = a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots a_{im}b_{mj}$

Pythonで計算してみよう

- $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$について

- $AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2\times1 + 1\times1 & 2\times(-1) + 1\times2 & 2\times2 + 1\times3 \\ 1\times1 + 3\times1 & 1\times(-1) + 3\times2 & 1\times2 + 3\times3 \\ 1\times1 + (-1)\times1 & 1\times(-1) + (-1)\times2 & 1\times2 + (-1)\times3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 4 & 5 & 11 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

- 行列と行列の積はPythonではnumpy.dot(A,B)を使用する

馬場敬之, “スバラシク実力がつくと評判の線形代数キャンパスゼミ,” マセマ出版社, 2012. からの問題

- $AB \neq BA$であることを確かめよう
- $AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 4 & 5 & 11 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$
- $BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1\times2 + (-1)\times1 + 2\times1 & 1\times1 + (-1)\times3 + 2\times(-1) \\ 1\times2 + 2\times1 + 3\times1 & 1\times1 + 2\times3 + 3\times(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

教科書p.93～p.104を参照

行列と行列の積の性質

- $(AB)C = A(BC)$ (結合法則)
- $A(B + C) = AB + AC$ (分配法則)
- $(A + B)C = AC + BC$ (分配法則)
- $AB \neq BA$ (一般的に交換法則は成り立たない)
- $AE = EA = A$ (Eは単位行列)
- $AO = OA = O$ (Oは零行列)
- $A \neq O, B \neq O$でも、$AB = O$になることがある (Oは零行列)

グループワーク課題

- LinearRegressionMystery.ipynbを参考にしながら、下記の問題が解が一意に導出できるのかを議論し、プレゼンでまとめよ

- 線形回帰とは、データ$X = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$が与えられたときに、これらのデータにフィットする下記の一次(線形)式で表現し、その一次(線形)式を用いて、新たなデータ$\boldsymbol{x^{new}} = \begin{bmatrix} x_1^{new} \\ \vdots \\ x_m^{new} \end{bmatrix}$から、予測値$\hat{y}$を導出すること

- $\hat{y} = \theta_0 + \theta_1 x_1^{new} + \theta_2 x_2^{new} + \cdots + \theta_m x_m^{new}$

グループワーク課題(continued)

- $\hat{y} = \theta_0 + \theta_1 x_1^{new} + \theta_2 x_2^{new} + \cdots + \theta_m x_m^{new}$
- 上記を予測するため、データ$X' = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$と

  未知の係数ベクトル$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \vdots \\ \theta_m \end{bmatrix}$を使って下記の連立一次方程式が

  導出される。
- $\boldsymbol{y} = X'\boldsymbol{\theta}$

グループワーク課題(continued)

- 連立一次方程式$\boldsymbol{y} = X'\boldsymbol{\theta}$は一般的に「解は一意に定まる」か「不定」か「不能」かを議論せよ。

- さらに、 LinearRegressionMystery.ipynbのケースでは、 行列Xが506×12行列(特徴がcrim, zn, indus, chas, nox, rm, age, dis, rad, tax, ptratio, lstatの12項目、データ数が506個)であり、正方行列ではないため、そもそも逆行列X^{-1}を構成することが不可能である
- また、…(グループワークで議論ください)…
- しかしながら、scikit-learnのLinearRegression()を用いれば「一意」に解ける。
- 何故か？

個人課題

1. 教科書p.107～p.128を読んで理解したことをA4 1枚でまとめよ。特に線形写像と線形変換の違いについて気をつけてまとめること。

2. 連立1次方程式をガウスの消去法(できる人はガウス・ジョルダンの消去法)で解く関数gauss_jordan_elimination(A,b)をプログラムしてください。
   - 次を必ず満たすこと
     - Aは行列、bはベクトルを与えることとする。
     - 解が一意に定まる場合は解を列ベクトル(numpy array)で返し、不定、不能の場合をその旨をエラーとして返すこと。
     - 連立1次方程式を解く関数としてnumpy.linalg.solve(A, b)やscipy.linalg.lu_solve(LU, b), sympy.solve()などがあるが、そのような関数は使わずあくまでもスクラッチからプログラミングすること。
     - 必要に応じてコメントを入れること、何もない場合は理解していないものとして、減点対象とする。
   - ガウスの消去法のアルゴリズムについては教科書に記載があるため、どうしてもわからない人はそちらを参照すること。できる人はガウス・ジョルダンの消去法を調べてチャンレンジしてみよう。
   - なお、より精度のいいアルゴリズムにするために「ピボット選択」という方法がある。それを調べ、実装している場合は加点評価する。

3. 上記で作った関数を用いて次の3つの連立1次方程式を解いてください。

$$\begin{aligned} 4x - 7y + 4z &= 1 \\ x + y - z &= 6 \\ 2x + 5y - 8z &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y - 5z &= 4 \\ 2x + 3y - 7z &= 7 \\ 4x - y + 7z &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y - 5z &= 4 \\ 2x + 3y - 7z &= 7 \\ 4x - y + 7z &= 8 \end{aligned}$$

- 1についてはA1 1枚、2,3についてはipynbファイルを提出すること
- Google Classroomで提出のこと
  (締切はGoogle Classroom参照)