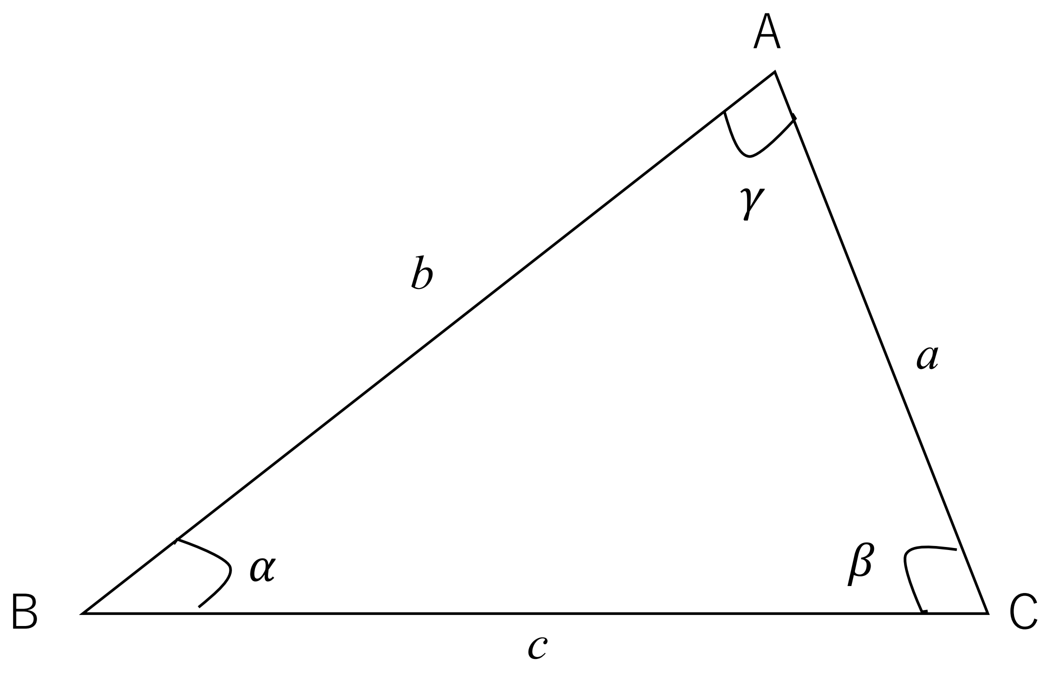
内積の公式の証明

武蔵野大学 データサイエンス学部データサイエンス学科
中西 崇文

余弦定理(復習)

- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$
  - $\gamma = 90^\circ$のとき$\cos 90^\circ = 0$より
  - $c^2 = a^2 + b^2$(三平方の定理、ピタゴラスの定理)となる

- $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$
- $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$
- $\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

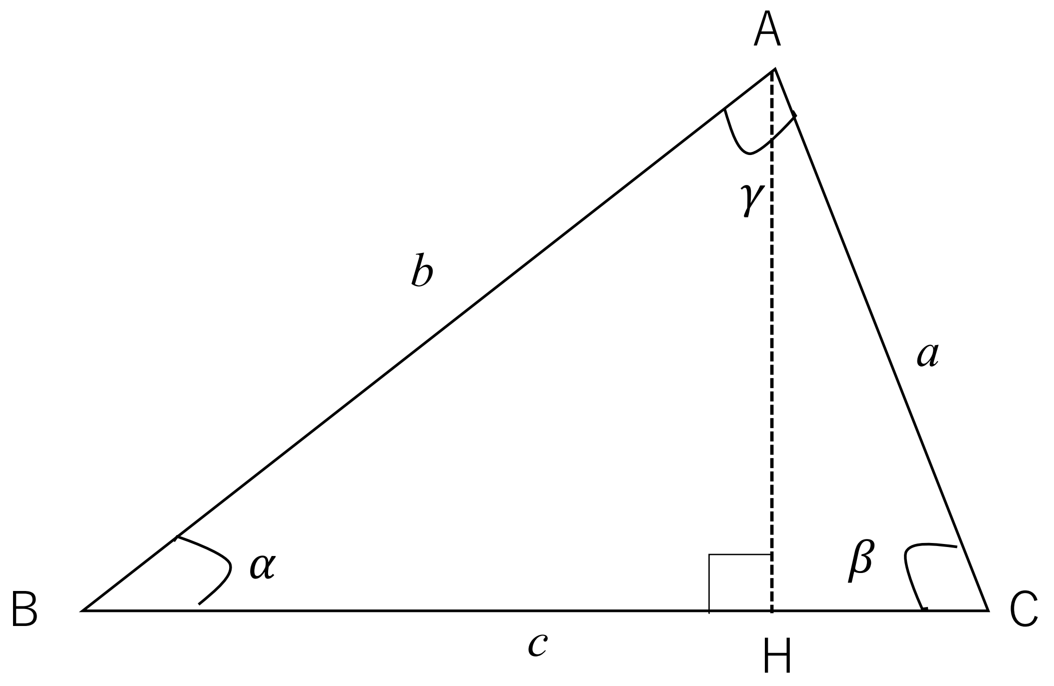


余弦定理の証明

- $BH = b\cos\alpha, CH = c - b\cos\alpha$
  - (これがわからない人は巻末参照)

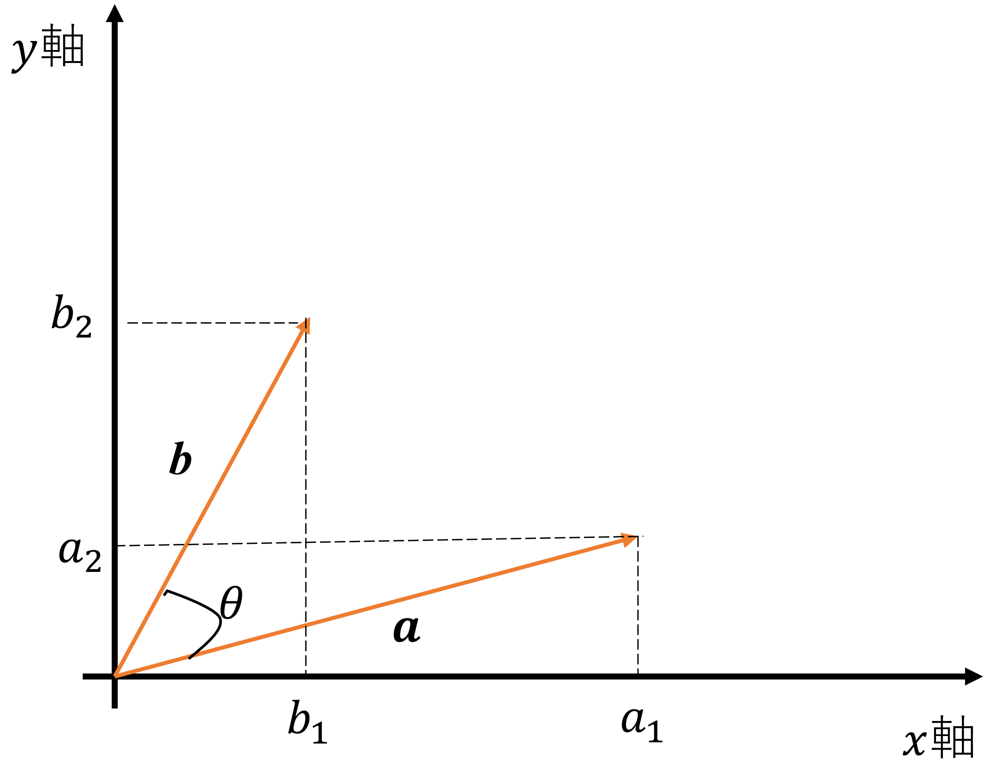
- 三角形AHBに三平方の定理を使うと
  - $AB^2 = BH^2 + AH^2$
  - $AH^2 = AB^2 - BH^2 = b^2 - (b\cos\alpha)^2$ ①
- 三角形AHCに三平方の定理を使うと
  - $AC^2 = CH^2 + AH^2$
  - $AH^2 = AC^2 - CH^2 = a^2 - (c - b\cos\alpha)^2$ ②

- ①式と②式から、
  - $b^2 - (b\cos\alpha)^2 = a^2 - (c - b\cos\alpha)^2$
  - $b^2 - b^2\cos^2\alpha = a^2 - c^2 + 2bc\cos\alpha - b^2\cos^2\alpha$
  - $2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2$
  - $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$



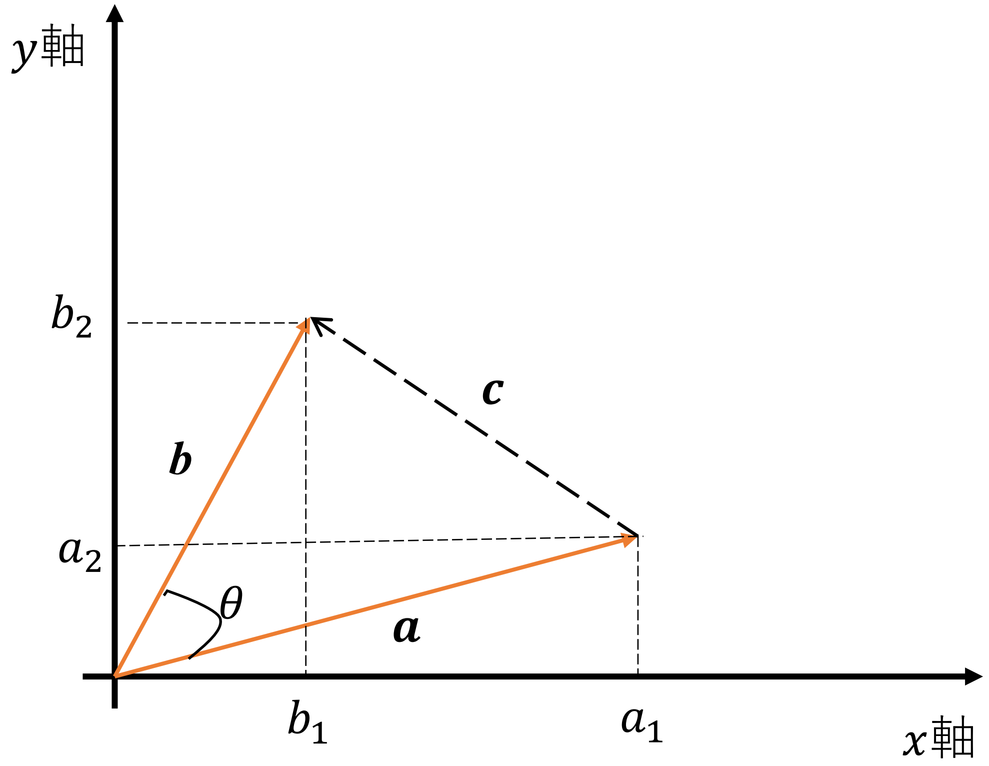
内積の式を考え直す

- ここで2次元空間内のベクトル$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$を考える
  - ベクトル$\boldsymbol{a}$はx軸方向にa_1、y軸方向にa_2なので
    - $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$
  - ベクトル$\boldsymbol{b}$はx軸方向にb_1、y軸方向にb_2なので
    - $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$
- ベクトル$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$の内積が次のとおりに表されることを証明する
  - $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = \|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\| cos\theta$



内積の式を考え直す

- ベクトル$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$の間の点線のベクトルは次のように表現される
  - $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{bmatrix}$
  - $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$
  - $\|\boldsymbol{b}\| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$
  - $\|\boldsymbol{c}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^{\mathbf{2}} + (b_2 - a_2)^{\mathbf{2}}}$



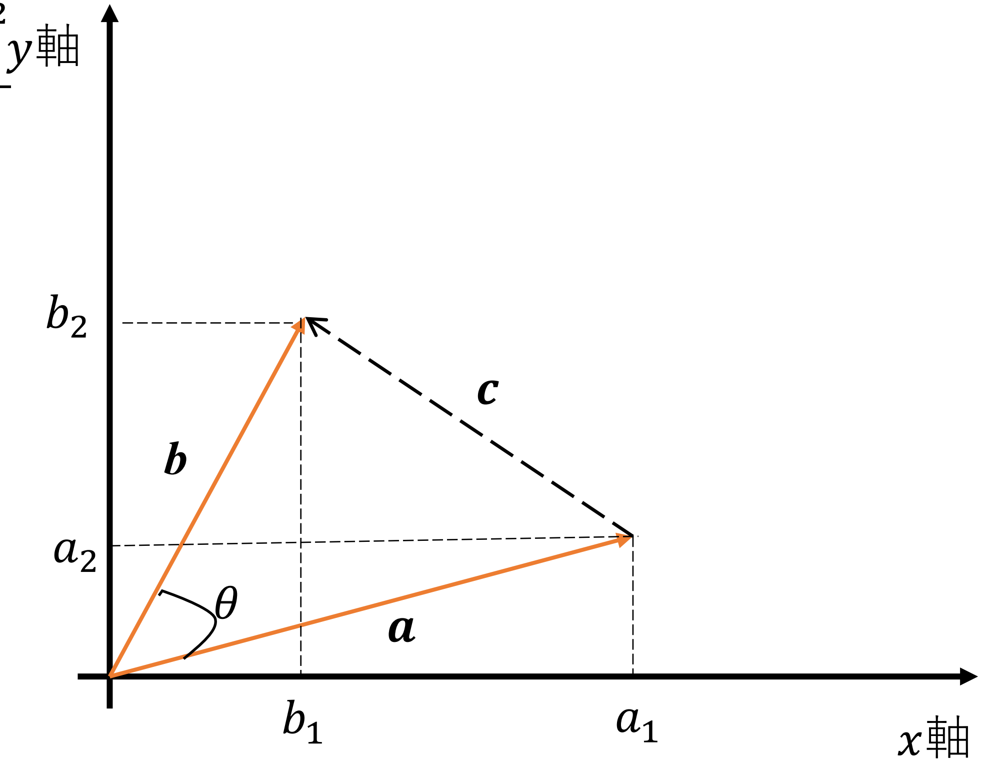
内積の式を考え直す

余弦定理より

- $cos\theta = \dfrac{\left(\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^{\mathbf{2}}}\right)^2+\left(\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^{\mathbf{2}}}\right)^2-\left(\sqrt{(b_1-a_1)^{\mathbf{2}}+(b_2-a_2)^{\mathbf{2}}}\right)^2}{2\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^{\mathbf{2}}}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$

$= \dfrac{{a_1}^2+{a_2}^{\mathbf{2}}+{b_1}^2+{b_2}^{\mathbf{2}}-{b_1}^2+2a_1b_1-{a_1}^2-{b_2}^{\mathbf{2}}+2a_2b_2-{a_2}^{\mathbf{2}}}{2\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^{\mathbf{2}}}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$

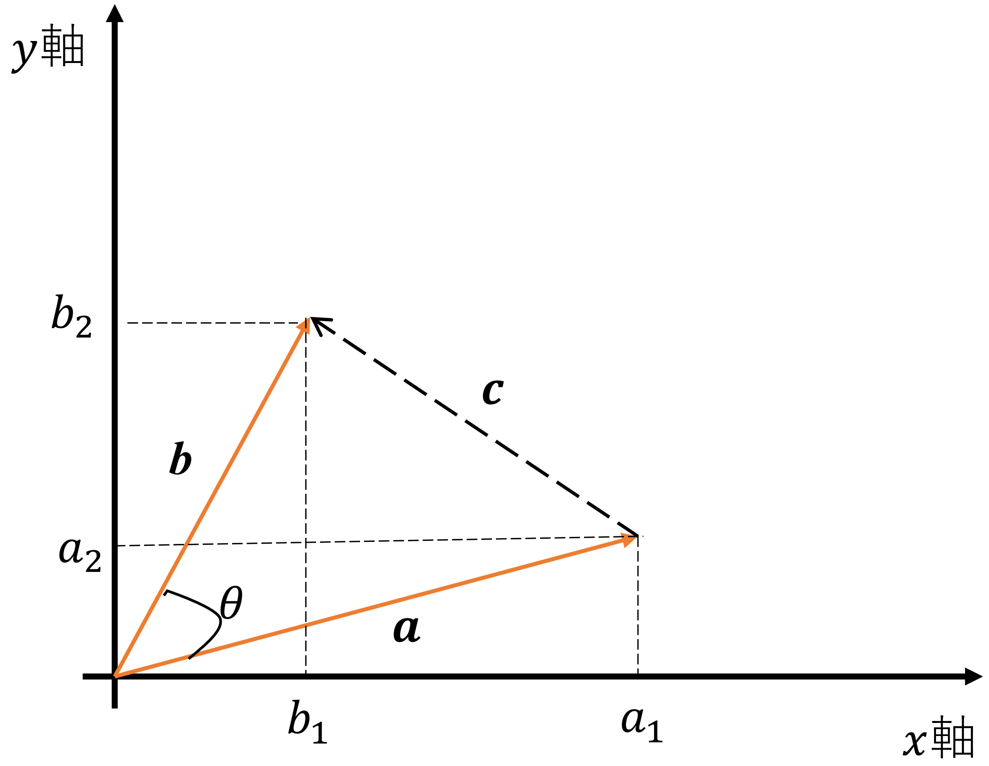
$= \dfrac{2a_1b_1+2a_2b_2}{2\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^{\mathbf{2}}}\sqrt{b_1^2+b_2^2}} = \dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^{\mathbf{2}}}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$



内積の式を考え直す

- $\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|cos\theta$に当てはめてみる
  - $\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|cos\theta$
    $= (\sqrt{a_1^2 + a_2^2})(\sqrt{b_1^2 + b_2^2})\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^{\mathbf{2}}}\sqrt{b_1^2+b_2^2}} = a_1b_1 + a_2b_2$

  よって、
  - $a_1b_1 + a_2b_2 = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|cos\theta$



(巻末) $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ の復習

- 右図のような直角三角形ABCを考える
- $\sin\theta = \frac{a}{b}$
- $\cos\theta = \frac{c}{b}$
- $\tan\theta = \frac{a}{c}$