データと数理I
第6回

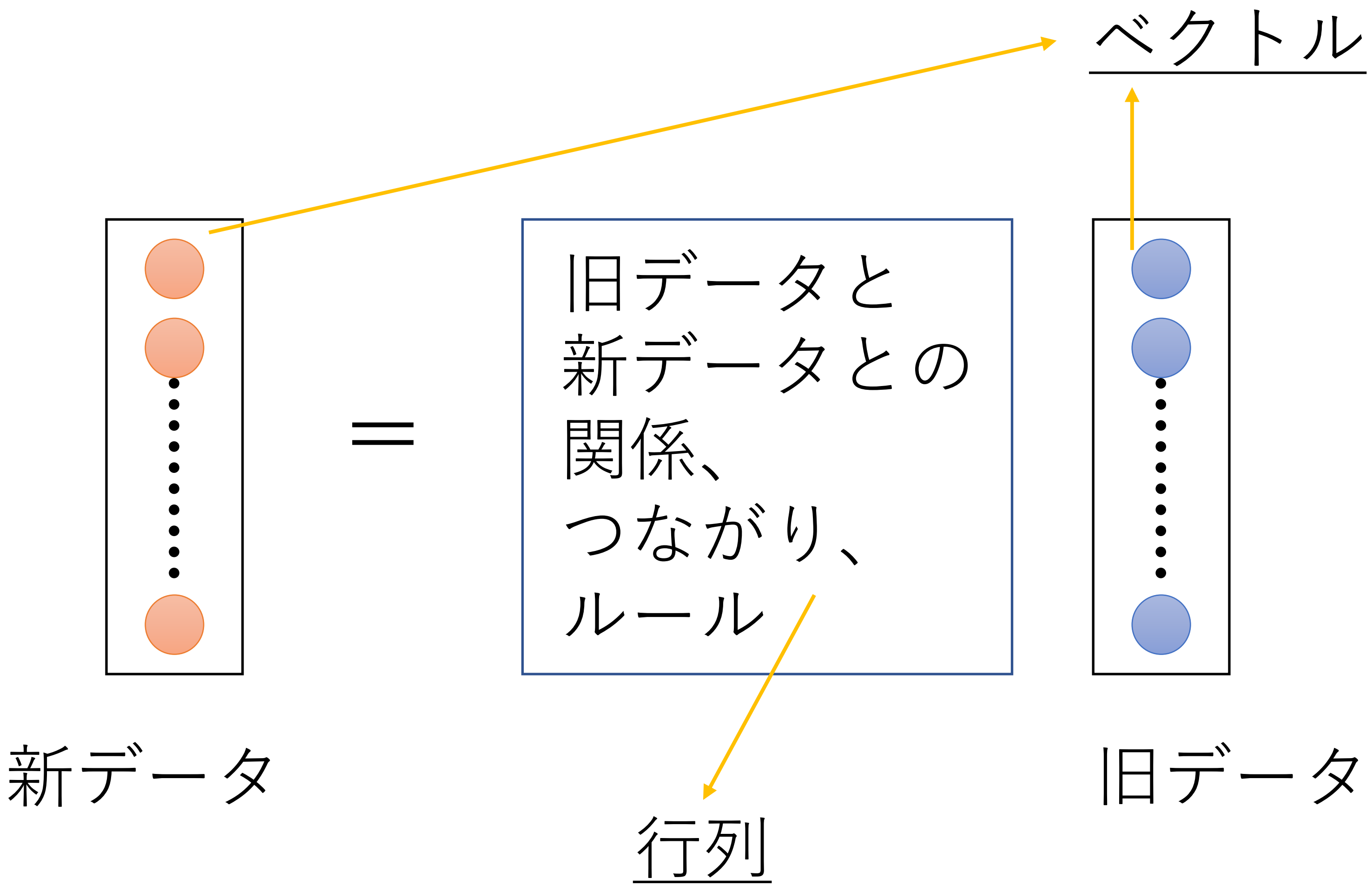
# 5章アフィン変換
# ー画像の平行移動、拡大・縮小、回転、せん断、鏡映

武蔵野大学 データサイエンス学部データサイエンス学科
中西 崇文

復習

# 線形写像/線型変換

<u>旧データから新データへの変換(Transformation)を追求する学問</u>



# 線形写像/線形変換

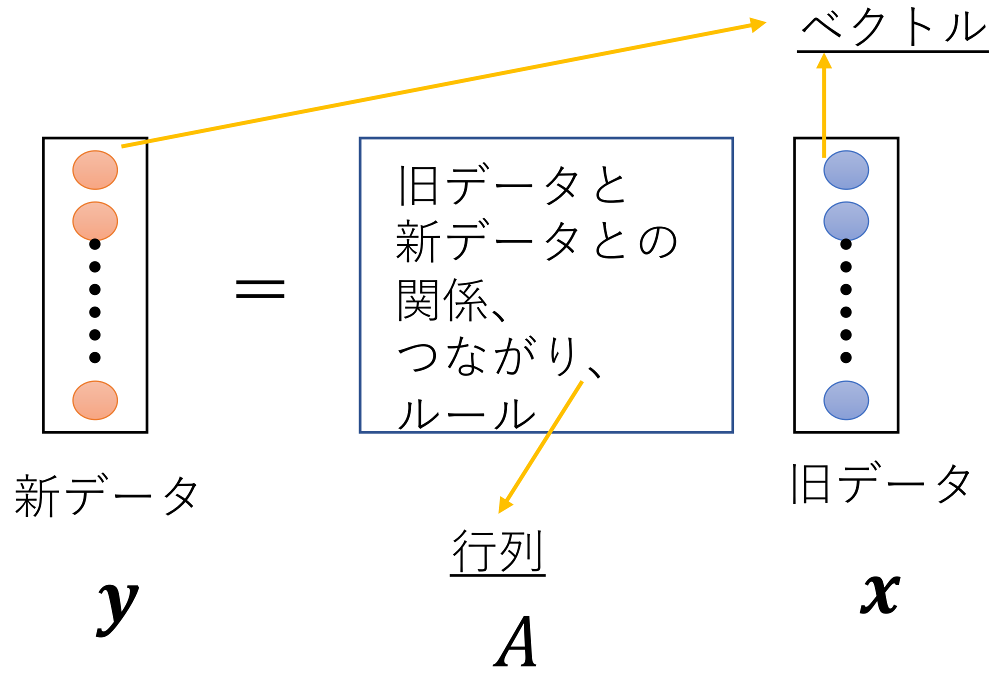
- $n$次元ベクトル空間$R^n$の$1$つの要素を決めたとき、ベクトル空間$R^m$のただ一つの要素が決まるとする。
  - $f: R^n \to R^m$
  - この$f$が次を満たすとき、$f$を線形写像 (linear mapping)という。
    - $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$
    - $f(k\boldsymbol{x}) = kf(\boldsymbol{x})$

- 特に、 $\boldsymbol{n = m}$のとき、つまり
  - $f: R^n \to R^n$
  - これを線形変換(linear transformation)という

# 行列とベクトルの積

- $m \times n$行列と
  $n$個の成分の列ベクトルで計算可能
- 結果$m$個の成分の列ベクトルができる
- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$
- $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$

復習




n次元ベクトル空間から
m次元ベクトル空間へ

# Pythonで計算してみよう(復習)

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

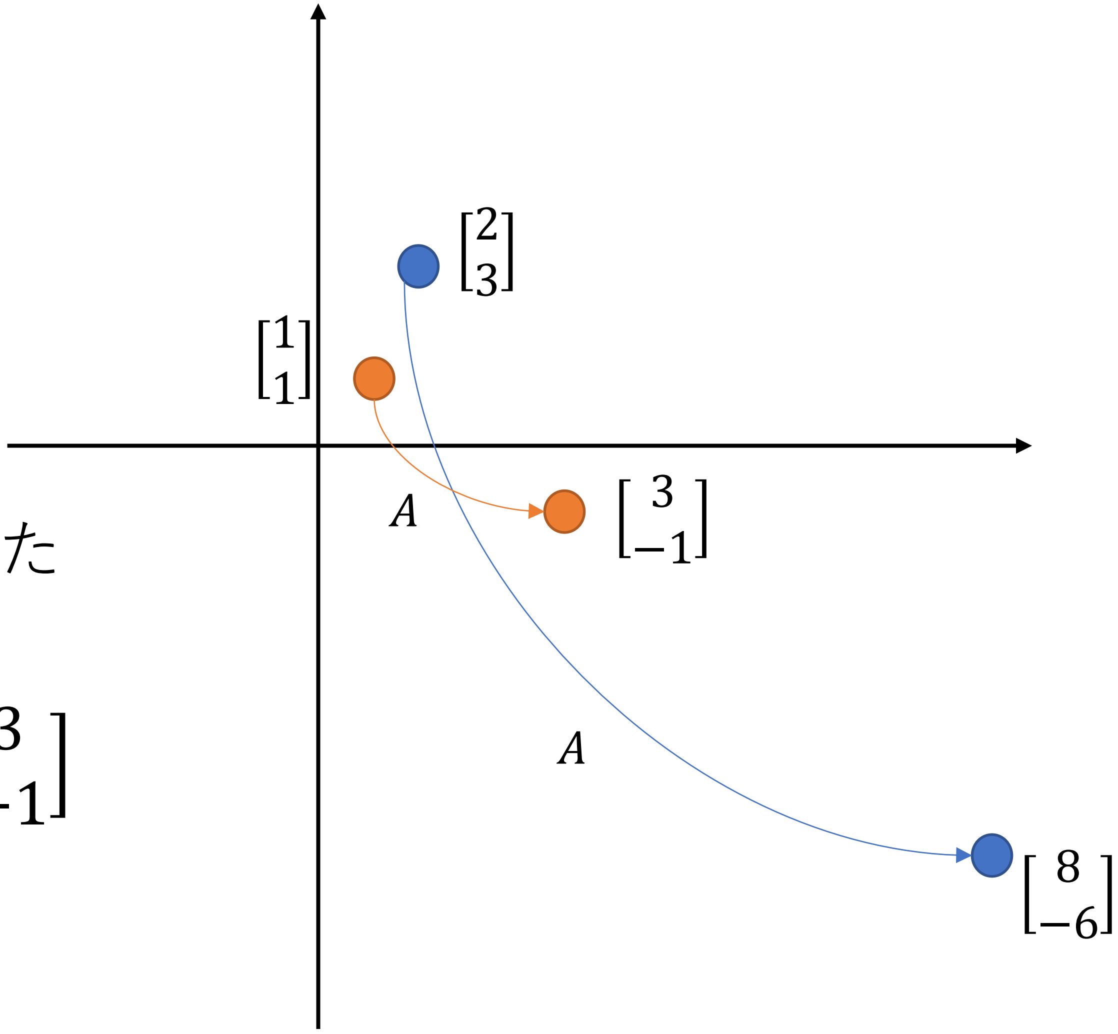
- $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times2 + 2\times3 \\ 3\times2 + (-4)\times3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \end{bmatrix}$
- $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x_2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times1 + 2\times1 \\ 3\times1 + (-4)\times1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

行列とベクトルの掛け算はnumpy.dotを使う

教科書p.129～p.131参照

# 線形写像/線形変換するとは？

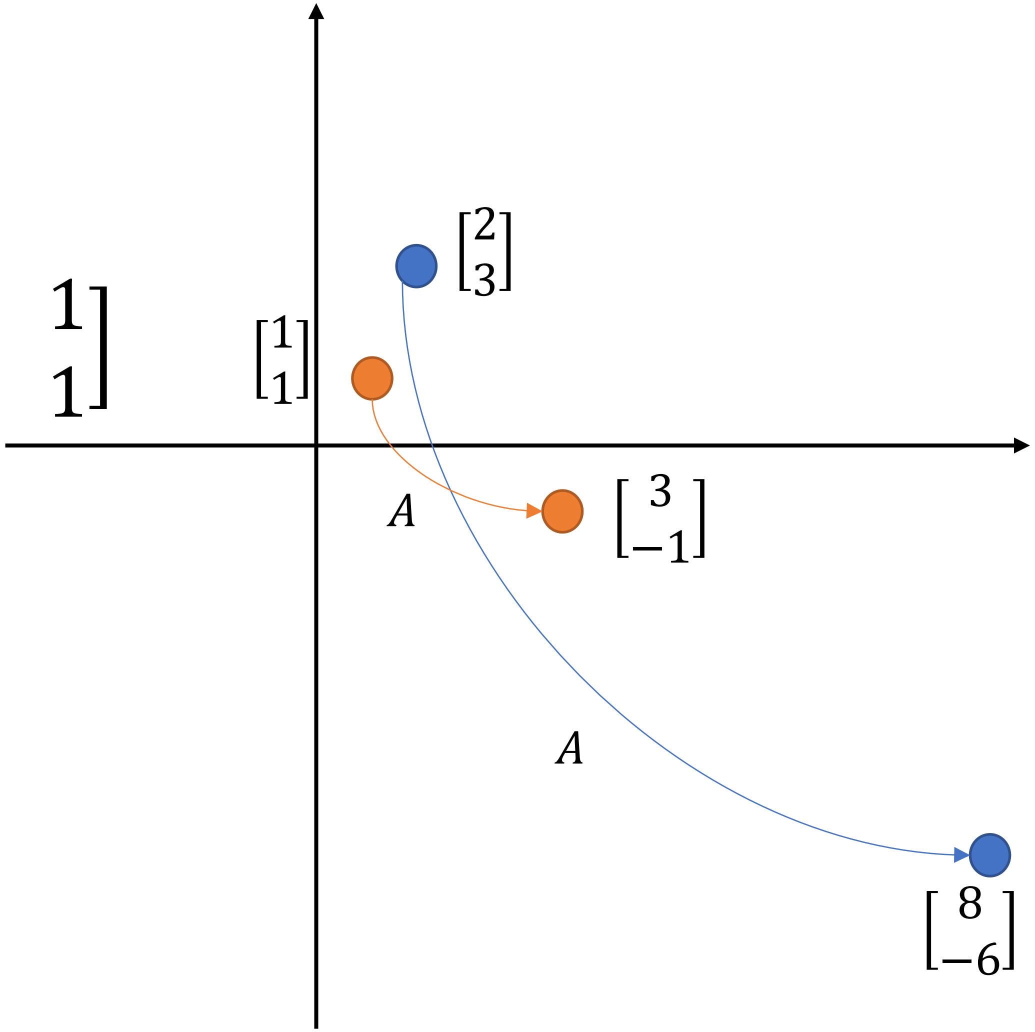
- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$というベクトルが行列$A$によって$\begin{bmatrix} 8 \\ -6 \end{bmatrix}$というベクトルに写像(変換)された
  - $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$というベクトルが行列$A$によって$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$というベクトルに写像(変換)された



教科書p.129〜p.131参照

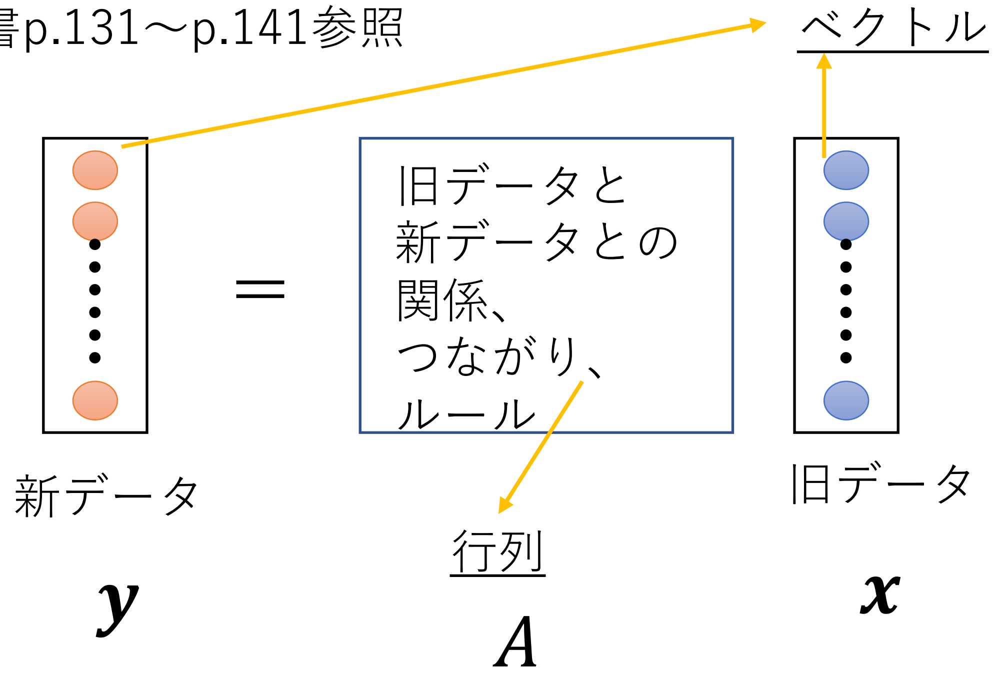
# この計算を一気にできないものか

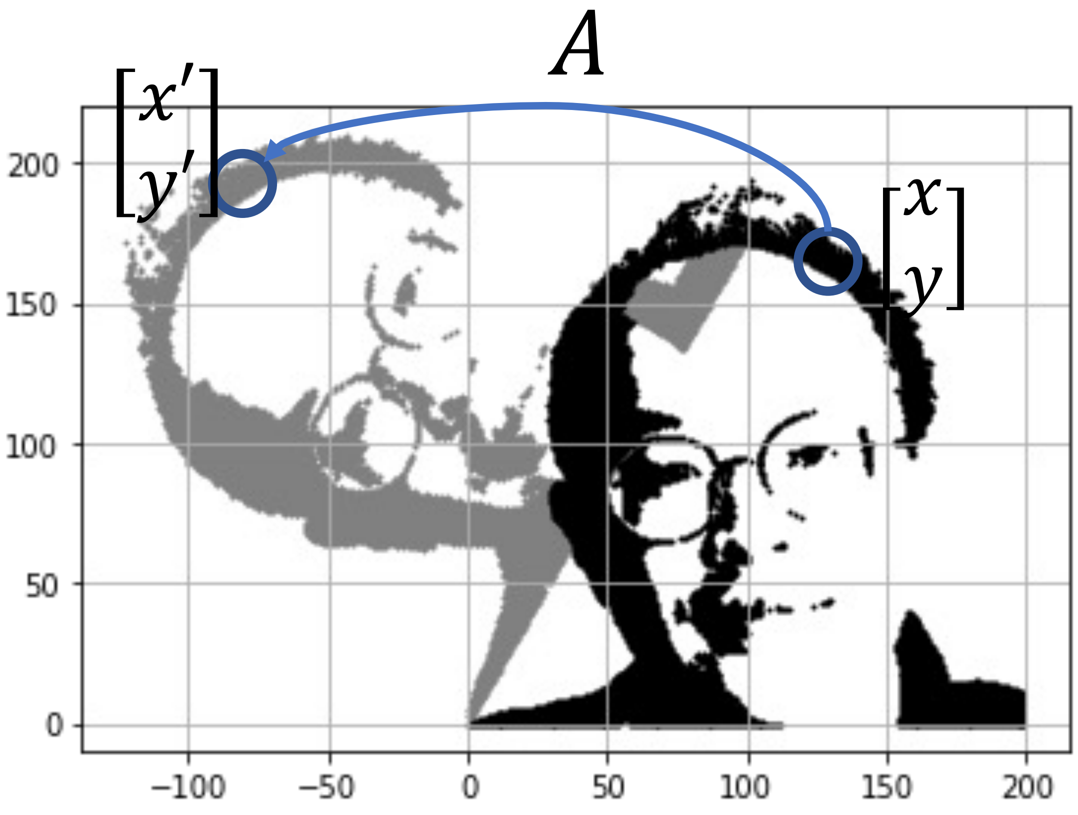
- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$,
- $\boldsymbol{x_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$→$X = [x_1 \quad x_2] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$
- $AX = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$
$$= \begin{bmatrix} 1\times2 + 2\times3 & 1\times1 + 2\times1 \\ 3\times3 + (-4)\times3 & 3\times1 + (-4)\times1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -6 & -1 \end{bmatrix}$$



教科書p.131～p.141参照

# 平面画像処理




$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

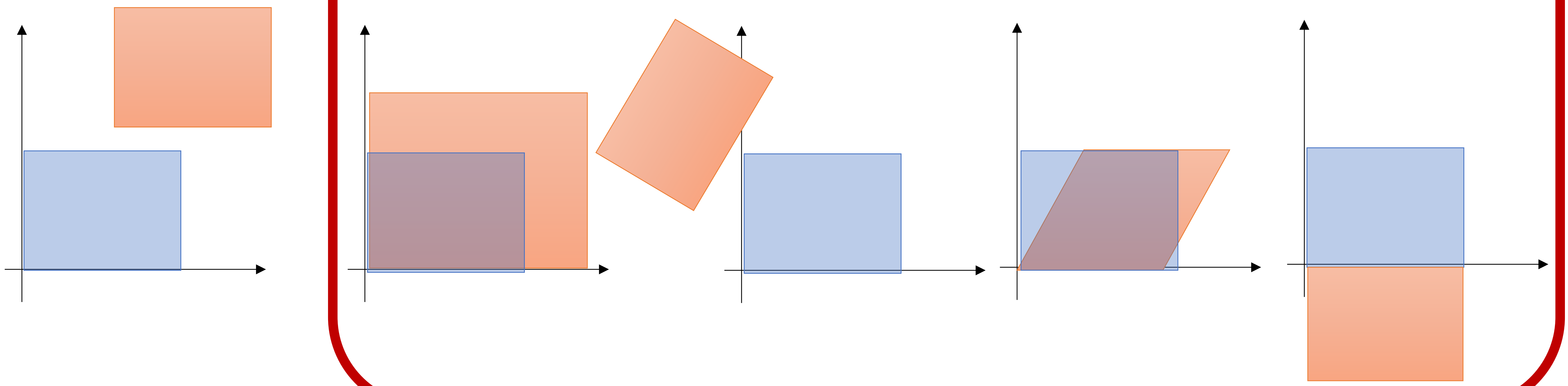
をうまく決めれば、
線形変換で画像処理ができる

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

# 平面画像処理(Transformationの5つの形)

教科書p.131～p.141参照

(1)平行移動(Translation)　(2)拡大・縮小(Scaling)　(3)回転(Rotation)　(4) せん断(Skew)　(5) 鏡映(Reflection)



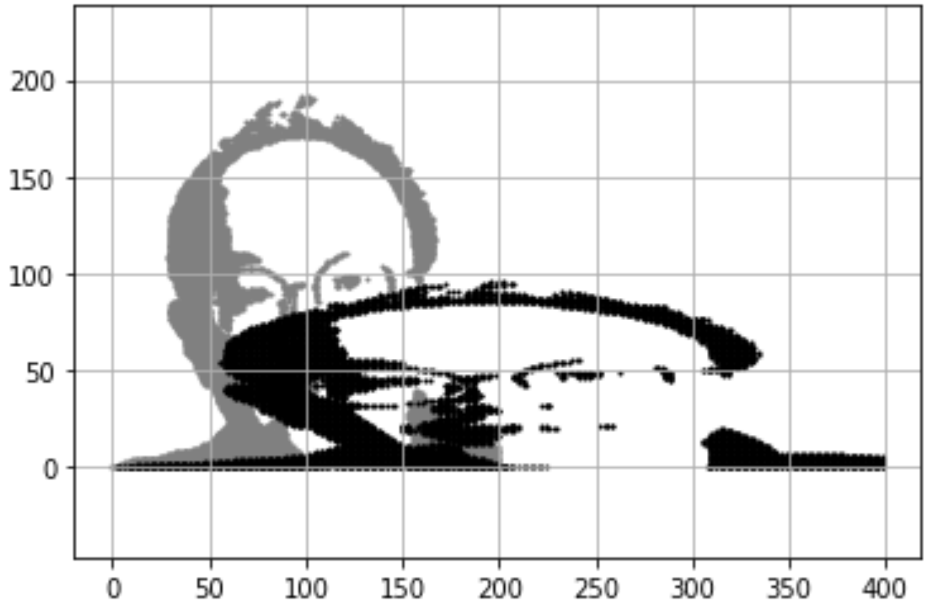
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$ で実現できるもの

教科書p.131～p.141参照

# 拡大・縮小

- $x$軸方向を$a$倍、$y$軸方向に$b$倍
  - $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$
  - $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

- 例）$x$軸方向を2倍、$y$軸方向に$\frac{1}{2}$倍
  - $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

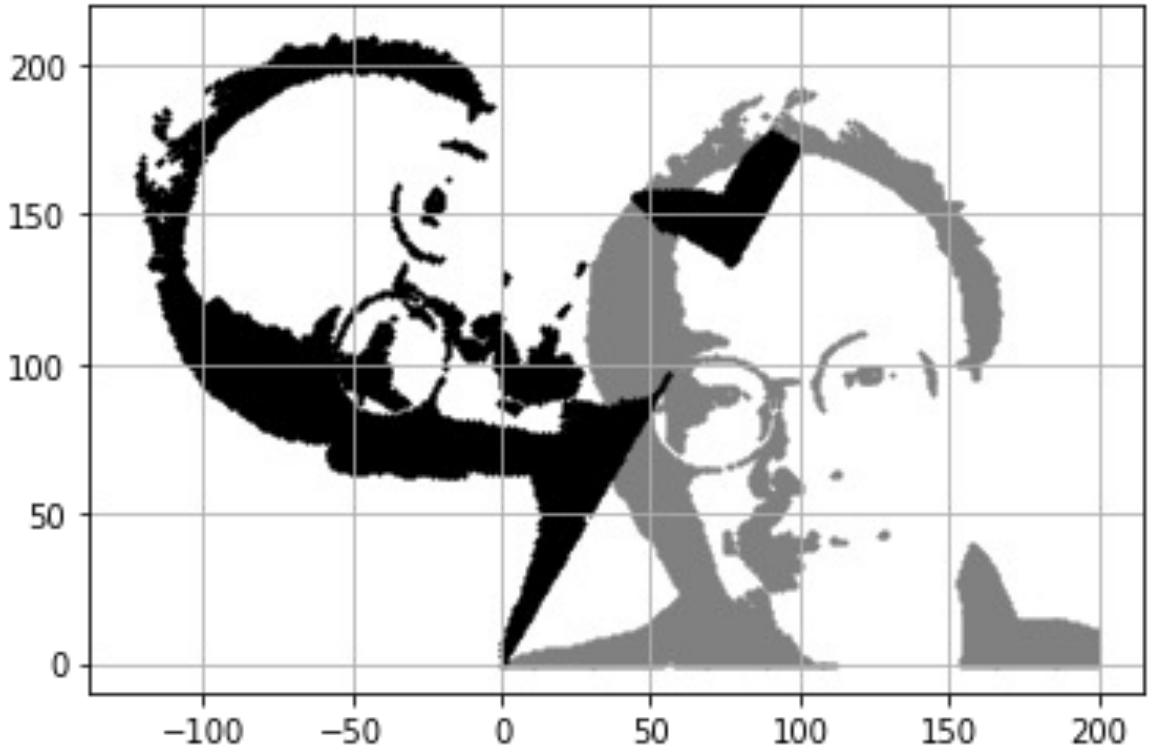


教科書p.131～p.141参照

# 回転

- $\theta$°回転
  - $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$
  - $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

- 例）60度回転
  - $A = \begin{bmatrix} cos60° & -sin60° \\ sin60° & cos60° \end{bmatrix}$

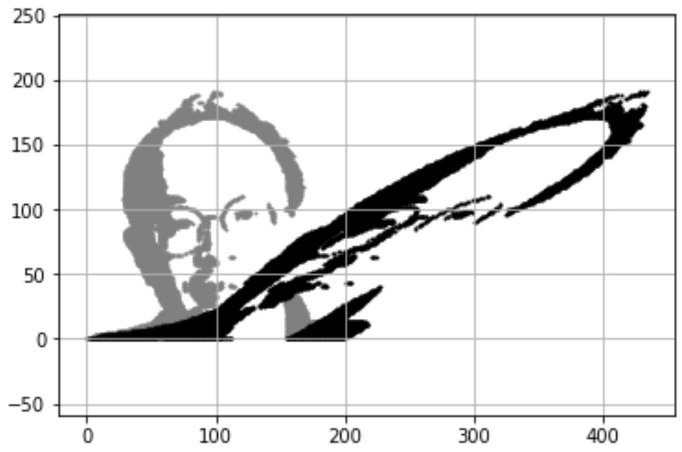


教科書p.131～p.141参照

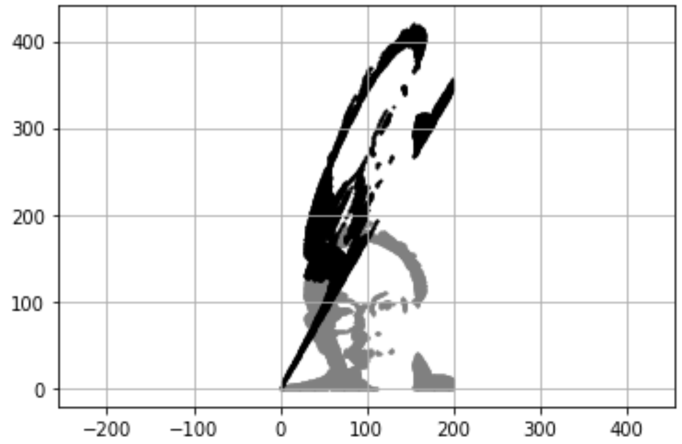
# せん断

- $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$
  - $y$軸から$\theta$傾いてせん断
    - $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & tan\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
  - $x$軸から$\theta$傾いてせん断
    - $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ tan\theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

y軸から60度傾いてせん断




x軸から60度傾いてせん断

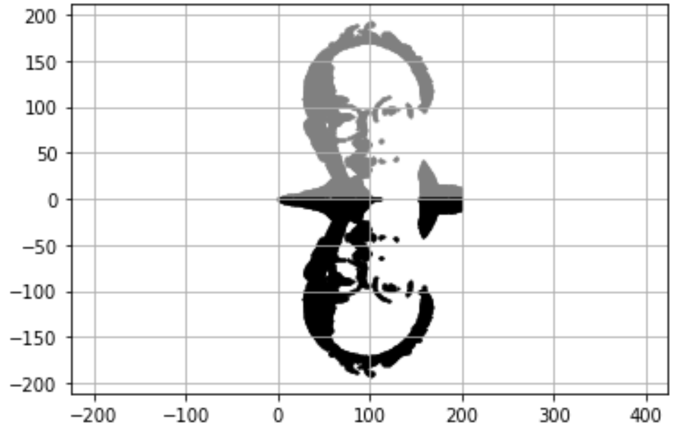


教科書p.131～p.141参照

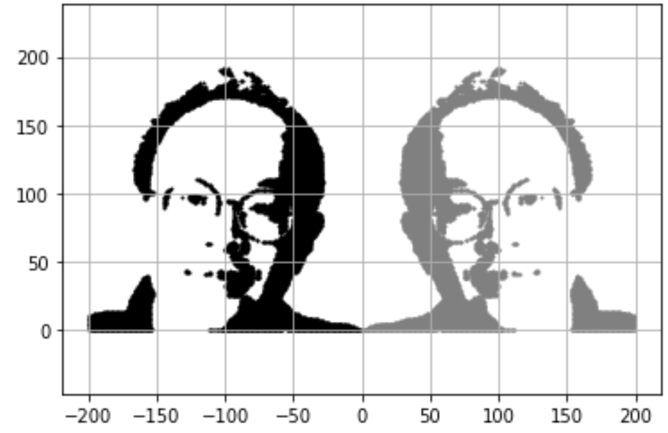
# 鏡映

- $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$
  - $x$軸対称
    - $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
  - $y$軸対称
    - $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$x$軸対称




$y$軸対称

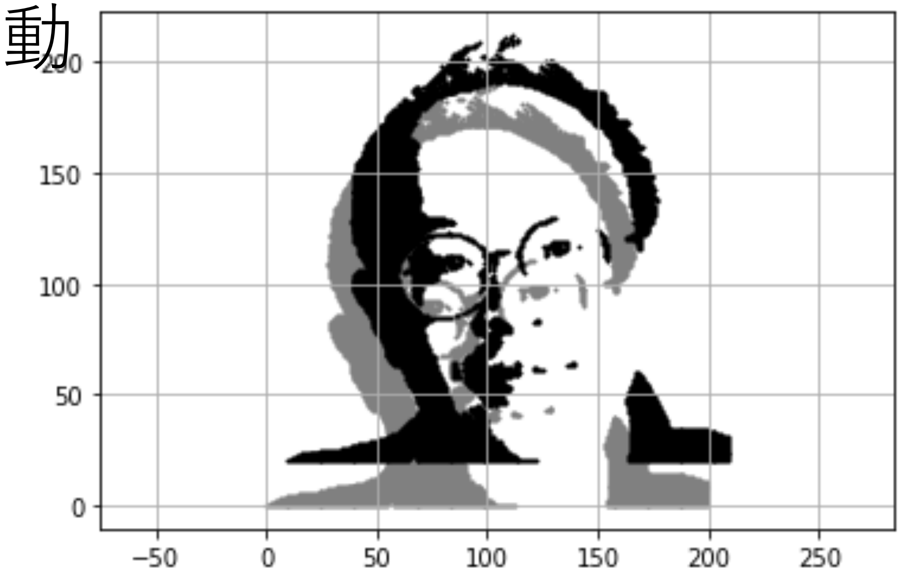


教科書p.131〜p.141参照

# 平行移動

- $x$軸方向に$a$、$y$軸方向に$b$だけ移動
  - $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

- 例）$x$軸方向に10、$y$軸方向に20だけ移動
  - $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}$




線形変換で表せられない

復習

# 写像(変換)の合成

- 線形変換$f$によって$R^2$のベクトル$\boldsymbol{x}$を$R^2$のベクトル$f(\boldsymbol{x})$に変換したあと、線形変換$g$によって$R^2$のベクトル$f(\boldsymbol{x})$を$R^2$のベクトル$g(f(\boldsymbol{x}))$に変換する

$$R^2 \xrightarrow{\quad f \quad} R^2 \xrightarrow{\quad g \quad} R^2$$

$$\boldsymbol{x} \longrightarrow f(\boldsymbol{x}) \longrightarrow g(f(\boldsymbol{x}))$$

$f$と$g$の合成写像→$g \circ f$と表す

$$\boldsymbol{x} \longrightarrow A\boldsymbol{x} \longrightarrow BA\boldsymbol{x}$$

$AB \neq BA$
であることに注意

# 行列と行列の積の性質

- $\boxed{(AB)C = A(BC) \text{ (結合法則)}}$
- $A(B + C) = AB + AC$ (分配法則)
- $(A + B)C = AC + BC$ (分配法則)
- $AB \neq BA$ (一般的に交換法則は成り立たない)
- $AE = EA = A$ ($E$は単位行列)
- $AO = OA = O$ ($O$は零行列)
- $A \neq O, B \neq O$でも、$AB = O$になることがある ($O$は零行列)

教科書p.141～p.143参照

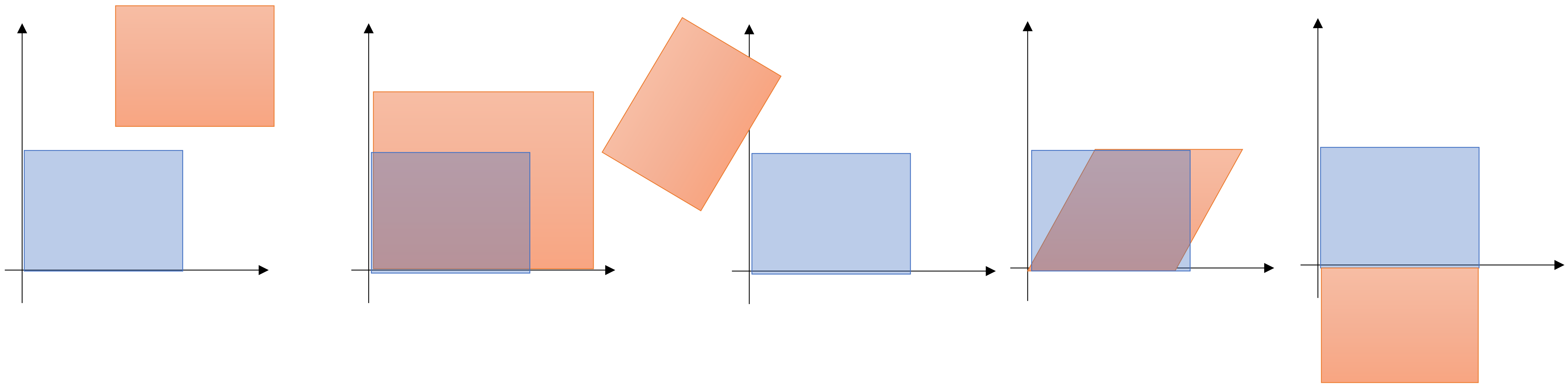
# 合成をつかえば簡素に表せるのに…

- 例えば、元画像$\boldsymbol{x}$を30度回転させて、$y$軸から$45$度傾いてせん断して、さらに$\mathbf{x}$軸対称に鏡映した画像$\boldsymbol{y}$
  - 30度回転：$A_1$
  - $y$軸から$45$度傾いてせん断：$A_2$
  - $\mathrm{x}$軸対称に鏡映：$A_3$
- $\boldsymbol{y} = A_3 A_2 A_1 \boldsymbol{x}$
  と書くことができる！
- しかし、今のままでは平行移動をこの式に含めることができない

教科書p.143～p.154参照

# 平面画像処理(Transformationの5つの形)

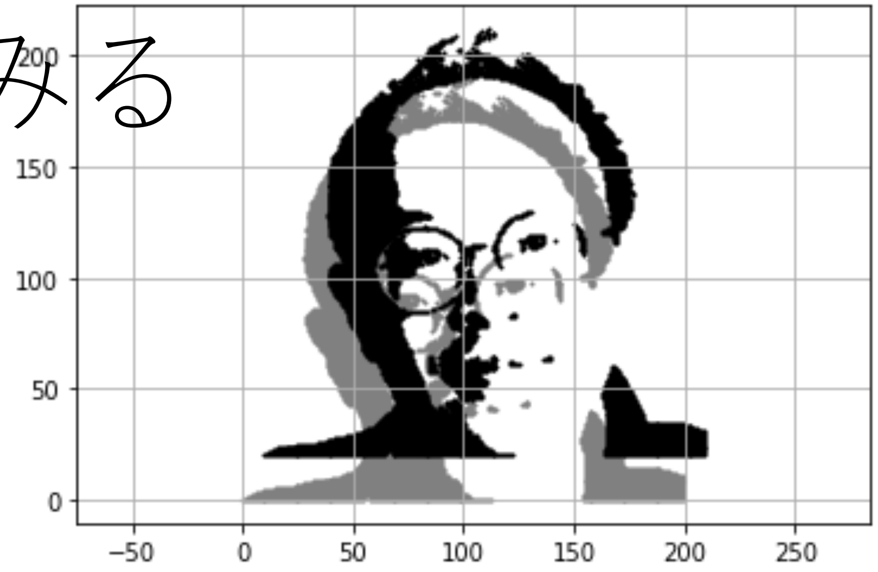
(1)平行移動(Translation)　(2)拡大・縮小(Scaling)　(3)回転(Rotation)　(4) せん断(Skew)　(5) 鏡映(Reflection)



## アフィン変換

この5つの平面画像処理を$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$で表現する

# 平行移動をもう一度考えてみる




- $x$軸方向に$a$、$y$軸方向に$b$だけ移動
  - $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+a \\ y+b \end{bmatrix}$
  - 悪魔の声：次元が低くて表現ができない場合は次元を上げてみよう
  - $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times x + 0\times y + 1\times a \\ 0\times x + 1\times y + 1\times b \\ 0\times x + 0\times y + 1\times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+a \\ y+b \\ 1 \end{bmatrix}$

うまく平行移動が表現できた！

# アフィン変換

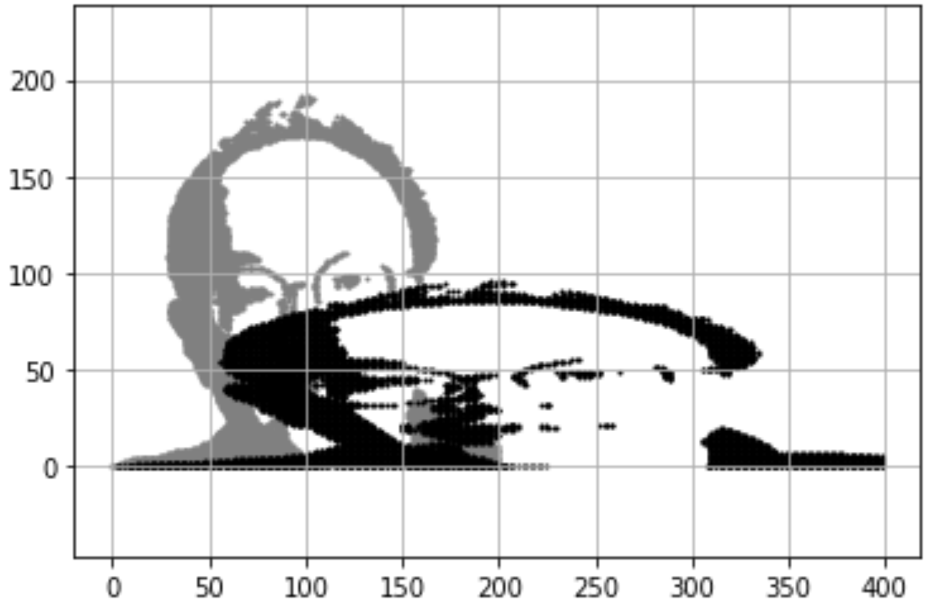
- 元画像の座標を$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, 変換後の座標を$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$
とするときにつぎのような変換をアフィン変換という。

- $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$

教科書p.143～p.154参照

# アフィン変換で拡大・縮小

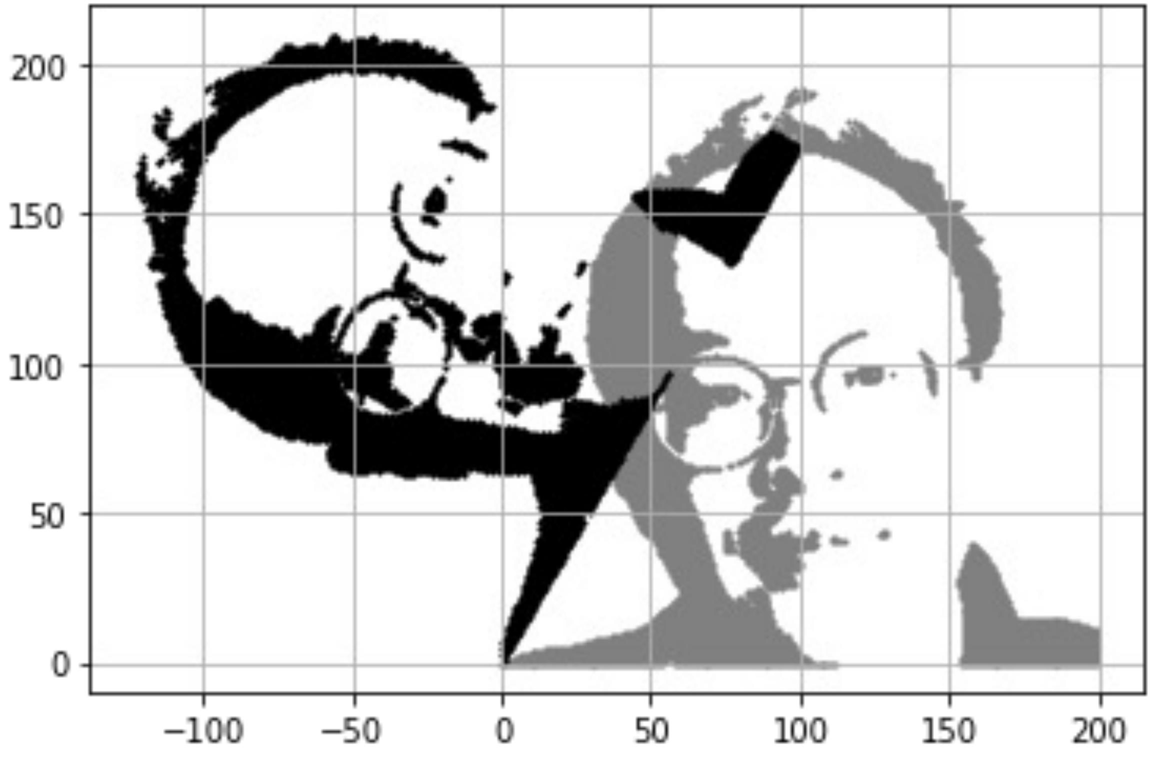
- $x$軸方向を$a$倍、$y$軸方向に$b$倍
  - $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$
  - $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$



教科書p.143～p.154参照

# アフィン変換で回転

- $\theta$°回転
  - $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$
  - $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$

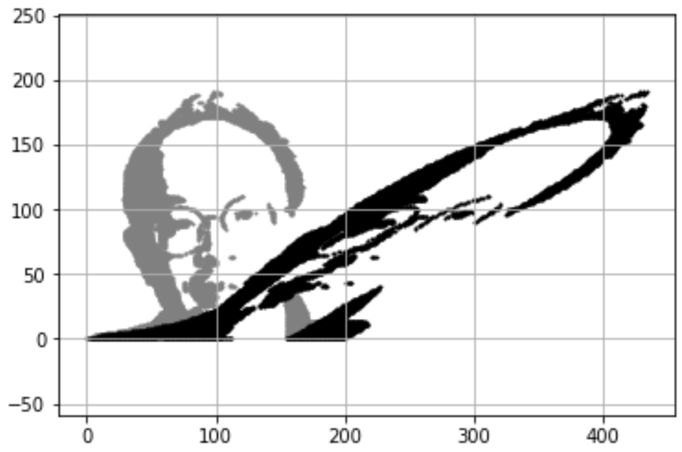


教科書p.143～p.154参照

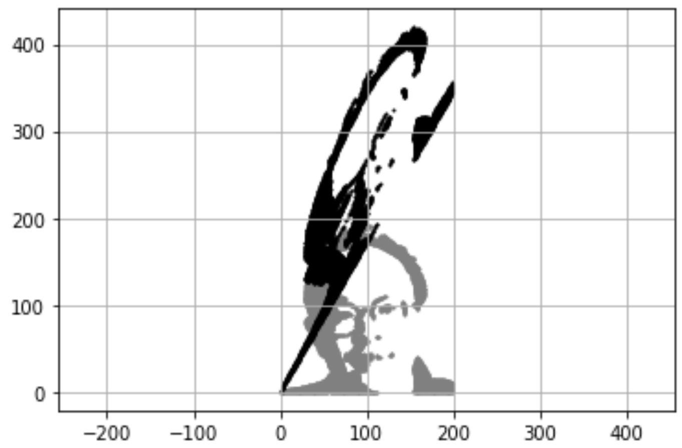
# アフィン変換でせん断

- $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$
  - $y$軸から$\theta$傾いてせん断
    - $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & tan\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$
  - $x$軸から$\theta$傾いてせん断
    - $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ tan\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$

y軸から60度傾いてせん断




x軸から60度傾いてせん断

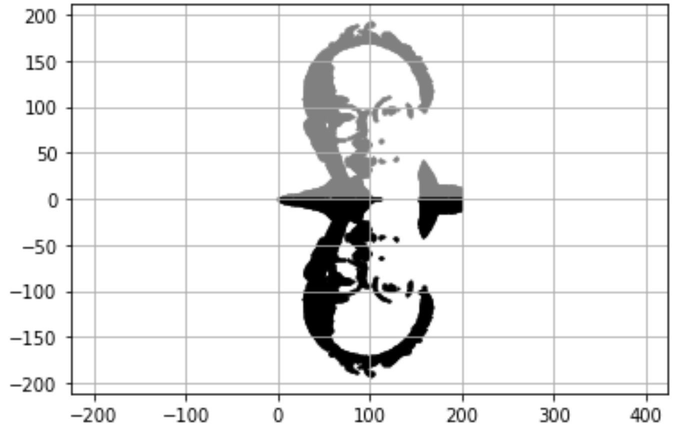


教科書p.143～p.154参照

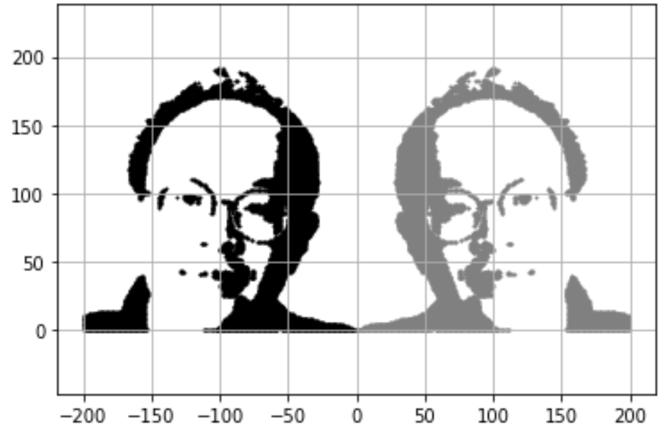
# アフィン変換で鏡映

- $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$
  - $x$軸対称
    - $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$
  - $y$軸対称
    - $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$

$x$軸対称




$y$軸対称

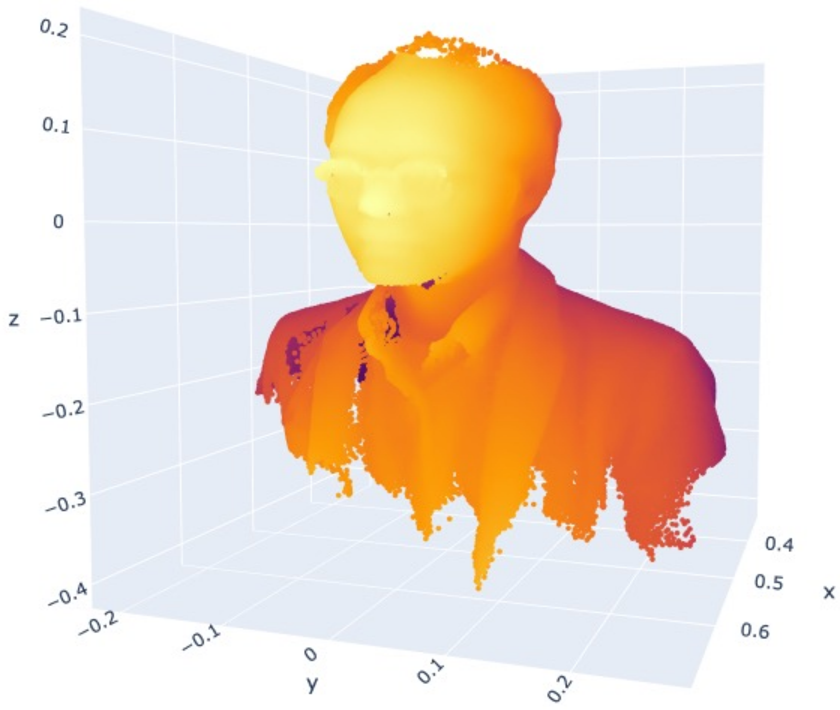


教科書p.154～p.162参照

# 3次元でのアフィン変換

- 元画像の座標を$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, 変換後の座標を$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$とするときにつぎのような変換をアフィン変換という。

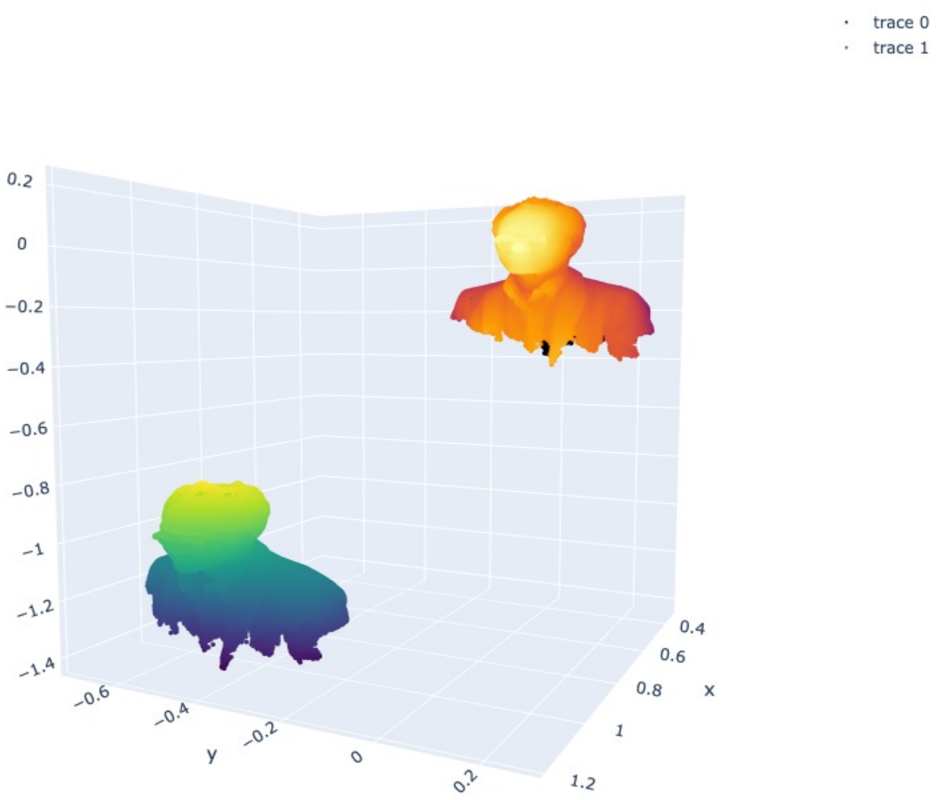
- $$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



教科書p.154～p.162参照

# 3次元でのアフィン変換の平行移動

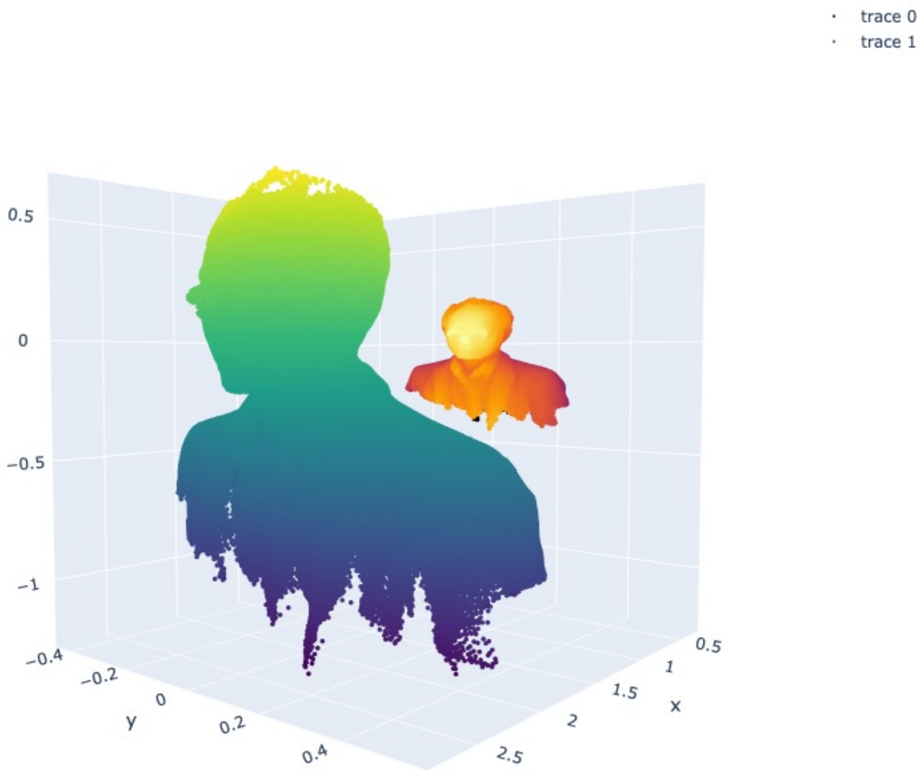
- $x$軸方向に$a$、$y$軸方向に$b$、$z$軸方向に$c$だけ平行移動
- $$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



教科書p.154～p.162参照

# 3次元でのアフィン変換の拡大・縮小

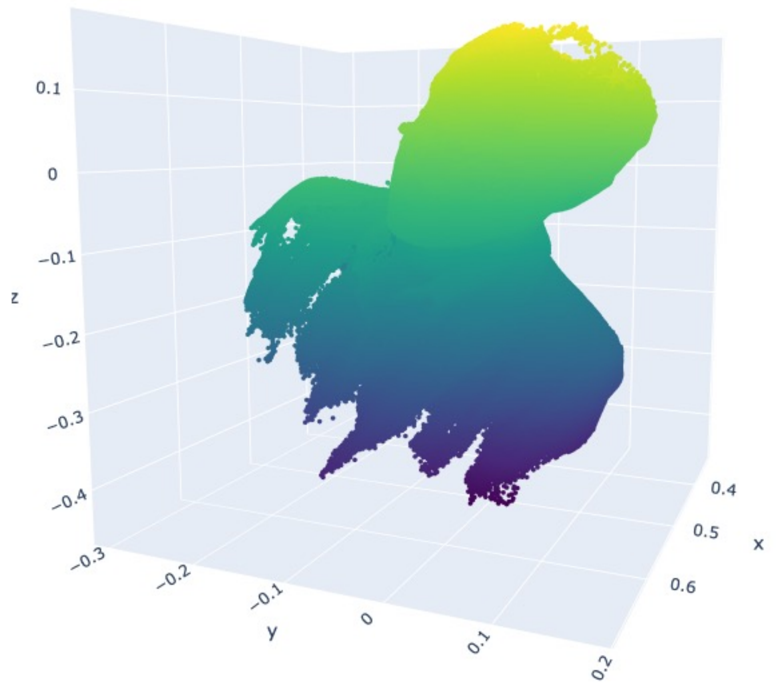
- $x$軸方向に$a$倍、$y$軸方向に$b$倍、$z$軸方向に$c$倍拡大・縮小
- $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$



教科書p.154～p.162参照

# 3次元でのアフィン変換の回転

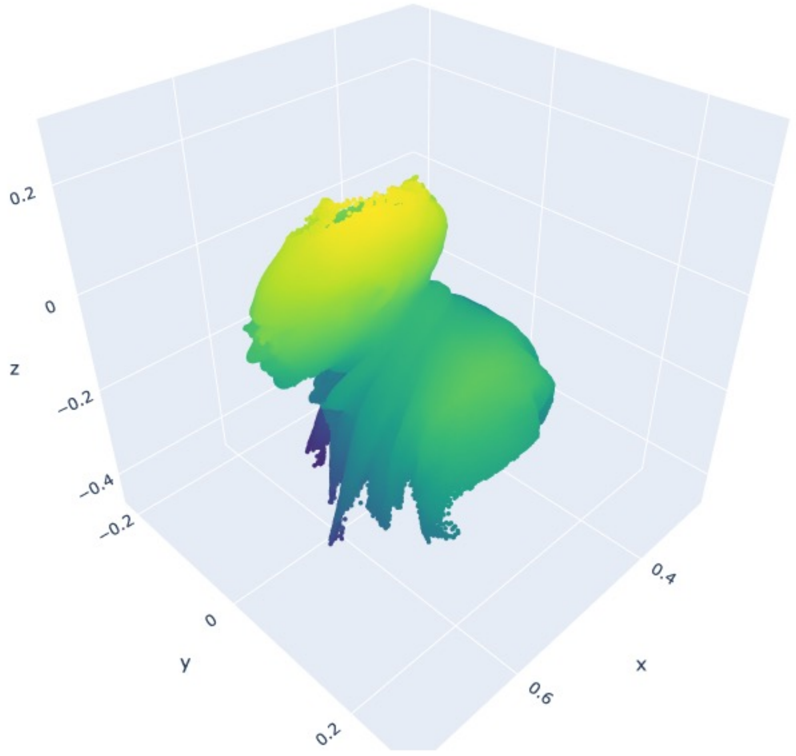
- $x$軸回りにθ度回転
  - $$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta & 0 \\ 0 & sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$
- y軸回りにθ度回転
  - $$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & 0 & sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sin\theta & 0 & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$
- $z$軸回りにθ度回転
  - $$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



教科書p.154〜p.162参照

# 3次元でのアフィン変換のせん断

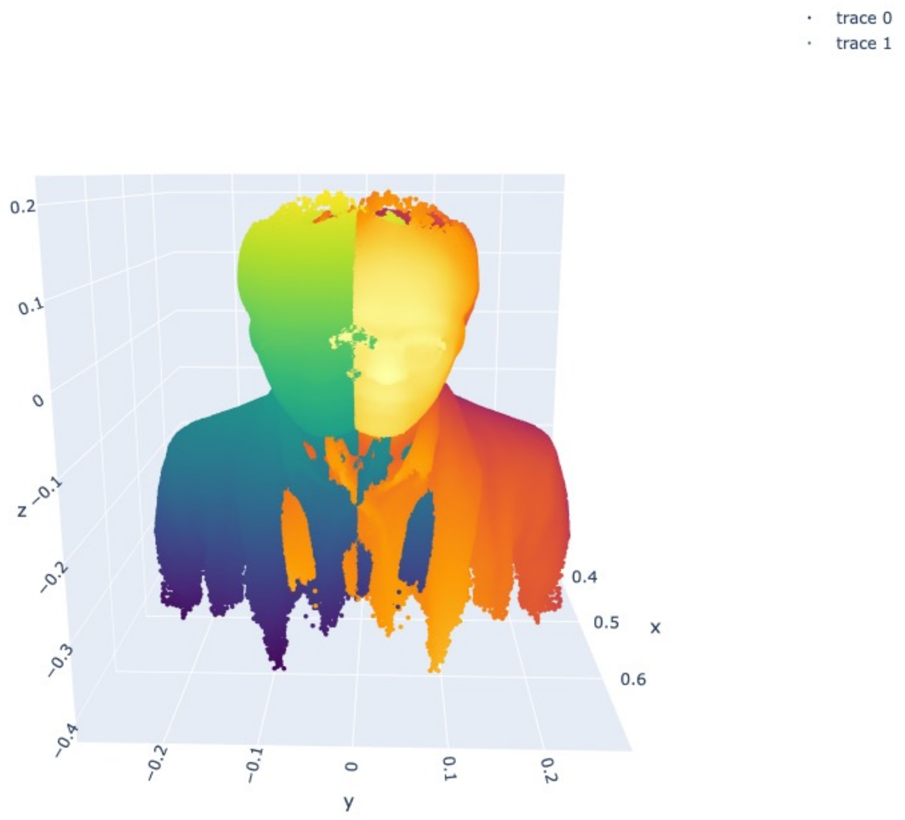
- 例）y値をx軸方向に$\theta$度せん断
  - $$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & tan\theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



教科書p.154～p.162参照

# 3次元でのアフィン変換の鏡映

- $xy$平面に関する鏡像
  - $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$
- $yz$平面に関する鏡像
  - $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$
- $xz$平面に関する鏡像
  - $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$



# グループワーク

1. アフィン変換を使って自由な作品を完成させよう
    - どういう元画像を用意して、どのようにアフィン変換をかけたか
    - 実際にアイデアを実現するプログラミングすること
    - 具体的な例を挙げて実際に計算結果も示す
    - プログラミング結果も示すこと

    - 各グループ発表5分、質疑応答2分

提出する際にはipynb形式、およびスライドの2つのファイルを提出すること
グループワーク課題資料をGoogle Colaboratoryで提出する際は、その資料の表紙、および提出時のメッセージに、各メンバーがどの部分を貢献したかとその貢献度%(全体を100%として)を記述して提出してください

# 個人課題

1. 教科書p.163～p.188を読んで理解したことをA4 1枚でまとめよ。特に固有値、固有ベクトルが次元圧縮のためのツールであることを気をつけてまとめること。

2. ‘nakanishi.npy’か自分で用意したplyファイル(3次元点群データ) を利用して、plotlyで表示させた上で、次のものを3次元アフィン変換を使って完成させてください。
   - x軸方向に0.5、y軸方向に-0.5、z軸方向に-1への平行移動
   - x軸方向に4倍拡大
   - y軸で30度回転
   - y値がx軸方向に30度せん断
   - x軸対象に鏡映

- 1については、docxまたはpdf、2については、ipynbファイル、結果の画像/動画ファイルを併せて提出すること
- Google Classroomで提出のこと
(締切はGoogle Classroom参照)