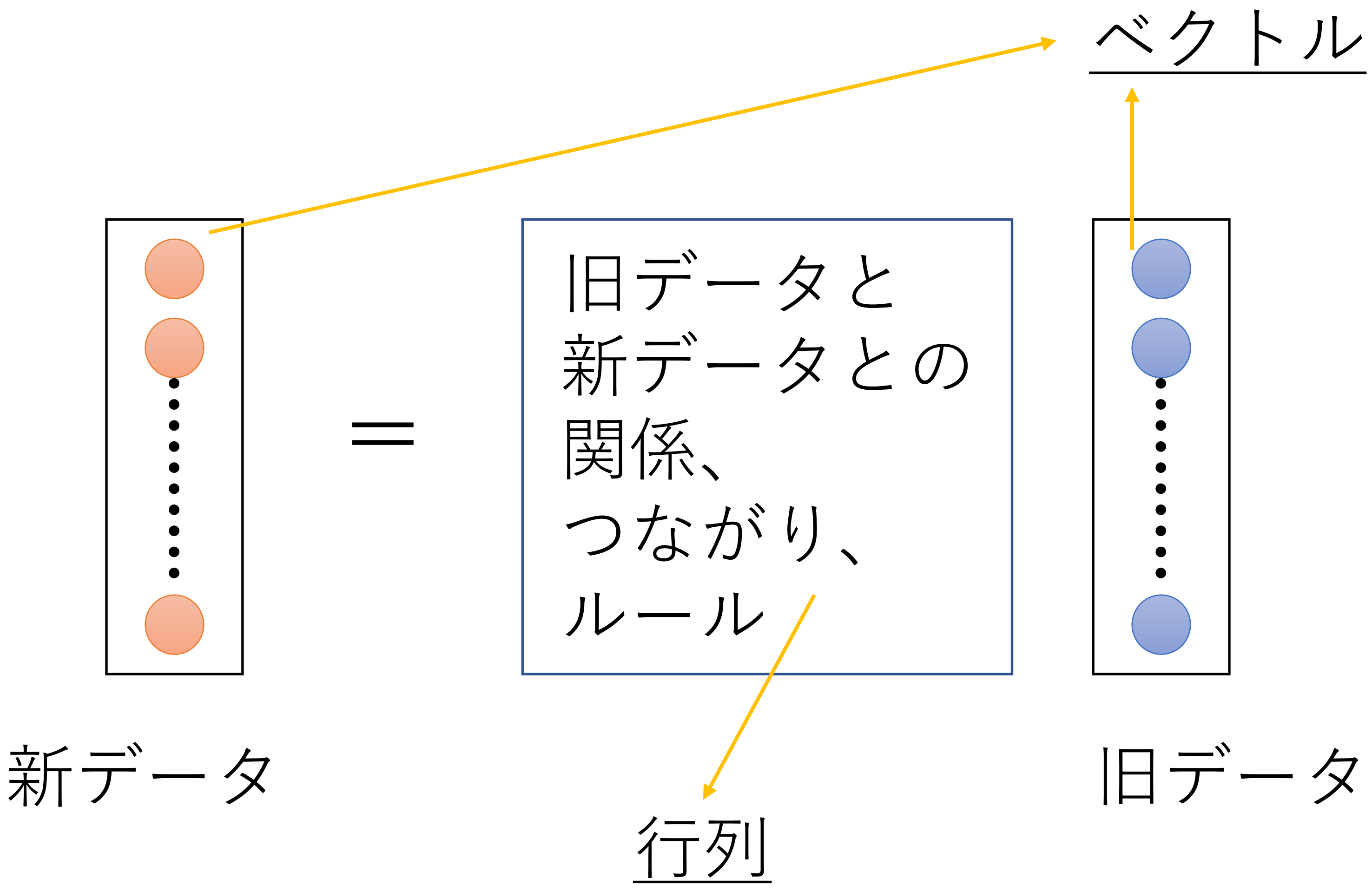
データと数理I
第5回

4章 線形変換/線形写像

武蔵野大学 データサイエンス学部データサイエンス学科
中西 崇文

線形代数とは

旧データから新データへの変換(Transformation)を追求する学問



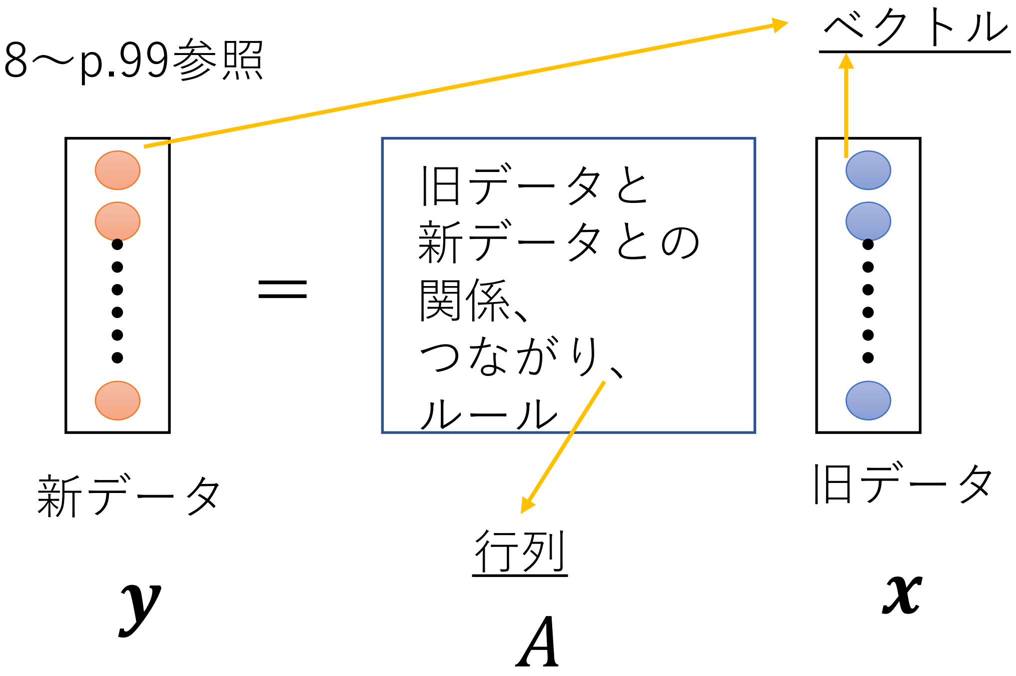
教科書p.98～p.99参照

行列とベクトルの積

- $m \times n$行列と n個の成分の列ベクトルで計算可能
- 結果m個の成分の列ベクトルができる

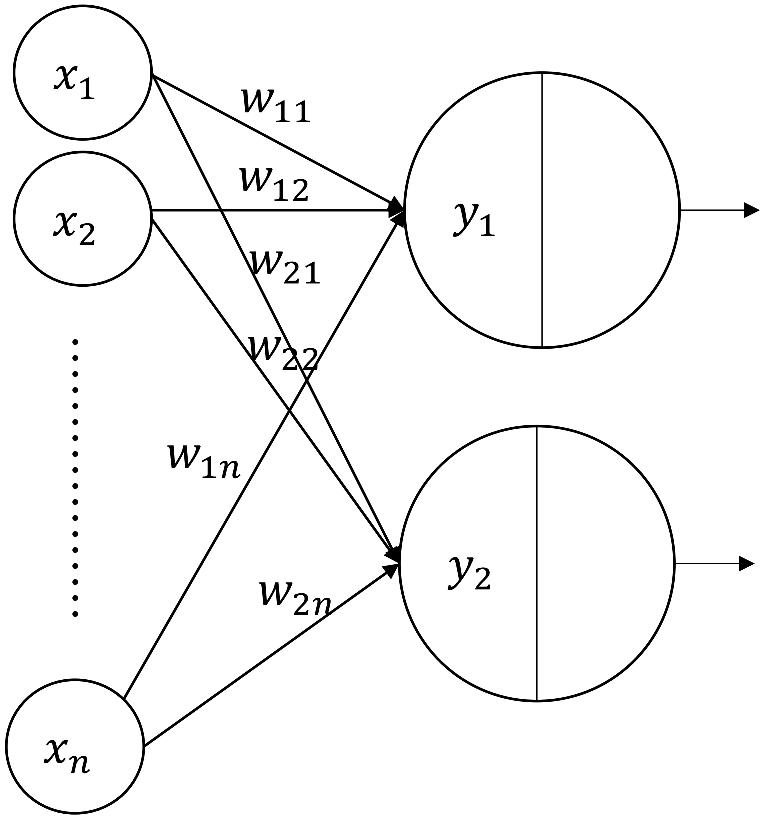
- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

- $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$



n次元ベクトル空間から
m次元ベクトル空間へ

ニューラルネットワークも線形写像



- $y_1 = w_1 x_1 + w_2 x_2 \ldots + w_n\, x_n$
- $\boldsymbol{y} = W\boldsymbol{x}$

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \ldots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \ldots & w_{2n} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_{\boldsymbol{2}} \\ \vdots \\ x_{\boldsymbol{n}} \end{bmatrix}$$

Pythonで計算してみよう

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & -7 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$について
  - Aは2×3行列、$\boldsymbol{x}$は3個の成分からなる列ベクトル

- $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times1 + 2\times2 + (-5)\times3 \\ 2\times1 + 3\times2 + (-7)\times3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ -13 \end{bmatrix}$
  - 行列Aによって、$\boldsymbol{x}$という3列ベクトルから$\boldsymbol{y}$という2列ベクトルに
  - 行列とベクトルの積はPythonではnumpy.dot(A,b)を使用する

教科書p.107～p.111参照

線形写像/線形変換

- n次元ベクトル空間R^nの1つの要素を決めたとき、ベクトル空間R^mのただ一つの要素が決まるとする。
    - $f: R^n \to R^m$
    - このfが次を満たすとき、fを線形写像 (linear mapping)という。
        - $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$
        - $f(k\boldsymbol{x}) = kf(\boldsymbol{x})$

- 特に、 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{m}$のとき、つまり
    - $f: R^n \to R^n$
    - これを線形変換(linear transformation)という

教科書p.107〜p.111参照

線形写像/線形変換の簡単な例1

- $n = m = 1$のとき、つまり
  - $f: R^1 \to R^1$

- $f(x) = 2x$
  - $f(x + y) = f(x) + f(y)$を満たすか、$x = 2, y = 3$で試す
    - $f(x + y) = f(2 + 3) = f(5) = 2\times5 = 10$
    - $f(x) + f(y) = f(2) + f(3) = 2\times2 + 2\times3 = 10$ →つまり、満たす

  - $f(kx) = kf(x)$を満たすか、 $x = 2, k = 5$で試す
    - $f(kx) = f(5\times2) = f(10) = 2\times10 = 20$
    - $kf(x) = 5f(2) = 5\times2\times2 = 20$ →つまり満たす

- $f(x) = 2x$という1次関数は1次元ベクトル空間R^1から1次元ベクトルR^1への線形変換

教科書p.107～p.111参照

線形写像/線形変換の簡単な例2

- $n=2, m=1$のとき、つまり
  - $f: R^2 \to R^1$

- $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, f(\boldsymbol{x}) = 2x_1 + 3x_2$
  - $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$を満たすか、$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ で試す
    - $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = 2\times3 + 3\times5 = 21$
    - $f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) = f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = (2\times1 + 3\times2) + (2\times2 + 3\times3) = 8 + 13 = 21$ →つまり、満たす

  - $f(k\boldsymbol{x}) = kf(\boldsymbol{x})$を満たすか、 $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, k = 5$で試す
    - $f(k\boldsymbol{x}) = f\left(5\times\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}\right) = 2\times5 + 3\times10 = 40$
    - $kf(\boldsymbol{x}) = 5f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = 5(2\times1 + 3\times2) = 5\times8 = 40$ →つまり満たす

- $f(\boldsymbol{x}) = 2x_1 + 3x_2$という関数は2次元ベクトル空間$R^2$から1次元ベクトル$R^1$への線形写像

教科書p.107～p.111参照

線形写像/線形変換の簡単な例2のつづき

- $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, f(\boldsymbol{x}) = 2x_1 + 3x_2$を別の表現方法をしてみる

- $A = [2 \quad 3]$ (1×2行列), $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$(2個の成分からなる列ベクトル)
  - $y = A\boldsymbol{x}$で表される
  - 例) $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$とすると、
    - $A\boldsymbol{x} = [2 \quad 3] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\times1 + 3\times2 = 8$
    - $f(\boldsymbol{x}) = 2x_1 + 3x_2 = 2\times1 + 3\times2 = 8$

教科書p.107～p.111参照

線形写像/線形変換の簡単な例3

- $n = 2, m = 2$のとき、つまり
  - $f: R^2 \to R^2$

- $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$
  - $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$を満たすか、$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$で試す
    - $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2\times3 - 5 \\ 3 + 2\times5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 13 \end{bmatrix}$
    - $f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) = f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2\times1 - 2 \\ 1 + 2\times2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\times2 - 3 \\ 2 + 2\times3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 13 \end{bmatrix}$ →つまり、満たす
  - $f(k\boldsymbol{x}) = kf(\boldsymbol{x})$を満たすか、 $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, k = 5$で試す
    - $f(k\boldsymbol{x}) = f\left(5\times\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2\times5 - 10 \\ 5 + 2\times10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \end{bmatrix}$
    - $kf(\boldsymbol{x}) = 5f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = 5\begin{bmatrix} 2\times1 - 2 \\ 1 + 2\times2 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \end{bmatrix}$→つまり満たす

- $f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$という関数は2次元ベクトル空間$R^2$から2次元ベクトル$R^2$への線形変換

教科書p.107～p.111参照

線形写像/線形変換の簡単な例3のつづき

- $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$を別の表現方法をしてみる

- $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (2×2行列), $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$(2個の成分からなる列ベクトル)
  - $y = A\boldsymbol{x}$で表される

  - 例) $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$とすると、
    - $A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times1 + (-1)\times2 \\ 1\times1 + 2\times2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$
    - $f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times1 - 2 \\ 1 + 2\times2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$

Aを表現行列と呼ぶ

教科書p.107～p.111参照

線形変換を考える

標準基底と呼ぶ

- $f: R^2 \to R^2$
- R^2の基底として単位ベクトル$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$をとる
- R^2のすべてのベクトルは$\boldsymbol{e}_1$と$\boldsymbol{e}_2$の線形結合で表現される
    - $k\boldsymbol{e}_1 + l\boldsymbol{e}_2 = k\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + l\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}$
    - $f(k\boldsymbol{e}_1 + l\boldsymbol{e}_2) = f(k\boldsymbol{e}_1) + f(l\boldsymbol{e}_2) = kf(\boldsymbol{e}_1) + lf(\boldsymbol{e}_2)$

教科書p.107～p.111参照

線形変換を考える

- $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$の場合
  - $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = f(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2) = x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + x_2 f(\boldsymbol{e}_2)$

$= x_1 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

これは、線形変換fは単位ベクトル$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$の行き先、

$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$によって決定される

教科書p.107～p.111参照

$f\colon R^2 \to R^2$の線形変換

- 線形変換fは、標準基底$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$の行き先$f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2)$によって決定される。

- $f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}, f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix}$
  であれば、その表現行列Aは次のようにあらわされる。
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

- $\boldsymbol{x}$が表現行列Aを持つ線形変換fによって変換される先を$\boldsymbol{y}$とすると次のようにあらわされる。
$$\begin{aligned} f\colon R^2 &\to R^2 \\ \boldsymbol{x} &\to \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

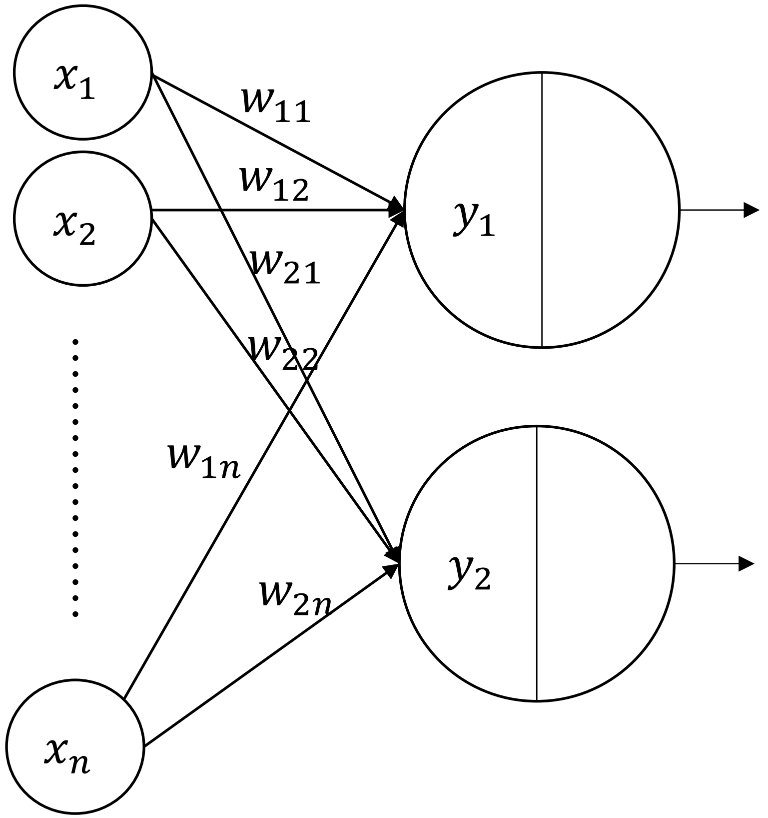
Pythonで計算してみよう

- 線形変換fの対応関係が
  - $f: R^3 \to R^3$
  - $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 \end{bmatrix}$

  と定められるとき。この線形変換の表現行列を求めよう。

  さらに、$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$が線形変換$f$によってどこに変換されるかを求めよう。

ニューラルネットワークも線形写像



- $y_1 = w_1 x_1 + w_2 x_2 \ldots + w_n\, x_n$
- $\boldsymbol{y} = W\boldsymbol{x}$

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \ldots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \ldots & w_{2n} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_{\boldsymbol{2}} \\ \vdots \\ x_{\boldsymbol{n}} \end{bmatrix}$$

どういうものかを知るための例

	桃	みかん	梨
値段(円)	200	100	150
重さ(g)	300	200	250

$$\begin{bmatrix} 850 \\ 1450 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & 100 & 150 \\ 300 & 200 & 250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ベクトル(新データ)
値段850円、重さ1450g

行列(ルール・関係)

ベクトル(旧データ)
桃2箱、みかん3箱、梨1箱

$$\begin{bmatrix} 200 & 100 & 150 \\ 300 & 200 & 250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200\times 2 + 100\times 3 + 150\times 1 \\ 300\times 2 + 200\times 3 + 150\times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 850 \\ 1450 \end{bmatrix}$$

柴田正憲, 貴田研司, “情報科学のための線型代数,” コロナ社, 2009

教科書p.114～p.118参照

写像の合成

- 2つ連続して写像をするものを1つの写像とみる
- 例1)
  - $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$という表現行列であらわされる$f$
    - $f: R^2 \to R^2$
    - $\quad \boldsymbol{x} \to A\boldsymbol{x}$
  - $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$という表現行列であらわされる$g$
    - $g: R^2 \to R^2$
    - $\quad \boldsymbol{x} \to B\boldsymbol{x}$

教科書p.114～p.118参照

写像の合成

- 線形変換fによってR^2のベクトル$\boldsymbol{x}$をR^2のベクトル$f(\boldsymbol{x})$に変換したあと、
  線形変換gによってR^2のベクトル$f(\boldsymbol{x})$をR^2のベクトル$g(f(\boldsymbol{x}))$に変換する

$$R^2 \xrightarrow{\quad f \quad} R^2 \xrightarrow{\quad g \quad} R^2$$

$$\boldsymbol{x} \longrightarrow f(\boldsymbol{x}) \longrightarrow g(f(\boldsymbol{x}))$$

fとgの合成写像→$g \circ f$と表す

$$\boldsymbol{x} \longrightarrow A\boldsymbol{x} \longrightarrow BA\boldsymbol{x}$$

$AB \neq BA$

であることに注意

教科書p.114～p.118参照

写像の合成

- 例2)
  - $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$という表現行列であらわされる$f$
    - $f: R^2 \to R^3$
  - $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$という表現行列であらわされる$g$
    - $g: R^3 \to R^2$

2次元ベクトル空間から
2次元ベクトル空間への
写像

  - 合成写像$g \circ f$は

$$R^2 \xrightarrow{\quad f \quad} R^3 \xrightarrow{\quad g \quad} R^2$$

  - 合成写像$f \circ g$は

$$R^3 \xrightarrow{\quad g \quad} R^2 \xrightarrow{\quad f \quad} R^3$$

3次元ベクトル空間から
3次元ベクトル空間への
写像

教科書p.114～p.118参照

写像の合成

- 合成写像$g \circ f$は

$$
\begin{array}{ccccc}
R^2 & \xrightarrow{\quad f \quad} & R^3 & \xrightarrow{\quad g \quad} & R^2 \\
\boldsymbol{x} & \longrightarrow & A\boldsymbol{x} & \longrightarrow & BA\boldsymbol{x}
\end{array}
$$

2次元ベクトル空間から
2次元ベクトル空間への
写像

- $BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} =$

$$
\begin{bmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + b_{13}a_{31} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} + b_{13}a_{32} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + b_{23}a_{31} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + b_{23}a_{32} \end{bmatrix}
$$

2×2行列となる

教科書p.114～p.118参照

写像の合成

- 合成写像$f \circ g$は

$$\begin{array}{ccccc} R^3 & \xrightarrow{\quad g \quad} & R^2 & \xrightarrow{\quad f \quad} & R^3 \\ \boldsymbol{x} & \longrightarrow & B\boldsymbol{x} & \longrightarrow & AB\boldsymbol{x} \end{array}$$

3次元ベクトル空間から
3次元ベクトル空間への
写像

- $AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} \end{bmatrix}$$

3×3行列となる

Pythonで計算してみよう

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$という表現行列であらわされる$f$
  - $f: R^2 \to R^3$
- $B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$という表現行列であらわされる$g$
  - $g: R^3 \to R^2$

  - 合成写像$g \circ f$の表現行列はBA

  - 合成写像$f \circ g$は表現行列はAB

「2章 ベクトルの基本/
ノルム、距離、内積」
Lec02.pptxより

基底

- ベクトル空間Vの$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots \boldsymbol{u}_N$が線形独立であり、 Vの任意の要素がこれらのベクトルの線形結合で表現できるとき、集合$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots \boldsymbol{u}_N\}$のことを$V$の基底とよぶ。また$N$を$V$の次元と呼ぶ。
  - $dimV = N$
  - $\boldsymbol{u}_i$を基底ベクトルと呼ぶ

「3章 行列の基本/連立1次方程式」
Lec03.pptxより

階数(ランク)

行階段形

- $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$-(ガウスの消去法)-> $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & -86 \end{bmatrix}$

行階段形において
行のうちすべてが0でない行の数を
階数(ランク)と呼ぶ

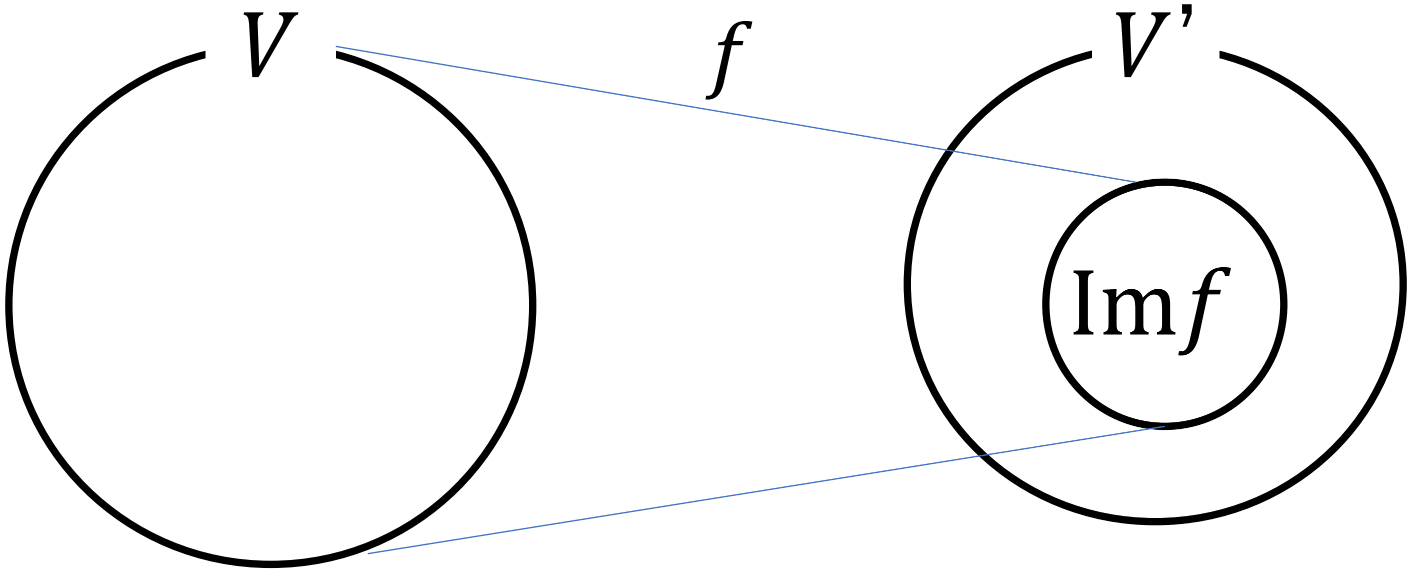
行列Aのランク：3

行列のサイズと階数(ランク)の関係で
連立1次方程式の解がどのようになっているかが分かる

教科書p.111～p.114参照

像$\mathrm{Im}f$の定義

- 線形写像f: $V \to V'$に対し、像(image, range)を定義する
  - $\mathrm{Im}f = \{f(\boldsymbol{x}) | \boldsymbol{x} \in V\}$



$\boldsymbol{x}$がベクトル空間Vの中を動くとき、
$\boldsymbol{x}$にfを作用させた部分集合

教科書p.111～p.114参照

Pythonで計算してみよう

- $\mathrm{Im}f$の基底の数、つまり$\dim(\mathrm{Im}f)$は、線形写像fの表現行列Aの階数(ランク)と一致する。

- 下記の表現行列とする線形写像の像の基底の数$\dim(\mathrm{Im}f)$を求めよう。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\dim(\mathrm{Im}f) = 3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\dim(\mathrm{Im}f) = 2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

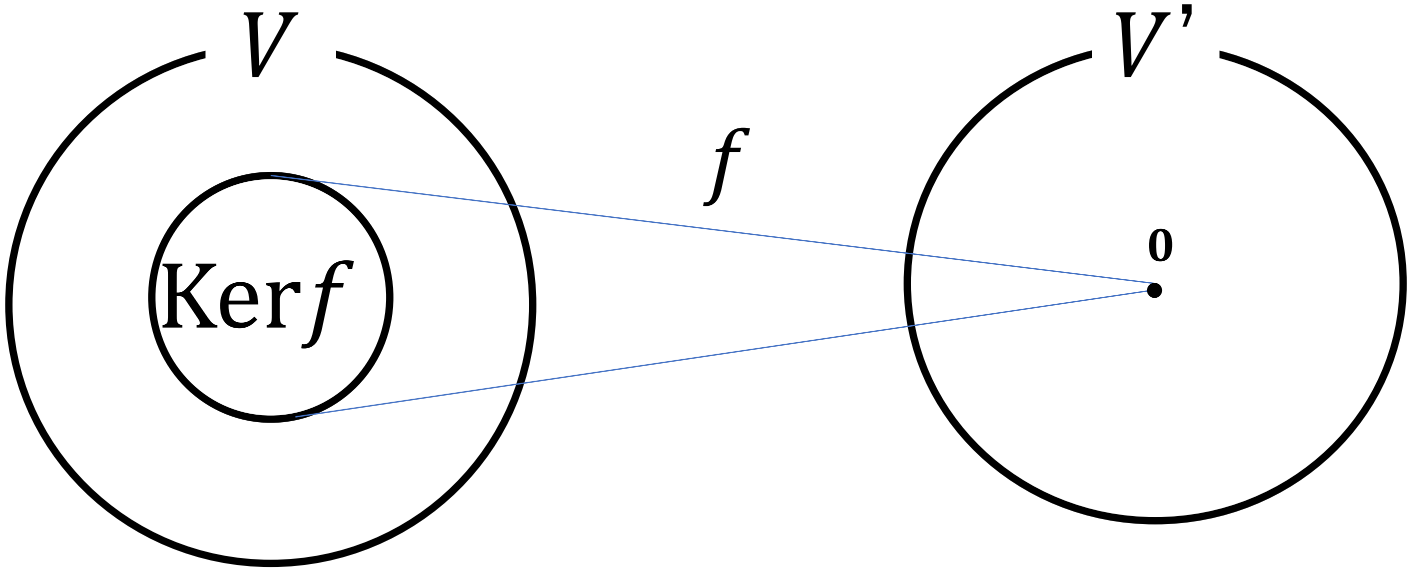
$$\dim(\mathrm{Im}f) = 1$$

石井俊全, “意味がわかる線形代数,” ベレ出版, 2011.　より問題

教科書p.111～p.114参照

核$\mathrm{Ker}f$の定義

- 線形写像$f: V \to V'$に対し、核(kernel)を定義する
  - $\mathrm{Ker}f = \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \in V, f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$



fを作用させると零ベクトルになるVの部分空間

Pythonで計算してみよう

- $Kerf$の基底はscipy.linalg.null_space(A)で計算できる。
  - つまり $\dim(Kerf)$は、scipy.linalg.null_space(A).shape[1]で表現できる。

- 下記の表現行列とする線形写像の核の基底の数$\dim(\mathrm{Ker}f)$を求めよう。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

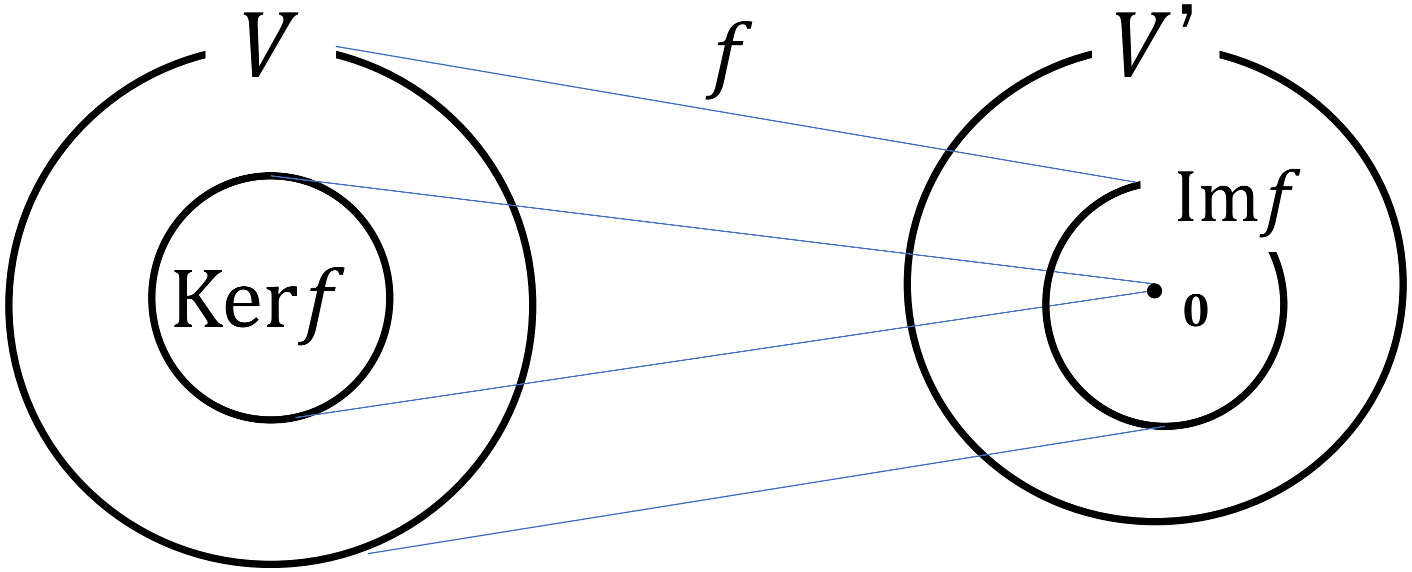
$\dim(\mathrm{Ker}f) = 0$ $\qquad \dim(\mathrm{Ker}f) = 1$ $\qquad \dim(\mathrm{Ker}f) = 2$

石井俊全, “意味がわかる線形代数,” ベレ出版, 2011.　より問題

教科書p.111〜p.114参照

以上の例から

- $dimV = \dim(Kerf) + \dim(Imf)$



グループワーク

1. 第1回目の授業の際のグループワークのアイデアを含めて、これまで学んだ線形写像/線形変換を用いたアプリケーションを構築してみよう
   - どういうベクトル、表現行列を用意して、どのような演算、処理をするか
   - 実際にアイデアを実現するプログラミングすること
     - 第1回目の授業で出したアイデアの実現が難しい場合は変更してもよい
   - 具体的な例を挙げて実際に計算結果も示す
   - プログラミング結果も示すこと
   - Gradio、Streamlitなどをつかって UIにもこだわること

   - 各グループ発表5分、質疑応答2分

提出する際にはipynb形式、およびスライドの2つのファイルを提出すること
グループワーク課題資料をGoogle Colaboratoryで提出する際は、その資料の表紙、および提出時のメッセージに、各メンバーがどの部分を貢献したかとその貢献度%(全体を100%として)を記述して提出してください

個人課題

1. 教科書p.129～p.162を読んで理解したことをA4 1枚でまとめよ。特にアフィン変換が線形写像の応用であることを気をつけてまとめること。

2. Lec04.ipynbの
個人課題のサンプルプログラムの部分を用いて、画像データを入れればその画像の色彩に基づく印象を表す語を出力するプログラムを線形写像の概念を使って完成してください。
    - 教科書p.119～p.128を参照すること
    - 15分で理解する色彩と心理学の関係－色が人間の心に与える影響」(https://re-sta.jp/color-psychology-7787)を読みながら印象を表す語と10色の関係を表す行列を作ってみよう。
    - 画像データをファイルパスで指定するとその画像データの色の印象から喚起される語が出力されるようなプログラムを作ってみよう。
    - 上記のサイトはあくまでも例示で、他の文献等から行列をつくることも可。
    - サンプルプログラムの部分も精度をあげるために改変等もしてください。
        - よい改変であれば、大幅加点いたします。
    - サンプルの通り、GradioなどをつかってWebアプリにしてください。

- 1については、docxまたはpdf、2については、ipynbファイルを提出すること
- Google Classroomで提出のこと
(締切はGoogle Classroom参照)