

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Prof. Dr. Ünal Halit ÖZDEN

Yönetim fonksiyonları

- Sanayi devrimi ile birlikte endüstri işletmelerinin hızla büyümeleri sonucunda bir kişinin bütün yöneticilik fonksiyonlarını tek başına yürütebilmesi imkansız hale gelmiştir
- Bunun doğal sonucu olarak yönetim fonksiyonları ayrılmış, böylece işletme bünyesinde üretim, pazarlama, finansman vb. farklı bölümler ortaya çıkmıştır

Çatışan amaçlar

- Yönetim fonksiyonunun gittikçe artan sayıda bölümlere ayrılması, yeni işletme sorunlarını da beraberinde getirmiştir
- Bir bölüm için en iyi olan davranış biçiminin bir başka bölüm için iyi olmak bir yana genellikle yıkıcı olması, bölümleri birbirlerinin amaç ve faaliyetlerini göz önünde bulundurmamak zorunda bırakmıştır
- Bu tip sorunlar ve bunlara daha iyi çözüm bulma yaklaşımları da yöneylem araştırmasını doğurmuştur

Yöneylem araştırmasının tarihçesi

- Kayıtlı olan literatüre göre yönetim için bilimsel yaklaşım prensipleri 1900'lü yılların başlarında Frederick Taylor tarafından ortaya konulmuştur
- Günümüz yöneylem araştırmasında kullanılan bazı model ve tekniklerin kullanılması çok eskiye dayansa da, “yöneylem araştırması” adı verilen ilk faaliyetin II. Dünya Savaşı sırasında gerçekleştirildiği kabul edilmektedir

Yöneylem araştırmasının tarihçesi

- II. Dünya Savaşı sırasında İngiltere askeri yönetimi, düşmanlarının hava akınları karşısında en iyi savunma şeklini belirlemek amacıyla farklı disiplinlerden bilim adamlarıyla bir ekip çalışması başlatmış ve böylece en iyi savunma şeklini bulmuştur
- Bu çalışma için bir araya gelen bilim adamlarından “yeni tip bombaların etkinliklerinin belirlenmesi ve radarların etkili biçimde kullanımlarının sağlanması” problemlerini çözmeleri istenmiştir
- Çözüm sonuçlarının uygulamada çok başarılı olması, savunma sisteminin diğer kesimlerinde; “radar denetim politikaları”, “uçaksavar yangın kontrolü”, “konvoy büyüklüğü”, “düşman denizaltılarının yerlerinin saptanması” gibi çeşitli askeri problemlerin çözümünde benzer ekiplerin oluşturulması sağlanmıştır

Yöneylem araştırmasının tarihçesi

- İngiltere’de alınan başarılı sonuçlar müttefiklerin de dikkatini çekmiş, bu ülkeler de askeri problemlerini farklı disiplinlerden bilim adamlarıyla oluşturdukları ekipleriyle çözmeye girişmişlerdir
- Yöneylem araştırmasıyla İngiltere’den çok sonra tanışmış olmakla beraber, ABD’nin bu konudaki yoğun çabaları yöneylem araştırmasında önemli ilerlemeler kaydedilmesini sağlamıştır

Yöneylem araştırmasının tarihçesi

- ABD hava kuvvetlerinin kurduğu ekibin üyelerinden birisi olan Dantzig, büyük organizasyonların gerçekleştirdikleri faaliyetlerin büyük bir bölümünün dağıtım problemi olarak ele alınabileceğini ve en iyi plan-programa bir amaç fonksiyonunun en küçüklenmesi (minimizasyonu) ile ulaşılabileceğini açıklamış, ayrıca doğrusal programlama problemlerinin klasik çözüm tekniği olan “**simpleks yöntemi**ni” önermiştir

Yöneylem araştırmasının tarihçesi

- Savaş sırasında, askeri problemlerin çözümü için oluşturulan ekiplerde aktif biçimde çalışan bilim adamları, savaş sonrasında dikkatlerini benzer yaklaşımın sivil yaşam problemlerine uygulanabilirliği üzerinde yoğunlaştırmışlardır:
 - Üniversitelerine dönüp mevcut teknikler için sağlam temel oluşturma konusunda çalışanlar
 - Yeni teknikler geliştirme çabasına girenler
 - Özel ekonominin değişik kesimlerindeki çalışmalarına dönerek buralarda karşılaşılan problemleri benzer yaklaşımla çözmeye çalışanlar
- Bütün bu çalışmalar bilimsel bir uğraşı alanının yani “**Yöneylem Araştırması**”nın doğuşuna yol açmıştır

Yöneylem araştırmasının uygulanması

- Yöneylem araştırmasını ilk uygulayan sivil kuruluşlar kar amaçlı büyük endüstriyel kuruluşlar olmuştur
- Küçük boyutlu kuruluşlar, yöneylem araştırmasının yalnızca büyük işletmeler için değil, kendileri için de yararlı olduğunun farkına biraz geç varmışlar ve araştırmacıların birbirlerinden farklı gibi görünmelerine karşın pek çok problemin “stok, dağıtım, sıralama, kuyruk, oyun” gibi belirli bir başlık altında incelenebileceklerini farketmeleri ve bunlar için standart çözüm teknikleri geliştirmelerinden çok sonra konuya ilgi göstermişlerdir

Yöneylem araştırmasının uygulanması

- Birkaç uygulama dışında yöneylem araştırmasının hizmet ağırlıklı endüstrilerde ve kamu kesiminde kullanılması 1960'lı yılların ortalarında gerçekleşmiştir
- Bugün, banka, kütüphane, hastane, otel, okul gibi hizmet ağırlıklı pek çok kuruluş hizmet verme etkinliğini artırmada yöneylem araştırmasından büyük yarar sağlamaktadır
- Devlet kuruluşları da plan, program ve politika belirleme çalışmalarında yöneylem araştırmasını yaygın bir biçimde kullanmaktadırlar
- Yöneylem araştırmasının çok geniş bir uygulama alanı bulması ve çok hızlı bir gelişme göstermesindeki en önemli faktör bilgisayar teknolojisindeki gelişme olmuştur

İlk yöneylem araştırması kuruluşu

- Yöneylem araştırması alanında çalışan bilimadamlarının ihtiyaçlarını karşılamak amacıyla kurulan ilk yöneylem araştırması kuruluşu, 1952 yılında ABD’de kurulan **ORSA (The Operational Research Society of America)** olmuştur
- Türkiye’de yöneylem araştırması çalışmalarının batıdan çok sonra başladığı bilinmektedir
- Ülkemizde de ilk yöneylem araştırması çalışmaları batıda olduğu gibi savunma kesiminde başlamıştır
- Savunma kesimi dışında ilk yöneylem araştırması ekibi 1965 yılında **Türkiye Bilimsel ve Teknik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)** bünyesinde kurulmuştur

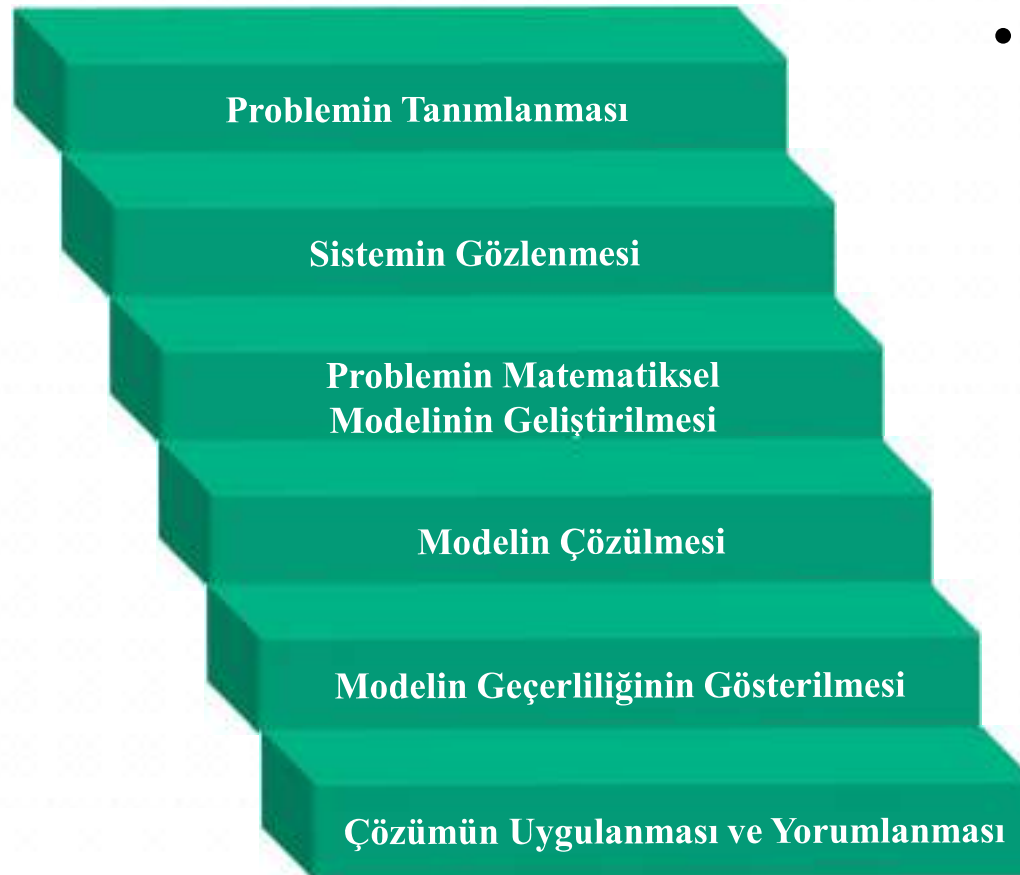
Yöneylem araştırmasının tanımı

- Yöneylem araştırması, sistemlerin performansını optimize etmek için teknikler kullanan bir bilim dalıdır
- Yöneylem araştırması, bir sistemde ortaya çıkan problemlere, sistemin denetlenebilir elemanları cinsinden bilimsel yöntem, teknik ve araçların uygulanmasıyla en iyi çözümün bulunmasıdır
- Yöneylem araştırması, insan, makina, para ve malzemeden oluşan endüstriyel, ticari, resmi ve askeri sistemlerde yönetimlerde karşılaşılan problemlere bilimsel yaklaşımdır. Amacı, yönetime politika ve faaliyetlerini bilimsel olarak belirlemede yardımcı olmaktır
- Yöneylem araştırması, mevcut imkanlardan en büyük faydayı sağlamak için girişilen bilimsel yaklaşımlar ve teknikler cümlesidir
- Yöneylem araştırmasının ana konusu, herhangi bir sistemin karmaşık operasyonlarını anlamak ve performansını iyileştirmek için bilimsel karar verme yöntemleridir

Yöneylem araştırmasının temel özellikleri

1. **Sistem yaklaşımını kullanması:** Yöneylem araştırması problemi çözerken, o problemin ait olduğu organizasyonun bütün unsurlarını, çevresini ve aralarındaki etkileşimi göz önünde bulundurur
2. **Disiplinlerarası bir yaklaşım olması:** Problemin modellenmesinde ve çözümünde farklı bakış açılarından faydalanabilmek için problemlerin disiplinlerarası bir ekip tarafından incelenmesi gerekir
3. **Bilimsel yöntemler kullanması:** Yöneylem araştırması problemi tanımlar, modeller, çözer, sonuçları test eder ve uygular

Yöneylem araştırmasının metodolojisi: İyi bir YA uygulamasının altı basamağı



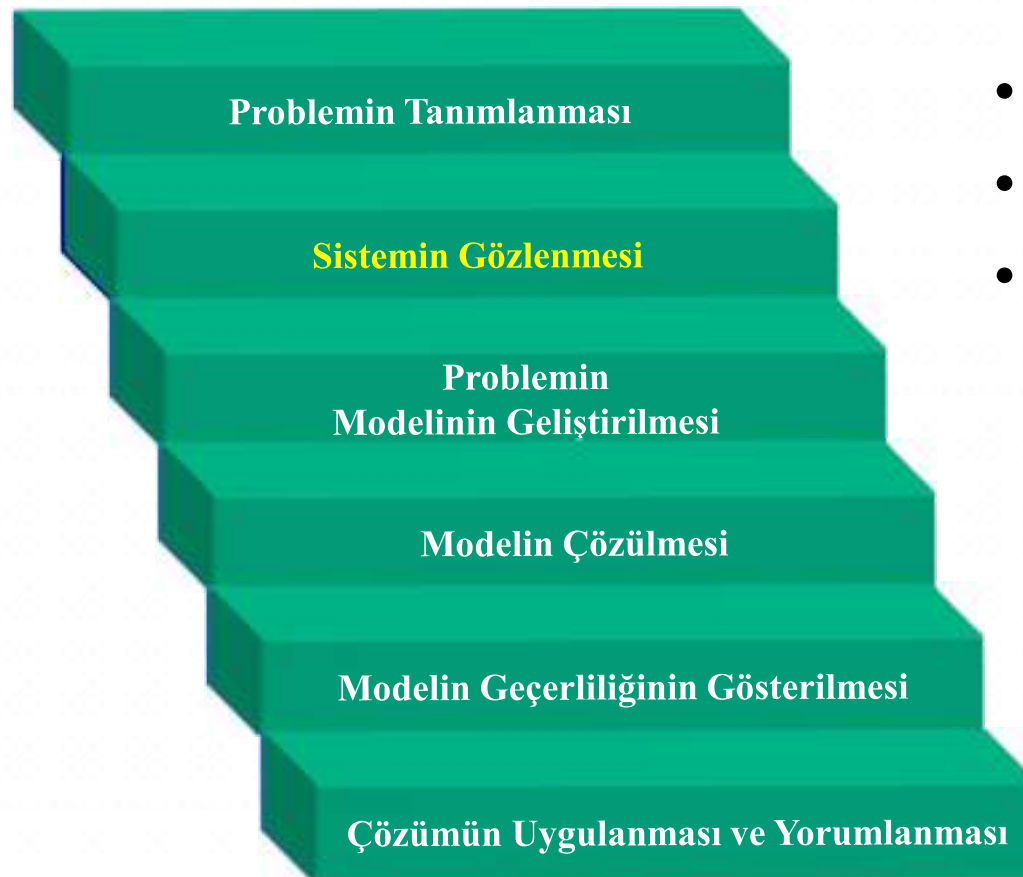
- Her basamak arasında geribesleme bulunmaktadır



- Amaçlar nelerdir?
- Problem çok dar kapsamlı mı ele alındı?
- Problem çok geniş kapsamlı mı ele alındı?

Problem tanımlanması

- Mümkün seçenekler arasından bir faaliyet veya faaliyetler dizisinin benimsenmesine **karar** denir
- **Karar verici**, alternatif stratejiler arasından en uygun olanını seçme konusunda karar verme yetkisine sahip birey ya da topluluğa verilen genel isimdir
- Karar vericinin ulaşmak istediği bir amacının olması, bu amaca ulaşmada izlenebilecek alternatif stratejilerin bulunması ve alternatifler içinden hangisinin amacı gerçekleştirebileceği konusunda kuşku içinde bulunulması gerekmektedir
- **Ancak bu koşullarda bir problem vardır** denir



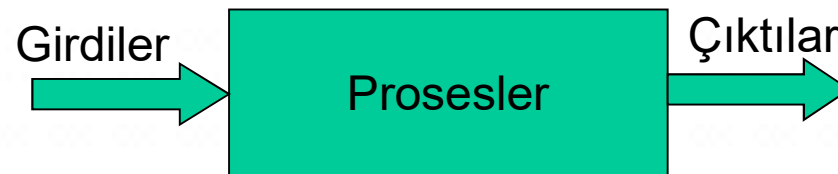
- Hangi veriler toplanmalı?
- Veriler nasıl toplanmalı?
- Sistemin farklı parçaları birbirleriyle nasıl etkileşmektedir?

Sistemin gözlenmesi

- Sistem gözlemlenir ve probleme etki eden parametreler tahmin edilmeye çalışılır
- Bu amaçla veri derlenmesi, bu adımın çok önemli bir kısmını oluşturur
- Tahmin değerleri sabit sayılar olarak işleme tabi tutulurlar ve matematiksel modelin geliştirilmesinde kullanılırlar
- Problem elemanlarının duruma en uygun biçimde belirlenebilmesi için **sistem yaklaşımı** kullanılır

Sistem nedir?

- Bir sınır içerisinde, birbirleriyle etkileşim içinde bulunan ve ortak bir amaca yönelmiş olan öğeler topluluğudur
- Sistem, girdileri çıktılara dönüştüren birbirleriyle ilişkili faaliyetlerden ve öğelerden (elemanlardan) oluşmaktadır
- Sistemin çok sayıda girdisi ve çıktısı olabilir



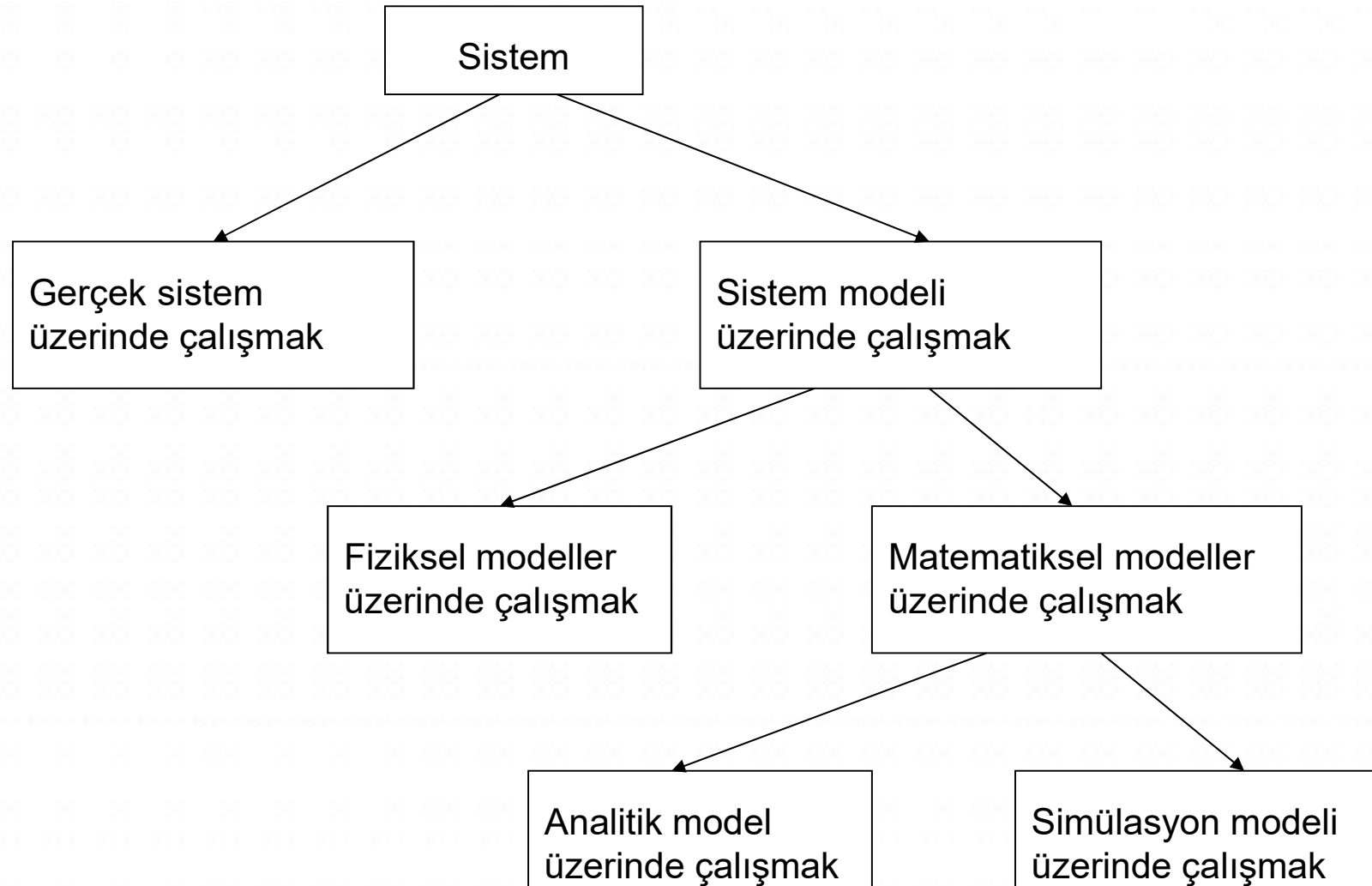


- Hangi tür model kullanılmalı?
- Model, problemi tam olarak ifade ediyor mu?
- Model çok mu karmaşık?

Model geliřtirmek

- Problemin kolayca çözülebilecek bir yapıya oturtulması gerekmektedir
- **Model nedir?**
- Bir sistemin değişen koşullar altındaki davranışlarını incelemek, kontrol etmek ve geleceği hakkında varsayımlarda bulunmak amacıyla elemanları arasındaki bağlantıları kelimeler veya matematiksek terimlerle belirleyen ifadeler topluluğuna model denir

Model geliřtirmek



Model geliřtirmek

- Her modelin kuruluş amacı, belirli bir ekonomik sistemi yönetmekle görevli kişi veya kişilere (karar vericiye) mümkün karar seçeneklerini sunmak, bunların sonuçlarını belirlemek ve karşılaştırmalar yapmaktır
- Yöneylem araştırmasının karar vermeye en önemli katkısı matematiksel modellerdir
- Bir sistemin davranışlarıyla ilgili kuralların matematiksel olarak ifade edilmesiyle matematiksel modeller kurulur
- Eğer ele alınan sistem matematiksel modellerle özölemeyecek kadar karmaşık bir yapıya sahipse sistemin bir simölasyon modeli kurulur.
- Simölasyon, bir sistemin tüm çalışma zamanı boyunca davranış şeklinin bilgisayar ortamında taklit edilmesidir

Matematiksel modellerin elemanları

- Ekonomik sistemlerin matematiksel modellerinde kullanılan elemanlarını üç ana grupta toplamak mümkündür:
 1. **Amaç fonksiyonu**
 2. **Karar değişkenleri**
 3. **Kısıtlar**
- Bir karar verme durumunda ilgilenilen sistem dikkatli bir şekilde gözlemlenir ve değerleri kontrol edilebilen ve sistemin performansını etkileyen parametreler belirlenir. Bu parametreler yöneticilerin kontrolü altındadır ve **karar değişkenleri** olarak tanımlanırlar. Bir üretim sisteminde farklı ürünlerin üretilecek miktarları, bir yerden başka yere taşınacak ürün miktarı, işçi sayısı, makina sayısı vb
- Karar değişkenlerinin amaç üzerindeki etkilerinin analitik olarak gösterilmesiyle **amaç fonksiyonu** oluşturulur
- **Kısıtlar**, sistemin içinde bulunduğu koşullardan kaynaklanmaktadır (talep kısıtları, kapasite kısıtları gibi)



- En uygun çözüm tekniği nedir?
 - Analitik çözüm
 - Algoritmalar
 - Simülasyon
 - Sezgisel

Modelin çözülmesi

- **Analitik çözüm:** Problemin Lagrange çarpanları, diferansiyel ve integral hesapları ile koşullu en iyi çözümünün bulunmasıdır. Analitik çözümde sadece matematiğin değil iktisat teorisinin de temel kuralları kullanılır
- **Algoritma çözümü:** Analitik çözüm bazen çok zor veya imkansız olabilir. Belirli bir sıra içerisinde gerçekleştirilen matematiksel ve mantıksal işlemler kümesine “algoritma” denir. Yinelemeli olarak uygulanan algoritmalar her adımda optimuma daha yakın bir çözüme doğru ilerler
- **Simülasyon çözümü:** Problem, analitik olarak veya algoritmalarla çözülemiyorsa kullanılır. Sistemin davranış şekli bilgisayar ortamında taklit edilir
- **Sezgisel çözüm:** Problem optimum çözümü bulunamayacak kadar karmaşıksa, sezgisel yöntemler sezgiye veya bazı deneysel kayıtlara dayanan karar kuralları ile belirli sayıda adımdan sonra en iyi olmasa da tatminkar bir sonuç verirler



- Modelden elde edilen çıktılar sistemin kendisinden elde edilen çıktılarla uyuyor mu?
- Modelden elde edilen çıktılar mantıklı mı?
- Model hatalı olabilir mi?

Modelin geçerliliğinin gösterilmesi

- Modelden elde edilen çözümü uygulamaya koymadan önce gerçeğe uygunluğunun kanıtlanması gerekir
- Eğer çözüm sistemin geçmiş dönem sonuçlarını aynen veya daha olumlu bir şekilde sağlıyorsa, modelin geçerli olduğu kabul edilir
- Eğer sistemin geçmiş dönem sonuçları yoksa simülasyondan yararlanılır
- Model geçerliliğinin kanıtlanmasında bir başka yol olarak da sistemdeki deneyimli kişilerin görüşlerine başvurulabilir



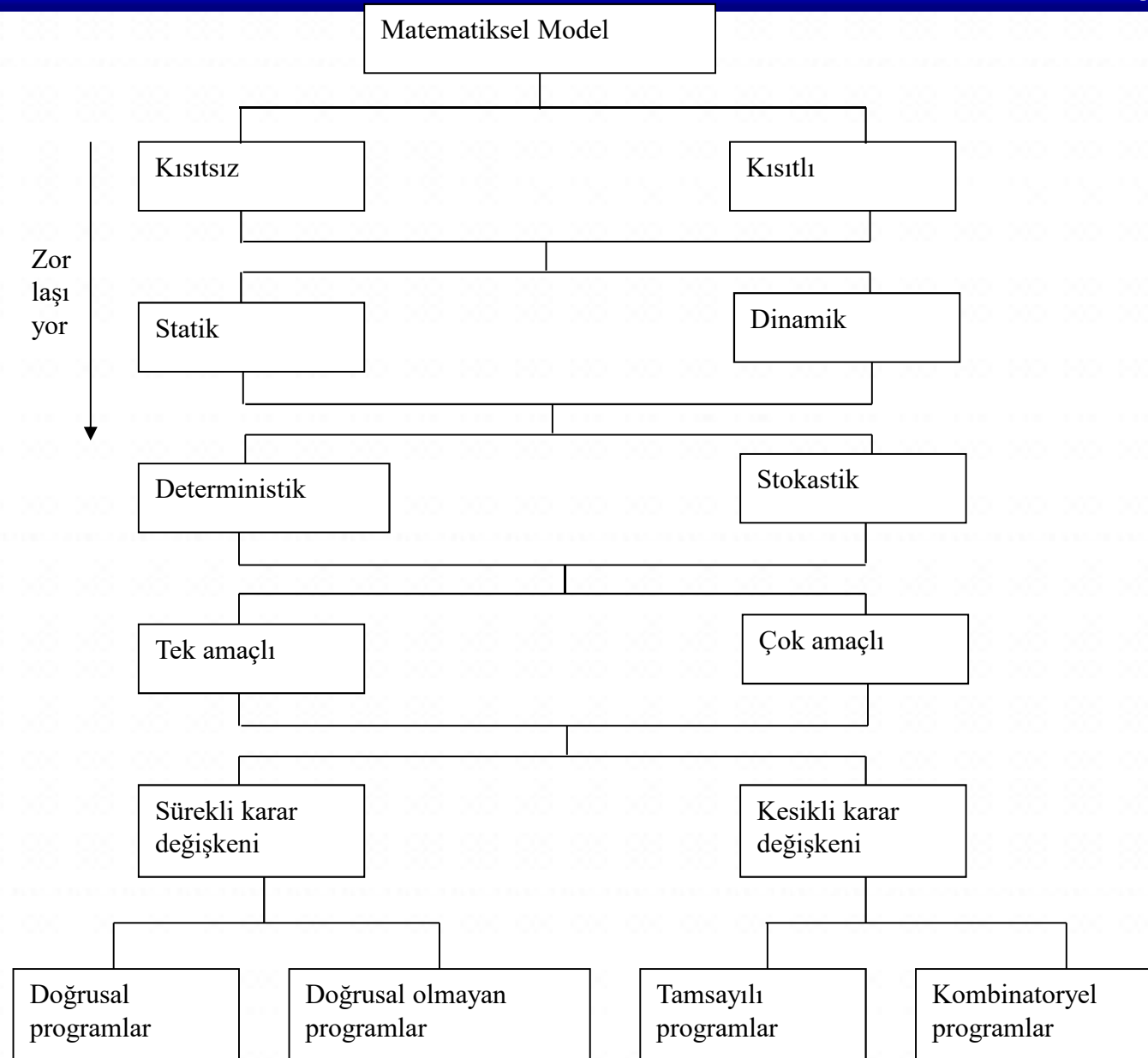
- Yöneylem araştırması ekibi, uygulama sürecini açıklamalı ve uygulamada yardımcı olmalıdır
- Uygulamanın nasıl yapılacağı bir rapor halinde yönetime sunulmalıdır

Başarılı Yöneylem Araştırması Uygulamaları

Şirket	Yıl	Problem	Kullanılan Teknik	Yıllık Tasarruf
Hewlett Packard	1998	Üretim hattında ara stok tasarımı	Kuyruk Modelleri	\$280 million
Taco Bell	1998	İşgücü çizelgelemesi	Tamsayılı Programlama, Tahmin, Simülasyon	\$13 million
Proctor & Gamble	1997	Üretim ve dağıtım sisteminin yeniden tasarlanması	Ulaştırma Modelleri	\$200 million
Delta Airlines	1994	Uçakların rotalara atanması	Tamsayılı Programlama	\$100 million
AT&T	1993	Çağrı merkezi tasarımı	Kuyruk modelleri, Simülasyon	\$750 million
Yellow Freight Systems, Inc.	1992	Nakliye şebekelerinin tasarımı	Şebeke Modelleri, Tahmin, Simülasyon	\$17.3 million
San Francisco Police Dept.	1989	Devriye çizelgeleme	Doğrusal Programlama	\$11 million
Bethlehem Steel	1989	Külçe kalıbı tasarımı	Tamsayılı Programlama	\$8 million
North American Van Lines	1988	Yükleri şoförlere atamak	Şebeke Modelleme	\$2.5 million
Citgo Petroleum	1987	Rafineri operasyonları & dağıtım	Doğrusal Programlama, Tahmin	\$70 million
United Airlines	1986	Rezervasyon personelinin çizelgelenmesi	Doğrusal Programlama, Kuyruk, Tahmin	\$6 million
Dairyman's Creamery	1985	Optimum üretim seviyeleri	Doğrusal Programlama	\$48.000
Phillips Petroleum	1983	Ekipman yenileme	Şebeke Modelleme	\$90.000

Matematiksel model türleri

- Yöneylem araştırmasında karşılaşılabilecek matematiksel model türleri, ilgilenilen karar probleminin yapısına göre şekillenir



Zorlaşıyor

Matematiksel model türleri

- Eğer karar değişkenleri üzerinde hiçbir sınırlama yoksa kısıtsız modeller ortaya çıkar, en azından bir sınırlama olması kısıtlı modelleri ortaya çıkarır. Gerçek hayatta genellikle kısıtlı problemler karşımıza çıkar.
- Eğer problem tek bir dönem için çözülecekse statik model, birden fazla dönem göz önüne alınarak çözülecekse dinamik model ortaya çıkar.
- Eğer birden fazla amaç varsa çok amaçlı problemler ortaya çıkar.
- Eğer tüm karar değişkenleri pozitif reel (gerçel) değerler alıyorsa sürekli optimizasyon problemi söz konusudur
- Tüm karar değişkenlerinin tamsayı değerler alması gerekiyorsa kesikli optimizasyon problemi ortaya çıkar
- Bazı karar değişkenlerinin reel, bazılarının tamsayı değer alması durumunda ise karışık kesikli optimizasyon problemi ile karşılaşırız.
- Eğer karar değişkenlerinin kombinatoryal seçenekleri söz konusuysa kombinatoryal optimizasyon problemleri ortaya çıkar.

Matematiksel model türlerine göre kullanılan çözüm yaklaşımları

- Dinamik modeller için kullanılan yaklaşım dinamik programlamadır.
- Eğer optimize edilecek birden fazla amaç varsa genellikle kullanılan yaklaşım hedef programlamadır.
- Modeldeki tüm fonksiyonların doğrusal olması durumunda sürekli optimizasyon problemleri doğrusal programlama yöntemi ile çözülür. Sürekli optimizasyon modelinde en azından bir fonksiyonun doğrusal olmaması durumundaysa doğrusal olmayan programlama yöntemi kullanılır.
- Eğer kesikli optimizasyon problemlerinde karar değişkenleri herhangi bir tamsayı değer alıyorsa tamsayılı programlama yöntemi kullanılır.
- Kombinatoriyal optimizasyon problemlerinin belirli bir boyuta kadar olanı tamsayılı programlama yöntemi ile çözülürken, orta ve büyük boyutlu problemlerin sezgisel yöntemlerle çözülmesi gerekmektedir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

TAMSAYILI PROGRAMLAMA

Tamsayılı Programlama

Doğrusal programlamanın bölünebilirlik varsayımını göz ardı edildiğinde, diğer bütün varsayımlar aynı kalmak koşuluyla, doğrusal programlama tamsayılı doğrusal programlamaya dönüşür. Kısaca tamsayılı programlama, model değişkenlerinden bazılarının veya hepsinin tamsayı değerler alması koşulunu içeren bir programlama türüdür.

Tamamen Tamsayı Doğrusal Programlama

Bütün değişkenleri tamsayı olan doğrusal programlamaya "tamamen tamsayı doğrusal programlama" denir. Tamamen tamsayı programlamaya örnek olmak üzere aşağıdaki modeli göz önünde bulunduralım.

$$Z_{\text{enb}} = 3x_1 + 6x_2$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \text{ tamsayı}$$

Karma Tamsayı Doğrusal Programlama

Değişkenlerden bazılarının tamsayı değerler alması durumunda "karma tamsayı doğrusal programlama" söz konusu olur. Sözgelimi, aşağıdaki problemde x_2 tamsayı olmadığından, problem karma tamsayı doğrusal programlama problemidir.

$$Z_{\text{enb}} = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$x_1, x_3 \text{ tamsayı}$$

Sıfır-1 Programlama

Tamsayılı programlama problemlerinin çoğunda değişkenlerin bir kısmı veya hepsi sıfır veya 1 değeri ile sınırlandırılır. Bunun nedeni, tamsayı karar değişkeninin (x_i) genellikle bir faaliyetin yapılması ($x_i = 1$) veya yapılmaması ($x_i = 0$) ile ilgili olmasıdır. Bu gibi durumlarda "sıfır-1 programlama" söz konusu olur.

Gevşek Biçim

Tamsayı olma koşulu göz ardı edildiğinde ortaya çıkan programlamaya, tamsayılı doğrusal programlamanın "doğrusal programlamaya gevşetilmiş biçimi" veya kısaca "gevşek biçim" denir.

Tamsayılı programlamanın en iyi çözümü ile buna ilişkin gevşek biçimin en iyi çözümü arasındaki ilişki tamsayı problemlerinin çözüm sonuçlarının incelenmesi bakımından çok önemlidir. Bu ilişki, "herhangi bir en büyükleme amaçlı tamsayılı programlamanın amaç fonksiyonunun en iyi değeri, kendisine karşılık gelen doğrusal programlamanın amaç fonksiyonunun en iyi değerine eşit veya küçüktür" şeklinde özetlenebilir. (Üst sınır)

Problem en küçükleme amaçlı olduğunda bu ilişki, tamsayılı programlama probleminin en iyi çözüm değeri kendisine karşılık gelen gevşek problemin en iyi çözüm değerine eşit veya ondan büyük olur şeklinde açıklanır. (Alt sınır)

Örnek

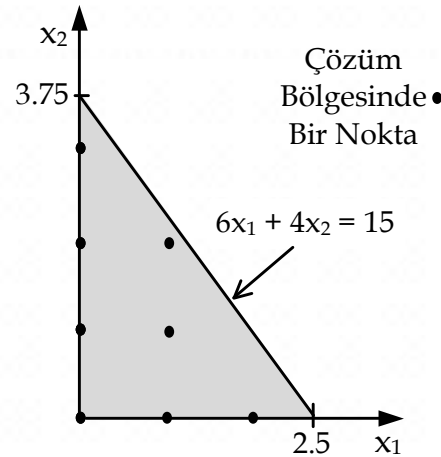
$$Z_{\text{enb}} = 10x_1 + 8x_2$$

$$6x_1 + 4x_2 \leq 15$$

negatif olmama ve tamsayılık koşulu,

$x_1, x_2 \geq 0$ ve tamsayı

Problemin grafik çözümü Şekil 5.1'de gösterilmiştir.



Şekil 5.1

Gevşek biçimin uygun çözüm bölgesi Şekil 5.1'deki gri alan olup, en iyi çözüm; $x_1 = 0$, $x_2 = 3.75$, $Z_{\text{enb}} = 30$ olarak belirlenmiştir. Buna göre 30, tamsayılı problemin en iyi çözümü için üst sınırdır. Şekil 5.1'den görüleceği gibi tamsayılı programlamanın çözüm bölgesi doğrusal programlamanın çözüm bölgesinden farklıdır.

Çözüm

Bu noktaların koordinatlarının belirlenmesiyle tamsayıli probleminin uygun çözüm kümesi,

$$S = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (2, 0), (1, 1), (1, 2)\}$$

Olarak düzenlenir.

Problemin niteliğine göre, amaç fonksiyonu değerini en büyük veya en küçük yapan nokta en iyi çözüm noktasıdır. Hesaplanan Z değerleri, aşağıda gösterilmiştir.

$$Z(0, 0) = 10(0) + 8(0) = 0$$

$$Z(0, 1) = 10(0) + 8(1) = 8$$

$$Z(0, 2) = 10(0) + 8(2) = 16$$

$$Z(0, 3) = 10(0) + 8(3) = 24$$

$$\mathbf{Z(1, 2) = 10(1) + 8(2) = 26}$$

$$Z(1, 0) = 10(1) + 8(0) = 10$$

$$Z(2, 0) = 10(2) + 8(0) = 20$$

$$Z(1, 1) = 10(1) + 8(1) = 18$$

Tamsayılı Programlama Çözüm Yöntemleri

Tamsayılı doğrusal programlama problemlerinin çözümünde kullanılan belli başlı yöntemler; dal-sınır algoritması ile Gomory kesme düzlemi algoritmasıdır. Herhangi bir tamsayılı programlamanın gevşek biçiminin en iyi çözümünde tamsayı olması istenen değişkenlerin hepsi tamsayı ise, bu çözüm tamsayılı programlamanın da en iyi çözümü olur. Bu durumu aşağıdaki basit problemin çözümü üzerinde gösterelim.

$$Z_{enb} = 8x_1 + 12x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0,$$

$$x_1, x_2 \text{ tamsayı}$$

Gevşek problemin en iyi çözümü,

$x_1 = 0, x_2 = 3, Z_{enb} = 36$ şeklinde belirlenmiştir.

Gevşek problemin uygun çözüm bölgesi

Şekil 5.2'de OAB üçgen alanıyla, tamsayılı problemin çözüm noktaları ise (•) ile gösterilmiştir.



Şekil 5.2

Dal-Sınır Algoritması

Dal-sınır algoritması hem tamamen tamsayılı hem de karma tamsayılı programlama problemlerinin çözümünde kullanılabilen genel bir yaklaşımdır.

Örnek 5.8: Aşağıdaki problemi dal-sınır algoritmasıyla çözünüz .

$$Z_{\text{enb}} = 7x_1 + 3x_2$$

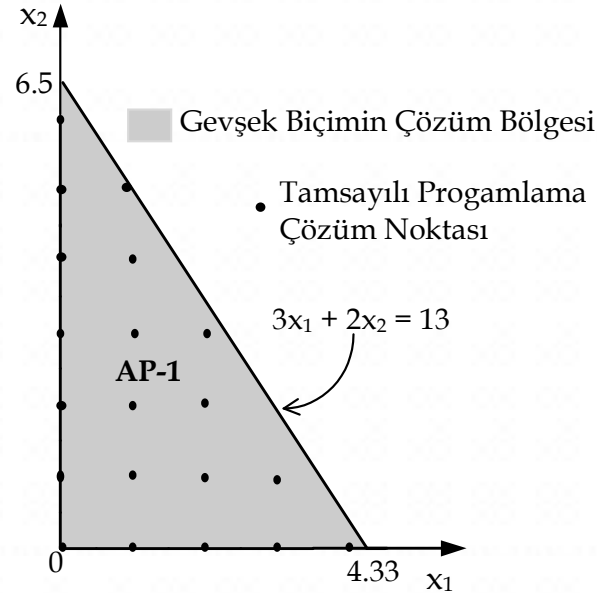
$$3x_1 + 2x_2 \leq 13$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \text{ tamsayı}$$

Çözüm 5.8

Çözüm 5.8: Dal-sınır algoritmasının ilk adımı tamsayılı problemi gevşetmek (tamsayı olma koşulunu göz ardı etmek) ve bu problemin en iyi çözümünü bulmaktır. Problemin normal doğrusal programlamaya dönüştürülmüş biçimi alt problem 1 (AP-1) olarak isimlendirilir. AP-1'in en iyi çözümünde tamsayı olması istenen değişkenler tamsayı iseler, bu çözüm tamsayı problemin de en iyi çözümü olur. AP-1 için en iyi çözüm, $x_1 = 4.33$, $x_2 = 0$, $Z_{enb} = 30.333$ (bkz. Şekil 5.3) olarak elde edilmiştir.



Şekil 5.3

AP-1'in en iyi çözümü tamsayılı olmadığından dal sınır algoritmasıyla orijinal problemin en iyi çözümü bulununcaya kadar çözüm bölgesinin düzenlenmesine devam edilir.

Çözüm 5.8

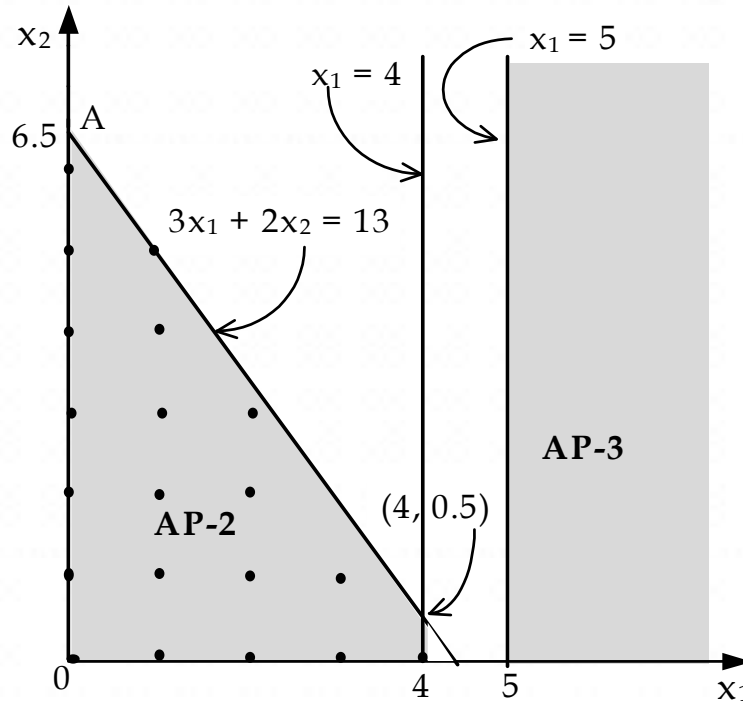
Yöntemin yeni adımı, gevşek problemin çözüm bölgesini parçalara ayırmaktır. Bu yolla tamsayı problemin en iyi çözümünün araştırılacağı alan küçültülmüş olur. Parçalama işleminde, tamsayı olması istenen ama tamsayı olmayan değişkenlerin seçilmesi esastır. Gevşek biçimin en iyi çözümünde x_2 tamsayı olduğundan, parçalama işlemi için tamsayı olmayan x_1 'in seçilmesi gerekir. x_1 'in tamsayı olmayan (4.333) çözüm değerine en yakın iki tamsayı 4 ve 5'dir. Tamsayılı programlamanın çözüm bölgesindeki her nokta $x_1 \leq 4$ veya $x_1 \geq 5$ koşulunu sağlamalıdır. Bu ikiye ayırma koşulu dallanma kavramının öne çıkmasına neden olur. $x_1 \leq 4$ veya $x_1 \geq 5$ şeklindeki parçalama işlemi 4.333 değerine ikinci kez rastlama şansını ortadan kaldırır. Kısaca, $x_1 \leq 4$ veya $x_1 \geq 5$ belirlemesiyle, yani x_1 'in dallandırılmasıyla gevşek biçimin çözüm bölgesi iki parçaya ayrılmış olur. Parçalar aşağıda tanımlanmış olan farklı alt problemlere karşılık gelir.

Çözüm 5.8

AP-2: $AP-1 + x_1 \leq 4$

AP-3: $AP-1 + x_1 \geq 5$

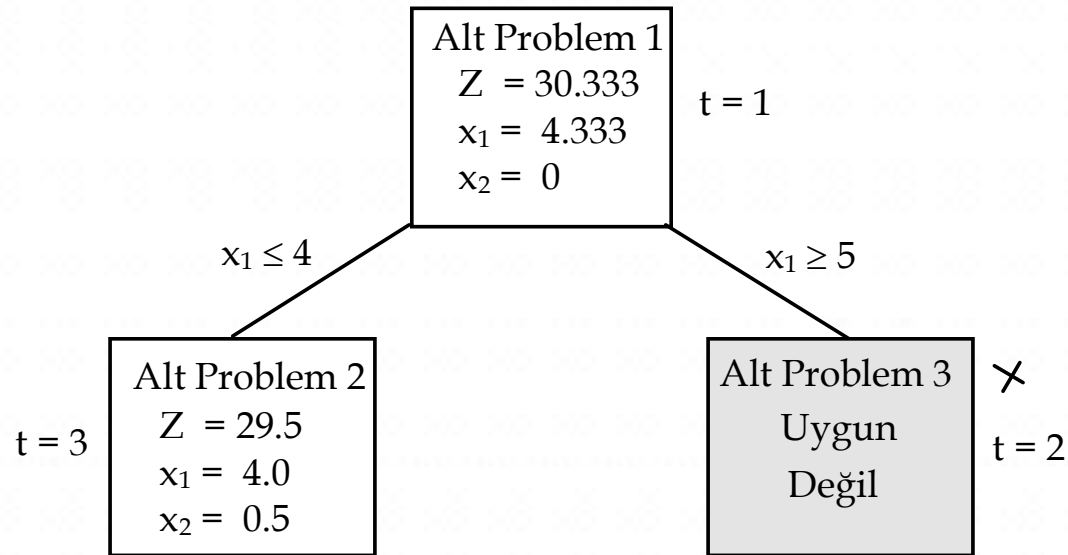
Özetle AP-1, biri AP-2 diğeri AP-3 olmak üzere iki problemle yer değiştirmiştir. Ne AP-2 ne de AP-3 $x_1 = 4.333$ değerini içerir. Şekil 5.4'de gösterildiği gibi gevşek biçimin en iyi çözümü bir daha ortaya çıkamaz.



Şekil 5.4

Şekilden görüldüğü gibi, AP-3'ün çözüm bölgesi ile AP-1'in çözüm bölgesinin hiçbir ortak noktası olmadığından AP-3'den elde edilecek herhangi bir çözüm uygun olmayacaktır. Bu nedenle, AP-3'den hareketle belirlenecek bir çözüm en iyi olamaz. Bunu ifade etmek için uygun çözümü olmayan alt problemler \times ile işaretlenir (bkz. Şekil 5.5). AP-3'ün dallandırılması tamsayı çözüm hakkında bilgi sağlamayacağından, bundan sonraki işlemlerde AP-3'ün dikkate alınmasına gerek yoktur. AP-2'ye geçelim. AP-2'nin en iyi çözümü; $x_1 = 4$, $x_2 = 0.5$ ve $Z_{enb} = 29.5$ olarak belirlenmiştir.

Şu ana kadar yapılanlar Şekil 5.5'de özetlenmiştir. Görüldüğü gibi her bir alt probleme bir düğüm, alt problem yaratmada kullanılan her bir kısıtlayıcıya bir dal karşılık gelmektedir. Bir alt problemi diğerinden ayıran kısıtlayıcı, ilgili alt problemler arasındaki dal üzerine yazılmaktadır. Ayrıca alt problemlerin hangi sırada çözüldükleri düğümlerin yan taraflarına $t = \text{sıra no}$ şeklinde belirtilmektedir.



Şekil 5.5

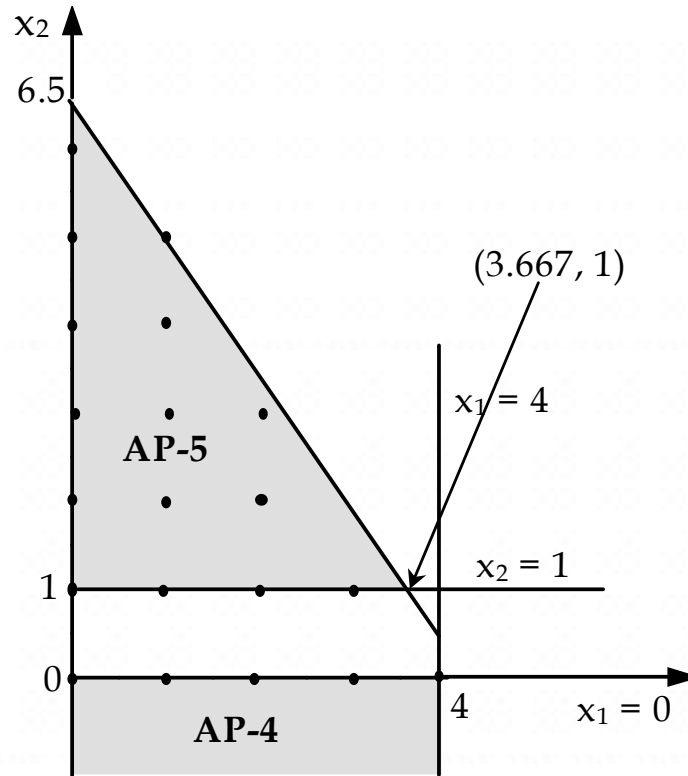
AP-2'nin en iyi çözümünde; x_2 tamsayı olmadığından, x_2 dallandırma değişkeni olur. Dallandırma ile AP-2'nin uygun çözüm bölgesi, $x_2 \leq 0$ ve $x_2 \geq 1$ noktalarını kapsayan iki bölgeye ayrılır.

Bu yolla yaratılan yeni problemler (AP-4 ve AP-5) aşağıda ve bunların çözüm bölgeleri Şekil 5.6'da gösterilmiştir.

AP-4: AP-1 + $x_1 \leq 4$ + $x_2 \leq 0$ = AP-2 + $x_2 \leq 0$

AP-5: AP-1 + $x_1 \leq 4$ + $x_2 \geq 1$ = AP-2 + $x_2 \geq 1$

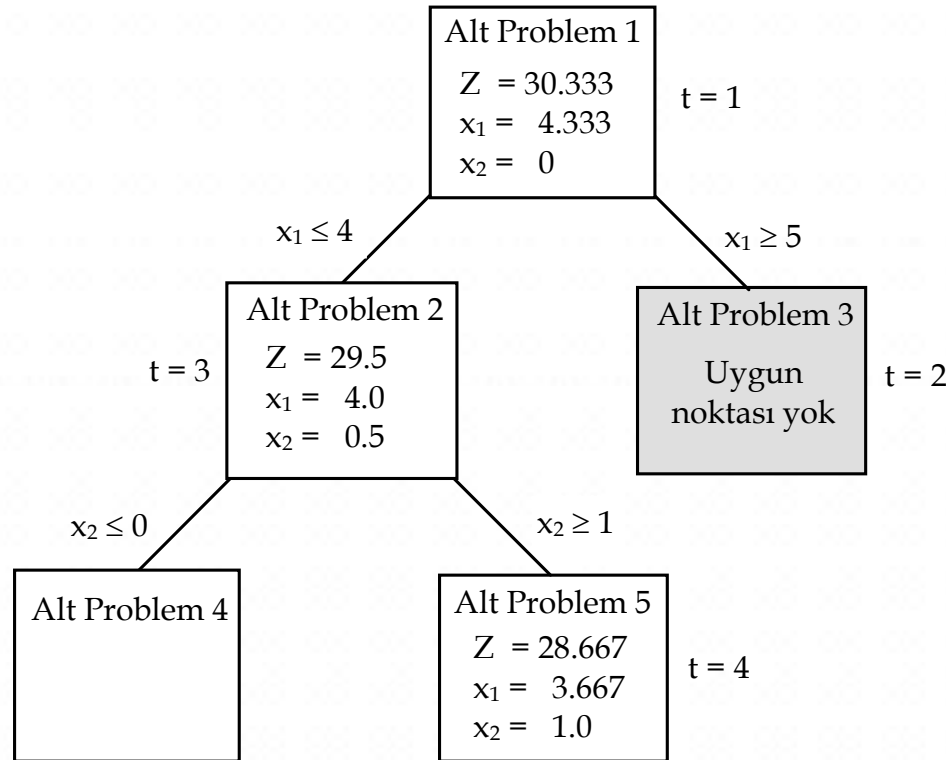
Çözülmemiş problemler AP-4 ile AP-5'dir. Çözüm için en yeni olan AP-5 seçilecektir.



Şekil 5.6

AP-5'in en iyi çözümü; $x_1 = 3.667$, $x_2 = 1$ ve $Z_{\text{enb}} = 28.667$ 'dir.

Alt problemler ve çözüm sonuçları Şekil 5.7’de gösterilmiştir.



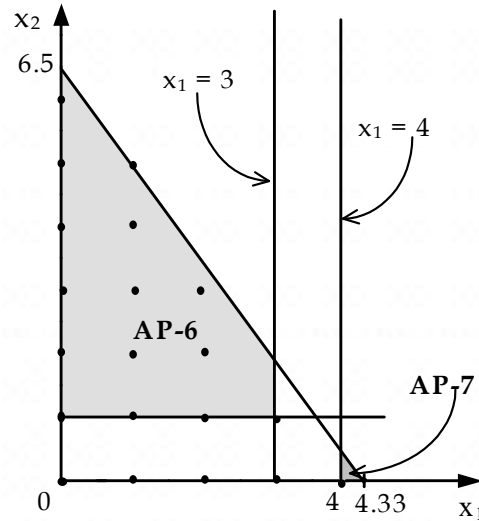
Şekil 5.7

AP-5’in çözümünde x_1 tamsayı olmadığından, ($x_1 = 3.667$) AP-4’ü çözmeden önce x_1 dallandırılır. $x_1 \leq 3$ ’le belirlenen AP-6 ve $x_1 \geq 4$ ’le belirlenen AP-7 aşağıda gösterilmiştir.

AP-6: $AP-1 + x_1 \leq 4 + x_2 \geq 1 + x_1 \leq 3 = AP-5 + x_1 \leq 3$

AP-7: $AP-1 + x_1 \leq 4 + x_2 \geq 1 + x_1 \geq 4 = AP-5 + x_1 \geq 4$

AP-6 ve AP-7'nin uygun çözüm bölgeleri Şekil 5.8'de gösterildiği gibidir.

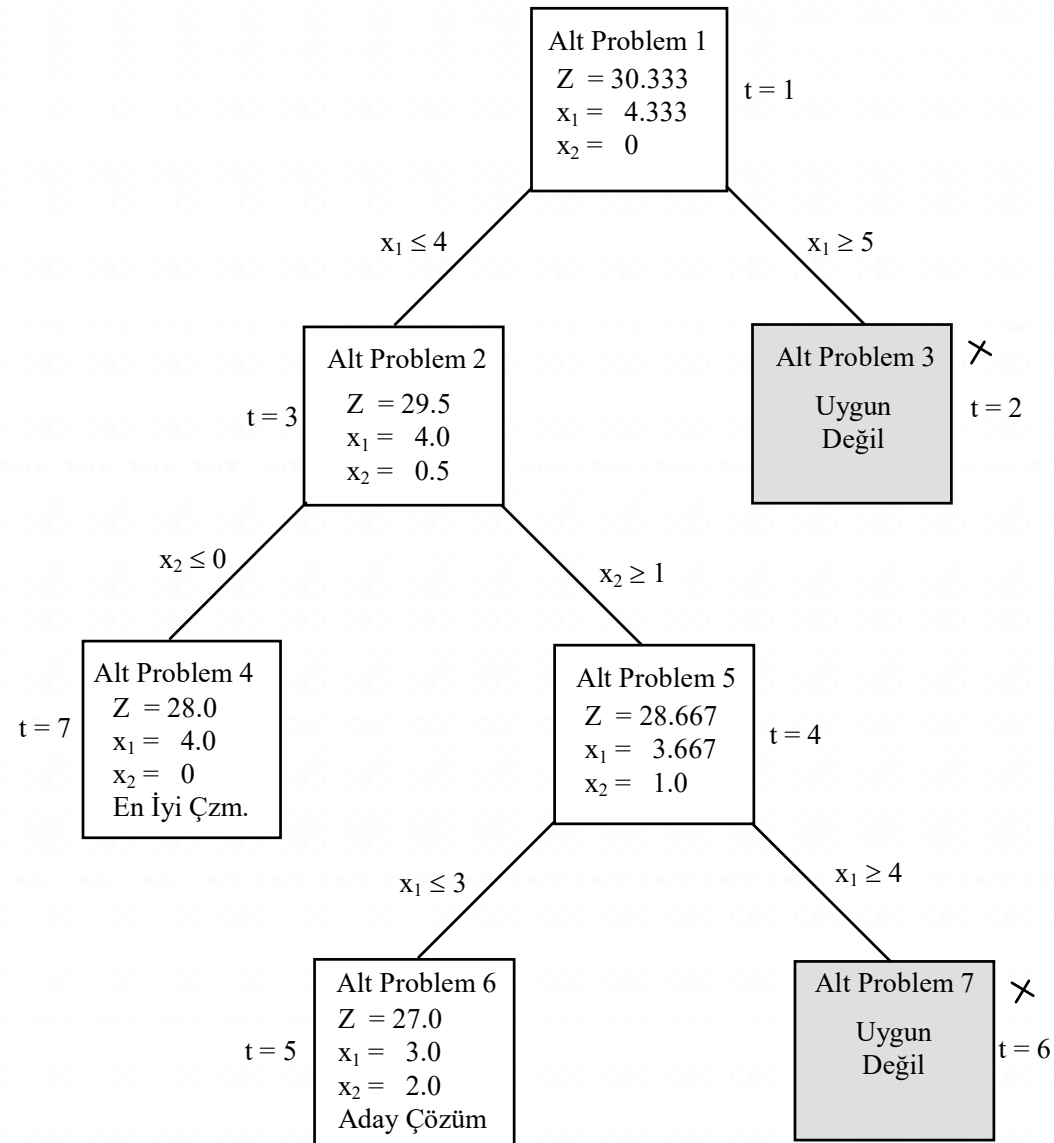


Şekil 5.8

İkisi yeni (AP-6 ve AP-7), diğeri önceden tanımlanmış ve hala çözülmemiş olan (AP-4) üç alt problem vardır. Yukarıda açıklandığı gibi alt problemlerin çözümüne en yeni olandan başlanır. En yeni olanlar arasında seçim rastgele yapılır. Biz AP-6'yı seçelim. AP-6'nın en iyi çözümü $x_1 = 3$, $x_2 = 2$ ve $Z_{enb} = 27$ olarak belirlenmiştir (bkz. Şekil 5.9). Çözümde değişkenler tamsayı olduklarından AP-6'dan sağlanan çözüm tamsayı problemin en iyi çözümü olmaya adaydır. Z'nin 27 olarak belirlenen değeri, bundan sonra çözülecek alt problemlerin Z değerleri için bir alt sınır oluşturur. Yani, bu aşamadan sonra elde edilecek bir çözümün en iyi olabilmesi için Z değeri en az 27'ye eşit olmalıdır.

Çözülmemiş iki alt problemin daha bulunduğu bu aşamada, son giren ilk çıkar kuralı doğrultusunda, AP-7 seçilmelidir. AP-7'nin çözümü uygun olmadığından, çözülmemiş tek alt problem olan AP-4'e geçilir. AP-4'ün en iyi çözümü $x_1 = 4$, $x_2 = 0$ ve $Z_{enb} = 28$ olarak belirlenmiştir. Bu çözüm de (değişkenler tamsayı olduğundan) tamsayılı problemin en iyi çözümü olmaya adaydır. Ayrıca AP-4 için belirlenen $Z = 28$ değeri AP-6 için belirlenen çözümün en iyi olmadığına işaret etmektedir. İki aday çözümün belirlendiği bu problemde en büyük Z değerini veren çözüm AP-4'ün çözümüdür.

Tüm alt problemler ve çözümleri Şekil 5.9'da özetlenmiştir.



Kesme Düzlemi Algoritması

Tamsayılı programlama problemlerinin çözümünde kullanılan diğer bir teknik kesme düzlemi algoritmasıdır. Dal-sınır algoritmasında olduğu gibi, kesme düzlemi algoritması uygulamasına da tamsayılı problemin gevşetilmiş biçiminin en iyi çözümüyle başlanır. Bu en iyi çözümde, tamsayı olması istenen değişkenler tamsayı iseler tamsayılı problem çözülmüş olur. Gevşek problemin en iyi çözümü tamsayılı programlamanın en iyi çözümü olma özelliğini taşııyorsa, kesme düzlemi algoritması uygulamasına geçilebilir. Kesme düzlemi algoritmasında da, dal-sınır algoritmasında olduğu gibi, tekrarlı bir şekilde özel kısıtlayıcılar ekleyerek çözüm uzayında gerekli düzeltmeler yapılır. Özel kısıtlayıcı ekleme işlemi tamsayı olma koşulunu gerçekleyecek bir en iyi çözüme ulaşıncaya değin sürdürölür.

Örnek 5.11

Kesme düzlemi algoritmasının nasıl kullanılacağını dal-sınır yöntemi ile çözülen örnek 5.8'deki problem üzerinde açıklayalım.

Örnek 5.11: Aşağıdaki problemi kesme düzlemi algoritmasıyla çözünüz.

$$Z_{\text{enb}} = 7x_1 + 3x_2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 9$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 13$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1, x_2 tamsayı

Çözüm 5.11

Çözüm 5.11: Kesme düzlemi algoritması klasik doğrusal programlama probleminin simpleks yöntemle elde edilen en iyi çözüm tablosundan işe başlar. Tamsayı olma koşulunun göz ardı edilmesiyle belirlenen gevşek problemin en iyi çözümünün yer aldığı simpleks çözüm tablosu aşağıda gösterilmiştir.

Tablo 5.10

TDV	x_1	x_2	S_1	S_2	ÇV
S_1	0	-0.333	1	-0.667	0.333
x_1	1	0.667	0	0.333	4.333
Z_j	7	4.669	0	2.331	30.333
$Z_j - C_j$	0	1.669	0	2.331	-

Elde edilen en iyi çözümde, x_2 (= 0) tamsayı olmakla birlikte, x_1 (= 4.333) tamsayı olmadığından bu çözüm aranan en iyi çözüm olamaz. Tamsayılı programlamanın en iyi çözümü için ek bir kısıtlayıcı koşul yaratılması gerekir. Bunun için öncelikle tamsayı olması istenen ancak çözüm değeri tamsayı olmayan değişken(ler) belirlenir. Birden fazla değişken arasından seçim yapılacak olması durumunda, kesirli kısmı en büyük olan değişkenin seçilmesi uygun olur.

Çözüm 5.11

Burada yalnızca x_1 değişkeni temelde bulunduğundan, bu değişkene ilişkin kısıtlayıcı koşul yaratılacağı açıktır. Tablo 5.10'daki sonuç değerlerinden yaratılan denklem aşağıda gösterilmiştir.

$$(1)x_1 + (0.667)x_2 + (0)S_1 + (0.333)S_2 = 4.333$$

Bu kısıt ,

$$(1 + 0)x_1 + (0 + 0.667)x_2 + (0)S_1 + (0 + 0.333)S_2 = 4 + 0.333$$

veya

$$(1 + 0)x_1 + (0)x_2 + (0.667)x_2 + (0)S_1 + (0)S_2 + (0.333)S_2 = 4 + 0.333$$

Şeklinde yazılabilir.

Katsayıları tamsayı olan bütün terimlerin eşitliğin sol tarafında, diğerlerinin eşitliğin sağ tarafında gösterilmesiyle ulaşılan eşitlik aşağıda gösterilmiştir.

$$(1)x_1 + (0)x_2 + (0)S_1 + (0)S_2 - 4 = 0.333 - (0.667)x_2 - (0.333)S_2 \quad 5.7$$

5.7'nin sağ tarafı için,

$$0.333 - (0.667)x_2 - (0.333)S_2 \leq 0 \quad 5.8$$

yazılabilir.

Kesme

5.8 ile açıklanan fonksiyona "kesme" denir. Kesme düzlemi algoritmasının esasını oluşturan kesmenin iki önemli özelliği aşağıda açıklanmıştır.

1. Tamsayılı programlama için uygun olan bir nokta kesmeyi sağlar
2. Gevşek biçim için en iyi olduğu belirlenen nokta kesmeyi sağlamaz.

Bu iki özelliğinden dolayı bir kesme, gevşek problemin en iyi çözümünü dışta bırakırken, tamsayılı programlamanın uygun çözümlerine dokunmaz. Kesme oluşturmada kullanılan değişkenin tamsayıya ulaştırılabilmesi için kesmenin, gevşek biçimin en iyi çözümünün bulunduğu simpleks tablosuna yeni bir kısıtlayıcı olarak eklenmesi gerekir. Bu eklemeyi yaptıktan sonra simpleks yöntemin klasik işlemleriyle tamsayı en iyi çözüm elde edildiğinde, problem çözülmüş olur. Kesme eklenmesiyle düzenlenen problemin en iyi çözümünde hala tamsayı olmayan değişken var ise, yeni bir kesme tanımlanır. Bu işlemler istenen çözüme ulaşıncaya kadar tekrarlanır.

Çözüm 5.11

Kesmenin eklenmesiyle elde edilen simpleks çözüm tablosu aşağıda gösterilmiştir.

Tablo 5.11

TDV	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	ÇV
S_1	0	-0.333	1	-0.667	0	0.333
x_1	1	0.667	0	0.333	0	4.333
S_3	0	-0.667	0	-0.333	1	-0.333
Z_j	7	4.669	0	2.331	0	30.333
$Z_j - C_j$	0	1.669	0	2.331	0	-

Tablo 5.11'den görüldüğü gibi eklenen kesme çözümün en iyi olma olma özelliğini (tüm $Z_j - C_j \geq 0$) etkilememiştir. Ancak, S_3 'ün negatif olması çözümün uygun olmamasına yol açmıştır. Uygun çözüm için dual simpleks yöntem uygulanmalıdır. Dual simpleks yöntemin değişken seçimi kuralına göre S_3 temeli terkedecek, en küçük oran veren x_2 girecektir. Simpleks çözümün ardışık işlemleriyle oluşturulan tablo aşağıda gösterilmiştir.

Çözüm 5.11

Tablo 5.12

TDV	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	ÇV
S_1	0	0	1	-0.501	-0.499	0.499
x_1	1	0	0	0	0.999	4.0
x_2	0	1	0	0.499	-1.499	0.499
Z_j	7	3	0	1.497	2.496	29.497
$Z_j - C_j$	0	0	0	1.497	2.496	-

Tablo 5.12'deki çözüm hem en iyi hem de uygun olmakla birlikte $x_2 = 0.5$ olduğundan, tamsayıdır. x_2 'nin esas alınmasıyla yeni bir kesme tanımlanması zorunludur.

Kesmenin oluşturulması ve çözüm için uygun şekle dönüştürülmesi ile ilgili işlemler aşağıda gösterilmiştir.

$$(0)x_1 + (1)x_2 + (0)S_1 + (0.499)S_2 - (1.499)S_3 = 0.499$$

$$(0.499)S_2 + (0.501)S_3 = 0.499$$

$$(0.499) - (0.499)S_2 - (0.501)S_3 \leq 0$$

$$(-0.499)S_2 - (0.501)S_3 \leq -0.499$$

$$(-0.499)S_2 - (0.501)S_3 + (1)S_4 = -0.499$$

Çözüm 5.11

Bu kısıtlayıcı koşulun en iyi çözüm tablosuna eklenmesiyle yeni çözüm tablosu aşağıdaki gibi elde edilir.

Tablo 5.13

TDV	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	ÇV
S_1	0	0	1	-0.501	-0.499	0	0.499
x_1	1	0	0	0	0.999	0	4.0
x_2	0	1	0	0.499	-1.499	0	0.499
S_4	0	0	0	-0.499	-0.501	1	-0.499
Z_j	7	3	0	1.497	2.499	0	29.497
$Z_j - C_j$	0	0	0	1.497	2.499	0	-

Tablo 5.13'den görüldüğü gibi çözüm en iyi olmakla birlikte uygun değildir. Negatif çözüm değerli S_4 'ün temelden çıkması, yerine mutlak değerce en küçük oranı veren S_2 'nin girmesi gerekir. Gerekli işlemlerden sonra aşağıdaki tabloda gösterilen yeni çözüme ulaşılır.

Çözüm 5.11

Tablo 5.14

TDV	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	ÇV
S_1	0	0	1	0	0	-1	0.999
x_1	1	0	0	0	0.999	0	4.0
x_2	0	1	0	0	-1.998	0.998	0
S_2	0	0	0	1	1.0	-2	1.0
Z_j	7	3	0	0	0.999	2.994	28.0
$Z_j - C_j$	0	0	0	0	0.999	2.994	-

Tablo 5.14’de sunulan çözümde x_1 ve x_2 tamsayı bulunmuşlardır. Böylece tamsayı çözüme ulaşılmıştır. Kesme düzlemi algoritması ile ulaşılan çözümde, $x_1 = 4$, $x_2 = 0$, $Z_{enb} = 28$ dir. Böylece dal-sınır yöntemi ve kesme düzlemi algoritması çözüm sonuçları aynı olmaktadır.

Hangi Yöntem Kullanılmalı?

Dal-sınır ve kesme düzlemi algoritmalarının hangisinin tercih edileceği konusunda genel kabul görmüş bir kanı olmadığıını belirtmeliyiz. İki yöntemden hiçbirisi, sürekli daha iyi (az işlem, kısa zaman) sonuç vermemektedir. Yine de deneyimler, dal-sınır algoritmasının daha başarılı olduğunu göstermektedir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

KARAR KURAMI

Karar Kuramı

Karar kuramı, karar vericiye karar alma ve karar sürecini geliştirme konularında yol gösteren bir yaklaşımdır. Söz konusu yaklaşım, karar verilecek duruma ilişkin bilgi miktarına göre üç başlık altında incelenir.

- a. Belirlilik durumunda karar alma
- b. Risk durumunda karar alma
- c. Belirsizlik durumunda karar alma

a. Belirlilik durumunda karar alma

Belirlilik durumunda karar almada, karar vericinin aralarından seçim yapacağı karar seçeneklerine ilişkin sonuç değerleri ile olayın yapısı hakkındaki bilgisinin eksiksiz olduğu varsayılır. Doğal olarak en iyi sonucu verecek olan alternatif seçilir. Doğrusal programlama belirlilik durumunda karar alma probleminin bir örneğidir.

Örnek: Bunun için beslenme gereksinimimizi en düşük maliyetle karşılayacak besin maddeleri miktarlarını belirlemek istediğimizi düşünelim. Besin maddelerinin birim maliyetleri (C_j) sabit sayılar olsun. j ürünü tüketim miktarı x_j , değeri bilinen bir sabit sayı olarak kabul edildiğinde, j ürününün maliyete olan katkısı $C_j x_j$ de sabit bir sayı olur.

b. Risk durumunda karar alma

Risk durumunda problemin seçeneklerine ilişkin değerler ve olayın yapısı olasılıklar ile açıklanırken, belirsizlik durumunda sonuç değerleri bir ölçüde bilinse de olayın yapısına ilişkin olasılıklar hakkında hiçbir bilgi edinilememektedir. Özetle, "belirlilik" ve "belirsizlik" verilerle ilgili bilgi derecesi bakımından iki aşırı ucu temsil ederken, "risk" bu iki uç arasında bulunur.

Örnek: Risk ve belirsizlik durumlarını açıklamak için beslenme problemi örneğine dönelim. Risk durumunda maliyet katsayısı C_j sabit sayı olma özelliğini yitirir ve kesin değeri bilinmeyen ancak, istendiğinde değeri ilgili olasılık yoğunluk fonksiyonu cinsinden açıklanabilen bir rasgele değişken olur. Buna göre C_j , olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(C_j)$ ile gösterilen bir rasgele değişken olarak tanımlanabilir. Bu durumda, kendisine ait bir olasılık yoğunluk fonksiyonu tanımlanmaksızın, C_j hakkında konuşmak fazla anlamlı olmaz. Bunun sonucunda, x_j 'nin belirli bir değeri için j 'inci değişkenin kara olan katkısı $C_j x_j$ 'de kesin değeri bilinmeyen bir rasgele değişken olur.

c. Belirsizlik durumunda karar alma

- Belirsizlik durumunda ise, $f(C_j)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu bilinmez veya belirlenemez. Ancak, bu konudaki bilgi eksikliği problem hakkında hiçbir bilgi yoktur şeklinde yorumlanmamalıdır. Sözgelimi, karar verici C_j 'nin değerlerinden birine eşit olduğunu bilebilir ancak, bu bilgi duruma ilişkin olasılıkların belirlenmesinde yetersiz kalır. Bu durum belirsizlik ortamında karar alma durumudur. Karar probleminin nasıl formüle edileceği ve çözüleceği doğrudan doğruya karar verenin problemin bileşenleri hakkındaki bilgi derecesine bağlıdır.

Karşılaştırma

Belirlilik durumunda evrensel biçimde kabul görmüş karar alma ölçütü, kârın en büyüklenmesi veya maliyetin en küçüklenmesi iken, belirsizlik ve risk durumlarında karar almada değişik ölçütler söz konusu olur. Sözgelimi, risk ortamında karar almada ortalama (beklenen) kârın en büyüklenmesi karar ölçütü olarak kabul edilebilirse de bu ölçüt bütün durumlar için uygun olmayabilir.

Karar Analizinin Temel Adımları

- Sorunun tanımlanması
- Tüm olası seçeneklerin listelenmesi
- KV'nin kontrolunda olmayan / doğanın sunduğu tüm olası olayların listelenmesi
- Her seçeneğin her olay için elde edeceği sonuçları gösteren karar tablosunun oluşturulması
- Bir karar modelinin seçilmesi (doğa durumuna göre)
- Modelin uygulanması ve bir seçeneğin seçilerek karar verilmesi

Karar Problemi

Birden fazla olay ve birden fazla karar seçeneğinin (eylem biçimi, strateji) bulunması, sistemin davranış ölçeğinin her bir stratejiye göre farklı değer alması ve bu değerlerin bilinmemesi durumundaki bir probleme "karar problemi" denir.

Karar Probleminin Ortak Özellikleri

- Karar Verici: Sisteme maksadına göre hedefler koyan, bu hedeflere ulaşmak için amaçlar, stratejiler ve taktikler tanımlayan, bu tanımlar uyarınca sistemin davranışlarını planlayan, örgütleyen, denetleyen, sapmalar karşısında gerekli düzenlemeyi yapan birey ya da topluluğa karar verici denir.
- Strateji (Eylem Biçimi): Karar vericinin amaç veya amaçlarına ulaşmasını sağlayacak değişik yollar veya hareket tarzlarının her birine strateji veya eylem biçimi denir. Stratejilerin belirlenmesi ve tanımlanması karar vericinin en önemli görevlerindendir. Stratejiler karar vericinin kontrolünde olan faktörlerdir.
- Olay (Doğal Durum): Karar vericinin davranışını etkileyen ve alabileceği değerlerde karar vericinin hiçbir etkisi olmayan faktörlerdir. Olaylar, karar vericinin içinde bulunduğu karar ortamını oluştururlar. Sayıları ne olursa olsun gelecekte yalnızca bir olayın gerçekleşeceği unutulmamalıdır.
- Sonuç: Her bir strateji ve olay bileşimi sonucu ortaya çıkan değerdir. Sonuç değerlerine ödeme, yarar veya kayıp denir ve bunlar genellikle parasal değer cinsinden açıklanır.

Karar Matrisi

- Risk veya belirsizlik ortamındaki bir karar probleminin matris biçiminde gösterilmesi, problemin değerlendirilmesi ve çözülmesinde büyük kolaylıklar sağlar. Alternatif stratejiler, olası olaylar ve sonuç değerlerinden oluşan matrise "karar matrisi" denir. Karar matrisi kavramı son derece genel olup, bunun yerine sonuç, kazanç, ödeme veya kâr-zarar matrisi deyimleri de kullanılmaktadır. Matrisin a_{ij} elemanları $R(S_i, O_j)$ sonuç değerleridir.

Strateji	Olay					
	O_1	O_2	...	O_j	...	O_n
S_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
S_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}
..
S_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}
..
S_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}

Belirsizlik Durumunda Karar Alma

Belirsizlik durumunda karar vericinin değişik stratejiler arasından seçim yapmasında esas alabileceği belli başlı ölçütler şunlardır:

1. Laplace Ölçütü
2. Minimaks veya Maksimin Ölçütü
3. Maksimaks veya Minimin Ölçütü
4. Savage Ölçütü
5. Hurwicz Ölçütü

Uygun ölçütün seçilmesi karar ortamının yapısına, karar vericinin deneyim ve eğilimine bağlıdır. Sözgelimi, minimaks ölçütünü seçen karar verici ile karşılaştırıldığında, Laplace ölçütünü benimseyen karar vericinin daha iyimser olduğu söylenebilir. Hurwicz ölçütünü benimseyen karar vericinin ise minimaks ölçütü ile maksimaks ölçütü arasında bir denge bulmaya çalıştığı kabul edilir. Kısaca bu ölçütler arasında seçim yapmada genel kabul görmüş bir kural yoktur. Yukarıdaki ölçütlerden birini kullanacak olan karar vericinin zeki bir rakibinin bulunmadığı, tek rakibinin doğa olduğu kabul edilir.

1. Laplace Ölçütü

Laplace ölçütü muhtemel olayların ortaya çıkması ile ilgili olasılıkların birbirlerine eşit olduğu ilkesine dayanır. Olayların ortaya çıkması olasılıkları belirlenebildiğinden problem belirsizlik durumunda karar alma problemi olmaktan çıkarak, risk durumunda karar alma problemine dönüşür. Laplace ölçütü, olayların gerçekleşmesi olasılıklarının farklı olduğuna ilişkin bir kanıt olmaması durumunda kullanılabilir. Anılan olasılıkların eşit kabul edilmesi ilkesine "yetersiz sebep ilkesi" denir.

Örnek-2 (Laplace Ölçütü)

Mağaza sahibinin; 100, 200 veya 300 adet sipariş vermek gibi üç stratejisi vardır. O1, O2, O3 ve O4 ile simgelenen olaylar sırasıyla, istemin 100, 150, 200 ve 250 adet olduğu karar ortamını açıklar. Karar matrisinin elemanları farklı sipariş ve istem miktarı birleşimlerinin sonucu elde edilecek kâr olarak tanımlanmıştır.

Karar matrisi mağaza sahibi Laplace ölçütüne göre hangi miktarda sipariş verir?

Sipariş Miktarı	İstem Miktarı			
	100	150	200	250
100	3000	2750	2500	2250
200	1500	4750	8000	7750
300	2000	5250	8500	11750

Çözüm-2 (Laplace Ölçütü)

Sipariş Miktarı	İstem Miktarı			
	100	150	200	250
100	3000	2750	2500	2250
200	1500	4750	8000	7750
300	2000	5250	8500	11750
Olasılık	1/4	1/4	1/4	1/4

- Karar matrisinin Laplace ölçütü için düzenlenen biçimi yukarıdaki tabloda verilmiştir. Görüldüğü gibi gerçekleşme olasılıkları eşit 4 olay vardır. Bu eşit olasılıkların kullanılmasıyla her bir stratejinin beklenen değeri aşağıdaki gibi hesaplanır.
- $E(100) = 1/4(3000) + 1/4(2750) + 1/4(2500) + 1/4(2250) = 2625 \text{ TL}$
- $E(200) = 1/4(1500) + 1/4(4750) + 1/4(8000) + 1/4(7750) = 5500 \text{ TL}$
- $E(300) = 1/4(2000) + 1/4(5250) + 1/4(8500) + 1/4(11750) = 6875 \text{ TL}$
- Kâr söz konusu olduğundan, beklenen değerlerden en büyük (6875 TL) olanının işaret ettiği miktarda, yani 300 birimlik sipariş verilmesi uygun olur.

2. Minimaks veya Maksimin Ölçütü

- Bu ölçüt yaklaşımlarında tutucu, **kötümser** karar vericilerin benimsedikleri karar ölçütüdür. Bu yaklaşım, hangi strateji seçilmiş olursa olsun daima o eylem için en kötü olan olayın gerçekleşeceği varsayımına dayanır. Bu nedenle, her bir strateji için öncelikle o eylem için en kötü olan olayın ortaya çıkması nedeniyle oluşan en kötü sonuç belirlenir. Bu yolla bulunan en kötü sonuçlar arasından en iyi olanının işaret ettiği stratejinin seçilmesiyle en iyi hareket tarzı belirlenmiş olur. Karar matrisi elemanları; gelir, kâr, kazanç gibi büyük olması arzulanan değerlere karşılık geliyorsa ölçüt en küçüklerin en büyüğü anlamına gelen **maksimin (en küçüklerin en büyüğü)**; gider, zarar, kayıp gibi küçük olması arzulanan değerlere karşılık geliyorsa en büyüklerin en küçüğü anlamını ifade eden **minimaks (en büyüklerin en küçüğü)** ölçütü adını alır.

Örnek-3

- Maksimin (minimaks) ölçütüyle karar matrisini oluşturan sonuç değerlerinin
- a. Kazançlara,
- b. Kayıplara karşılık gelmeleri durumunda en iyi stratejiyi belirleyiniz.

Strateji	Olay			
	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄
S ₁	26	26	18	22
S ₂	22	34	30	18
S ₃	28	24	34	26
S ₄	22	30	28	20

Çözüm-3

- Sonuç değerlerinin kazançlara karşılık gelmesi durumunda, satır en küçüklerinin belirlenmesi ve bunlardan en büyük olanına karşılık gelen stratejinin uygulamaya konması gerekir. Satır en küçük değerlerinin satır sırasıyla; 18, 18, 24 ve 20 olduğu görülebilir. Buna göre bu değerlerden en büyük olan 24'ün işaret ettiği üçüncü eylem (S3) maksimin ölçütüyle belirlenen en iyi stratejidir.
- Sonuç değerlerinin kayıplara karşılık gelmesi durumunda herhangi bir eylem için en kötü olay en büyük sonuç değeri sağlayandır. Bu nedenle satır en büyüklerinin belirlenmesi ve bunlardan en küçük olanına karşılık gelen stratejinin uygulamaya konması gerekir. Satır en büyük değerlerinin sırasıyla; 26, 34, 34 ve 30 olduğu görülebilir. Buna göre bu değerlerden en küçük olan 26'nın işaret ettiği S1, minimaks ölçütüyle belirlenecek en iyi stratejidir.

3. Maksimaks veya Minimin Ölçütü

Bu ölçüte göre hangi strateji seçilirse seçilsin o strateji için en iyi olan olayın gerçekleşeceği düşünülür. Bu düşüncenin ürünü olarak belirlenen en iyi sonuçlardan en iyi olanının işaret ettiği strateji, karar vericinin en iyi seçimi olur. Karar matrisi elemanlarının büyük olması arzulanan değerlere karşılık gelmesi durumunda ölçüt maksimaks (**en büyüklerin en büyüğü**) ölçütüdür. Matris elemanlarının küçük olması arzulanan değerlere karşılık gelmesi durumunda ölçüt minimin (**en küçüklerin en küçüğü**) ölçütü adını alır. Bu ölçütün kullanılmasıyla en iyi stratejinin belirlenmesini aşağıdaki örnek yardımıyla açıklayalım.

Örnek-4

- Aşağıdaki karar matrisini kullanarak, maksimaks (minimin) ölçütüyle sırasıyla, sonuç değerlerinin kazançlara ve sonuç değerlerinin kayıplara karşılık gelmeleri durumunda en iyi stratejiyi belirleyiniz.

Strateji	Olay			
	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄
S ₁	26	26	18	22
S ₂	22	34	30	18
S ₃	28	24	34	26
S ₄	22	30	28	20

Çözüm-4

- Bu ölçüte göre hangi eylem uygulanırsa uygulansın çeşitli olaylar arasından en iyi olanı ile karşılaşılabacağından; karar matrisi elemanlarının kazanç değerlerine karşılık gelmesi durumunda satır en büyüklerinin, karar matrisi elemanlarının kayıp değerlerine karşılık gelmesi durumunda satır en küçüklerinin bulunması gerekir.
- Karar matrisinin en büyükleri ile satır en küçükleri enb ve enk sütun başlıkları altında gösterilmişlerdir. Bu ölçüte göre stratejiler arasından seçim, en iyilerin en iyisinin seçilmesi biçiminde yapılacağından, kazanç durumunda en iyi seçenek karar vericiye 34 birim kazanç sağlayan S2 ve S3 seçenekleridir. En küçüklerin dikkate alınması durumunda en iyi seçenekler en düşük kaybı sağlayacak olan S1 ve S2 seçenekleridir.

Strateji	Enb	Enk
S ₁	26	18*
S ₂	34*	18*
S ₃	34*	26
S ₄	30	22

4. Savage Ölçütü

- Bu ölçüt en büyük fırsat kaybının en küçüklenmesi esasına dayanır. Bu nedenle minimaks fırsat kaybı ölçütü olarak da bilinir. Ölçütün uygulanması için öncelikle fırsat kaybı veya pişmanlık matrisinin oluşturulması gerekir.
- Fırsat kaybı her bir olay için en iyi sonucu sağlayacak stratejinin seçilmemesi sonucu vazgeçilen kazanç veya katlanılan kayıp miktarıdır. Fırsat kayıpları genellikle pozitif değerler ve rakamlarla açıklanır. Karar tablosu gelirler cinsinden ifade edildiğinde, ele alınan her bir olaya ilişkin fırsat kaybı değerleri; en iyi olan eylemin seçilmesi durumunda sağlanacak olan gelirden diğer seçeneklerin sağlayacağı gelirlerin çıkartılmasıyla hesaplanırlar.

Sütun Enbüyük Değeri – Sütun Değerleri

- Karar matrisinin maliyetleri göstermesi durumunda fırsat kaybı değerleri en iyi seçimin maliyet değerinin diğer eylemlerin maliyet rakamlarından çıkartılması ile belirlenirler.

Sütun Değerleri – Sütun Enküçük Değeri

Örnek-5

- Savage ölçütüyle sırasıyla;
- a. sonuç değerlerinin kazançlara
- b. sonuç değerlerinin kayıplara karşılık gelmeleri durumunda en iyi stratejiyi belirleyiniz.

Strateji	Olay			
	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄
S ₁	26	26	18	22
S ₂	22	34	30	18
S ₃	28	24	34	26
S ₄	22	30	28	20

Çözüm-5

- a. Fırsat kaybı matrisi düzenlenmelidir. Önce, karar matrisi elemanlarının kazançları gösterdiğini düşünelim. Buna göre, ortaya çıkan olay O_1 ise, en yüksek kazancı sağlayan S_3 seçilmelidir. Bu durumda karar verici en yüksek kazancı sağlayacağından hiçbir fırsatı kaçırmayacaktır. Buna göre bu seçimin fırsat kaybı, $28 - 28 = 0$ olur. Aynı olay (O_1) için en yüksek kazancı sağlayan S_3 yerine S_1 seçilirse, 28 yerine 26 TL, yani 2 TL daha az kazanılacak böylece karar verici kaçırdığı 2 TL için pişmanlık duyacaktır. S_2 seçildiğinde, S_3 'ün seçilmemiş olması yüzünden, kaçan fırsat 6 TL olacak bu kez karar verici 6 TL daha az kazanmanın pişmanlığını duyacaktır. Bu işlemin karar matrisinin tüm elemanlarına uygulanması sonucu belirlenen fırsat kaybı değerleriyle düzenlenen fırsat kaybı matrisi satır en büyük değerleriyle birlikte aşağıda gösterilmiştir.

Çözüm-5

Strateji	Olay				Satır En Büyüğü
	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	
S ₁	2	8	16	4	16
S ₂	6	0	4	8	8
S ₃	0	10	0	0	10
S ₄	6	4	6	6	6*

- Fırsat kaybı matrisinin düzenlenmesinden sonra sıra, her bir stratejiye ilişkin en yüksek fırsat kaybının saptanmasına gelir. En yüksek fırsat kayıpları, fırsat kaybı matrisinin en sağına eklenen sütunda gösterilmişlerdir. Karar vericinin amacı fırsat kaybını en düşük düzeyde tutmak olduğundan en büyük pişmanlıklar arasından en küçük olanının işaret ettiği stratejinin seçilmesiyle en iyi hareket biçimi belirlenmiş olur. Savage ölçütüne göre en küçük değeri veren S4 seçilmelidir.

Çözüm-5

- Sonuç değerlerinin kayıplara karşılık gelmesi durumunda, her bir olay için en iyi strateji en düşük kaybı sağlayandır. Bu durumda her bir olay için kaybın en küçük değeri dikkate alınacak ve fırsat kaybı matrisi elemanları her bir olay için en iyi olan değer diğer değerlerden çıkartılmasıyla belirlenecektir. Bunu karar matrisinin ilk sütununa uygulayalım. O1 gerçekleştiğinde, en iyi strateji 22 TL'lik kayıp gösteren S2 ve S4 seçenekleridir. Bu seçeneklerin fırsat kayıpları sıfırdır. O1 gerçekleştiğinde S1'in fırsat kaybı $26 - 22 = 4$, S3'ün fırsat kaybı $28 - 22 = 6$ TL olur. Bu yaklaşımla oluşturulan fırsat kaybı matrisi aşağıda gösterilmiştir.

Çözüm-5

Strateji	Olay				Satır En Küçüğü
	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	
S ₁	4	2	0	4	4*
S ₂	0	10	12	0	12
S ₃	6	0	16	8	16
S ₄	0	6	10	2	16

- Pişmanlık matrisinin düzenlenmesinin ardından her bir strateji için en büyük fırsat kaybı belirlenir. En büyük fırsat kayıpları, önceden olduğu gibi, fırsat kayıpları matrisinin en sağına eklenen sütunda gösterilmiştir. Savage kuralına göre en büyük kayıplardan en küçük değerli olanının işaret ettiği S1 stratejisi en iyi hareket biçimidir. Savage ölçütü maliyet verilerinden oluşan orijinal matrise minims maks ölçütünün, kazanç verilerinden oluşan orijinal matrise maksimin ölçütünün uygulanmasına benzer. Bununla birlikte benimsenecek eylemlerin aynı olmak zorunda olmadıkları unutulmamalıdır.

5. Hurwicz Ölçütü

- Hurwicz'e göre, karar vericinin ne aşırı derecede iyimser, ne de aşırı derecede kötümser olmasını gerektiren güçlü gerekçeleri yoktur. Bu nedenle, karar vericinin maksimin ölçütünün aşırı kötümserliği ile maksimaks ölçütünün aşırı iyimserliği arasında bir denge kurması uygun olur. Bu nedenle bu ölçüte "ağırlıklı ortalama" veya "gerçekçilik ölçütü" de denir. Hurwicz ölçütü, seçilen her strateji için iyimserlik koşullarında ortaya çıkan sonuçlar ile kötümserlik koşullarında ortaya çıkan sonuçların ağırlıklandırılması esasına dayanır. Bunun için iyimserlik katsayısı olarak bilinen α kullanılır.
- $0 \leq \alpha \leq 1$.
- Çok kötümser bir karar vericinin α için seçeceği değer sıfır, aşırı derecede iyimser bir karar vericinin seçeceği değer 1 olur.
- Karar verici α 'nın değeri hakkında kararsızsa, $\alpha = 0.5$ seçmesi akılcı olur.
- α 'nın belirlenmesinden sonra karar matrisindeki her bir strateji için en iyi ve en kötü sonuç değerlerinin sırasıyla α ve $(1 - \alpha)$ ile çarpılarak sonuçların toplanması gerekir. Toplama işlemiyle belirlenen değerler stratejilerin beklenen değerleri olarak yorumlanır ve beklenen değerler taranarak; karar matrisi kazanç değerlerinden oluşmuşsa en büyük, maliyet değerlerinden oluşmuşsa en küçük beklenen değere sahip stratejinin uygulanması önerilir.

Örnek-6

- Aşağıdaki karar (kazanç) matrisine Hurwicz ölçütünü uygulayarak sırasıyla ; $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ ve $\alpha = 0.6$ için en iyi stratejiyi belirleyiniz.

Strateji	Olay			
	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄
S ₁	26	26	18	22
S ₂	22	34	30	18
S ₃	28	24	34	26
S ₄	22	30	28	20

Çözüm-6

- $\alpha = 0$ seçildiğinde her strateji için yalnızca en küçük değerli sonuçların dikkate alındığı görülebilir. Kural gereği bu en küçük değerlerden en büyük olanı seçileceğinden, $\alpha = 0$ için Hurwicz ölçütü maksimin ölçütüne eşdeğerdir. Buna göre, $\alpha = 0$ için S3 (bkz. Örnek 8.4) seçilecektir.
- $\alpha = 1$ seçildiğinde, her eylem seçeneği için yalnızca en büyük değerli sonuçların dikkate alındığı görülebilir. Kural gereği, en büyük değerlerden en büyük olanının seçilmesi gerektiğinden $\alpha = 1$ için, Hurwicz ölçütü maksimaks ölçütüne eşdeğerdir (bkz. Örnek 8.5). Buna göre, satır en büyük değerlerinden en büyüğünü sağlayan S2 ya da S3 seçilecektir.

Çözüm-6

Karar verici en yüksek beklenen kazancı hedeflediğinden, $\alpha = 0.6$ seçildiğinde, stratejilerin beklenen değerleri satır en büyüklerinin 0.6, satır en küçüklerinin 0.4 ile çarpımlarının toplamı olarak Tablo 8.10'daki gibi hesaplanacaklardır.

Strateji	Kazanç İçin		Beklenen Kazanç
	Enb	Enk	
S ₁	26	18	22.8
S ₂	34	18	27.6
S ₃	34	24	30.0*
S ₄	30	20	26.0

Karar verici en yüksek beklenen kazancı hedeflediğinden, S₃'ü seçecektir.

Çözüm-6

Karar matrisi elemanlarının kayıplara karşılık gelmesi durumunda stratejilerin beklenen değerleri

- satır en küçüklerinin 0.6,
- satır en büyüklerinin 0.4 ile
- çarpımlarının toplamı olarak hesaplanacaklardır.
- Hesap sonuçları, aşağıdaki tabloda beklenen kayıp başlıklı sütunda gösterilmiştir. Buna göre beklenen kaybın en küçük olmasını sağlayan S1 benimsenecektir.

Strateji	Kayıp İçin		Beklenen Kayıp
	Enb	Enk	
S ₁	18	26	21.2*
S ₂	18	34	24.4
S ₃	24	34	28.0
S ₄	20	30	24.0

Risk Durumunda Karar Alma

Daha önce açıklandığı gibi olayların gerçekleşme olasılıklarının bilinmesi durumundaki karar problemi, risk durumunda karar problemidir. Risk durumunda karar almada kullanılan başlıca ölçütler şunlardır:

- En yüksek olabilirlik
- Beklenen değer
- Beklenen fırsat kaybı veya beklenen pişmanlık

En Yüksek Olabilirlik Ölçütü

Bu ölçüte göre karar verici tüm dikkatini olabilirliği en yüksek olan olay üzerinde yoğunlaştırır. Gerçekleşme olasılığı en büyük olan olayın belirlenmesinden sonra bu olay için en yüksek (en büyükleme durumunda en büyük, en küçükleme durumunda en küçük) sonucu sağlayan stratejinin uygulanmasına karar verilir.

Örnek-7

En yüksek olabilirlik ölçütünü aşağıdaki kazanç matrisine uygulayarak en iyi stratejiyi kararlaştırınız. Olayların gerçekleşmesi olasılıkları aynı tablonun son satırında verilmiştir.

Strateji	Olay			
	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄
S ₁	26	26	18	22
S ₂	22	34	30	18
S ₃	28	24	34	26
S ₄	22	30	28	20
Olasılık	0.2	0.5	0.2	0.1

Çözüm-7

- Tablonun son satırında görüldüğü gibi olabilirliği en yüksek olay O2'dir. Karar verici gelecekte O2'nin gerçekleşeceğini düşünerek kendisine en yüksek kazancı sağlayacak olan S2 stratejisini uygulayacaktır.
- Bu kural özellikle mümkün olaylardan birine ilişkin olasılık diğer olaylara ilişkin olasılıklardan önemli derecede büyükse uygundur. Diğer olayları ve bunların sonuçlarını göz ardı etmesi ölçütün zayıf tarafıdır.

Beklenen Değer Ölçütü

Beklenen değer ölçütü olayların ortaya çıkması olasılıklarının bilinmesi durumunda, her bir stratejiye ilişkin beklenen değer hesaplanarak bunlar arasından en iyi olanın işaret ettiği stratejinin seçilmesi esasına dayanır.

Örnek-8

- Beklenen değer kuralını aşağıdaki 4 x 4 kazanç matrisine uygulayınız.

Strateji	Olay			
	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄
S ₁	26	26	18	22
S ₂	22	34	30	18
S ₃	28	24	34	26
S ₄	22	30	28	20
Olasılık	0.2	0.5	0.2	0.1

Çözüm-8

- Olayların gerçekleşmesi olasılıkları sırasıyla; 0.2, 0.5, 0.2, ve 0.1 olarak verildiğinden stratejilerin beklenen değerleri aşağıdaki gibi hesaplanır.
- S_1 için $= 0.2(26) + 0.5(26) + 0.2(18) + 0.1(22) = 24.0$
- S_2 için $= 0.2(22) + 0.5(34) + 0.2(30) + 0.1(18) = 29.2$
- S_3 için $= 0.2(28) + 0.5(24) + 0.2(34) + 0.1(26) = 27.0$
- S_4 için $= 0.2(22) + 0.5(30) + 0.2(28) + 0.1(20) = 27.0$
- En yüksek beklenen kazancı S_2 seçeneği sağladığından, karar vericinin en iyi kararı S_2 'yi seçmek olacaktır. Sonuç değerleri kayıp değerlerine karşılık gelse idi karar verici en küçük beklenen değerli S_1 'i seçerdi.

Beklenen Fırsat Kaybı veya Beklenen Pişmanlık Ölçütü

Risk durumunda karar almada kullanılabilecek diğer bir ölçüt beklenen fırsat kaybı veya beklenen pişmanlık ölçütüdür. Bu ölçütün beklenen değer ölçütünden çok farklı olmadığı görülebilir. İki ölçüt arasındaki tek fark, dikkate aldıkları sonuç değerleridir. Fırsat kaybı sonuçlarının dikkate alınması durumunda beklenen değer ölçütü beklenen fırsat kaybı ölçütü adını alır.

Örnek

- Aşağıdaki kazanç matrisine beklenen fırsat kaybı ölçütünü uygulayarak karar vericinin en iyi stratejisini belirleyiniz.

Strateji	Olay			
	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄
S ₁	26	26	18	22
S ₂	22	34	30	18
S ₃	28	24	34	26
S ₄	22	30	28	20
Olasılık	0.2	0.5	0.2	0.1

Cevap

Beklenen fırsat kaybı ölçütünde fırsat kayıpları esas alındığından önce fırsat kayıpları matrisinin düzenlenmesi gerekir. Daha önce açıklandığı gibi orijinal karar matrisinin kazanç değerlerinden oluşması durumunda, fırsat kaybı matrisi, orijinal matrisin sütun değerlerinin her birinin, sütun en büyük değerinden çıkartılmasıyla aşağıdaki gibi düzenlenecektir.

Tablo 8.13

Strateji	Olay			
	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄
S ₁	2	8	16	4
S ₂	6	0	4	8
S ₃	0	10	0	0
S ₄	6	4	6	6
Olasılık	0.2	0.5	0.2	0.1

- Fırsat kaybı matrisinin oluşturulmasından sonra olayların gerçekleşmesi olasılıklarından yararlanarak her bir eylem için beklenen fırsat kaybı değerleri hesaplanmalıdır. Söz konusu değerler aşağıdaki gibi hesaplanacaktır.
- S₁ için = $0.2(2) + 0.5(8) + 0.2(16) + 0.1(4) = 8.0$
- S₂ için = $0.2(6) + 0.5(0) + 0.2(4) + 0.1(8) = 2.8$
- S₃ için = $0.2(0) + 0.5(14) + 0.2(0) + 0.1(6) = 5.0$
- S₄ için = $0.2(6) + 0.5(4) + 0.2(6) + 0.1(6) = 5.0$
- Sonuçta, beklenen fırsat kaybı ölçütüne göre en iyi strateji en küçük beklenen fırsat kaybı değerini veren S₂ olacaktır. Bu ölçütü en iyi olduğu kararlaştırılan S₂'nin daha önce beklenen değer ölçütüyle en iyi olduğu belirlenen strateji olduğuna dikkat edilmelidir.

Tam Bilginin Beklenen Değeri

- Tam bilgi sağlamak için katlanılması gereken maliyetin katlanmaya değer olup olmadığının araştırılması gerekir. Bunun için tam bilgiden beklenen gelirle başka bir deyişle, tam bilginin beklenen değeriyle ek bilgiye ulaşmanın yaratacağı maliyetin karşılaştırılması uygun olur. Tam bilgi fayda sağlıyor ise tam bilgiye başvurmak, aksi halde eldeki bilgilerle yetinmek akılcı bir yaklaşım olur. Tam bilginin beklenen değeri kavramını açıklayıcı örnek problem üzerinde gösterelim.

Örnek

- Örnek 8.1'deki mağaza sahibinin tam bilgi durumundaki beklenen kârını hesaplayarak, tam bilgi altında kârdaki artışı bulunuz.

Tablo 8.14

Sipariş Miktarı	İstem Miktarı			
	100	150	200	250
100	3000	2750	2500	2250
200	1500	4750	8000	7750
300	2000	5250	8500	11750
Olasılık	0.2	0.3	0.3	0.2

- İstem miktarı kesin olarak bilindiğinde, en iyi sipariş miktarı da aynı kesinlikle kolayca belirlenebilir. Sözgelimi, istemin 100 adet olacağından emin olursa, 100 adet siparişle kazancın en büyük olması sağlanır. İstemin 100 adet olması olasılığı 0.2 olduğundan, 100 birimlik istem için beklenen kazanç şöyle olur:
- $0.2 \times 3000 = 600$ TL

Çözüm

- Benzer şekilde istemin 150 olması durumunda en yüksek kâr 300 adet siparişle sağlanır. Bu olay-strateji çifti için en yüksek kazanç 5250 TL olduğundan beklenen kâr bu olayın gerçekleşme olasılığı (0.3) ile 5250'nin çarpılmasıyla 1575 TL olarak hesaplanır. Benzer işlemlerle istemin 200 ve 250 adet olması durumları için beklenen kârlar sırasıyla aşağıdaki gibi hesaplanır.
- $0.3 \times 8500 = 2550 \text{ TL}$
- $0.2 \times 11750 = 2350 \text{ TL}$
- Tam bilgi altında beklenen kâr her bir olay için en iyi stratejinin seçilmesi sonucu gerçekleşen beklenen kazançların toplamına eşittir. Buna göre tam bilgi altındaki beklenen kazanç (TBABK) aşağıdaki gibi elde edilir.
- $$\text{TBABK} = 0.2(3000) + 0.3(5250) + 0.3(8500) + 0.2(11750)$$
- $$= 7075 \text{ TL}$$

Çözüm-devam

- Tam bilgi altında hesaplanan 7075 TL’lik kazanç istemin değeri hakkında kesin bilgiye sahip olunması durumunda kazanılacak en yüksek miktardır. Bu yolla hangi stratejinin uygun olacağı konusunda bir öneride bulunulmadığına dikkat edilmelidir. Burada saptanan yalnızca belirlilik durumunda kârın en fazla 7075 TL olabileceğidir. Kârı bu düzeye çıkarmak için istem miktarlarının olasılıkları hakkında daha fazla bilgi edinmek istendiğini düşünelim. Bu durumda, ek bilginin kârda sağlayacağı artış ile gerçekleştirilmesi düşünülen çalışmanın maliyeti karşılaştırılmalıdır. Ek bilgiyle sağlanacak kâr ek bilgiye ulaşma maliyetinden fazla ise ek bilgiye başvurulacak aksi halde, eldeki veri ile yetinilerek risk ortamında beklenen değer ölçütüyle karar verme benimsenecektir. Ek bilginin beklenen değeri, tam bilgi altındaki beklenen değer ile risk durumundaki beklenen değer arasındaki farka eşittir.
- Risk durumunda en yüksek kâr 6875 TL’dir. Tam bilgi altında en yüksek kâr 7075 TL olduğundan ek bilginin beklenen değeri aşağıdaki gibi hesaplanır.
- Ek Bilginin Beklenen Değeri = $7075 - 6875 = 200$ TL
- Bu değer tam bilgi durumunda kârdaki artışı gösterir. Buna göre ek bilgi sağlamak için yapılacak çalışmanın maliyeti 200 TL’den fazlaysa mağaza sahibinin ek bilgi sağlamaktan vazgeçmesi uygun olur. Açıklamalarımız için gerekli olduğundan problemi bir de beklenen fırsat kaybı ölçütünü kullanarak çözelim. Problemin fırsat kaybı tablosu aşağıda gösterilmiştir.

Çözüm-devam

Tablo 8.15

Strateji	Olay				Beklenen Fırsat Kaybı
	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	
S ₁	0	2500	6000	9500	4450
S ₂	1500	500	500	4000	1400
S ₃	1000	0	0	0	200
Olasılık	0.2	0.3	0.3	0.2	-

- Hesaplanan beklenen fırsat kayıpları, fırsat kayıpları tablosuna eklenen "Beklenen Fırsat Kaybı" başlıklı sütunda gösterilmiştir. Görüldüğü gibi en küçük beklenen fırsat kaybı ek bilginin beklenen değerine eşittir. Bu durum yalnızca bu problem için değil her zaman böyledir. En küçük beklenen fırsat kaybı belirsizliğin maliyeti olarak değerlendirilir. Her bir strateji için beklenen k_{\square} ile beklenen pişmanlık değerleri toplamının, tam bilginin beklenen değerine eşit olduğu gösterilebilir. Bu durumun açıklanmasına örnek olması için S₁'i inceleyelim. S₁ için beklenen k_{\square} olan 2625 TL ile S₁ için beklenen fırsat kaybı 4450 TL'nin toplamı 7075 TL'ye eşittir.

Karar Ağacı

- Şimdiye kadar, sonuçların matris veya tablo biçiminde gösterilmesinin mümkün olduğu "bir olaylar kümesi-bir strateji seçimi" olarak özetlenebilecek durumların karar problemleri incelenmiştir. Oysa karar verme genellikle, birden fazla olaylar kümesinin bulunduğu, her küme için bir eylem seçiminin söz konusu olduğu çok aşamalı bir süreçtir. Bu, birden fazla noktada karar verme durumunda olmak demektir. Bu tip problemlerin matris veya tablo yaklaşımıyla çözülmesi doğru değildir. Matris yerine karar ağacı oluşturulması uygun olur.
- Şimdiye kadar, sonuçların matris veya tablo biçiminde gösterilmesinin mümkün olduğu "bir olaylar kümesi-bir strateji seçimi" olarak özetlenebilecek durumların karar problemleri incelenmiştir. Oysa karar verme genellikle, birden fazla olaylar kümesinin bulunduğu, her küme için bir eylem seçiminin söz konusu olduğu çok aşamalı bir süreçtir. Bu, birden fazla noktada karar verme durumunda olmak demektir. Bu tip problemlerin matris veya tablo yaklaşımıyla çözülmesi doğru değildir. Matris yerine karar ağacı oluşturulması uygun olur.

Karar Ağacı-devam

- Karar vericinin karar aldığı her bir nokta karar noktası olup karar noktaları ağaç üzerinde bir kare ile gösterilir. Bu kareden çıkan dallar karar vericinin stratejilerine karşılık gelir. Karar vericinin kontrolü dışında olan olaylar ağaç üzerinde dairelerle gösterilirler. Bu noktalara "olay düğüm noktası" veya "şans noktası" denir. Daire biçimindeki olay düğüm noktalarından çıkan her dal, bir olayı simgeler. Olayı simgeleyen sembol ve olayın ortaya çıkma olasılığı ait olduğu dal üzerinde gösterilir. Şans noktasından çıkan dallar, karar vericiyi bir başka şans noktasına veya bir karar noktasına götürebilir.
- Karar probleminin karar ağacı ile çözümünde, dinamik programlamada^[1] olduğu gibi, sondan başa doğru hesaplama yaklaşımı uygulanır. Bunun için oluşturulan karar ağacının en son aşamasındaki uç noktalardan başlanır ve ağaç üzerinde başa doğru gidilir. Bu ilerleyiş sırasında karşılaşılan karar noktalarının her birinde o düğümün beklenen değeri hesaplanır. Beklenen değerlerden en iyi olanı o düğümün üzerine yazılır. Başlangıç noktasına ulaşıldığında çözüm işlemi tamamlanmış olur.

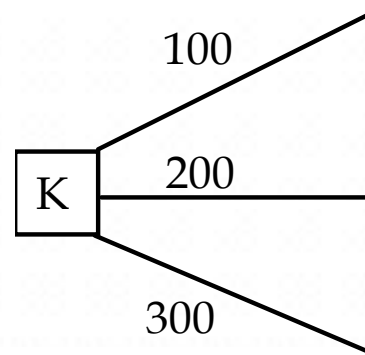
^[1] Bkz. Onbirinci Bölüm.

Örnek

- Örnek 8.1'deki problemin karar ağacını düzenleyerek net karı en büyükleyen sipariş miktarını bulunuz.

Çözüm

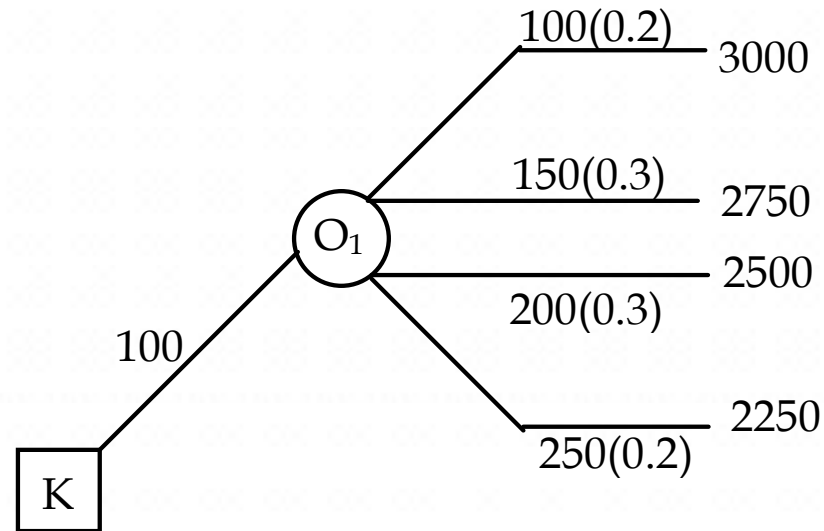
- Problemi karar ağacı yaklaşımıyla çözebilmek için öncelikle karar ağacı oluşturulmalıdır. Karar ağacının düzenlenebilmesi için önce karar noktası sayısı belirlenir. Bilindiği gibi mağaza sahibinin sipariş miktarını belirlemek gibi tek bir sorunu, yani almak istediği tek bir karar vardır. Bu nedenle karar noktası tektir. Bu nokta K ile işaretlenecektir. Sipariş miktarı için 100, 200 veya 300 olmak üzere 3 seçenek bulunduğundan bu noktadan 3 dal çıkacaktır. Karar ağacının bu kısmı aşağıda gösterilmiştir.



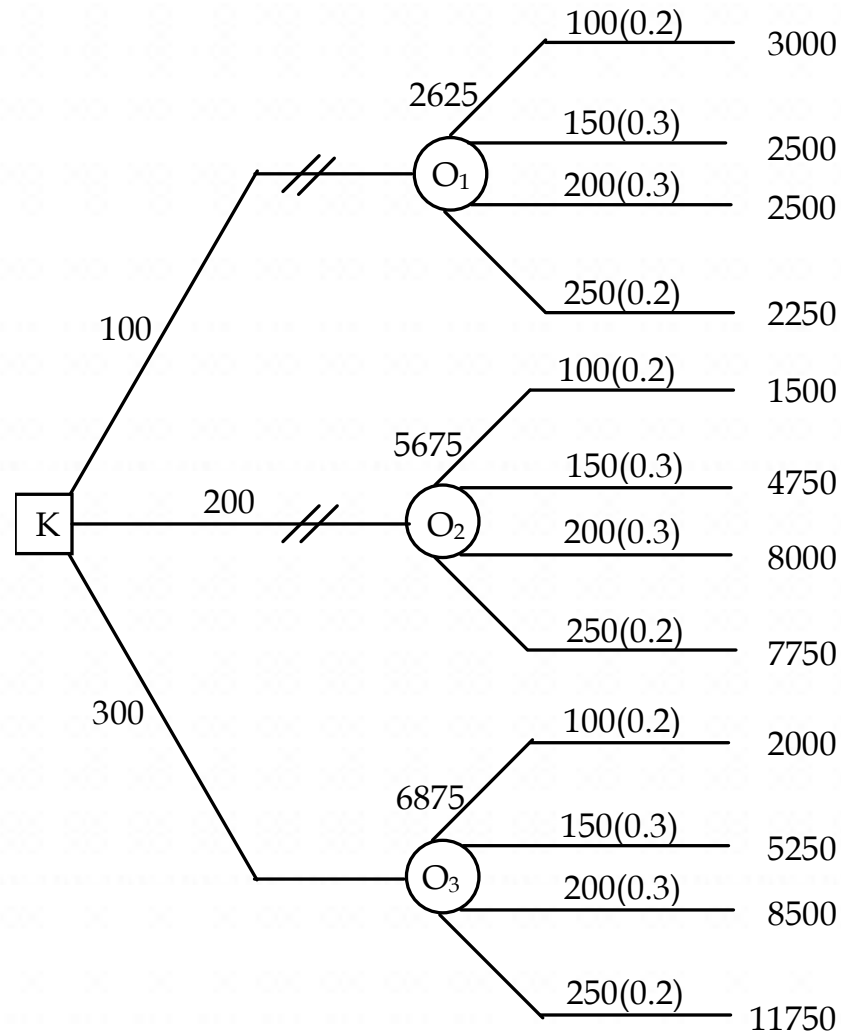
Şekil 8.1

Çözüm-devam

- Bir an için sipariş miktarının 100 olarak belirlendiğini düşünelim. İstem düzeyi 100, 150, 200 veya 250 olabilir. İstem düzeyindeki bu belirsizlik olay düğüm noktası olarak işaretlenir. Olay düğüm noktasından olay sayısı kadar dal çıkacak ve dalların her biri ayrı bir istem düzeyine karşılık gelecektir. Olaylara ilişkin olasılıkların ait oldukları dallar üzerinde, olaylara ilişkin kârların dalların uç noktalarında gösterilmesiyle karar ağacının 100 birimlik sipariş verilmesi durumunu açıklayan kısmı aşağıdaki gibi belirlenmiş olur.



Şekil 8.1



Şekil 8.1

Çözüm-devam

- Dallardan geriye doğru giderek 1 nolu düğüm noktasındaki beklenen kârı (BK1) hesaplayalım.
- $BK1 = 3000(0.2) + 2750(0.3) + 2500(0.3) + 2250(0.2)$
 $= 2625 \text{ TL}$
- Saptanan 2625 TL tutarındaki beklenen kâr 1 nolu olay düğüm noktasının üzerine yazılır.
- Aynı yöntemle 200 ve 300 birimlik sipariş miktarları için 2 ve 3 nolu olay düğüm noktalarındaki beklenen kârlar aşağıdaki gibi hesaplanır.
- $BK2 = 1500(0.2) + 4750(0.3) + 8000(0.3) + 7750(0.2) = 5675 \text{ TL}$
- $BK3 = 2000(0.2) + 5250(0.3) + 8500(0.3) + 11750(0.2) = 6875 \text{ TL}$
- Beklenen kârların O2 ve O3 noktalarına yazılmasıyla karar ağacı aşağıdaki gibi tamamlanmış olur.
- Her bir olay düğüm noktasının beklenen değerleri hesaplandıktan sonra K ile simgelenen karar noktasına ulaşırız. Bu nokta; sipariş miktarının 100, 200 veya 300 olması eylemlerinden birinin seçilmesi durumunu gösterir. 300 dalı 100 ve 200 dallarından daha fazla kâr sağladığından mağaza sahibi 100 ve 200 dallarını değil, 300 dalını seçecektir. Seçilmeyen dallar "/" ile işaretlenir.

Ödev

- Bir yatırımcı A ve B seçeneklerinden hangisine yatırım yapmasının uygun olacağını araştırmaktadır. Yatırımcının alternatif stratejileri yatırım yapmamak da dahil olmak üzere şöyledir: A'yı seçmek. A'nın seçilmesi ve başarılı olunması durumunda yatırımcı ya hiçbir şey yapmadan beklemekte ya da elde ettiği kazançla B'ye yatırım yapmaktadır. Bunun tersi de geçerlidir. A'da başarılı olma olasılığı 0.70, B'de başarılı olma olasılığı 0.40'dır. Her iki yatırım seçeneğinin gerektirdiği yatırım miktarı da 2000 TL olup, başarısız olunması durumunda kazanç -2000 TL olmaktadır. A'nın başarılı olması durumunda 3000 TL (yatırım miktarı dahil), B'nin başarılı olması durumunda 5000 TL (yatırım miktarı dahil) elde edilmektedir. Karar ağacını çizerek en uygun stratejiyi belirleyiniz.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

OYUN KURAMI

Oyun

Samuel Johnson (1755) “oyun” kelimesini, *herhangi bir şeyin eğlencesi* olarak tanımlar. Modern düşünceler, bu tanıma ek olarak belirli kuralları da birleştirmiştir. Oyunlardan çoğu karşılıklı etkileşimi ve rekabeti getirir, oyuncu oyundaki diğer oyuncudan üstün olmak için çabalar ve onun başarısı, diğer oyuncuların hareketlerine ve kendi hareketlerine bağlıdır. Bu tanımlama ve örnekler oyun kelimesinin ilk algılanışı olup, gündelik hayatta kullanımına denk düşer.

Oyun: birbirleriyle rekabet eden ve her biri kazanmayı isteyen iki veya daha fazla sayıda karar vericinin (oyuncunun) bulunduğu karar ortamı şeklinde tanımlanabilir.

Oyun Kuramı

Oyun kuramı ilk kez Fransız matematikçisi Emile Borel tarafından 1921 yılında ortaya atılmış olmakla birlikte, sistematik olarak matematikçi John von Neumann ile iktisatçı Oscar Morgenstern tarafından geliştirilmiştir. Oyun kuramının temel ilkeleri bu iki yazarın 1944 yılında yayınladıkları "The Theory of Games and Economic Behaviour" isimli çalışmalarında açıklanmıştır. O günden bu yana oyun kuramı büyük gelişmeler kaydetmiş, John Nash oyun kuramına yaptığı katkılar için 1994 ekonomi nobel ödülüyle ödüllendirilmiştir. Nash tarafından geliştirilen "Nash dengesi ve Nash pazarlık problemi" modern oyun kuramının köşe taşları kabul edilmektedir.

Oyun Kuramının Özellikleri

- İki veya daha fazla karar verici vardır.
- Karar vericilerin her biri bir oyuncudur.
- Oyuncuların birey olması gerekmektedir.
- Oyuncuların rasyonel davrandığı varsayılır: Kazançlarını mümkün olduğu kadar artırma veya kayıplarını mümkün olduğu kadar azaltmak isterler.
- Her karar vericinin bir amaç fonksiyonu vardır.
- Amaç fonksiyonlarının en iyi değerleri yalnızca ait olduğu karar vericinin benimseyeceği stratejiye değil, diğer karar verici(ler)nin strateji(ler)sine de bağlıdır.
- İki-kişili sıfır-toplamlı oyunların en önemli varsayımı, her oyuncunun rakibinin kendisinin hangi stratejiyi seçeceği hakkında tam bilgisi olmasına karşın, kendisi için en iyi olan stratejiyi seçme şansına sahip olduğudur.

Uygulama Alanları

Oyun teorisi iş sorunlarının çözümünde yaygın olarak kullanılmamaktadır. Buna karşın rekabet unsurları içinde önemli bir görüş açıklığı sağlamıştır. Yöneticinin işi, rekabete etki eden faktörler içindeki hal tarzını göz önüne alarak, mevcut en iyi stratejiyi seçmektir. Böylece stratejinin onaylanması ve anlaşılmasında çok faydalıdır.

İşletme problemlerinden örnekler ise rekabete dayanan problemler veya doğaya karşı verilecek karar problemleri şunlardır:

- Teklif verme politikalarının saptanması,
- Reklam planları,
- Satın alma politikasının belirlenmesi,
- Yeni mamuller arasından seçim yapma,
- Araştırma stratejilerinin belirlenmesi,
- Talebin belirsiz olması halinde üretim programlama,
- Fiyatlama.

Oyun Çeşitleri

1. **Oyun Çeşitleri:** Oyunlar çeşitli özelliklerine göre farklı gruplarda sınıflandırılır.

Temelde oyunlar

- a. şans oyunları
- b. strateji oyunları

Oyunlar oyuncu sayısına göre

- a. iki kişili
- b. n kişili

Oyunun sayısal sonucuna göre

- a. Sıfır Toplamlı Oyun: Oyuncuların kazançlarının toplamı sıfır ise yani, oyunculardan biri tam diğer tarafın kaybettiği kadar kazanıyorsa oyun, "sıfır toplamı" bir oyundur. Sıfır toplamı oyunlarda oyuncuların çıkarları birbirine tamamiyle zıttır.
- b. Sabit Toplamlı Oyunlar: Sayısal sonucu sıfırdan farklı oyunlara sabit toplamı oyunlar denir. Sabit toplamı bir oyunda da tarafların çıkarları tamamiyle birbirine zıttır. Çünkü taraflardan birinin kazancındaki bir birim artış diğer tarafın kazancında bir birim azalış demektir.
- c. Sabit Toplamlı Olmayan Oyun: Oyuncuların kazançları toplamının sabit bir sayı olmaması durumunda oyun sabit toplamı olmayan bir oyundur. Bu tür oyunlarda tarafların çıkarları tamamiyle zıt değildir. Taraflar birlikte hareket ederek çıkar sağlayabilirler.

Strateji sayılarına göre

- a. Sonsuz Oyun: Herhangi bir oyuncunun stratejilerinin sayısı belirsiz ise oyun "sonsuz oyun" olur.
- b. Sonlu oyun: Her oyuncunun strateji sayısı sonlu ise oyun "sonlu oyun" dur.

Oyuncunun rakibinin hareketleri hakkındaki bilgisinin derecesi ve cinsine göre

- a. Tam Bilgili Oyun: Eğer bir oyunda her oyuncu her hamleyi yaparken daha önce yapılmış olan bütün kişisel veya talih hareketlerinin sonuçlarını biliyorsa "tam bilgili" oyun söz konusu olur. Sözelimi satranç ve dama tam bilgili oyunlardır.
- b. Tam Bilgili Olmayan Oyun: Tam bilgili olmayan oyunlarda oyuncular böyle bir tam bilgiden yoksundurlar. Örneğin pokerde oyuncular rakiplerinin ellerindeki kağıtları bilmezler. Uygulamada genellikle tam bilgili olmayan oyunlarla karşılaşılır. Çünkü, çatışma durumunun esas bileşeni tarafların birbirlerinin hareketlerini bilmemesidir.

Oyun Kuramı İle İlgili Temel Kavramlar

- 2. Stratejiler:** Oyunun devamı sırasında ortaya çıkabilecek bütün durumlar için oyuncuların seçişlerini belirten kuralları kapsayan kümeye strateji denir.
- 3. Kazanç veya Ödemeler Matrisi:** Oyuncuların farklı stratejileri sonucu kazanç, kayıp veya çekilme olabilir. Her bir oyuncunun stratejisi sonucu ortaya çıkan değerlerden oluşan matrise kazanç veya ödemeler matrisi denir. Ödemeler matrisindeki değerler negatif, pozitif veya sıfır olmak üzere her oyuncunun rakibine karşı kazancını veya kaybını belirler.

İki Kişili Sıfır Toplamlı Oyunlar

Daha önce açıklandığı gibi bir oyunda iki oyuncu varsa oyun iki kişili bir oyundur. İki kişili bir oyunda oyuncuların kazançları toplamı sıfırsa oyun iki-kişili sıfır-toplamlıdır. İki-kişili sıfır-toplamlı sonlu bir oyunda,

1. Biri satır oyuncusu, diğeri sütun oyuncusu olarak isimlendirilen iki oyuncu vardır. Satır oyuncusu yerine bizim taraf, sütun oyuncusu yerine de karşı taraf deyimlerine rastlanabilir.
2. Satır oyuncusu için m , sütun oyuncusu için n tane mümkün strateji vardır. Bu oyun kısaca $m \times n$ oyun olarak isimlendirilir.
3. Satır oyuncusunun stratejileri R_1, R_2, \dots, R_m ile sütun oyuncusunun stratejileri C_1, C_2, \dots, C_n ile gösterilsin. Oyuncuların strateji seçimlerinin türlü birleşimlerinden sonuçlanan kazanç veya kayıplarını bildiğimizi varsayılır. Satır oyuncusunun stratejileri R_i ve sütun oyuncusunun stratejileri (C_j) sonucu ortaya çıkan değerler bir tablo (matris) şeklinde yazılabilir. Bu tabloya ödül, ödeme, kazanç veya kısaca "oyun matrisi" denir. Bir $m \times n$ oyunun kazanç matrisi Tablo 9.1'de gösterildiği gibidir.

Tablo 9.1

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi					
	C_1	C_2	...	C_j	...	C_n
R_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
R_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}
..
R_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}
..
R_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}

İki Kişili Sıfır Toplamlı Oyunlar-devam

- Oyunculardan birinin kazanç matrisi diğer oyuncunun kazanç matrisinden belirlenebilir. Bir oyuncunun kazanç matrisinin tüm elemanlarının ters işaretlilerinden oluşan matris diğer oyuncunun kazanç matrisidir.
- Satır oyuncusunun R_i , sütun oyuncusunun C_j gibi belirli bir stratejiyi kabul ettiklerini varsayalım. Oyun matrisi satır oyuncusuna göre düzenlenmiş ise a_{ij} satır oyuncusunun kazancını (sütun oyuncusunun kaybını) gösterir.

Örnek 9.1

Örnek 9.1: Satır oyuncusunun iki (R_1, R_2), sütun oyuncusunun dört (C_1, C_2, C_3, C_4) stratejisinin bulunduğu bir oyunun, satır oyuncusunun kazançlarına göre düzenlenen matrisi aşağıda gösterilmiştir. Oyuncuların stratejilerinin değişik birleşimlerinden herhangi iki tanesi için oyuncuların kazanç ve kayıplarını bulunuz.

Tablo 9.2

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi			
	C_1	C_2	C_3	C_4
R_1	3	-2	5	6
R_2	2	1	-2	4

Çözüm 9.1: Satırdaki oyuncunun R_2 'yi sütundaki oyuncunun C_3 'ü seçmesi durumunda satır oyuncusunun kazancı a_{23} olur. $a_{23} = -2$ olduğundan satır oyuncusu için negatif kazanç yani kayıp, sütun oyuncusu için negatif kayıp yani, kazanç söz konusudur. Satır oyuncusunun R_1 , sütun oyuncusunun C_4 'ü seçmeleri durumunda satır oyuncusunun kazancı a_{14} kadar, yani 6 birim olacaktır. Bu sütun oyuncusunun 6 birim kaybetmesi demektir.

Örnek 9.2

Örnek 9.2: Oyuncuların her birinin üç stratejisinin bulunduğu bir 3x3 oyunun kazanç matrisi Tablo 9.3’de verildiği gibidir. Söz konusu kazanç matrisini dikkate alarak, oyuncuların oyunu hangi stratejilerle oynayacağını belirleyiniz.

Tablo 9.3

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi			Satır En Küçüğü
	C_1	C_2	C_3	
R_1	16	10	7	7
R_2	8	9	4	4
R_3	9	1	2	1
Sütun En Büyüğü	16	10	7	-

Çözüm 9.2

Tablo 9.3

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi			Satır En Küçüğü
	C ₁	C ₂	C ₃	
R ₁	16	10	7	7
R ₂	8	9	4	4
R ₃	9	1	2	1
Sütun En Büyüğü	16	10	7	-

Tablo 9.3'den görüleceği gibi her bir oyuncunun üçer stratejisi bulunduğundan oyun bir 3x3 oyundur. İlk önce satır oyuncusunu ele alalım. Bu oyuncu R₁ stratejisini seçerse, sütun oyuncusu C₃ stratejisini seçerek kendi kaybını, dolayısıyla rakibinin kazancını mümkün olan en düşük düzeyde tutar. Bu değer yukarıdaki oyun matrisine eklenen "satır en küçüğü" başlıklı sütunda gösterildiği gibi 7'dir. Satır oyuncusunun ikinci stratejiyi seçmesi durumunda sütundaki oyuncu yine kendisi için en az (4) kayıp sağlayacak olan stratejiyi yani, üçüncü stratejiyi seçecektir. Satır oyuncusu üçüncü stratejiyi seçerse sütun oyuncusu ikinci stratejiyi seçerek yine kendi kaybını dolayısıyla rakibinin kazancını en düşük kazanç olan 1'de tutmayı başarır. Bu açıklamaların ortaya koyduğu gibi satır oyuncusu dikkatini satır en küçüklerinin en büyüğüne karşılık gelen strateji üzerinde yoğunlaştırmak durumundadır. Böylece, kendisinin her stratejisi için rakibinin seçimi ne olursa olsun rakibinin kendisine garanti ettiği en düşük kazancı en büyümüş olur.

Satır oyuncusunun kazancı sütun oyuncusunun kaybına eşit olduğundan, sütun oyuncusu kaybını en düşük düzeyde tutmak için sütun en büyüklerinin en küçüğünü sağlayan stratejiyi seçmek durumundadır. Sütun en büyükleri Tablo 9.3'ün en alt satırında "sütun en büyüğü" başlığı altında gösterilmiştir.

Kısaca, $\text{enb}(7, 4, 1) = 7$ olduğundan satır oyuncusu için en iyi strateji R₁'dir.

- Oyunun "alt değeri" (maksimin): α ile gösterilen değer sütundaki oyuncu ne yaparsa yapsın satırdaki oyuncunun kazanacağından emin olduğu miktardır. Bu değere karşılık gelen stratejiye de "maksimin strateji" denir. Maksimin strateji satır oyuncusunun en iyi stratejisidir.
- Oyunun "üst değeri" (minimaksi): β ile gösterilen bu değer, satırdaki oyuncu ne yaparsa yapsın sütundaki oyuncunun kaybının en az olacağından emin olduğu değerdir β 'ya karşılık gelen stratejiye "minimaks strateji" denir. Minimaks strateji sütun oyuncusunun en iyi stratejisidir.
- Oyun Değeri: $\alpha = \beta$ ise bunların ortak değerine "oyunun değeri" denir. Oyunun değeri g ile gösterilecektir. Oyun matrisinin satır oyuncusuna göre düzenlendiğini kabul edelim. g pozitif ise oyunun sonunda satır oyuncusu ortalama g birim kazanacağı anlamına gelir.
- Tepe Noktalı Oyunlar: Stratejilerin kararlı olduğu bazı oyunlar vardır. Bunlar alt ve üst değerleri eşit olan oyunlardır. Bu tür oyunlara "tepe noktalı oyun"lar denir. Tepe noktası aynı zamanda bir denge noktası olup hiç bir oyuncu denge durumunu bozmaz.. Bir oyunun birden fazla tepe noktası olabilir.
- Arı (Sade) Strateji: Oyun kaç kez tekrar edilirse edilsin oyunun her bir tekrarında hep aynı strateji seçiliyorsa bu stratejiye sade strateji denir. Sade stratejiler tepe noktasının belirlediği stratejilerdir.
- Karma Stratejiler: Oyunlarda genellikle daha etkili olan karma stratejiler kullanılır. Karma strateji, tam strateji takımındaki olasılık dağılımıyla tanımlanır.

Örnek 9.3

Örnek 9.3: Aşağıdaki kazanç matrisine sahip 4x4 oyunun tepe noktasını bulunuz.

Tablo 9.4

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi				Satır En Küçüğü
	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	
R ₁	-8	7	2	3	-8
R ₂	1	-6	-2	5	-6
R ₃	7	5	3	4	3
R ₄	4	-4	-8	6	-8
Sütun En Büyüğü	7	7	3	6	3 = 3

Çözüm 9.3

Tablo 9.4

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi				Satır En Küçüğü
	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	
R ₁	-8	7	2	3	-8
R ₂	1	-6	-2	5	-6
R ₃	7	5	3	4	3
R ₄	4	-4	-8	6	-8
Sütun En Büyüğü	7	7	3	6	3 = 3

- **Çözüm 9.3:** Oyunda tepe noktası bulunup bulunmadığını belirleyebilmek için önce her satırın en küçük değeriyle satır en küçüğü başlıklı sütunu, daha sonra her sütunun en büyük değeriyle sütun en büyüğü başlıklı satırı oluşturalım. Oluşturulan sütunu oyun matrisinin sütunlarına, satırı ise satırlarına ekleyelim. Şimdi de sırasıyla oyunun alt değeri (α) ile üst değerini (β) bulalım. Oyunun alt ve üst değerleri aşağıda gösterilmiştir.
- Oyunun alt değeri = $\alpha = \text{enb}(-8, -6, 3, -8) = 3$
- Oyunun üst değeri = $\beta = \text{enk}(7, 6, 3, 6) = 3$
- $3 = 3$ olduğundan, oyunun tepe noktası vardır. Bu noktada kesişen iki stratejiden R3 satır oyuncusunun, C3 sütun oyuncusunun en iyi stratejileridir. Oyunun ortalama değeri $g = 3$ olduğundan oyun satır oyuncusu için çekicidir.

Örnek 9.5

- **Örnek 9.5:** Satır oyuncusu sütun oyuncusuna göstermeden elindeki kağıda 1 ile 20 arasında bir sayı yazar ve sütun oyuncusuna sayıyla ilgili doğru veya yalan söyler. Sütun oyuncusu ya buna inanır veya rakibinin doğru söylemediğini düşünerek sayıyı kendisine göstermesini ister. Satır oyuncusunu suçsuz yere suçlaması durumunda sütun oyuncusu satır oyuncusuna 15 TL öder. Sütun oyuncusunun satır oyuncusunun kendisine yalan söylediğini doğru tesbit etmesi durumundaki kazancı 20 TL'dir. Sütun oyuncusu satır oyuncusunun doğru söylediğini kabul ederse satır oyuncusu sütun oyuncusuna 5 TL öder. Satır oyuncusu yalan söylediği halde sütun oyuncusu buna inanırsa satır oyuncusu 5 TL kazanır. Oyun matrisini düzenleyiniz ve oyuncuların sade stratejilerini bulunuz.

Çözüm 9.5

Çözüm 9.5: Görüldüğü gibi satır oyuncusunun doğru veya yalan söylemek gibi iki stratejisi vardır. Sütun oyuncusunun da satır oyuncusuna inanmak veya inanmamak gibi iki stratejisi vardır. Dolayısıyla oyun 2x2 boyutundadır. Bu belirlemenin ardından düzenlenen ödemeler matrisi Tablo 9.6'da gösterilmiştir. Sütun en büyükleriyle oluşturulan satır ve satır en küçükleriyle oluşturulan sütun da tabloda gösterilmiştir.

Tablo 9.6

Satır Oyuncusu Strateji	Sütun Oyuncusu Stratejisi		Satır En Küçüğü
	İnanmak	İnanmamak	
Doğru Söylemek	-5	15	-5
Yalan Söylemek	5	-20	-20
Sütun En Büyüğü	5	15	-5 \neq 5

$\alpha = \text{enb}(-5, -20) = -5 \neq \beta = \text{enk}(5, 15) = 5$ olduğundan oyunun tepe noktası yoktur. Dolayısıyla oyuncuların sade stratejilerinden söz edilemez.

Örnek 9.6

- **Örnek 9.6:** İki oyuncu aynı anda taş, kağıt veya makas demektedirler. Söylenen kelimeler aynı olduğunda beraberlik söz konusu olmaktadır. Aksi halde, diğerinden daha güçlü olan nesnenin adını söyleyen oyuncu rakibinden 1 TL almaktadır. Makas kağıdı kestiğinden makas kağıttan, kağıt taşı sardığından kağıt taştan, taş makası kırdığından taş makastan güçlüdür. Oyunun kazanç matrisini düzenleyerek oyuncuların sade stratejilerini belirleyiniz.

Çözüm 9.6

Çözüm 9.6: Her iki oyuncunun taş, kağıt veya makas demek olmak üzere üçer stratejisi vardır. Yani oyun 3x3 boyutundadır. Buna göre ödemeler matrisi aşağıdaki gibi düzenlenecektir.

Tablo 9.7

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi			Satır En Küçüğü
	Taş	Kağıt	Makas	
Taş	0	-1	1	-1
Kağıt	1	0	-1	-1
Makas	-1	1	0	-1
Sütun En Büyüğü	1	1	1	$-1 \neq 1$

$\alpha = \text{enb}(-1, -1, -1) = -1 \neq \beta = \text{enk}(1, 1, 1) = 1$ olduğundan oyunun tepe noktası yoktur. Dolayısıyla oyuncuların sade stratejilerinden söz edilemez.

Tepe Noktasız Oyunlar ve Karma Stratejiler

- Bir $m \times n$ oyunun tepe noktası yoksa, özellikle m ve n 'nin büyük değerleri için çözüm zor olabilir. Genel olarak bir oyunun tepe noktası yoksa oyunu çözmeden önce mümkünse m ve n değerlerinin küçültülmesi, yani bazı stratejilerin devre dışı bırakılmaları uygun olur. Bu işlem ancak bazı özel stratejilerin belirlenmesiyle gerçekleştirilir.
- Boyut küçültmede kullanılabilecek iki çeşit strateji vardır:
- 1. Eş stratejiler: Biri diğerine tercih edilemeyen stratejilere "eş strateji" ler denir. Genel olarak bir oyun matrisinin bir satır/sütunun tüm elemanları başka bir satır/sütunun karşılıklı elemanlarına eşit ise bu stratejilere eş stratejiler denir. Eş stratejilerden rasgele seçilen biri dışındakiler matrsten çıkartılarak oyunun çözümü kolaylaştırılır. Boyut indirgenmesi sonucu ulaşılan çözüm orijinal problemin de çözümüdür.
- 2. Üstün stratejiler: Oyunda tercih edilen ve stratejilerden bazılarını devre dışı bırakan stratejilere "üstün stratejiler", bu yolla devre dışı kalan stratejilere ise "mahkum stratejiler" denir. Genel olarak bir oyunun tepe noktası yoksa, oyunu çözmeden önce yapılacak ilk iş varsa bütün eş ve mahkum stratejileri devre dışı bırakmaktır.

Örnek 9.7-Örnek 9.8

Örnek 9.7: Kazanç matrisi aşağıda verilen oyunun eş stratejilerini belirleyiniz.

Tablo 9.8

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi			
	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄
R ₁	1	2	3	1
R ₂	3	6	1	3
R ₃	0	5	4	0
R ₄	1	2	3	1

Örnek 9.8: Aşağıdaki kazanç matrisine sahip oyunun üstün stratejilerini bulunuz.

Tablo 9.9

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi				Satır En Küçüğü
	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	
R ₁	1	0	3	1	0
R ₂	7	-1	6	3	-1
R ₃	-3	0	5	1	-3
R ₄	2	3	4	5	2
Sütun En Büyüğü	7	3	6	5	2 ≠ 3

Örnek 9.9

Örnek 9.9: Kazanç matrisi aşağıda gösterilen oyunun tepe noktasını belirleyerek oyuncuların en iyi stratejilerini bulunuz.

Tablo 9.13

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi				Satır En Küçüğü
	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	
R ₁	10	10	8	17	8
R ₂	17	-13	26	23	-13
R ₃	-30	30	25	13	-30
R ₄	24	32	14	25	14
Sütun En Büyüğü	24	32	26	25	14 ≠ 24

Çözüm 9.9: Tablo 9.13'ün son gözesinde gösterildiği gibi oyunun alt değeri (14) ile üst değeri (24) eşit olmadıklarından oyunun tepe noktası yoktur. Bu durumda maksimin ve minimaks stratejilerden dolayısıyla, sade stratejilerden söz edilemez.

Örnek 9.10

Örnek 9.10: Kazanç matrisi aşağıda gösterilen oyunun sade stratejilerini belirleyiniz.

Tablo 9.14

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi		Satır En Küçüğü
	C_1	C_2	
R_1	3	5	3
R_2	6	4	4
Sütun En Büyüğü	6	5	$4 \neq 5$

Çözüm 9.10: Tablo 9.14'ün son gözesinde gösterildiği gibi oyunun tepe noktası yoktur. Bu durumda sade stratejilerden söz edilemez. Bu nedenle, karma strateji kavramının açıklanması gerekir.

Karma Strateji

- Karma Strateji: Belirli bir oranda kullanılmış sade stratejilerin rasgele sıralanışından ibaret birleşik stratejilere karma strateji denir. Buna göre bir sade strateji, stratejilerden birinin kullanılma olasılığı 1, ötekilerin kullanılma olasılığı sıfır olan bir karma stratejinin özel bir durumu olarak düşünülebilir.

Örnek 9.10-Satır Oyuncusu Açısından

- Örnek 9.10'daki oyunu oynayan oyuncuların karma stratejilerini belirleyiniz.

Tablo 9.14

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi		Satır En Küçüğü
	C ₁	C ₂	
R ₁	3	5	3
R ₂	6	4	4
Sütun En Büyüğü	6	5	4 ≠ 5

- Soruna önce satır oyuncusu açısından bakalım. Satır oyuncusunun birinci stratejiyi seçmesi olasılığına p dersek, ikinci stratejiyi seçmesi olasılığı $(1 - p)$ olur. Satır oyuncusunun amacı kazancını en büyük yapacak p değerini belirlemektir. p 'nin hesaplanmasında izlenen yaklaşım aşağıda açıklanmıştır.
- Sütun oyuncusu daima birinci stratejiyi (C_1) oynarsa, satır oyuncusunun kazancının beklenen değeri (E_1) aşağıdaki gibi olur.
- $E_1 = 3p + 6(1 - p) = 3p + 6 - 6p = 6 - 3p$
- Sütun oyuncusu daima ikinci stratejiyi (C_2) oynarsa, satır oyuncusunun kazancının beklenen değeri (E_2) aşağıdaki gibi elde edilir.

$$E_2 = 5p + 4(1 - p) = 5p + 4 - 4p = p + 4$$

- E_1 ve E_2 'nin birlikte çözülmesiyle bulunur. E_1 ve E_2 'nin eşitlenmesi ve çözülmesiyle p aşağıdaki gibi hesaplanacaktır.

$$E_1 = E_2 \Rightarrow p + 4 = 6 - 3p \Rightarrow p = 1/2 \text{ ve } 1 - p = 1/2$$

- Buna göre, oyunun n kez tekrarlanması durumunda oyunun değeri (E_1 veya E_2 'den) 4.5 ($(E_1 = 1/2 + 4$ veya $E_2 = 6 - 3(1/2))$) olarak bulunur. Satır oyuncusu ortalama 4.5 birim kazanmayı umar.

Grafik Çözümü-Satır Oyuncusu Açısından

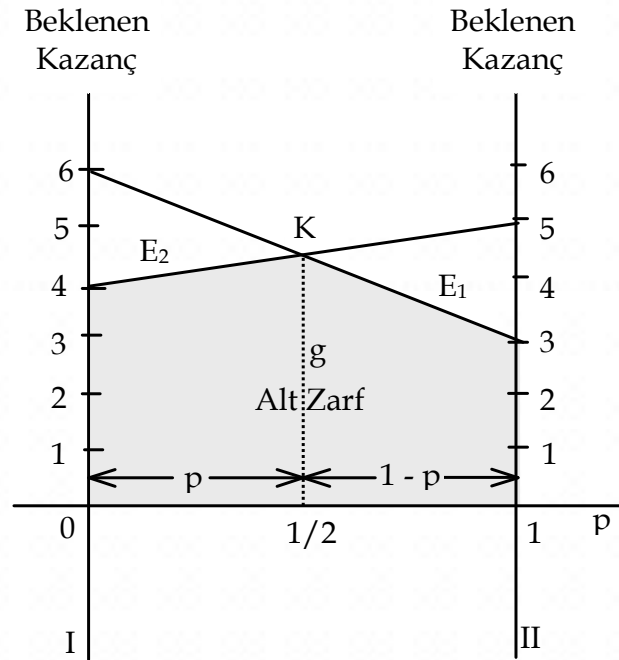
Örnek 9.10: Aşağıda gösterilen oyunun değerini grafik yöntemi ile bulunuz

Tablo 9.14

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi		Satır En Küçüğü
	C ₁	C ₂	
R ₁	3	5	3
R ₂	6	4	4
Sütun En Büyüğü	6	5	4 ≠ 5

Grafik Çözümü-Satır Oyuncusu Açısından

Bulgularımızı şekil üzerinde gösterelim. Bunun için yatay eksen p 'yi, dikey eksen beklenen kazancı göstermek üzere bir koordinat sistemi oluşturalım. p 'nin sıfır ile 1 arasında değiştiği göz önünde bulundurulduğunda ilgilenilen alan $p = 0$ ve $p = 1$ dikmeleri (I, II) ile belirlenecektir.



Şekil 9.1

Şekil 9.1'den görüldüğü gibi satır oyuncusu için en iyi durum, E_1 ve E_2 doğrularının belirlediği alt zarfın K ile gösterilen en üst noktasıdır. Satır oyuncusu $E_1 = E_2$ olmasını sağlayan olasılıklardan uzaklaşırsa sütun oyuncusu oyunun değerinin 4.5'den daha düşük olmasını sağlayacak sade bir stratejiye sahip olur.

Örnek 9.10-Sütun Oyuncusu Açısından

Tablo 9.14

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi		Satır En Küçüğü
	C ₁	C ₂	
R ₁	3	5	3
R ₂	6	4	4
Sütun En Büyüğü	6	5	4 ≠ 5

- Oyuna bir de sütun oyuncusu açısından bakalım. Sütun oyuncusunun birinci stratejiyi seçmesi olasılığına q dersek, ikinci stratejiyi seçmesi olasılığı $(1 - q)$ olur. Sütun oyuncusunun amacı kaybını en küçük yapacak q değerini belirlemektir. q 'nin belirlenmesinde izlenen yaklaşım aşağıda açıklanmıştır.
- Satır oyuncusu daima birinci stratejiyi (R_1) oynarsa, sütun oyuncusunun kaybının beklenen değeri (F_1) aşağıdaki gibi olur.

$$F_1 = 3q + 5(1 - q) = 3q + 5 - 5q = -2q + 5$$

- Satır oyuncusu daima ikinci stratejiyi (R_2) oynarsa, sütun oyuncusunun kaybının beklenen değeri aşağıdaki gibi olur.

$$F_2 = 6q + 4(1 - q) = 6q - 4q + 4 = 2q + 4$$

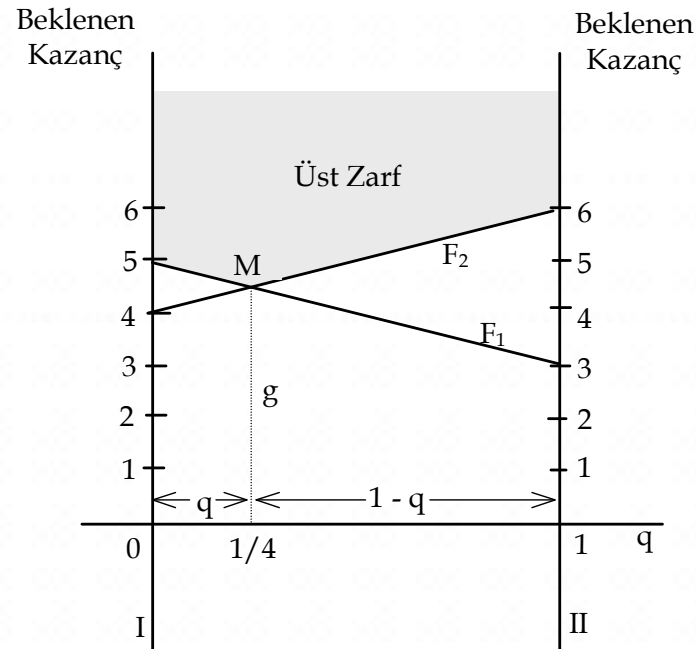
- Oyunun her bir tekrarında satır oyuncusu F_1 ve F_2 'yi daha yüksek düzeyde tutacak stratejiyi seçer. Bu nedenle sütun oyuncusunun amacı, bu en büyük değerleri mümkün olduğunca küçültmektir. Çözüm, F_1 ve F_2 'nin birlikte çözülmesiyle bulunur. Çözüm aşağıda gösterilmiştir.

$$F_1 = F_2 \Rightarrow 5 - 2q = 2q + 4 \Rightarrow q = 1/4, 1 - q = 3/4$$

Buradan da g , F_1 veya F_2 'den 4.5 (satır oyuncusu için gerçekleştirilen çözümde olduğu gibi) olarak bulunur.

Grafik Çözümü-Sütun Oyuncusu Açısından

Bulgularımızı şekil üzerinde gösterelim. Bunun için yatay eksen q 'yu, dikey eksen beklenen kazancı göstermek üzere bir koordinat sistemi oluşturalım. q 'nın 0 ile 1 arasında değiştiği dikkate alındığında ilgilenilen alan $q = 0$ ve $q = 1$ dikeyleri (I, II) ile belirlenecektir.



Şekil 9.2

Şekil 9.2'den görüldüğü gibi sütun oyuncusu için en iyi durum F_1 ve F_2 doğrularının belirlediği üst zarfın en alt noktasıdır. Sütun oyuncusu $F_1 = F_2$ olmasını sağlayan olasılardan M ile işaretlenen noktadan uzaklaşmamalıdır. Özetle, sütun oyuncusunun amacı F_1 ve F_2 'nin en büyüğünün en küçüklenmesidir. İken, satır oyuncusunun amacı E_1 ve E_2 'nin en küçüğünün en büyüklenmesidir. Her iki oyuncu bunu yaparsa oyunda denge kurulmuş olur.

mx2 ve 2xn Oyunların Çözümü

Önceki kesimde herhangi bir 2x2 oyunun basit bir grafik kullanarak nasıl kolayca çözülebileceğini açıkladık. Aynı yöntem oyunculardan birinin iki, diğerinin ikiden fazla stratejisinin bulunduğu oyun problemlerinin çözümünde de kullanılabilir. Grafik yaklaşımı ile herhangi bir 2xn veya mx2 oyunun 2x2 oyuna indirgenmesi amaçlanmaktadır. Boyutun 2x2'ye indirgenmesinden sonra problem 2x2 durumunda olduğu gibi çözülebilmektedir.

Örnek 9.13

Örnek 9.13: Bir 4x3 oyunun kazanç matrisi aşağıda verilmiştir. Oyunu grafik yöntemiyle çözerek oyuncuların strateji seçimlerini ve oyunun değerini bulunuz.

Tablo 9.18

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi		Satır En Küçüğü
	C_1	C_2	
R_1	3	4	3
R_2	2	4	2
R_3	6	2	2
R_4	4	-2	-2
Sütun En Büyüğü	6	4	$3 \neq 4$

Çözüm 9.13

Çözüm 9.13: Oyunun alt değeri 3, üst değeri 4 olduğundan, tepe noktası yoktur. Bu yüzden çözüm bir karma strateji çifti olacaktır. Strateji sayısı iki olan oyuncu sütun oyuncusu olduğundan çözüm bu oyuncunun stratejileri ile başlatılır. Sütun oyuncusunun C_1 'i seçme olasılığına q dersek, C_2 'yi seçme olasılığı $(1 - q)$ olur. Buna göre satır oyuncusunun R_1, R_2, R_3 ve R_4 strateji seçimlerine bağlı olarak sütun oyuncusunun beklenen kazancı şöyledir:

$$R_1 \text{ için, } F_1 = 3q + 4(1 - q)$$

$$= 3q + 4 - 4q$$

$$= -q + 4$$

$$R_3 \text{ için, } F_3 = 6q + 2(1 - q)$$

$$= 6q + 2 - 2q$$

$$= 4q + 2$$

$$R_2 \text{ için, } F_2 = 2q + 4(1 - q)$$

$$= 2q + 4 - 4q$$

$$= -2q + 4$$

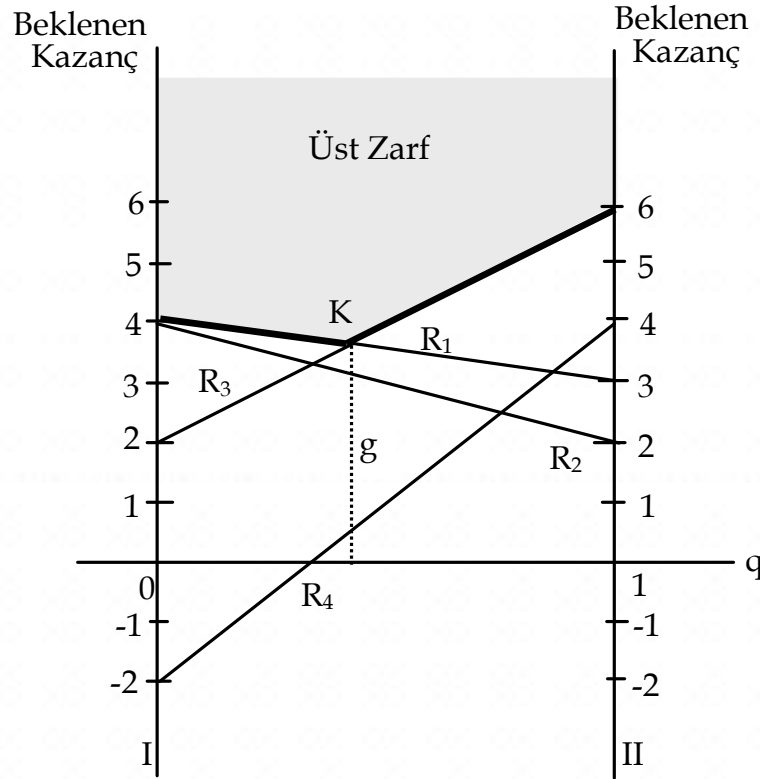
$$R_4 \text{ için, } F_4 = 4q - 2(1 - q)$$

$$= 4q - 2 + 2q$$

$$= 6q - 2$$

Yukarıdaki gibi belirlenen beklenen kazançların temsil ettikleri doğrular Şekil 9.4'deki gibi çizilmiştir. Şekil 9.4'de gösterildiği gibi oyunun çözümü kazançların üst sınırı (kalın çizgiyle çizilmiş) ile belirlenen üst zarfın alt noktasında ortaya çıkar.

Çözüm 9.13



Şekil 9.4

K ile gösterilen noktanın yatay eksene olan uzaklığının oyunun değerine eşit olduğu bilinmektedir. K, R_3 ve R_1 stratejilerine karşı gelen doğrularla belirlendiğinden, satır oyuncusu oyunu R_2 ve R_4 stratejilerini devre dışı bırakarak oynayacaktır. Bu stratejilerin devre dışı bırakılmasıyla, 4x2 oyun 2x2 oyuna dönüştürülmüştür. 2x2 oyunun kazanç matrisi Tablo 9.19'da gösterilmiştir.

Çözüm 9.13

Tablo 9.19

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi		Satır En Küçüğü
	C ₁	C ₂	
R ₁	3	4	3
R ₃	6	2	2
Sütun En Büyüğü	6	4	3 ≠ 4

Şimdi bu basit oyunu çözelim. Satır oyuncusunun stratejisine bağlı olarak sütun oyuncusunun beklenen kazancı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$R_1 \text{ için, } F_1 = 3q + 4(1 - q) \\ = -q + 4$$

$$R_3 \text{ için, } F_3 = 6q + 2(1 - q) \\ = 4q + 2$$

$F_1 = F_3$ bağıntısından $q = 2/5$, $1 - q = 3/5$ olarak hesaplanır. $q = 2/5$ olduğu göz önünde bulundurulduğunda, $g = 18/5$ olur.

Benzer şekilde, sütun oyuncusunun strateji seçimine bağlı olarak satır oyuncusunun kazancı aşağıdaki gibi olur.

$$C_1 \text{ için, } E_1 = 3p + 6(1 - p) \\ = -3p + 6$$

$$C_2 \text{ için, } E_2 = 4p + 2(1 - p) \\ = 2p + 2$$

Bu iki kazancın eşit oldukları dikkate alındığında satır oyuncusunun strateji seçimine ilişkin olasılıklar, $p = 4/5$, $(1 - p) = 1/5$, $g = 18/5$ olarak belirlenir.

mxn Oyunların Doğrusal Programlama İle Çözümü

Genel olarak, oyuncuların strateji sayıları büyüdükçe oyunun çözümü güçleşir. Artan güçlük kesinlikle teoride değil işlem sayısının hızla artmasındadır. Orjinalinde $2 \times n$ veya $m \times 2$ olmayan ya da bu boyutlardan birine indirgenemeyen $m \times n$ oyunlar doğrusal programlama ile çözülürler. Bilindiği gibi bir $m \times n$ oyunda satır oyuncusunun R_1, R_2, \dots, R_m gibi m stratejisi, rakibinin C_1, C_2, \dots, C_n gibi n stratejisi vardır

Örnek 9.14

Örnek 9.14: Kazanç matrisi aşağıda verilen 3x3 oyunu doğrusal programlama olarak formülleyerek simpleks yöntemle çözünüz.

Tablo 9.21

Satır Oyuncusu Stratejisi	Sütun Oyuncusu Stratejisi			Satır En Küçüğü
	C ₁	C ₂	C ₃	
R ₁	-2	6	3	-2
R ₂	3	-4	7	-4
R ₃	-1	2	4	-1
Sütun En Büyüğü	3	6	7	-1 ≠ 3

Çözüm 9.14

Çözüm 9.14: Doğrusal programlama ile çözüme geçmeden önce matrisin negatif elemanlarını pozitif değerlere dönüştürmek için kazanç matrisinin her bir elemanına $L = 4$ ekleyelim. Tablo 9.21'deki kazanç matrisinin her bir değerine 4 eklenmesiyle problemin orijinal kazanç matrisi, Tablo 9.22'deki gibi olur. Bu ekleme oyunun değerini 4 artırır ama çözümü değiştirmez.

Tablo 9.22

Sütun Oyuncusu Stratejisi	Satır Oyuncusu Stratejisi			Satır En Küçüğü
	C_1	C_2	C_3	
R_1	2	10	7	2
R_2	7	0	11	0
R_3	3	6	8	3
Sütun En Büyüğü	7	10	11	$3 \neq 7$

Oyunu önce satır oyuncusu için çözelim.

Çözüm 9.14

Bu oyuncunun doğrusal programlama formülasyonu aşağıda gösterilmiştir.

$$Z_{\text{enk}} = 1/g = x_1 + x_2 + x_3$$

$$2x_1 + 7x_2 + 3x_3 \geq 1$$

$$10x_1 + 0x_2 + 6x_3 \geq 1$$

$$7x_1 + 11x_2 + 8x_3 \geq 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Burada g oyunun değeri ve $x_i = p_i/g$ olarak tanımlanmıştır.

Simpleks çözüm için artık ve yapay değişkenlerin modele sokulması ile,

$$Z_{\text{enk}} = x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + MA_1 + MA_2 + MA_3$$

$$2x_1 + 7x_2 + 3x_3 - x_4 + A_1 = 1$$

$$10x_1 + 0x_2 + 6x_3 - x_5 + A_2 = 1$$

$$7x_1 + 11x_2 + 8x_3 - x_6 + A_3 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, A_1, A_2, A_3 \geq 0$$

elde edilir.

Problemin başlangıç çözüm tablosu aşağıda gösterilmiştir.

Çözüm 9.14

Tablo 9.23

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	A_1	A_2	A_3	ÇV
A_1	2	7	3	-1	0	0	1	0	0	1
A_2	10	0	6	0	-1	0	0	1	0	1
A_3	7	11	8	0	0	-1	0	0	1	1
Z_j	19M	18M	17M	-M	-M	-M	M	M	M	3M
$Z_j - C_j$	19M-1	18M-1	17M-1	-M	-M	-M	0	0	0	-

Tablo 9.24

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	A_1	A_2	A_3	ÇV
A_1	0	7	$9/5$	-1	$1/5$	0	1	$-1/5$	0	$4/5$
x_1	1	0	$3/5$	0	$-1/10$	0	0	$1/10$	0	$1/10$
A_3	0	11	$19/5$	0	$7/10$	-1	0	$-7/10$	1	$1/3$
Z_j	1	18M	$\frac{28M+3}{5}$	-M	$\frac{9M-1}{10}$	-M	M	$\frac{-9M+1}{10}$	M	$\frac{11M+1}{10}$
$Z_j - C_j$	0	18M-1	$\frac{28M-2}{5}$	-M	$\frac{9M-1}{10}$	-M	0	$\frac{-19M}{10}$	0	-

Çözüm 9.14

Tablo 9.25

TDV	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	A ₁	A ₂	A ₃	ÇV
A ₁	0	0	-34/55	-1	-27/110	7/11	1	27/110	-7/11	67/110
x ₁	1	0	3/5	0	-1/10	0	0	1/10	0	1/10
x ₂	0	1	19/55	0	7/110	-1/11	0	-7/10	1/11	3/110
Z _j	1	1	$\frac{52-34M}{55}$	-M	$\frac{-4-27M}{110}$	$\frac{7M-1}{11}$	M	$\frac{27M+4}{110}$	$\frac{1-7M}{11}$	$\frac{67M+14}{110}$
Z _j - C _j	0	0	$\frac{-34M-3}{55}$	-M	$\frac{-4-27M}{110}$	$\frac{7M-1}{11}$	0	$\frac{-83M+4}{110}$	$\frac{1-18M}{11}$	-

Tablo 9.26

TDV	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	A ₁	A ₂	A ₃	ÇV
x ₆	0	0	-34/35	-11/7	-27/70	1	11/7	27/70	-1	67/70
x ₁	1	0	3/5	0	-1/10	0	0	1/10	0	1/10
x ₂	0	1	9/35	-1/7	1/35	0	1/7	-1/35	0	4/35
Z _j	1	1	6/7	-1/7	-1/14	0	1/7	1/14	0	3/14
Z _j - C _j	0	0	-1/7	-1/7	-1/14	0	$\frac{1-7M}{7}$	$\frac{1-14M}{14}$	-M	-

Tüm $Z_j - C_j \leq 0$ olduğundan yürürlükteki çözüm en iyidir. En iyi çözümün yer aldığı tablodan görüldüğü gibi, $x_1 = 1/10$, $x_2 = 4/35$, $x_3 = 0$ 'dır

İki Kişili Sabit Toplamlı Oyunlar

İki-kişili sabit-toplamlı bir oyunda oyuncuların kazançları toplamı c ($c \neq 0$) sabitine eşittir. Genel olarak iki-kişili sabit-toplamlı oyunlar iki-kişili sıfır-toplamlı oyunların çözümünde kullanılan yöntemlerle çözülür.

Örnek 9.15: Yörede yayın yapan iki TV kanalı vardır. 20:00-21:00 saatleri arasında tam 50 milyon kişi bu iki kanalı izlemektedir. Kanallar 20:00-21:00 saatleri arasında yapacakları yayının türünü önceden aynı anda anons etmek zorundadırlar. Yayın türünün sonradan değiştirilmesi mümkün değildir. Kanalların mümkün seçimleri ve birinci kanalı seyredeceklerin sayısı Tablo 9.30'da verilmiştir. Oyunun tepe noktası bulunup bulunmadığını ve birinci kanal için oyunun değerini bulunuz.

Tablo 9.30

Kanal 1 Yayın Türü	Kanal 2 Yayın Türü			Satır En Küçüğü
	Yarışma	Arkası Yarın	Komedi	
Yarışma	25	25	40	25
Arkası Yarın	25	40	18	18
Komedi	18	24	30	18
Sütun En Büyüğü	25	40	40	25 = 25

Çözüm 9.15: Tablonun satır en küçükleriyle oluşturulan son sütunu incelendiğinde $\min(25, 18, 18) = 18$ olduğu görülecektir. Bu, birinci kanalı en az 18 milyon kişinin izleyeceği anlamına gelir. Diğer taraftan, sütun en büyükleriyle oluşturulan son satır incelendiğinde $\min(25, 40, 40) = 25$ olduğu görülecektir. Bu ise ikinci kanalı en az 25 milyon kişinin izleyeceği anlamına gelir. $\min(\text{satır en küçükleri}) = \min(\text{sütun en büyükleri})$ olduğundan, oyun tepe noktalı bir oyundur. Buna göre 25 milyon kişi birinci kanaldaki yarışma programını, kalan 25 milyon kişi ikinci kanaldaki yarışma programını izleyecektir. Özetle oyunun satır oyuncusu için değeri 18, sütun oyuncusu için 25 ($= 50 - 25$) dir.

İki Kişili Sabit Olmayan Toplamlı Oyunlar

- Uygulamada sabit olmayan toplamlı oyunlarla karşılaşmak daha olağandır. Rakip işletmelerin tam anlamıyla çatışma durumunda olmaları genellikle beklenmez. Bu kesimde oyuncuların işbirliği yapmalarının söz konusu olmadığı iki kişili sabit olmayan toplamlı oyun problemleri üzerinde durulacaktır.
- **Örnek 9.16:** Soygun yapan iki kişi yakalanmış ve tutukevine konmuştur. Suçlu olduklarının bilinmesine karşın yargının elinde suçu kanıtlayacak yeterli delil yoktur. Bu nedenle savcı sanıkları birbirlerine karşı tanıklık etmeleri konusunda ikna etmeye çalışmaktadır. Savcı sanıkların suçlarını itiraf etmelerini sağlamak için her birine ayrı ayrı şunları söyler: Suçu biriniz itiraf eder diğerine karşı tanıklık ederse itiraf eden serbest kalır, itiraf etmeyen 9 yıl ceza alır. Her ikiniz birden suçlu olduğunuzu kabul ederseniz 6'şar yıl ceza alırsınız. Her ikiniz birden suçu reddederseniz 1'er yıl ceza alırsınız. Sizce sanıklar için en uygun davranış ne olur?

Çözüm 9.16

Çözüm 9.16: Sanıkların birbirleriyle haberleşmelerinin mümkün olmadığını varsayalım. Buna göre sanıkların kazanç (ceza almak istenmeyen bir durum olduğu için - değerli) matrisleri aşağıdaki gibi düzenlenir.

Birinci sanık için düzenlenen kazanç (ceza) matrisi aşağıda gösterilmiştir. İkinci sanığın ceza matrisine geçmeden önce birinci sanık için en iyi davranış biçiminin ne olacağını araştıralım. Birinci sanığın, ikinci sanığın itiraf edeceğini umduğunu düşünelim. Bu durumda kendisi için en iyi strateji suçu kabul etmek olur (-6, -9'dan daha iyidir). Birinci sanığın, ikinci sanığın reddedeceğini düşündüğünü varsayalım. Bu durumda birinci sanık için en iyi seçenek suçu kabul etmek olur (0, -1'den iyidir). Özetle ikinci sanığın tavrı ne olursa olsun birinci sanık için en iyi davranış biçimi suçu kabul etmektir. Birinci sanığın ceza matrisi Tablo 9.31'de gösterilmiştir.

Tablo 9.31

Birinci Sanık	İkinci Sanık	
	İtiraf	Red
İtiraf	-6	0
Red	-9	-1

Şimdi de ikinci sanık için en iyi davranış biçiminin ne olacağını araştıralım. İkinci sanığın durumunu özetleyen ceza matrisi Tablo 9.32’de gösterilmiştir.

Tablo 9.32

Birinci Sanık	İkinci Sanık	
	İtiraf	Red
İtiraf	-6	-9
Red	0	-1

İkinci sanığın, birinci sanığın suçu kabul edeceğini umduğunu düşünelim. Tablo 9.32’den görüleceği gibi, bu durumda kendisi için en iyi strateji suçu kabul etmek olur (-6, -9’dan iyidir). İkinci sanığın, birinci sanığın reddedeceğini düşündüğünü varsayalım. Bu durumda kendisi için en iyi seçenek suçu kabul etmek olur (0, -1’den iyidir). Özetle birinci sanığın tavrı ne olursa olsun ikinci sanık için en iyi davranış biçimi suçu kabul etmektir. Sabit olmayan toplamli oyunlarda oyuncuların oyun matrisleri yukarıdaki gibi ayrı matrisler olarak değil tek matris halinde gösterilir. Birinci ve ikinci suçluların ceza matrislerinin göz önünde bulundurulmasıyla oluşturulan ceza matrisi aşağıda gösterilmiştir.

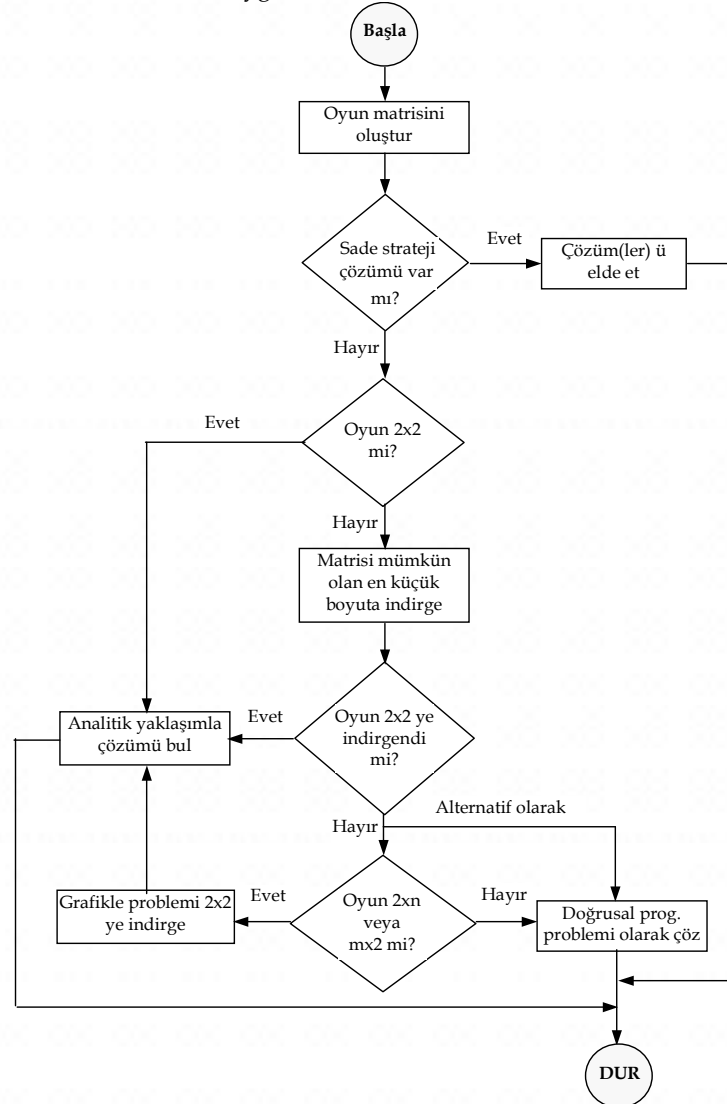
Tablo 9.33

Birinci Suçlu	İkinci Suçlu	
	İtiraf	Red
İtiraf	(-6, -6)	(0, -9)
Red	(-9, 0)	(-1, -1)

- Yukarıdaki açıklamaların ortaya koyduğu gibi oyunun tepe noktası $(-6, -6)$ gözesinde ortaya çıkmaktadır. Bunun anlamı her iki sanığın suçu kabul etmesi ve 6'şar yıl ceza almaları (toplam 12 yıl ceza)'dır.
- Tablo 9.33 incelendiğinde $(-1, -1)$ gözesinin işaret ettiği stratejilerin diğerlerinden daha iyi olduğu düşünülebilir. Çünkü bu sanıkların 6'şar yıl yerine 1'er yıl ceza almaları demektir. Ancak, $(-1, -1)$ sonucu hiç gerçekleşmeyebilir. Çünkü sanıklardan biri bu gözenin işaret ettiği stratejiyi benimsemişken diğeri bundan vazgeçerse cezasının 1 yıl yerine sıfır yıl olmasını sağlayabilir. Bu yüzden $(-1, -1)$ tepe noktası olamaz. İki-kişili sıfır-toplamlı oyunlarda olduğu gibi, iki-kişili sabit olmayan-toplamlı oyunların tepe noktası oyuncuların strateji seçimlerini tek başına değiştirmelerinin oyunculara hiçbir yarar sağlamadığı noktada ortaya çıkar.

Oyun Teorisi Akış Çizelgesi

Oyun problemlerinin çözümünde aşağıdaki akış çizelgesinin göz önünde bulundurulmasının uygun olur.



Oyun Teorisinin Türkiye'deki Durumu

Türkiye'de Oyun Teorisi üzerine çalışan ve dünya bilimsel platformlarında göz ardı edilmeyen bir akademisyenler grubu bulunmaktadır. Bunlar ülkemizin çeşitli üniversitelerinde, genellikle İktisat ve Matematik bölümlerinde çalışmaktadırlar. Bu kişiler uygulamalı projelere katkıda bulunabilecek birikime de sahiptirler. Ne var ki Türkiye'de bu birikime kayda değer bir talep bulunmamaktadır. Oysa ki dünyada Oyun Teorisi üzerine çalışan bilim adamlarından açık arttırmaların tasarlanmasından kirliliğin önlenmesine kadar bir çok konuda entelektüel destek istenmektedir.

Türkiye'deki durumu, Oyun Teorisi'nin kamuoyunun gündemine nispeten gecikerek girmesiyle açıklamak mümkün olabilir.

İhale Ve Oyun Teorisi

Son aylarda ülkemizde ve Avrupa’da birçok cep telefonu lisans ihalesi gerçekleşmektedir. Başarının ölçüsü vergi mükellefleri açısından ihalenin getirisi, tüketiciler açısından ise ihalenin yol açtığı rekabetçi ortam sonucu telefon ücretlerinin düşüklüğü olarak belirlenebilir. Her iki kesimi de korumakla sorumlu olan hükümetlerin de bu iki amaç arasında bir denge kurması beklenmektedir. Bazı ihalelerin her iki açıdan da başarısız olması bir şanssızlık değil, ihale kurallarını koyan hükümetlerin oyun teorisini yeterince hesaba katmamalarının sonucudur. Örneğin, Hollanda hükümetinin açtığı ihalenin kuralları İngiltere’de uygulanan kuralların benzeri olmasına rağmen ihale “fiyasko” denilecek bir sonuçla bitmiştir. İngiltere’nin beş lisans için \$34 milyar kazandığı ihale göz önüne alındığında kişi başına benzer bir lisans ücretinin Hollanda hükümetine \$9 milyar kazandırması beklenirken ihale sonucunda \$2.5 milyar elde edildi.

Bu sonuç, önemli olanın benzer kuralların uygulanması değil, şartlara uygun kuralların uygulanması olduğunu vurgulamaktadır. Bir başka ifade ile oyunun kurgusunun başlangıç şartlarına göre düzenlenmesi gerekmektedir. İngiltere’de cep telefonu alanında faaliyet gösteren dört oyuncu varken beş lisans için ihaleye çıkıldı ve daha baştan en az bir yeni oyuncunun piyasaya gireceği belirlendi. İhale dokuz yeni oyuncunun teklif vermesiyle büyük bir rekabet içersinde geçti ve İngiltere hükümetine \$34 milyar getiri sağladı.

Hollanda’da ise zaten beş oyuncu vardı ve yine beş lisans ihaleye çıkarıldı. Yeni oyuncuların piyasaya giriş maliyetleri sadece ihale bedeli ile sınırlı olmadığından mevcut oyunculara göre daha yüksektir. Hollanda ihalesi tamamen açık artırma ile yürütüldüğünden, yeni oyuncular hangi teklifi verirlerse versinler mevcut oyuncuların fiyatı yeni bir oyuncu için cazip olmayacak noktaya kadar artıracabileceklerini düşündüklerinden ihaleye bağımsız olarak girmekten çekindiler ve mevcut oyuncularla ortaklıklar kurarak ihaleye girdiler. Dolayısı ile rekabet azaldığından Hollanda beklediği geliri elde edemedi. Aynı zamanda piyasaya yeni oyuncu girmesini ve rekabetin artmasını da sağlayamadı.

Ülkemizdeki GSM 1800 ihalesindeki ikinci lisansın birincisinden yüksek olması şartı İş Bankası-Telecom Italia ortaklığının, yaratıcı bir strateji uygulayarak ve ikinci lisans için cazip olacak bir ortamı ortadan kaldırarak, GSM 1800 teknolojisinde tek oyuncu olmalarına fırsat sağladı. Belki hükümetin iki lisanstan elde edilecek gelir beklentilerine yaklaşıldı, ama piyasadaki oyuncu sayısı sınırlı kaldı.

Sonuç olarak; hükümetlerin, yeterince talep yaratabilmek, potansiyel oyuncuların anlaşmalarına fırsat tanımamak ve ihale sonucunda rekabetçi bir piyasa yapısına kavuşabilmek için, ihale şartlarını mevcut piyasa konumunu göz önüne alarak ve oyun teorisinden faydalanarak belirlemeleri gerekmektedir.

Sonuç

Bugünün dünyası, çok hızlı değişim ve gelişim içerisindedir. Böyle bir ortamda işletmelerin ayakta kalabilmeleri, yapacakları iç ve dış işletme analizlerine ve bu analizler ışığında alınacak kararlara bağlıdır.

Karar alma tekniklerinden biri de oyun teorisidir. Oyun teorisini tarihsel gelişimi irdelendiğinde, oyunların şans kuramının 17. yüzyılda ortaya atılmış olduğu ve olasılık kuramı adı verilen matematik dalının gelişmesinde kaynak olduğu görülür. Çıkarları çatışan tarafların akılcı davranış kurallarının belirlenmesi olan oyun teorisi, bu tür karar ortamlarını açıklayan matematiksel bir yaklaşımdır.

İYİ OYUNLAR