Doğrusal Programlama

GİRİŞ

Prof. Dr. Ünal H. ÖZDEN

Karar Verme

"Algılanan ihtiyaçlara özgü kasıtlı ve düşünceli seçim" (Kleindorfer ve diğ., 1993)

"Karar Verici (KV)'nin mevcut tüm seçenekler arasından amacına veya amaçlarına en uygun bir veya birkaç seçeneği seçme sürecine girmesi" (Evren ve Ülengin, 1992)

En genel hali ile karar verme; KV'nin mevcut seçenekler arasından bir seçim, sıralama ya da sınıflandırma yapması gibi bir sorunu çözmesi sürecidir

İyi Bir Karar

- Karar verme kalitesini ölçecek tek bir ortak ölçü saptanamamıştır (Olson ve Courtney, 1992)
- İyi karar verme sanatı sistematik düşünce ile oluşur (Hammond ve diğ., 1999)
- İyi bir karar;
  - Mantığa dayanır
  - Tüm mevcut kaynakları kullanır
  - Tüm olası seçenekleri inceler
  - Sayısal bir yöntem uygular

Karar Verme Süreci

Dar anlamda karar verme, çeşitli alternatifler içinde en uygun olanının seçiminin yapıldığı bir süreç olarak tanımlanabilir.

Karar Verme Süreci, değişik kaynaklarda farklı aşamalarla sıralanmıştır. Ancak farklı yaklaşımların ortak noktaları dikkate alındığında, söz konusu sürecin aşamalarını aşağıdaki gibi ifade etmek yanlış olmaz.

1. Karar probleminin tanımlanması
   - -Karar verecek kişi veya kişiler
   - -Amaç
   - -Alternatif eylem biçimleri
   - -Belirsizlik
2. Karar probleminin modelinin kurulması

   Problemin kolayca çözümlenebilmesi için diğer bir deyişle problemi en iyi biçimde temsil edecek ve problemin çözümündeki belirsizlikleri en aza indirecek bir modelin kurulması gerekir.

   Model: Bir sistemin değişen şartlar altındaki davranışlarını incelemek, kontrol etmek ve geleceği hakkında tahminlerde bulunmak amacıyla elemanları arasındaki bağıntıları kelimler veya matematik terimlerle belirten ifadeler topluluğuna model denir.
3. Modelden çözüm elde edilmesi
4. Modelin çözümünün test edilmesi
5. Karar verme ve kararın uygulamaya konulması

Doğrusal Programlama

Günümüzde, işletme, ekonomi ve muhasebe dallarını en yakından ilgilendiren konulardan bir olan doğrusal programlama, aynı zamanda yöneylem araştırmasında da en önemli konulardan biridir. Doğrusal programlama, kaynakların optimal dağılımını elde etmeye, maliyetleri minimize, karı ise maksimize etmeye yarayan bir tekniktir.

Doğrusal Programlama, optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılan bir yöntemdir. 1947' de, George Dantzig, doğrusal Programlama problemlerinin çözümünde kullanılan etkin bir yol olan Simpleks Algoritma' yı buldu ve bu buluşla birlikte doğrusal Programlama, sıklıkla ve hemen hemen her sektörde kullanılmaya başlandı.

Temel olarak, doğrusal Programlama, kıt kaynakların optimum şekilde dağılımını içeren deterministik bir matematiksel tekniktir.

<u>Doğrusal programlama</u>, iyi tanımlanmış doğrusal eşitliklerin veya eşitsizliklerin kısıtlayıcı koşulları altında doğrusal bir amaç fonksiyonunu en iyi (optimum/ maksimizasyonminimizasyon) kılan değişken değerlerinin belirlenmesinde kullanılan matematiksel programlama tekniğidir.

DP Modelinin Yapısal Unsurları-devam

1.Amaç fonksiyonu

Karar vericinin ulaşmak istediği hedef doğrusal bir denklem ile açıklanır. Amaç fonksiyonu olarak bilinen bu denklem, karar değişkenleri ile karar vericinin amacı arasındaki fonksiyonel ilişkiyi gösterir.

$Z_{enk/enb}=c_1x_1 + c_2x_2 + ...c_nx_n$

$$Z_{enb/enk} = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j$$

2. Kısıtlayıcı fonksiyonlar (kısıtlayıcılar/kısıtlar)

Karar değişkenleri ve karar değişkenleriyle parametrelerin birbirleriyle olan ilişkilerinde sağlanması zorunlu olan ilişkilerin matematiksel olarak açıklanmasıyla elde edilen denklemlere kısıtlayıcı fonksiyonlar denir. Kısıtlayıcıların değerleri kesin olarak önceden belirlenmiş olup sistemin tanımlanmasında kullanılır. Kısıtlayıcı fonksiyonlar sadece kaynakların sınırlarını değil, gereksinim ve yönetim kararlarını ifade etmekte de kullanılır.

$a_{11}x1+a_{12}x_2+..................+a_{1n}x_n \leq=\geq b_1$

$a_{21}x1+a_{22}x_2+..................+a_{2n}x_n \leq=\geq b_2$

… … … … …

$a_{m1}x1+a_{m2}x_2+................+a_{mn}x_n \leq=\geq b_m$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ (\leq;=;\geq) b_i \quad (i = 1, 2, 3, ..., m)$$

3. Negatif olmama koşulları

Karar değişkenlerinin değerleri negatif olmaz.

$x_1, x_2,........x_n \geq 0$ veya kısaca $x_j \geq 0$ $(j=1, 2, 3, \ldots, n)$

DP Modelinin Yapısal Unsurları-devam

4. Karar değişkenleri

Karar vericinin denetimi altında olan niteliklere karar değişkenleri denir. Bunlar modele ilişkin bilinmeyenler olup değerleri modelin çözümünden sonra belirlenir. Bu değişkenler karar vericinin denetimi altında olduklarından bunlara kontrol değişkenleri de denir.

x_j: Belirli bir zaman döneminde j'inci ürünün üretim miktarı veya faaliyet düzeyi.

j=1, 2, 3, …n : Ürün çeşidi, faaliyet sayısı.

5. Parametreler

Alabileceği değerlerde karar vericinin hiçbir etkisi olmayan niteliklere parametre veya kontrol dışı değişkenler denir. Belirli koşullarda belirli değerler alan parametreler problem için veri durumundadır.

C_j: j'inci karar değişkeninin amaç fonksiyonu katsayısı (parametre)-(birim kar, birim fiyat, birim maliyet vs.).

a_{ij}: j'inci üründen bir birim üretmek için i'inci kaynaktan tüketilen kaynak miktarı veya girdi katsayısı

b_i: n sayıdaki ürün için elde bulunan i'inci sınırlı kaynak miktarı.

i= 1, 2, 3, …, m : Üretim bölümlerinin veya üretim kaynaklarının sayısı.

DP Modelinin Genel Görünümü

Amaç Fonksiyon	$Z_{enk/enb}=c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots..c_nx_n$
Kısıtlayıcı fonksiyonlar	$a_{11}x1+a_{12}x_2+\ldots\ldots\ldots+a_{1n}x_n \leq=\geq b_1$
	$a_{21}x1+a_{22}x_2+\ldots\ldots\ldots+a_{2n}x_n \leq=\geq b_2$
	… … … … …
	$a_{m1}x1+a_{m2}x_2+\ldots\ldots\ldots+a_{mn}x_n \leq=\geq b_m$
Negatif Olmama Koşulu	$x_1, x_2, \ldots\ldots x_n \geq 0$

DP Modelinin Matris Gösterimi

Amaç Fonksiyonu

$$Z_{enb\,/\,enk} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & . & . & . & C_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{Cx}$$

K ıısıtlayı ı Fonksiyonl ar

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{bmatrix} (\leq; =; \geq) \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_m \end{bmatrix} = \mathbf{Ax}\ (\leq; =; \geq)\ \mathbf{b}$$

DP'nin Varsayımları

1.Doğrusallık (veya Oransallık) Varsayımı: Modeldeki fonksiyoların hepsi doğrusaldır. Bu varsayım gerçekleşmediği takdirde DOP söz konusudur.

2.Toplanabilirlik Varsayımı

3.Kesinlik Varsayımı:

Bu varsayım, tüm parametrelerin (amaç fonksiyonu katsayısı, sağ el tarafı ve teknolojik katsayı) kesin olarak bilindiğini ve ilgili dönemde değişmeyeceğini öngörür. Eğer bu değerler tam olarak bilinmiyorsa, sonuç güvenilir olmayacaktır. Böyle bir durumda duyarlılık analizine başvurulabilir.

4. Negatif Olmama Varsayımı

Karar değişkenleri negatif değerler alamaz.

5. Bölünebilirlik Varsayımı

Bu varsayım, her karar değişkenlerinin ondalıklı bir sayı alabileceği anlamına gelir. Bu varsayım ortadan kalktığında tamsayılı programlama söz konusu olur.

DP’nin Uygulama Alanları

- Ulaştırma ve dağıtım kanallar
- Beslenme ve karıştırma problemleri
- Üretim planlaması
- Yatırım planlaması
- Görev dağıtımı
- Arazi kullanımı planlaması
- Kuruluş yeri seçimi
- Oyun teorisi
- …

DP Problemlerinin Modelinin Kurulması

DP Problemlerinin modelinin kurulmasında aşağıdaki adımların izlenmesi gerekmektedir.

1. Karar değişkenlerinin tanımlanması ve bunların sembolize edilmesi
2. Amacın belirlenerek amaç fonksiyonun karar değişkenlerinin doğrusal bir fonksiyonu olarak yazılması
3. Tüm kısıtlamaların karar değişkenlerinin doğrusal bir fonksiyonları olarak eşitlik veya eşitsizlik olarak yazılması
4. Negatif olmama koşullarının yazılması.

Örnek DP Modeli-1

- İnci kimya firması X ve Y gibi iki tip kimyasal madde üretmektedir. 1 litre X ürününün maliyeti 160 TL. , 1 litre Y ürününün maliyeti ise 240 TL. dir. Müşteri talebine göre, firma, gelecek hafta için en az 6 litre X ve en az 2 litre Y ürünü üretmelidir. X ve Y kimyasal ürünlerinde kullanılan hammaddelerden birisinin sunumu azdır ve sadece 30 gr. sağlanabilmektedir. X ürününün bir litresinde bu hammaddeden 3 gr. ve Y nin litresinde de 5 gr. gerekli olmaktadır.
- İnci firması, toplam maliyetini minimize etmek için X ve Y ürünlerinden kaçar litre üretmesi gerektiği konusunda çok büyük bir kararsızlık içerisine girmiştir. Bu soruyu yanıtlayacak modeli kurunuz.

Örnek DP Modeli-1-devam

- **Problemde karar değişkenleri,**
- x1 = Üretilecek X ürününün miktarı (litre)
- x2 = Üretilecek Y ürününün miktarı (litre)
- **Minimize edilmek istenen toplam maliyet**
- $160x1 + 240x2$ dir.
- **İstenen gerekli minimum miktar ise**
- $x1 \geq 6$ ve $x2 \geq 2$ dir.
- **Hammadde kısıtlayıcısı ise**
- $3x1 + 5x2 \leq 30$ dur.
- **Böylece minimizasyon modeli şöyle olacaktır:**
- Min $z = 160x1+240x2$
- $x1\geq 6$
- $x2\geq 2$
- $3x1+5x2\leq 30$
- $x1, x2 \geq 0$

Örnek DP Modeli-2

- Mügesüt şirketi kapasite sorunu yüzünden günde 120.000 kg. dan daha çok süt işleyememektedir. Yönetim, yağ veya işlenmiş süt için kullanılan sütün dengelenmesi için peynir fabrikasında en az 10.000 kg. lık günlük süt kullanmak istemektedir. Bir kg. sütün yağ üretimi için kullanıldığında, kara katkısı, 4 TL., şişe sütü olarak kullanıldığında katkısı 8 TL. ve peynir üretimi için kullanıldığında ise katkısı 6 TL. dir.
- Yağ bölümü günde 60.000 kg., süt şişeleme donanımı günde 40.000 kg., peynir donanımı ise günde 30.000 kg. süt işleyebilir.
- Şirket karını maksimize etmek istediğine göre problemi doğrusal programlama modeli olarak ifade ediniz.

Örnek DP Modeli-2-devam

- **Çözüm:**
- **Karar Değişkenleri**
- x1 = Yağ yapımında kullanılan süt miktarı (kg)
- x2 = Şişelemede kullanılan süt miktarı (kg)
- x3 = Peynir yapımında kullanılan süt miktarı (kg)
- **İşletmenin karını maksimize edecek amaç fonksiyonu;**
- Maksimum $z = 4x1 + 8x2 + 6x3$
- **Kısıtlar ise;**
- $x3 \geq 10.000$
- $x1 \leq 60.000$
- $x2 \leq 40.000$
- $x3 \leq 30.000$
- $x1 + x2 + x3 \leq 120.000$
- **Negatif Olmama koşulu;**
- $x1, x2, x3 \geq 0$

Ulaştırma Problemi Örnek DP Modeli-3

- Üç ayrı fabrikada beyaz eşya üreten bir işletme satışlarını değişik bölgelerdeki üç depo aracılığıyla yapmaktadır. İşletme yönetiminin temel sorunu beyaz eşyanın fabrikalardan satış depolarına ulaştırılmasında karşılaştığı yüksek ulaştırma giderleridir. Fabrikalardan depolara birim ulaştırma maliyetleri aşağıda verilmiştir.

Fabrika	Depo		
	A	B	C
1	30	25	15
2	16	45	29
3	25	10	16

- Üretim miktarları sırasıyla 150, 200 ve 400 adettir. Depoların aylık istemleri A için 220, B için 150, C için 380 adettir. Depoların gereksinimini tam olarak sağlamak isteyen işletme, tüm üretimini toplam ulaştırma maliyetini en küçük yapacak şekilde dağıtmak istemektedir. Problemin doğrusal programlama modelini kurunuz.

Örnek DP Modeli-3-devam

İlk olarak karar değişkenlerini, i'inci fabrikadan j'inci depoya taşınan beyaz eşya miktarı (adet olarak) olmak üzere xij (i = 1, 2, 3; j = A, B, C) şeklinde tanımlayalım. Buna göre, karar değişkenleri aşağıdaki gibi olur.

x_{1A} = 1 nolu fabrikadan A deposuna gönderilen beyaz eşya sayısı

x_{1B} = 1 nolu fabrikadan B deposuna gönderilen beyaz eşya sayısı

....

x_{3C} = 3 nolu fabrikadan C deposuna gönderilen beyaz eşya sayısı

İşletmenin amacı aylık taşıma maliyetleri toplamını en küçükleyen değişken değerlerini belirlemek olduğuna göre, amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır.

$$Z_{enk} = 30x_{1A} + 25x_{1B} + 15x_{1C} + 16x_{2A} + 45x_{2B} + 29x_{2C} + 25x_{3A} + 10x_{3B} + 16x_{3C}$$

Problemin kısıtlayıcıları, fabrikaların üretim miktarları ile depoların gereksinim miktarlarıdır.

Herhangi bir fabrikadan üretiminden fazla taşıma yapılamayacağından ve üretimin tamamı dağıtılmak istendiğinden,

$$x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} = 150$$
$$x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} = 200$$
$$x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} = 400$$

olur.

Örnek DP Modeli-3-devam

- Bunlar üretim miktarı ile ilgili kısıtlayıcı fonksiyonlardır.
- Depoların beyaz eşya gereksiniminin eksiksiz karşılanması koşulu aşağıdaki eşitlikler sistemiyle açıklanabilir.

$x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} = 220$

$x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} = 150$

$x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} = 380$

- Negatif taşıma olamayacağına göre,
- $x_{i,j} \geq 0 \qquad (i = 1, 2, 3; \;\; j = A, B, C)$

negatif olmama koşulunun yazılmasıyla model kurulmuş olur.

Beslenme Problemi Örnek DP Modeli 4

Bir çiftçi çiftliğindeki tavukların günlük karbonhidrat, protein ve vitamin gereksinimini en küçük maliyetle karşılamak amacıyla en uygun besin maddelerini ve bunların miktarlarını belirlemek istemektedir. Alternatif besin maddelerinin birim maliyetleri, içerdikleri karbonhidrat, protein ve vitamin miktarları ile bunlara olan günlük gereksinim aşağıdaki tabloda özetlenmiştir.

Bu verilere göre, tavukların günlük besin gereksinimini tam olarak karşılayan en küçük maliyetli besin karışımının belirlenmesinde kullanılacak doğrusal programlama modelini kurunuz.

Besin Elemanı	Besin Türü (kg)			En Az Günlük Gereksinim
	Suni Yem	Buğday	Arpa	
Karbonhidrat (gr)	9	2	4	20
Protein (gr)	3	8	6	18
Vitamin (mgr)	1	2	6	15
Birim Fiyat (TL)	7	6	5	-

Örnek DP Modeli 4-devam

Karışım suni yem, buğday ve arpadan oluştuğundan, karar değişkenleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

x_1: Suni yem tüketim miktarı (kg/gün)

x_2: Buğday tüketim miktarı (kg/gün)

x_3: Arpa tüketim miktarı (kg/gün)

Toplam maliyet tüketilen her bir besin türünün birim maliyeti ile o besinden tüketilen miktarın çarpımlarının toplamına eşittir. Buna göre toplam maliyet,

$Z = 7x_1 + 6x_2 + 5x_3$

biçiminde yazılır.

Amaç bu toplamı en küçüklemek olduğundan, amaç fonksiyonu amaca uygun olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$Zenk = 7x_1 + 6x_2 + 5x_3$

Problemin kısıtlayıcı fonksiyonları günlük besin elemanlarına aittir. Kısıtlayıcı koşulların ise sırasıyla karbonhidrat, protein ve vitamin gereksinimlerinin göz önünde bulundurulmasıyla aşağıdaki gibi yazılacakları açıktır.

$9x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 20$ (Karbonhidrat kısıtı)

$3x_1 + 8x_2 + 6x_3 \geq 18$ (Protein kısıtı)

$1x_1 + 2x_2 + 6x_3 \geq 15$ (Vitamin kısıtı)

$\geq$ işareti alınması gereken besin elemanlarının belirtilen miktarların altına düşmeyeceğini, fakat bu miktarlardan fazla olabileceğini belitmektedir.

Negatif tüketim olamayacağından,

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$

yazılmasıyla modelleme işlemi tamamlanmış olur.

Üretim Planlaması Örnek DP Modeli 5

- Bereket AŞ düşük ve yüksek fosfatlı olmak üzere iki çeşit gübre üretmektedir. Gübreler üç farklı hammaddenin (A, B, C) karışımından oluşmaktadır. 1 ton yüksek fosfatlı gübre üretiminde 2 ton A, 1'er ton B ve C; 1 ton düşük fosfatlı gübre üretiminde ise A ve B'den 1'er ton kullanılmaktadır. İşletmenin aylık hammadde kapasitesi 150 ton A, 120 ton B, 50 ton C'dir. Düşük fosfatlı gübre isteminin en çok 20 ton/ay olduğu bilinmektedir. Yüksek fosfatlı gübrenin satış fiyatı 150 TL/ton, düşük fosfatlı gübrenin satış fiyatı ise 100 TL/ton dur. İşletme, toplam satış gelirini en büyüklemek için her ay her bir üründen kaç birim üretmelidir? Problemi doğrusal programlama olarak modelleyiniz.

Örnek DP Modeli 5-devam

Düşük ve yüksek fosfatlı gübre miktarlarının belirlenmesi gerekmektedir. Dolayısıyla, model değişkenleri aşağıdaki gibi tanımlanmalıdır.

x_1: Yüksek fosfatlı gübre üretim miktarı (ton/ay)

x_2: Düşük fosfatlı gübre üretim miktarı (ton/ay)

Amaç toplam aylık satış gelirini en büyüklemek olduğuna göre, amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi olur.

$Zenb = 150x_1 + 100x_2$

Problemin kısıtlayıcı elemanları her iki gübre için gerekli ve sınırlı olan hammadde miktarları ile düşük fosfatlı gübreye olan istem miktarıdır. Buna göre, kısıtlayıcı fonksiyonlar aşağıdaki gibi olur.

$2x_1 + 1x_2 \leq 150$ (A hammaddesi kısıtı)

$1x_1 + 1x_2 \leq 120$ (B hammaddesi kısıtı)

$1x_1 + 0x_2 \leq 50$ (C hammaddesi kısıtı)

$1x_1 \leq 20$ (Düşük fosfatlı gübre istem miktarı kısıtı)

Son olarak, üretim miktarı negatif olamayacağından, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ yazılmasıyla model tamamlanmış olur.

Örnek DP Modeli 6

- Biri alüminyum diğeri ahşap çerçeveli olmak üzere iki tip pencere üretimi planlanmaktadır. Üretim atölyelerinin günlük çalışma kapasiteleri ve her üründen bir adet üretmek için gerekli zaman (saat olarak) aşağıdaki gibidir. Ahşap çerçeveli pencerenin kâra katkısı 300 TL, alüminyum çerçevelininki ise 500 TL'dir. İşletme, günlük karını en büyüklemek için her üründen kaç birim üreteceğini belirlemek istediğine göre, problemi doğrusal programlama modeli olarak formüle ediniz.

Atölye	Pencere		Çalışma Kapasitesi (gün/saat)
	Alüminyum	Ahşap	
Alüminyum	1	0	4
Ahşap	0	2	12
Cam Üretim	3	2	18
Birim Kâr (TL)	300	500	-

Örnek DP Modeli 6-devam

Problemin karar değişkenleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

x_1: Ahşap çerçeveli pencere üretim miktarı (adet/gün)
x_2: Alüminyum çerçeveli pencere üretim miktarı (adet/gün)

Amaç, günlük toplam kârı en büyükleyecek x_1, x_2 değerlerini belirlemek olduğuna göre, amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır.

$Z_{enb} = 300x_1 + 500x_2$

İşletmenin her iki ürünün üretimi için gerekli ve sınırlı olan kaynakları atölyelerinin günlük çalışma kapasiteleridir.

Buna göre kısıtlayıcı fonksiyonlar aşağıdaki gibi olur.

$x_1 + 0x_2 \leq 4$ (Alüminyum kaplama atölyesi çalışma zamanı kısıtı)
$0x_1 + 2x_2 \leq 12$ (Ahşap kaplama atölyesi çalışma zamanı kısıtı)
$3x_1 + 2x_2 \leq 18$ (Cam üretme atölyesi çalışma zamanı kısıtı)

Negatif üretim olamayacağına göre, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ yazılmasıyla model tamamlanır.

Örnek DP Model 7

- Hazır gıda AŞ kg'ı 0.85 TL'den 120000 kg domates alarak domates suyu ve domates salçası üretmektedir. Konserve edilen ürünler 12 kutuluk koliler halinde paketlenmektedir. Bir kutu domates suyu için 0.75 kg, 1 kutu salça için 1 kg domates kullanılmaktadır. Şirketin pazar payı 2500 koli domates suyu, 7500 koli domates salçası olarak belirlenmiştir. Bir koli domates suyunun satış fiyatı 36 TL, bir koli salçanın satış fiyatı 18 TL dir. Toplam satış gelirinin en büyük olmasını isteyen işletmenin üretim planını belirleyiniz.

Örnek DP Model 7-devam

Üretim domates suyu ve salçadan oluştuğundan, modelin değişkenleri şöyle tanımlanır.

x_1: Domates suyu kolisi miktarı (adet)
x_2: Domates salçası kolisi miktarı (adet)

Toplam satış gelirinin en büyük olması amaçlandığından, amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi olur.

$Z_{enb} = 36x_1 + 18x_2$

Üretimin planlanmasında, satın alınan domates miktarı ile ürünlerin pazar payları göz önünde bulundurulması gerektiğinden, kısıtlayıcı fonksiyonlar şöyle olur.

$9x_1 + 12x_2 \leq 120000$ (Domates miktarı kısıtı)
$x_1 \leq 2500$ (Domates suyu pazar payı kısıtı)
$x_2 \leq 7500$ (Salça pazar payı kısıtı)
$x_1, x_2 \geq 0$ (Negatif olmama koşulu)

Yatırım Planlaması Örnek DP Modeli 8

Cihan Bey 60 milyon TL tutarındaki emekli ikramiyesi ile yıllık gelirini en büyük yapacak yatırımlara girmeyi planlamaktadır. Cihan Bey için uygun yatırım seçenekleri ile bu yatırımların yıllık getiri oranları aşağıda verilmiştir. Cihan Bey'in amacı, yıllık getirisi en büyük olan yatırım planını belirlemektir. Cihan Bey karşılaşa-bileceği risklere karşın aşağıdaki prensip kararlarını almıştır.

a. Banka mevduatı, devlet tahvili ile altına yatırımların toplamına eşit olmalıdır.

b. Altına yatırım, nakit olarak saklanan paranın %30'undan fazla olmamalıdır.

c. Hisse senedi yatırımı 15 milyon TL'yi geçmemelidir.

d. Devlet tahvili yatırımı en fazla 10 milyon TL olmalıdır.

Yatırım Seçeneği (Milyon TL)	Getiri Oranı (%)
Banka Mevduatı	52
Hisse Senedi	40
Devlet Tahvili	32
Altın	16
Nakit	-5

Örnek DP Modeli 8-devam

Modelin değişkenleri j yatırım seçeneğine ayrılan para miktarı (milyon TL) olarak aşağıdaki gibi tanımlanır.

x_1: Banka mevduatı yatırım miktarı
x_2: Hisse senedi yatırım miktarı
x_3: Devlet tahvili yatırım miktarı
x_4: Altına yatırım miktarı
x_5: Nakit olarak ayrılan para miktarı

Cihan Bey'in amacı yıllık getirisini en büyük yapacak yatırım miktarlarını belirlemek olduğuna göre, problemin amaç fonksiyonu şöyle olacaktır.

$Z_{enb} = 0.52x_1 + 0.40x_2 + 0.32x_3 + 0.16x_4 - 0.05x_5$

Karar değişkenlerinin değerleri milyon TL olarak ifade edildiğinden, amaç fonksiyonunun değeri de milyon TL olacaktır.

Modelin kısıtlayıcı fonksiyonları, Cihan Bey'in prensip kararları doğrultusunda, aşağıdaki gibi belirlenecektir.

a. Banka mevduatı (x_1), devlet tahvili (x_3) ile altına (x_4) yatırımların toplamına eşit olmalıdır. Buna göre,

$x_1 = x_3 + x_4$

yazılabilir. Doğrusal programlamadaki kısıtlayıcı fonksiyonların sağ taraflarında bir sabit olması gerektiği bilinmektedir. Bu koşulu sağlamak için, eşitliğin sağ tarafı sol taraftan çıkartılır. Bu yolla söz konusu kısıt doğru formda aşağıdaki gibi olur.

$x_1 - (x_3 + x_4) = 0$ veya $x_1 - x_3 - x_4 = 0$

b. Nakit olarak ayrılan paranın x_5 olduğu düşünülürse, altına yapılan yatırıma ilişkin kısıtlayıcı aşağıdaki gibi formüllenir.

$x_4 \leq 0.30x_5$ veya $x_4 - 0.30x_5 \leq 0$

c. $x_2 \leq 15$ (Hisse senedi yatırımı)

d. $x_3 \leq 10$ (Devlet tahvili yatırımı)

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 60$ (Paranın tamamının değerlendirilmesi kısıtı)

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$ yazılmasıyla model kurulmuş olur.

Ödev

Gülüm AŞ kuru ciltlerin bakımı için KUR, yağlı ciltlerin bakımı için YAĞ ve normal ciltlerin bakımı için NOR marka krem üretmeyi planlamaktadır. Ürünlerin satışa hazır duruma gelmesi için dört ayrı işlem biriminde işlem görmesi gerekmektedir. İşletmenin işlem birimlerinin haftalık çalışma kapasiteleri (saat/hafta olarak) ve her ürünün 10 adetinin gerektirdiği işlem süreleri aşağıdaki gibidir.

Krem	İşlem Birimi			
	I	II	III	IV
KUR	3	2	1	-
YAĞ	4	2	3	1
NOR	6	8	1	3
Kapasite	80	40	25	35

İşletmenin elinde üç ürünün her birinden 300'er şişe üretecek hammaddesi bulunmasına karşın elindeki şişe adeti toplamı 850'dir. Diğer taraftan, yapılan pazar araştırmaları KUR marka kremin haftalık üretim miktarının en fazla 250 şişe, NOR marka kremin ise en az 250 şişe olması gerektiğini ortaya çıkarmıştır. KUR marka kremin şişesinden 75 TL, YAĞ marka kremin şişesinden 90 TL, NOR marka kremin şişesinden 60 TL kâr elde edilmektedir. İşletmenin kârını en büyükleyecek üretim planının belirlenmesinde kullanılacak doğrusal programlama modelini kurunuz.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

DOĞRUSAL PROGRAMLAMA
GRAFİK ÇÖZÜM YÖNTEMİ

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

Temel Kavramlar

- ***Çözüm***: Bir doğrusal programlama probleminin kısıtlayıcı fonksiyonlarının hepsini birden sağlayan karar değişkenlerinin (x_1, x_2, ..., x_n) oluşturduğu kümeye *çözüm* denir.
- ***Uygun çözüm***: Negatif olmama koşulunu sağlayan çözüme *uygun çözüm* denir.
- ***En iyi çözüm***: Amaç fonksiyonuna en iyi değeri (en küçük veya en büyük) sağlayan uygun çözüme *en iyi çözüm* denir.

Grafik Çözüm Yönteminin Aşamaları

- Bir doğrusal programlama probleminin grafik çözümünde aşağıdaki adımlar izlenir:

1. Değişkenlerin koordinat sisteminin yatay ve dikey eksenlerine yerleştirilmesi,
2. Kısıtlayıcı fonksiyonların grafiğinin çizilmesi,
3. Uygun çözüm bölgesinin belirlenmesi,
4. En iyi çözümün araştırılması.

Örnek 1

Amaç fonksiyonu:

$Z_{enb} = 6x_1 + 8x_2$

Kısıtlayıcı fonksiyonları:

$$
\begin{array}{llr}
7x_1 + 3x_2 \leq 21 & & (1) \\
6x_1 + 7x_2 \leq 42 & & (2) \\
x_1 \qquad\quad \leq 3 & & (3) \\
\qquad\quad x_2 \leq 4 & & (4)
\end{array}
$$

Negatif olmama koşulu:

$x_1, x_2 \geq 0$

olarak verilen doğrusal programlama problemininin en iyi çözümünü grafik çözüm yöntemiyle bulunz.

Örnek 1-devam

x_1 değişkenini yatay, x_2 değişkenini dikey eksen üzerinde gösterelim. Negatif olmama ($x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$) koşulundan dolayı uygun çözümler x_1x_2 düzleminin birinci bölgesinde bulunacaktır. Kısıtlayıcı fonksiyonların oluşturduğu sınır, bu bölgeyi ($x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$) iki kısma ayırır. Bölgelerden biri negatitif olmama koşulu dahil tüm kısıtlayıcıları sağlarken, diğeri yalnızca negatif olmama koşulunu sağlayan noktalardan oluşur.

Çözüm bölgesini belirlemek için kısıtlayıcı fonksiyonları sırasıyla ele alalım ve kendilerine karşılık gelen doğruların x ve y eksenlerini kestikleri noktaların koordinatlarını belirleyelim.

Koordinat belirleme ilgili tüm işlemler aşağıda verilmiştir.

(1) $7x_1 + 3x_2 = 21$ eşitliğinde,

$x_1 = 0$ için $x_2 = 7$, $x_2 = 0$ için $x_1 = 3$

olur.

(2) $6x_1 + 7x_2 = 42$ eşitliğinde,

$x_1 = 0$ için $x_2 = 6$, $x_2 = 0$ için $x_1 = 8$

olur.

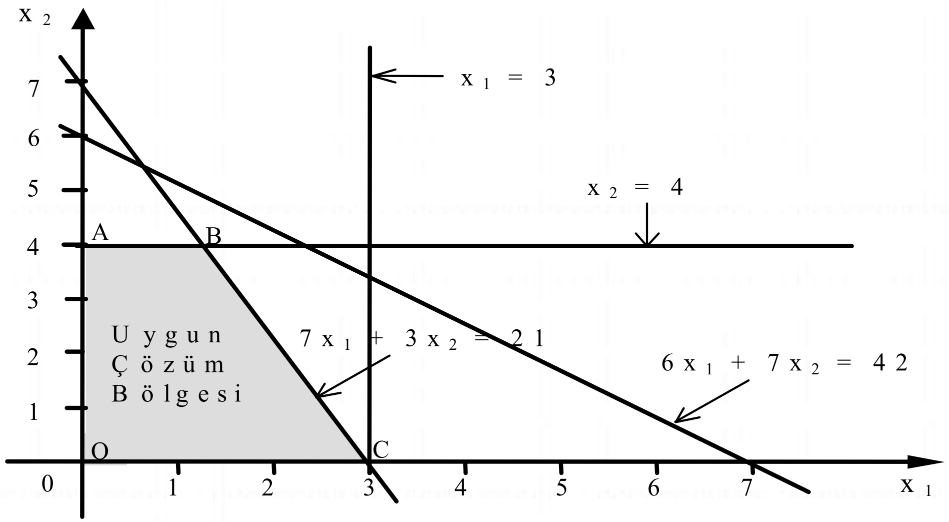
(3) $x_1 = 3$ eşitliği, yatay ekseni (3, 0) noktasında kesen ve dikey eksene paralel olan bir doğru tanımlar.

(4) $x_2 = 4$ eşitliği, dikey ekseni (0, 4) noktasında kesen ve yatay eksene paralel doğru denklemidir.

Örnek 1-devam

Bu belirlemelerden sonra kısıtlayıcı fonksiyonlarla ilgili doğruları çizebiliriz.

Sayıları dört olan kısıtlayıcı fonksiyonların her biri için bir doğru çizilmesi ve eşitsizliklerin yönlerinin dikkate alınmasıyla uygun çözüm bölgesi Şekil 3.5'deki taralı alan olarak belirir.



Şekil 3.5
Örnek 3.5'in Gösterimi

Şekil 3.5'deki taralı alanın içindeki (koyu renk çizilmiş sınırları dahil) tüm noktalar kısıtlayıcıları aynı anda sağladığından, OABC dörtgeni uygun çözüm bölgesidir. Bu alan içindeki sınırsız sayıdaki noktaların her biri uygun çözüm olarak nitelendirilir.

Şekilden görüldüğü gibi $6x_1 + 7x_2 \leq 42$ kısıtı olsa da olmasa da uygun çözüm bölgesi OABC alanı olacaktır. Çözüm bölgesini etkilemeksizin modelden çıkartılabilen bu tür kısıtlayıcılara *gereksiz (fazlalık) kısıtlayıcılar* denir. $x_1 \leq 3$ kısıtının da gereksiz olduğu görülebilir.

Taralı alanın içinde ve sınırları üzerindeki tüm noktalar bütün kısıtlayıcı fonksiyonları (negatif olmama koşulu dahil) sağladığından uygun çözüm bölgesi bir konveks (dış bükey) alan olarak ortaya çıkar. Geometrik olarak *konveks alan* kenarlarında çukurlaşmalar olmayan ve içinde delikler bulunmayan bir alandır. Bu alanın A, B gibi herhangi iki noktası göz önüne alındığında AB doğru parçasının tamamı alan içinde kalır.

Örnek 3

Aşağıdaki doğrusal programlama problemini grafik yöntemiyle çözünüz.

$Z_{enb} = x_1 + 3x_2$

$$x_1 + x_2 \leq 8$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 8$$
$$x_2 \geq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Örnek 3-devam

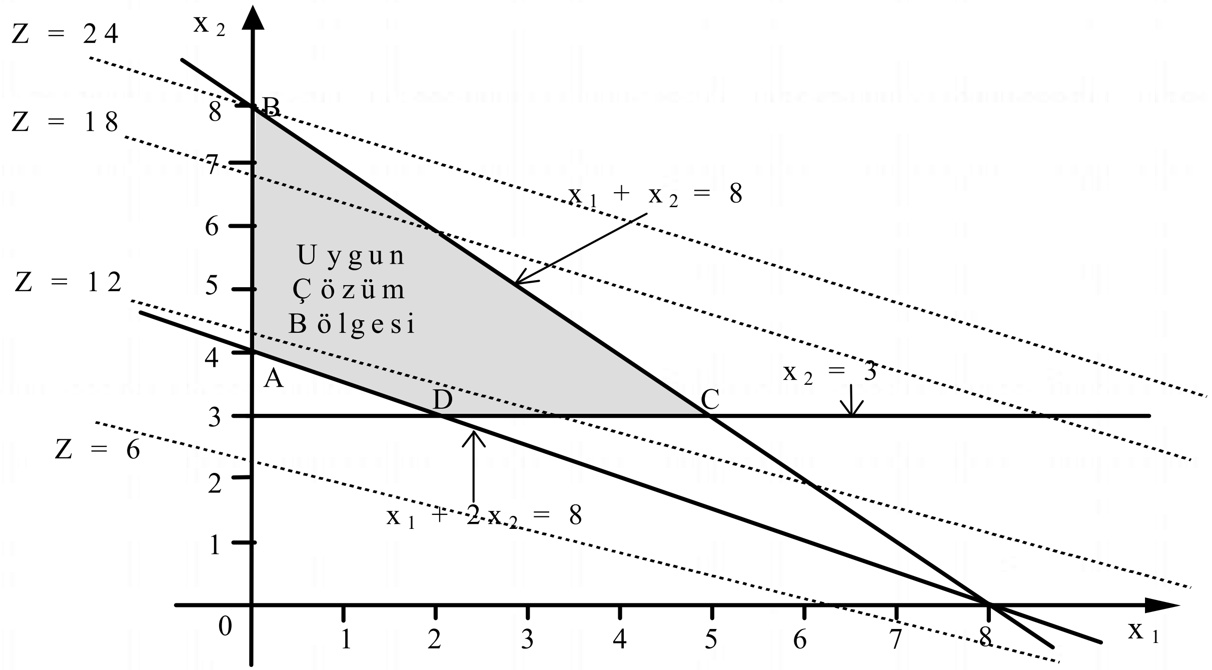
Doğruların çizilmesiyle ilgili aritmetik işlemler aşağıda topluca gösterilmiştir.

$x_1 + x_2 = 8$ eşitliğinde $x_1 = 0$ için $x_2 = 8$, $x_2 = 0$ için $x_1 = 8$ bulunur.
$x_1 + 2x_2 = 8$ eşitliğinde $x_1 = 0$ için $x_2 = 4$, $x_2 = 0$ için $x_1 = 8$ bulunur.

Şekilden görüldüğü gibi, uygun çözüm bölgesi ABCD konveks kümesidir.

Bu bölgenin uç noktalarından en az bir tanesi amaç fonksiyonu değerini en büyükleyecektir.

$Z = 6$, $Z = 12$ ve $Z = 18$ eş kâr doğruları Şekil 3.9'da kesikli çizgi ile gösterilmişlerdir. $Z = 18$ için çizilen eş kâr doğrusu incelendiğinde, bu doğrunun yukarısında tek bir uç noktanın (B) bulunduğu görülebilir. Bu durumda problemin en iyi çözümünün bu noktada ortaya çıkacağını söylemek kehanet olmaz.



Şekil 3.9

Örnek 3.8'in Uygun Çözüm Bölgesi ve Eş Kâr Doğruları

Örnek 3-devam

Görüldüğü gibi, B amaç fonksiyonuna en büyük değeri sağlamaktadır. B'nin koordinatlarının $x_1 = 0$, $x_2 = 8$ olduğu göz önünde bulundurulduğunda $Z_B(Z_{enb})$ aşağıdaki gibi hesaplanır.

$Z_B = Z_{enb} = 0 + 3(8) = 24$

Özetle, karar değişkenlerinin en iyi değerleri $x_1 = 0$, $x_2 = 8$ ve amaç fonksiyonunun en büyük değeri 24 olarak belirlenmiştir.

Uç noktaların koordinatlarının ayrı ayrı hesaplanıp amaç fonksiyonuna yerleştirilmesiyle hesaplanan Z değerleri aşağıda verilmiştir.

Bu hesaplamalar da amaç fonksiyonunun en büyük değerine B(0, 8) noktasında ulaştığını göstermektedir.

$Z_A = Z_{(0,\,4)} = 1(0) + 3(4) = 12$

$Z_B = Z_{(0,\,8)} = 1(0) + 3(8) = 24$

$Z_C = Z_{(5,\,3)} = 1(5) + 3(3) = 14$

$Z_D = Z_{(2,\,3)} = 1(2) + 3(3) = 11$

Örnek 4

Aşağıdaki doğrusal programlama problemini grafik yöntemiyle çözünüz

$$Z_{enk} = 3x_1 + 5x_2$$

$$3x_1 + x_2 \geq 9$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 8$$

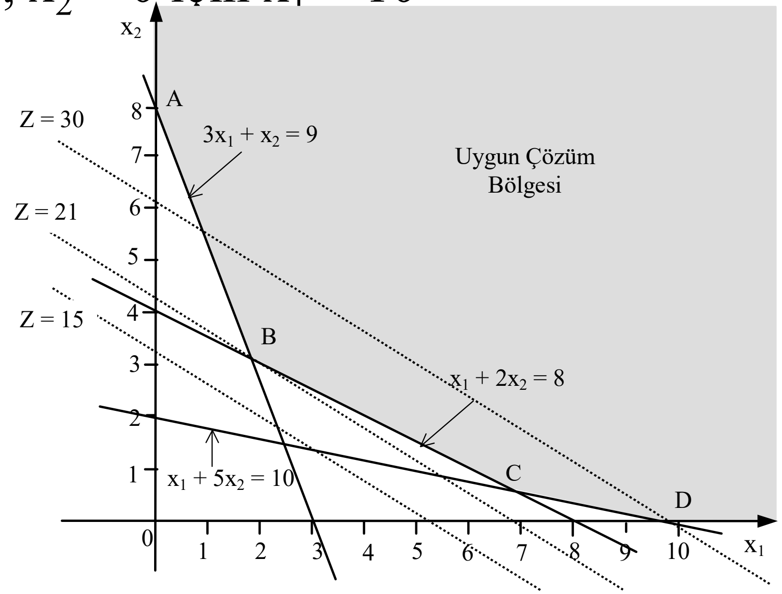
$$x_1 + 5x_2 \geq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Örnek 4-devam

Doğruların çizilmesiyle ilgili aritmetik işlemler aşağıda topluca gösterilmiştir.

- $3x_1 + x_2 = 9$ eşitliğinde $x_1 = 0$ için $x_2 = 9$, $x_2 = 0$ için $x_1 = 3$,
- $x_1 + 2x_2 = 8$ eşitliğinde $x_1 = 0$ için $x_2 = 4$, $x_2 = 0$ için $x_1 = 8$,
- $x_1 + 5x_2 = 10$ eşitliğinde $x_1 = 0$ için $x_2 = 2$, $x_2 = 0$ için $x_1 = 10$



- $Z_A = Z_{(0,\ 9)} = 3(0) + 5(9) = 45$
- $Z_{enk} = Z_B = Z_{(2,\ 3)} = 3(2) + 5(3) = 21^*$
- $Z_C = Z_{(20/3,\ 2/3)} = 3(20/3) + 5(2/3) = 23.3$
- $Z_D = Z_{(10,\ 0)} = 3(10) + 5(0) = 30$

Örnek 5

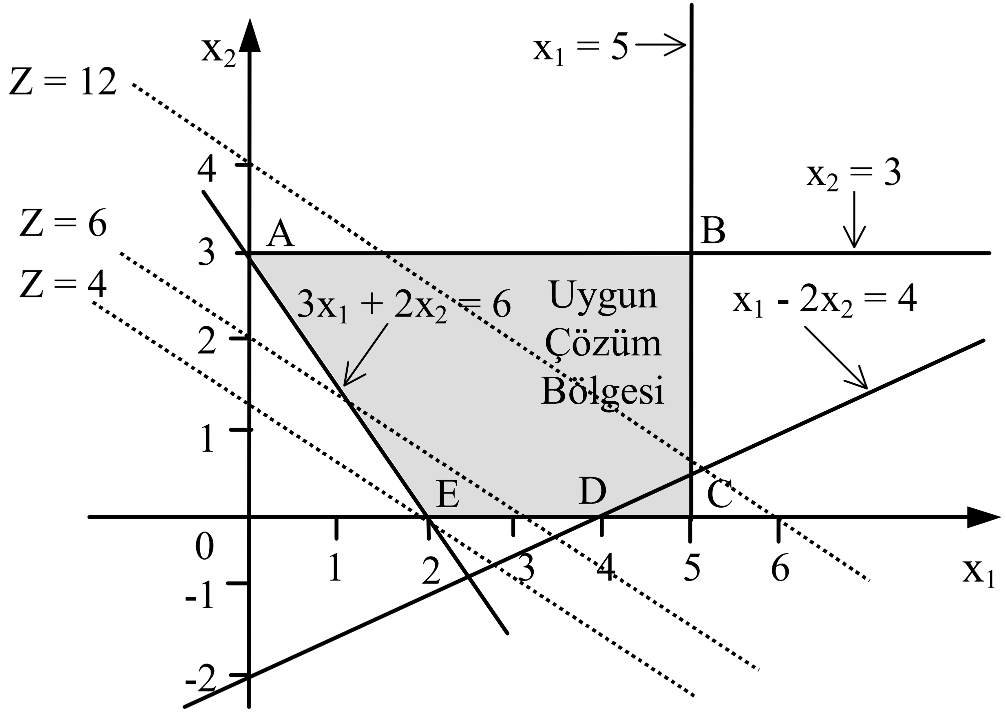
- Aşağıdaki doğrusal programlama problemini grafik yöntemiyle çözünüz.

$$Z_{enk} = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\geq 6 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 4 \\ x_1 &\leq 5 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Örnek 5-devam

- Uç noktaların koordinatlarının ayrı ayrı hesaplanıp amaç fonksiyonunda yerine konulmasıyla ulaşılan değerler de (aşağıda topluca verilmiştir) E noktasının en iyi çözümü sağlayan nokta olduğunu göstermektedir.
- $Z_A = Z_{(0,\,3)} = 2(0) + 3(3) = 9$
- $Z_B = Z_{(5,\,3)} = 2(5) + 3(3) = 19$
- $Z_C = Z_{(5,\,0{,}5)} = 2(5) + 3(0.5) = 11.5$
- $Z_D = Z_{(4,\,0)} = 2(4) + 3(0) = 8$
- $Z_E = Z_{(2,\,0)} = 2(2) + 3(0) = 4$



Grafik Çözümde Karşılaşılan Özel Durumlar

1. Eşitsizliklerin Tutarsız Olması
2. Sınırsız Çözüm
3. Uygun Çözüm Bölgesinin Bir nokta Olması
4. Alternatif Eniyi Çözümün Bulunması

1. Eşitsizliklerin Tutarsız Olması

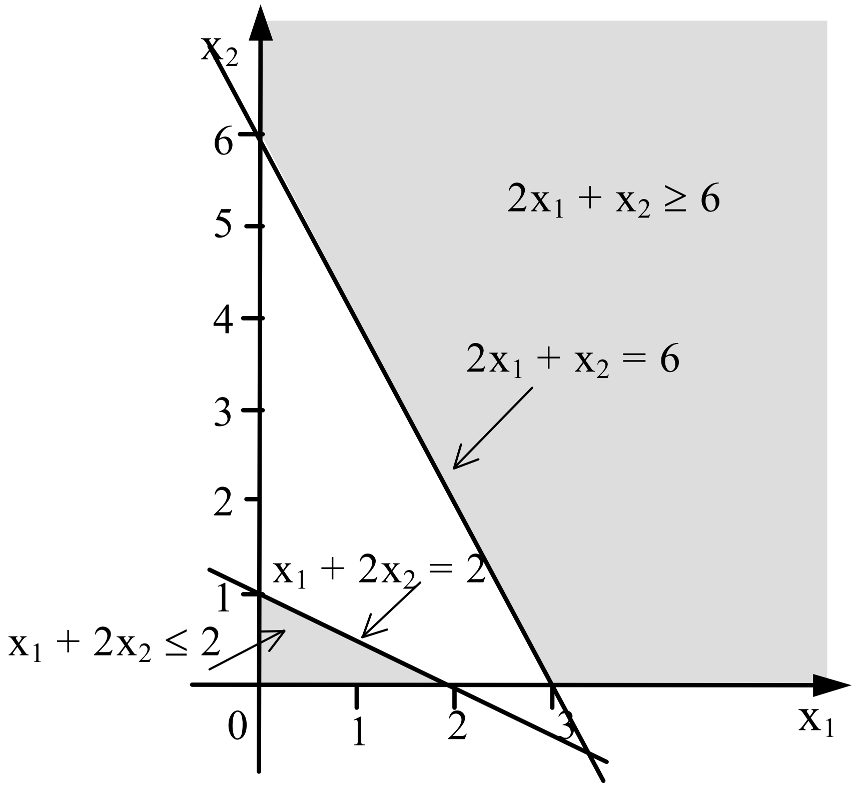
- Aşağıdaki doğrusal programlama problemini grafik yöntemiyle çözünüz.

$$Z_{enb} = 6x_1 + 3x_2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$2x_1 + x_2 \geq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



1. Eşitsizliklerin Tutarsız Olması-devam

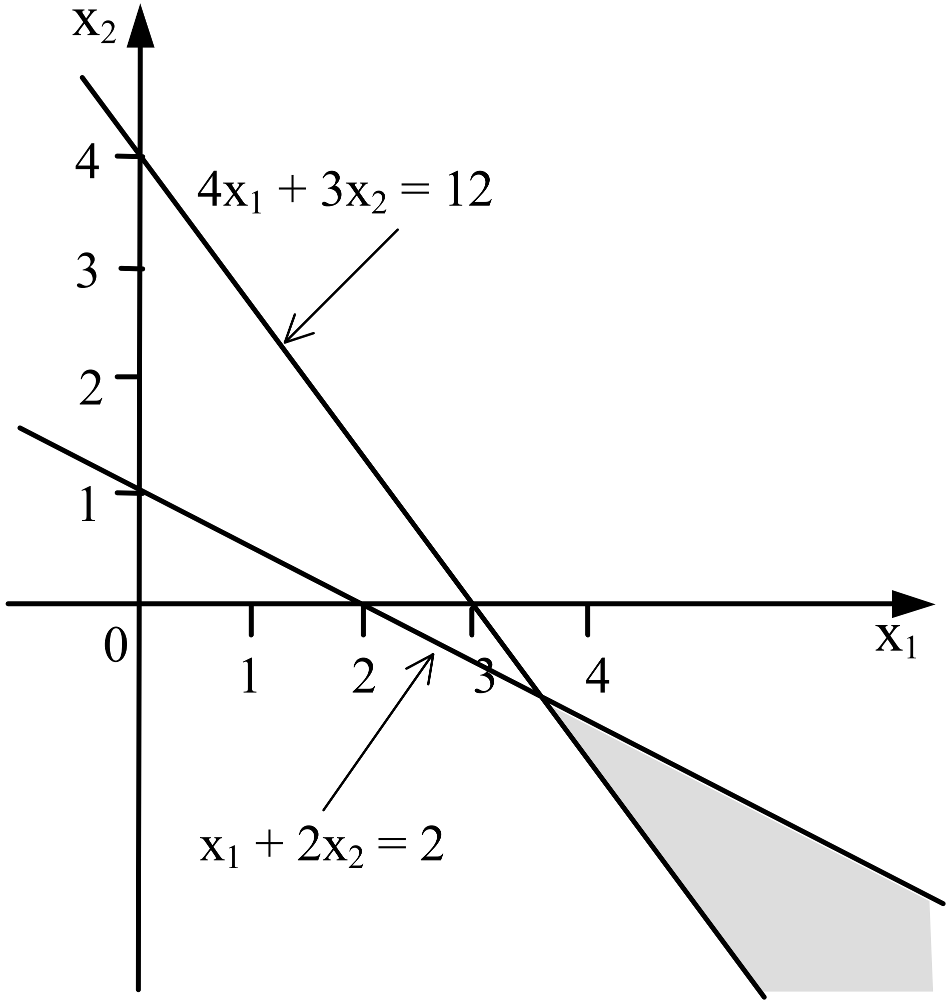
- Aşağıdaki doğrusal programlama problemini grafik yöntemiyle çözünüz.

$$Z_{enb} = 6x_1 + 3x_2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 12$$

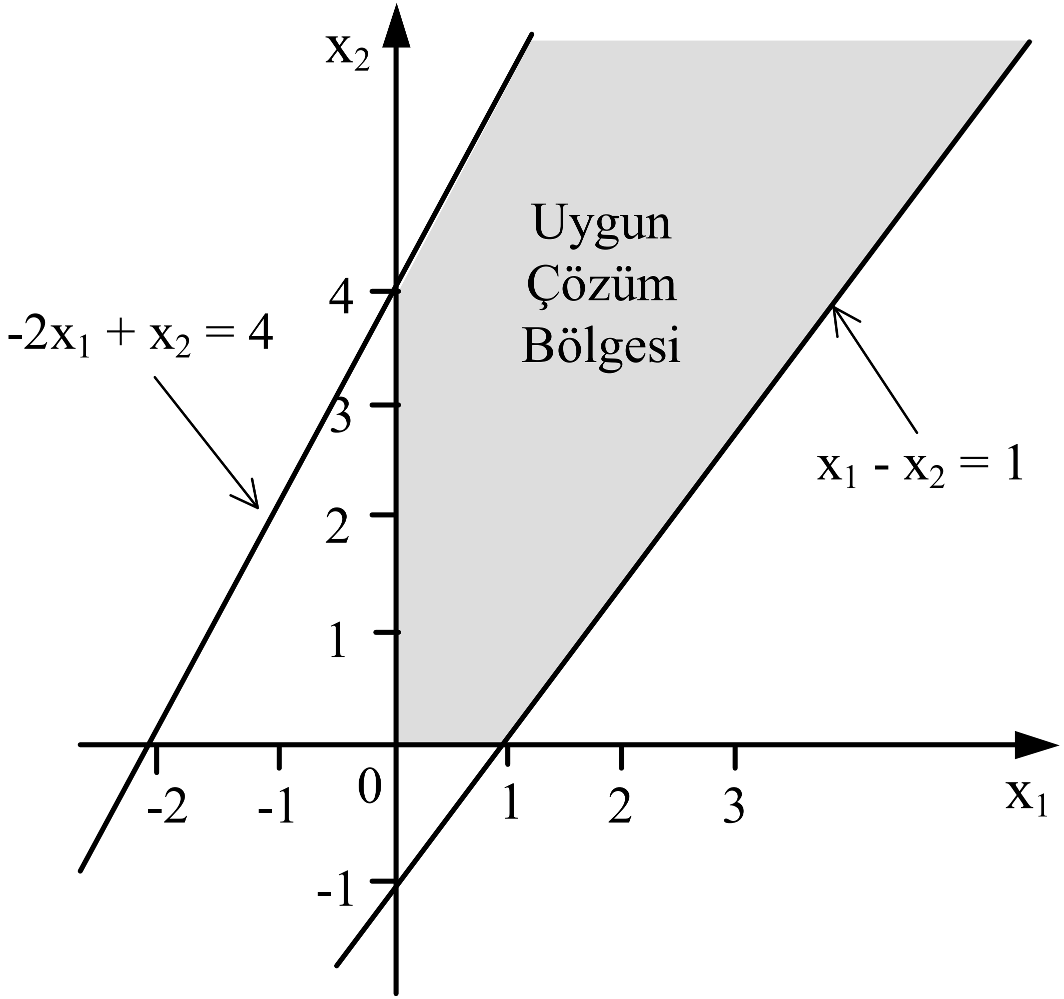
$$x_1, x_2 \geq 0$$



2. Sınırsız Çözüm

- Aşağıdaki doğrusal programlama problemini grafik yöntemiyle çözünüz.

$$Z_{enb} = 2x_1 + x_2$$
$$-2x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1 - x_2 \leq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

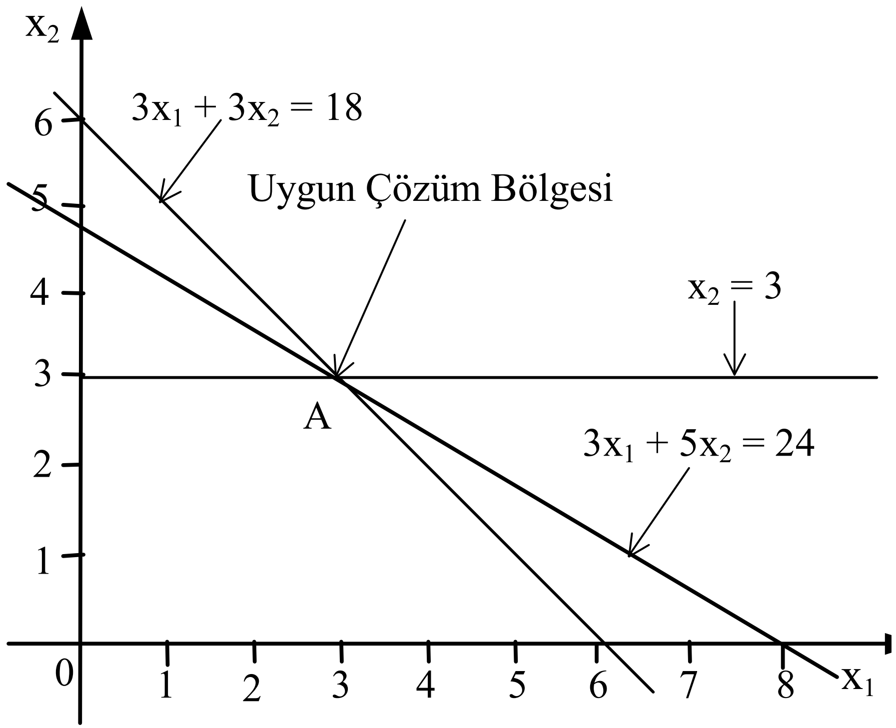


3. Uygun Çözüm Bölgesinin Bir Nokta Olması

Aşağıdaki doğrusal programlama problemini grafik yöntemiyle çözünüz.

$Z_{enb} = 6x_1 + 3x_2$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$
$$3x_1 + 5x_2 \geq 24$$
$$x_2 = 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



Üç doğrunun kesiştiği noktanın koordinatlarının belirlenmesi amacıyla bunlardan rasgele seçilen ikisi, $3x_1 + 5x_2 = 24$ ve $x_2 = 3$ olsun.

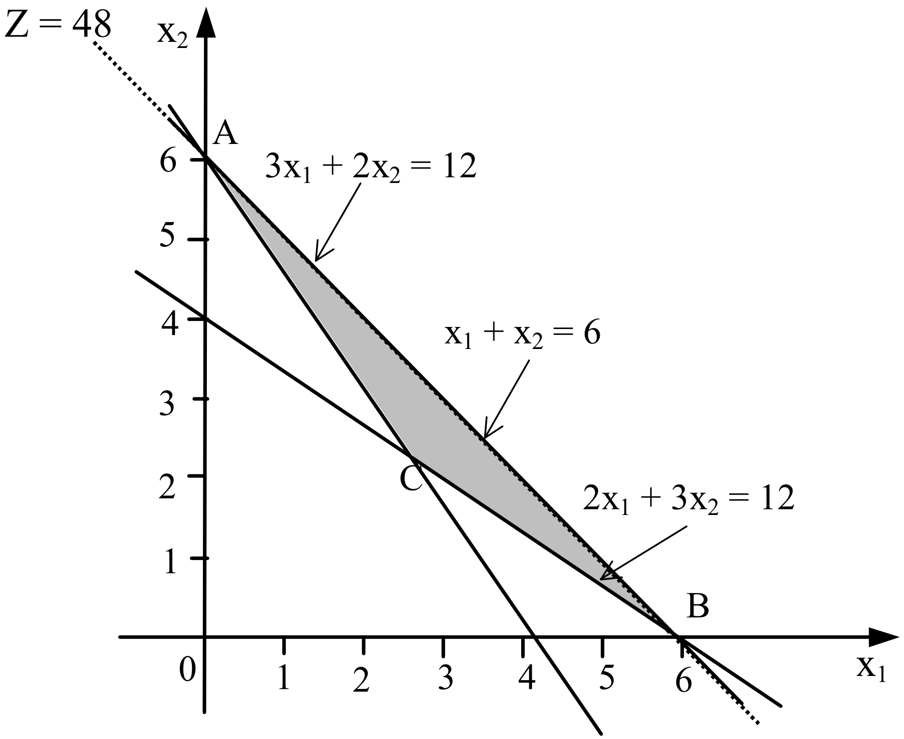
Bu iki denklemin çözümünden $x_1 = 3$, $x_2 = 3$ elde edilir. Buradan amaç fonksiyonunun en büyük değeri, Z'de $x_1 = 3$, $x_2 = 3$ yerleştirilmesiyle,

$Z_{enb} = 6(3) + 3(3) = 27$ olarak hesaplanır.

4. Alternatif Eniyi Çözümün Bulunması

Aşağıdaki doğrusal programlama problemini grafik yöntemiyle çözünüz.

$$Z_{enb} = 8x_1 + 8x_2$$
$$2x_1 + 3x_2 \geq 12$$
$$3x_1 + 2x_2 \geq 12$$
$$x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



Problemin uygun çözüm bölgesi ABC üçgen alanıdır.

Amaç fonksiyonunun ABC üçgeninin uç noktalarındaki değerleri aşağıda verilmiştir.

$$Z_A = Z_{(0,\ 6)} = 8(0) + 8(6) = 48$$
$$Z_B = Z_{(6,\ 0)} = 8(6) + 8(0) = 48$$
$$Z_C = Z_{(12/5,\ 12/5)} = 8(12/5) + 8(12/5) = 192/5$$

Amaç fonksiyonu en büyük değerine A(0, 6) ve B(6, 0) noktalarında ulaşmıştır. Dolayısıyla A ve B noktalarındaki çözümler birbirlerine alternatif olan en iyi çözümlerdir.

Ödev

Aşağıdaki DP problemini grafik çözüm yöntemi ile çözünüz.

$$Z_{enb} = 3x_1 + 6x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 - x_2 \leq -1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

DOĞRUSAL PROGRAMLAMA
SİMPLEKS ÇÖZÜM YÖNTEMİ

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

DP Simpleks Çözüm Yöntemi

- Grafikle çözümün uygulanamadığı çok değişkenli doğrusal programlama problemlerinin çözümünde yaygın biçimde kullanılan yöntem *simpleks yöntemidir*.
- George B. Dantzig tarafından geliştirilen bu yöntem tekrarlı bir yöntem olduğundan *simpleks algoritma* olarak da adlandırılmaktadır.

Kanonik Ve Standart Biçimler

1. ***Kanonik Biçim***

$Z_{enb} = C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_nx_n$

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
\quad . \qquad . \qquad ... \qquad . \qquad . \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m \\
\qquad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ ...,\ x_n \geq 0
\end{array}
$$

olarak formüle edilen doğrusal programlama aşağıdaki özelliklere sahipse, *kanonik* biçimde olduğu söylenir.

1. Tüm karar değişkenleri negatif değildir.
2. Amaç fonksiyonu en büyükleme tipindedir.
3. Tüm kısıtlayıcı fonksiyonlar (≤) işaretlidir.

2. ***Standart Biçim***

$Z_{enk/enb} = C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_nx_n$

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\
\quad . \qquad . \qquad ... \qquad . \qquad . \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \\
\qquad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ ...,\ x_n \geq 0
\end{array}
$$

olarak formüle edilen doğrusal programlama modeli aşağıdaki özelliklere sahipse, *standart* biçimde olduğu söylenir.

1. Tüm karar değişkenleri negatif değildir.
2. Amaç fonksiyonu en büyükleme veya en küçükleme tipindedir.
3. Tüm kısıtlayıcı fonksiyonlar (negatif olmama koşulu dışında) = işaretlidir.
4. Kısıtlayıcı fonksiyonların sağ taraf sabitleri negatif değildir.

Standart ve Kanonik Biçim Dönüştürme İşlemleri

- ***1.En iyilemenin anlamını değiştirme***
- $Z_{enb} = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n$ olarak tanımlanmışken,
- $= (-Z_{enb}) = -C_1x_1 - C_2x_2 - \ldots - C_nx_n$
- veya
- $Z_{enk} = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n$ olarak verilmişken,
- $= (-Z_{enk}) = -C_1x_1 - C_2x_2 - \ldots - C_nx_n$
- yazılabilir.
- Örnek olması bakımından amaç fonksiyonunun aşağıdaki gibi formüle edildiğini düşünelim.
- $Z_{enk} = 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4$
- Amaç fonksiyonundaki tüm terimlerin işaretlerinin değiştirilmesiyle amaç fonksi- yonu aşağıdaki gibi yazılabilir.
- $= (-Z_{enk}) = -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 5x_4$
- Dönüştürme işlemi, karar değişkenlerinin en iyi değerlerini değiştirmez. Problemi çözdükten sonra amaç fonksiyonunun en iyi değeri (-1) ile çarpılırsa orijinal problemin Zenk (Zenb) değeri bulunur.

Dönüştürme İşlemleri-devam

- ***2.Eşitsizliklerin yönünü değiştirme***: Herhangi bir eşitsizliğin her iki tarafı (-1) ile çarpıldığında eşitsizlik yön değiştirir. Sözgelimi, $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1$ ile her iki tarafının (-1) ile çarpılmasıyla elde edilen $-a_{11}x_1 - a_{12}x_2 \leq -b_1$ birbirlerine eşittir. Benzer biçimde, $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$ yerine $-a_{11}x_1 - a_{12}x_2 \geq -b_1$ yazılabilir.
- ***3.Eşitliği eşitsizliğe dönüştürme***: Eşitlik biçimindeki bir kısıtlayıcı fonksiyon iki eşitsizlikle açıklanabilir. Örneğin, $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ biçimindeki bir fonksiyon yerine, $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1$ ve $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$ veya $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b$ ve $-a_{11}x_1 - a_{12}x_2 \leq -b_1$ yazılabilir.
- ***4.İşareti sınırlandırılmamış değişkenler***: İşareti sınırlandırılmamış bir değişken (pozitif, negatif veya sıfır) negatif olmayan iki değişken arasındaki fark olarak açıklanabilir. Sözgelimi, x işareti sınırlandırılmamış bir değişken ise, x yerine $(x^+ - x^-)$ kullanılabilir. Burada, $x^+ \geq 0$ ve $x^- \geq 0$'dır. Negatif olmayan x^+ ve x^- değişkenlerinden en fazla biri en iyi çözümde pozitif değerli olur.

Dönüştürme İşlemleri-devam

- *5.Eşitsizlik biçimindeki kısıtlayıcı fonksiyonların eşitlik biçimine dönüştürülmesi*: Simpleks yöntem bir eşitlikler sistemine, standart işlemlerin tekrar tekrar uygulanmasıyla çözüm arayan bir süreçtir. Bu nedenle yöntemin en önemli adımı kısıtlayıcı fonksiyonların eşitlik biçiminde yazılmasıdır. Eşitsizlik biçimindeki bir kısıtlayıcının eşitsizliğin yönü bakımından iki türlü olduğu bilinmektedir. Eşitsizlikler

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \leq b_i$ veya $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \geq b_i$ biçimindedir.

($\leq$) işaretli eşitsizlikleri eşitlik biçimine dönüştürmek için bunların sol taraflarına negatif olmayan birer değişken eklenir. *Aylak değişken* adı verilen bu değişkenler x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m} ile gösterilir. ($\geq$) işaretli eşitsizlikler ise, sol taraflarından negatif olmayan birer değişken çıkartılmasıyla eşitlik biçimine dönüştürülür. Eşitsizliğin iki tarafı arasındaki farkı gösteren bu değişkene *artık değişken* denir. Bu değişkenler de aylak değişkenler gibi x_{n+1}, x_{n+2} , ..., x_{n+m} sembolleriyle gösterilirler. Yukarıda açıklandığı gibi, negatif olmama koşulu karar değişkenlerinin yanı sıra aylak ve artık değişkenlere de uygulanmaktadır. Bunun nedeni, kısıtlayıcı fonksiyonlardaki ($\geq$) ve ($\leq$) şartlarının gerçekleşmesini sağlamaktır.

Dönüştürme İşlemleri-devam

- *6. **Mutlak değerli kısıtlayıcı fonksiyonların eşitsizlik biçiminde yazılması***: Çok sık olmasa da mutlak değer içeren kısıtlayıcı fonksiyonlara rastlanabilir. Hangi yöntem uygulanırsa uygulansın bu tür kısıtlayıcılarla çözüme ulaşılamaz. Bu yüzden mutlak değerden kurtulmak gerekir. Örnek olması bakımından, kısıtlayıcı fonksiyonun $|a_1x_1 + a_2x_2| \leq b$ şeklinde formüllendiğini düşünelim. Bu durumda yapılması gereken $|a_1x_1 + a_2x_2| \leq b$ yerine $a_1x_1 + a_2x_2 \geq -b$ ve $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$ ikilisini yerleştirmektir. Kısıtlayıcı $|a_1x_1 + a_2x_2| \geq b$ ise $|a_1x_1 + a_2x_2| \geq b$ yerine geçecek eşitsizlikler $a_1x_1 + a_2x_2 \geq b$ ve $a_1x_1 + a_2x_2 \leq -b$ biçimindedir.

  Herhangi bir doğrusal programlama modelinin standart veya kanonik biçimde yazılmasını bir örnek üzerinde açıklayalım.

Örnek 4.1

-

Örnek 4.1: Aşağıdaki gibi verilmiş olan doğrusal programlama problemini, ***a***. Kanonik biçimde, ***b***. Standart biçimde yazınız.

$Z_{enk} = -6x_1 + 7x_2 + 7x_3 - x_4$

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - 4x_3 \quad & \geq 30 \\
2x_1 + 9x_2 + 6x_3 + x_4 & \leq 60 \\
6x_1 \quad + x_3 + x_4 & = 15 \\
|3x_1 + 4x_2| \quad & \leq 80
\end{aligned}
$$

$x_1, x_2, x_4 \geq 0$, x_3 sınırlandırılmamış

Çözüm 4.1. a-

-

$$Z'_{enb} = 6x_1 - 7x_2 - 7(x_3^+ - x_3^-) + x_4$$

$$\begin{aligned}
-x_1 - 2x_2 + 4(x_3^+ - x_3^-) &\leq -30 \\
2x_1 + 9x_2 + 6(x_3^+ - x_3^-) + x_4 &\leq 60 \\
6x_1 + (x_3^+ - x_3^-) + x_4 &\leq 15 \\
-6x_1 - (x_3^+ - x_3^-) - x_4 &\leq -15 \\
3x_1 + 4x_2 &\leq 80 \\
-3x_1 - 4x_2 &\leq 80 \\
x_1, x_2, x_3^+, x_3^-, x_4 &\geq 0
\end{aligned}$$

Çözüm 4.1. b-

-

$$Z_{enk} = -6x_1 + 7x_2 + 7(x_3^+ - x_3^-) - x_4$$

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - 4(x_3^+ - x_3^-) \quad - x_5 &= 30 \\
2x_1 + 9x_2 + 6(x_3^+ - x_3^-) + x_4 \quad + x_6 &= 60 \\
6x_1 \quad + (x_3^+ - x_3^-) + x_4 &= 15 \\
-3x_1 - 4x_2 \quad + x_7 &= 80 \\
3x_1 + 4x_2 \quad + x_8 &= 80
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, , x_4, x_3^+, x_3^-, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0$$

Simpleks Çözüm Yönteminin Açıklanması

- Aşağıdaki gibi bir modelin olduğunu varsayalım.

$$Z_{enb} = C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_nx_n$$

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \;...\; + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \;...\; + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
\quad . \qquad\quad . \qquad ... \qquad . \qquad . \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m \\
\qquad x_1 \geq 0,\; x_2 \geq 0,\; ...,\; x_n \geq 0
\end{array}
$$

Simpleks Çözüm Yönteminin Açıklanması-devam

- Simpleks yöntemin ilk adımı tüm eşitsizliklerin (negatif olmama koşulu hariç) eşitlik biçimine dönüştürülmesidir. Kesim 4.2'de açıklandığı gibi (≤) işaretli bir eşitsizliği eşitliğe dönüştürmek için eşitsizliğin sol tarafına negatif olmayan bir aylak değişken eklenir. Her bir eşitsizlik için bir aylak değişken kullanılmasıyla yukarıdaki kısıtlayıcı fonksiyonlar aşağıdaki gibi olur.

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + 1x_{n+1} + 0x_{n+2} + \ldots + 0x_{n+m} = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + 0x_{n+1} + 1x_{n+2} + \ldots + 0x_{n+m} = b_2 \\
\quad . \qquad . \qquad \ldots \qquad . \qquad . \qquad . \qquad \ldots \qquad . \qquad . \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + \ldots + 1x_{n+m} = b_m
\end{array}
$$

Aylak değişkenlerin eklendikleri kısıtlayıcı fonksiyonlardaki katsayılarının +1, diğer-lerinde sıfıra eşit olduğu görülebilir.

Karar değişkenleri ile aylak değişkenler negatif olmadığından, standart biçimin negatif olmama koşulu aşağıdaki gibi olur.

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m} \geq 0$$

Aylak değişkenlerin amaç fonksiyonu katsayıları, bir başka deyişle bu değişkenlerin amaç fonksiyonuna birim katkıları (birim kârları) sıfırdır

Bu durumda amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi olur.

$$Z_{enb} = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + \ldots + 0x_{n+m}$$

Standart Biçimin Matris Gösterimi

- Standart biçimdeki doğrusal programlama modelinin kısıtlayıcı fonksiyonları matris-lerle şöyle gösterilir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{12} & . & . & . & a_{mn} & 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ . \\ . \\ x_{n+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

Başlangıç Çözüm Tablosu

- Standart biçimin oluşturulmasından sonra en iyi çözümün araştırılması işlemine geçilebilir. Simpleks yöntemin ardışık tekrarları *başlangıç çözüm tablosu* adı verilen bir tablonun düzenlenmesinden sonra başlar. Başlangıç çözüm tablosu, aşağıdaki tablo esasına göre düzenlenir.
-

•

Tablo 4.1

Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu

	2	3				4				5
1 →	TDV	x_1	x_2	…	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	…	x_{n+m}	ÇV
	0 x_{n+1}	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	1	0	…	0	b_1
	0 x_{n+2}	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	0	1	…	0	b_2
	.	.	.	…	.	.	.	…	.	.
	.	.	.	…	.	.	.	…	.	.
	0 x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}.	…	a_{mn}	0	0	…	1	b_m
6 →	Z_j	0	0	…		0	0	…	0	0
7 →	$Z_j - C_j$	$-C_1$	$-C_2$	…	$-C_n$	0	0	…	0	-

Tablo 4.1 kapsamındaki bölümler aşağıda açıklanmıştır.

1. ***Değişkenler satırı****:* Tablonun ilk satırıdır. Standart biçimin tüm değişkenleri önce karar değişkenleri, sonra diğer değişkenler olmak üzere bu satırda gösterilir.

2. ***Temel değişkenler sütunu***: Tablonun ilk sütunudur. Tablodaki çözüme karşılık gelen temel çözümün değişkenleri ile bu değişkenlerin amaç fonksiyonu katsayılarını gösterir.

- ***3. Gövde***: Problemin orijinal karar değişkenlerinin kısıtlayıcı fonksiyonlardaki katsayılarından (a_{ij}, $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$) oluşan m x n matristir.

4. Birim matris: Aylak değişkenlerin kısıtlayıcı fonksiyon katsayılarının oluşturduğu m x m birim matristir.

5. Çözüm vektörü: Temeldeki değişkenlerin çözüm değerlerini gösteren m x 1 sütun vektördür. Başlangıçta, kısıtlayıcı fonksiyonların sağ taraf sabitlerinden oluşur.

6. Z_j satırı: Yürülükteki temelde bulunan değişkenlerin amaç fonksiyonu katsayıları ile x_j sütunundaki katsayıların karşılıklı çarpımlarının toplamından oluşur. Buna göre örneğin, $Z_1 = 0(a_{11}) + 0(a_{21}) + ... + 0(a_{m1}) = 0$ olur.

3. Gövde: Problemin orijinal karar değişkenlerinin kısıtlayıcı fonksiyonlardaki katsayılarından (a_{ij}, $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$) oluşan m x n matristir.

4. Birim matris: Aylak değişkenlerin kısıtlayıcı fonksiyon katsayılarının oluşturduğu m x m birim matristir.

5. Çözüm vektörü: Temeldeki değişkenlerin çözüm değerlerini gösteren m x 1 sütun vektördür. Başlangıçta, kısıtlayıcı fonksiyonların sağ taraf sabitlerinden oluşur.

6. Z_j satırı: Yürülükteki temelde bulunan değişkenlerin amaç fonksiyonu katsayıları ile x_j sütunundaki katsayıların karşılıklı çarpımlarının toplamından oluşur. Buna göre örneğin, $Z_1 = 0(a_{11}) + 0(a_{21}) + ... + 0(a_{m1}) = 0$ olur.

7. Z_j - C_j satırı: Tablonun son satırıdır. Elemanları, Z_j ile o sütunla ilgili değişkenin amaç fonksiyonu katsayısı arasındaki farka eşittir. Z_j - C_j farkları x_j değişkeninin temele alınmasının amaç fonksiyonunda yol açacağı değişikliği ters işaretle gösterir.

•Anahtar Sütun: Simpleks yönteminde, temeli terkeden değişkenin bulunduğu satıra *anahtar satır* denir.

•Anahtar satır: Simpleks yönteminde, temeli terkeden değişkenin bulunduğu satıra *anahtar satır* denir.

•Anahtar Sayı: Anahtar sütun ile anahtar satırın kesiştiği gözedeki değere *anahtar sayı* denir.

•Temele girecek değişkenin yeni değerlerinin hesaplanması:

•(Anahtar Satır Değerleri/Anahtar Sayı)

•Diğer Satır Değerlerinin Değerleri:

$$\begin{bmatrix} \text{Eski} \\ \text{Satır} \\ \text{Elemanları} \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} \text{Eski Satırla} \\ \text{Anahtar Sütunun} \\ \text{Kesiştiği Gözedeki Sayı} \end{pmatrix} \text{x} \begin{matrix} \text{Anahtar} \\ \text{Satırın Yeni} \\ \text{Elemanları} \end{matrix}$$

Örnek 4.2

•***Örnek 4.2***: Bir sanayii işletmesi bakır, alüminyum ve çinko metallerinin farklı alaşımlarını kullanarak A ve B gibi iki çeşit ürün üretmektedir. İşletmenin elinde 20 ton bakır, 30 ton alüminyum ve 40 ton çinko vardır. Bir birim A ve bir birim B'nin üretiminde kullanılan bakır, alüminyum ve çinko miktarları (ton) ile A ve B'nin bir biriminden elde edilen karlar (TL) aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

•Bu bilgileri ve tablodaki verileri kullanarak problemin doğrusal programlama modelini kurunuz ve işletmenin karını en büyükleyen üretim miktarlarını simpleks yöntemle bulunuz.

Ürün	Hammadde			Kâr
	Bakır	Alüminyum	Çinko	
A	6	3	1	2
B	4	1	1	3

Çözüm 4.2

Çözüm 4.2: Problemin doğrusal programlama modeli aşağıda gösterilmiştir.

$Z_{enb} = 2x_1 + 3x_2$

$6x_1 + 4x_2 \leq 20$ (Bakır kısıtı)

$3x_1 + x_2 \leq 30$ (Alüminyum kısıtı)

$x_1 + x_2 \leq 40$ (Çinko kısıtı)

$x_1, x_2 \geq 0$

Standart Biçim

$Z_{enb} = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$

$6x_1 + 4x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 20$

$3x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 = 30$

$x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 = 40$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

•

Tablo 4.2

Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu

TDV		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	ÇV	Oran
0	x_3	6	**4**	1	0	0	20	20/4 → AS
0	x_4	3	1	0	1	0	30	30/1
0	x_5	1	1	0	0	1	40	40/1
Z_j		0	0	0	0	0	0	
$Z_j - C_j$		-2	-3	0	0	0	-	

AS

Z_j satır elemanları, bulundukları sütundaki katsayılarla temel değişkenlerin amaç fonksiyonu katsayılarının karşılıklı çarpımlarının toplamı olarak aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$Z_1 = 0(6) + 0(3) + 0(1) = 0$

$Z_2 = 0(4) + 0(1) + 0(1) = 0$

$Z_3 = 0(1) + 0(0) + 0(0) = 0$

$Z_4 = 0(0) + 0(1) + 0(0) = 0$

$Z_5 = 0(0) + 0(0) + 0(1) = 0$

$Z_6 = 0(20) + 0(30) + 0(40) = 0$

Yukarıdaki Z_j değerlerinin kullanılmasıyla $Z_j - C_j$ değerleri aşağıdaki gibi bulunur.

$Z_1 - C_1 = 0 - 2 = -2$

$Z_2 - C_2 = 0 - 3 = -3$

$Z_3 - C_3 = 0 - 0 = 0$

$Z_4 - C_4 = 0 - 0 = 0$

$Z_5 - C_5 = 0 - 0 = 0$

Çözüm 4.2

Anahtar satırın yeni elemanları,

$$\begin{bmatrix} 6/4 & 4/4 & 1/4 & 0/4 & 0/4 & 20/4 \end{bmatrix}$$

veya gerekli aritmetik işlemlerin yapılmasıyla aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{bmatrix} 3/2 & 1 & 1/4 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Bu değerlerin yeni çözüm tablosuna yerleştirilmesinden sonra tablonun diğer elemanları hesaplanabilir.

x_4 değişken satırından başlayarak diğer satır elemanlarını hesaplayalım. x_4 değişken satırının eski elemanları aşağıda gösterildiği gibidir.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 30 \end{bmatrix}$$

Bu satırla anahtar sütunun kesiştiği yerdeki sayı 1 ve anahtar satırın yeni elemanları,

$$\begin{bmatrix} 3/2 & 1 & 1/4 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, x_4 değişken satırının yeni elemanları,

$$\begin{array}{l} [3 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 30] \\ (-1)[3/2 \quad 1 \quad 1/4 \quad 0 \quad 0 \quad 5] \\ \hline [3/2 \quad 0 \quad -1/4 \quad 1 \quad 0 \quad 25] \end{array}$$

olarak hesaplanır.

Aynı yaklaşımla x_5 değişken satırının yeni elemanlarının,

$$\begin{array}{l} [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 40] \\ \hline (-1)[3/2 \quad 1 \quad 1/4 \quad 0 \quad 0 \quad 5] \\ [-1/2 \quad 0 \quad -1/4 \quad 0 \quad 1 \quad 35] \end{array}$$

Tablo 4.3
Simpleks Birinci (En İyi) Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	ÇV
3 x_2	3/2	1	1/4	0	0	5
0 x_4	3/2	0	-1/4	1	0	25
0 x_5	-1/2	0	-1/4	0	1	35
Z_j	9/2	3	3/4	0	0	15
Z_j - C_j	5/2	0	3/4	0	0	-

•Bu durumda Z = 15, amaç fonksiyonu için bulunabilecek en büyük değerdir. Bu çözümde $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $x_3 = 0$, $x_4 = 25$, $x_5 = 35$’dir. Bu durumda, işletme B’den 5 birim üretirken A’dan hiç üretmeyecek, böylece en yüksek kârı 15 TL olacaktır.

•Aylak değişkenlerin en iyi çözümdeki değerleri $x_3 = 0$, $x_4 = 25$, $x_5 = 35$’dir.

Örnek 4.3

Örnek 4.3: Aşağıdaki doğrusal programlama problemini simpleks yöntemle çözünüz.

$Z_{enb} = 10x_1 + 22x_2 + 18x_3$

$$
\begin{aligned}
x_1 + 4x_2 + 3x_3 &\leq 24 \\
2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\leq 46 \\
3x_1 + 5x_2 + 6x_3 &\leq 60 \\
4x_1 + 8x_2 + 3x_3 &\leq 120
\end{aligned}
$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Çözüm 4.3

- ***Çözüm 4.3***: Problemin standart biçimi aşağıda gösterilmiştir.

$Z_{enb} = 10x_1 + 22x_2 + 18x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7$

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 &= 24 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 0x_4 + x_5 + 0x_6 + 0x_7 &= 46 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 0x_4 + 0x_5 + x_6 + 0x_7 &= 60 \\ 4x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + x_7 &= 120 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

Problemin simpleks başlangıç çözüm tablosu şöyledir.

Tablo 4.4
Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	ÇV	Oran
0 x_4	1	**4**	3	1	0	0	0	24	24/4 = 6 → AS
0 x_5	2	2	4	0	1	0	0	46	46/2 = 23
0 x_6	3	5	6	0	0	1	0	60	60/5 = 12
0 x_7	4	8	3	0	0	0	1	120	120/8 = 15
Z_j	0	0	0	0	0	0	0	0	
$Z_j - C_j$	-10	-22	-18	0	0	0	0	-	

AS

Çözüm 4.3

- Anahtar satırın yeni değerleri:

[1 4 3 1 0 0 0 24]

olduğuna göre, anahtar satırın yeni elemanları,

[1/4 4/4 3/4 1/4 0/4 0/4 0/4 24/4]

veya gerekli aritmetik işlemlerin yapılmasıyla aşağıdaki gibi bulunur.

[1/4 1 3/4 1/4 0 0 0 6]

Bu değerlerin yeni çözüm tablosuna yerleştirilmesinden sonra bu tablonun diğer elemanları hesaplanabilir.

x_5 değişken satırından başlayarak diğer satır elemanlarını hesaplayalım. Söz konusu değerler aşağıdaki gibi bulunur.

x_5 değişken satırının yeni elemanlarının hesaplanması:

[2	2	4	0	1	0	0	46]
(-2)[1/4	1	3/4	1/4	0	0	0	6]
[3/2	0	5/2	-1/2	1	0	0	34]

x_6 değişken satırının yeni elemanlarının hesaplanması:

[3	5	6	0	0	1	0	60]
(-5)[1/4	1	3/4	1/4	0	0	0	6]
[7/4	0	9/4	-5/4	0	1	0	30]

x_7 değişken satırının yeni elemanlarının hesaplanması:

[4	8	3	0	0	0	1	120]
(-8)[1/4	1	3/4	1/4	0	0	0	6]
[2	0	-3	-2	0	0	1	72]

Çözüm 4.3

- ***Tablo 4.5***
  Simpleks Birinci Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	ÇV	Oran
22 x_2	1/4	1	3/4	1/4	0	0	0	6	6/(1/4) = 24.00
0 x_5	3/2	0	5/2	-1/2	1	0	0	34	34/(3/2) = 22.33
0 x_6	**7/4**	0	9/4	-5/4	0	1	0	30	30/(7/4) = 17.11 →
0 x_7	2	0	-3	-2	0	0	1	72	
Z_j	11/2	22	33/2	11/2	0	0	0	132	
Z_j - C_j	-9/2	0	-3/2	11/2	0	0	0	-	-
	↑								

Tablo 4.6
Simpleks İkinci (En iyi) Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	ÇV
22 x_2	0	1	3/7	3/7	0	-1/7	0	12/7
0 x_5	0	0	4/7	4/7	1	-6/7	0	58/7
10 x_1	1	0	9/7	-5/7	0	4/7	0	120/7
0 x_7	0	0	-39/7	-4/7	0	-8/7	1	264/7
Z_j	10	22	156/7	16/7	0	18/7	0	1464/7
Z_j - C_j	0	0	30/7	16/7	0	18/7	0	-

Örnek 4.4

Örnek 4.4: Aşağıdaki doğrusal programlama problemini simpleks yöntemle çözünüz.

$$Z_{enb} = -2x_1 - 3x_2 - x_3$$

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Çözüm 4.4: Simpleks yöntemle çözüm yapabilmek için önce eşitsizlikleri eşitlik biçiminde yazalım. Her bir kısıtlayıcı fonksiyona birer yapay değişken eklenir, aynı kısıtlayıcılardan birer artık değişken çıkartılırsa örnek problemin modeli simpleks yöntem için uygun biçime dönüştürülmüş olur.

$$Z_{enb} = -2x_1 - 3x_2 - x_3 + 0x_4 + 0x_5 - MA_1 - MA_2$$

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 + A_1 = 8$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 + A_2 = 6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, A_1, A_2 \geq 0$$

Standart biçimdeki bilgilerin kullanılmasıyla oluşturulan tablo aşağıda gösterilmiştir.

$$Z_1 = (-M)(1) + (-M)(3) = -4M$$
$$Z_2 = (-M)(4) + (-M)(2) = -6M$$
$$Z_3 = (-M)(2) + (-M)(1) = -3M$$
$$Z_4 = (-M)(-1) + (-M)(0) = M$$
$$Z_5 = (-M)(0) + (-M)(-1) = M$$
$$Z_6 = (-M)(1) + (-M)(0) = -M$$
$$Z_7 = (-M)(0) + (-M)(1) = -M$$
$$Z_8 = (-M)(8) + (-M)(6) = -14M$$

$$Z_1 - C_1 = (-4M) - (-2) = -4M + 2$$
$$Z_2 - C_2 = (-6M) - (-3) = -6M + 3$$
$$Z_3 - C_3 = (-3M) - (-1) = -3M + 1$$
$$Z_4 - C_4 = M - (0) = M$$
$$Z_5 - C_5 = M - (0) = M$$
$$Z_6 - C_6 = (-M) - (-M) = 0$$
$$Z_7 - C_7 = (-M) - (-M) = 0$$

Tablo 4.7

Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	A_2	ÇV	Oran
-M A_1	1	**4**	2	-1	0	1	0	8	8/4 = 2 → AS
-M A_2	3	2	1	0	-1	0	1	6	6/2 = 3
Z_j	-4M	-6M	-3M	M	M	M	M	-14M	
$Z_j - C_j$	-4M+2	-6M+3	-3M+1	M	M	0	0	-	
		↑ AS							

Çözüm 4.4

-

Tablo 4.8
Simpleks Birinci Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	A_2	ÇV
-3 x_2	1/4	1	1/2	-1/4	0	1/4	0	2
-M A_2	**5/2**	0	0	1/2	-1	-1/2	1	2 →
Z_j	$\frac{-3-10M}{4}$	-3	-3/2	$\frac{3-2M}{4}$	M	$\frac{-3+2M}{4}$	-M	-2M-6
Z_j - C_j	$\frac{5-10M}{4}$ ↑	0	-1/2	$\frac{3-2M}{4}$	M	$\frac{-3+6M}{4}$	0	-

Tablo 4.9
Simpleks İkinci Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	A_2	ÇV
-3 x_2	0	1	**1/2**	-3/10	1/10	3/10	-1/10	9/5 →
-2 x_1	1	0	0	1/5	-2/5	-1/5	2/5	4/5
Z_j	-2	-3	-3/2	1/2	1/2	-1/2	-1/2	-7
Z_j - C_j	0	0	-1/2 ↑	1/2	1/2	$\frac{2M-1}{2}$	$\frac{2M-1}{2}$	-

Çözüm 4.4

- ***Tablo 4.10***
  Simpleks Üçüncü (En iyi) Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	A_2	ÇV
-1 x_3	0	2	1	-3/5	1/5	3/5	-1/5	18/5
-2 x_1	1	0	0	1/5	-2/5	-1/5	2/5	4/5
Z_j	-2	-2	-1	1/5	3/5	-1/5	-3/5	-26/5
Z_j - C_j	0	1	0	1/5	3/5	$\frac{5M-1}{5}$	$\frac{5M-3}{5}$	-

Tablo 4.10'daki temel uygun çözümde tüm Z_j - $C_j \geq 0$ olduğundan çözüm en iyidir. Bu çözümde, $x_1 = 4/5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 18/5$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ olarak belirlenmiştir. Amaç fonksiyonunun en büyük değeri $Z_{enb} = -26/5$'dir.

Örnek 4.5

Örnek 4.5: Aşağıdaki doğrusal programlama problemini simpleks yöntemle çözünüz.

$Z_{enb} = 21x_1 + x_2 + x_3$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 20$$
$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 30$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Çözüm 4.5: Kısıtlayıcılar eşitlik biçiminde olduğundan, her birine (+1) katsayılı yapay değişken eklenmesi gerekir. Bu yolla elde edilen model aşağıda gösterilmiştir.

$Z_{enb} = 21x_1 + x_2 + x_3 - MA_1 - MA_2$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 + A_1 = 20$$
$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 + A_2 = 30$$
$$x_1, x_2, x_3, A_1, A_2 \geq 0$$

Tablo 4.11
Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	A_1	A_2	ÇV
-M A_1	2	1	**4**	1	0	20
-M A_2	1	3	4	0	1	30
Z_j	-3M	-4M	-8M	-M	-M	-50M
$Z_j - C_j$	-3M-21	-4M-1	-8M-1	0	0	-

Çözüm 4.5

•

Tablo 4.14
Simpleks Üçüncü (En İyi) Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	A_1	A_2	ÇV
21 x_1	1	0	8/5	3/5	-1/5	6
1 x_2	0	1	4/5	-1/5	2/5	8
Z_j	21	1	172/5	62/5	-19/5	134
Z_j - C_j	0	0	167/2	$\frac{5M+62}{8}$	$\frac{5M-19}{5}$	-

Son satırın tüm elemanları ≥ 0 olduğundan, en iyi çözüm elde edilmiştir. Bu en iyi çözümde, $x_1 = 6$, $x_2 = 8$, $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ ve $Z_{enb} = 134$'dür.

Enküçükleme Problemleri

Örnek 4.6: Aşağıdaki doğrusal programlama problemini simpleks yöntemle çözünüz.

$$Z_{enk} = 3x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 21$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 12$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Çözüm 4.6: Önceden olduğu gibi öncelikle problemin standart biçimde yazılması gerekmektedir. Yukarıda yapılan açıklamalar doğrultusunda eklenen ve çıkartılan değişkenlerle problemin standart biçimi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Z_{enk} = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + MA_1 + MA_2$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + A_1 = 21$$
$$x_1 + x_2 + x_3 - x_5 + A_2 = 12$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, A_1, A_2 \geq 0$$

Problemin standart biçimindeki bilgilerin kullanılmasıyla düzenlenen başlangıç çözüm tablosu aşağıda gösterilmiştir.

Tablo 4.15
Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	A_2	ÇV
M A_1	2	**3**	1	-1	0	1	0	21
M A_2	1	1	1	0	-1	0	1	12
Z_j	3M	4M	2M	-M	-M	M	M	33M
$Z_j - C_j$	3M-3	4M-2	2M-1	-M	-M	0	0	-

Çözüm 4.6

- ***Tablo 4.16***

Simpleks Birinci Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	A_2	ÇV
2 x_2	2/3	1	1/3	-1/3	0	1/3	0	7
M A_2	1/3	0	**2/3**	1/3	-1	-1/3	1	5
Z_j	$\frac{M+4}{3}$	2	$\frac{2M+2}{3}$	$\frac{M-2}{3}$	-M	$\frac{-M+2}{3}$	M	5M+14
Z_j - C_j	$\frac{M-5}{3}$	0	$\frac{2M-1}{3}$	$\frac{M-2}{3}$	-M	$\frac{-4M+2}{3}$	0	-

Tablo 4.17

Simpleks İkinci (En İyi) Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	A_2	ÇV
2 x_2	1/2	1	0	-1/2	1/2	1/2	-1/2	9/2
1 x_3	1/2	0	1	1/2	-3/2	-1/2	3/2	15/2
Z_j	3/2	2	1	-1/2	-1/2	1/2	1/2	33/2
Z_j - C_j	-3/2	0	0	-1/2	-1/2	$\frac{-2M+1}{2}$	$\frac{-2M+1}{2}$	-

Tüm $Z_j - C_j \leq 0$ olduğundan, en iyi çözüme ulaşılmış ve $x_1 = 0$, $x_2 = 9/2$, $x_3 = 15/2$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ ve Zenk = 33/2 olarak belirlenmiştir.

Temele Girecek Değişken Katsayılarının Eşit Olması

- ***Örnek 4.7***: Aşağıdaki doğrusal programlama problemini simpleks yöntemle çözünüz.

$$Z_{enb} = 8x_1 + 8x_2 + 6x_3$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\le 12 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 4 \\ 3x_1 + 5x_2 &\le 10 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

Çözüm 4.7: Problemin standart biçimi aşağıda verilmiştir.

$$Z_{enb} = 8x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= 12 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 &= 4 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_6 &= 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\ge 0 \end{aligned}$$

Tablo 4.18
Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	ÇV
0 x_4	2	3	4	1	0	0	12
0 x_5	1	2	1	0	1	0	4
0 x_6	**3**	5	0	0	0	1	10 →
Z_j	0	0	0	0	0	0	0
$Z_j - C_j$	-8	-8	-6	0	0	0	-
	↑	↑					

Çözüm 4.7

Tablo 4.19
Simpleks Birinci Çözüm Tablosu

TDV		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	ÇV
0	x_4	0	-1/3	4	1	0	-2/3	16/3
0	x_5	0	1/3	**1**	0	1	-1/3	2/3
8	x_1	1	5/3	0	0	0	1/3	10/3
Z_j		8	40/3	0	0	0	8/3	80/3
$Z_j - C_j$		0	16/3	-6	0	0	8/3	-

Tablo 4.20
Simpleks İkinci (En İyi) Çözüm Tablosu

TDV		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	ÇV
0	x_4	0	-5/3	0	1	-4	2/3	8/3
6	x_3	0	1/3	1	0	1	-1/3	2/3
8	x_1	1	5/3	0	0	0	1/3	10/3
Z_j		8	46/3	6	0	6	2/3	92/3
$Z_j - C_j$		0	22/3	0	0	6	2/3	-

Bozulma Durumu

Örnek 4.8: Aşağıdaki doğrusal programlama problemini simpleks yöntemle çözünüz.

$Z_{enb} = 8x_1 + 6x_2 + 5x_3$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &\leq 12 \\ 2x_1 + 5x_3 &\leq 8 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Çözüm 4.8: Problemin standart biçimi aşağıda gösterilmiştir.

$Z_{enb} = 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 &= 12 \\ 2x_1 + 5x_3 + x_5 &= 8 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_6 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

Tablo 4.21

Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu

TDV		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	ÇV	Oran
0	x_4	3	4	5	1	0	0	16/3	12/3 = 4 →
0	x_5	2	0	5	0	1	0	2/3	8/2 = 4 →
0	x_6	1	4	2	0	0	1	10/3	4/1 = 4 →
Z_j		0	0	0	0	0	0	80/3	
$Z_j - C_j$		-8 ↑	-6	-5	0	0	0	-	

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	3/3	4/3	5/3	1/3	0/3	0/3
x_5	2/2	0/2	5/2	0/2	1/2	0/2
x_6	1/1	4/1	2/1	0/1	0/1	1/1

Gövde (x_1–x_3) — Birim Matris (x_4–x_6)

Çözüm 4.8

-

Tablo 4.22
Simpleks Birinci Çözüm Tablosu

TDV		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	ÇV
0	x_4	0	4	-5/2	1	-3/2	0	0
8	x_1	1	0	5/2	0	1/2	0	4
0	x_6	0	**4**	-1/2	0	-1/2	1	0
Z_j		8	0	20	0	4	0	32
$Z_j - C_j$		0	-6	15	0	0	0	-

Tablo 4.23
Simpleks İkinci (En iyi) Çözüm Tablosu

TDV		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	ÇV
0	x_4	0	0	-2	1	-1	-1	0
8	x_1	1	0	5/2	0	1/2	0	4
6	x_2	0	1	-1/8	0	-1/8	1/4	0
Z_j		8	6	77/4	0	13/4	3/2	32
$Z_j - C_j$		0	0	57/4	0	13/4	3/2	-

Sınırsız Çözüm

•***Örnek 4.9***: Aşağıdaki doğrusal programlama problemini simpleks yöntemle çözünüz.

$Z_{enb} = 2x_1 + 5x_2 + 9x_3$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 12$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 4$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Çözüm 4.9: Problemin standart biçimi aşağıda verilmiştir.

$Z_{enb} = 2x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 0x_4 + 0x_5 - MA_1 - MA_2$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 + A_1 = 12$$
$$x_1 + x_2 + x_3 - x_5 + A_2 = 4$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, A_1, A_2 \geq 0$$

Tablo 4.24
Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	A_2	ÇV
-M A_1	1	1	**4**	-1	0	1	1	12
-M A_2	1	1	1	0	-1	0	0	4
Z_j	-2M	-2M	-5M	M	M	-M	-M	-16M
$Z_j - C_j$	-2M-2	-2M-5	-5M-9	M	M	0	0	-

Tablo 4.25
Simpleks Birinci Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	A_2	ÇV
9 x_3	1/4	1/4	1	-1/4	0	1/4	0	3
-M A_2	3/4	**3/4**	0	1/4	-1	-1/4	1	1
Z_j	$\frac{-3M+9}{4}$	$\frac{-3M+9}{4}$	9	$\frac{-M-9}{4}$	M	$\frac{M+9}{4}$	-M	27-M
$Z_j - C_j$	$\frac{-3M+1}{4}$	$\frac{-3M-11}{4}$	0	$\frac{-M-9}{4}$	M	$\frac{5M+9}{4}$	0	-

Çözüm 4.9

•

Tablo 4.26
Simpleks İkinci Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	A_2	ÇV
9 x_3	0	0	1	-1/3	**1/3**	1/3	-1/3	8/3
5 x_2	1	1	0	1/3	-4/3	-1/3	4/3	4/3
Z_j	5	5	9	-4/3	-11/3	4/3	11/3	92/3
$Z_j - C_j$	3	0	0	-4/3	-11/3	$\frac{3M+4}{3}$	$\frac{3M+11}{3}$	-

Tablo 4.27
Simpleks Üçüncü Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	A_2	ÇV
0 x_5	0	0	3	-1	1	1	-1	8/3
5 x_2	1	1	4	-1	0	1	0	12
Z_j	5	5	20	-5	0	5	0	60
$Z_j - C_j$	3	0	11	-5	0	M+5	M	-

Alternatif En iyi Çözümler

- ***Örnek 4.10***: Aşağıdaki problemi simpleks yöntemle çözerek problemin en iyi çözümünü bulunuz.

$Z_{enb} = 2x_1 + 4x_2 + 6x_3$

$$4x_1 + 8x_2 + 12x_3 \leq 36$$
$$x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 12$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 20$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Çözüm 4.10: Aylak değişkenlerin modele sokulmasıyla elde edilen standart biçim aşağıda gösterilmiştir.

$Z_{enb} = 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$

$$4x_1 + 8x_2 + 12x_3 + x_4 = 36$$
$$x_1 + x_2 + 3x_3 + x_5 = 12$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 20$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Tablo 4.28
Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	ÇV
0 x_4	4	8	**12**	1	0	0	36
0 x_5	1	1	3	0	1	0	12
0 x_6	2	2	1	0	0	1	20
Z_j	0	0	0	0	0	0	0
$Z_j - C_j$	-2	-4	-6	0	0	0	-

Uygun Olmayan Çözüm

- ***Örnek 4.11***: Aşağıdaki problemi simpleks yöntemle çözünüz.

$Z_{enk} = 2x_1 + 2x_2$

$$-x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 5$$
$$3x_1 + 4x_2 \leq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Çözüm 4.11: Uygun değişkenlerin eklenip çıkartılmasıyla belirlenen standart biçim aşağıda verildiği gibidir.

$Z_{enk} = 2x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + MA_1$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 + 2x_2 - x_4 + A_1 = 5$$
$$3x_1 + 4x_2 + x_5 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, A_1 \geq 0$$

Tablo 4.31
Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_4	x_3	x_5	A_1	ÇV
0 x_3	-1	1	0	1	0	0	4
M A_1	1	2	-1	0	0	1	5
0 x_5	3	**4**	0	0	1	0	6
Z_j	M	2M	-M	0	0	M	5M
Z_j - C_j	M-2	2M-2	-M	0	0	0	-

Tablo 4.32
Simpleks Birinci Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_4	x_3	x_5	A_1	ÇV
0 x_3	-7/4	0	0	1	-1/4	0	5/2
M A_1	-1/2	0	-1	0	-1/2	1	2
2 x_2	3/4	1	0	0	1/4	0	3/2
Z_j	$\frac{3-M}{2}$	2	-M	0	$\frac{1-M}{2}$	M	2M+3
Z_j - C_j	$\frac{-M-1}{2}$	0	-M	0	$\frac{1-M}{2}$	0	-

Sınırlandırılmamış Değişkenlerle Çözüm

Örnek 4.12: Aşağıdaki problemi simpleks yöntemle çözünüz.

$Z_{enb} = 2x_1 + x_2$

$3x_1 + x_2 \leq 6$

$x_1 + x_2 \leq 4$

$x_1 > 0$, x_2 işareti sınırlandırılmamış

Çözüm 4.12: Simpleks yöntem için önce işareti sınırlandırılmamış x_2 değişkeni yerine, $x_2 = x_2^+ - x_2^-$ yazalım. Bu durumda yukarıda verilen doğrusal programlama problemi aşağıdaki gibi olur.

$$Z_{enb} = 2x_1 + (x_2^+ - x_2^-)$$
$$3x_1 + (x_2^+ - x_2^-) \leq 6$$
$$x_1 + (x_2^+ - x_2^-) \leq 4$$
$$x_1,\ x_2^+, x_2^- \geq 0$$

$$Z_{enb} = 2x_1 + (x_2^+ - x_2^-)$$
$$3x_1 + (x_2^+ - x_2^-) + x_3 = 6$$
$$x_1 + (x_2^+ - x_2^-) + x_4 = 4$$
$$x_1,\ x_2^+, x_2^-, x_3, x_4 \geq 0$$

Tablo 4.33

Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2^+	x_2^-	x_3	x_4	ÇV
x_3	**3**	1	2	-1	0	6
x_4	1	1	1	0	-1	4
Z_j	0	0	0	0	0	0
$Z_j - C_j$	-2	-1	1	0	0	-

Çözüm 4.12

- *Tablo 4.34*
  Simpleks Birinci Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2^+	x_2^-	x_3	x_4	ÇV
x_3	**3**	1	-1	1	0	6
x_4	1	1	-1	0	1	4
Z_j	0	0	0	0	0	0
Z_j - C_j	-2	-1	1	0	0	-

Tablo 4.35
Simpleks İkinci Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2^+	x_2^-	x_3	x_4	ÇV
x_1	1	1/3	-1/3	1/3	0	2
x_4	0	2/3	-2/3	-1/3	1	2
Z_j	2	2/3	-2/3	2/3	0	4
Z_j - C_j	0	-1/3	1/3	2/3	0	-

Tablo 4.36
Simpleks Üçüncü (En iyi) Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2^+	x_2^-	x_3	x_4	ÇV
x_1	1	0	0	1/2	-1/2	1
x_2^-	0	1	-1	-1/2	3/2	3
Z_j	2	1	-1	1/2	1/2	5
Z_j - C_j	0	0	0	1/2	1/2	-

Tablo 4.36'daki temel uygun çözümde tüm $Z_j - C_j \geq 0$ olduğundan çözüm en iyidir. Bu çözümde, $x_1 = 1$, $x_2^+ = 3$, $x_2^- = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ olarak belirlenmiştir. Amaç fonksiyonunun en büyük değeri $Z_{enb} = 5$'dir. $x_2 = x_2^+ - x_2^-$ olduğu göz önünde bulundurulduğunda $x_2 = 3$ olarak belirlenir. Diğer taraftan en iyi çözümün temelde bulunmayan değişkenlerinden x_2^-'ye ait $Z_j - C_j$ değerinin sıfıra eşit olduğu, dolayısıyla bir alternatif çözüm bulunduğu görülebilir.