

به نام خدا

ساختمان داده

آرش شفيعی



درخت‌ها

- لیست‌های پیوندی برای نمایش داده‌هایی به کار می‌روند که عناصر آن رابطه خطی دارند، اما همیشه روابط بین عناصر خطی نیست.
- داده ساختار درخت یکی از داده ساختارهایی است که برای نمایش و ذخیره‌سازی روابط غیر خطی استفاده می‌شود.

– در داده ساختار درخت هر عنصر می‌تواند صفر یا یک یا چند فرزند داشته باشد. یکی از حالات خاص درخت، درخت دودویی است که در آن هر عنصر حداکثر می‌تواند دو فرزند داشته باشد.

- اگر $x.p = \text{NIL}$ باشد، آنگاه x ریشه درخت است. اگر x فرزند سمت چپ نداشته باشد، آنگاه $x.\text{left} = \text{NIL}$ است و اگر فرزند سمت راست نداشته باشد، $x.\text{right} = \text{NIL}$ است.
- ریشه درخت را با اشاره گر $T.\text{root}$ مشخص می‌کنیم و اگر $T.\text{root} = \text{NIL}$ باشد، آنگاه درخت خالی است.

- می‌توانیم درخت دودویی را تعمیم دهیم به طوری که یک رأس درخت بتواند به هر تعداد دلخواه فرزند داشته باشد. می‌توانیم درختی تعریف کنیم که تعداد فرزند هر رأس در آن حداکثر k باشد. بنابراین ویژگی‌های $left$ و $right$ را با ویژگی‌های $child_1$ ، $child_2$ ، ... و $child_k$ جایگزین می‌کنیم.
- حال فرض کنید تعداد فرزندان نامحدود باشد، بدین معنی که هیچ کران بالایی برای تعداد فرزندان وجود نداشته باشد. در این صورت نمی‌توانیم تعداد معینی ویژگی برای فرزندان یک رأس داشته باشیم. علاوه بر این، اگر k یک عدد بسیار بزرگ باشد ولی در عمل یک عنصر در اغلب مواقع تعداد کمی فرزند داشته باشد، برای ذخیره‌سازی اشاره‌گرها مقدار زیادی از حافظه را هدر داده‌ایم. در چنین مواقعی باید داده ساختار درخت را به گونه‌ای دیگر ذخیره کنیم.

- یک روش برای ذخیره‌سازی درخت وقتی تعداد فرزندان یک رأس نامحدود است بدین صورت است که تنها از دو ویژگی left-child برای ذخیره‌سازی فرزند سمت چپ و از ویژگی right-sibling برای ذخیره‌سازی همزاد سمت راست استفاده کنیم.
- در این روش، هر رأس درخت یک اشاره‌گر p برای اشاره به پدر دارد و T.root به ریشه درخت اشاره می‌کند. علاوه بر این دو، هر رأس x دو ویژگی دارد. ویژگی x.left-child به فرزند سمت چپ رأس x اشاره می‌کند و ویژگی x.right-sibling به همزاد سمت راست رأس x اشاره می‌کند.

- اگر رأس x فرزندی نداشته باشد، آنگاه $x.\text{left-child}=\text{NIL}$ است و اگر رأس x خود راست‌ترین فرزند یک پدر است آنگاه $x.\text{right-sibling}=\text{NIL}$ است.

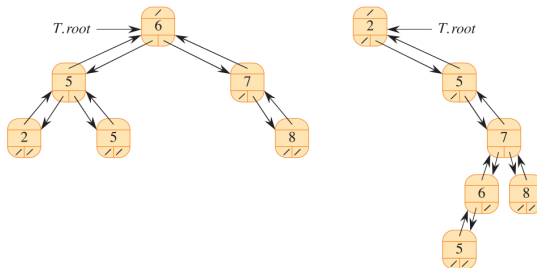
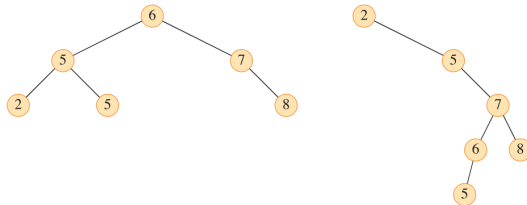
- درخت‌ها را می‌توانیم به اشکال دیگری نمایش دهیم. در آینده خواهیم دید که درخت را می‌توان در آرایه نیز ذخیره کرد و یا در مواردی خاص که درخت تنها از فرزندان به سمت ریشه پیمایش می‌شود، می‌توانیم اشاره‌گری به فرزندان تعریف نکنیم.

درخت جستجوی دودویی

- درخت جستجوی دودویی یک درخت دودویی است که برای جستجوی بهینه در مجموعه‌ای از عناصر استفاده می‌شود.
- عناصر در درخت جستجوی دودویی به گونه‌ای ذخیره می‌شوند که ویژگی درخت جستجوی دودویی همیشه حفظ شود.
- فرض کنید x یک رأس در درخت جستجوی دودویی باشد اگر y یک رأس در زیر درخت سمت چپ x باشد آنگاه $y.key \leq x.key$ و اگر y یک رأس در زیر درخت سمت راست x باشد، آنگاه داریم $y.key \geq x.key$

درخت جستجوی دودویی

- شکل زیر دو درخت جستجوی دودویی را نشان می‌دهد.



- در درخت سمت چپ کلید ریشه درخت ۶ است. کلیدهای ۲ و ۵ و ۵ در زیر درخت سمت چپ قرار دارند و مقدار آنها از ۶ بیشتر نیست و کلیدهای ۷ و ۸ در زیر درخت سمت راست قرار دارند و مقدار آنها از کمتر نیست.

- به دلیل ویژگی خاص درخت جستجوی دودویی، با پیمایش میان ترتیب¹ می‌توان کلیدها را به ترتیب چاپ کرد.
- پیمایش میان ترتیب بدین دلیل اینگونه نامیده می‌شود که مقدار کلید یک رأس را بعد از چاپ کلیدهای رئوس زیر درخت سمت چپ و قبل از چاپ کلیدهای رئوس زیر درخت سمت راست چاپ می‌کند.
- در پیمایش پیش ترتیب² مقدار کلید ریشه قبل از کلیدهای رئوس زیر درخت‌های سمت چپ و راست چاپ می‌شود و در پیمایش پس ترتیب³ مقدار کلید ریشه بعد از کلیدهای رئوس زیر درخت‌های سمت چپ و راست چاپ می‌شود.

¹ inorder tree walk

² preorder tree walk

³ postorder tree walk

- الگوریتم پیمایش میان ترتیب در زیر نشان داده شده است.

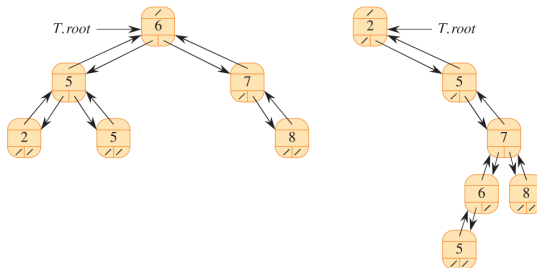
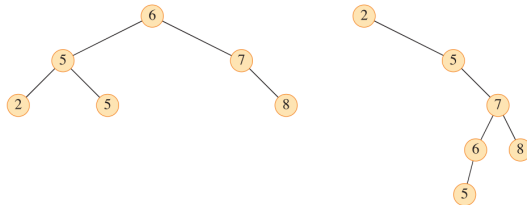
Algorithm Inorder Tree Walk

```
function INORDER-TREE-WALK(x)
1: if  $x \neq \text{NIL}$  then
2:   Inorder-Tree-Walk (x,left)
3:   print x.key
4:   Inorder-Tree-Walk (x,right)
```

- برای چاپ همه عناصر درخت جستجوی دودویی باید تابع $\text{Inorder-Tree-Walk}(T.\text{root})$ را فراخوانی کنیم.
- درستی این الگوریتم مستقیماً با استفاده از استقرا بر روی ویژگی درخت جستجوی دودویی اثبات می‌شود.

درخت جستجوی دودویی

- با پیمایش میان ترتیب در هر دو درخت زیر ترتیب ۸، ۷، ۶، ۵، ۵، ۲ به دست می آید.



- این الگوریتم در زمان $\Theta(n)$ به ازای درخت جستجوی دودویی با n رأس اجرا می‌شود، زیرا به ازای هریک از رئوس گراف این الگوریتم دو فراخوانی برای زیر درخت سمت چپ و زیر درخت سمت راست دارد.

– قضیه : اگر x ریشه یک زیر درخت با n رأس باشد، فراخوانی $\text{Inorder-Tree-Walk}(x)$ در زمان $\Theta(n)$ انجام می‌شود.

درخت جستجوی دودویی

- اثبات : فرض کنید $T(n)$ زمان مورد نیاز برای اجرای الگوریتم بر روی زیر درختی با n رأس باشد.
- همه رئوس زیر درخت در نهایت بررسی می‌شوند پس لزوماً $T(n) = \Omega(n)$. کافی است ثابت کنیم $T(n) = O(n)$.
- الگوریتم به ازای درخت تهی مقدار ثابت اندکی زمان صرف می‌کند پس $T(0) = c$ به طوری که $c > 0$
- به ازای $n > 0$ ، فرض کنید با فراخوانی تابع برای رأس x تعداد k رأس در زیر درخت سمت چپ وجود داشته باشند آنگاه در زیر درخت سمت راست $n - k - 1$ رأس وجود خواهد داشت. اگر اجرای بدنه تابع در زمان d انجام شود به طوری که $d > 0$ آنگاه خواهیم داشت $T(n) \leq T(k) + T(n - k - 1) + d$.
- با حل این رابطه به روش جایگذاری به دست می‌آوریم $T(n) = O(n)$

- جستجو: برای یک رأس با یک کلید دلخواه در درخت جستجوی دودویی، تابع Tree-Search به صورت زیر تعریف می‌شود.

Algorithm Tree Search

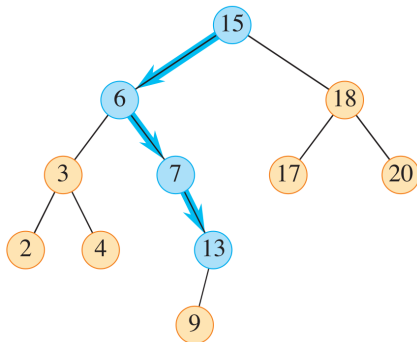
```
function TREE-SEARCH(x,k)
1: if x == NIL or k== x.key then
2:   return x
3: if k < x.key then
4:   return Tree-Search (x.left, k)
5: else return Tree-Search (x.right, k)
```

- به ازای اشاره‌گر x به ریشه یک زیر درخت و مقدار کلید k تابع $\text{Tree-search}(x,k)$ اشاره‌گری به رأسی از درخت برمی‌گرداند که مقدار کلید آن k است در صورتی که چنین رأسی وجود داشته باشد، در غیر اینصورت مقدار NIL را باز می‌گرداند.
- برای جستجو در تمام درخت تابع $\text{Tree-search}(T.\text{root},k)$ فراخوانی می‌شود.

- این تابع جستجو را با ریشه شروع می‌کند. به ازای هر رأس x مقدار کلید k و $x.key$ را مقایسه می‌کند. اگر این دو مقدار برابر باشند، جستجو خاتمه پیدا می‌کند. اگر k کوچک‌تر از $x.key$ باشد، جستجو با فراخوانی تابع برای زیر درخت سمت چپ x ادامه پیدا می‌کند، زیرا به علت ویژگی درخت جستجوی دودویی کلید k نمی‌تواند در زیر درخت سمت راست باشد. همچنین اگر k بزرگ‌تر از $x.key$ باشد، جستجو با فراخوانی تابع برای زیر درخت سمت راست x ادامه می‌یابد.

درخت جستجوی دودویی

- در شکل زیر جستجوی کلید ۱۳ در یک درخت جستجوی دودویی نشان داده شده است.



- رئوسی که در فرایند جستجو بررسی می‌شوند مسیری از ریشه درخت به سمت برگ‌های درخت می‌سازند و بنابراین پیچیدگی زمانی الگوریتم $O(h)$ است. به طوری که h عمق درخت است.

- کمینه و بیشینه : برای یافتن عنصری در درخت جستجوی دودویی که کلید آن کمینه است، باید فرزند چپ هر رأس را با شروع از ریشه بررسی کنیم تا به NIL برسیم. آخرین رأس بررسی شده کلید با کمترین مقدار در درخت است.

- تابع Tree-Minimum اشاره‌گری به عنصر کمینه در زیر درخت با ریشه x باز می‌گرداند.

Algorithm Tree Minimum

```
function TREE-MINIMUM(x)
1: while x.left  $\neq$  NIL do
2:   x = x.left
3: return x
```

- ویژگی درخت جستجوی دودویی تضمین می‌کند که تابع Tree-Minimum درست است. اگر رأس x زیر درخت سمت چپ نداشته باشد، از آنجایی که همه کلیدهای زیر درخت سمت راست x از $x.key$ بزرگ‌تر یا مساوی هستند، بنابراین $x.key$ کوچک‌ترین کلید در درخت است. اگر رأس x زیر درخت سمت چپ داشته باشد، همه کلیدهای زیر درخت سمت چپ از $x.key$ کوچک‌تر هستند، بنابراین زیر درخت سمت چپ باید بررسی شود.

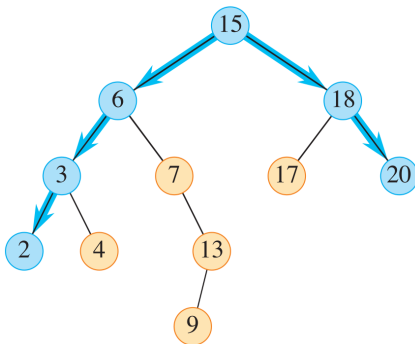
- به طور مشابه تابع Tree-Maximum اشاره‌گری به عنصر بیشینه در زیر درخت ریشه x باز می‌گرداند.

Algorithm Tree Maximum

```
function TREE-MAXIMUM(x)
1: while x.right  $\neq$  NIL do
2:   x = x.right
3: return x
```

درخت جستجوی دودویی

- در شکل زیر مقدار کمینه و بیشینه در درخت پیدا شده‌اند.



- هر دو تابع Tree-Minimum و Tree-Maximum در زمان $O(h)$ اجرا می‌شوند به طوری که h ارتفاع درخت است.

- رئوس بعدی و قبلی : اگر همه کلیدها در درخت جستجوی دودویی یکتا باشند، رأس بعدی x^1 کوچک‌ترین رأسی است که مقدار آن از $x.key$ بزرگ‌تر است.
- رأس بعدی رأس x ، رأسی است که در یک پیمایش میان ترتیب بعد از رأس x پیمایش می‌شود.

¹ successor

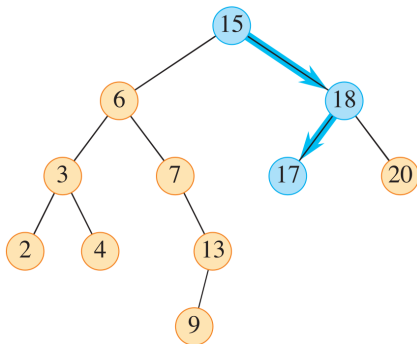
- تابع Tree-Successor رأس بعدی رأس x را در یک درخت جستجوی دودویی باز می‌گرداند اگر چنین رأسی وجود داشته باشد و در غیر این صورت مقدار NIL را باز می‌گرداند.

Algorithm Tree Successor

```
function TREE-SUCCESSOR(x)
1: if x.right  $\neq$  NIL then
2:   return Tree-Minimum (x.right)      ▷ leftmost node in right subtree
3: else ▷ find the lowest ancestor of x whose left child is an ancestor of
    x
4: y = x.p
5: while y  $\neq$  NIL and x == y.right do
6:   x = y
7:   y = y.p
8: return y
```

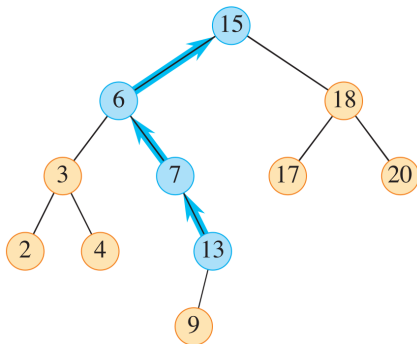
درخت جستجوی دودویی

- اگر زیر درخت سمت راست رأس x تهی نباشد، رأس بعدی x کوچک‌ترین (چپ‌ترین) رأس در زیر درخت سمت راست رأس x است.
- در شکل زیر رأس بعدی ۱۵ کوچک‌ترین مقدار در زیر درخت سمت راست آن یعنی ۱۷ است.



درخت جستجوی دودویی

- اگر زیر درخت سمت راست رأس x تهی باشد و رأس بعدی x رأس y باشد، آنگاه برای یافتن y در درخت با شروع از رأس x بالا می‌رویم تا جایی که یا به ریشه برسیم و یا به رأسی برسیم که فرزند چپ پدر خود باشد.
- در شکل زیر رأس بعدی ۱۳ مقدار ۱۵ است.



- زمان اجرای تابع Tree-Successor در درختی با ارتفاع h برابر است با $O(h)$ زیرا یا باید مسیری از برگ به ریشه طی شود و یا مسیری به سمت برگ‌ها.
- تابع Tree-Predecessor قرینه تابع Tree-Successor است و پیچیدگی آن نیز $O(h)$ است.

- درج : عملیات درج در درخت جستجوی دودویی باعث تغییر ساختار درخت می‌شود. درج یک عنصر باید به گونه‌ای باشد که ویژگی درخت جستجوی دودویی حفظ شود.
- تابع Tree-Insert یک رأس جدید به درخت جستجوی دودویی اضافه می‌کند. این تابع درخت T و رأس z را که مقدار کلید آن در z.key ذخیره شده است دریافت می‌کند. همچنین z.left=NIL و z.right=NIL قرار داده شده است. تابع درخت T را به گونه‌ای تغییر می‌دهد که z در مکان مناسب در درخت قرار بگیرد.

Algorithm Tree Insert

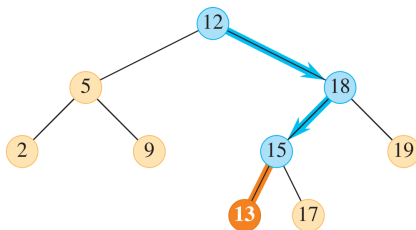
```

-   function TREE-INSERT(T,z)
1:  x = T.root  ▷ node being compared with z
2:  y = NIL    ▷ y will be parent of z
3:  while x ≠ NIL do  ▷ descend until reaching a leaf
4:      y = x
5:      if z.key < x.key then
6:          x = x.left
7:      else x = x.right
8:  z.p = y  ▷ found the location-insert z with y
9:  if y == NIL then
10:     T.root = z    ▷ tree T was empty
11: else if z.key < y.key then
12:     y.left = z
13: else y.right = z

```

درخت جستجوی دودویی

- شکل زیر نشان می‌دهد Tree-Insert چگونه کار می‌کند. این تابع از ریشه آغاز می‌کند و در درخت جستجوی دودویی پایین می‌رود تا مکان مناسب z را پیدا کند.
- در بررسی درخت، تابع اشاره‌گر x و اشاره‌گر y را به عنوان پدر x نگهداری می‌کند. با توجه به مقدار $z.key$ اشاره‌گر x در درخت حرکت می‌کند تا جایی که x برابر با NIL شود. رأس z در جایی مکان به دست آمده توسط اشاره‌گر x قرار می‌گیرد. درواقع جایگاه به دست آمده برای z سمت چپ یا سمت راست پدر z است که اشاره‌گر y به آن اشاره می‌کند.

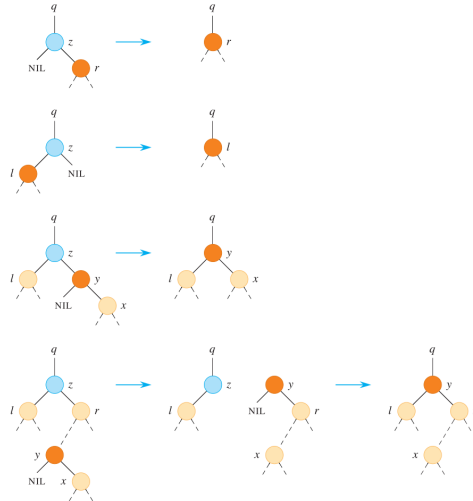


- پیچیدگی زمانی درج در درخت جستجو برای درخت با ارتفاع h برابر است با $O(h)$.

- حذف : برای حذف رأس Z از درخت جستجوی دودویی T سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم.
- اگر Z فرزندی نداشته باشد، با تغییر اشاره‌گری که به Z اشاره می‌کند به NIL به سادگی رأس Z حذف می‌شود.
- اگر Z تنها یک فرزند داشته باشد، آنگاه فرزند Z تبدیل به فرزند پدر Z می‌شود. درواقع پدر Z به جای اشاره به Z به فرزند Z اشاره خواهد کرد.
- اگر Z دو فرزند داشته باشد، ابتدا باید رأس مابعد Z را که در زیر درخت سمت راست Z است پیدا کنیم و توسط اشاره‌گر Y مکان آن را نگهداری کنیم. سپس باید Y را در مکان Z در درخت قرار دهیم. مابقی رئوس در زیر درخت سمت راست Z زیر درخت سمت راست Y می‌شوند و همه زیر درخت سمت چپ Z زیر درخت سمت چپ Y می‌شود. از آنجایی که Y رأس مابعد Z است، نمی‌تواند فرزند سمت چپ داشته باشد و فرزند سمت راست Y در مکان Y قرار خواهد گرفت.

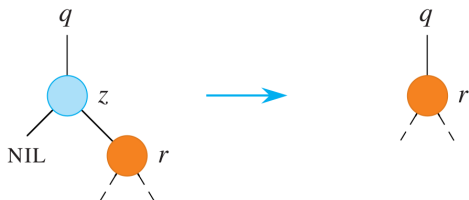
درخت جستجوی دودویی

- در شکل زیر حذف Z نشان داده شده است.



درخت جستجوی دودویی

- اگر z فرزند سمت چپ نداشته باشد، طبق شکل زیر، رأس z با فرزند سمت راست آن (که ممکن است NIL باشد) جایگزین می‌شود.



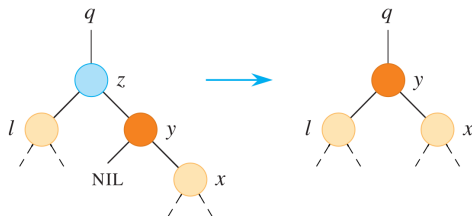
- اگر z تنها فرزند سمت چپ داشته باشد، طبق شکل زیر، رأس z با فرزند سمت چپ آن جایگزین می‌شود.



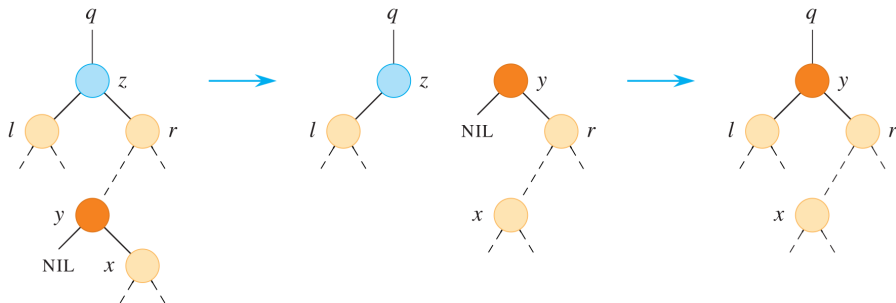
درخت جستجوی دودویی

- اگر z هر دو فرزند چپ و راست را داشته باشد، ابتدا رأس مابعد z به نام y را که در زیر درخت سمت راست z قرار دارد پیدا می‌کنیم. رأس y الزاما زیر درخت سمت چپ ندارد. رأس y را از مکان خود خارج کرده و جایگزین رأس z می‌کنیم. دو حالت برای y وجود دارد.

(۱) اگر y فرزند سمت راست z باشد، رأس z را با y جایگزین می‌کنیم و فرزند سمت راست y را در جای خود باقی می‌گذاریم.



(۲) اگر y در زیر درخت راست رأس z باشد اما فرزند سمت راست z نباشد، ابتدا y را با فرزند سمت راست آن جایگزین کرده، سپس z را با y جایگزین می‌کنیم.



درخت جستجوی دودویی

- در فرایند حذف یک رأس، نیاز داریم زیر درخت‌ها را در درخت جستجو دودویی جابجا کنیم.
- تابع Transplant یک زیر درخت را با یک زیر درخت دیر جایگزین می‌کند. وقتی این تابع زیر درختی با ریشه u را با یک زیر درخت با ریشه v جایگزین می‌کند، پدر رأس u پدر رأس v می‌شود و پدر رأس u در نهایت v را به عنوان فرزند خود خواهد داشت. همچنین v می‌تواند NIL باشد.

Algorithm Transplant

```
function TRANSPLANT(T,u,v)
1: if u.p == NIL then
2:   T.root = v
3: else if u == u.p.left then
4:   u.p.left = v
5: else u.p.right
6: if v  $\neq$  NIL then
7:   v.p = u.p
```

- خطوط ۱ و ۲ حالتی را رسیدگی می‌کنند که u ریشه درخت T باشد. در غیر اینصورت، u فرزند چپ با فرزند راست پدر خود است. اگر u یک فرزند سمت چپ باشد، خطوط ۳ و ۴ مقدار $u.p.left$ با به روزرسانی می‌کند. اگر u یک فرزند سمت راست باشد، خط ۵ مقدار $u.p.right$ را به روزرسانی می‌کند.
- از آنجایی که v می‌تواند تهی باشد، خطوط ۶ و ۷ مقدار $v.p$ را به روزرسانی می‌کند تنها اگر v تهی نباشد.
- تابع Transplant مقادیر $v.left$ و $v.right$ را تغییر نمی‌دهد و این کار را به عهده تابع فراخوانی کننده Transplant می‌گذارد.

- تابع Tree-Delete از تابع Transplant برای حذف z از درخت جستجوی دودویی T استفاده می‌کند.

Algorithm Tree Delete

```

function TREE-DELETE(T,z)
1: if z.left == NIL then
2:   Transplant (T,z,z.right)      ▷ replace z by its right child
3: else if z.right == NIL then
4:   Transplant (T,z,z.left)       ▷ replace z by its left child
5: else y = Tree-Minimum(z.right)  ▷ y is z's successor
6:   if y ≠ z.right then           ▷ is y farther down the tree?
7:     Transplant (T,y,y.right)    ▷ replace y by its right child
8:     y.right = z.right           ▷ z's right child becomes
9:     y.right.p = y               ▷ y's right child
10:  Transplant (T,z,y)            ▷ replace z by its successor y
11:  y.left = z.left               ▷ and give z's left child to y,
12:  y.left.p = y                  ▷ which had no left child

```

- خطوط ۱ و ۲ به حالتی رسیدگی می‌کنند که رأس z فرزند سمت چپ ندارد و خطوط ۳ و ۴ به حالتی رسیدگی می‌کنند که z فرزند چپ دارد ولی فرزند سمت راست ندارد.
- خطوط ۵ و ۱۲ به حالات دیگر که z دو فرزند دارد رسیدگی می‌کنند. خط ۵ رأس y را که رأس مابعد z است پیدا می‌کند. از آنجایی که z یک زیردرخت راست غیر تهی دارد، رأس مابعد آن رأسی در زیر درخت سمت راست آن را کمترین مقدار کلید است، بنابراین از تابع $\text{Tree-Minimum}(z.\text{right})$ استفاده می‌شود. قبلاً ذکر کردیم که الزاماً y فرزند سمت چپ ندارد. تابع حذف، باید y را از مکان فعلی خود خارج و z را با y جایگزین کند.
- اگر y فرزند سمت راست z باشد، آنگاه در خطوط ۱۰ تا ۱۲ رأس z با رأس y جایگزین می‌شود و فرزند سمت چپ y را با فرزند سمت چپ z جایگزین می‌کند. رأس y فرزند راست خود را حفظ می‌کند و بنابراین $y.\text{right}$ تغییر نمی‌کند.

- اگر y فرزند سمت راست z نباشد، آنگاه دو رأس باید جابجا شوند. خطوط ۷ تا ۹ رأس y را با فرزند سمت راست y جایگزین می‌کند و رأس سمت راست z را با رأس y جایگزین می‌کند. در نهایت در خطوط ۱۰ تا ۱۲ رأس z با y جایگزین می‌شود و فرزند سمت چپ y با فرزند سمت چپ z جایگزین می‌شود.

- هر یک از خطوط تابع Tree-Delete در زمان ثابت اجرا می‌شوند به جز فراخوانی تابع Tree-Minimum و بنابراین تابع در زمان $O(h)$ اجرا می‌شود به طوری که h ارتفاع درخت است.

- قبلاً نشان دادیم که درخت جستجوی دودویی به ارتفاع h عملیات جستجو و درج و حذف را در زمان $O(h)$ انجام می‌دهد. بنابراین این عملیات می‌توانند سریع باشند، اگر ارتفاع درخت کم باشد. در بدترین حالت اگر ارتفاع درخت بسیار زیاد باشد زمان اجرای عملیات در درخت و لیست پیوندی یکسان خواهد بود.
- درخت‌های قرمز-سیاه¹ یکی از انواع درخت‌های جستجو هستند که متوازن² اند و عملیات روی مجموعه‌های پویا را در بدترین حالت در زمان $O(\lg n)$ انجام می‌دهند.

¹ red-black trees

² balanced

درخت‌های قرمز-سیاه

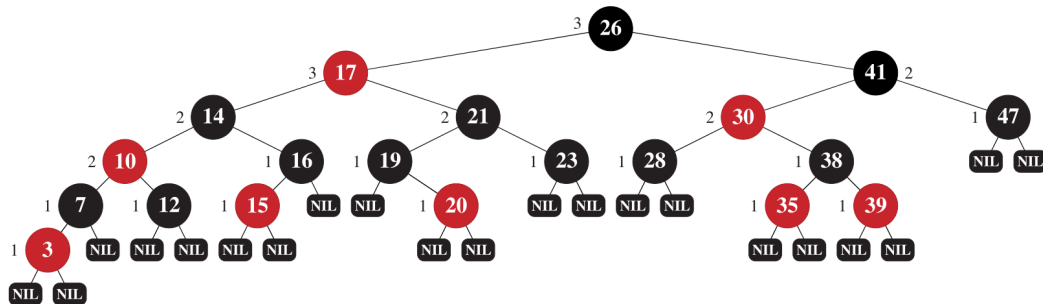
- یک درخت قرمز-سیاه یک درخت جستجوی دودویی است با یک بیت حافظه اضافی به ازای هر رأس. در این بیت رنگ رأس تعیین می‌شود که می‌تواند قرمز یا سیاه باشد.
- با محدود کردن رنگ رئوس بر روی هر مسیر ساده از ریشه به یک برگ، درخت‌های قرمز-سیاه اطمینان حاصل می‌کنند که هیچ مسیری بیشتر از دو برابر مسیر دیگر طول ندارد و بنابراین درخت تقریباً متوازن است.
- ارتفاع یک درخت قرمز-سیاه با n کلید حداکثر $2 \lg(n + 1)$ است که برابر است با $O(\lg n)$.
- هر رأس درخت دارای ویژگی‌های `color`، `key`، `left`، `right` و `p` است. اگر یک رأس دارای پدر یا فرزند چپ یا راست نباشد، اشاره‌گرهای مربوط تهی `NIL` خواهند بود.

- یک درخت قرمز-سیاه یک درخت جستجوی دودویی است که ویژگی‌های زیر را داراست :

۱. هر رأس یا قرمز است و یا سیاه.
۲. ریشه درخت سیاه است.
۳. هر برگ سیاه است.
۴. اگر یک رأس قرمز باشد، هر دو فرزند آن سیاه هستند.
۵. به ازای هر رأس، همه مسیرهای ساده از آن رأس برگ‌های درخت شامل رئوس سیاه برابر هستند.

درخت‌های قرمز-سیاه

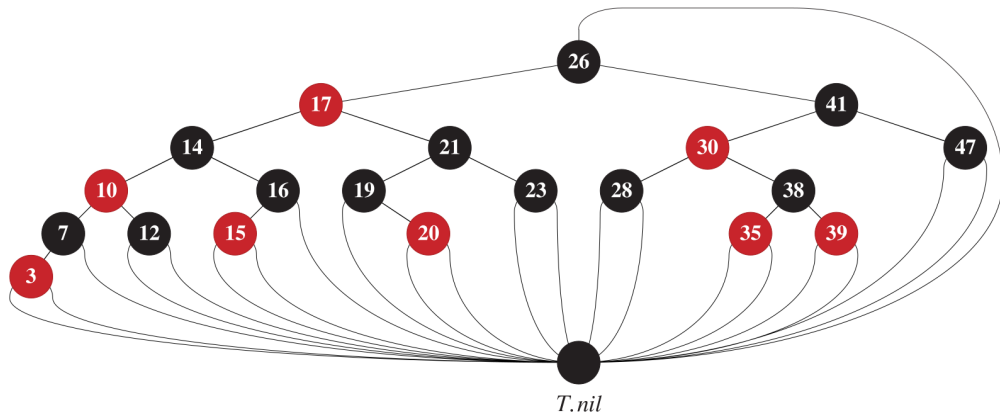
- شکل زیر یک مثال از درخت قرمز-سیاه را نشان می‌دهد.



- برای مدیریت شرایط مرزی در درخت قرمز-سیاه از یک نگهبان¹ برای نمایش NIL استفاده می‌کنیم. برای درخت T، نگهبان T.nil شیئی است که یک رأس معمولی از درخت است، رنگ آن سیاه است، و مقدار p، left، right و key در آن تهی است.

¹ sentinel

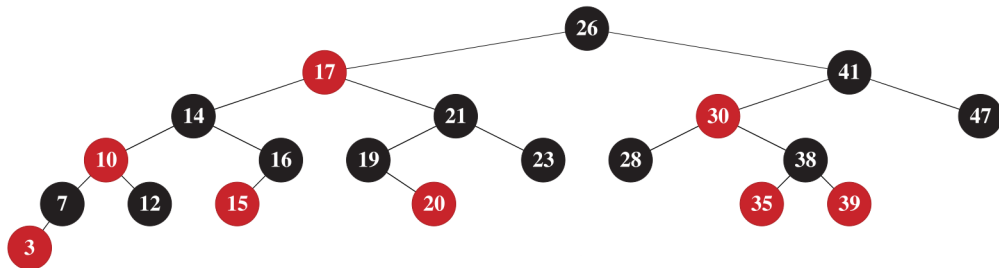
- در شکل زیر، همه اشاره‌گرها به NIL با اشاره‌گری به T.nil جایگزین شده‌اند.



- دلیل این که نگهبان استفاده می‌کنیم این است که نگهبان باعث می‌شود که با یک رأس تهی که فرزند رأس x است مانند یک رأس عادی رفتار کنیم. در حالت عادی به ازای هر رأس برگ باید یک رأس تهی با رنگ سیاه در نظر می‌گیریم که باعث اسراف در حافظه می‌شود.

درخت‌های قرمز-سیاه

- در ادامه این قسمت برگ‌ها را حذف می‌کنیم و درخت قرمز-سیاه را تنها با رئوس میانی نشان می‌دهیم. شکل زیر نمایش درخت قرمز-سیاه بدون برگ‌های تهی است.



- تعداد رئوس سیاه بر روی هر مسیر از رأس x بدون احتساب خود رأس تا یکی از برگ‌ها را ارتفاع سیاه¹ رأس می‌نامیم و با $bh(x)$ نمایش می‌دهیم.
- توجه کنید که همه مسیرهای ساده از یک رأس تا هریک از برگ‌ها تعداد برابر رأس سیاه دارند.
- ارتفاع سیاه یک درخت قرمز-سیاه ارتفاع سیاه ریشه آن است.

¹ black-height

- قضیه : ارتفاع درخت قرمز-سیاه با n رأس حداکثر $2 \lg(n + 1)$ است.
- اثبات : ابتدا نشان می‌دهیم که یک زیردرخت با ریشه x حداقل $2^{bh(x)} - 1$ رأس میانی دارد. این ادعا را توسط استقرا بر روی ارتفاع x اثبات می‌کنیم.
- اگر ارتفاع x برابر با صفر باشد، رأس x یک برگ است (T.nil) و زیردرخت با ریشه x دارای $2^{bh(x)} - 1 = 2^0 - 1 = 0$ رأس میانی است.

- برای اثبات گام استقرا، رأس x با ارتفاع مثبت را در نظر بگیرید. رأس x دارای دو فرزند است که هر دو یا یکی از آنها می‌تواند برگ باشد. اگر یک فرزند سیاه باشد، یک واحد به ارتفاع سیاه x می‌افزاید. اما اگر فرزند قرمز باشد، به ارتفاع سیاه x نمی‌افزاید.
- بنابراین ارتفاع سیاه یک فرزند برابر با $bh(x) - 1$ است اگر سیاه باشد و برابر با $bh(x)$ است اگر قرمز باشد.

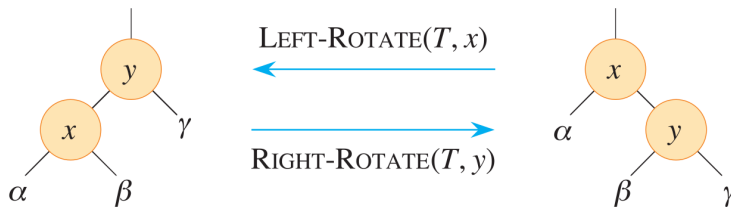
- از آنجایی که ارتفاع یک فرزند x کمتر از ارتفاع x است، می‌توانیم فرض استقرا را اعمال کنیم و نتیجه بگیریم که هر فرزند حداقل $2^{bh(x)} - 1$ رأس میانی دارد. بنابراین زیردرخت با ریشه x شامل حداقل $(2^{bh(x)} - 1) + (2^{bh(x)} - 1) + 1 = 2^{bh(x)} - 1$ رأس میانی است.
- حال فرض کنید h ارتفاع درخت باشد. بنابر ویژگی درخت قرمز-سیاه حداقل نصف رئوس بر روی هر مسیر ساده از ریشه به یک برگ بدون در نظر گرفتن خود ریشه باید سیاه باشند. بنابراین ارتفاع سیاه ریشه باید حداقل $h/2$ باشد و بنابراین $n \geq 2^{h/2} - 1$
- بنابراین به دست می‌آوریم $h \leq 2 \lg(n + 1)$

- از این قضیه نتیجه می‌گیریم عملیات مجموعه پویای `Search` ، `Minimum` ، `Maximum` ، `Successor` و `Predecessor` در زمان $O(\lg n)$ در درخت قرمز-سیاه انجام می‌شوند زیرا هر کدام در زمان $O(h)$ در درخت جستجوی دودویی انجام می‌شوند و درخت قرمز-سیاه با n رأس، یک درخت جستجوی دودویی با ارتفاع $O(\lg n)$ است.
- اگرچه عملیات `Tree-Insert` و `Tree-Delete` در درخت جستجوی دودویی در زمان $O(\lg n)$ قابل انجام‌اند، اما در درخت قرمز-سیاه نمی‌توانیم از آنها استفاده کنیم زیرا ویژگی درخت قرمز-سیاه را حفظ نمی‌کنند. در ادامه نشان خواهیم داد که چگونه می‌توانیم عملیات `Insert` و `Delete` را درخت قرمز-سیاه در زمان $O(\lg n)$ پیاده‌سازی کنیم.

- عملیات درج Tree-Insert و حذف Tree-Delete وقتی بر روی درخت قرمز-سیاه اجرا شوند در زمان $O(\lg n)$ اجرا می‌شوند، اما از آنجایی که این عملیات درخت را تغییر می‌دهند، ممکن است ویژگی درخت قرمز-سیاه را حفظ نکنید. برای حفظ ویژگی درخت قرمز-سیاه لازم است تغییراتی در این عملیات اعمال کنیم.
- حفظ ویژگی درخت قرمز-سیاه توسط دوران¹ انجام می‌شود که یک عملیات محلی در یک درخت جستجو است.

¹ rotation

- شکل زیر دو نوع دوران را نشان می‌دهد: دوران چپ و دوران راست.



- فرض کنید رأس x یک فرزند سمت راست به نام y دارد که برابر با $T.nil$ نیست.
- دوران چپ¹ زیر درخت اصلی با ریشه x را به گونه‌ای تغییر می‌دهد که ریشه زیردرخت برابر با y شود و x فرزند چپ رأس y شود و فرزند چپ قبلی y (که در شکل β است) فرزند راست x شود.
- شبه کد Left-Rotate در زیر فرض می‌کند که $x.right \neq T.nil$ است و پدر ریشه برابر با $T.nil$ است.

¹ left rotation

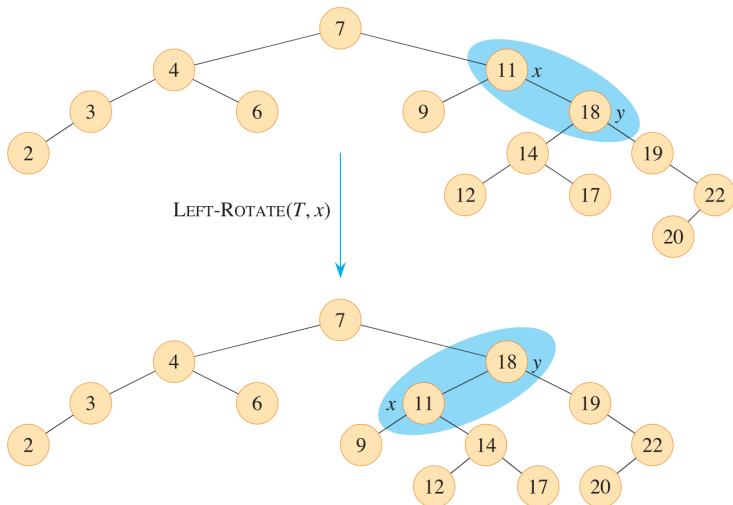
Algorithm Left Rotate

```

-   function LEFT-ROTATE(T,x)
1:  y = x.right
2:  x.right = y.left  ▷ turn y's left subtree into x's right subtree
3:  if y.left ≠ T.nil then  ▷ if y's left subtree is not empty ...
4:    y.left.p = x      ▷ ... then x becomes the parent of the subtree's
    root
5:  y.p = x.p  ▷ x's parent becomes y's parent
6:  if x.p == T.nil then  ▷ if x was the root ...
7:    T.root = y      ▷ ... then y becomes the root
8:  else if x == x.p.left then  ▷ otherwise, if x was a left child
9:    x.p.left = y      ▷ ... then y becomes a left child
10: else x.p.right = y  ▷ otherwise, x a right child, and now y is
11: y.left = x  ▷ make x become y's left child
12: x.p = y

```

- شکل زیر یک مثال از اعمال Left-Rotate را بر روی درخت جستجوی دودویی نشان می‌دهد.



- تابع Right-Rotate متقارن با تابع Left-Rotate است. هر دوی این توابع در زمان $O(1)$ اجرا می‌شود.

درج در درخت قرمز-سیاه

- تابع `RB-Insert` رأس z را در درخت T شبیه درخت جستجوی دودویی درج می‌کند و رنگ رأس z را قرمز می‌کند. سپس از تابع `RB-Insert-Fixup` استفاده می‌کند تا رنگ رئوس را تصحیح کند.

Algorithm RB Insert

```
function RB-INSERT(T,z)
1: x = T.root  ▷ node being compared with z
2: y = T.nil  ▷ y will be parent of z
3: while x ≠ T.nil do  ▷ descend until reaching the sentinel
4:   y = x
5:   if z.key < x.key then
6:     x = x.left
7:   else x = x.right
8: z.p = y  ▷ found the location - insert z with parent y
9: if y == T.nil then
10:  T.root = z  ▷ tree T was empty
11: else if z.key < y.key then
12:  y.left = z
13: else y.right = z
14: z.left = T.nil  ▷ both of z's children are the sentinel
15: z.right = T.nil
16: z.color = RED  ▷ the new node starts out red
17: RB-Insert-Fixup (T,z)  ▷ correct any violations of red-black properties
```

درج در درخت قرمز-سیاه

- تابع RB-Insert چند تفاوت با تابع Tree-Insert دارد :
- مقادیر NIL با T.nil جایگزین شده‌اند. هم‌چنین در خطوط ۱۴ و ۱۵ از تابع RB-Insert مقادیر z.left و z.right برابر با T.nil قرار می‌گیرند در صورت که این مقادیر در تابع درج در درخت برابر با NIL بودند.
- در خط ۱۶ رنگ رأس جدید z برابر با قرمز قرار می‌گیرد.
- از آنجایی که قرمز کردن رأس z ممکن است باعث شود ویژگی درخت قرمز-سیاه نقص شود، در خط ۱۷ تابع RB-Insert-Fixup فراخوانی می‌شود تا ویژگی درخت قرمز-سیاه حفظ شود.

Algorithm RB Insert Fixup

```

function RB-INSERT-FIXUP(T,z)
1: while z.p.color == RED do
2:   if z.p == z.p.p.left then    ▷ is z's parent a left child?
3:     y = z.p.p.right            ▷ y is z's uncle
4:     if y.color == RED then      ▷ are z's parent and uncle both red?
5:       z.p.color = BLACK
6:       y.color = BLACK
7:       z.p.p.color = RED
8:       z = z.p.p
9:   else
10:    if z == z.p.right then
11:      z = z.p
12:      Left-Rotate (T,z)
13:      z.p.color = BLACK
14:      z.p.p.color = RED
15:      Right-Rotate (T, z.p.p)
16:   else    ▷ same as lines ,15-3 but with "right" and "left" exchanged
17:     y = z.p.p.left
18:     if y.color == RED then
19:       z.p.color = BLACK
20:       y.color = BLACK
21:       z.p.p.color = RED
22:       z = z.p.p
23:   else
24:    if z == z.p.left then
25:      z = z.p
26:      Right-Rotate (T,z)
27:      z.p.color = BLACK
28:      z.p.p.color = RED
29:      Left-Rotate (T,z.p.p)
30: T.root.color = BLACK

```

درج در درخت قرمز-سیاه

- برای این که بفهمیم تابع `RB-Insert-Fixup` چگونه عمل می کند، تابع را در سه گام بررسی می کنیم.
- ابتدا تعیین می کنیم با درج کردن رأس z و رنگ کردن آن با قرمز، چگونه ویژگی های درخت قرمز-سیاه نقض می شوند.
- سپس بررسی می کنیم هدف از حلقه خطوط ۱ تا ۲۹ چیست.
- در پایان سه حالت حلقه اصلی تابع را بررسی می کنیم.

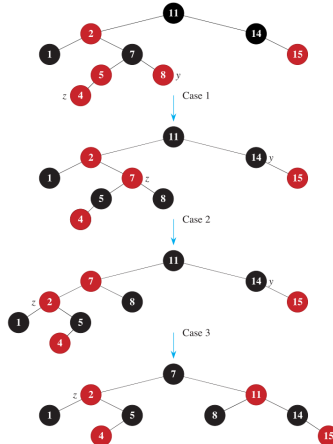
درج در درخت قرمز-سیاه

- در توصیف درخت قرمز-سیاه نیاز داریم درمورد همزاد رأس پدر صحبت کنیم. از واژهٔ عمو¹ برای نام بردن از رأس همزاد پدر استفاده می‌کنیم.

¹ uncle

درج در درخت قرمز-سیاه

- شکل زیر نشان می‌دهد تابع RB-Insert-Fixup چگونه بر روی یک درخت قرمز-سیاه عمل می‌کند بسته به این که رأس پدر و عموی رأس چه رنگی باشند.



درج در درخت قرمز-سیاه

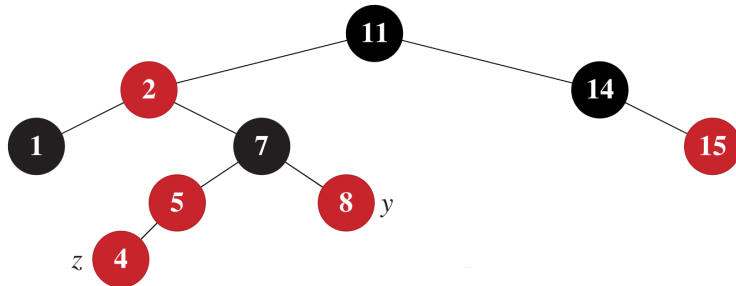
- در اینجا بررسی می‌کنیم چگونه ویژگی‌های درخت قرمز-سیاه ممکن است نقض شوند.
- ویژگی اول درخت که ملزم می‌کند هر رأس قرمز یا سیاه باشد حفظ می‌شود.
- همچنین ویژگی سوم که ملزم می‌کند هر برگ سیاه باشد حفظ می‌شود زیرا هر دو فرزند رأس جدید قرمز اضافه شده T.nil هستند که سیاه است.

درج در درخت قرمز-سیاه

- ویژگی پنجم می‌گوید تعداد رئوس سیاه در هر مسیر ساده از یک رأس برابرنند. این ویژگی نیز حفظ می‌شود، زیرا رأس z که قرمز است جایگزین یک برگ سیاه می‌شود و فرزندان آن هر دو سیاه هستند.
- تنها ویژگی دوم و چهارم ممکن است نقض شوند. طبق ویژگی دوم ریشه درخت باید سیاه باشد و طبق ویژگی چهارم رأس قرمز نمی‌تواند فرزند قرمز داشته باشد. ویژگی دوم ممکن است نقض شود اگر z ریشه باشد و ویژگی چهارم ممکن است نقض شود اگر پدر رأس z قرمز باشد.

درج در درخت قرمز-سیاه

- شکل زیر نقض ویژگی چهارم را بعد از درج رأس z نشان می‌دهد.



درج در درخت قرمز-سیاه

- حلقه خطوط ۱ تا ۲۹ دو احتمال را بررسی می‌کند : خطوط ۳ تا ۱۵ وضعیت را بررسی می‌کند که در آن پدر رأس z یعنی $z.p$ فرزند چپ پدر بزرگ z یعنی $z.p.p$ است و خطوط ۱۷ تا ۲۹ وضعیتی که در آن $z.p$ فرزند راست $z.p.p$ است.

درج در درخت قرمز-سیاه

- نشان می‌دهیم که این حلقه ویژگی‌های زیر را در ابتدای هر تکرار حلقه حفظ می‌کند.

(a) رأس z قرمز است.

(b) اگر $z.p$ ریشه باشد، آنگاه $z.p$ سیاه است.

(c) اگر درخت هرکدام از ویژگی‌های درخت قرمز-سیاه را نقض کند، آنگاه حداکثر یکی از آنها را نقض می‌کند که ممکن است ویژگی دوم یا چهارم باشد، اما نقض هردو در یک زمان اتفاق نمی‌افتد. هنگامی که ویژگی نقض شود رأس قرمز z در ریشه قرار گرفته و هنگامی که ویژگی چهارم نقض شود، رأس z و $z.p$ هر دو قرمز هستند.

- نشان دادن قسمت (a) و (b) بدیهی است و تمرکز بر اثبات قسمت (c) است.

- برای اینکه نشان دهیم یک حلقه یک ویژگی را حفظ می‌کند به روش استقرایی یا به عبارت دیگر برای اثبات ثابت حلقه ¹ باید نشان می‌دهیم که ویژگی در ابتدای تکرار اول حلقه برقرار است و اگر در ابتدای یک تکرار برقرار باشد، در ابتدای تکرار بعدی نیز برقرار است.
- همچنین باید ثابت کنیم که حلقه بی‌پایان می‌رسد.

¹ loop invariant

درج در درخت قرمز-سیاه

- مقدار اولیه حلقه ¹ (فرض استقرا) :

قبل از اینکه RB-Insert فراخوانی شود، هیچ کدام از ویژگی‌های درخت قرمز-سیاه نقض نشده‌اند. تابع RB-Insert یک رأس قرمز z اضافه می‌کند و تابع RB-Insert-Fixup را فراخوانی می‌کند.

¹ initialization

درج در درخت قرمز-سیاه

(a) وقتی تابع $RB\text{-}Insert\text{-}Fixup$ فراخوانی می‌شود، رأس z به همان رنگ قرمز است.

(b) اگر $z.p$ ریشه باشد، آنگاه $z.p$ سیاه است.

(c) اگر درخت ویژگی دوم را نقض کند، ریشه قرمز رنگ باید همان رأس تازه اضافه شده z باشد. از آنجایی که پدر و هردو فرزند رأس z رئوس ننگبان سیاه هستند، درخت ویژگی چهارم را نقض نمی‌کند. اگر درخت ویژگی چهارم را نقض کند، از آنجایی که فرزندان رأس z نگهبان‌های سیاه هستند و درخت قبل از اضافه شدن رأس z هیچ ویژگی دیگری را نقض نمی‌کرد، رأس z و $z.p$ هر دو قرمز هستند و درخت هیچ ویژگی دیگری را نقض نمی‌کند.

درج در درخت قرمز-سیاه

- حفظ ثابت حلقه ¹ (گام استقرا) :

در حلقه شش حالت وجود دارد، که ما در اینجا تنها سه حالت خطوط ۳ تا ۱۵ را بررسی می‌کنیم وقتی پدر رأس z یعنی $z.p$ فرزند چپ پدر بزرگ z یعنی $z.p.p$ است. اثبات حالت‌های خطوط ۱۷ تا ۲۹ متقارن و مشابه است. رأس $z.p.p$ وجود دارد، زیرا اگر $z.p$ ریشه باشد آنگاه $z.p$ سیاه است. از آنجایی که تابع وارد حلقه می‌شود اگر $z.p$ قرمز باشد، پس $z.p$ نمی‌تواند ریشه باشد و بنابراین $z.p.p$ وجود دارد.

- حالت ۱ از حالت‌های ۲ و ۳ به علت رنگ عمومی رأس z یعنی y متفاوت است. در خط ۳ اشاره‌گر y به عمومی رأس z یعنی $z.p.p.right$ اشاره می‌کند و خط ۴ رنگ رأس y را بررسی می‌کند. اگر y قرمز باشد، حالت ۱ اجرا می‌شود. در غیراینصورت حالت ۲ و ۳ در نظر گرفته می‌شوند.

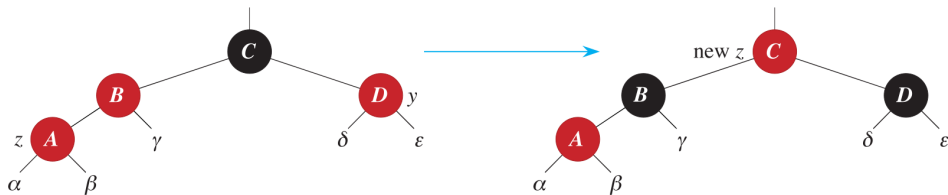
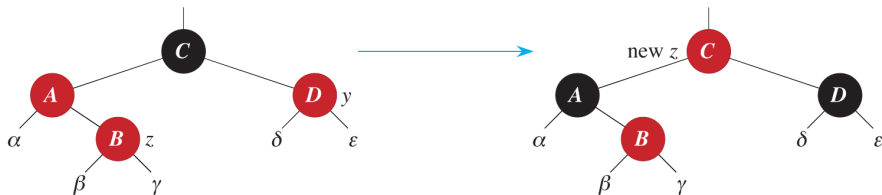
- در هر سه حالت، پدر بزرگ z یعنی $z.p.p$ سیاه است، زیرا $z.p$ قرمز است و ویژگی چهارم درخت نقض می‌شود اگر z و $z.p$ قرمز باشند.

¹ maintenance

درج در درخت قرمز-سیاه

- حالت ۱ : عموی z قرمز است.

- شکل زیر حالت ۱ (خطوط ۵ تا ۸) را نشان می‌دهد وقتی که p و y هر دو قرمز هستند.



درج در درخت قرمز-سیاه

- از آنجایی که پدر بزرگ z یعنی $z.p.p$ سیاه است، سیاهی آن می‌تواند یک سطح به پایین به $z.p$ و y منتقل شود که مشکل z و $z.p$ را که هر دو قرمز هستند حل می‌کند. در این صورت پدر بزرگ z قرمز می‌شود. حلقه با $z.p.p$ به عنوان رأس جدید z تکرار می‌شود، و اشاره گر z دو سطح به بالا حرکت می‌کند.
- حال نشان می‌دهیم که حالت ۱ ثابت حلقه را در ابتدای تکرار بعدی حفظ می‌کند. فرض کنید رأس z در تکرار فعلی را با z نمایش دهیم و $z' = z.p.p$ رأسی باشد که در تکرار بعدی z نامیده می‌شود.
- (a) از آنجایی که در تکرار فعلی $z.p.p$ قرمز است، رأس z' در ابتدای تکرار بعدی قرمز است.
- (b) رأس $z'.p$ در تکرار فعلی $z.p.p.p$ است و رنگ این رأس تغییر نمی‌کند. اگر این رأس ریشه باشد، رنگ آن قبل از شروع تکرار فعلی حلقه سیاه بوده و در ابتدای تکرار بعدی سیاه می‌ماند.

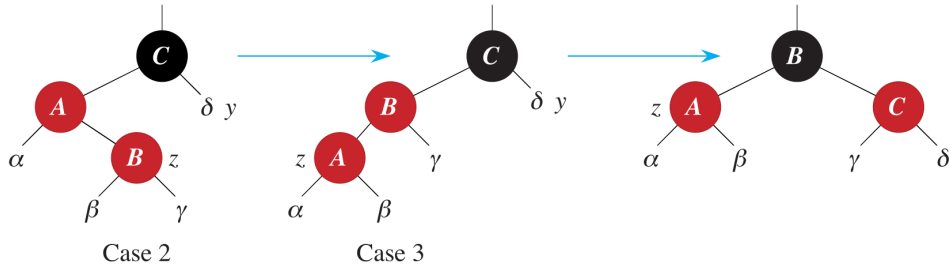
درج در درخت قرمز-سیاه

(c) بررسی کردیم که حالت ۱ ویژگی پنجم را حفظ می‌کند و ویژگی‌های اول و سوم را نقض نمی‌کند. اگر رأس z' در ابتدای تکرار بعدی ریشه باشد، حالت ۱ نقض ویژگی چهارم را رفع می‌کند. چون z' قرمز است و ریشه است، ویژگی دوم تنها ویژگی است که نقض می‌شود و این نقض به علت z' است.

- اگر رأس z' در ابتدای تکرار بعدی ریشه نباشد، حالت ۱ نقضی در ویژگی دوم به وجود نیاورده است. حالت ۱ نقض ویژگی چهارم را که در ابتدای تکرار وجود آمده رفع کرده است. در این صورت z' قرمز شده است و $z'.p$ تغییری نکرده است. اگر $z'.p$ سیاه بوده، هیچ نقضی در ویژگی چهارم به وجود نیامده است. اگر $z'.p$ قرمز بوده است، با قرمز کردن z' ویژگی چهارم بین z' و $z'.p$ نقض شده است.

درج در درخت قرمز-سیاه

- حالت ۲ : رنگ y عموی z سیاه و z یک فرزند راست است.
- حالت ۳ : رنگ y عموی z سیاه و z یک فرزند چپ است.
- در حالت‌های ۲ و ۳، رنگ y عموی z سیاه است. دو حالت را در نظر می‌گیریم. حالتی که $z.p$ قرمز است و فرزند چپ و z فرزند راست یا فرزند چپ $z.p$ است.
- خطوط ۱۱ و ۱۲ حالت ۲ را تشکیل می‌دهند که با حالت ۳ در شکل زیر نشان داده شده است.



درج در درخت قرمز-سیاه

- در حالت ۲، رأس z فرزند راست پدر خود است. یک دوران چپ این حالت را به حالت ۳ تبدیل می‌کند (خطوط ۱۳ تا ۱۵) که در آن رأس z یک فرزند چپ است.
- چون z و $z.p$ هر دو قرمز، دوران نه بر ارتفاع سیاه رئوس تأثیری می‌گذارد و نه بر ویژگی پنجم.
- چنانچه حالت ۳ مستقیماً و یا از طریق حالت ۲ اجرا شود، رأس y عموی z سیاه است، زیرا در غیراینصورت حالت ۱ اجرا شده بود.

درج در درخت قرمز-سیاه

- علاوه بر این رأس $z.p.p$ وجود دارد، زیرا این رأس در هنگامی که خطوط ۲ و ۳ اجرا شده‌اند، وجود داشته است و بعد از انتقال z یک سطح به سمت بالا در خط ۱۱ و سپس یک سطح به سمت پایین در خط ۱۲، رأس $z.p.p$ تغییر نکرده است.
- حالت ۳ برخی رنگ‌ها را تغییر می‌دهد و یک دوران راست انجام می‌دهد، که ویژگی پنجم را حفظ می‌کند. در این لحظه، هیچ دو رأس قرمزی پشت سرهم وجود ندارند. حلقه در تکرار بعدی در خط ۱ به پایان می‌رسد، زیر $z.p$ اکنون سیاه است.

درج در درخت قرمز-سیاه

- حال نشان می‌دهیم که حالت‌های ۲ و ۳ ثابت حلقه را حفظ می‌کنند.

(a) حالت ۲ باعث می‌شود z به $z.p$ اشاره کند که قرمز است. تغییر دیگری بر روی z یا رنگ آن در حالت‌های ۲ و ۳ اعمال نمی‌شود.

(b) حالت ۳ باعث می‌شود $z.p$ تبدیل به سیاه شود، پس اگر $z.p$ در شروع تکرار بعدی ریشه باشد، رنگ آن سیاه است.

(c) همچون حالت ۱، ویژگی‌های اول و سوم و پنجم در حالت‌های ۲ و ۳ حفظ می‌شوند. از آنجایی که رأس z در حالت‌های ۲ و ۳ ریشه نیست، می‌دانیم که ویژگی دوم نقض نمی‌شود. حالت‌های ۲ و ۳ ویژگی دوم را نقض نمی‌کنند، زیرا تنها رأسی که تبدیل به قرمز شده است توسط دوران در حالت ۳ فرزند یک رأس سیاه می‌شود. حالت‌های ۲ و ۳ نقض ویژگی را تصحیح می‌کنند.

درج در درخت قرمز-سیاه

- خاتمه پذیری¹ : برای اینکه نشان دهیم حلقه خاتمه می‌یابد، توجه کنید که اگر تنها حالت ۱ اتفاق بیافتد، اشاره‌گر رأس z در هر تکرار حلقه به سمت ریشه حرکت می‌کند، و در نهایت $z.p$ سیاه است. همچنین اگر z ریشه باشد، رأس $z.p$ نگهبان $T.nil$ است و در نتیجه سیاه است.
- اگر حالت‌های ۲ یا ۳ اتفاق بیافتند، آنگاه قبلاً دیدیم که حلقه خاتمه می‌یابد. از آنجایی که حلقه خاتمه می‌یابد چون $z.p$ سیاه است، درخت ویژگی چهارم را در پایان حلقه نقض نمی‌کند. تنها ویژگی که ممکن است نقض شود، ویژگی دوم است. خط ۳۰ با تغییر رنگ ریشه به سیاه این ویژگی را بازیابی می‌کند، بنابراین وقتی $RB-Insert-Fixup$ به پایان می‌رسد، همه ویژگی‌های درخت قرمز-سیاه برقرار هستند.

¹ termination

درج در درخت قرمز-سیاه

- تحلیل زمانی : چون ارتفاع یک درخت قرمز-سیاه با n رأس برابر با $O(\lg n)$ است، خطوط ۱ تا ۱۶ از تابع RB-Insert در زمان $O(\lg n)$ اجرا می‌شوند.
- در RB-Insert-Fixup حلقه تکرار می‌شود تنها اگر حالت ۱ اتفاق بیافتد، و در این صورت اشاره‌گر z دو سطح به سمت بالا حرکت می‌کند.
- بنابراین کل تعداد تکرار حلقه $O(\lg n)$ است و RB-Insert در کل در زمان $O(\lg n)$ اجرا می‌شود.
- علاوه بر این هیچ‌گاه بیشتر از دو دوران انجام نمی‌شود، زیرا در صورتی که حالت ۲ یا ۳ اجرا شوند، حلقه خاتمه می‌یابد.

حذف در درخت قرمز-سیاه

- همانند عملیات پایه‌ای دیگر در درخت قرمز-سیاه با n رأس، حذف یک رأس نیز در زمان $O(\lg n)$ انجام می‌شود.
- تابع حذف یک رأس از درخت قرمز-سیاه بر پایه تابع Tree-Delete است. ابتدا باید تابع Transplant را به گونه‌ای تغییر دهیم که برای درخت قرمز-سیاه قابل استفاده باشد.
- تابع RB-Transplant یک زیردرخت با ریشه u را با یک زیردرخت با ریشه v جایگزین می‌کند. این تابع دو تفاوت با تابع Transplant دارد. اول اینکه در خط ۱ به جای NIL از T.nil استفاده می‌کنیم و دوم اینکه انتساب $v.p = u.p$ در خط ۶ بدون شرط انجام می‌شود، بدین معنی که تابع می‌تواند مقداری را به $v.p$ انتساب دهد حتی اگر یک رأس نگهبان باشد.

- تابع RB-Transplant در زیر نشان داده شده است.

Algorithm RB Transplant

```
function RB-TRANSPLANT(T,u,v)
1: if u.p == T.nil then
2:   T.root = v
3: else if u == u.p.left then
4:   u.p.left = v
5: else u.p.right = v
6: v.p = u.p
```

حذف در درخت قرمز-سیاه

- تابع RB-Delete همانند تابع Tree-Delete است با این تفاوت که شرایطی که در آن ویژگی‌های درخت قرمز-سیاه نقض می‌شوند باید مدیریت شود.

Algorithm RB Delete

```

function RB-DELETE(T,z)
1: y = z
2: y-original-color = y.color
3: if z.left == T.nil then
4:   x = z.right
5:   RB-Transplant (T,z,z.right)    ▷ replace z by its right child
6: else if z.right == T.nil then
7:   x = z.left
8:   RB-Transplant (T,z,z.left)     ▷ replace z by its left child
9: else y = Tree-Minimum (z.right)  ▷ y is z's successor
10:  y-original-color = y.color
11:  x = y.right
12:  if y ≠ z.right then             ▷ is y farther down the tree?
13:    RB-Transplant (T,y,y.right)   ▷ replace y by its right child
14:    y.right = z.right             ▷ z's right child becomes
15:    y.right.p = y                ▷ y's right child
16:  else x.p = y                   ▷ in case x is T.nil
17:  RB-Transplant(T,z,y)           ▷ replace z by its successor y
18:  y.left = z.left                ▷ and give z's left child to y,
19:  y.left.p = y                   ▷ which had no left child
20:  y.color = z.color
21: if y-original-color == BLACK then ▷ if any red-black violations
    occurred,
22:  RB-Delete-Fixup (T,x)          ▷ correct them

```

حذف در درخت قرمز-سیاه

- وقتی رأس z که در حال حذف شدن است حداکثر یک فرزند دارد، آنگاه y همان z خواهد بود. وقتی z دو فرزند دارد، y رأس بعدی z خواهد بود که فرزند چپ ندارد و به مکان z در درخت منتقل می شود. علاوه بر این y رنگ z را به خود می گیرد.
- در هر صورت، رأس y حداکثر یک فرزند دارد : رأس x که جای y را در درخت می گیرد. رأس x همان $T.nil$ خواهد بود اگر y فرزندی نداشته باشد.
- از آنجایی که رأس y یا حذف می شود و یا در درخت جابجا می شود، تابع باید رنگ اصلی y را نگه دارد. اگر ویژگی های درخت قرمز-سیاه بعد از حذف z نقض شوند، تابع $RB-Delete$ تابع اضافی $RB-Delete-Fixup$ را فراخوانی می کند که رنگ ها را تغییر می دهد و دوران هایی را برای برقراری مجدد ویژگی های درخت قرمز-سیاه انجام می دهد.

حذف در درخت قرمز-سیاه

- اگرچه RB-Delete تقریباً دو برابر Tree-Delete است، ساختار هر دو تابع یکسان است. چند تفاوت این دو تابع به شرح زیراند.
- خط وقتی رأس z حداکثر یک فرزند دارد و خط ۹ وقتی z دو فرزند دارد رأس y را مقداردهی می‌کند.
- چون رنگ رأس y می‌تواند تغییر کند، متغیر y -original-color رنگ اصلی y را قبل از تغییر ذخیره می‌کند. خط ۲ و ۱۰ این متغیر را بعد از انتساب به y مقداردهی می‌کنند. وقتی رأس z دو فرزند دارد، رئوس y و z متمایز هستند. در اینصورت خط ۱۷ رأس y را به مکان اصلی z منتقل می‌کند و خط ۲۰ به y همان رنگ z را می‌دهد. وقتی رنگ اصلی y سیاه است، حذف یا انتقال آن باعث نقض ویژگی‌های درخت قرمز-سیاه می‌شود که توسط RB-Delete-Fixup ترمیم می‌شود.
- همانطور که توضیح داده شد، تابع رأس x را به مکان اصلی y انتقال می‌دهد. انتساب در خطوط ۴، ۷ و ۱۱ رأس x رأس x یا به تنها فرزند y اشاره می‌کند و یا به $T.nil$ در صورتی که y فرزندی نداشته باشد.

حذف در درخت قرمز-سیاه

- از آنجایی که رأس x به مکان اصلی y منتقل می‌شود، مقدار $x.p$ باید به درستی مقداردهی شود. اگر رأس z دو فرزند داشته باشد و y فرزند راست z باشد، آنگاه y به مکان z منتقل می‌شود و x فرزند y باقی می‌ماند. خط ۱۲ این حالت را بررسی می‌کند. اگرچه ممکن است به نظر آید مقداردهی $x.p$ در خط ۱۶ با y غیرضروری است چون x فرزند y است، اما RB-Delete-Fixup فرض می‌کند $x.p$ همان y است اگرچه x برابر با $T.nil$ باشد. بنابراین، وقتی z دو فرزند دارد و y فرزند راست z است، اجرای خط ۱۶ ضروری است اگر فرزند راست y رأس $T.nil$ است، در غیراینصورت چیزی تغییر نمی‌کند.
- در غیر اینصورت رأس z یا همان رأس y است و یا رأس قبلی پدر اصلی y است. در این حالت‌ها، فراخوانی RB-Transplant در خط ۵، ۸ و ۱۳ مقداردهی $x.p$ را در خط ۶ تابع RB-Transplant به درستی انجام می‌دهد. در این فراخوانی‌های تابع RB-Transplant، پارامتر سوم همان رأس x است.

حذف در درخت قرمز-سیاه

- در نهایت، اگر رأس y سیاه باشد، یک یا چند نقض در ویژگی‌های درخت قرمز-سیاه ممکن است به وجود آید. فراخوانی RB-Delete-Fixup در خط ۲۲ ویژگی‌ها را ترمیم می‌کند. اگر y قرمز باشد، ویژگی‌های قرمز-سیاه همچنان برقرار می‌مانند وقتی y حذف یا منتقل می‌شود به دلایل زیر :

حذف در درخت قرمز-سیاه

۱. هیچ ارتفاع سیاهی در درخت تغییر نمی‌کند.

۲. هیچ دو رأس قرمزی همسایه نیستند. اگر z حداکثر یک فرزند داشته باشد، آنگاه y و z یک رأس واحد هستند. این رأس حذف می‌شود و فرزند آن جایگزین آن می‌شود. اگر رأس حذف شده قرمز باشد، نه پدر و نه فرزندان آن می‌توانند قرمز باشند، بنابراین انتقال یک فرزند به مکان آن نمی‌تواند باعث شود دو رأس قرمز همسایه شوند. از طرف دیگر اگر z دو فرزند داشته باشد، y جای z را در درخت می‌گیرد و رنگ z را نیز به خود می‌گیرد، بنابراین دو رأس مجاور قرمز در مکان جدید y نمی‌تواند وجود داشته باشد. علاوه بر این، اگر y فرزند راست z نباشد، آنگاه x فرزند راست اصلی y جایگزین y می‌شود. از آنجایی که y قرمز است، x باید سیاه باشد و بنابراین جایگزین کردن y با x نمی‌تواند باعث شود دو رأس قرمز مجاور شوند.

۳. چون y نمی‌تواند ریشه باشد وقتی قرمز است، ریشه سیاه می‌ماند.

حذف در درخت قرمز-سیاه

- اگر رأس y سیاه باشد، سه مشکل ممکن است رخ دهد که با فراخوانی تابع RB-Delete-Fixup ترمیم می‌شوند.
- اول اینکه، اگر y ریشه باشد و یک رأس قرمز ریشه جدید شود، ویژگی چهارم درخت قرمز سیاه نقض می‌شود.
- دوم اینکه اگر x و پدر جدید آن هردو قرمز باشند، ویژگی چهارم نقض می‌شود.
- سوم اینکه، انتقال y در درخت باعث می‌شود هر مسیر ساده که قبلاً شامل y می‌شد، یک رأس سیاه کمتر داشته باشد. بنابراین ویژگی پنجم توسط هریک از اجداد y نقض می‌شود.

- می‌توانیم نقض ویژگی پنجم را بدین گونه رفع کنیم که بگوییم هرگاه رأس سیاه y حذف یا منتقل می‌شود، رنگ سیاه آن به رأس x که به مکان اصلی y آمده است منتقل شود و در نتیجه x یک رأس سیاه اضافی¹ پیدا می‌کند. این بدین معنی است که اگر ۱ واحد به تعداد رئوس سیاه بر روی هر مسیر ساده شامل x اضافه کنیم ویژگی پنجم برقرار می‌ماند. اما اکنون یک مشکل دیگر به وجود می‌آید و آن این است که رأس x نه سیاه است و نه قرمز که ویژگی اول را نقض می‌کند. رنگ رأس x یا سیاه دوگانه² است و یا قرمز-سیاه³ و در این دو حالت یا ۲ واحد و یا یک واحد به تعداد رئوس سیاه در هر مسیر ساده شامل x می‌افزاید. البته رنگ x همچنان یا قرمز است (وقتی رنگ آن قرمز-سیاه است) و یا سیاه (وقتی رنگ آن سیاه دوگانه است). به عبارت دیگر سیاه اضافی در این رأس در اشاره‌گر به x تأثیر می‌گذارد و نه در رنگ آن.

¹ extra black

²doubly black

³red-and-black

حذف در درخت قرمز-سیاه I

- تابع RB-Delete-Fixup ویژگی‌های درخت را ترمیم می‌کند.

```
function RB-DELETE-FIXUP(T,x)
1: while x  $\neq$  T.root and x.color == BLACK do
2:   if x == x.p.left then      ▷ is x a left child
3:     w = x.p.right            ▷ w is x's sibling
4:     if w.color == RED then
5:       w.color = BLACK
6:       x.p.color = RED
7:       Left-Rotate (T,x.p)
8:       w = x.p.right
9:   if w.left.color == BLACK and w.right.color == BLACK then
10:    w.color = RED
11:    x = x.p
12:   else
13:    if w.right.color == BLACK then
```

حذف در درخت قرمز-سیاه II

```
14:         w.left.color = BLACK
15:         w.color = RED
16:         Right-Rotate (T,w)
17:         w = x.p.right
18:         w.color = x.p.color
19:         x.p.color = BLACK
20:         w.right.color = BLACK
21:         Left-Rotate (T,x,p)
22:         x = T.root
23:     else     ▷ same as lines ,22-3 but with "right" and "left"
               exchanged
24:         w = x.p.left
25:         if w.color == RED then
26:             w.color == BLACK
27:             x.p.color = RED
28:             Right-Rotate (T,x.p)
```

حذف در درخت قرمز-سیاه III

```
29:         w = w.p.left
30:     if w.right.color == BLACK and w.left.color == BLACK then
31:         w.color = RED
32:         x = x.p
33:     else
34:         if w.left.color == BLACK then
35:             w.right.color = BLACK
36:             w.color = RED
37:             Left-Rotate (T,w)
38:             w = x.p.left
39:             w.color = x.p.color
40:             x.p.color = BLACK
41:             w.left.color = BLACK
42:             Right-Rotate (T,x.p)
43:             x = T.root
44: x.color = BLACK
```


حذف در درخت قرمز-سیاه

- در اینجا بر روی ویژگی اول تمرکز می‌کنیم. هدف حلقه خطوط ۱ تا ۴۳ این است که رنگ سیاه اضافی را در درخت به بالا منتقل کند تا اینکه :

۱. رأس x به یک رأس قرمز-سیاه اشاره کند که در هر صورت خط ۴۴ رنگ x را تبدیل به سیاه می‌کند.

۲. رأس x به ریشه اشاره کند که در این صورت سیاه دوگانه از بین می‌رود.

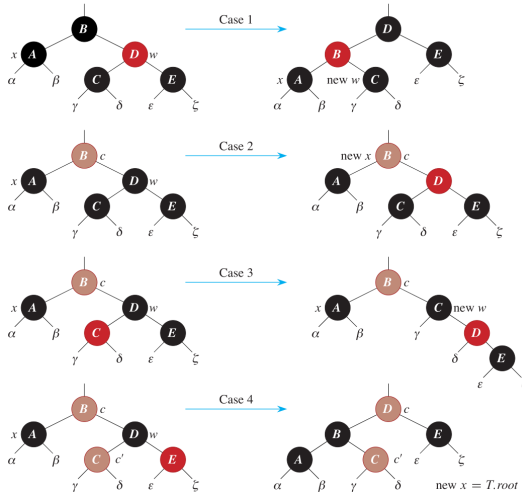
۳. پس از انجام دوران‌ها و تغییر رنگ‌ها حلقه خاتمه پیدا کند.

حذف در درخت قرمز-سیاه

- تابع RB-Delete-Fixup دو موقعیت متقارن را مدیریت می‌کند: خطوط ۳ تا ۲۲ برای وقتی که رأس x یک فرزند چپ است و خطوط ۲۴ تا ۴۳ برای وقتی که رأس x یک فرزند راست است. اثبات بر روی چهار حالتی متمرکز است که در خطوط ۳ تا ۲۲ نمایش داده شده‌اند.
- در حلقه تکرار، رأس x همیشه به یک رأس غیر ریشه سیاه دوگانه اشاره می‌کند. خط ۲ تعیین می‌کند آیا x فرزند چپ یا راست $x.p$ است بنابراین یا خطوط ۳ تا ۲۲ اجرا می‌شوند و یا ۲۴ تا ۴۳. همزاد x همیشه با اشاره‌گر w نشان داده می‌شود. از آنجایی که رأس x سیاه دوگانه است، رأس w کمتر از تعداد رئوس سیاه بر روی مسیر ساده از $x.p$ به x خواهد بود.
- توجه کنید که RB-Delete همیشه $x.p$ قبل از فراخوانی RB-Delete-Fixup مقداردهی کند که این مقداردهی یا در فراخوانی RB-Transplant در خط ۱۳ است یا در انتساب خط ۱۶، حتی وقتی که x برابر با $T.nil$ است.

حذف در درخت قرمز-سیاه

- شکل زیر چهار حالت در کد را وقتی x فرزند چپ است نشان می‌دهد. این حالت‌ها کاملاً متمایز نیستند.

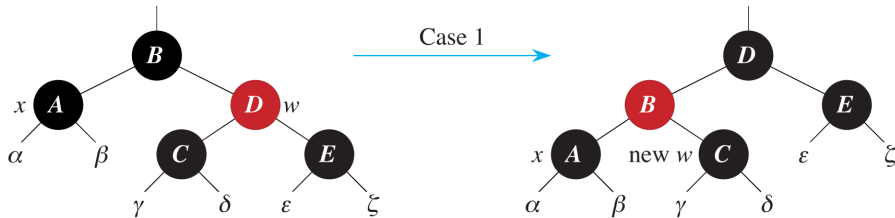


حذف در درخت قرمز-سیاه

- قبل از اینکه به هریک از این چهار حالت با جزئیات بپردازیم، به صورت کلی بررسی می‌کنیم چگونه می‌توانیم بررسی کنیم که تبدیل‌ها در هریک از این حالات ویژگی پنجم را برقرار می‌کنند.
- ایده اصلی این است که در هر حالت، تبدیل‌های انجام شده تعداد رئوس سیاه (شامل رأس سیاه دوگانه x) از ریشه زیردرخت نشان داده شده به ریشه هریک از زیردرخت‌های α و β و γ را حفظ می‌کند.

حذف درخت قرمز-سیاه

- برای مثال در شکل زیر که حالت ۱ را نشان می‌دهد، تعداد رئوس سیاه از ریشه به ریشه یکی از زیردرخت‌های α یا β برابر با ۳ است، هم قبل و هم بعد از تبدیل.

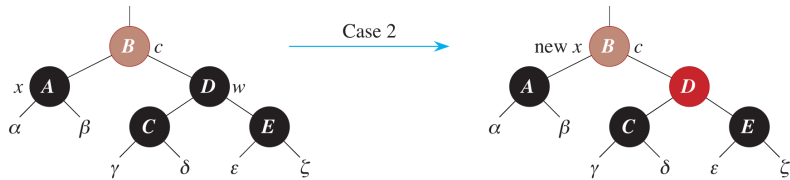


حذف در درخت قرمز-سیاه

– همچنین تعداد رئوس سیاه از ریشه به ریشه هر یک از γ ، δ ، ϵ و ζ برابر با ۲ است، هم قبل و هم بعد از تبدیل.

حذف در درخت قرمز-سیاه

- در شکل زیر، برای شمارش نیاز داریم مقدار c از ویژگی $color$ را در ریشه زیردرخت نشان داده شده در نظر بگیریم.

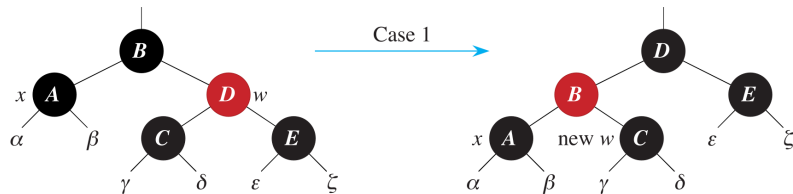


- اگر $count(RED) = 0$ و $count(BLACK) = 1$ باشد، آنگاه تعداد رئوس سیاه از ریشه به α برابر با $count(c) + 2$ است، هم قبل و هم بعد از تبدیل. در این حالت، بعد از تبدیل رأس جدید x ویژگی رنگ c را دارد، اما این رأس در واقع یا قرمز-سیاه است اگر $c = RED$ باشد و سیاه دوگانه است اگر $c = BLACK$ باشد.
- بقیه حالات را به طور مشابه می‌توانیم بررسی کنیم.

حذف در درخت قرمز-سیاه

- حالت ۱ : رأس w همزاد x قرمز است.

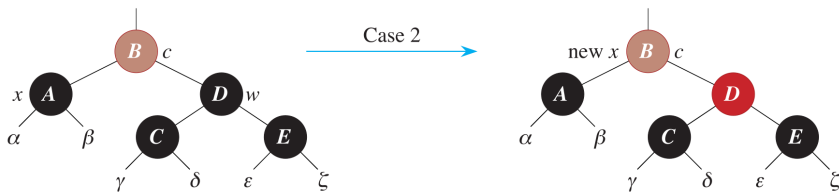
- حالت ۱ در خطوط ۵ تا ۸ بررسی شده و در شکل زیر نشان داده شده است.



- این حالت وقتی رخ می‌دهد که رأس w همزاد x قرمز باشد. چون w قرمز است باید فرزندان سیاه داشته باشد. این حالت رنگ w و $x.p$ را تغییر می‌دهد و سپس یک دوران چپ بر روی $x.p$ بدون هیچ‌یک از ویژگی‌های درخت قرمز-سیاه انجام می‌دهد. همزاد جدید رأس x که یکی از فرزندان w قبل از دوران است اکنون سیاه است و بنابراین حالت ۱ تبدیل به یکی از حالت‌های ۲ و ۳ و ۴ می‌شود. حالت ۲ و ۳ و ۴ رخ می‌دهند وقتی رأس w سیاه است.

حذف درخت قرمز-سیاه

- حالت ۲ : رأس w همزاد x سیاه است و هر دو فرزند w سیاه هستند.
- حالت ۲ در خطوط ۱۰ و ۱۱ بررسی شده و در شکل زیر نشان داده شده است.



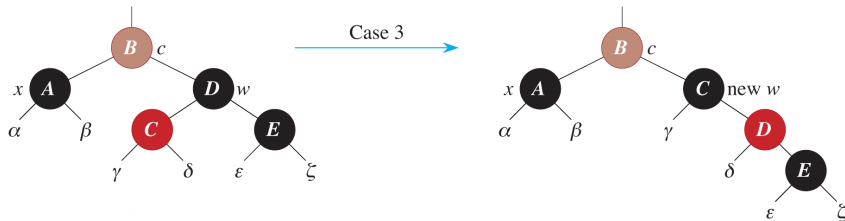
- در این حالت هر دو فرزندان w سیاه هستند.

حذف در درخت قرمز-سیاه

- از آنجایی که w سیاه است، در این حالت یک سیاه از هر دوی x و w حذف می‌شود، و بنابراین x یک رأس سیاه و w یک رأس قرمز خواهند شد. برای جبران از دست رفتن یک سیاه از x و w پدر x یعنی $x.p$ یک سیاه اضافی می‌گیرد. خط ۱۱ این کار را با انتقال x یک سطح به بالا انجام می‌دهد، و بنابراین حلقه با جایگزینی x با $x.p$ تکرار می‌شود.
- اگر حالت ۲ از طریق حالت ۱ اجرا شود، رأس جدید x قرمز-سیاه است، زیرا $x.p$ در اصل قرمز بود. بنابراین مقدار c از ویژگی `color` از رأس x برابر با `RED` خواهد بود و حلقه با بررسی شرایط حلقه پایان می‌یابد. خط ۴۴ رأس جدید x را تبدیل به سیاه می‌کند.

حذف درخت قرمز-سیاه

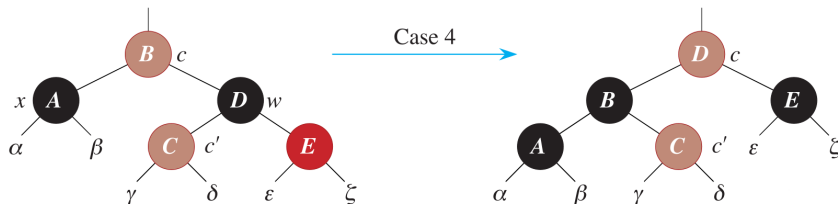
- حالت ۳ : رأس w همزاد x سیاه است، فرزند چپ w قرمز است و فرزند راست w سیاه است.
- حالت ۳ در خطوط ۱۴ تا ۱۷ بررسی شده و در شکل زیر نمایش داده شده است.



- این حالت رنگ‌های w و فرزند چپ آن $w.left$ را تغییر می‌دهد و سپس یک دوران راست بر روی w بدون نقض ویژگی‌های درخت قرمز-سیاه اعمال می‌کند. رأس w همزاد جدید x اکنون یک رأس سیاه است که یک فرزند راست قرمز دارد و بنابراین حالت ۳ وارد حالت ۴ می‌شود.

حذف درخت قرمز-سیاه

- حالت ۴ : رأس w همزاد x سیاه است و فرزند راست w قرمز است.
- حالت ۴ در خطوط ۱۸ تا ۲۲ بررسی شده و در شکل زیر نمایش داده شده است.



- تعدادی تغییر رنگ و یک دوران چپ بر روی $x.p$ باعث می شود سیاه اضافی x حذف شود و تبدیل به یک سیاه معمولی شود بدون اینکه هیچ یک از ویژگی های درخت قرمز-سیاه نقض شوند. خط ۲۲ رأس x را ریشه قرار می دهد و حلقه پایان می یابد وقتی شرایط حلقه در تکرار بعد بررسی می شوند.

حذف در درخت قرمز-سیاه

- تحلیل : برای تحلیل زمان اجرای RB-Delete ، از آنجایی که ارتفاع یک درخت قرمز سیاه با n رأس برابر با $O(\lg n)$ است، هزینه کلی تابع بدون فراخوانی RB-Delete-Fixup برابر با $O(\lg n)$ است.
- در تابع RB-Delete-Fixup هر یک از حالت‌های ۱ و ۳ و ۴ بعد از اجرای تعداد ثابتی از تغییر رنگ‌ها و حداکثر سه دوران باعث خاتمه می‌شوند.
- حالت ۲ تنها حالتی است که در آن حلقه می‌تواند تکرار شود، و سپس اشاره‌گر x در درخت به تعداد حداکثر $O(\lg n)$ بار به سمت بالا منتقل می‌شود و هیچ دورانی انجام نمی‌شود.
- بنابراین تابع RB-Delete-Fixup در زمان $O(\lg n)$ اجرا می‌شود و حداکثر سه دوران انجام می‌دهد و زمان کل اجرا برای RB-Delete بنابراین برابر با $O(\lg n)$ است.