به نام خدا

طراحی الگوریتم‌ها

آرش شفیعی

برنامه‌ریزی پویا

طراحی الگوریتم با استقرا

- استقرای ریاضی [1] روشی است برای اثبات درستی گزاره $P(n)$ برای همه اعداد طبیعی n . به عبارت دیگر هنگامی که می‌خواهیم درستی گزاره‌های $P(1)$ ، $P(2)$ ، $\cdots$ ، $P(n)$ را ثابت کنیم، می‌توانیم از استقرا استفاده کنیم.
- به زبان استعاری با استفاده از استقرا ثابت می‌کنیم که می‌توانیم هر نردبانی را با طول دلخواه یا بینهایت بالا برویم اگر ثابت کنیم که می‌توانیم برروی پله اول برویم (پایهٔ استقرا [2]) و همچنین ثابت کنیم اگر برروی پلهٔ n بودیم می‌توانیم برروی پله $n+1$ نیز گام بگذاریم (گام استقرا [3]).
- بنابراین در روش استقرایی برای اثبات درستی $P(n)$ باید ثابت کنیم $P(1)$ درست است (پایهٔ استقرا) و همچنین اگر $P(n)$ درست باشد، آنگاه $P(n+1)$ نیز درست است (گام استقرا).

[1] induction
[2] base case
[3] induction step

طراحی الگوریتم با استقرا

- استقرای ریاضی براساس اصل دومینو [1] است. فرض کنید تعداد زیادی دومینو به صورت ایستاده در کنار یکدیگر قرار گرفته‌اند و می‌خواهیم همهٔ دومینوهای ایستاده را بیاندازیم. برای اینکه همهٔ دومینوها بر زمین بیفتند کافی است دومینوها به گونه‌ای قرار داده شوند که با افتادن اولین دومینو، دومین دومینو برزمین بیافتد و با افتادن دومی، سومی و به همین ترتیب با افتادن n امین دومینو، $n + 1$ امین دومینو بر زمین بیافتد. سپس کافی است به اولین دومینو ضربه‌ای بزنیم تا همه دومینوهای ایستاده بیافتند و نیازی به انداختن تک‌تک آنها نداریم.

[1] domino principle

طراحی الگوریتم با استقرا

- برای مثال با استفاده از استقرا می‌توان اثبات کرد:

$$P(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- باید اثبات کنیم $P(1) = \frac{1(2)}{2}$ درست است (پایهٔ استقرا) و همچنین اگر $P(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ باشد آنگاه $P(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ نیز درست است (گام استقرا).

طراحی الگوریتم با استقرا

- اثبات :
- پایه استقرا درست است زیرا $1 = \frac{1(2)}{2} = 1 = P(1)$
- می‌دانیم $P(n+1) = P(n) + (n+1)$ بنابراین $P(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$. با بسط این رابطه به دست می‌آوریم $P(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. بنابراین گام استقرا نیز درست است.
- با استفاده از این رابطه برای محاسبهٔ n عدد کافی است از رابطه $P(n)$ استفاده کنیم. این الگوریتم در زمان $O(1)$ انجام می‌شود، در حالی که جمع n عدد با استفاده از یک حلقه در زمان $O(n)$ انجام می‌شود.

طراحی الگوریتم با استقرا

- استقرای ریاضی در طراحی الگوریتم‌ها بسیار پر استفاده است.
- برای طراحی یک الگوریتم برای حل یک مسئله با استفاده از استقرا کافی است :

۱. مسئله را در حالت پایه یعنی حالتی که اندازه ورودی کوچک است حل کنیم.
۲. نشان‌دهیم چگونه می‌توان یک مسئله را با استفاده از یک زیر مسئله (یعنی مسئله‌ای با اندازهٔ کوچک‌تر) حل کرد.

طراحی الگوریتم با استقرا

- فرض کنید می‌خواهیم به ازای دنباله‌ای از اعداد حقیقی a_0 ، a_1 ، a_2 ، $\cdots$ ، a_n و عدد داده شده x، مقدار چند جمله‌ای زیر را محاسبه کنیم.

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

طراحی الگوریتم با استقرا

- یک الگوریتم بدیهی برای حل این مسئله با جایگذاری اعداد a_i و x در چند جمله $P_n(x)$ مقدار آن را محاسبه می‌کند.

Algorithm Compute Polynomial

```
function ComputePolynomial(a[], x)
P = a[0]
for i = 1 to n do
    X = 1
    for j = 1 to i do
        X = X * x
    P = P + a[i] * X
return P
```

- پیچیدگی زمانی این الگوریتم $O(n^2)$ است.

- حال می‌خواهیم با استفاده از استقرا این مسئله را در زمان کمتری حل کنیم.

طراحی الگوریتم با استقرا

- برای حل مسئله با استفاده از استقرا باید بتوانیم مسئله را بر اساس یک زیر مسئله بیان کنیم.
- یک زیر مسئله از مسئلهٔ محاسبه چند جمله‌ای را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$P_{n-1}(x) = a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1$$

- فرض کنید جواب $P_{n-1}(x)$ داده شده است. چگونه می‌توانیم $P_n(x)$ را محاسبه کنیم؟

طراحی الگوریتم با استقرا

- برای محاسبه $P_n(x)$ می‌توانیم رابطه‌ای به صورت زیر بنویسیم.

$$P_n(x) = x \cdot P_{n-1}(x) + a_0$$

- همچنین می‌توانیم $P_{n-1}(x)$ را بر اساس $P_{n-2}(x)$ محاسبه کنیم.
- داریم :

$$P_{n-2}(x) = a_n x^{n-2} + a_{n-1} x^{n-3} + \cdots + a_2$$

- بنابراین خواهیم داشت :

$$P_{n-1}(x) = x \cdot P_{n-2}(x) + a_1$$

طراحی الگوریتم با استقرا

- در حالت کلی برای محاسبه $P_{n-j}(x)$ با استفاده از یک زیرمسئله می‌توانیم رابطهٔ زیر را ارائه کنیم:

$$P_{n-j}(x) = x \cdot P_{n-(j+1)}(x) + a_j$$

- در حالت پایه داریم:

$$P_0(x) = a_n$$

طراحی الگوریتم با استقرا

- فرض کنیم $n - j = i$ ، در اینصورت خواهیم داشت :

$$\begin{cases} P_i(x) = x \cdot P_{i-1}(x) + a_{n-i} & i > 0 \quad \text{اگر} \\ P_0(x) = a_n & i = 0 \quad \text{اگر} \end{cases}$$

طراحی الگوریتم با استقرا

- بنابراین با استفاده از رابطه بازگشتی به دست آمده می‌توانیم الگوریتمی به صورت زیر بنویسیم.

Algorithm Compute Polynomial

```
function ComputePolynomial(a[], x)
P = a[n]
for i = 1 to n do
    P = x * P + a[n-i]
return P
```

- پیچیدگی زمانی این الگوریتم $O(n)$ است که از الگوریتم بدیهی که در زمان $O(n^2)$ چند جمله‌ای را محاسبه می‌کند سریع‌تر است.

طراحی الگوریتم با استقرا

- این الگوریتم به روش هورنر [1] معروف است که توسط ریاضی‌دان انگلیسی ویلیام هورنر [2] ابداع شده است، گرچه خود هورنر آن را به ریاضی‌دان فرانسوی-ایتالیایی ژوزف لاگرانژ [3] نسبت داده است. گفته می‌شود این الگوریتم قبل از لاگرانژ احتمالاً توسط ریاضی‌دانان ایرانی و چینی ابداع شده است.

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \\ a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(a_3 + \cdots + x(a_{n-1} + x a_n) \cdots)))$$

[1] Horner's method
[2] William Horner
[3] Joseph-Louis Lagrange

برنامه‌ریزی پویا

- برنامه‌ریزی پویا [1] روشی دیگر برای حل مسائل محاسباتی است که توسط آن همانند روش تقسیم و حل جواب یک مسئله از جواب زیر مسئله‌های آن به دست می‌آید. (در اینجا واژه programming به معنی برنامه‌ریزی و طراحی یک جدول برای پیش‌بینی آینده است و نه به معنی برنامه نویسی.)
- در برنامه‌ریزی پویا هر یک از زیر مسئله‌ها تنها یک بار حل می‌شوند. جواب یک زیرمسئله در یک جدول ذخیره می‌شود و از آن جواب برای حل زیر مسئله‌های دیگر با اندازه‌های بزرگتر استفاده می‌شود. در واقع در هر مرحله یک زیر مسئلهٔ بزرگ‌تر با استفاده از جواب یک زیر مسئله کوچک‌تر حل می‌شود و این روند ادامه پیدا می‌کند تا اینکه مسئلهٔ اصلی با استفاده از بزرگترین زیرمسئلهٔ به دست آمده حل می‌شود.
- برنامه‌ریزی پویا در بسیاری از مسائل بهینه سازی [2] کاربرد دارد. چنین مسئله‌هایی معمولا چند جواب دارند که ما به دنبال جوابی می‌گردیم که مقدار بهینه (کوچکترین یا بزرگترین) داشته باشد.

[1] dynamic programming
[2] optimization problem

برنامه‌ریزی پویا

- برای مثال برای پیدا کردن عدد فیبوناچی n ام، باید عدد فیبوناچی ۱−n ام و عدد فیبوناچی ۲−n ام را محاسبه کنیم.
- می‌توانیم یک رابطه بازگشتی برای محاسبه عدد فیبوناچی بنویسیم و با استفاده از یک الگوریتم بازگشتی آن را حل کنیم. مشکل الگوریتم بازگشتی این است که برخی از زیرمسئله‌ها بیش از یک بار حل می‌شوند. برای مثال برای محاسبه عدد فیبوناچی پنجم عدد فیبوناچی چهارم و سوم محاسبه می‌شوند. اما هنگام محاسبه عدد فیبوناچی چهارم عدد سوم برای بار دوم باید محاسبه شود.

برنامه‌ریزی پویا

- یک روش برای حل این مشکل این است که به جای حل مسئله از بالا به پایین،یعنی با شروع از مسئله بزرگ‌تر و محاسبه زیرمسئله‌های کوچکتر، مسئله را از پایین به بالا حل کنیم، بدین معنی که ابتدا زیرمسئله را حل کنیم و نتایج را ذخیره کرده و از نتایج در مسئله‌های بزرگتر استفاده کنیم.
- برای مثال در مسئله محاسبه عدد فیبوناچی n ام، ابتدا عدد فیبوناچی اول، سپس دوم، سوم، .. را محاسبه کرده تا به عدد فیبوناچی n ام برسیم.
- این روش حل مسئله که از پایین به بالا با شروع به محاسبه زیرمسئله‌های کوچکتر می‌کند و با استفاده از جواب زیرمسئله‌ها، مسئله‌های بزرگتر را حل می‌کند، برنامه‌ریزی پویا نامیده می‌شود.

برش میله

- یک شرکت صنایع فولادی، میله‌های فولادی را خریداری می‌کند و آنها را با استفاده از برش‌هایی به میله‌هایی با طول کمتر تقسیم می‌کند، و میله‌های کوتاهتر را می‌فروشد. فرض کنید که هزینهٔ انجام یک برش بسیار ناچیز و تقریبا برابر با صفر است.

- هر میله با یک طول معین هزینهٔ مشخصی دارد. می‌خواهیم بدانیم بهترین روش برای برش میله‌ها برای به دست آوردن بیشترین سود چیست.

- جدولی داریم که به ازای $i = 1, 2, \ldots$ هزینهٔ میلهٔ i سانتی‌متری برابر با p_i داده شده است.

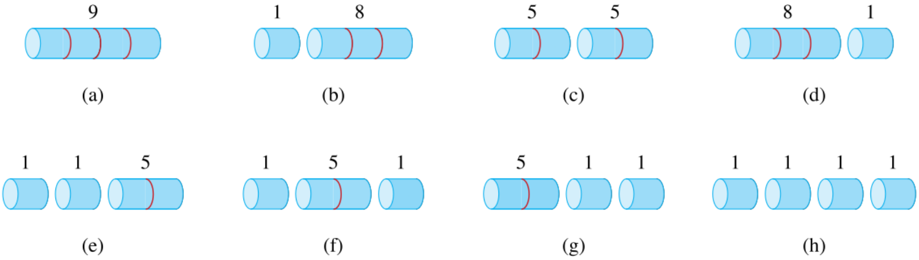
- می‌خواهیم سود بیشینهٔ r_n که از برش میله و فروش قطعه میله‌ها به دست می‌آید را محاسبه کنیم. فرض کنید طول میله و طول قطعات داده شده در جدول همه اعداد طبیعی باشند.

برش میله

- جدول زیر هزینهٔ میله‌ها با طول‌های معین را نشان می‌دهد.

length i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
price p_i	1	5	8	9	10	17	17	20	24	30

- برای مثال فرض کنید $n = 4$ باشد. شکل زیر روش‌های مختلف تقسیم میلهٔ ۴ سانتی‌متری را نشان می‌دهد. بیشترین سود وقتی حاصل می‌شود که دو میله هریک با طول ۲ سانتی‌متر تولید کنیم.



برش میله

- اگر قیمت p_n برای یک میله با طول n به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، جواب بهینه این است که لازم نیست هیچ برشی انجام شود.
- می‌توان اثبات کرد که یک میله با طول n را می‌توان به 2^{n-1} حالت مختلف تقسیم کرد. پس یک راه حل بدیهی بررسی همهٔ حالات ممکن است که پیچیدگی آن نمایی است و به دنبال راه حلی بهتر برای حل مسئله می‌گردیم.

برش میله

- اولین گام در حل یک مسئله توسط برنامه‌ریزی پویا پیدا کردن یک رابطهٔ بازگشتی است که جواب مسئله را بر اساس جواب زیرمسئله‌ها بیان کند.

- می‌توانیم مقدار r_n را به صورت بازگشتی به ازای $n \geq 1$ به صورت زیر بنویسیم.

$$r_n = \max\{p_n, r_1 + r_{n-1}, r_2 + r_{n-2}, ..., r_{n-1} + r_1\}$$

- پس هزینهٔ بهینه برای برش میله با طول n برابر است با هزینهٔ بهینه برش میله با طول i که r_i است به علاوهٔ هزینهٔ بهینه برش میله با طول $n - i$ که r_{n-i} است. چون نمی‌دانیم کدام i هزینهٔ برش را بهینه می‌کند، بنابراین باید همهٔ i های ممکن را بررسی کنیم. یکی از انتخاب‌ها نیز این است که هیچ برشی انجام ندهیم.

- در این صورت برای حل یک مسئله می‌توانیم از جواب مسئله‌ها با اندازهٔ کوچکتر استفاده کنیم.

برش میله

- برای حل یک مسئلهٔ بهینه‌سازی توسط برنامه‌ریزی پویا باید مسئله دارای زیرساختار بهینه [1] باشد یا به عبارت دیگر اصل بهینگی [2] در آن برقرار باشد.

- یک مسئله دارای زیرساختار بهینه است اگر جواب بهینه برای یک مسئله، شامل جواب‌های زیرمسئله‌ها باشد. به عبارت دیگر اگر جواب زیرمسئله‌های یک مسئلهٔ بهینه‌سازی را به دست آوریم، باید بتوانیم از جواب زیرمسئله‌ها برای حل مسئله اصلی استفاده کنیم.

- برای مثال مسئله کوتاهترین مسیر در گراف دارای زیرساختار بهینه است. اگر کوتاهترین مسیر از x به y را به دست آوریم به طوری که مسیر از z عبور کند، کوتاهترین مسیر از x به z و همچنین کوتاهترین مسیر از z به y نیز در جواب مسئله به دست آمده است.

- اما مسئله بلندترین مسیر دارای زیرساختار بهینه نیست. اگر بلندترین مسیر از x به y را به دست آوریم به طوری که مسیر از z عبور کند، نمی‌توانیم بگوییم بلندترین مسیر از z به y نیز در جواب مسئله است، زیرا ممکن است بلندترین مسیر از z به y از x عبور کند.

[1] optimal substructure
[2] principle of optimality

برش میله

- می‌گوییم مسئلهٔ برش میله دارای زیرساختار بهینه [1] است، بدین معنا که جواب بهینه برای مسئله می‌تواند با استفاده از جواب زیرمسئله‌هایی که به طور مستقل محاسبه می‌شوند به دست بیاید.
- می‌توانیم رابطهٔ بازگشتی برای این مسئله را به گونه‌ای دیگر بیان کنیم.
- برای به دست آوردن هزینه بهینه میله با طول n ابتدا قطعه‌ای با طول i را جدا می‌کنیم و سپس هزینهٔ بهینهٔ باقیمانده که طول آن $n - i$ است را محاسبه می‌کنیم.

$$r_n = \max\{p_i + r_{n-i} : 1 \le i \le n\}$$

[1] optimal substructure

برش میله

- می‌توانیم این رابطهٔ بازگشتی را به صورت زیر پیاده‌سازی کنیم.

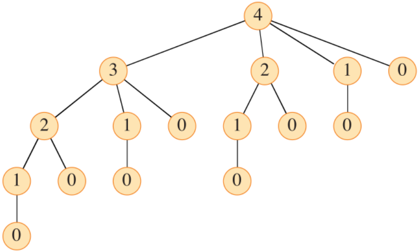
$$r_n = \max\{p_i + r_{n-i} : 1 \le i \le n\}$$

Algorithm Rod Cutting

```
function Cut-Rod(p, n)
if n == 0 then
    return 0
q = -∞
for i = 1 to n do
    q = max { q, p[i] + Cut-Rod(p, n-i) }
return q
```

برش میله

- اگر این برنامه را اجرا کنید خواهید دید که به ازای ورودی‌های بسیار کوچک مانند $n = 40$ اجرای برنامه دقیقه‌ها و حتی ساعت‌ها زمان خواهد برد.
- این بهره‌وری پایین به این دلیل است که الگوریتم به صورت بازگشتی است و تابع با ورودی n، خودِ تابع را با ورودی‌های $j = 0, 1, ..., n - 1$ فراخوانی می‌کند و بنابراین پیچیدگی زمانی الگوریتم نمایی خواهد بود.



برش میله

- فرض کنید $T(n)$ تعداد فراخوانی‌های تابع `Cut-Rod(p,n)` را می‌شمارد.
- برای تحلیل زمان اجرا می‌توانیم بنویسیم:

$$T(n) = 1 + \Sigma_{j=0}^{n-1} T(j)$$

- مقدار ۱ فراخوانی ریشه درخت فراخوانی است.
- با حل این رابطه بازگشتی به دست می‌آوریم:

$$T(n) = 2^n$$

برش میله

- حال می‌خواهیم این مسئله را توسط برنامه‌ریزی پویا حل کنیم. به جای حل مسئله به صورت بازگشتی، می‌خواهیم جواب زیرمسئله‌ها را ذخیره کنیم تا یک زیرمسئله تنها یک بار حل شود.
- بنابراین یک راه حل این است که هر بار یک زیرمسئله را حل کردیم آن را ذخیره کنیم، تا در دفعات بعدی بتوانیم از جواب ذخیره شده استفاده کنیم. البته ذخیره کردن زیرمسئله‌ها پیچیدگی حافظه دارد و بنابراین در برنامه‌ریزی پویا برای صرفه‌جویی در زمان از حافظهٔ بیشتری استفاده می‌کنیم.

برش میله

- در اینجا دو روش برای پیاده‌سازی این الگوریتم توسط برنامه‌ریزی پویا را بررسی می‌کنیم.
- اولین روش یک روش بالا به پایین [1] با استفاده از به‌خاطرسپاری [2] است.
- در این روش، یک تابع بازگشتی می‌نویسیم و هر بار نتیجه یک زیرمسئله را برای استفاده در آینده ذخیره می‌کنیم. پس برای حل یک زیرمسئله ابتدا بررسی می‌کنیم که نتیجه زیرمسئله ذخیره شده است یا خیر. اگر ذخیره شده بود، از جواب ذخیره شده استفاده می‌کنیم، در غیر اینصورت نتیجه را با استفاده از تابع بازگشتی محاسبه می‌کنیم.

[1] top-down
[2] memoization

برش میله

- الگوریتم بالا به پایین در زیر نشان داده شده است.

Algorithm Memoized Rod Cutting

```
function MEMOIZED-CUT-ROD(p, n)
let r[0:n] be a new array  ▷ will remember solution values in r
for i = 1 to n do
    r[i] = -∞
return Memoized-Cut-Rod-Aux(p,n,r)
```

برش میله

- الگوریتم بالا به پایین در زیر نشان داده شده است.

Algorithm Memoized Rod Cutting

```
function MEMOIZED-CUT-ROD-AUX(p, n)
if r[n] ≥ 0 then  ▷ already have a solution for length n ?
    return r[n]
if n == 0 then
    q = 0
else
    q = -∞
    for i = 1 to n do      ▷ i is the position of the first cut
        q = max { q, p[i] + Memoized-Cut-Rox-Aux(p, n-i, r) }
r[n] = q  ▷ remember the solution value for length n
return q
```

برش میله

- روش دوم پایین به بالاست، بدین معنا که ابتدا زیرمسئله‌ها با اندازه‌های کوچکتر را حل می‌کنیم و نتایج آنها را در جدولی ذخیره می‌کنیم. سپس برای حل مسئله‌ها با اندازۀ بزرگتر از جواب مسئله‌های کوچکتر که ذخیره شده‌اند استفاده می‌کنیم. بدین ترتیب هر زیرمسئله تنها یک بار حل می‌شود.
- پیچیدگی زمانی این روش مانند روش بالابه‌پایین است با این تفاوت که در روش بالابه‌پایین هر بار به جواب یک زیرمسئله نیاز داریم جدول را بررسی می‌کنیم و این بررسی سربار اجرایی دارد. بنابراین گرچه هر دو روش هم‌مرتبه هستند، اما زمان اجرای روش بالابه‌پایین ضریب ثابت بزرگتری دارد و در نتیجه کندتر است.

برش میله

- روش پایین به بالا را می‌توانیم به صورت زیر پیاده‌سازی کنیم.

Algorithm Buttom-Up Rod Cutting

```
function BUTTOM-UP-CUT-ROD(p, n)
let r[0:n] be a new array  ▷ will remember solution values in r
r[0] = 0
for j = 1 to n do  ▷ for increasing rod length j
    q = -∞
    for i = 1 to j do      ▷ i is the position of the first cut
        q = max { q, p[i] + r[j-i] }
    r[j] = q      ▷ remember the solution value for length j
return r[n]
```

برش میله

- پیچیدگی زمانی این الگوریتم $\Theta(n^2)$ است، زیرا دو حلقه تودرتو داریم که هر یک حداکثر n بار تکرار می‌شوند.

برش میله

- تا اینجا تنها محاسبه کردیم مقدار جواب بهینه چقدر است، اما خود جواب را محاسبه نکرده‌ایم. به عبارت دیگر می‌خواهیم محاسبه کنیم، میله در چه قطعاتی باید تقسیم شود تا هزینهٔ بهینه به دست آید.
- برای این کار از آرایه s_j استفاده می‌کنیم که طول قسمت اول در تقسیم میله به دو قسمت را نگهداری می‌کند.

برش میله

- الگوریتم زیر روش محاسبهٔ جواب بهینه را نشان می‌دهد.

Algorithm Rod Cutting Solution

```
function Extended-Buttom-Up-Cut-Rod(p, n)
let r[0:n] and s[1:n] be new arrays  ▷ will remember solution values in r
r[0] = 0
for j = 1 to n do  ▷ for increasing rod length j
    q = -∞
    for i = 1 to j do     ▷ i is the position of the first cut
        if  q < p[i] + r[j-i] then
            q = p[i] + r[j-i]
            s[j] = i            ▷ best cut location so far for length j
    r[j] = q     ▷ remember the solution value for length j
return r and s
```

برش میله

- الگوریتم زیر روش محاسبهٔ جواب بهینه را نشان می‌دهد.

Algorithm Rod Cutting Solution

```
   function PRINT-CUT-ROD-SOLUTION(p, n)
1: (r, s) = Extended-Buttom-Up-Cut-Rod(p, n)
2: while n > 0 do
3:    print s[n]      ▷ cut location for length n
4:    n = n - s[n]      ▷ length of the remainder of the rod
```

برش میله

- جدول زیر نحوه محاسبه آرایهٔ s را نشان می‌دهد.

i	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
r[i]	۰	۱	۵	۸	۱۰	۱۳	۱۷	۱۸	۲۲	۲۵	۳۰
s[i]		۱	۲	۳	۲	۲	۶	۱	۲	۳	۱۰

- توجه کنید که داریم:

i	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
cut		۱	۲	۳	۲+۲	۲+۳	۶	۱+۶	۲+۶	۳+۶	۱۰

سریع‌ترین مسیر در جدول

- جدول A با m سطر و n ستون را در نظر بگیرید به طوری‌که مقدار هرکدام از درایه‌های جدول یک عدد صحیح است.
- می‌خواهیم مهره‌ای را با شروع از درایه $(1, 1)$ حرکت داده، به درایهٔ (m, n) منتقل کنیم. فرض کنید درایهٔ $(1, 1)$ در شمال غرب و درایهٔ (m, n) در جنوب شرق جدول قرار دارد.
- وقتی مهره وارد درایهٔ (i, j) می‌شود، باید $A[i, j]$ ثانیه در آن درایه صبر کند و پس از آن به حرکت ادامه دهد.
- با فرض اینکه مهره تنها می‌تواند به سمت جنوب یا شرق یا مورب به جنوب شرق حرکت کند، می‌خواهیم کمترین زمان ممکن برای انتقال مهره از درایهٔ $(1, 1)$ به (m, n) را محاسبه کنیم.

سریع‌ترین مسیر در جدول

- درگام اول بررسی می‌کنیم مسئله دارای زیر ساختار بهینه است یا اصل بهینگی در آن برقرار است.
- اگر از درایهٔ $(1, 1)$ مهره را حرکت داده درکمترین زمان ممکن به درایهٔ (i, j) برسیم حتما از یکی از سه درایهٔ $(i - 1, j)$ یا $(i, j - 1)$ یا $(i - 1, j - 1)$ عبورکرده‌ایم.
- در صورتی که از $(i - 1, j)$ عبورکرده باشیم الزاما برای حرکت از درایه $(1, 1)$ به $(i - 1, j)$ کمترین زمان ممکن را صرف کرده‌ایم. این گزاره را می‌توانیم با برهان خلف اثبات کنیم.
- به همین ترتیب ممکن است از درایه‌های $(i, j - 1)$ یا $(i - 1, j - 1)$ عبورکرده باشیم که به طور مشابه می‌توانیم اثبات کنیم الزاما درکمترین زمان ممکن به این درایه‌ها رسیده‌ایم.

سریع‌ترین مسیر در جدول

- درگام دوم رابطه‌ای برای توصیف جواب مسئله براساس جواب زیر مسئله‌ها به صورت زیر می‌نویسیم.

$$T[i,j] = \begin{cases} \min(T[i-1,j], T[i,j-1], T[i-1,j-1]) + A[i,j] & \text{اگر } j>1, i>1 \\ T[i-1,1] + A[i,1] & \text{اگر } j=1, i>1 \\ T[1,j-1] + A[1,j] & \text{اگر } i=1, j>1 \\ A[1,1] & \text{اگر } j=1, i=1 \end{cases}$$

سریع‌ترین مسیر در جدول

- سپس جدول T را در زمان $\Theta(mn)$ تکمیل می‌کنیم و $T[m, n]$ جواب مسئله است.

ضرب زنجیره‌ای ماتریس‌ها

- مسئلهٔ ضرب زنجیره‌ای ماتریس‌ها [1] به صورت زیر است. می‌خواهیم دنباله (زنجیره)ای از n ماتریس $\langle A_1, A_2, \cdots, A_n \rangle$ را در هم ضرب کنیم. این ماتریس‌ها الزاماً ماتریس‌های مربعی نیستند و هدف این است که در این ضرب ماتریسی کمترین تعداد عملیات ضرب استفاده شود.
- ضرب ماتریس‌ها شرکت پذیر [2] ، بدین معنی که پرانتز گذاری به هر نحوی انجام می‌شود، جواب ضرب ماتریسی تغییر نخواهد کرد.

---

[1] Matrix-chain multiplication problem
[2] associative

ضرب زنجیره‌ای ماتریس‌ها

- الگوریتم ضرب دو ماتریس $A(a_{ij})$ و $B(b_{ij})$ به صورت زیر است. نتیجه ضرب این دو ماتریس در ماتریس $C(c_{ij})$ ذخیره می‌شود.

Algorithm Matrix Multiplication

```
function RECTANGULAR-MATRIX-MULTIPLY(A, B, C, p, q, r)
for i = 1 to p do
    for j = 1 to r do
        for k = 1 to q do
            c[i,j] += a[i,k] * b[k,j]
```

- برای اینکه ضرب ماتریسی درست باشد لازم است ابعاد ماتریس A برابر با $p \times q$ و ابعاد ماتریس B برابر با $q \times r$ باشد و ابعاد ماتریس حاصلضرب C در اینصورت برابر با $p \times r$ خواهد بود. تعداد عملیات ضرب انجام شده برابر است با pqr.

ضرب زنجیره‌ای ماتریس‌ها

- زنجیره ضرب ماتریسی $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ را در نظر بگیرید. فرض کنید ماتریس A_1 با ابعاد 100×10 ، ماتریس A_2 با ابعاد 5×100 و ماتریس A_3 با ابعاد 50×5 باشد. اگر پرانتزگذاری به صورت $((A_1A_2)A_3)$ باشد، تعداد $5000 = 5 \times 100 \times 10$ عملیات ضرب برای ضرب A_1A_2 و تعداد $2500 = 50 \times 5 \times 10$ عملیات ضرب برای ضرب A_3 در حاصلضرب A_1A_2 باید انجام شود. بنابراین نیاز به انجام 7500 عملیات ضرب است.

- حال فرض کنید پرانتزگذاری به صورت $(A_1(A_2A_3))$ باشد. در اینصورت نیاز به انجام $25000 = 50 \times 5 \times 100$ عملیات ضرب برای ضرب A_2A_3 و نیاز به انجام $50000 = 50 \times 100 \times 10$ عملیات ضرب برای ضرب A_1 در حاصلضرب A_2A_3 است، بنابراین در مجموع نیاز به انجام 75000 عملیات ضرب است. بنابراین با استفاده از پرانتزگذاری اول، عملیات ضرب ۱۰ برابر سریع‌تر انجام می‌شود.

ضرب زنجیره‌ای ماتریس‌ها

- مسئله ضرب زنجیره‌ای ماتریس‌ها را به صورت زیر بیان می‌کنیم :
زنجیرهٔ n ماتریس $\langle A_1, A_2, \cdots, A_n \rangle$ را در نظر بگیرید، به طوری‌که به ازای $i = 1, 2, \cdots, n$ ، ابعاد ماتریس A_i برابر است با $p_{i-1} \times p_i$. ضرب $A_1 \cdot A_2 \cdots A_n$ را طوری پرانتز گذاری کنید که تعداد ضرب‌ها در عملیات ضرب این زنجیرهٔ ماتریسی حداقل باشد. ابعاد ورودی مسئله به صورت $\langle p_0, p_1, p_2, \cdots, p_n \rangle$ داده شده‌اند.

- در مسئله ضرب زنجیره‌ای ماتریس‌ها نمی‌خواهیم حاصلضرب ماتریس‌ها را به دست آوریم بلکه تنها می‌خواهیم ترتیب ضرب را به گونه‌ای به دست آوریم که هزینه ضرب به حداقل برسد. معمولا زمانی که صرف پیدا کردن پرانتز گذاری بهینه می‌شود ارزش هزینه کردن دارد، چرا که ممکن است ضرب ماتریس‌ها به صورت ترتیبی هزینهٔ گزافی به کاربر تحمیل کند.

ضرب زنجیره‌ای ماتریس‌ها

- قبل از اینکه این مسئله را حل کنیم، بررسی می‌کنیم چند پرانتز گذاری متفاوت وجود دارد. در واقع یک الگوریتم ساده برای حل این مسئله این است که هزینهٔ همهٔ پرانتز گذاری‌ها را با یکدیگر مقایسه کنیم ولی از آنجایی که تعداد پرانتز گذاری‌ها بسیار زیاد است، بررسی همهٔ حالات مقدور نیست.
- فرض کنید تعداد کل حالات برای پرانتز گذاری n ماتریس برابر باشد با $P(n)$. وقتی $n = 1$ تنها یک ماتریس در زنجیره وجود دارد و بنابراین تنها یک حالت برای پرانتز گذاری وجود دارد. وقتی $n \geqslant 2$ باشد، درواقع عبارت می‌تواند به دو قسمت شکسته شود به طوری‌که هر قسمت به طور جداگانه پرانتز گذاری شود. تعداد کل حالت‌های پرانتز گذاری برابر است با ضرب تعداد حالات پرانتز گذاری قسمت اول ضرب در تعداد حالت‌های پرانتز گذاری قسمت دوم.

ضرب زنجیره‌ای ماتریس‌ها

- این زنجیره می‌تواند به شکل‌های متعددی به دو قسمت تقسیم شود که با احتساب همهٔ حالت‌ها عبارت زیر را برای تعداد کل حالت‌های پرانتز گذاری به دست می‌آوریم.

$$P(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \text{ اگر} \\ \sum_{k=1}^{n-1} P(k)P(n-k) & n \geqslant 2 \text{ اگر} \end{cases}$$

- با حل این رابطهٔ بازگشتی به دست می‌آید $P(n) = \Omega(2^n)$. در واقع $P(n)$ دنبالهٔ اعداد کاتالان [1] (۱، ۱، ۲، ۵، ۱۴، ۴۲، ۱۳۲، ۴۲۹، ۱۴۳۰، ۴۸۶۲، ۱۶۷۹۶، ۵۸۷۸۶، ...) را می‌سازد که رشد آن نمایی است و بنابراین به ازای n های بسیار بزرگ، بررسی کردن همهٔ حالت‌ها در عمل غیرممکن است.

[1] catalan numbers

ضرب زنجیره‌ای ماتریس‌ها

- حال از روش برنامه‌ریزی پویا برای بهینه‌سازی پرانتز گذاری زنجیرهٔ ماتریسی استفاده می‌کنیم. یک الگوریتم به روش برنامه‌ریزی پویا برای یک مسئلهٔ بهینه‌سازی از چهار مرحله تشکیل شده است :

۱- توصیف ساختار جواب بهینه بر اساس جواب بهینه زیرمسئله‌ها و بررسی اصل بهینگی

۲- تعریف کردن مقدار جواب بهینه به طور بازگشتی

۳- محاسبه کردن مقدار جواب بهینه

۴- ساختن جواب بهینه توسط اطلاعات محاسبه شده

ضرب زنجیره‌ای ماتریس‌ها

- (گام ۱) توصیف ساختار جواب بهینه بر اساس جواب زیرمسئله‌ها و بررسی اصل بهینگی:

- اولین مرحله در برنامه‌ریزی پویا تشخیص دادن ساختاری از مسئله است که در زیر مسئله‌ها نیز تکرار می‌شود. به عبارت دیگر اگر مسئله را برای یک زیر مسئله حل کنیم، باید بتوانیم با استفاده از اطلاعات زیر مسئله، مسئله را حل کنیم.

- فرض کنید به ازای $i \leqslant j$ ماتریس $A_{i:j}$ از ضرب ماتریس‌های $A_i A_{i+1} \cdots A_j$ به دست بیاید. اگر $i = j$ باشد تنها یک پرانتزگذاری وجود دارد، اما اگر $i < j$ باشد آنگاه برای پرانتزگذاری این عبارت می‌توانیم آن را به دو قسمت $A_{i:k}$ و $A_{k+1:j}$ تقسیم کنیم به طوری‌که $i \leqslant k < j$. با ضرب این دو ماتریس در یکدیگر، حاصل $A_{i:j}$ را به دست می‌آوریم. هزینۀ پرانتزگذاری $A_{i:j}$ برابر است با هزینه پرانتزگذاری $A_{i:k}$ به علاوۀ هزینۀ پرانتزگذاری $A_{k+1:j}$ به علاوۀ هزینۀ ضرب دو قسمت در یکدیگر.

ضرب زنجیره‌ای ماتریس‌ها

- مسئلهٔ ضرب زنجیره‌ای ماتریس‌ها دارای زیرساختار بهینه است. به عبارت دیگر اگر یک پرانتزگذاری برای $A_{i:j}$ پیدا کنیم به طوری که به دو قسمت $A_{i:k}$ و $A_{k+1:j}$ تقسیم شود، پرانتزگذاری $A_{i:k}$ نیز بهینه است (به همین ترتیب پرانتزگذاری $A_{k+1:j}$ نیز بهینه است) .
- اثبات: فرض کنیم پرانتزگذاری $A_{i:j}$ بهینه باشد و پرانتزگذاری $A_{i:k}$ بهینه نباشد. در اینصورت می‌توانیم یک پرانتزگذاری بهینه برای $A_{i:k}$ پیدا کنیم و آن را در $A_{i:j}$ استفاده کنیم و یک پرانتزگذاری با هزینه کمتر برای $A_{i:j}$ به دست آوریم که با فرض اولیه در تناقض است.

ضرب زنجیره‌ای ماتریس‌ها

- به طور خلاصه، اگر پرانتزگذاری بهینه برای $A_{i:j}$ را پیدا کنیم، این پرانتزگذاری الزاما از دو پرانتزگذاری $A_{i:k}$ و $A_{k+1:j}$ تشکیل شده است و الزاما پرانتزگذاری‌های $A_{i:k}$ و $A_{k+1:j}$ نیز بهینه هستند.
- بدین دلیل می‌توانیم از برنامه‌ریزی پویا استفاده کنیم، زیرا می‌توانیم هزینه‌های پرانتزگذاری‌های $A_{i:k}$ و $A_{k+1:j}$ را از قبل ذخیره کنیم، و از این هزینه‌ها برای محاسبهٔ پرانتزگذاری $A_{i:j}$ استفاده کنیم.

ضرب زنجیره‌ای ماتریس‌ها

- بنابراین باید مقدار k را پیدا کنیم به طوری‌که هزینهٔ پرانتز گذاری $A_{i:k}$ به علاوهٔ هزینهٔ پرانتزگذاری $A_{k+1:j}$ به علاوهٔ هزینهٔ ضرب $A_{i:k}$ در $A_{k+1:j}$ بهینه باشد. آنگاه پرانتز گذاری $A_{i:j}$ نیز بهینه خواهد بود.
- پس برای حل مسئله یافتن هزینهٔ پرانتزگذاری بهینه برای $A_{i:j}$ باید به ازای همهٔ k ها هزینهٔ پرانتزگذاری بهینه برای $A_{i:k}$ و $A_{k+1:j}$ را محاسبه و با هزینهٔ ضرب $A_{i:k}$ در $A_{k+1:j}$ جمع کنیم. آنگاه از این میان k را به گونه‌ای انتخاب کنیم که هزینهٔ پرانتزگذاری بهینه باشد (تعداد ضرب‌های پرانتزگذاری $A_{i:j}$ کمترین مقدار ممکن باشد).

ضرب زنجیره‌ای ماتریس‌ها

- (گام ۲) تعریف کردن مقدار جواب بهینه به طور بازگشتی :
- فرض کنید $m[i,j]$ حداقل تعداد ضرب‌های مورد نیاز برای محاسبه $A_{i:j}$ باشد. حداقل تعداد ضرب‌های مورد نیاز برای کل n ماتریس یعنی $A_{1:n}$ برابراست با $m[1,n]$.
- می‌خواهیم یک عبارت بازگشتی برای مقدار $m[i,j]$ محاسبه کنیم.
- اگر $i=j$ باشد، هزینه‌ای وجود ندارد، بنابراین $m[i,j]=0$.
- اگر $i<j$ باشد، از ساختار جواب بهینه برای زیر مسئله‌ها استفاده می‌کنیم. فرض کنید یک پرانتز گذاری بهینه حاصلضرب $A_{i:j}$ را به دو قسمت $A_{i:k}$ و $A_{k+1:j}$ تقسیم می‌کند به طوری‌که $i \leqslant k < j$. بنابراین $m[i,j]$ برای محاسبهٔ $A_{i:k}$ برابر است با هزینه $m[i,k]$ برای محاسبه $A_{i:k}$ به علاوه هزینه $m[k+1,j]$ برای محاسبهٔ $A_{k+1:j}$ به علاوه هزینهٔ ضرب دو قسمت در یکدیگر. حاصلضرب $A_{i:k}A_{k+1:j}$ به تعداد $p_{i-1}p_kp_j$ عملیات ضرب نیاز دارد. بنابراین داریم :

$$m[i,j] = m[i,k] + m[k+1,j] + p_{i-1}p_kp_j$$

ضرب زنجیره‌ای ماتریس‌ها

- در رابطه قبل فرض کردیم مقدار k را می‌دانیم، اما از آنجایی که مقدار k ناشناخته است باید همهٔ مقادیر k به ازای $k = i, i+1, \cdots, j-1$ امتحان کنیم تا مقدار بهینه $m[i, j]$ را به‌دست آوریم. بنابراین رابطهٔ بازگشتی را در حالت کلی به صورت زیر می‌نویسیم.

$$m[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{اگر } i = j \\ \min\{m[i,k] + m[k+1,j] + p_{i-1}p_k p_j : i \leqslant k < j\} & \text{اگر } i < j \end{cases}$$

ضرب زنجیره‌ای ماتریس‌ها

- (گام ۳) محاسبه کردن مقدار جواب بهینه:
- حال می‌توانیم برنامه‌ای بنویسیم که به صورت بازگشتی رابطهٔ بازگشتی به دست آمده را محاسبه کند تا حداقل مقدار $m[1,n]$ را به‌دست آوریم. این الگوریتم بازگشتی برای محاسبه، زمانی از مرتبه نمایی نیاز دارد، پس از این الگوریتم نیز در عمل برای n های بسیار بزرگ نمی‌توانیم استفاده کنیم.
- مشکل الگوریتم بازگشتی این است که برخی از زیر مسئله‌ها یعنی برخی از $m[i,j]$ ها ممکن است چندبار محاسبه شوند. برای مثال برای دو پرانتزگذاری $(A_{p:q})(A_{q+1})$ و $(A_{p-1})(A_{p:q})$ دو بار باید هزینه پرانتزگذاری بهینه $A_{p:q}$ محاسبه شود.
- اما تعداد کل زیر مسئله‌ها به ازای $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ برابراست با $\Theta(n^2)$.

ضرب زنجیره‌ای ماتریس‌ها

- به جای حل رابطه بازگشتی با استفاده از یک الگوریتم بازگشتی، آن را توسط جدولی حل می‌کنیم که مقادیر $m[i, j]$ را از پایین به بالا محاسبه کند، بدین معنی که از $m[1, 1]$ شروع می‌کنیم و به ترتیب زیر مسئله‌های بزرگ‌تر را با استفاده از زیر مسئله‌های کوچکتر حل می‌کنیم.

- به این روش حل مسئله روش برنامه‌ریزی پویا گفته می‌شود. در برنامه‌ریزی پویا مسئله به زیرمسأله‌ها شکسته شده، و حل مسئله با شروع از کوچکترین زیر مسئله‌ها آغاز می‌شود تا جواب مسئلهٔ اصلی با استفاده از زیر مسئله‌های کوچکتر محاسبه می‌شود.

ضرب زنجیره‌ای ماتریس‌ها

- الگوریتم زیر، مسئلهٔ بهینه‌سازی ضرب ماتریسی را به روش برنامه‌ریزی پویا حل می‌کند.

Algorithm Matrix Chain

```
function MATRIX-CHAIN-ORDER(p , n)
let m[1:n , 1:n] and s[1:n , 1:n] be new tables
for i = 1 to n do  ▷  chain length 1
    m[i,i] = 0
for t = 2 to n do  ▷ t is the chain length
    for i = 1 to n - t + 1 do     ▷ chain begins at Ai
        j = i + t - 1         ▷ chain ends at Aj
        m[i,j] = ∞
        for k = i to j - 1 do        ▷ try A[i:k] A[k+1 : j]
            q = m[i,k] + m[k+1,j] + p[i-1]*p[k]*p[j]
            if q < m[i,j] then
                m[i,j] = q               ▷ remember this cost
                s[i,j] = k               ▷ remember this index
return m and s
```

ضرب زنجیره‌ای ماتریس‌ها

- زمان مورد نیاز برای حل این مسئله $O(n^3)$ و حافظه مورد نیاز برای حل آن $\Theta(n^2)$ است، زیرا نیاز به نگهداری جدول برای محاسبه زیر مسئله‌ها می‌باشد.
- با استفاده از برنامه‌ریزی پویا، زمان حل یک مسئله را از زمان نمایی به زمان چند جمله‌ای درجه سوم کاهش دادیم.

ضرب زنجیره‌ای ماتریس‌ها

- (گام ۴) ساختن جواب بهینه توسط اطلاعات محاسبه شده :
- گرچه در گام قبل مقدار بهینه برای تعداد ضرب‌ها در یک زنجیرهٔ ماتریسی را محاسبه کردیم، اما روش پرانتزگذاری ماتریس‌ها را به دست نیاوردیم.
- جدول $s[1:n, 1:n]$ که در الگوریتم قبل محاسبه کردیم اطلاعات مورد نیاز برای جواب بهینه را نگهداری می‌کند. هر عنصر $s[i,j]$ مقدار k را ذخیره می‌کند، به طوری که $A_{i:j}$ به دو قسمت $A_{i:k}$ و $A_{k+1:j}$ برای ضرب بهینه تقسیم می‌شود.

ضرب زنجیره‌ای ماتریس‌ها

- الگوریتم زیر پرانتزگذاری را برای مسئله ضرب زنجیرهٔ ماتریس‌ها انجام می‌دهد.

Algorithm Print Optimal Parentheses

```
function PRINT-OPTIMAL-PARENS(s, i, j)
if i == j then
    print "A"i
else
    print "("
    Print-Optimal-Parens (s, i, s[i, j])
    Print-Optimal-Parens (s, s[i, j]+1, j)
    print ")"
```

ضرب زنجیره‌ای ماتریس‌ها

- برای حل یک مسئله توسط روش برنامه‌ریزی پویا، مسئله باید دو ویژگی داشته باشد.
- ویژگی اول این است که مسئله را باید بتوان با استفاده از جواب زیر مسئله‌های آن به دست آورد. درواقع باید بتوان برای مسئله زیر مسئله‌هایی پیدا کرد که ساختار آنها شبیه مسئله اصلی است. به عبارت دیگر مسئله باید دارای زیرساختار بهینه باشد.
- ویژگی دوم این است که اگر بخواهیم مسئله را توسط الگوریتم بازگشتی حل کنیم باید زیر مسئله‌ها همپوشانی داشته باشند. بدین ترتیب جدول برنامه‌ریزی پویا راه‌حلی برای جلوگیری از محاسبات تکراری در این همپوشانی‌ها خواهد بود.

طولانی‌ترین زیر رشته مشترک

- برخی مواقع زیست شناسان نیاز دارند دو یا چند ارگانیسم مختلف را با یکدیگر مقایسه کنند. برای این کار دی‌ان‌ای این ارگانیسم‌ها باید مقایسه شوند. یک رشتهٔ دی‌ان‌ای شامل رشته‌ای از مولکول‌ها به نام مولکول‌های پایه است که می‌توانند آدنین [1] ، سیتوزین [2] ، گرانین [3] ، یا تیمین [4] باشند. هریک از این مولکول‌های پایه با یک حرف نشان داده می‌شوند، بنابراین یک رشته دی‌ان‌ای، یک رشته بر روی الفبای $\{A, C, G, T\}$ است. برای مثال $S_1 = ACCGGTC$ یک رشته دی‌ان‌ای است.

- یکی از دلایلی که نیاز داریم دو رشتهٔ دی‌ان‌ای را با یکدیگر مقایسه کنیم، برای این است که متوجه شویم دو ارگانیسم چقدر به یکدیگر شباهت دارند.

---

[1] adenine
[2] cytosine
[3] granine
[4] thymine

طولانی‌ترین زیر رشته مشترک

- روش‌های مختلفی برای سنجش شباهت دو رشتهٔ دی‌ان‌ای وجود دارند.
- یک روش برای سنجش شباهت این است که زیر رشته‌های مشترک بین دو رشته را پیدا کنیم. هرچقدر این زیر رشته‌های مشترک طول بیشتری داشته باشند، دو رشته به یکدیگر شبیه‌ترند.
- در این روش برای مقایسه دو رشته باید زیر رشته‌های مشترک محاسبه شوند و طولانی‌ترین آنها پیدا شود. به این مسئله، مسئلهٔ پیدا کردن طولانی‌ترین زیر رشته مشترک [1] گفته می‌شود.

[1] longest common subsequence

طولانی‌ترین زیر رشته مشترک

- یک زیر دنباله از یک دنباله، دنباله‌ای است که از حذف صفر یا بیشتر عنصر از دنباله اصلی به دست بیاید.
- به طور رسمی، به ازای دنبالهٔ $X = \langle x_1, x_2, \cdots, x_m \rangle$ ، دنبالهٔ $Z = \langle z_1, z_2, \cdots, z_k \rangle$ را زیر دنباله [1] X می‌نامیم اگر دنبالهٔ صعودی $\langle i_1, i_2, \cdots, i_k \rangle$ از اندیس‌های X وجود داشته باشند، به طوری‌که به ازای $j = 1, 2, \cdots, k$ داشته باشیم $x_{i_j} = z_j$.
- برای مثال دنبالهٔ $Z = \langle B, C, D, B \rangle$ یک زیردنباله از دنبالهٔ $X = \langle A, B, C, B, D, A, B \rangle$ است با اندیس‌های $\langle 2, 3, 5, 7 \rangle$.

[1] subsequence

طولانی‌ترین زیر رشته مشترک

- به ازای دو دنبالهٔ X و Y ، می‌گوییم دنبالهٔ Z یک زیردنبالهٔ مشترک [1] X و Y است اگر Z زیر دنباله‌ای از X و همچنین Y باشد.
- برای مثال اگر $X = \langle A, B, C, B, D, A, B \rangle$ و $Y = \langle B, D, C, A, B, A \rangle$ باشند آنگاه $\langle B, C, A \rangle$ یک زیردنبالهٔ مشترک X و Y است.
- دنبالهٔ $\langle B, C, A \rangle$ با طول ۳ طولانی‌ترین زیر دنبالهٔ مشترک X و Y نیست، چرا که دنبالهٔ $\langle B, C, B, A \rangle$ با طول ۴ وجود دارد که زیر دنبالهٔ مشترک X و Y است. این زیردنباله، طولانی‌ترین زیر دنبالهٔ مشترک [2] X و Y است، چرا که زیردنبالهٔ مشترک بلندتری وجود ندارد.

[1] common subsequence
[2] longest common subsequence

طولانی‌ترین زیر رشته مشترک

- می‌توانیم مسئله طولانی‌ترین زیردنبالهٔ مشترک را با استفاده از یک روش جستجوی کامل [1] به دست آوریم، بدین معنی که همهٔ زیردنباله‌های مشترک دو رشته را به دست آوریم و مقایسه کنیم. از آنجایی که رشته X با طول m تعداد 2^m زیردنباله دارد، بنابراین این روش برای رشته‌های طولانی غیر قابل استفاده است.
- می‌خواهیم این مسئله را به روش برنامه‌ریزی پویا حل کنیم.

[1] exhaustive search (brute-force search)

طولانی‌ترین زیر رشته مشترک

- گام اول : مشخص کردن ساختار جواب مسئله بر اساس زیرمسئله‌ها
- برای تعریف مسئله طولانی‌ترین زیررشتهٔ مشترک با استفاده از زیر مسئله‌ها، ابتدا مفهوم پیشوند [1] یک دنباله را تعریف می‌کنیم.
- به ازای دنبالهٔ $X = \langle x_1, x_2, \cdots, x_m \rangle$، i امین پیشوند X برابراست با $X_i = \langle x_1, x_2, \cdots, x_i \rangle$ به ازای $i = 0, 1, \cdots, m$.
- برای مثال اگر $X = \langle A, B, C, B, D, A, B \rangle$ باشد، آنگاه $X_4 = \langle A, B, C, B \rangle$ و X_0 دنبالهٔ تهی است.

[1] prefix

طولانی‌ترین زیر رشته مشترک

- فرض کنید $X = \langle x_1, x_2, \cdots, x_m \rangle$ و $Y = \langle y_1, y_2, \cdots, y_n \rangle$ دو دنباله باشند و $Z = \langle z_1, z_2, \cdots, z_k \rangle$ طولانی‌ترین زیررشته مشترک X و Y باشد. خواهیم داشت :

۱- اگر $x_m = y_n$ آنگاه $z_k = x_m = y_n$ و Z_{k-1} طولانی‌ترین زیر رشته مشترک X_{m-1} و Y_{n-1} است.

۲- اگر $x_m \neq y_n$ آنگاه دو حالت به وجود می‌آید.

- اگر $x_m \neq z_k$ باشد، آنگاه Z طولانی‌ترین زیر رشته مشترک X_{m-1} و Y است.
- اگر $y_n \neq z_k$ باشد، آنگاه Z طولانی‌ترین زیر رشته مشترک X و Y_{n-1} است.

طولانی‌ترین زیر رشته مشترک

- گزاره‌های ۱ و ۲ در قضیه قبل را به ترتیب اثبات می‌کنیم.

۱- اگر $x_m = y_n$ آنگاه $z_k = x_m = y_n$ و Z_{k-1} طولانی‌ترین زیر رشته مشترک X_{m-1} و Y_{n-1} است.

اثبات: اگر $y_n = x_m$ باشد، الزاما باید داشته باشیم $z_k = x_m$. این گزاره را با برهان خلف ثابت می‌کنیم. فرض کنید $z_k \neq x_m$ ، آنگاه می توانیم x_m که برابر با y_n است را به Z بیافزاییم و زیررشته مشترکی پیدا کنیم که طول آن $k+1$ است. از آنجایی که در صورت مسئله گفته شده Z طولانی‌ترین زیر رشته مشترک با طول k است، پس به تناقض می‌رسیم. پس فرض اولیه نادرست است و الزاما باید داشته باشیم $z_k = x_m = y_n$. حال باید ثابت کنیم Z_{k-1} طولانی‌ترین زیر رشته مشترک X_{m-1} و Y_{n-1} نیز هست. این گزاره را با برهان خلف ثابت می‌کنیم. فرض یک زیر رشته مشترک W برای X_{m-1} و Y_{n-1} وجود دارد که طول آن از $k-1$ بیشتر است. در اینصورت با اضافه کردن $x_m = y_n$ به W زیر رشته‌ای ساخته می‌شود که طول آن از k بیشتر است. اما در اینجا به تناقض می‌رسیم چون فرض کردیم طول بلندترین زیر رشته مشترک k است.

طولانی‌ترین زیر رشته مشترک

۲- اگر $x_m \neq y_n$ و $z_k \neq x_m$ باشد، آنگاه Z طولانی‌ترین زیر رشته مشترک X_{m-1} و Y است.

اثبات: اگر $z_k \neq x_m$ باشد، آنگاه Z یک زیر رشته مشترک برای X_{m-1} و Y است. اگر یک زیر رشته مشترک دیگر به نام W با طول بیشتر از k برای X_{m-1} و Y وجود داشت، آنگاه W می‌توانست یک زیر رشته مشترک برای X و Y نیز باشد که این متناقض است با فرض اینکه Z بلندترین زیر رشته مشترک X و Y با طول k است.

- اگر $x_m \neq y_n$ و $z_k \neq y_n$ باشد، آنگاه Z طولانی‌ترین زیر رشته مشترک X و Y_{n-1} است.

اثبات: شبیه و متقارن حالت قبل است.

طولانی‌ترین زیر رشته مشترک

- بنابراین توانستیم مسئله طولانی‌ترین زیر رشته مشترک را بر اساس زیر مسئله‌های بهینه آن تعریف کنیم. جواب زیر مسئله‌های در همهٔ حالت‌های بررسی شده در جواب مسئله وجود دارد.
- پس این مسئله دارای زیرساختار بهینه است.

طولانی‌ترین زیر رشته مشترک

- گام دوم : تعریف کردن مقدار جواب به صورت بازگشتی
- فرض کنید $c[i, j]$ طول بلندترین زیررشتهٔ مشترک X_i و Y_j باشد.
- این مسئله بهینه‌سازی را می‌توانیم بر اساس زیر ساختارهای بهینه به صورت زیر تعریف کنیم.

$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{اگر } i = 0 \text{ یا } j = 0 \\ c[i-1, j-1] + 1 & \text{اگر } i, j > 0 \text{ و } x_i = y_j \\ \max\{c[i, j-1], c[i-1, j]\} & \text{اگر } i, j > 0 \text{ و } x_i \neq y_j \end{cases}$$

- دقت کنید که اگر الگوریتم بازگشتی برای حل این مسئله استفاده شود زیر مسئله‌ها به طور تکراری محاسبه می‌شوند. پس می‌توانیم در این‌جا از برنامه‌ریزی پویا استفاده کنیم.

طولانی‌ترین زیر رشته مشترک

- گام سوم : محاسبه طول طولانی‌ترین زیر دنباله مشترک

- از آنجایی که برای دو دنباله $X = \langle x_1, x_2, \cdots, x_m \rangle$ و $Y = \langle y_1, y_2, \cdots, y_n \rangle$ مقادیر جدول $c[0 : m, 0 : n]$ باید محاسبه شوند و هر خانه از جدول در زمان ثابت $\Theta(1)$ محاسبه می‌شود، بنابراین زمان اجرای الگوریتم برنامه‌ریزی پویا برای این مسئله برابراست با $\Theta(mn)$. طول زیر رشته مشترک برابراست با مقدار محاسبه شده برای $c[m, n]$.

طولانی‌ترین زیر رشته مشترک

- الگوریتم طولانی‌ترین زیررشته مشترک به صورت زیر نوشته شده است.

Algorithm Longest Common Subsequence Length

```
function LCS-LENGTH(X,Y, m, n)
let b[1:m, 1:n] and c[0:m, 0:n] be new tables
for i = 1 to m do
    c[i,0] = 0
for j = 0 to n do
    c[0,j] = 0
```

طولانی‌ترین زیر رشته مشترک

Algorithm Longest Common Subsequence Length

```
function LCS-LENGTH(X,Y, m, n)
for i = 1 to m do  ▷ compute table entries in row-major order
    for j = 1 to n do
        if X[i] == Y[j] then
            c[i, j] = c[i-1, j-1] + 1
            b[i, j] = "↖"
        else if c[i-1, j] ⩾ c[i, j-1] then
            c[i, j] = c[i-1, j]
            b[i, j] = "↑"
        else
            c[i, j] = c[i, j-1]
            b[i, j] = "←"
return c and b
```

طولانی‌ترین زیر رشته مشترک

- گام چهارم : ساختن بلندترین زیر دنبالهٔ مشترک

- با استفاده از جدول b که توسط الگوریتم قبل ساخته شده می‌توانیم زیر دنبالهٔ مشترک X و Y را بسازیم، بدین ترتیب که با $b[m, n]$ شروع می‌کنیم و جهت نشانه‌ها را دنبال می‌کنیم. علامت $\nwarrow$ در جدول b نشان می‌دهد که $x_i = y_j$ در طولانی‌ترین زیررشتهٔ مشترک است.

طولانی‌ترین زیر رشته مشترک

- برای مثال به ازای دو دنبالهٔ $X = \langle A, B, C, B, D, A, B \rangle$ و $Y = \langle B, D, C, A, B, A \rangle$ جدول زیر به‌دست می‌آید.

	j	0	1	2	3	4	5	6
i		y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	↑ 0	↑ 0	↑ 0	↖ 1	← 1	↖ 1
2	B	0	↖ 1	← 1	← 1	↑ 1	↖ 2	← 2
3	C	0	↑ 1	↑ 1	↖ 2	← 2	↑ 2	↑ 2
4	B	0	↖ 1	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	← 3
5	D	0	↑ 1	↖ 2	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↑ 3
6	A	0	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	↑ 3	↖ 4
7	B	0	↖ 1	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↖ 4	↑ 4

طولانی‌ترین زیر رشته مشترک

Algorithm Print Longest Common Subsequence

```
   function PRINT-LCS(b, X, i, j)
if i == 0 or j ==0 then
    return      ▷ the longest common subsequence has length 0
if b[i, j] == "↖" then
    Print-LCS(b, X, i-1, j-1)
    print X[i]      ▷ same as Y[j]
else if b[i, j] = "↑" then
    Print-LCS(b, X, i-1, j)
else
    Print-LCS(b, X, i, j-1)
```

طولانی‌ترین زیر رشته مشترک

- پس از طراحی یک الگوریتم معمولاً به دنبال روش‌هایی برای بهبود در زمان اجرا و میزان حافظه می‌گردیم.
- در الگوریتم طولانی‌ترین زیر دنبالهٔ مشترک به طور مثال می توانیم جدول b را حذف کنیم و اطلاعات لازم برای ساختن بلندترین زیر دنبالهٔ مشترک را از جدول c به دست آوریم.
- هریک از درایه‌های $c[i,j]$ از طریق یکی از سه درایهٔ $c[i-1,j-1]$ ، $c[i-1,j]$ ، $c[i,j-1]$ محاسبه شده است که در زمان ثابت می‌توانیم بدون جدول b به دست آوریم درایه $c[i,j]$ چگونه محاسبه شده است.
- بنابراین طولانی‌ترین زیردنبالهٔ مشترک را می‌توانیم همچنان در زمان $\Theta(m+n)$ بسازیم و جدول b را حذف کرده و از حافظهٔ مورد نیاز به میزان mn بکاهیم.

درخت جستجوی دودویی بهینه

- فرض کنید می‌خواهیم برنامه‌ای طراحی کنیم که متون انگلیسی را به فارسی ترجمه کند. به ازای هر کلمهٔ انگلیسی در یک متن باید با استفاده از یک فرهنگ لغت، معادل فارسی آن را بیابیم. برای یک جستجوی بهینه می‌توانیم یک درخت جستجوی دودویی با n رأس بسازیم که هر رأس آن یک کلمهٔ انگلیسی و معادل فارسی آن را شامل شود.

- اگر از یک درخت جستجوی دودویی متوازن [1] استفاده کنیم، می‌توانیم جستجوی هر کلمه را در یک درخت با n کلمه در زمان $O(\lg n)$ انجام دهیم.

[1] balanced binary search tree

درخت جستجوی دودویی بهینه

- اما کلمات مختلف تعداد تکرارهای مختلف دارند. برای مثال کلمات a یا the در انگلیسی بسیار پر تکرارند و بهتر است این کلمات در درخت جستجو به ریشه نزدیک‌تر باشند و برخی از اسامی خاص بسیار کم تکرارند و بهتر است که فاصلهٔ آنها از ریشه بیشتر باشد.
- با استفاده از درخت جستجوی دودویی بهینه [1] می‌توان کلمات را به گونه‌ای ذخیره و بازیابی کرد که کلمات با احتمال وقوع بیشتر نزدیک‌تر به ریشه قرار بگیرند.

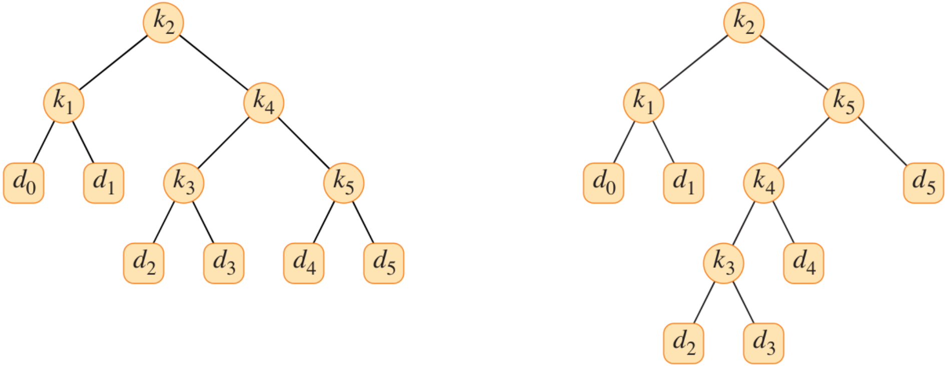
[1] optimal binary search tree

درخت جستجوی دودویی بهینه

- دنبالهٔ $K = \langle k_1, k_2, \cdots, k_n \rangle$ با n کلید را در نظر بگیرید به طوری‌که $k_1 < k_2 < \cdots < k_n$.
- می‌خواهیم یک درخت جستجوی دودویی بهینه حاوی این کلیدها بسازیم.
- به ازای هر یک از کلیدهای k_i ، یک احتمال وقوع p_i نیز داده شده است.
- از آنجایی که برخی از کلیدها در درخت جستجو وجود ندارد (برای مثال کلماتی در کاربرد ترجمه در انگلیسی وجود دارند که معادل فارسی ندارند) ، تعداد $n+1$ کلید بی‌استفاده $d_0, d_1, d_2, \cdots, d_n$ نیز داریم که نماینده این کلیدها هستند. در واقع d_0 نمایندهٔ همهٔ کلیدهایی است که از k_1 کوچکترند و d_n نمایندهٔ همهٔ کلیدهایی است که از k_n بزرگ‌ترند و همچنین به ازای $i = 1, 2, \cdots, n-1$ ، کلید d_i نمایندهٔ همهٔ مقادیری است که بین k_i و k_{i+1} قرار دارند. همچنین به ازای هر کلید d_i یک احتمال وقوع q_i داریم.

درخت جستجوی دودویی بهینه

- در شکل زیر دو درخت جستجوی دودویی بهینه را با تعداد ۵ کلید مشاهده می‌کنیم.



درخت جستجوی دودویی بهینه

- هر یک از کلیدهای k_i یک رأس میانی است و هر یک از کلیدهای بی‌استفادهٔ d_i یک برگ در درخت جستجوی بهینه است.
- از آنجایی که هر جستجو یا موفق است (که منجر به پیدا کردن یک کلید k_i می‌شود) و یا ناموفق (که منجر به رسیدن به کلید بی‌استفادهٔ d_i است)، بنابراین داریم :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i + \sum_{i=0}^{n} q_i = 1$$

درخت جستجوی دودویی بهینه

- با اطلاع داشتن از احتمال وقوع هر یک از کلیدها، می‌توانیم هزینه جستجو در یک درخت جستجو را پیدا کنیم.
- فرض کنید هزینهٔ جستجوی یک کلید در درخت به ازای هر بار جستجو برابر با تعداد رئوس بررسی شده برای رسیدن به آن کلید باشد. بنابراین هزینهٔ جستجوی یک کلید در یک جستجو برابر خواهد بود با عمق [1] رأس مربوط به آن کلید به علاوهٔ یک. ریشه در عمق صفر قرار دارد، بنابراین هزینهٔ یافتن کلید مربوط به ریشه در یک جستجو برابر است با یک.
- برای یافتن هزینهٔ جستجوی یک کلید در یک متن، باید هزینهٔ یک بار جستجو را در احتمال وقوع آن کلید ضرب کنیم.
- نهایتا برای یافتن هزینهٔ جستجوی یک درخت باید هزینهٔ جستجوی همهٔ کلیدها را با هم جمع کنیم.

[1] depth

درخت جستجوی دودویی بهینه

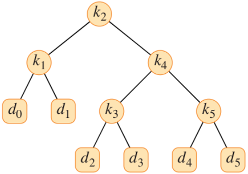
- بنابراین هزینهٔ جستجو در درخت T برابر است با :

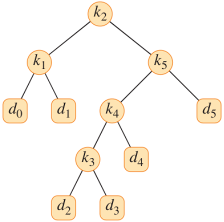
$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\text{search cost in T}] &= \sum_{i=1}^{n}(\mathrm{depth}_T(k_i)+1)\cdot p_i + \sum_{i=0}^{n}(\mathrm{depth}_T(d_i)+1)\cdot q_i \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{n}\mathrm{depth}_T(k_i)\cdot p_i + \sum_{i=0}^{n}\mathrm{depth}_T(d_i)\cdot q_i\end{aligned}$$

- در اینجا depth_T تابعی است که عمق یک کلید را در درخت T نشان می‌دهد.

درخت جستجوی دودویی بهینه

- در شکل زیر هزینهٔ جستجو برای دو درخت جستجو محاسبه شده است.





node	depth	probability	contribution
k_1	1	0.15	0.30
k_2	0	0.10	0.10
k_3	2	0.05	0.15
k_4	1	0.10	0.20
k_5	2	0.20	0.60
d_0	2	0.05	0.15
d_1	2	0.10	0.30
d_2	3	0.05	0.20
d_3	3	0.05	0.20
d_4	3	0.05	0.20
d_5	3	0.10	0.40
Total			2.80

node	depth	probability	contribution
k_1	1	0.15	0.30
k_2	0	0.10	0.10
k_3	3	0.05	0.20
k_4	2	0.10	0.30
k_5	1	0.20	0.40
d_0	2	0.05	0.15
d_1	2	0.10	0.30
d_2	4	0.05	0.25
d_3	4	0.05	0.25
d_4	3	0.05	0.20
d_5	2	0.10	0.30
Total			2.75

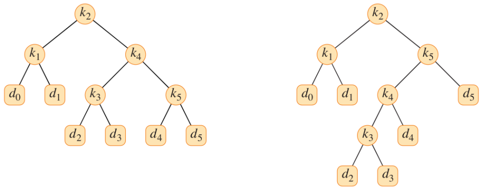
درخت جستجوی دودویی بهینه

- حال به ازای تعدادی کلید به همراه احتمال وقوع آنها، می‌خواهیم یک درخت جستجوی دودویی بیابیم که هزینهٔ جستجو در آن حداقل است.
- به این درخت، درخت جستجوی دودویی بهینه [1] گفته می‌شود.

[1] optimal binary search tree

درخت جستجوی دودویی بهینه

- در شکل زیر دو درخت جستجوی دودویی نشان داده شده‌اند. هزینهٔ جستجو در درخت سمت چپ 2.80 و در درخت سمت راست برابر با 2.75 است. درخت سمت راست یک درخت جستجوی بهینه است. در اینجا می‌توانیم ببینیم درخت جستجوی دودویی بهینه، الزاماً درختی نیست که عمق آن کمتر باشد.



node	depth	probability	contribution	node	depth	probability	contribution
k_1	1	0.15	0.30	k_1	1	0.15	0.30
k_2	0	0.10	0.10	k_2	0	0.10	0.10
k_3	2	0.05	0.15	k_3	3	0.05	0.20
k_4	1	0.10	0.20	k_4	2	0.10	0.30
k_5	2	0.20	0.60	k_5	1	0.20	0.40
d_0	2	0.05	0.15	d_0	2	0.05	0.15
d_1	2	0.10	0.30	d_1	2	0.10	0.30
d_2	3	0.05	0.20	d_2	4	0.05	0.25
d_3	3	0.05	0.20	d_3	4	0.05	0.25
d_4	3	0.05	0.20	d_4	3	0.05	0.20
d_5	3	0.10	0.40	d_5	2	0.10	0.30
Total			2.80	Total			2.75

درخت جستجوی دودویی بهینه

- همچنین درخت جستجوی دودویی بهینه الزاماً درختی نیست که همهٔ کلیدها با احتمال وقوع بیشتر در ریشهٔ آن باشند. برای مثال کلید k_5 بیشترین احتمال وقوع را دارد، اما ریشهٔ درخت جستجو k_2 است.

درخت جستجوی دودویی بهینه

- همانند مسئله ضرب زنجیره‌ای ماتریس‌ها، با استفاده از جستجوی کامل برای بررسی همهٔ درخت‌های جستجو نمی‌توانیم در زمان چندجمله‌ای درخت جستجوی دودویی بهینه را به دست آوریم. تعداد همهٔ درخت‌های جستجوی دودویی از مرتبهٔ نمایی است، بنابراین بررسی همهٔ درخت‌های جستجو ممکن نیست.
- می‌خواهیم این مسئله را با استفاده از برنامه‌ریزی پویا حل کنیم.

درخت جستجوی دودویی بهینه

- گام اول : ساختار یک درخت جستجوی دودویی بهینه
- برای بررسی ساختار و مشخص کردن ویژگی‌های یک درخت بهینه، ابتدا ساختار درخت و زیردرخت‌های آن را بررسی می‌کنیم. در واقع باید اثبات کنیم این مسئله دارای زیرساختار بهینه است، بدین معنی که جواب زیرمسئله‌ها را می‌توان از جواب مسئله استخراج کرد.
- اگر یک درخت جستجوی دودویی بهینه T داشته باشیم، زیر درخت T' نیز باید بهینه باشد. اگر یک زیر درخت T'' وجود داشت که هزینهٔ آن کمتر از T' بود، می‌توانستیم T' را با T'' جایگزین کنیم و یک درخت با هزینه کمتر به جای T بیابیم که با فرض بهینه بودن T در تناقض است.
- حال می‌خواهیم مسئله را با استفاده از جواب زیر مسئله‌های بهینهٔ آن حل کنیم.

درخت جستجوی دودویی بهینه

- یک زیردرخت دلخواه را در نظر بگیرید. این زیردرخت شامل کلیدهای $k_i, \cdots, k_j$ است که برگ‌های آن را کلیدهای $d_{i-1}, \cdots, d_j$ تشکیل می‌دهند، به طوری‌که $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$.
- به ازای کلیدهای $k_i, \cdots, k_j$ ، یکی از این کلیدها، برای مثال کلید k_r به طوری‌که $i \leqslant r \leqslant j$ ، ریشهٔ زیردرخت بهینه برای این کلیدهاست.
- زیردرخت سمت چپ ریشهٔ k_r شامل کلیدهای $k_i, \cdots, k_{r-1}$ و کلیدهای برگ $d_{i-1}, \cdots, d_{r-1}$ است و زیردرخت سمت راست شامل کلیدهای $k_{r+1}, \cdots, k_j$ و کلیدهای برگ $d_r, \cdots, d_j$ است.
- فرض کنید در یک زیردرخت با کلیدهای $k_i, \cdots, k_j$ ، کلید k_i را به عنوان ریشه انتخاب کنیم. زیردرخت سمت چپ این زیردرخت یک برگ با کلید d_{i-1} است.
- به طور مشابه، اگر k_j را به عنوان ریشه در نظر بگیریم زیر درخت سمت راست این زیر درخت شامل یک برگ با کلید d_j است.

درخت جستجوی دودویی بهینه

- گام دوم : راه حل بازگشتی

- حال برای تعریف راه حل بهینه به صورت بازگشتی، زیر درختی شامل کلیدهای $k_i, \cdots, k_j$ را در نظر بگیرید به طوری‌که $i \geqslant 1$ ، $j \leqslant n$ و $j \geqslant i-1$. وقتی $j = i-1$ باشد، تنها کلید برگ d_{i-1} را خواهیم داشت.

- فرض کنید $e[i, j]$ هزینهٔ جستجوی یک درخت جستجوی بهینه با کلیدهای $k_i, \cdots, k_j$ باشد. هدف محاسبهٔ هزینه جستجو برای همهٔ کلیدهاست که برابر با مقدار $e[1, n]$ می‌باشد.

- اگر $j = i-1$ باشد، آنگاه مسئله تنها شامل یک کلید d_{i-1} می‌شود. در اینصورت هزینهٔ جستجو برابراست با $e[i, i-1] = q_{i-1}$.

- وقتی $j \geqslant i$ باشد، باید ریشهٔ k_r را از بین کلیدهای $k_i, \cdots, k_j$ انتخاب کنیم و یک درخت جستجوی بهینه با کلیدهای $k_i, \cdots, k_{r-1}$ به عنوان زیردرخت سمت چپ ریشهٔ k_r و یک درخت جستجوی بهینه با کلیدهای $k_{r+1}, \cdots, k_j$ به عنوان زیردرخت سمت راست ریشهٔ k_r بسازیم.

درخت جستجوی دودویی بهینه

- وقتی یک زیردرخت بهینه T' به عنوان زیردرخت یک رأس قرار می‌گیرد و درخت T را تشکیل می‌دهد، درواقع عمق هر یک از رأس‌های T' در درخت T یک واحد افزوده می‌شود. در اینصورت هزینهٔ جستجو برای رئوس زیردرخت T' در درخت T به میزان مجموع احتمال رئوس T' افزایش می‌یابد.

درخت جستجوی دودویی بهینه

- برای مثال فرض کنید درخت T' با کلیدهای k_1, k_2, k_3 را تشکیل داده باشیم. هزینه جستجوی این درخت (بدون در نظر گرفتن کلیدهای بی‌استفاده) برابر است با $E[T'] = \sum_{i=1}^{3} (\text{depth}_{T'}(k_i) + 1) \cdot p_i$.
- اگر زیردرخت T' در درخت T قرار بگیرد به طوری که ریشه درخت T کلید k_4 و T' زیردرخت سمت چپ در درخت T باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
E[T] &= p_4 + \left(\sum_{i=1}^{3} (\text{depth}_T(k_i) + 1) \cdot p_i \right) \\
&= p_4 + \left(\sum_{i=1}^{3} (\text{depth}_{T'}(k_i) + 1 + 1) \cdot p_i \right) \\
&= p_4 + E[T'] + \left(\sum_{i=1}^{3} p_i \right)
\end{aligned}
$$

- برای یک زیردرخت با کلیدهای $k_i, \cdots, k_j$ مجموع احتمال‌ها برابر است با :

$$w(i,j) = \sum_{l=i}^{j} p_l + \sum_{l=i-1}^{j} q_l$$

- بنابراین اگر k_r ریشهٔ یک زیردرخت بهینه با کلیدهای $k_i, \cdots, k_j$ باشد، خواهیم داشت :

$$e[i,j] = p_r + (e[i, r-1] + w(i, r-1)) + (e[r+1, j] + w(r+1, j))$$

- از آنجایی که مجموع احتمال وقوع همهٔ رئوس در یک درخت برابر است با مجموع احتمال‌های وقوع رئوس زیردرخت چپ به علاوهٔ احتمال وقوع ریشه به علاوهٔ احتمال‌های وقوع رئوس زیردرخت راست، بنابراین رابطه زیر برقرار است :

$$w(i, j) = w(i, r-1) + p_r + w(r+1, j)$$

- بنابراین می‌توانیم رابطه بازگشتی برای محاسبه هزینهٔ جستجو در درخت بهینه را به صورت زیر بازنویسی کنیم :

$$e[i, j] = e[i, r-1] + e[r+1, j] + w(i, j)$$

درخت جستجوی دودویی بهینه

- در اینجا فرض کردیم که می‌دانیم کدام رأس به عنوان رأس ریشهٔ k_r انتخاب می‌شود.
- از آنجایی که هدف این است که ریشه‌ای را انتخاب کنیم که مقدار هزینه جستجو را کاهش دهد، بنابراین رابطهٔ بازگشتی برای محاسبهٔ هزینه جستجو در درخت بهینه را به صورت زیر می‌نویسیم.

$$e[i,j] = \begin{cases} q_{i-1} & \text{اگر } j = i-1 \\ \min\{e[i,r-1] + e[r+1,j] + w(i,j) : i \leqslant r \leqslant j\} & \text{اگر } i \leqslant j \end{cases}$$

- بنابراین رابطه‌ای برای جدول $e[i,j]$ جهت استفاده در یک الگوریتم برنامه‌ریزی پویا به صورت بازگشتی محاسبه کردیم.

درخت جستجوی دودویی بهینه

- جدول $e[i, j]$ تنها میزان هزینه جستجوی بهینه را نگهداری می‌کند.
- به یک جدول دیگر نیاز داریم برای اینکه بتوانیم ساختار درخت را نیز نگهداری کنیم تا در نهایت بتوانیم درخت جستجو بهینه را بازسازی کنیم.
- این اطلاعات را در جدول $root[i, j]$ نگهداری می‌کنیم. درواقع مقدار $root[i, j]$ به ازای $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ برابراست با اندیس r برای کلید k_r که ریشهٔ درخت جستجوی بهینه‌ای است که برای کلیدهای $k_i, \cdots, k_j$ یافته می‌شود.

درخت جستجوی دودویی بهینه

- گام سوم : محاسبهٔ هزینهٔ جستجو در یک درخت جستجوی دودویی بهینه
- حال با استفاده از روش برنامه‌ریزی پویا می‌توانیم مقادیر $e[i, j]$ را به ترتیب از پایین به بالا محاسبه می‌کنیم. بنابراین کل جدول را به ازای $e[1 : n + 1, 0 : n]$ مقداردهی می‌کنیم.
- اندیس اول از 1 شروع شده و با $n + 1$ خاتمه می‌یابد، زیرا برای داشتن یک زیردرخت شامل تنها کلید d_n نیاز داریم $e[n + 1, n]$ را محاسبه کنیم. اندیس دوم باید از صفر شروع شود، زیرا برای داشتن یک زیردرخت تنها با کلید d_0 ، باید مقدار $e[1, 0]$ را محاسبه کنیم.
- همهٔ مقادیر $e[i, j]$ به ازای $j \geqslant i - 1$ باید محاسبه شوند. جدول $root[i, j]$ ریشهٔ زیردرخت‌ها را با کلیدهای $k_i, \cdots, k_j$ ذخیره می‌کند، به طوری‌که $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$.

درخت جستجوی دودویی بهینه

- همچنین می‌توانیم از یک جدول دیگر بهره بگیریم تا محاسبات را سریع‌تر انجام دهیم.
- به جای محاسبه $w(i,j)$ برای هر یک از درایه‌های $e[i,j]$ جدول $w[1:n+1, 0:n]$ را محاسبه می‌کنیم. در حالت پایه، مقدار $w[i, i-1] = q_{i-1}$ به ازای $1 \leqslant i \leqslant n+1$
- به ازای $i \geqslant j$ درایه‌های جدول w را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم.

$$w[i,j] = w[i,j-1] + p_j + q_j$$

- بنابراین می‌توانیم $\Theta(n^2)$ مقدار $w[i,j]$ را هرکدام در زمان $\Theta(1)$ محاسبه کنیم.

درخت جستجوی دودویی بهینه

- الگوریتم زیر مسئلهٔ درخت جستجوی دودویی بهینه را به روش برنامه‌ریزی پویا حل می‌کند.

Algorithm Optimal-BST

```
function OPTIMAL-BST(p, q, n)
let e[1:n+1 , 0:n], w[1:n+1 , 0:n], and root[1:n , 1:n] be new tables
for i = 1 to n + 1 do  ▷ base cases
    e[i,i-1] = q[i-1]
    w[i,i-1] = q[i-1]
```

Algorithm Optimal–BST

```
function OPTIMAL-BST(p, q, n)
for t = 1 to n do
    for i = 1 to n - t + 1 do
        j = i + t - 1
        e[i,j] = ∞
        w[i,j] = w[i,j-1] + p[j] + q[j]
        for r = i to j do            ▷ try all possible roots r
            q = e[i,r-1] + e[r+1,j] + w[i,j]
            if q < e[i,j] then       ▷ new minimum?
                e[i,j] = q
                root[i,j] = r
return e and root
```

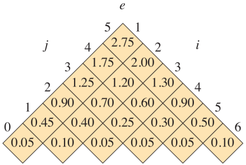
درخت جستجوی دودویی بهینه

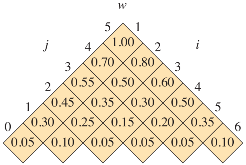
- الگوریتم درخت جستجوی دودویی بهینه محاسبات را در زمان $\Theta(n^3)$ انجام می‌دهد و به یک جدول با اندازهٔ $\Theta(n^2)$ نیاز دارد.

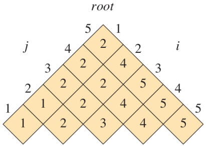
درخت جستجوی دودویی بهینه

- در شکل زیر، جدول‌های $e[i,j]$ ، $w[i,j]$ و $root[i,j]$ با استفاده از الگوریتم برنامه‌ریزی پویا برای جستجوی دودویی بهینه برای کلیدهای تعیین شده زیر، محاسبه شده‌اند.

i	0	1	2	3	4	5
p_i		0.15	0.10	0.05	0.10	0.20
q_i	0.05	0.10	0.05	0.05	0.05	0.10







کوله‌پشتی ۰-۱

- یک دزد با یک کوله‌پشتی به یک فروشگاه دستبرد می‌زند. وزنی که کوله‌پشتی او می‌تواند تحمل کند W است. در این فروشگاه تعداد n کالا وجود دارد. هر کالای item_i دارای وزن w_i و ارزش v_i است. دزد می‌خواهد از میان این کالاها تعدادی را انتخاب کرده در کوله‌پشتی خود قرار دهد به طوری‌که مجموع وزن کالاهای انتخاب شده از ظرفیت کوله‌پشتی یعنی W بیشتر نباشد و مجموع ارزش کالاهای دزدیده شده حداکثر باشد.

- بنابراین دزد می‌خواهد از مجموعهٔ $S = \{\mathrm{item}_1, \mathrm{item}_2, \cdots, \mathrm{item}_n\}$ یک زیر مجموعه A را انتخاب کند به طور $\sum_{\mathrm{item}_i \in A} v_i$ بیشترین مقدار ممکن باشد و $W \leqslant (\sum_{\mathrm{item}_i \in A} w_i)$ باشد.

- تعداد همهٔ حالت‌های ممکن تعداد همهٔ زیر مجموعه‌های S است که برابر است با 2^n جایی که n تعداد کالاهاست.

- در این مسئله دزد یا می‌تواند یک کالا را بردارد یا بگذارد و امکان شکستن کالاها به دو قسمت وجود ندارد. به همین دلیل به آن مسئله کوله پشتی ۰-۱ [1] گفته می‌شود. در مسئلهٔ کوله‌پشتی کسری [2] دزد می‌تواند یک کالا را به دو قسمت تقسیم کرده، یک قسمت را در کوله‌پشتی قرار دهد و قسمت دیگر را در فروشگاه بگذارد.

[1] 0-1 knapsack
[2] fractional knapsack

کوله‌پشتی ۱-۰

- در گام اول باید اثبات کنیم این مسئله دارای زیر ساختار بهینه است یا به عبارت دیگر قانون بهینگی [1] برای آن صادق است.
- فرض کنید A زیر مجموعه بهینه از n کالا باشد. دو حالت وجود دارد : یا A شامل item_n می‌شود یا خیر.
- اگر A کالای item_n را شامل نشود، A یک زیر مجموعه بهینه برای $n-1$ کالا نیز هست.
- اگر A کالای item_n را شامل شود، آنگاه مجموع ارزش‌های کالاهای A برابر است با v_n به علاوه بیشترین ارزش ممکن که از $n-1$ کالا برای یک کوله‌پشتی با ظرفیت $W-w_n$ به دست آمده است. این گزاره‌ها را می‌توانیم با برهان خلف اثبات کنیم.

[1] principle of optimality

کوله‌پشتی ۱-۰

- در گام دوم باید یک رابطه بازگشتی برای محاسبه جواب مسئله براساس جواب زیر مسئله‌ها بنویسیم.
- فرض کنید $P[i][w]$ بیشترین ارزش به دست آمده از i کالای اول است وقتی که ظرفیت کوله‌پشتی w باشد.
- می‌توانیم یک رابطه بازگشتی به صورت زیر برای محاسبه $P[i][w]$ بنویسیم.

$$P[i][w] = \begin{cases} \max(P[i-1][w], v_i + P[i-1][w-w_i]) & \text{اگر } w_i \leqslant w \\ P[i-1][w] & \text{اگر } w_i > w \end{cases}$$

- در این مسئله به دنبال $P[n][W]$ می‌گردیم.

کوله‌پشتی ۱-۰

- می‌توانیم جدولی تشکیل دهیم که هر سطر i در آن نشان دهنده این باشد که فقط از i کالای اول استفاده کرده‌ایم و ستون‌های آن همهٔ وزن‌های ممکن از 0 تا W باشد.
- مقادیر $P[0][w]$ و $P[i][0]$ برابر با صفر هستند.
- این جدول دارای nW خانه است پس محاسبه این جدول در زمان $\Theta(nW)$ امکان‌پذیر است.

کوله‌پشتی ۱-۰

- توجه کنید که هیچ رابطه‌ای بین n و W وجود ندارد و این الگوریتم می‌تواند از الگوریتمی که همه حالات را بررسی می‌کند بدتر باشد. برای مثال اگر $W = n!$ باشد الگوریتم برنامه‌ریزی پویا از مرتبه $n!$ است درحالی که بررسی همه حالات در زمان $\Theta(2^n)$ امکان‌پذیر است.
- بنابراین تنها در صورتی از برنامه‌ریزی پویا استفاده می‌کنیم که $nW < 2^n$ باشد.
- پیچیدگی زمانی $\Theta(nW)$ گرچه شبیه به پیچیدگی زمانی چندجمله‌ای است، اما در واقع چندجمله‌ای نیست و مقدار W می‌تواند یک تابع غیرچندجمله‌ای از ورودی مسئله باشد. این پیچیدگی زمانی را پیچیدگی زمانی شبه‌چندجمله‌ای [1] می‌نامیم.

[1] pseudo-polynomial time complexity