

به نام خدا

ساختمان داده

آرش شفيعی



داده ساختارهای پایه

- در این بخش با چند داده ساختار پایه از جمله آرایه‌ها¹، ماتریس‌ها²، پشته‌ها³، صف‌ها⁴، و لیست‌های پیوندی⁵ آشنا خواهیم شد.

¹ arrays

² matrices

³ stacks

⁴ queues

⁵ Linked lists

- یک آرایه داده ساختاری است که دنباله‌ای از عناصر (که هرکدام مقداری را نگه‌داری می‌کند) را در حافظه ذخیره می‌کند. هرکدام از عناصر آرایه با یک اندیس تعیین می‌شوند. اندیس در واقع مکان یک عنصر در آرایه را مشخص می‌کند.
- اگر اندیس اول آرایه s باشد و آرایه در آدرس حافظه a ذخیره شود و هرکدام از عناصر آرایه b بایت را در حافظه اشغال کنند، آنگاه i امین عنصر آرایه در حافظه در بایت $a + b(i - s)$ تا $a + b(i - s + 1) - 1$ قرار می‌گیرد.
- اگر آرایه با اندیس ۱ شروع شود، عنصر i ام بایت‌های $a + b(i - 1)$ تا $a + bi - 1$ را اشغال می‌کند. اگر آرایه با اندیس ۰ آغاز شود، آنگاه عنصر i ام آرایه بایت‌های $a + bi$ تا $a + b(i + 1) - 1$ را اشغال می‌کند.
- با فرض بر اینکه کامپیوتر می‌تواند به همه فضاها حافظه مستقیماً در یک زمان معین دسترسی پیدا کند، دسترسی به عناصر آرایه در زمان ثابت صورت می‌گیرد.

- ماتریس یک آرایه دو بعدی است که می‌توانیم آن را توسط چند آرایه یک بعدی نمایش دهیم.
- دو روش معمول ذخیره ماتریس‌ها ترتیب سطری¹ و ترتیب ستونی² نام دارند.
- فرض کنید یک ماتریس با ابعاد $m \times n$ یا به عبارت دیگر یک ماتریس با m سطر و n ستون داریم.
- در ترتیب سطری، ماتریس سطر به سطر در حافظه ذخیره می‌شود و در ترتیب ستونی، ماتریس ستون به ستون ذخیره می‌شود.

¹ row-major order

² column-major order

- برای مثال ماتریس $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ با ابعاد 2×3 را در نظر بگیرید.
- در ترتیب سطری ماتریس به صورت $1\ 2\ 3 ; 4\ 5\ 6$ در حافظه ذخیره می‌شود و در ترتیب ستونی ماتریس به صورت $1\ 4 ; 2\ 5 ; 3\ 6$ در حافظه ذخیره می‌شود.

– در شکل زیر نشان داده شده است که این ماتریس چگونه در یک آرایه در ترتیب سطری و ترتیب ستونی ذخیره می‌شود.

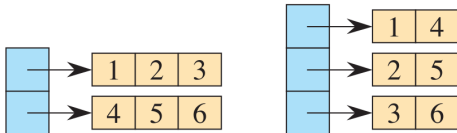
1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

1	4	2	5	3	6
---	---	---	---	---	---

- بنابراین عنصر $M[i, j]$ در ترتیب سطری در اندیس $(j - s) + (n(i - s) + s)$ قرار می‌گیرد و در ترتیب ستونی در اندیس $(i - s) + (m(j - s) + s)$ قرار می‌گیرد.
- وقتی اندیس $s = 1$ است، در ترتیب سطری اندیس عنصر $M[i, j]$ برابر است با $n(i - 1) + j$ و در ترتیب ستونی برابر است با $i + m(j - 1)$
- وقتی اندیس $s = 0$ است، در ترتیب سطری اندیس عنصر $M[i, j]$ برابر است با $ni + j$ و در ترتیب ستونی برابر است با $i + mj$
- برای مثال عنصر $M[2, 1]$ ، وقتی $s = 1$ است، با ترتیب سطری در مکان $4 = 3(2 - 1) + 1$ ذخیره می‌شود و با ترتیب ستونی در مکان $2 = 2(1 - 1) + 2$ ذخیره می‌شود.

– همچنین ماتریس را می‌توان با استفاده از چند آرایه ذخیره کرد. در ترتیب سطری هر سطر در یک آرایه مجزا ذخیره می‌شود و در ترتیب ستونی هر ستون در یک آرایه مجزا ذخیره می‌شود.

- در شکل زیر یک ماتریس در دو ترتیب سطری و ستونی با استفاده از چند آرایه ذخیره شده است.



- در ترتیب سطری هر سطر در یک آرایه n عنصری ذخیره می‌شود. یک آرایه دیگر حاوی m عنصر است که در شکل به رنگ آبی نشان داده شده است. هریک از عناصر این آرایه به یکی از سطرهاى آرایه اشاره می‌کند. فرض کنید آرایه آبی رنگ را A بنامیم. آنگاه $A[i]$ به سطر i ام ماتریس M اشاره می‌کند و عنصر $A[i][j]$ عنصر $M[i, j]$ را ذخیره می‌کند.
- در ترتیب ستونی، هر ستون در یک آرایه ذخیره می‌شود. تعداد n آرایه در این حالت وجود دارد که اندازه هر کدام m است. عنصر $M[i, j]$ در عنصر $A[j][i]$ ذخیره می‌شود.

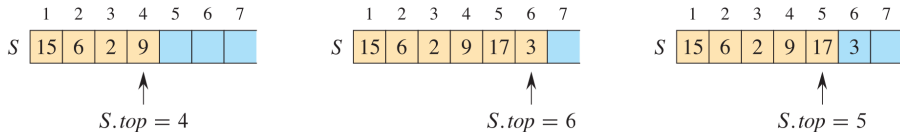
- نمایش تک آرایه‌ای ماتریس‌ها کارایی بالاتری دارد. مزیت نمایش چند آرایه‌ای این است که می‌تواند ماتریس‌هایی را ذخیره کند که اندازه سطرها و ستون‌های آنها متفاوت است و بنابراین انعطاف پذیری بالاتری دارد.

- پشته¹ داده ساختاری است که در آن امکان درج و حذف عناصر وجود دارد. وقتی عملیات حذف بر روی پشته اعمال می‌شود، آخرین عنصری که به پشته اضافه شده است، حذف می‌شود.
- پشته بر اساس استراتژی خروج به ترتیب عکس ورودی پیاده‌سازی می‌شود بدین معنی که اولین عنصری که وارد پشته می‌شود آخر از همه از پشته خارج می‌شود. این استراتژی LIFO² نامیده می‌شود.
- عملیات درج در پشته Push و عملیات حذف از پشته Pop نامیده می‌شوند.
- در زبان انگلیسی به عملیات برداشتن یک ظرف از روی پشته‌ای از ظروف Pop و به عملیات گذاشتن یک ظرف بر روی پشته‌ای از ظروف Push گفته می‌شود و بدین دلیل این اسامی در ساختار داده پشته استفاده شده‌اند.
- ترتیب برداشتن ظروف از روی پشته‌ای از ظروف برعکس ترتیب قرار دادن آن‌ها بر روی پشته است.

¹ stack

² last-in first-out

– شکل زیر چگونگی پیاده‌سازی پشته‌ای از n عنصر را در آرایه $S[1 : n]$ نشان می‌دهد.



– پشته یک ویژگی $S.top$ دارد که اندیس آخرین عنصری است که به پشته اضافه شده است و ویژگی $S.size$ اندازه یا ظرفیت پشته را مشخص می‌کند که همان اندازه آرایه‌ای است که پشته با استفاده از آن پیاده‌سازی شده است. عناصر پشته در $S[1 : S.top]$ قرار می‌گیرند. عنصر $S[1]$ عنصر انتهای¹ پشته و عنصر $S[S.top]$ عنصر روی² پشته نامیده می‌شوند.

¹ bottom

² top

- وقتی $S.top = 0$ است، پشته هیچ عنصری را شامل نمی‌شود و خالی¹ است.
- تابعی به نام Stack-Empty بررسی می‌کند آیا پشته خالی است یا خیر.
- اگر بخواهیم از یک پشته خالی عنصری برداریم با خطای پشته خالی² مواجه می‌شویم. همچنین اگر $S.top$ بیشتر از $S.size$ شود با خطای سرریز پشته³ مواجه می‌شویم.

¹ empty

² underflow

³ overflow

- توابع Stack-Empty ، Push و Pop در زیر پیاده‌سازی شده‌اند. پیچیدگی زمانی هریک از این توابع $O(1)$ است.

Algorithm Stack Empty

```
function STACK-EMPTY(s)
1: if S.top = 0 then
2:   return true
3: else return false
```

Algorithm Push

```
function PUSH(S,x)
1: if S.top == S.size then
2:   error "overflow"
3: else S.top = S.top + 1
4:   S[S.top] = x
```

Algorithm Pop

— **function** POP(S)
1: **if** Stack-Emty(S) **then**
2: **error** "underflow"
3: **else** S.top = S.top - 1
4: **return** S[S.top + 1]

- صف ¹ ساختار داده‌ای است که در آن عناصر به همان ترتیبی که وارد می‌شوند از آن خارج می‌شوند. به عبارت دیگر اولین عنصر وارد شده در صف اولین عنصری است که از آن خارج می‌شود.
- صف استراتژی FIFO ² را پیاده‌سازی می‌کند بدین معنا که اولین عنصر وارد شده اولین عنصری است که خارج می‌شود.
- عملیات درج در صف Enqueue و عملیات حذف Dequeue نامیده می‌شوند.
- ساختار داده صف دقیقا همانند صف‌هایی است که در مکان‌های عمومی برای خدمت‌رسانی ایجاد می‌شود. اولین مشتری که وارد صف می‌شود اولین کسی است که از صف خارج می‌شود.

¹ queue

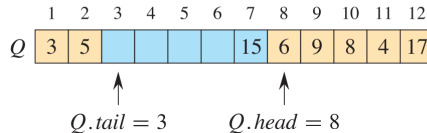
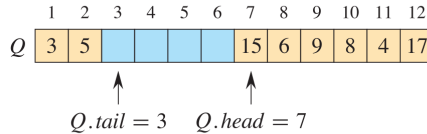
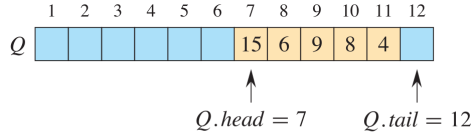
² first-in first-out

- یک صف شامل یک ابتدا¹ و یک انتها² است.
- وقتی یک عنصر وارد صف می‌شود در انتهای صف قرار می‌گیرد همانند وقتی که یک مشتری وارد صف می‌شود. عنصری که از صف خارج می‌شود نیز عنصری ابتدای صف است همانند اولین مشتری در صف که به او خدمت رسانی می‌شود.

¹ head

² tail

- شکل زیر روشی برای پیاده‌سازی صفی را نشان می‌دهد که $n - 1$ عنصر دارد. این صف توسط آرایه $Q[1 : n]$ پیاده‌سازی شده است.



- ویژگی $Q.size$ اندازه صف است که برابر با طول آرایه (n) است. صف یک ویژگی به نام $Q.head$ دارد که اندیسی است که به ابتدای صف اشاره می‌کند. ویژگی $Q.tail$ اندیسی است که به مکان بعد از آخرین عنصر صف اشاره می‌کند. عناصر صف در مکان‌های $Q.head + 1$ ، $Q.head$ ، تا $Q.tail - 1$ قرار می‌گیرند.
- وقتی $Q.head = Q.tail$ است، صف خالی است. در ابتدا داریم $Q.head = Q.tail = 1$. در این حالت، اگر بخواهیم از صف عنصری خارج کنیم با خطای صف خالی¹ مواجه می‌شویم.
- وقتی $Q.head = Q.tail + 1$ یا $Q.head = 1$ و $Q.tail = Q.size$ می‌گوییم صف پر است. در این حالت اگر بخواهیم عنصری وارد صف کنیم با خطای سر ریز صف² مواجه می‌شویم.

¹ queue underflow

² queue overflow

- در زیر توابع Enqueue و Dequeue پیاده سازی شده‌اند.

Algorithm Enqueue

```
function ENQUEUE(Q,x)
1: Q[Q.tail] = x
2: if Q.tail == Q.size then
3:   Q.tail = 1
4: else Q.tail = Q.tail + 1
```

Algorithm Dequeue

– **function** DEQUEUE(Q)

1: $x = Q[Q.head]$

2: **if** $Q.head == Q.size$ **then**

3: $Q.head = 1$

4: **else** $Q.head = Q.head + 1$

5: **return** x

لیست پیوندی

- یک لیست پیوندی¹ داده ساختاری است که توسط آن مجموعه‌ای است عناصر به صورت خطی مرتب شده‌اند به طوری که ترتیب عناصر در لیست با ترتیب مکان‌های حافظه عناصر الزاما یکسان نیست.
- برخلاف آرایه که در آن به عناصر با استفاده از اندیس آنها دسترسی پیدا می‌کنیم، در لیست پیوندی هر عنصر توسط یک اشاره‌گر به عنصر بعدی خود اشاره می‌کند و به هر عنصر می‌توان با استفاده از اشاره‌گری به آن دسترسی پیدا کرد.
- از آنجایی که در بسیاری مواقع عناصر لیست پیوندی دارای یک کلید و یک مقدار هستند، و می‌خواهیم به ازای یک کلید تعیین شده مقدار آن را پیدا کنیم، به لیست پیوندی، لیست جستجو² نیز گفته می‌شود.
- یک لیست پیوندی دو طرفه³ یک لیست پیوندی است که عناصر آن علاوه بر ذخیره‌سازی عنصر بعدی، عنصر قبل خود را نیز ذخیره می‌کنند.

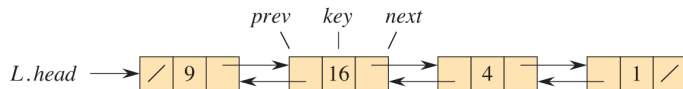
¹ linked list

² search list

³ doubly linked list

لیست پیوندی

- در شکل زیر هریک از عناصر لیست پیوندی دو طرفه L یک ویژگی کلید (key) و دو اشاره گر برای تعیین عنصر قبل (prev) و عنصر بعد از خود (next) دارد. البته یک عنصر می تواند اطلاعات دیگری را نیز ذخیره کند.



لیست پیوندی

- به ازای عنصر داده شده x در لیست پیوندی، $x.next$ به عنصر بعدی¹ و $x.prev$ به عنصر قبلی² اشاره می‌کند.
- اگر $x.prev = \text{NIL}$ باشد، آنگاه x عنصر ماقبل ندارد و در نتیجه اولین عنصر لیست یا عنصر ابتدای³ لیست است.
- اگر $x.next = \text{NIL}$ باشد، آنگاه x عنصر ما بعد ندارد و در نتیجه آخرین عنصر لیست یا عنصر انتهای⁴ لیست است.
- ویژگی $L.head$ به اولین عنصر لیست اشاره می‌کند. اگر $L.head = \text{NIL}$ باشد، لیست تهی است.

¹ successor

² predecessor

³ head

⁴ tail

- یک لیست پیوندی می‌تواند اشکال مختلفی داشته باشد. یک لیست می‌تواند یک طرفه ¹ یا دو طرفه ² باشد، می‌تواند مرتب شده یا غیر مرتب باشد، و همچنین می‌تواند دورانی ³ یا غیر دورانی باشد.
- اگر یک لیست پیوندی یک طرفه باشد، عناصر آن اشاره‌گر به عنصر بعدی دارند ولی اشاره‌گری به عنصر قبلی ندارند. اگر یک لیست مرتب شده باشد ترتیب خطی عناصر لیست متناسب با ترتیب خطی کلیدهای عناصر است بدین معنی که در لیست پیوندی مرتب شده صعودی همیشه مقدار کلید عنصر بعدی بزرگ‌تر یا مساوی مقدار کلید عنصر فعلی است و در لیست پیوندی مرتب شده نزولی همیشه مقدار کلید عنصر بعدی کوچک‌تر یا مساوی مقدار کلید عنصر فعلی است.

¹ singly

² doubly

³ circular

- در یک لیست پیوندی مرتب شده صعودی عنصر ابتدای لیست کمترین مقدار و عنصر انتهای لیست کمترین مقدار را دارد.
- اگر لیست پیوندی غیر مرتب¹ باشد، عناصر لیست با هر ترتیبی می توانند در کنار یکدیگر قرار گرفته باشند.

¹ unsorted

- در یک لیست پیوندی دورانی¹ ، اشاره گر prev از عنصر ابتدای لیست به عنصر انتهای لیست اشاره می کند و اشاره گر next از عنصر انتهای لیست به عنصر ابتدای لیست اشاره می کند.
- لیست هایی که در ادامه بررسی خواهیم کرد، غیر مرتب و دو طرفه هستند.

¹ circular linked list

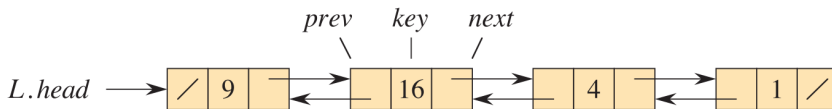
- جستجو در لیست پیوندی : تابع $\text{List-Search}(L, k)$ اولین عنصر در لیست L با کلید k را توسط یک جستجوی خطی پیدا کرده، اشاره‌گری به عنصر یافته شده باز می‌گرداند. اگر هیچ عنصری با کلید k پیدا نشود، تابع مقدار NIL را باز می‌گرداند.

Algorithm List Search

```
function LIST-SEARCH(L,k)
1: x = L.head
2: while x  $\neq$  NIL and x.key  $\neq$  k do
3:   x = x.next
4: return x
```

لیست پیوندی

- در شکل زیر فراخوانی تابع $List\text{-}Search(L, 4)$ اشاره‌گری به سومین عنصر لیست باز می‌گرداند و فراخوانی تابع $List\text{-}Search(L, 7)$ مقدار NIL را باز می‌گرداند.



- برای جستجوی یک لیست با n عنصر، تابع $List\text{-}Search$ در بدترین حالت در زمان $\Theta(n)$ اجرا می‌شود، زیرا نیاز دارد همه عناصر لیست را جستجو کند.

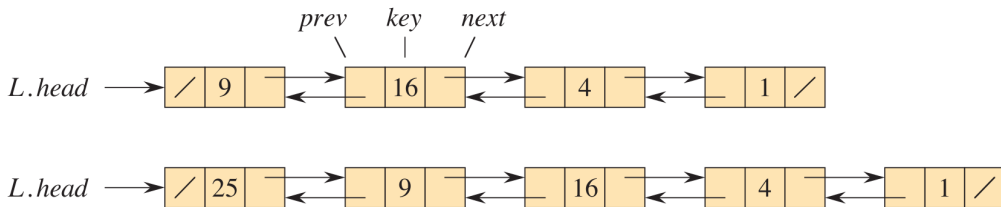
- درج در لیست پیوند : به ازای عنصر x که کلید آن تعیین شده است، تابع List-Prepend عنصر x را به ابتدای لیست پیوندی اضافه می‌کند.

Algorithm List Prepend

```
function LIST-PREPEND(L,x)
1: x.next = L.head
2: x.prev = NIL
3: if L.head  $\neq$  NIL then
4:   L.head.prev = x
5: L.head = x
```

لیست پیوندی

- در شکل زیر یک عنصر در لیست پیوندی درج شده است.



- توجه کنید که $L.head.prev$ در واقع عنصر ماقبل عنصر ابتدای لیست است.

- زمان اجرای تابع $List.Prepend$ بر روی یک لیست با n عنصر برابر با $O(1)$ است.

لیست پیوندی

- درج در هر مکانی در لیست پیوندی می‌تواند انجام شود.
- اگر اشاره‌گری به عنصر y داشته باشیم، تابع List-Insert عنصر جدید x را به عنوان عنصر بعد از y در زمان $O(1)$ اضافه می‌کند.

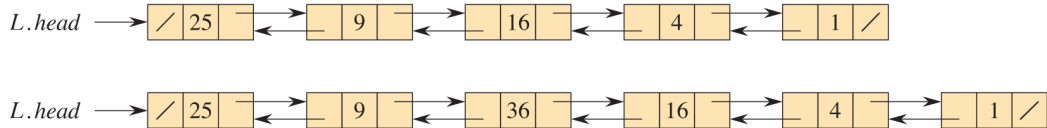
Algorithm List Insert

```
function LIST-INSERT(x,y)
1: x.next = y.next
2: x.prev = y
3: if y.next  $\neq$  NIL then
4:   y.next.prev = x
5: y.next = x
```

- از آنجایی که این تابع نیازی به دسترسی به لیست L ندارد، L به عنوان پارامتر به آن ارسال نشده است.

لیست پیوندی

- در شکل زیر عنصر ۳۶ بعد از عنصر ۹ اضافه شده است.



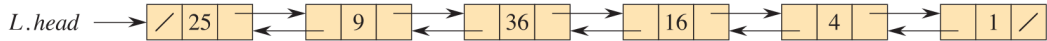
- حذف از یک لیست پیوندی : تابع List-Delete عنصر x را از لیست پیوندی L حذف می‌کند.

Algorithm List Delete

```
function LIST-DELETE(L,x)
1: if x.prev  $\neq$  NIL then
2:   x.prev.next = x.next
3: else L.head = x.next
4: if x.next  $\neq$  NIL then
5:   x.next.prev = x.prev
```

- برای حذف یک عنصر با یک کلید معین، ابتدا تابع List-Search فراخوانی شده، اشاره‌گری به عنصر مورد نظر به دست می‌آید. سپس توسط تابع List-Delete عنصر مورد نظر از لیست حذف می‌شود.
- تابع List-Delete در زمان $O(1)$ اجرا می‌شود، اما برای حذف یک عنصر با یک کلید تعیین شده، ابتدا تابع List-Search در زمان $\Theta(n)$ باید اجرا شود.

- در شکل زیر عنصر با کلید ۴ از لیست حذف شده است.



لیست پیوندی

- درج و حذف بر روی لیست پیوندی سریع‌تر از آرایه‌ها انجام می‌شوند.
- اگر بخواهیم یک عنصر به ابتدای یک آرایه اضافه کنیم یا عنصر اول را از آرایه حذف کنیم، آنگاه هریک از عناصر آرایه را باید یک خانه به سمت چپ یا راست منتقل کنیم.
- بنابراین در بدترین حالت درج و حذف در آرایه در زمان $\Theta(1)$ انجام می‌شود، درحالی که درج و حذف در لیست پیوندی در زمان $O(1)$ انجام می‌شود.
- از طرف دیگر دسترسی به عنصر k ام آرایه در زمان $O(1)$ انجام می‌شود، درحالی که زمان لازم برای دسترسی به عنصر k ام لیست پیوندی $\Theta(1)$ است.
- پس به عناصر آرایه می‌توان سریع‌تر از لیست پیوندی دسترسی پیدا کرد، درحالی که حذف و درج در لیست پیوندی سریع‌تر از آرایه است.

- تابع List-Delete را بسیار ساده‌تر می‌توان نوشت اگر شرایط مرزی را در ابتدا و انتهای لیست بررسی نکنیم.
- در این صورت تابع حذف را می‌توان به صورت زیر نوشت.

Algorithm List Delete'

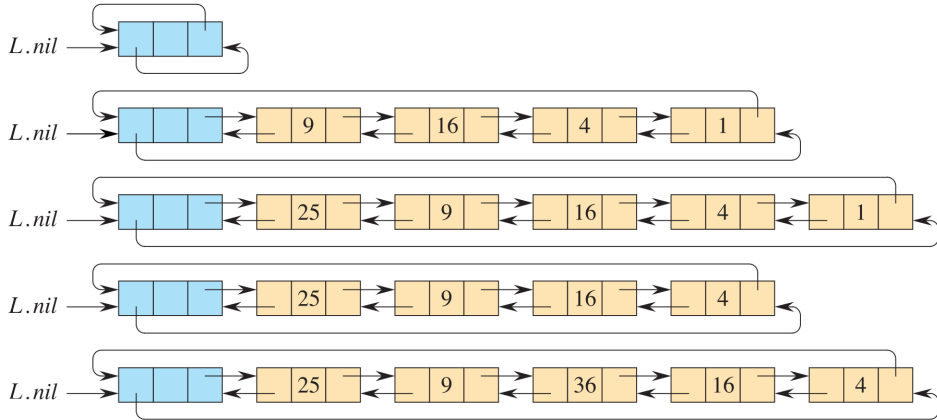
```
function LIST-DELETE'(x)  
1: x.prev.next = x.next  
2: x.next.prev = x.prev
```

- نگهبان¹ به شیئی گفته می‌شود که بررسی شرایط مرزی را تسهیل می‌کند.
- در یک لیست پیوندی، شیء L.nil یک شیء نگهبان است که نمایانگر تهی (NIL) است و همه ویژگی‌های عناصر (اشیای) دیگر لیست را داراست.

¹ sentinel

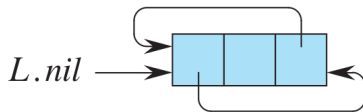
لیست پیوندی

- در شکل زیر برای تسهیل بررسی شرایط مرزی یک لیست پیوندی دو طرفه معمولی را به یک لیست پیوندی دو طرفه دورانی با یک نگهبان تبدیل کرده‌ایم.



لیست پیوندی

- نگهدارنده $L.nil$ در بین ابتدا و انتهای لیست قرار می‌گیرد. درواقع $L.nil.next$ به ابتدای لیست اشاره می‌کند و $L.nil.prev$ به انتهای لیست اشاره می‌کند. همچنین ویژگی $next$ از عنصر انتهای لیست و ویژگی $prev$ از عنصر ابتدای لیست هر دو به $L.nil$ اشاره می‌کنند.
- از آنجایی که $L.nil.next$ به عنصر ابتدای لیست اشاره می‌کند ویژگی $L.head$ را حذف می‌کنیم و با $L.nil.next$ جایگزین می‌کنیم.
- یک لیست خالی به صورت زیر تنها حاوی عنصر نگهدارنده است.



- با افزودن عنصر نگهبان، تابع حذف عنصر به صورت زیر نوشته می‌شود.

Algorithm List Delete'

```
function LIST-DELETE'(x)
1: x.prev.next = x.next
2: x.next.prev = x.prev
```

- در فرایند حذف عناصر هیچ‌گاه عنصر نگهبان حذف نمی‌شود، مگر اینکه بخواهیم لیست را کاملاً از بین ببریم.

- تابع List – inset' عنصر x را در لیست بعد از y اضافه می‌کند.

Algorithm List Insert'

```
function LIST-INSERT'(x,y)
1: x.next = y.next
2: x.prev = y
3: y.next.prev = x
4: y.next = x
```

لیست پیوندی

- برای جستجو در یک لیست پیوندی با نگهبان از `L.nil.next` آغاز می‌کنیم. اگر کلید مورد نظر در لیست وجود نداشته باشد، همهٔ عناصر لیست بررسی شده دوباره به `L.nil` باز می‌گردیم و در این صورت مقدار `NIL` را از تابع باز می‌گردانیم.
- تابع جستجو در لیست پیوندی با نگهبان به صورت زیر نوشته می‌شود.

Algorithm List Search'

```
function LIST-SEARCH'(L,k)
1: L.nil.key = k  ▷ store the key in the sentinel to guarantee it is in
  list
2: x = L.nil.next  ▷ start at the head of the list
3: while x.key ≠ k do
4:   s = x.next
5: if x == L.nil then  ▷ found k in the sentinel
6:   return NIL      ▷ k was not really in the list
7: else return x
```

- نگهبان‌ها معمولاً کد را ساده می‌کنند و به مقدار ثابتی سرعت اجرای کد را کاهش می‌دهند اما مرتبه زمان اجرا را کاهش نمی‌دهند. دقت کنید در صورتی که بخواهیم از تعداد بسیار زیادی لیست‌های کوچک استفاده کنیم، نگهبان‌ها باعث می‌شوند فضای بسیار زیادی هدر رود. در این صورت بهتر است از نگهبان استفاده نکنیم.