به نام خدا

ساختمان داده

آرش شفیعی

درخت‌ها

درخت‌ها

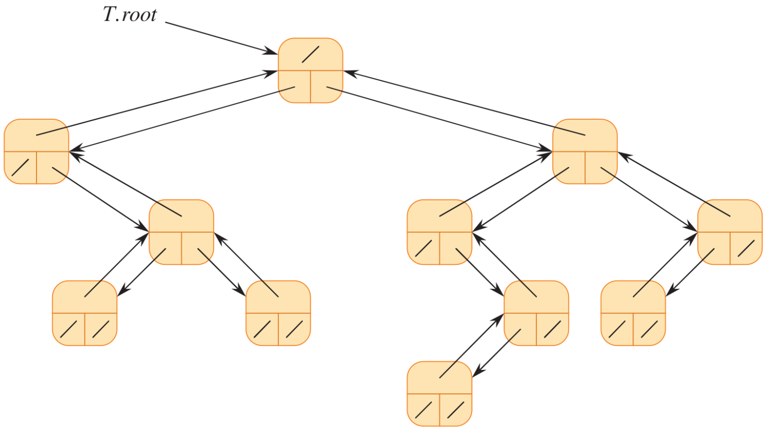
- لیست‌های پیوندی برای نمایش داده‌هایی به کار می‌روند که عناصر آن رابطه خطی دارند، اما همیشه روابط بین عناصر خطی نیست.
- داده ساختار درخت یکی از داده ساختارهایی است که برای نمایش و ذخیره‌سازی روابط غیر خطی استفاده می‌شود.

درخت‌ها

- در داده ساختار درخت هر عنصر می‌تواند صفر یا یک یا چند فرزند داشته باشد. یکی از حالات خاص درخت، درخت دودویی است که در آن هر عنصر حداکثر می‌تواند دو فرزند داشته باشد.

درخت‌ها

- در شکل زیر یک درخت دودویی نشان داده شده است. هر عنصر یک ویژگی p دارد که برای ذخیره‌سازی اشاره‌گر به پدر آن عنصر به کار می‌رود. همچنین هر عنصر دو ویژگی left و right دارد که اشاره‌گرهایی به فرزند سمت چپ و فرزند سمت راست آن عنصر در درخت دودویی T هستند.



درخت‌ها

- اگر x.p=NIL باشد، آنگاه x ریشه درخت است. اگر x فرزند سمت چپ نداشته باشد، آنگاه x.left=NIL است و اگر فرزند سمت راست نداشته باشد، x.right=NIL است.
- ریشه درخت را با اشاره‌گر T.root مشخص می‌کنیم و اگر T.root=NIL باشد، آنگاه درخت خالی است.

درخت‌ها

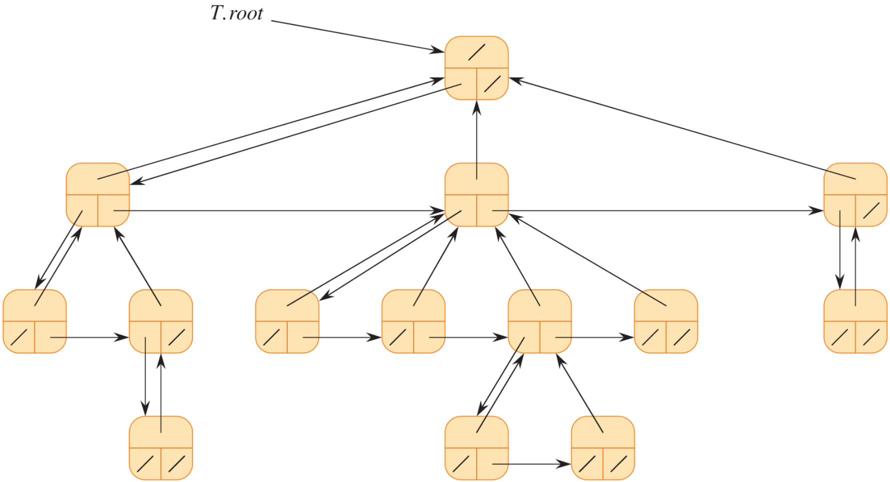
- می‌توانیم درخت دودویی را تعمیم دهیم به طوری که یک رأس درخت بتواند به هر تعداد دلخواه فرزند داشته باشد. می‌توانیم درختی تعریف کنیم که تعداد فرزند هر رأس در آن حداکثر k باشد. بنابراین ویژگی‌های left و right را با ویژگی‌های child_1 ، child_2 ، $\cdots$ و child_k جایگزین می‌کنیم.
- حال فرض کنید تعداد فرزندان نامحدود باشد، بدین معنی که هیچ کران بالایی برای تعداد فرزندان وجود نداشته باشد. در این صورت نمی‌توانیم تعداد معینی ویژگی برای فرزندان یک رأس داشته باشیم. علاوه بر این، اگر k یک عدد بسیار بزرگ باشد و در عمل یک عنصر در اغلب مواقع تعداد کمی فرزند داشته باشد، برای ذخیره‌سازی اشاره‌گرها مقدار زیادی از حافظه را هدر داده‌ایم. در چنین مواقعی باید داده ساختار درخت را به گونه‌ای دیگر ذخیره کنیم.

- یک روش برای ذخیره‌سازی درخت وقتی تعداد فرزندان یک رأس نامحدود است بدین صورت است که از ویژگی left–child برای ذخیره‌سازی فرزند سمت چپ و از ویژگی right–sibling برای ذخیره‌سازی همزاد سمت راست استفاده کنیم.

- در این روش، هر رأس درخت یک اشاره‌گر p برای اشاره به پدر دارد و T.root به ریشهٔ درخت اشاره می‌کند. علاوه بر این دو، هر رأس x دو ویژگی دارد. ویژگی x.left–child به فرزند سمت چپ رأس x اشاره می‌کند و ویژگی x.right–sibling به همزاد سمت راست رأس x اشاره می‌کند.

درخت‌ها

- در شکل زیر یک درخت نشان داده شده است.



- اگر رأس x فرزندی نداشته باشد، آنگاه x.left−child=NIL است و اگر رأس x خود راست‌ترین فرزند یک پدر باشد، آنگاه x.right−sibling=NIL است.

درخت‌ها

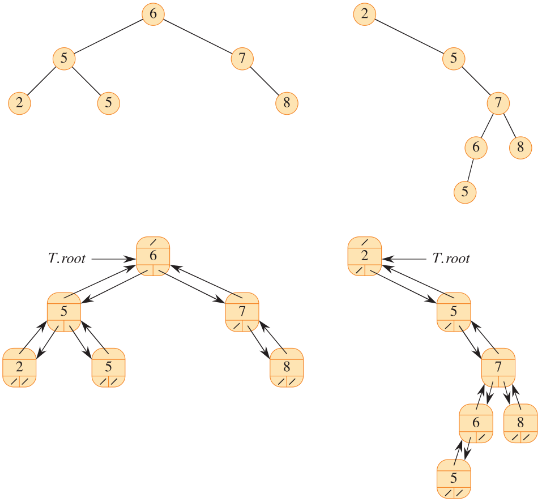
- درخت‌ها را می‌توانیم به اشکال دیگری نمایش دهیم. در آینده خواهیم دید که درخت را می‌توان در آرایه نیز ذخیره کرد و یا در مواردی خاص که درخت تنها از فرزندان به سمت ریشه پیمایش می‌شود، می‌توانیم اشاره‌گری به فرزندان تعریف نکنیم.

درخت جستجوی دودویی

- درخت جستجوی دودویی یک درخت دودویی است که برای جستجوی بهینه در مجموعه‌ای از عناصر استفاده می‌شود.
- عناصر در درخت جستجوی دودویی به گونه‌ای ذخیره می‌شوند که ویژگی درخت جستجوی دودویی همیشه حفظ شود.
- فرض کنید x یک رأس در درخت جستجوی دودویی باشد. اگر y یک رأس در زیر درخت سمت چپ x باشد آنگاه $x.key \leqslant y.key$ و اگر y یک رأس در زیر درخت سمت راست x باشد، آنگاه داریم $x.key \geqslant y.key$.

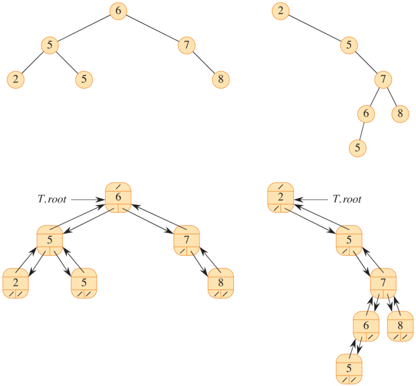
درخت جستجوی دودویی

- شکل زیر دو درخت جستجوی دودویی را نشان می‌دهد.



درخت جستجوی دودویی

- در درخت سمت چپ کلید ریشه درخت ۶ است. کلیدهای ۲ و ۵ و ۵ در زیر درخت سمت چپ قرار دارند و مقدار آنها از ۶ بیشتر نیست و کلیدهای ۷ و ۸ در زیر درخت سمت راست قرار دارند و مقدار آنها از ۶ کمتر نیست.



درخت جستجوی دودویی

- به دلیل ویژگی خاص درخت جستجوی دودویی، با پیمایش میان ترتیب [1] می‌توان کلیدها را به ترتیب چاپ کرد.
- پیمایش میان ترتیب بدین دلیل اینگونه نامیده می‌شود که مقدار کلید یک رأس را بعد از چاپ کلیدهای رئوس زیر درخت سمت چپ و قبل از چاپ کلیدهای رئوس زیر درخت سمت راست چاپ می‌کند.
- در پیمایش پیش ترتیب [2] مقدار کلید ریشه قبل از کلیدهای رئوس زیر درخت‌های سمت چپ و راست چاپ می‌شود و در پیمایش پس ترتیب [3] مقدار کلید ریشه بعد از کلیدهای رئوس زیر درخت‌های سمت چپ و راست چاپ می‌شود.

[1] inorder tree walk
[2] preorder tree walk
[3] postorder tree walk

درخت جستجوی دودویی

- الگوریتم پیمایش میان ترتیب در زیر نشان داده شده است.

Algorithm Inorder Tree Walk

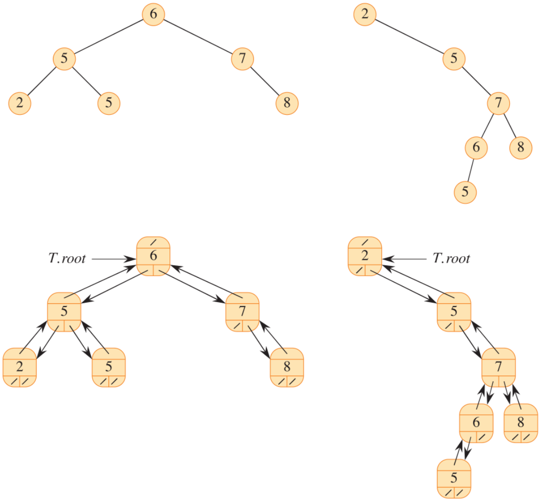
```
function INORDER-TREE-WALK(x)
if x ≠ NIL then
    Inorder-Tree-Walk (x.left)
    print x.key
    Inorder-Tree-Walk (x.right)
```

- برای چاپ همه عناصر درخت جستجوی دودویی باید تابع Inorder-Tree-Walk(T.root) را فراخوانی کنیم.

- درستی این الگوریتم مستقیما با استفاده از استقرا بر روی ویژگی درخت جستجوی دودویی اثبات می‌شود.

درخت جستجوی دودویی

- با پیمایش میان ترتیب در هر دو درخت زیر ترتیب ۸، ۷، ۶، ۵، ۵، ۲ به دست می‌آید.



درخت جستجوی دودویی

- این الگوریتم در زمان $\Theta(n)$ به ازای درخت جستجوی دودویی با n رأس اجرا می‌شود.
- قضیه : اگر x ریشه یک زیر درخت با n رأس باشد، فراخوانی Inorder-Tree-Walk(x) در زمان $\Theta(n)$ انجام می‌شود.

درخت جستجوی دودویی

- اثبات : فرض کنید $T(n)$ زمان مورد نیاز برای اجرای الگوریتم برروی زیر درختی با n رأس باشد.
- همه رئوس زیر درخت در نهایت بررسی می‌شوند پس لزوما $T(n) = \Omega(n)$. کافی است ثابت کنیم $T(n) = O(n)$.
- الگوریتم به ازای درخت تهی مقدار ثابتی زمان صرف می‌کند، پس $T(0) = c$ به طوری که $c > 0$.
- به ازای $n > 0$ ، فرض کنید با فراخوانی تابع برای رأس x تعداد k رأس در زیر درخت سمت چپ وجود داشته باشند آنگاه در زیر درخت سمت راست $n - k - 1$ رأس وجود خواهد داشت. اگر اجرای بدنه تابع در زمان d انجام شود به طوری که $d > 0$ آنگاه خواهیم داشت $T(n) \leqslant T(k) + T(n - k - 1) + d$.
- با حل این رابطه به روش جایگذاری به دست می‌آوریم $T(n) = O(n)$.

درخت جستجوی دودویی

- جستجو : برای یک رأس با یک کلید دلخواه در درخت جستجوی دودویی، تابع Tree-Search به صورت زیر تعریف می‌شود.

Algorithm Tree Search

```
function TREE-SEARCH(x,k)
if x == NIL or k == x.key then
   return x
if k < x.key then
   return Tree-Search (x.left, k)
else  return Tree-Search (x.right, k)
```

- به ازای اشاره‌گر x به ریشه یک زیر درخت و مقدار کلید k تابع Tree-search(x،k) اشاره‌گری به رأسی از درخت برمی‌گرداند که مقدار کلید آن k است در صورتی که چنین رأسی وجود داشته باشد، در غیر اینصورت مقدار NIL را باز می‌گرداند.

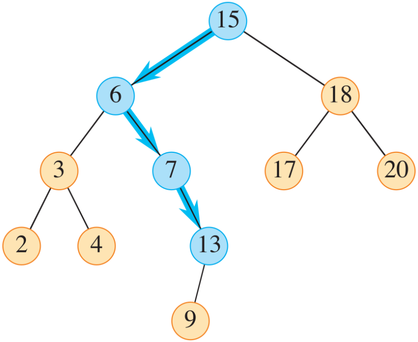
- برای جستجو در تمام درخت تابع Tree-search(T.root،k) فراخوانی می‌شود.

درخت جستجوی دودویی

- این تابع جستجو را با ریشه شروع می‌کند. به ازای هر رأس x مقدار کلید k و x.key را مقایسه می‌کند. اگر این دو مقدار برابر باشند، جستجو خاتمه پیدا می‌کند. اگر k کوچک‌تر از x.key باشد، جستجو با فراخوانی تابع برای زیر درخت سمت چپ x ادامه پیدا می‌کند، زیرا به علت ویژگی درخت جستجوی دودویی کلید k نمی‌تواند در زیر دخت سمت راست باشد. همچنین اگر k بزرگ‌تر از x.key باشد، جستجو با فراخوانی تابع برای زیر درخت سمت راست x ادامه می‌یابد.

درخت جستجوی دودویی

- در شکل زیر جستجوی کلید ۱۳ در یک درخت جستجوی دودویی نشان داده شده است.



- رئوسی که در فرایند جستجو بررسی می‌شوند مسیری از ریشه درخت به سمت برگ‌های درخت می‌سازند و بنابراین پیچیدگی زمانی الگوریتم $O(h)$ است. به طوری که h ارتفاع درخت است.

درخت جستجوی دودویی

- کمینه و بیشینه : برای یافتن عنصری در درخت جستجوی دودویی که کلید آن کمینه است، باید فرزند چپ هر رأس را با شروع از ریشه بررسی کنیم تا به NIL برسیم. آخرین رأس بررسی شده کلید با کمترین مقدار در درخت است.

- تابع Tree-Minimum اشاره‌گری به عنصر کمینه در زیر درخت با ریشه x باز می‌گرداند.

Algorithm Tree Minimum

```
function TREE-MINIMUM(x)
while x.left ≠ NIL do
    x = x.left
return x
```

- ویژگی درخت جستجوی دودویی تضمین می‌کند که تابع Tree-Minimum درست است. اگر رأس x زیر درخت سمت چپ نداشته باشد، از آنجایی که همهٔ کلیدهای زیر درخت سمت راست x از x.key بزرگ‌تر یا مساوی هستند، بنابراین x.key کوچک‌ترین کلید در درخت است. اگر رأس x زیر درخت سمت چپ داشته باشد، همه کلیدهای زیر درخت سمت چپ از x.key کوچک‌تر هستند، بنابراین زیر درخت سمت چپ باید بررسی شود.

درخت جستجوی دودویی

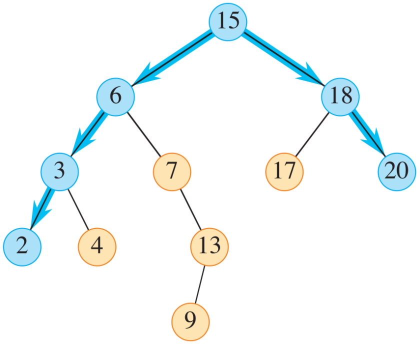
- به طور مشابه تابع Tree-Maximum اشاره‌گری به عنصر بیشینه در زیر درخت ریشه x باز می‌گرداند.

Algorithm Tree Maximum

```
function TREE-MAXIMUM(x)
while x.right ≠ NIL do
    x = x.right
return x
```

درخت جستجوی دودویی

- در شکل زیر مقدار کمینه و بیشینه در درخت پیدا شده‌اند.



- هر دو تابع Tree-Minimum و Tree-Maximum در زمان O(h) اجرا می‌شوند به طوری که h ارتفاع درخت است.

درخت جستجوی دودویی

- رئوس بعدی و قبلی : اگر همه کلیدها در درخت جستجوی دودویی یکتا باشند، رأس بعدی[1] x کوچک‌ترین رأسی است که مقدار آن از x.key بزرگ‌تر است.
- رأس بعدی رأس x ، رأسی است که در یک پیمایش میان ترتیب بعد از رأس x پیمایش می‌شود.

[1] successor

درخت جستجوی دودویی

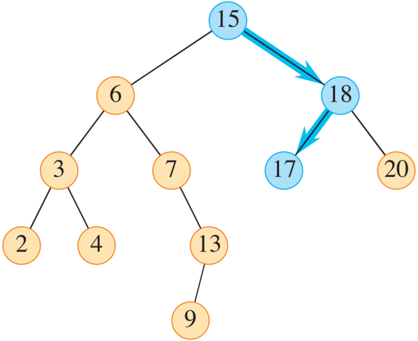
- تابع Tree-Successor رأس بعدی رأس x را در یک درخت جستجوی دودویی باز می‌گرداند اگر چنین رأسی وجود داشته باشد و در غیر این‌صورت مقدار NIL را باز می‌گرداند.

Algorithm Tree Successor

```
function TREE-SUCCESSOR(x)
if x.right ≠ NIL then
    return Tree-Minimum (x.right)      ▷ leftmost node in right subtree
else ▷ find the lowest ancestor of x whose left child is an ancestor of x
    y = x.p
    while y ≠ NIL and x == y.right do
        x = y
        y = y.p
    return y
```

درخت جستجوی دودویی

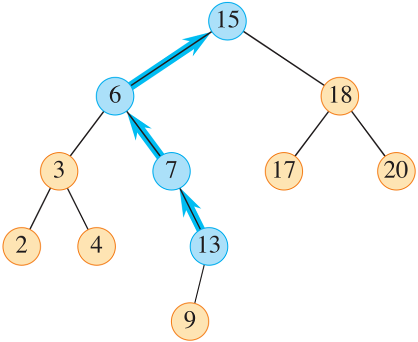
- اگر زیر درخت سمت راست رأس x تهی نباشد، رأس بعدی x کوچک‌ترین (چپ‌ترین) رأس در زیر درخت سمت راست رأس x است.
- در شکل زیر رأس بعدی ۱۵ کوچک‌ترین مقدار در زیر درخت سمت راست آن یعنی ۱۷ است.



درخت جستجوی دودویی

- اگر زیر درخت سمت راست رأس x تهی باشد و رأس بعدی x رأس y باشد، آنگاه برای یافتن y در درخت با شروع از رأس x بالا می‌رویم تا جایی که یا به ریشه برسیم و یا به رأسی برسیم که فرزند چپ پدر خود باشد.

- در شکل زیر رأس بعدی ۱۳ مقدار ۱۵ است.



- زمان اجرای تابع Tree-Successor در درختی با ارتفاع h برابر است با O(h) زیرا یا باید مسیری از برگ به ریشه طی شود و یا مسیری به سمت برگ‌ها.
- تابع Tree-Predecessor قرینه تابع Tree-Successor است و پیچیدگی آن نیز O(h) است.

درخت جستجوی دودویی

- درج : عملیات درج در درخت جستجوی دودویی باعث تغییر ساختار درخت می‌شود. درج یک عنصر باید به گونه‌ای باشد که ویژگی درخت جستجوی دودویی حفظ شود.

- تابع Tree–Insert یک رأس جدید به درخت جستجوی دودویی اضافه می‌کند. این تابع درخت T و رأس z را که مقدار کلید آن در z.key ذخیره شده است دریافت می‌کند. همچنین z.left=NIL و z.right=NIL قرار داده شده است. تابع درخت T را به گونه‌ای تغییر می‌دهد که z در مکان مناسب در درخت قرار بگیرد.

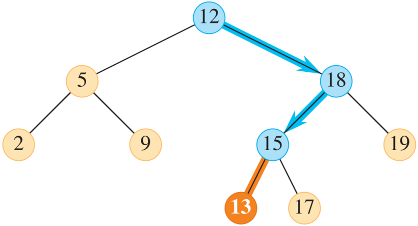
Algorithm Tree Insert

```
function TREE-INSERT(T,z)
x = T.root  ▷ node being compared with z
y = NIL  ▷ y will be parent of z
while x ≠ NIL do  ▷ descend until reaching a leaf
    y = x
    if z.key < x.key then
        x = x.left
    else  x = x.right
z.p = y  ▷ found the location-insert z with parent y
if y == NIL then
    T.root = z      ▷ tree T was empty
else if z.key < y.key then
    y.left = z
else  y.right = z
```

درخت جستجوی دودویی

- شکل زیر نشان می‌دهد Tree−Insert چگونه کار می‌کند. این تابع از ریشه آغاز می‌کند و در درخت جستجوی دودویی پایین می‌رود تا مکان مناسب z را پیدا کند.

- در بررسی درخت، تابع اشاره‌گر x و اشاره‌گر y را به عنوان پدر x نگهداری می‌کند. با توجه به مقدار z.key اشاره‌گر x در درخت حرکت می‌کند تا جایی که x برابر با NIL شود. رأس z در مکان به دست آمده توسط اشاره‌گر x قرار می‌گیرد. درواقع جایگاه به دست آمده برای z سمت چپ یا سمت راست پدر z است که اشاره‌گر y به آن اشاره می‌کند.



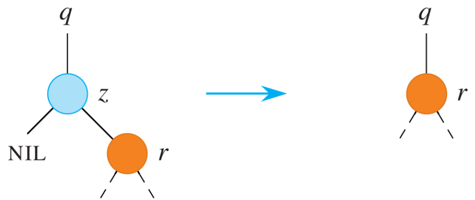
- پیچیدگی زمانی درج در درخت جستجو برای درخت با ارتفاع h برابر است با O(h) .

درخت جستجوی دودویی

- حذف : برای حذف رأس z از درخت جستجوی دودویی T سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم.
- اگر z فرزندی نداشته باشد، با تغییر اشاره‌گری که به z اشاره می‌کند به NIL به سادگی رأس z حذف می‌شود.
- اگر z تنها یک فرزند داشته باشد، آنگاه فرزند z تبدیل به فرزند پدر z می‌شود. درواقع پدر z به جای اشاره به z به فرزند z اشاره خواهد کرد.
- اگر z دو فرزند داشته باشد، ابتدا باید رأس مابعد z را که در زیر درخت سمت راست z است پیدا کنیم و توسط اشاره‌گر y مکان آن را نگهداری کنیم. سپس باید y را در مکان z در درخت قرار دهیم. مابقی رئوس در زیر درخت سمت راست z زیر درخت سمت راست y می‌شوند و همه زیر درخت سمت چپ z زیر درخت سمت چپ y می‌شود. از آنجایی که y رأس مابعد z است، نمی‌تواند فرزند سمت چپ داشته باشد و فرزند سمت راست y در مکان اصلی y قرار خواهد گرفت.

درخت جستجوی دودویی

- اگر z فرزند سمت چپ نداشته باشد، طبق شکل زیر، رأس z با فرزند سمت راست آن (که ممکن است NIL باشد) جایگزین می‌شود.

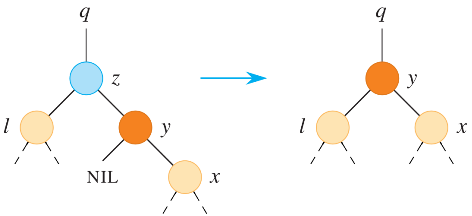


- اگر z تنها فرزند سمت چپ داشته باشد، طبق شکل زیر، رأس z با فرزند سمت چپ آن جایگزین می‌شود.

درخت جستجوی دودویی

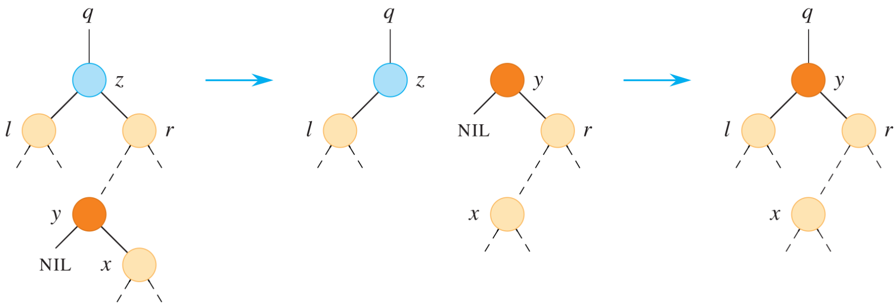
– اگر z هر دو فرزند چپ و راست را داشته باشد، ابتدا رأس مابعد z به نام y را که در زیر درخت سمت راست z قرار دارد پیدا می‌کنیم. رأس y الزاما زیر درخت سمت چپ ندارد. رأس y را از مکان خود خارج کرده و جایگزین رأس z می‌کنیم. دو حالت برای y وجود دارد.

(۱) اگر y فرزند سمت راست z باشد، رأس z را با y جایگزین می‌کنیم و فرزند سمت راست y را در جای خود باقی می‌گذاریم.



درخت جستجوی دودویی

(۲) اگر y در زیر درخت راست رأس z باشد اما فرزند سمت راست z نباشد، ابتدا y را با فرزند سمت راست آن جایگزین کرده، سپس z را با y جایگزین می‌کنیم.



درخت جستجوی دودویی

- در فرایند حذف یک رأس، نیاز داریم زیر درخت‌ها را در درخت جستجو دودویی جابجا کنیم.
- تابع Transplant یک زیر درخت را با یک زیر درخت دیگر جایگزین می‌کند. وقتی این تابع زیر درختی با ریشه u را با یک زیر درخت با ریشه v جایگزین می‌کند، پدر رأس u پدر رأس v می‌شود، در نتیجه پدر رأس u در نهایت v را به عنوان فرزند خود خواهد داشت. همچنین v می‌تواند NIL باشد.

Algorithm Transplant

```
function TRANSPLANT(T,u,v)
if u.p == NIL then
   T.root = v
else if u == u.p.left then
   u.p.left = v
else  u.p.right = v
if v ≠ NIL then
   v.p = u.p
```

درخت جستجوی دودویی

- خطوط ۱ و ۲ حالتی را بررسی می‌کنند که u ریشه درخت T باشد. در غیر اینصورت، u فرزند چپ یا فرزند راست پدر خود است. اگر u یک فرزند سمت چپ باشد، خطوط ۳ و ۴ مقدار u.p.left را به روز رسانی می‌کند. اگر u یک فرزند سمت راست باشد، خط ۵ مقدار u.p.right را به روزرسانی می‌کند.
- از آنجایی که v می‌تواند تهی باشد، خطوط ۶ و ۷ مقدار v.p را به روزرسانی می‌کند تنها اگر v تهی نباشد.
- تابع Transplant مقادیر v.left و v.right را تغییر نمی‌دهد و این کار را به عهده تابع فراخوانی کننده Transplant می‌گذارد.

درخت جستجوی دودویی

- تابع Tree-Delete از تابع Transplant برای حذف z از درخت جستجوی دودویی T استفاده می‌کند.

Algorithm Tree Delete

```
function TREE-DELETE(T,z)
if z.left == NIL then
    Transplant (T,z,z.right)      ▷ replace z by its right child
else if z.right == NIL then
    Transplant (T,z,z.left)       ▷ replace z by its left child
else  y = Tree-Minimum(z.right)   ▷ y is z's successor
    if y ≠ z.right then           ▷ is y farther down the tree?
        Transplant (T,y,y.right)  ▷ replace y by its right child
        y.right = z.right         ▷ z's right child becomes
        y.right.p = y             ▷ y's right child
    Transplant (T,z,y)            ▷ replace z by its successor y
    y.left = z.left               ▷ and give z's left child to y,
    y.left.p = y                  ▷ which had no left child
```

درخت جستجوی دودویی

- خطوط ۱ و ۲ به حالتی رسیدگی می‌کنند که رأس z فرزند سمت چپ ندارد و خطوط ۳ و ۴ حالتی را بررسی می‌کنند که z فرزند چپ دارد ولی فرزند سمت راست ندارد.
- خطوط ۵ تا ۱۲ حالات دیگر که z دو فرزند دارد را بررسی می‌کنند. خط ۵ رأس y را که رأس مابعد z است پیدا می‌کند. از آنجایی که z یک زیردرخت راست غیر تهی دارد، رأس مابعد آن رأسی در زیر درخت سمت راست آن با کمترین مقدار کلید است، بنابراین از تابع Tree-Minimum(z.right) استفاده می‌شود. قبلا ذکر کردیم که الزاما y فرزند سمت چپ ندارد. تابع حذف، باید y را از مکان فعلی خود خارج و z را با y جایگزین کند.

درخت جستجوی دودویی

- اگر y فرزند سمت راست z باشد، آنگاه در خطوط ۱۰ تا ۱۲ رأس z با رأس y جایگزین می‌شود و فرزند سمت چپ y را با فرزند سمت چپ z جایگزین می‌کند. رأس y فرزند راست خود را حفظ می‌کند و بنابراین y.right تغییر نمی‌کند.
- اگر y فرزند سمت راست z نباشد، آنگاه دو رأس باید جابجا شوند. خطوط ۷ تا ۹ رأس y را با فرزند سمت راست y جایگزین می‌کند و رأس سمت راست z را با رأس y جایگزین می‌کند. در نهایت در خطوط ۱۰ تا ۱۲ رأس z با y جایگزین می‌شود و فرزند سمت چپ y با فرزند سمت چپ z جایگزین می‌شود.

درخت جستجوی دودویی

- هر یک از خطوط تابع Tree-Delete در زمان ثابت اجرا می‌شوند به جز فراخوانی تابع Tree-Minimum و بنابراین تابع در زمان $O(h)$ اجرا می‌شود به طوری که h ارتفاع درخت است.

درخت ای‌وی‌ال

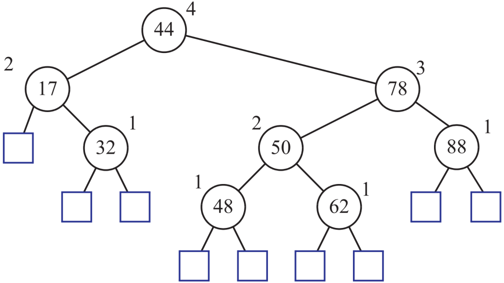
- درخت جستجوی دودویی ممکن است عناصر را به گونه‌ای در درخت درج کند که پیچیدگی زمانی جستجو در مجموعه‌ای از n عنصر در بدترین حالت $O(n)$ باشد.
- اگر درخت جستجوی دودویی ارتفاع متوازن داشته باشد یا به عبارت دیگر دارای ویژگی ارتفاع متوازن [1] باشد می‌توانیم پیچیدگی زمانی بدترین حالت را کاهش دهیم.
- ویژگی ارتفاع متوازن : به ازای هر رأس میانی v در درخت T ، اختلاف ارتفاع فرزندان آن حداکثر برابر با یک است.

[1] height-balance property

درخت ای‌وی‌ال

- هر درخت جستجوی دودویی T که دارای ویژگی ارتفاع متوازن باشد، درخت ای‌وی‌ال [1] نامیده می‌شود که نام خود را از ابتدای نام ابداع کنندگان آن یعنی آدلسون ولسکی [2] و لندیس [3] گرفته است.

- یک مثال از درخت ای‌وی‌ال در شکل زیر نشان داده شده است.



[1] AVL tree
[2] Adelson-Velskii
[3] Landis

درخت ای‌وی‌ال

- هر زیر درخت در یک درخت ای‌وی‌ال یک درخت ای‌وی‌ال است.
- قضیه : ارتفاع یک درخت ای‌وی‌ال که n رأس را ذخیره می‌کند $O(\lg n)$ است.
- اثبات : به جای این که کران بالای ارتفاع درخت را محاسبه کنیم، به جهت سهولت، کران پایین رئوس میانی یک درخت ای‌وی‌ال با ارتفاع h یعنی $n(h)$ را محاسبه می‌کنیم.

درخت ای‌وی‌ال

- به ازای اعداد کوچک داریم $n(1) = 1$ و $n(2) = 2$ زیرا یک درخت ای‌وی‌ال با ارتفاع یک باید حداقل یک رأس میانی داشته باشد و یک درخت ای‌وی‌ال با ارتفاع ۲ باید حداقل ۲ رأس میانی داشته باشد.
- حال به ازای $h \geqslant 3$ یک درخت ای‌وی‌ال با ارتفاع h و کمترین تعداد رئوس به گونه‌ای است که هر دو زیر درخت آن درخت‌های ای‌وی‌ال با کمترین تعداد رأس هستند : یکی با ارتفاع $h - 1$ و دیگری با ارتفاع $h - 2$. اگر ریشه را هم در نظر بگیریم، رابطه زیر را به دست می‌آوریم :

$$n(h) = 1 + n(h-1) + n(h-2)$$

- تابع $n(h)$ یک تابع اکیدا صعودی است. بنابراین $n(h-1) \geqslant n(h-2)$.
- پس می‌توانیم بنویسیم $n(h) > 2n(h-2)$.

درخت ای‌وی‌ال

- با بسط دادن این رابطه به دست می‌آوریم $n(h) > 2^i \cdot n(h-2i)$ به ازای $h - 2i \geqslant 1$.
- مقادیر پایه $n(1) = 1$ و $n(2) = 2$ را قبلا محاسبه کردیم، بنابراین i را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $h - 2i$ برابر با ۱ یا ۲ شود، پس $i = \lceil \frac{h}{2} \rceil - 1$ (در اینصورت اگر h زوج باشد $h - 2i = 2$ و اگر h فرد باشد $h - 2i = 1$).

- با جایگذاری مقدار i به دست می‌آوریم :

$$n(h) > 2^{\lceil \frac{h}{2} \rceil - 1} \cdot n(h - 2\lceil \frac{h}{2} \rceil + 2) > 2^{\lceil \frac{h}{2} \rceil - 1} n(1) > 2^{\frac{h}{2} - 1}$$

- از دو طرف رابطه لگاریتم می‌گیریم و به دست می‌آوریم $\lg n(h) > \frac{h}{2} - 1$.
- بنابراین داریم $h < 2 \lg n(h) + 2$
- نتیجه می‌گیریم که ارتفاع یک درخت ای‌وی‌ال با n رأس حداکثر $2 \lg n + 2$ است که برابر با $O(\lg n)$ است.

درج در درخت ای‌وی‌ال

- درج در درخت ای‌وی‌ال و حذف از آن همانند درج و حذف درخت جستجوی دودویی است با این تفاوت که عملیات بیشتری برای ایجاد توازن باید انجام شود.
- درج در یک درخت جستجوی دودویی ممکن است ویژگی توازن ارتفاع درخت ای‌وی‌ال را نقض کند، بنابراین باید پس از درج یک رأس درخت را متوازن کنیم.
- به ازای درخت جستجوی دودویی T ، می‌گوییم رأس v از درخت متوازن[1] است، اگر مقدار قدر مطلق تفاضل ارتفاع فرزندان v حداکثر ۱ باشد و در غیر اینصورت درخت نامتوازن[2] است. بنابراین هر یک از رئوس میانی درخت طبق ویژگی توازن ارتفاع باید متوازن باشند.

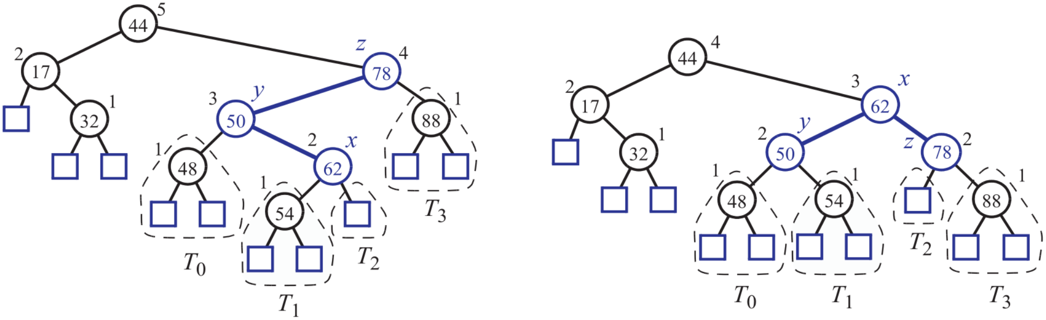
[1] balanced
[2] unbalanced

درج در درخت ای‌وی‌ال

- فرض کنیم T یک درخت ای‌وی‌ال باشد. پس از عملیات درج در درخت T ، ارتفاع برخی از رئوس درخت T ممکن است افزایش پیدا کند. رئوسی که ارتفاع آنها تغییر می‌کند بر روی مسیری از T از عنصر درج شده w تا ریشه درخت T هستند و این رئوس تنها رئوسی هستند که ممکن است نامتوازن شده باشند.
- اگر چنین اتفاقی بیافتد، درخت T دیگر ای‌وی‌ال نیست و باید آن را مجددا متوازن کنیم.

درج در درخت ای‌وی‌ال

- در شکل سمت چپ پس از درج رأسی با کلید ۵۴ ، رئوس حاوی کلید ۷۸ و ۴۴ نامتوازن شده‌اند. در شکل سمت راست درخت مجدداً به حالت متوازن در آمده است.



درج در درخت ای‌وی‌ال

- توازن رئوس در درخت T را با یک استراتژی جستجو و ترمیم [1] بازیابی می‌کنیم.
- فرض کنید z اولین رأس ناموتوازن باشد که با حرکت از رأس w به سمت ریشه به آن برخورد می‌کنیم.
- همچنین فرض کنید y فرزندی از z با ارتفاع بیشتر باشد. توجه کنید که y باید یکی از اجداد w باشد.
- همچنین فرض کنید x فرزندی از y با ارتفاع بیشتر باشد. در اینجا نیز x باید یکی از اجداد w باشد. بنابراین رأس x یکی از نوادگان z است و البته ممکن است همان w باشد.
- رأس z به علت درج در زیر درخت با ریشه y نامتوازن شده است و بنابراین ارتفاع y دو واحد بزرگ‌تر از همزادش است.

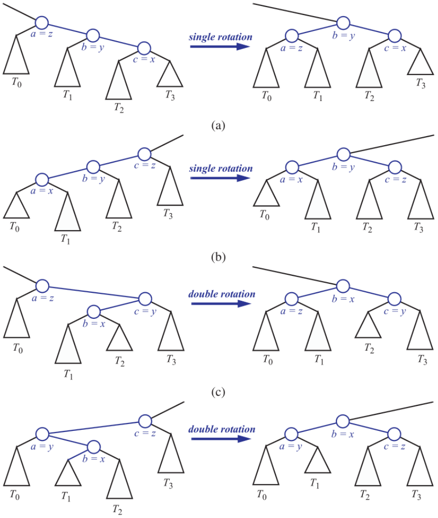
[1] search and repair

درج در درخت ای‌وی‌ال

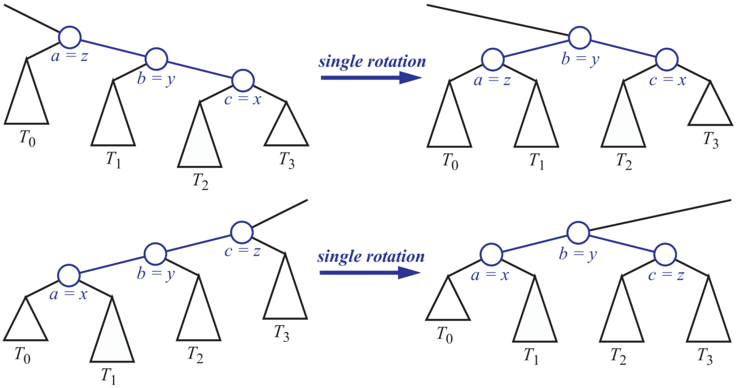
- حال با استفاده از الگوریتمی که شرح داده خواهد شد، زیر درخت با ریشه z را متوازن می‌کنیم.
- این تابع به طور موقت رئوس x و y و z را به a و b و c تغییر نام می‌دهد، به طوری که در یک پیمایش میان ترتیب از درخت T رأس a قبل از b و رأس b قبل از c قرار بگیرد.

درج در درخت ای‌وی‌ال

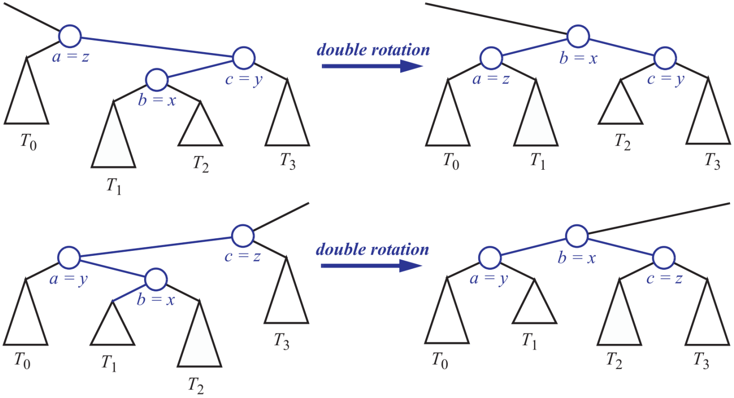
- رئوس x و y و z به چهار حالت زیر ممکن است به a و b و c نگاشت شوند.



درج در درخت ای‌وی‌ال



درج در درخت ای‌وی‌ال



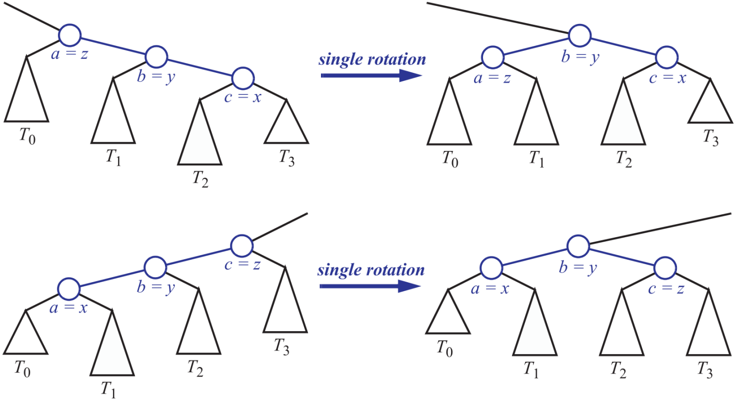
درج در درخت ای‌وی‌ال

- برای بازگرداندن توازن درخت، الگوریتم تغییر ساختار (`restructure`) درخت را به نحوی تغییر می‌دهد که z با b جایگزین شود به طوری که فرزندان آن a و c و فرزندان a و c فرزندان قبلی x و y و z باشند و ترتیب رئوس در پیمایش میان ترتیب حفظ شود.
- عملیات تغییر درخت T با استفاده از این تغییر ساختار معمولا دوران [1] نامیده می‌شود، زیرا از لحاظ بصری به نظر یک دوران (چرخش) در زیر درخت مربوطه اعمال شده است.

[1] rotation

درج در درخت ای‌وی‌ال

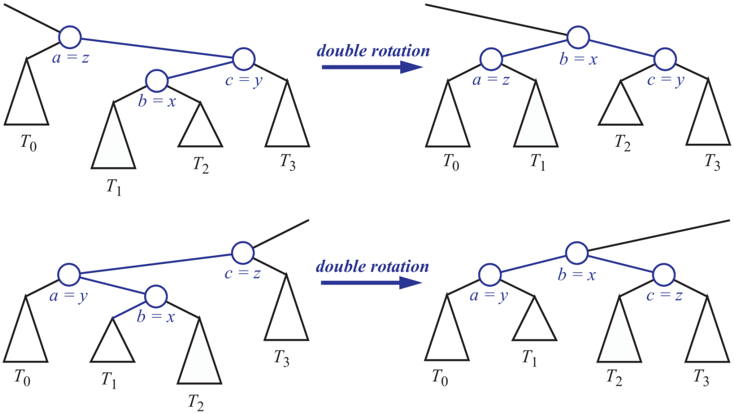
- اگر $\mathfrak{b} = \mathfrak{y}$ باشد، این تغییر ساختار دوران تکی [1] نامیده می‌شود، به طوری‌که به نظر می‌رسد $\mathfrak{y}$ بر روی $\mathfrak{z}$ چرخیده است.



[1] single rotation

درج در درخت ای‌وی‌ال

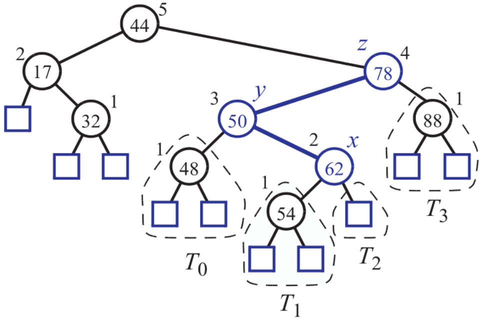
- اگر $b = x$ باشد، عملیات تغییر ساختار دوران دوتایی [1] نامیده می‌شود، به طوری‌که به نظر می‌رسد x بر روی y و سپس بر روی z چرخیده است.

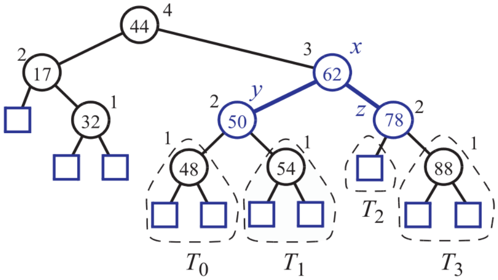


[1] double rotation

درج در درخت ای‌وی‌ال

- در مثال زیر یک دوران دوتایی انجام شده است.





درج در درخت ای‌وی‌ال

- در اینجا از یک تابع برای اعمال چهار نوع دوران استفاده کرده‌ام.

Algorithm restructure

```
function RESTRUCTURE(x)
 ▷ Input : A node x of a binary search tree T that has both a parent y
and a grandparent z
 ▷ Output : Tree T after a trinode restructuring (which corresponds to a
single or double rotation) involving nodes x, y, and z
1: Let (a, b, c) be a left-to-right (inorder) listing of the nodes x, y,
   and z, and let (T0 , T1 , T2 , T3 ) be a left-to-right (inorder) listing
   of the four subtrees of x, y, and z not rooted at x, y, or z.
2: Replace the subtree rooted at z with a new subtree rooted at b.
3: Let a be the left child of b and let T0 and T1 be the left and right
   subtrees of a, respectively.
4: Let c be the right child of b and let T2 and T3 be the left and right
   subtrees of c, respectively.
```

درج در درخت ای‌وی‌ال

- تابع تغییر ساختار رابطه فرزند–پدر را در تعداد ثابتی از رئوس تغییر می‌دهد به طوری که ترتیب آنها در پیمایش میان ترتیب حفظ می‌شود.
- علاوه بر حفظ ترتیب رئوس، تغییر ساختار به نحوی انجام می‌شود که ارتفاع تعدادی از رئوس تغییر کرده و درخت مجدداً متوازن می‌شود.

درج در درخت ای‌وی‌ال

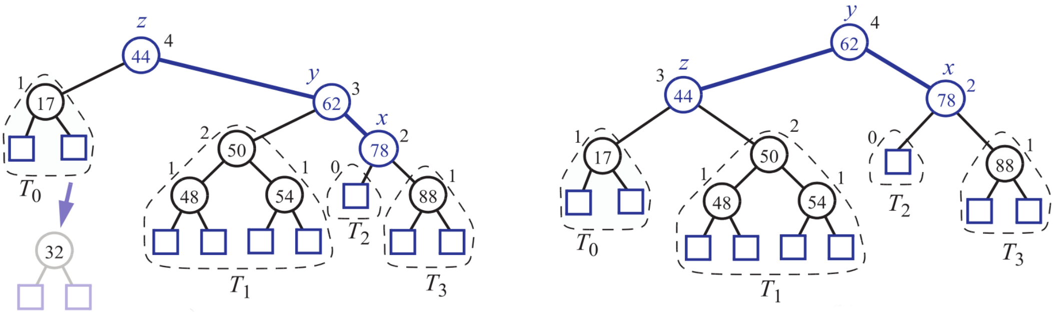
- توجه کنید تابع `restructure(x)` فراخوانی می‌شود زیرا z پدربزرگ x نامتوازن شده است. این عدم توازن به علت این است که ارتفاع یکی از فرزندان x افزایش پیدا کرده که باعث شده یکی از فرزندان z نسبت به فرزند دیگر z ارتفاع بیشتری داشته باشد.
- با استفاده از دوران فرزند x با ارتفاع بیشتر به بالا و فرزند z با ارتفاع کمتر به پایین منتقل می‌شود، بنابراین بعد از تغییر ساختار همه رئوس در زیر درخت با ریشه b متوازن می‌شود.
- بنابراین ویژگی توازن ارتفاع در رئوس x و y و z به صورت محلی [1] برقرار می‌شود.
- از آنجایی که بعد از انجام عملیات درج، زیر درخت با ریشه b جایگزین زیر درختی می‌شود که قبلا دارای ریشه z بود، همه اجداد z که نامتوازن بودند مجدداً متوازن می‌شوند. در نتیجه درخت به صورت عمومی [2] متوازن می‌شود.

[1] locally
[2] globally

حذف از درخت ای‌وی‌ال

- برای حذف یک رأس از درخت ای‌وی‌ال ابتدا عملیات حذف معمولی برروی درخت جستجوی دودویی را انجام می‌دهیم. در هنگام حذف نیز ممکن است توازن درخت نقض شود.

- در شکل سمت چپ حذف رأس با کلید ۳۲ باعث عدم توازن شده که در شکل سمت راست این توازن مجدداً بازیابی شده است.



حذف از درخت ای‌وی‌ال

- فرض کنید z اولین رأس نامتوازن باشد که با بالا رفتن از رأس حذف شده w به سمت ریشه درخت T با آن برخورد می‌کنیم.

- فرض کنید y فرزند z با ارتفاع بیشتر باشد. رأس y فرزندی از z است که جد w نیست.

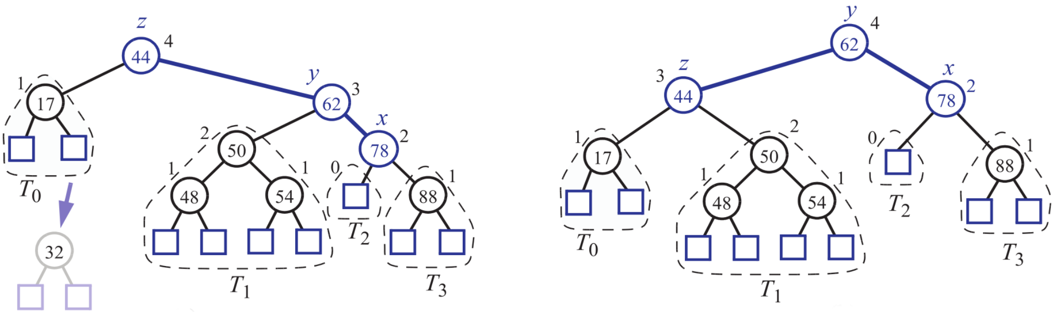
- فرض کنید x فرزند y باشد که به صورت زیر تعریف شده است : اگر یکی از فرزندان y ارتفاع بیشتری نسبت به دیگری داشته باشد، x فرزند y با ارتفاع بیشتر است. در غیراینصورت اگر هر دوی فرزندان y ارتفاع برابر داشته باشند، x فرزند y در طرف y است، بدین معنی که اگر y فرزند چپ باشد، x فرزند چپ y است و اگر y فرزند راست باشد، x فرزند راست y است.

حذف از درخت ای‌وی‌ال

- سپس عملیات `restructure(x)` را انجام می‌دهیم که ویژگی توازن ارتفاع را به صورت محلی در زیر درخت با ریشه z که اکنون دارای ریشه b است بازیابی می‌کند.

حذف از درخت ای‌وی‌ال

- شکل زیر یک مثال از بازیابی توازن را نشان می‌دهد.



حذف از درخت ای‌وی‌ال

- متاسفانه این تغییر ساختار ممکن است ارتفاع زیر درخت با ریشه b را به میزان یک واحد کاهش دهد، که باعث می‌شود اجداد b نامتوازن شوند. بنابراین پس از متوازن کردن z در درخت T به سمت بالا حرکت می‌کنیم و رئوس نامتوازن را پیدا می‌کنیم. اگر به یک رأس نامتوازن برخورد کردیم، عملیات تغییر ساختار را مجدداً انجام می‌دهیم و مجدداً در درخت به سمت بالا حرکت می‌کنیم.
- از آنجایی که ارتفاع درخت T برابر با $O(\lg n)$ است، تغییر ساختار درخت در هنگام عملیات حذف در زمان $O(\lg n)$ انجام می‌شود.

حذف از درخت ای‌وی‌ال

- پیچیدگی زمانی عملیات درج و حذف و جستجو در درخت ای‌وی‌ال برابر با $O(\lg n)$ است.

درخت‌های قرمز−سیاه

- قبلاً نشان دادیم که درخت جستجوی دودویی به ارتفاع h عملیات جستجو و درج و حذف را در زمان $O(h)$ انجام می‌دهد. بنابراین این عملیات می‌توانند سریع باشند، اگر ارتفاع درخت کم باشد. در بدترین حالت اگر ارتفاع درخت بسیار زیاد باشد زمان اجرای عملیات در درخت و لیست پیوندی یکسان خواهد بود.
- درخت‌های قرمز−سیاه [1] یکی از انواع درخت‌های جستجو هستند که متوازن [2] اند و عملیات روی مجموعه‌های پویا را در بدترین حالت در زمان $O(\lg n)$ انجام می‌دهند.

[1] red-black trees
[2] balanced

درخت‌های قرمز-سیاه

- یک درخت قرمز-سیاه یک درخت جستجوی دودویی است با یک بیت حافظه اضافی به ازای هر رأس. در این بیت رنگ رأس تعیین می‌شود که می‌تواند قرمز یا سیاه باشد.
- با محدود کردن رنگ رئوس بر روی هر مسیر ساده از ریشه به یک برگ، درخت‌های قرمز-سیاه اطمینان حاصل می‌کنند که هیچ مسیری بیشتر از دو برابر مسیر دیگر طول ندارد و بنابراین درخت تقریبا متوازن است.
- ارتفاع یک درخت قرمز-سیاه با n کلید حداکثر $2\lg(n+1)$ است که برابر است با $O(\lg n)$.
- هر رأس درخت دارای ویژگی‌های color ، key ، left ، right و p است. اگر یک رأس دارای پدر یا فرزند چپ یا راست نباشد، اشاره‌گرهای مربوطه تهی NIL خواهند بود.

درخت‌های قرمز-سیاه

- یک درخت قرمز-سیاه یک درخت جستجوی دودویی است که ویژگی‌های زیر را داراست :

۱. هر رأس یا قرمز است و یا سیاه.

۲. ریشه درخت سیاه است.

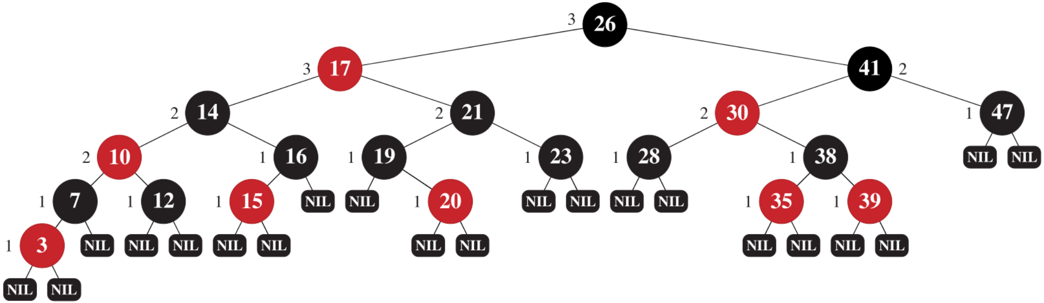
۳. هر برگ سیاه است.

۴. اگر یک رأس قرمز باشد، هر دو فرزند آن سیاه هستند.

۵. به ازای هر رأس، تعداد رئوس سیاه از همهٔ مسیرهای ساده از آن رأس به برگ‌های درخت برابر هستند.

درخت‌های قرمز-سیاه

- شکل زیر یک مثال از درخت قرمز-سیاه را نشان می‌دهد.



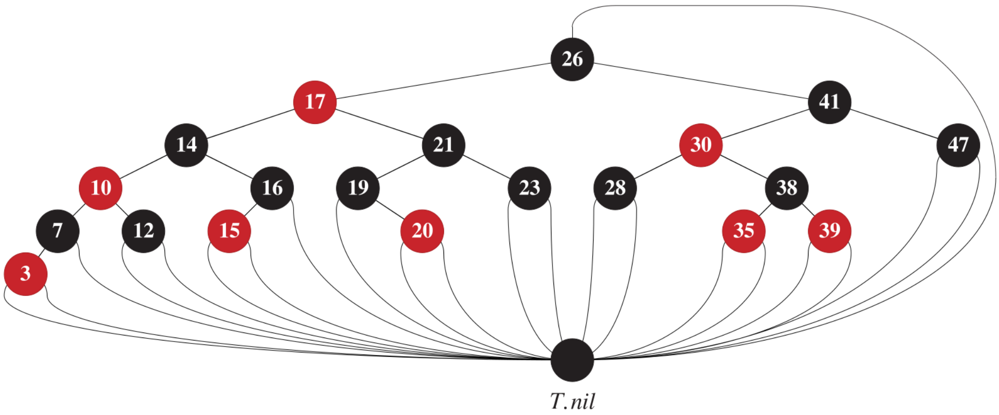
درخت‌های قرمز-سیاه

- برای مدیریت شرایط مرزی در درخت قرمز-سیاه از یک نگهبان [1] برای نمایش NIL استفاده می‌کنیم. برای درخت T ، نگهبان T.nil شیئی است که یک رأس معمولی از درخت است ، رنگ آن سیاه است، و مقدار p ، left ، right و key در آن تهی است.

[1] sentinel

درخت‌های قرمز-سیاه

- در شکل زیر، همه اشاره‌گرها به NIL با اشاره‌گری به T.nil جایگزین شده‌اند.

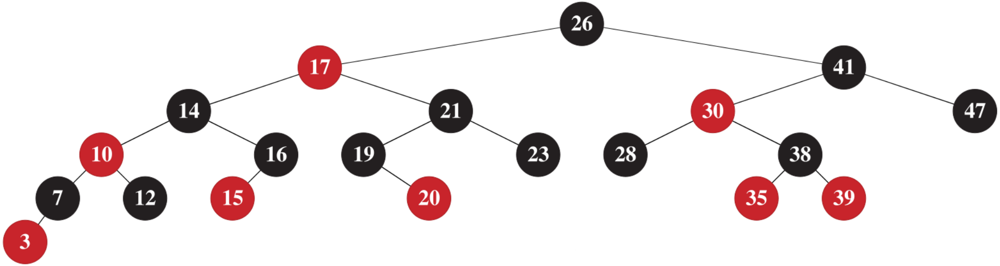


درخت‌های قرمز-سیاه

- دلیل این‌که نگهبان استفاده می‌کنیم این است که نگهبان باعث می‌شود که با یک رأس تهی که فرزند رأس x است مانند یک رأس عادی رفتار کنیم. در حالت عادی به ازای هر رأس برگ باید یک رأس تهی با رنگ سیاه در نظر بگیریم که باعث هدر رفتن حافظه می‌شود.

درخت‌های قرمز-سیاه

- در ادامه این قسمت برگ‌ها را حذف می‌کنیم و درخت قرمز-سیاه را تنها با رئوس میانی نشان می‌دهیم. شکل زیر نمایش درخت قرمز-سیاه بدون برگ‌های تهی است.

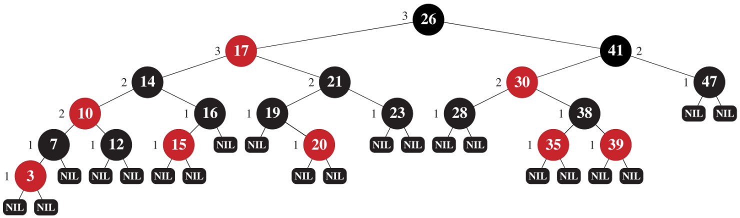


درخت‌های قرمز-سیاه

- تعداد رئوس سیاه برروی هر مسیر از رأس x بدون احتساب خود رأس تا یکی از برگ‌ها را ارتفاع سیاه[1] رأس می‌نامیم و با $bh(x)$ نمایش می‌دهیم.

- توجه کنید که همه مسیرهای ساده از یک رأس تا هریک از برگ‌ها تعداد رأس سیاه برابر دارند.

- ارتفاع سیاه یک درخت قرمز-سیاه ارتفاع سیاه ریشه آن است. ارتفاع سیاه هر رأس در شکل زیر در کنار آن درج شده است.



[1] black-height

درخت‌های قرمز-سیاه

- قضیه : ارتفاع درخت قرمز-سیاه با n رأس حداکثر $2\lg(n+1)$ است.
- اثبات : ابتدا نشان می‌دهیم که یک زیردرخت با ریشه x حداقل $2^{bh(x)} - 1$ رأس میانی دارد. این ادعا را توسط استقرا بر روی ارتفاع x اثبات می‌کنیم.
- اگر ارتفاع x برابر با صفر باشد، رأس x یک برگ است ($T.nil$) و زیردرخت با ریشه x دارای $2^{bh(x)} - 1 = 2^0 - 1 = 0$ رأس میانی است.

درخت‌های قرمز-سیاه

- برای اثبات گام استقرا، رأس x با ارتفاع مثبت را در نظر بگیرید. رأس x دارای دو فرزند است که هر دو یا یکی از آنها می‌تواند برگ باشد. ارتفاع سیاه یک فرزند سیاه، یک واحد کمتر از ارتفاع سیاه x است، اما ارتفاع سیاه یک فرزند قرمز، برابر با ارتفاع سیاه x است.
- بنابراین ارتفاع سیاه یک فرزند سیاه برابر با $bh(x) - 1$ است و ارتفاع سیاه یک فرزند قرمز برابر با $bh(x)$ است.

درخت‌های قرمز-سیاه

- از آنجایی که ارتفاع یک فرزند x کمتر از ارتفاع x است، می‌توانیم فرض استقرا را اعمال کنیم و نتیجه بگیریم که هر فرزند حداقل $2^{bh(x)-1} - 1$ رأس میانی دارد. بنابراین زیردرخت با ریشه x شامل حداقل $(2^{bh(x)-1} - 1) + (2^{bh(x)-1} - 1) + 1$ رأس میانی است که حداقل برابر با $2^{bh(x)} - 1$ است.
- حال فرض کنید h ارتفاع درخت باشد. بنابر ویژگی درخت قرمز-سیاه حداقل نصف رئوس برروی هر مسیر ساده از ریشه به یک برگ بدون در نظر گرفتن خود ریشه باید سیاه باشند. بنابراین ارتفاع سیاه ریشه باید حداقل $h/2$ باشد و بنابراین $n \geqslant 2^{h/2} - 1$.
- بنابراین به دست می‌آوریم $h \leqslant 2\lg(n+1)$.

درخت‌های قرمز-سیاه

- از این قضیه نتیجه می‌گیریم عملیات مجموعه‌های پویای Search ، Minimum ، Maximum ، Successor ، و Predecessor در زمان $O(\lg n)$ در درخت قرمز-سیاه انجام می‌شوند زیرا هر کدام در زمان $O(h)$ در درخت جستجوی دودویی انجام می‌شوند و درخت قرمز-سیاه با n رأس، یک درخت جستجوی دودویی با ارتفاع $O(\lg n)$ است.
- اگرچه عملیات Tree-Insert و Tree-Delete در درخت جستجوی دودویی در زمان $O(\lg n)$ قابل انجام‌اند، اما در درخت قرمز-سیاه نمی‌توانیم از آنها استفاده کنیم زیرا ویژگی درخت قرمز-سیاه را حفظ نمی‌کنند. در ادامه نشان خواهیم داد که چگونه می‌توانیم عملیات درج Insert و حذف Delete را درخت قرمز-سیاه در زمان $O(\lg n)$ پیاده‌سازی کنیم.

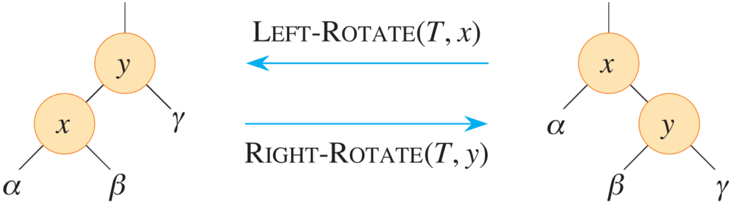
درخت‌های قرمز-سیاه

- عملیات درج Tree-Insert و حذف Tree-Delete برروی درخت قرمز-سیاه، در زمان $O(\lg n)$ اجرا می‌شوند، اما از آنجایی که این عملیات درخت را تغییر می‌دهند، ممکن است ویژگی درخت قرمز-سیاه را حفظ نکنند. برای حفظ ویژگی درخت قرمز-سیاه لازم است تغییراتی در این عملیات اعمال کنیم.
- حفظ ویژگی درخت قرمز-سیاه توسط دوران [1] انجام می‌شود که یک عملیات محلی در یک درخت جستجو است.

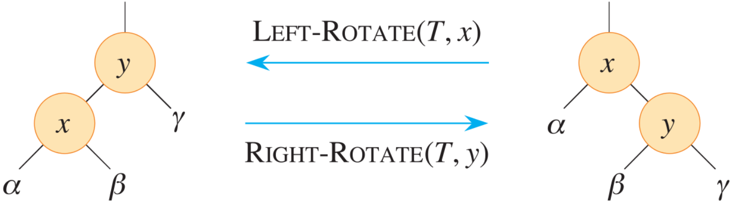
[1] rotation

درخت‌های قرمز-سیاه

- شکل زیر دو نوع دوران را نشان می‌دهد : دوران چپ و دوران راست.



- فرض کنید رأس x یک فرزند سمت راست به نام y دارد که برابر با T.nil نیست.
- دوران چپ [1] زیر درخت اصلی با ریشه x را به گونه‌ای تغییر می‌دهد که ریشه زیردرخت برابر با y شود و x فرزند چپ رأس y شود و فرزند چپ قبلی y (که در شکل β است) فرزند راست x شود.



- شبه کد Left-Rotate در زیر فرض می‌کند که $x.right \neq T.nil$ است و پدر ریشه برابر با T.nil است.

[1] left rotation

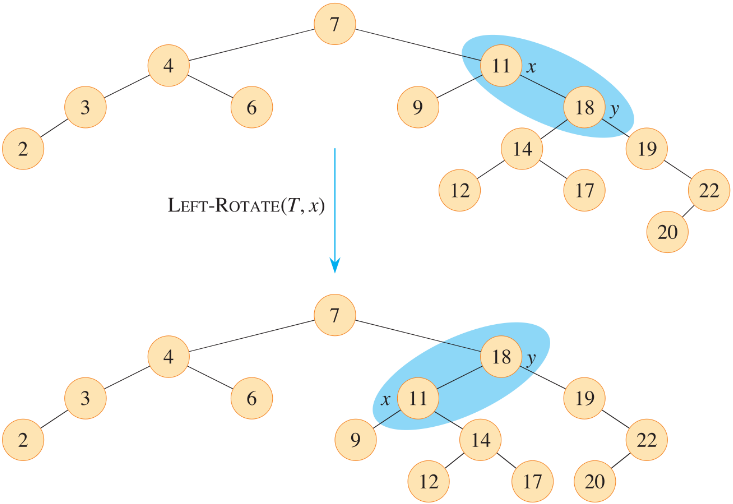
درخت‌های قرمز-سیاه

Algorithm Left Rotate

```
function LEFT-ROTATE(T,x)
y = x.right
x.right = y.left  ▷ turn y's left subtree into x's right subtree
if y.left ≠ T.nil then  ▷ if y's left subtree is not empty ...
    y.left.p = x     ▷ ... then x becomes the parent of the subtree's root
y.p = x.p  ▷ x's parent becomes y's parent
if x.p == T.nil then  ▷ if x was the root ...
    T.root = y     ▷ ... then y becomes the root
else if x == x.p.left then  ▷ otherwise, if x was a left child
    x.p.left = y     ▷ ... then y becomes a left child
else  x.p.right = y  ▷ otherwise, x a right child, and now y is
y.left = x  ▷ make x become y's left child
x.p = y
```

درخت‌های قرمز-سیاه

- شکل زیر یک مثال از اعمال Left-Rotate را برروی درخت جستجوی دودویی نشان می‌دهد.



- تابع Right-Rotate متقارن با تابع Left-Rotate است. هر دوی این توابع در زمان $O(1)$ اجرا می‌شود.

درج در درخت قرمز-سیاه

- تابع RB-Insert رأس z را در درخت T شبیه درخت جستجوی دودویی درج می‌کند و رنگ رأس z را قرمز می‌کند. سپس از تابع RB-Insert-Fixup استفاده می‌کند تا رنگ رئوس را تصحیح کند.

درج در درخت قرمز-سیاه

Algorithm RB Insert

```
function RB-INSERT(T,z)
x = T.root  ▷ node being compared with z
y = T.nil  ▷ y will be parent of z
while x ≠ T.nil do  ▷ descend until reaching the sentinel
    y = x
    if z.key < x.key then
        x = x.left
    else  x = x.right
z.p = y  ▷ found the location - insert z with parent y
if y == T.nil then
    T.root = z      ▷ tree T was empty
else if z.key < y.key then
    y.left = z
else  y.right = z
z.left = T.nil  ▷ both off z's children are the sentinel
z.right = T.nil
z.color = RED  ▷ the new node starts out red
RB-Insert-Fixup (T,z)  ▷ correct any violations of red-black properties
```

درج در درخت قرمز-سیاه

- تابع RB-Insert چند تفاوت با تابع Tree-Insert دارد :
- مقادیر NIL با T.nil جایگزین شده‌اند. هم‌چنین در خطوط ۱۴ و ۱۵ از تابع RB-Insert مقادیر z.left و z.right برابر با T.nil قرار می‌گیرند، در صورتی که این مقادیر در تابع درج در درخت برابر با NIL بودند.
- در خط ۱۶ رنگ رأس جدید z برابر با قرمز قرار می‌گیرد.
- از آنجایی که قرمز کردن رأس z ممکن است باعث شود ویژگی درخت قرمز-سیاه نقص شود، در خط ۱۷ تابع RB-Insert-Fixup فراخوانی می‌شود تا ویژگی درخت قرمز-سیاه حفظ شود.

درج در درخت قرمز-سیاه

Algorithm RB Insert Fixup

```
    function RB-Insert-Fixup(T,z)
1:  while z.p.color == RED do
2:     if z.p == z.p.p.left then      ▷ is z's parent a left child?
3:        y = z.p.p.right        ▷ y is z's uncle
4:        if y.color = RED then        ▷ are z's parent and uncle both red?
5:           z.p.color = BLACK
6:           y.color = BLACK
7:           z.p.p.color = RED
8:           z = z.p.p
9:        else
10:          if z == z.p.right then
11:             z = z.p
12:             Left-Rotate (T,z)
13:          z.p.color = BLACK
14:          z.p.p.color = RED
15:          Right-Rotate (T, z.p.p)
16:    else    ▷ same as lines 3-15 , but with "right" and "left" exchanged
17:       y = z.p.p.left
18:       if y.color == RED then
19:          z.p.color = BLACK
20:          y.color = BLACK
21:          z.p.p.color = RED
22:          z = z.p.p
23:       else
24:          if z == z.p.left then
25:             z = z.p
26:             Right-Rotate (T,z)
27:          z.p.color = BLACK
28:          z.p.p.color = RED
29:          Left-Rotate (T,z.p.p)
30: T.root.color = BLACK
```

درج در درخت قرمز-سیاه

- برای این‌که بفهمیم تابع RB-Insert-Fixup چگونه عمل می‌کند، تابع را در سه‌گام بررسی می‌کنیم.
- ابتدا تعیین می‌کنیم با درج کردن رأس z و رنگ کردن آن با قرمز، چگونه ویژگی‌های درخت قرمز-سیاه نقض می‌شوند.
- سپس بررسی می‌کنیم هدف از حلقه خطوط ۱ تا ۲۹ چیست.
- در پایان سه حالت حلقه اصلی تابع را بررسی می‌کنیم.

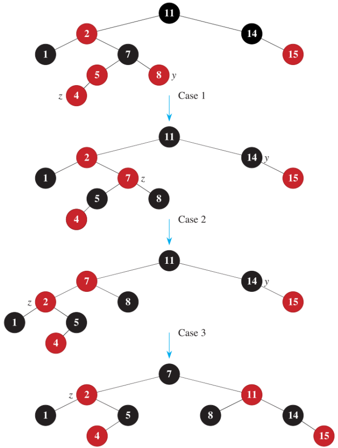
درج در درخت قرمز-سیاه

- در توصیف درخت قرمز-سیاه نیاز داریم درمورد همزاد رأس پدر صحبت کنیم. از واژهٔ عمو [1] برای نام بردن از رأس همزاد پدر استفاده می‌کنیم.

[1] uncle

درج در درخت قرمز-سیاه

- شکل زیر نشان می‌دهد تابع RB-Insert-Fixup چگونه برروی یک درخت قرمز-سیاه عمل می‌کند بسته به این که رأس پدر و عموی رأس z چه رنگی داشته باشند.



درج در درخت قرمز-سیاه

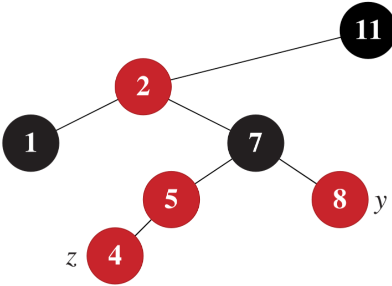
- در اینجا بررسی می‌کنیم چگونه ویژگی‌های درخت قرمز-سیاه ممکن است نقض شوند.
- ویژگی اول درخت که ملزم می‌کند هر رأس قرمز یا سیاه باشد حفظ می‌شود.
- همچنین ویژگی سوم که ملزم می‌کند هر برگ سیاه باشد حفظ می‌شود زیرا هر دو فرزند رأس جدید قرمز اضافه شده T.nil هستند که سیاه است.

درج در درخت قرمز-سیاه

- ویژگی پنجم می‌گوید تعداد رئوس سیاه در هر مسیر ساده از یک رأس برابرند. این ویژگی نیز حفظ می‌شود، زیر رأس z که قرمز است جایگزین یک برگ سیاه می‌شود و فرزندان آن هر دو سیاه هستند.
- تنها ویژگی دوم و چهارم ممکن است نقض شوند. طبق ویژگی دوم ریشه درخت باید سیاه باشد و طبق ویژگی چهارم رأس قرمز نمی‌تواند فرزند قرمز داشته باشد. ویژگی دوم ممکن است نقض شود اگر z ریشه باشد و ویژگی چهارم ممکن است نقض شود اگر پدر رأس z قرمز باشد.

درج در درخت قرمز-سیاه

- شکل زیر نقض ویژگی چهارم را بعد از درج رأس z نشان می‌دهد.



درج در درخت قرمز-سیاه

- حلقه خطوط ۱ تا ۲۹ دو احتمال را بررسی می‌کند : خطوط ۳ تا ۱۵ وضعیتی را بررسی می‌کند که در آن پدر رأس z یعنی z.p فرزند چپ پدربزرگ z یعنی z.p.p است و خطوط ۱۷ تا ۲۹ وضعیتی که در آن z.p فرزند راست z.p.p است.

Algorithm RB Insert Fixup

```
    function RB-INSERT-FIXUP(T,z)
1:  while z.p.color == RED do
2:     if z.p == z.p.p.left then      ▷ is z's parent a left child?
3:        y = z.p.p.right         ▷ y is z's uncle
4:        if y.color = RED then        ▷ are z's parent and uncle both red?
5:           z.p.color = BLACK
6:           y.color = BLACK
7:           z.p.p.color = RED
8:           z = z.p.p
9:        else
10:          if z == z.p.right then
11:             z = z.p
12:             Left-Rotate (T,z)
13:          z.p.color = BLACK
14:          z.p.p.color = RED
15:          Right-Rotate (T, z.p.p)
```

درج در درخت قرمز-سیاه

- خطوط ۱۷ تا ۲۹ وضعیتی را بررسی می‌کنند که در آن z.p فرزند راست z.p.p است.

Algorithm RB Insert Fixup

```
    function RB-INSERT-FIXUP(T,z)
1:  while z.p.color == RED do
2:     if z.p == z.p.p.left then      ▷ is z's parent a left child?
3:        ...
15:       ...
16:    else    ▷ same as lines 3-15 , but with "right" and "left" exchanged
17:       y = z.p.p.left
18:       if y.color == RED then
19:          z.p.color = BLACK
20:          y.color = BLACK
21:          z.p.p.color = RED
22:          z = z.p.p
23:       else
24:          if z == z.p.left then
25:             z = z.p
26:             Right-Rotate (T,z)
27:          z.p.color = BLACK
28:          z.p.p.color = RED
29:          Left-Rotate (T,z.p.p)
30: T.root.color = BLACK
```

درج در درخت قرمز-سیاه

- نشان می‌دهیم که این حلقه ویژگی‌های زیر را در ابتدای هر تکرار حلقه حفظ می‌کند.

(a) رأس z قرمز است.

(b) اگر $z.p$ ریشه باشد، آنگاه $z.p$ سیاه است.

(c) اگر درخت هرکدام از ویژگی‌های درخت قرمز-سیاه را نقض کند، آنگاه حداکثر یکی از آنها را نقض می‌کند که ممکن است ویژگی دوم یا چهارم باشد، اما نقض هردو در یک زمان اتفاق نمی‌افتد. هنگامی که ویژگی دوم نقض شود رأس قرمز z در ریشه قرارگرفته و هنگامی که ویژگی چهارم نقض شود، رأس z و $z.p$ هر دو قرمز هستند.

- نشان دادن قسمت (a) و (b) بدیهی است و تمرکز بر اثبات قسمت (c) است.

درج در درخت قرمز-سیاه

- برای اینکه نشان دهیم یک حلقه یک ویژگی را حفظ می‌کند یا به عبارت دیگر برای اثبات ثابت حلقه [1] باید به روش استقرایی نشان دهیم که ویژگی در ابتدای تکرار اول حلقه برقرار است و اگر در ابتدای یک تکرار برقرار باشد، در ابتدای تکرار بعدی نیز برقرار است.
- همچنین باید ثابت کنیم که حلقه به پایان می‌رسد.

[1] loop invariant

- مقدار اولیه حلقه [1] (فرض استقرا) :

قبل از اینکه RB-Insert فراخوانی شود، هیچ‌کدام از ویژگی‌های درخت قرمز-سیاه نقض نشده‌اند. تابع RB-Insert یک رأس قرمز z اضافه می‌کند و تابع RB-Insert-Fixup را فراخوانی می‌کند.

[1] initialization

درج در درخت قرمز-سیاه

(a) وقتی تابع RB-Insert-Fixup فراخوانی می‌شود، رأس z به همان رنگ قرمز است.

(b) اگر $z.p$ ریشه باشد، آنگاه $z.p$ سیاه است.

(c) اگر درخت ویژگی دوم را نقض کند، ریشه قرمز رنگ باید همان رأس تازه اضافه شدهٔ z باشد. از آنجایی که پدر و هردو فرزند رأس z رئوس نگبان سیاه هستند، درخت ویژگی چهارم را نقض نمی‌کند. اگر درخت ویژگی چهارم را نقض کند، از آنجایی که فرزندان رأس z نگهبان‌های سیاه هستند و درخت قبل از اضافه شدن رأس z هیچ ویژگی دیگری را نقض نمی‌کرد، رأس z و $z.p$ هر دو قرمز هستند و درخت هیچ ویژگی دیگری را نقض نمی‌کند.

درج در درخت قرمز-سیاه

- حفظ ثابت حلقه [1] (گام استقرا) :

در حلقه شش حالت وجود دارد، که ما در اینجا تنها سه حالت خطوط ۳ تا ۱۵ را بررسی می‌کنیم وقتی پدر رأس z یعنی $z.p$ فرزند چپ پدربزرگ z یعنی $z.p.p$ است. اثبات حالت‌های خطوط ۱۷ تا ۲۹ متقارن و مشابه است. رأس $z.p.p$ وجود دارد، زیرا اگر $z.p$ ریشه باشد آنگاه $z.p$ سیاه است. از آنجایی که تابع وارد حلقه می‌شود اگر $z.p$ قرمز باشد، پس $z.p$ نمی‌تواند ریشه باشد و بنابراین $z.p.p$ وجود دارد.

[1] maintenance

درج در درخت قرمز-سیاه

- در اینجا سه حالت را بررسی می‌کنیم. حالت ۱ در خطوط ۵ تا ۸ ، حالت ۲ در خطوط ۱۱ تا ۱۲ و حالت ۳ در خطوط ۱۳ تا ۱۵ بررسی می‌شوند.

Algorithm RB Insert Fixup

```
    function RB-INSERT-FIXUP(T,z)
1:  while z.p.color == RED do
2:     if z.p == z.p.p.left then      ▷ is z's parent a left child?
3:        y = z.p.p.right          ▷ y is z's uncle
4:        if y.color = RED then         ▷ are z's parent and uncle both red?
5:           z.p.color = BLACK
6:           y.color = BLACK
7:           z.p.p.color = RED
8:           z = z.p.p
9:        else
10:          if z == z.p.right then
11:             z = z.p
12:             Left-Rotate (T,z)
13:          z.p.color = BLACK
14:          z.p.p.color = RED
15:          Right-Rotate (T, z.p.p)
```

درج در درخت قرمز-سیاه

- حالت ۱ از حالت‌های ۲ و ۳ به علت رنگ عموی رأس z یعنی y متفاوت است. در خط ۳ اشاره‌گر y به عموی رأس z یعنی $z.p.p.right$ اشاره می‌کند و خط ۴ رنگ رأس y را بررسی می‌کند. اگر y قرمز باشد، حالت ۱ اجرا می‌شود. در غیراینصورت حالت ۲ و ۳ در نظر گرفته می‌شوند.

Algorithm RB Insert Fixup

```
    function RB-INSERT-FIXUP(T,z)
1:  while z.p.color == RED do
2:     if z.p == z.p.p.left then      ▷ is z's parent a left child?
3:        y = z.p.p.right          ▷ y is z's uncle
4:        if y.color = RED then        ▷ are z's parent and uncle both red?
5:           z.p.color = BLACK
6:           y.color = BLACK
7:           z.p.p.color = RED
8:           z = z.p.p
9:        else
10:           if z == z.p.right then
11:              z = z.p
12:              Left-Rotate (T,z)
13:           z.p.color = BLACK
14:           z.p.p.color = RED
15:           Right-Rotate (T, z.p.p)
```

درج در درخت قرمز-سیاه

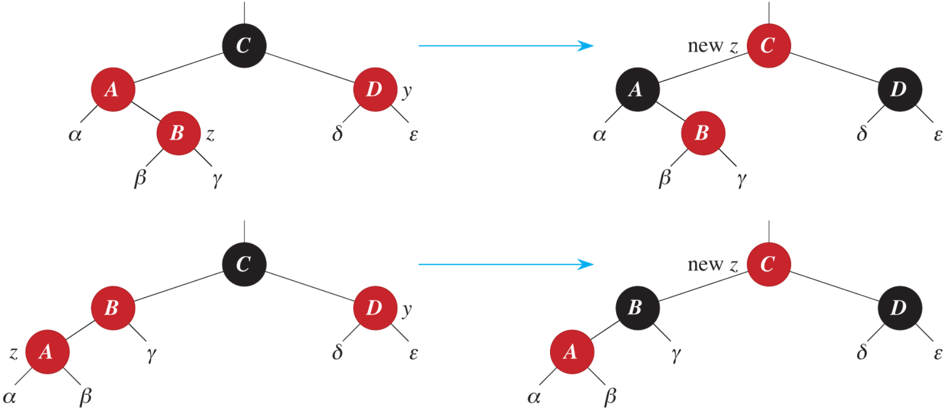
- در هر سه حالت، پدربزرگ z یعنی z.p.p سیاه است، زیرا z.p قرمز است و ویژگی چهارم درخت نقض می‌شود اگر z و z.p قرمز باشند.

Algorithm RB Insert Fixup

```
function RB-INSERT-FIXUP(T,z)
while z.p.color == RED do
   if z.p == z.p.p.left then      ▷ is z's parent a left child?
      y = z.p.p.right        ▷ y is z's uncle
      if y.color = RED then        ▷ are z's parent and uncle both red?
         z.p.color = BLACK
         y.color = BLACK
         z.p.p.color = RED
         z = z.p.p
      else
         if z == z.p.right then
            z = z.p
            Left-Rotate (T,z)
         z.p.color = BLACK
         z.p.p.color = RED
         Right-Rotate (T, z.p.p)
```

درج در درخت قرمز-سیاه

- حالت ۱ : عموی z قرمز است.
- شکل زیر حالت ۱ (خطوط ۵ تا ۸) را نشان می‌دهد وقتی که z.p و y هر دو قرمز هستند.



درج در درخت قرمز-سیاه

- از آنجایی که پدربزرگ z یعنی $z.p.p$ سیاه است، سیاهی آن می‌تواند یک سطح به پایین به $z.p$ و y منتقل شود که مشکل z و $z.p$ را که هر دو قرمز هستند حل می‌کند. در این‌صورت پدربزرگ z قرمز می‌شود. حلقه با $z.p.p$ به عنوان رأس جدید z تکرار می‌شود، و اشاره‌گر z دو سطح به بالا حرکت می‌کند.

- حال نشان می‌دهیم که حالت ۱ ثابت حلقه را در ابتدای تکرار بعدی حفظ می‌کند. فرض کنید رأس z در تکرار فعلی را با z نمایش دهیم و $z' = z.p.p$ رأسی باشد که در تکرار بعدی z نامیده می‌شود.

(a) از آنجایی که در تکرار فعلی $z.p.p$ قرمز است، رأس z' در ابتدای تکرار بعدی قرمز است.

(b) رأس $z'.p$ در تکرار فعلی $z.p.p.p$ است و رنگ این رأس تغییر نمی‌کند. اگر این رأس ریشه باشد، رنگ آن قبل از شروع تکرار فعلی حلقه سیاه بوده و در ابتدای تکرار بعدی سیاه می‌ماند.

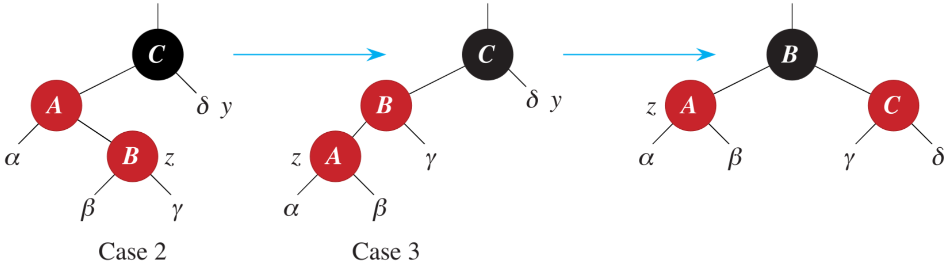
درج در درخت قرمز-سیاه

(c) بررسی کردیم که حالت ۱ ویژگی پنجم را حفظ می‌کند و ویژگی‌های اول و سوم را نقض نمی‌کند. اگر رأس z' در ابتدای تکرار بعدی ریشه باشد، حالت ۱ نقض ویژگی چهارم را رفع می‌کند. چون z' قرمز است و ریشه است، ویژگی دوم تنها ویژگی است که نقض می‌شود و این نقض به علت z' است.

- اگر رأس z' در ابتدای تکرار بعدی ریشه نباشد، حالت ۱ نقضی در ویژگی دوم به وجود نیاورده است. حالت ۱ نقض ویژگی چهارم را که در ابتدای تکرار وجود آمده رفع کرده است. در این‌صورت z' قرمز شده است و $z'.p$ تغییری نکرده است. اگر $z'.p$ سیاه بوده، هیچ نقصی در ویژگی چهارم به وجود نیامده است. اگر $z'.p$ قرمز بوده است، با قرمز کردن z' ویژگی چهارم بین z' و $z'.p$ نقض شده است.

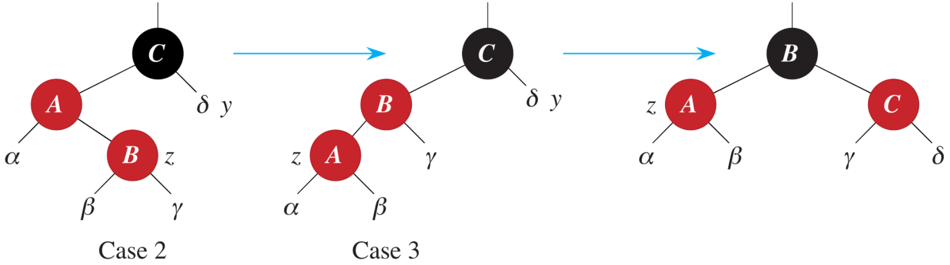
درج در درخت قرمز-سیاه

- حالت ۲ : رنگ y عموی z سیاه و z یک فرزند راست است.
- حالت ۳ : رنگ y عموی z سیاه و z یک فرزند چپ است.
- در حالت‌های ۲ و ۳، رنگ y عموی z سیاه است و رنگ پدر z قرمز است. دو حالت را در نظر می‌گیریم. رأس z یا فرزند راست یا فرزند چپ z.p است.
- خطوط ۱۱ و ۱۲ حالت ۲ را بررسی می‌کنند که همراه با حالت ۳ در شکل زیر نشان داده شده است.



درج در درخت قرمز-سیاه

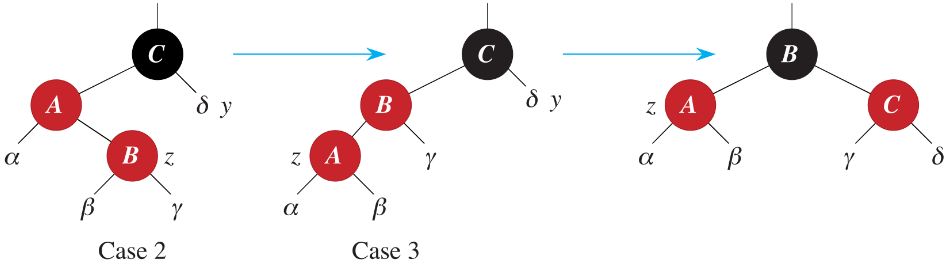
- در حالت ۲، رأس z فرزند راست پدر خود است. یک دوران چپ این حالت را به حالت ۳ تبدیل می‌کند (خطوط ۱۳ تا ۱۵) که در آن رأس z یک فرزند چپ است.
- چون z و z.p هر دو قرمز هستند، دوران نه بر ارتفاع سیاه رئوس تأثیری می‌گذارد و نه بر ویژگی پنجم.
- چنانچه حالت ۳ مستقیما و یا از طریق حالت ۲ اجرا شود، رأس y عموی z سیاه است، زیرا در غیراینصورت حالت ۱ اجرا شده بود.



درج در درخت قرمز-سیاه

- علاوه بر این رأس z.p.p وجود دارد، زیرا این رأس در هنگامی که خطوط ۲ و ۳ اجرا شده‌اند، وجود داشته است و بعد از انتقال z یک سطح به سمت بالا در خط ۱۱ و سپس یک سطح به سمت پایین در خط ۱۲، رأس z.p.p تغییر نکرده است.

- حالت ۳ برخی رنگ‌ها را تغییر می‌دهد و یک دوران راست انجام می‌دهد، که ویژگی پنجم را حفظ می‌کند. در این لحظه، هیچ دو رأس قرمزی پشت سرهم وجود ندارند. حلقه در تکرار بعدی در خط ۱ به پایان می‌رسد، زیرا z.p اکنون سیاه است.



درج در درخت قرمز-سیاه

- حال نشان می‌دهیم که حالت‌های ۲ و ۳ ثابت حلقه را حفظ می‌کنند.

(a) حالت ۲ باعث می‌شود z به $z.p$ اشاره کند که قرمز است. تغییر دیگری بر روی z یا رنگ آن در حالت‌های ۲ و ۳ اعمال نمی‌شود.

(b) حالت ۳ باعث می‌شود $z.p$ تبدیل به سیاه شود، پس اگر $z.p$ در شروع تکرار بعدی ریشه باشد، رنگ آن سیاه است.

(c) همچون حالت ۱، ویژگی‌های اول و سوم و پنجم در حالت‌های ۲ و ۳ حفظ می‌شوند. از آنجایی که رأس z در حالت‌های ۲ و ۳ ریشه نیست، می‌دانیم که ویژگی دوم نقض نمی‌شود. حالت‌های ۲ و ۳ ویژگی دوم را نقض نمی‌کنند، زیرا تنها رأسی که تبدیل به قرمز شده است توسط دوران در حالت ۳ فرزند یک رأس سیاه می‌شود. حالت‌های ۲ و ۳ نقض ویژگی را تصحیح می‌کنند.

درج در درخت قرمز-سیاه

- خاتمه پذیری [1] : برای اینکه نشان دهیم حلقه خاتمه می‌یابد، توجه کنید که اگر تنها حالت ۱ اتفاق بیافتد، اشاره‌گر رأس z در هر تکرار حلقه به سمت ریشه حرکت می‌کند، و در نهایت $z.p$ سیاه است. همچنین اگر z ریشه باشد، رأس $z.p$ نگهبان T.nil است و در نتیجه سیاه است.
- اگر حالت‌های ۲ یا ۳ اتفاق بیافتند، آنگاه قبلا دیدیم که حلقه خاتمه می‌یابد. از آنجایی که حلقه خاتمه می‌یابد چون $z.p$ سیاه است، درخت ویژگی چهارم را در پایان حلقه نقض نمی‌کند. تنها ویژگی که ممکن است نقض شود، ویژگی دوم است. خط ۳۰ با تغییر رنگ ریشه به سیاه این ویژگی را بازیابی می‌کند، بنابراین وقتی RB-Insert-Fixup به پایان می‌رسد، همه ویژگی‌های درخت قرمز-سیاه برقرار هستند.

[1] termination

درج در درخت قرمز-سیاه

- تحلیل زمانی : چون ارتفاع یک درخت قرمز-سیاه با n رأس برابر با $O(\lg n)$ است، خطوط ۱ تا ۱۶ از تابع RB-Insert در زمان $O(\lg n)$ اجرا می‌شوند.
- در RB-Insert-Fixup حلقه تکرار می‌شود تنها اگر حالت ۱ اتفاق بیافتد، و در این‌صورت اشاره‌گر z دو سطح به سمت بالا حرکت می‌کند.
- بنابراین کل تعداد تکرار حلقه $O(\lg n)$ است و RB-Insert در کل در زمان $O(\lg n)$ اجرا می‌شود.
- علاوه بر این هیچ‌گاه بیشتر از دو دوران انجام نمی‌شود، زیرا در صورتی که حالت ۲ یا ۳ اجرا شوند، حلقه خاتمه می‌یابد.

حذف در درخت قرمز-سیاه

- همانند عملیات پایه‌ای دیگر در درخت قرمز-سیاه با n رأس، حذف یک رأس نیز در زمان $O(\lg n)$ انجام می‌شود.

- تابع حذف یک رأس از درخت قرمز-سیاه بر پایه تابع Tree-Delete است. ابتدا باید تابع Transplant را به گونه‌ای تغییر دهیم که برای درخت قرمز-سیاه قابل استفاده باشد.

- تابع RB-Transplant یک زیردرخت با ریشه u را با یک زیردرخت با ریشه v جایگزین می‌کند. این تابع دو تفاوت با تابع Transplant دارد. اول اینکه در خط ۱ به جای NIL از T.nil استفاده می‌کنیم و دوم اینکه انتساب $v.p = u.p$ در خط ۶ بدون شرط انجام می‌شود، بدین معنی که تابع می‌تواند مقداری را به $v.p$ انتساب دهد حتی اگر یک رأس نگهبان باشد.

حذف در درخت قرمز-سیاه

- تابع RB-Transplant در زیر نشان داده شده است.

Algorithm RB Transplant

```
function RB-Transplant(T,u,v)
if u.p == T.nil then
    T.root = v
else if u == u.p.left then
    u.p.left = v
else  u.p.right = v
v.p = u.p
```

حذف در درخت قرمز-سیاه

- تابع RB-Delete همانند تابع Tree-Delete است با این تفاوت که شرایطی که در آن ویژگی‌های درخت قرمز-سیاه نقض می‌شوند باید مدیریت شود.

حذف در درخت قرمز-سیاه

Algorithm RB Delete

```
function RB-DELETE(T,z)
y = z
y-original-color = y.color
if z.left == T.nil then
   x = z.right
   RB-Transplant (T,z,z.right)     ▷ replace z by its right child
else if z.right == T.nil then
   x = z.left
   RB-Transplant (T,z,z.left)     ▷ replace z by its left child
else  y = Tree-Minimum (z.right)  ▷ y is z's successor
    y-original-color = y.color
    x = y.right
    if y ≠ z.right then     ▷ is y farther down the tree?
       RB-Transplant (T,y,y.right)       ▷ replace y by its right child
       y.right = z.right       ▷ z's right child becomes
       y.right.p = y       ▷ y's right child
    else  x.p = y     ▷ in case x is T.nil
    RB-Transplant(T,z,y)     ▷ replace z by its successor y
    y.left = z.left     ▷ and give z's left child to y,
    y.left.p = y     ▷ which had no left child
    y.color = z.color
if y-original-color == BLACK then  ▷ if any red-black violations occurred,
    RB-Delete-Fixup (T,x)     ▷ correct them
```

حذف در درخت قرمز–سیاه

- وقتی رأس z که در حال حذف‌شدن است حداکثر یک فرزند دارد، آنگاه y همان z خواهد بود. وقتی z دو فرزند دارد، y رأس بعدی z خواهد بود که فرزند چپ ندارد و به مکان z در درخت منتقل می‌شود. علاوه بر این y رنگ z را به خود می‌گیرد.
- در هر صورت، رأس y حداکثر یک فرزند دارد : رأس x که جای y را در درخت می‌گیرد. رأس x همان T.nil خواهد بود اگر y فرزندی نداشته باشد.
- از آنجایی که رأس y یا حذف می‌شود و یا در درخت جابجا می‌شود، تابع باید رنگ اصلی y را نگه دارد. اگر ویژگی‌های درخت قرمز–سیاه بعد از حذف z نقض شوند، تابع RB–Delete تابع اضافی RB–Delete–Fixup را فراخوانی می‌کند که رنگ‌ها را تغییر می‌دهد و دوران‌هایی را برای برقراری مجدد ویژگی‌های درخت قرمز–سیاه انجام می‌دهد.

حذف در درخت قرمز-سیاه

- اگرچه RB-Delete تقریبا دو برابر Tree-Delete است، ساختار هر دو تابع یکسان است. چند تفاوت این دو تابع به شرح زیراند.

- خط وقتی رأس z حداکثر یک فرزند دارد و خط ۹ وقتی z دو فرزند دارد رأس y را مقداردهی می‌کنند.

- چون رنگ رأس y می‌تواند تغییر کند، متغیر y-original-color رنگ اصلی y را قبل از تغییر ذخیره می‌کند. خط ۲ و ۱۰ این متغیر را بعد از انتساب به y مقداردهی می‌کنند. وقتی رأس z دو فرزند دارد، رئوس y و z متمایز هستند. در اینصورت خط ۱۷ رأس y را به مکان اصلی z منتقل می‌کند و خط ۲۰ به y همان رنگ z را می‌دهد. وقتی رنگ اصلی y سیاه است، حذف یا انتقال آن باعث نقض ویژگی‌های درخت قرمز-سیاه می‌شود که توسط RB-Delete-Fixup ترمیم می‌شود.

- همانطور که توضیح داده شد، تابع رأس x را به مکان اصلی y انتقال می‌دهد. انتساب در خطوط ۴ ، ۷ و ۱۱ رأس x رأس x یا به تنها فرزند y اشاره می‌کند و یا به T.nil در صورتی که y فرزندی نداشته باشد.

حذف در درخت قرمز-سیاه

- از آنجایی که رأس x به مکان اصلی y منتقل می‌شود، مقدار $x.p$ باید به درستی مقداردهی شود. اگر رأس z دو فرزند داشته باشد و y فرزند راست z باشد، آنگاه y به مکان z منتقل می‌شود و x فرزند y باقی می‌ماند. خط ۱۲ این حالت را بررسی می‌کند. اگرچه ممکن است به نظر آید مقداردهی $x.p$ در خط ۱۶ با y غیرضروری است چون x فرزند y است، اما RB-Delete-Fixup فرض می‌کند $x.p$ همان y است اگرچه x برابر با T.nil باشد. بنابراین، وقتی z دو فرزند دارد و y فرزند راست z است، اجرای خط ۱۶ ضروری است اگر فرزند راست y رأس T.nil است، در غیراینصورت چیزی تغییر نمی‌کند.

- در غیر اینصورت رأس z یا همان رأس y است و یا رأس قبلی پدر اصلی y است. در این حالت‌ها، فراخوانی RB-Transplant در خط ۵، ۸ و ۱۳ مقداردهی $x.p$ را در خط ۶ تابع RB-Transplant به درستی انجام می‌دهد. در این فراخوانی‌های تابع RB-Transplant ، پارامتر سوم همان رأس x است.

حذف در درخت قرمز-سیاه

- در نهایت، اگر رأس y سیاه باشد، یک یا چند نقض در ویژگی‌های درخت قرمز-سیاه ممکن است به وجود آید. فراخوانی RB-Delete-Fixup در خط ۲۲ ویژگی‌ها را ترمیم می‌کند. اگر y قرمز باشد، ویژگی‌های قرمز-سیاه همچنان برقرار می‌مانند وقتی y حذف یا منتقل می‌شود به دلایل زیر :

حذف در درخت قرمز-سیاه

۱. هیچ ارتفاع سیاهی در درخت تغییر نمی‌کند.

۲. هیچ دو رأس قرمزی همسایه نیستند. اگر z حداکثر یک فرزند داشته باشد، آنگاه y و z یک رأس واحد هستند. این رأس حذف می‌شود و فرزند آن جایگزین آن می‌شود. اگر رأس حذف شده قرمز باشد، نه پدر و نه فرزندان آن می‌توانند قرمز باشند، بنابراین انتقال یک فرزند به مکان آن نمی‌تواند باعث شود دو رأس قرمز همسایه شوند. از طرف دیگر اگر z دو فرزند داشته باشد، y جای z را در درخت می‌گیرد و رنگ z را نیز به خود می‌گیرد، بنابراین دو رأس مجاور قرمز در مکان جدید y نمی‌تواند وجود داشته باشد. علاوه بر این، اگر y فرزند راست z نباشد، آنگاه x فرزند راست اصلی y جایگزین y می‌شود. از آنجایی که y قرمز است، x باید سیاه باشد و بنابراین جایگزین کردن y با x نمی‌تواند باعث شود دو رأس قرمز مجاور شوند.

۳. چون y نمی‌تواند ریشه باشد وقتی قرمز است، ریشه سیاه می‌ماند.

حذف در درخت قرمز-سیاه

- اگر رأس y سیاه باشد، سه مشکل ممکن است رخ دهد که با فراخوانی تابع RB-Delete-Fixup ترمیم می‌شوند.
- اول اینکه، اگر y ریشه باشد و یک رأس قرمز ریشه جدید شود، ویژگی چهارم درخت قرمز سیاه نقض می‌شود.
- دوم اینکه اگر x و پدر جدید آن هردو قرمز باشند، ویژگی چهارم نقض می‌شود.
- سوم اینکه، انتقال y در درخت باعث می‌شود هر مسیر ساده که قبلا شامل y می‌شد، یک رأس سیاه کمتر داشته باشد. بنابراین ویژگی پنجم توسط هریک از اجداد y نقض می‌شود.

حذف در درخت قرمز-سیاه

- می‌توانیم نقض ویژگی پنجم را بدین گونه رفع کنیم که بگوییم هرگاه رأس سیاه y حذف یا منتقل می‌شود، رنگ سیاه آن به رأس x که به مکان اصلی y آمده است منتقل شود و در نتیجه x یک رأس سیاه اضافی [1] پیدا می‌کند. این بدین معنی است که اگر ۱ واحد به تعداد رئوس سیاه برروی هر مسیر ساده شامل x اضافه کنیم ویژگی پنجم برقرار می‌ماند. اما اکنون یک مشکل دیگر به وجود می‌آید و آن این است که رأس x نه سیاه است و نه قرمز که ویژگی اول را نقض می‌کند. رنگ رأس x یا سیاه دوگانه [2] است و یا قرمز-سیاه [3] و در این دو حالت یا ۲ واحد و یا یک واحد به تعداد رئوس سیاه در هر مسیر ساده شامل x می‌افزاید. البته رنگ x همچنان یا قرمز است (وقتی رنگ آن قرمز-سیاه است) و یا سیاه (وقتی رنگ آن سیاه دوگانه است). به عبارت دیگر سیاه اضافی در این رأس در اشاره‌گر به x تأثیر می‌گذارد و نه در رنگ آن.

[1] extra black
[2] doubly black
[3] red-and-black

حذف در درخت قرمز-سیاه I

- تابع RB-Delete-Fixup ویژگی‌های درخت را ترمیم می‌کند.

```
function RB-DELETE-FIXUP(T,x)
while x ≠ T.root and x.color == BLACK do
   if x == x.p.left then        ▷ is x a left child
      w = x.p.right           ▷ w is x's sibiling
      if w.color == RED then
         w.color = BLACK
         x.p.color = RED
         Left-Rotate (T,x.p)
         w = x.p.right
      if w.left.color == BLACK and w.right.color == BLACK then
         w.color = RED
         x = x.p
      else
         if w.right.color == BLACK then
```

حذف در درخت قرمز-سیاه II

```
14:             w.left.color = BLACK
15:             w.color = RED
16:             Right-Rotate (T,w)
17:             w = x.p.right
18:          w.color = x.p.color
19:          x.p.color = BLACK
20:          w.right.color = BLACK
21:          Left-Rotate (T,x,p)
22:          x = T.root
23:    else    ▷ same as lines ,22-3 but with "right" and "left"
  exchanged
24:       w = x.p.left
25:       if w.color == RED then
26:          w.color == BLACK
27:          x.p.color = RED
28:          Right-Rotate (T,x.p)
```

حذف در درخت قرمز-سیاه III

```
         w = w.p.left
      if w.right.color == BLACK and w.left.color == BLACK then
         w.color = RED
         x = x.p
      else
         if w.left.color == BLACK then
            w.right.color = BLACK
            w.color = RED
            Left-Rotate (T,w)
            w = x.p.left
         w.color = x.p.color
         x.p.color = BLACK
         w.left.color = BLACK
         Right-Rotate (T,x.p)
         x = T.root
x.color = BLACK
```

حذف در درخت قرمز-سیاه

- در اینجا بر روی ویژگی اول تمرکز می‌کنیم. هدف حلقه خطوط ۱ تا ۴۳ این است که رنگ سیاه اضافی را در درخت به بالا منتقل کند تا اینکه :

۱. رأس x به یک رأس قرمز-سیاه اشاره کند که در هر صورت خط ۴۴ رنگ x را تبدیل به سیاه می‌کند.

۲. رأس x به ریشه اشاره کند که در این‌صورت سیاه دوگانه از بین می‌رود.

۳. پس از انجام دوران‌ها و تغییر رنگ‌ها حلقه خاتمه پیدا کند.

حذف در درخت قرمز-سیاه

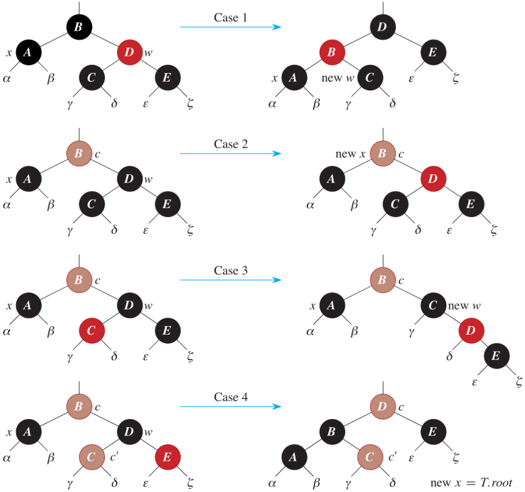
- تابع RB-Delete-Fixup دو موقعیت متقارن را مدیریت می‌کند : خطوط ۳ تا ۲۲ برای وقتی که رأس x یک فرزند چپ است و خطوط ۲۴ تا ۴۳ برای وقتی که رأس x یک فرزند راست است. اثبات برروی چهار حالتی متمرکز است که در خطوط ۳ تا ۲۲ نمایش داده شده‌اند.

- در حلقه تکرار، رأس x همیشه به یک رأس غیر ریشه سیاه دوگانه اشاره می‌کند. خط ۲ تعیین می‌کند آیا x فرزند چپ یا راست $x.p$ است بنابراین یا خطوط ۳ تا ۲۲ اجرا می‌شوند و یا ۲۴ تا ۴۳. همزاد x همیشه با اشاره‌گر w نشان داده می‌شود. از آنجایی که رأس x سیاه دوگانه است، رأس w کمتر از تعداد رئوس سیاه برروی مسیر ساده از $x.p$ به x خواهد بود.

- توجه کنید که RB-Delete همیشه $x.p$ قبل از فراخوانی RB-Delete-Fixup مقداردهی کند که این مقداردهی یا در فراخوانی RB-Transplant در خط ۱۳ است یا در انتساب خط ۱۶، حتی وقتی که x برابر با T.nil است.

حذف در درخت قرمز-سیاه

- شکل زیر چهار حالت درکد را وقتی x فرزند چپ است نشان می‌دهد. این حالت‌ها کاملا متمایز نیستند.



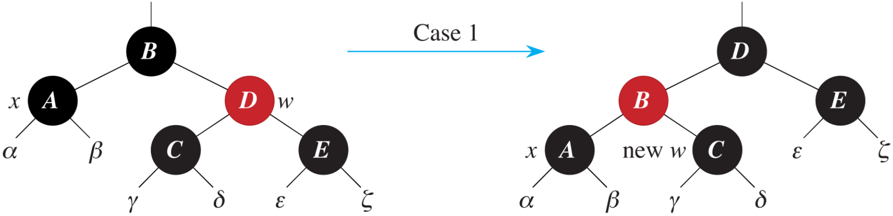
حذف در درخت قرمز-سیاه

- قبل از اینکه به هریک از این چهار حالت با جزئیات بپردازیم، به صورت کلی بررسی می‌کنیم چگونه می‌توانیم بررسی کنیم که تبدیل‌ها در هریک از این حالات ویژگی پنجم را برقرار می‌کنند.

- ایده اصلی این است که در هر حالت، تبدیل‌های انجام شده تعداد رئوس سیاه (شامل رأس سیاه دوگانه x) از ریشه زیردرخت نشان داده شده به ریشه هر یک از زیردرخت‌های α و β و $\cdots$ و ζ را حفظ می‌کند.

حذف در درخت قرمز-سیاه

- برای مثال در شکل زیر که حالت ۱ را نشان می‌دهد، تعداد رئوس سیاه از ریشه به ریشه یکی از زیردرخت‌های α یا β برابر با ۳ است، هم قبل و هم بعد از تبدیل.

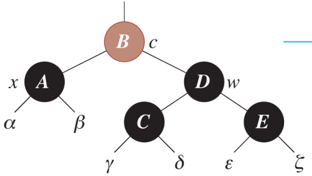


حذف در درخت قرمز-سیاه

- همچنین تعداد رئوس سیاه از ریشه به ریشه هر یک از γ ، δ ، ϵ و ζ برابر با ۲ است، هم قبل و هم بعد از تبدیل.

حذف در درخت قرمز-سیاه

- در شکل زیر، برای شمارش نیاز داریم مقدار c از ویژگی color را در ریشه زیردرخت نشان داده شده در نظر بگیریم.



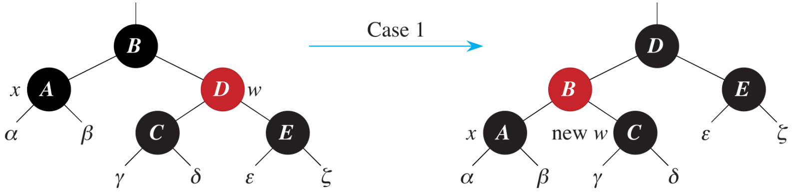
- اگر $\mathrm{count(RED)} = 0$ و $\mathrm{count(BLACK)} = 1$ باشد، آنگاه تعداد رئوس سیاه از ریشه به α برابر با $\mathrm{count(c)} + 2$ است، هم قبل و هم بعد از تبدیل. در این حالت، بعد از تبدیل رأس جدید x ویژگی رنگ c را دارد، اما این رأس در واقع یا قرمز-سیاه است اگر $\mathrm{c} = \mathrm{RED}$ باشد و سیاه دوگانه است اگر $\mathrm{c} = \mathrm{BLACK}$ باشد.

- بقیه حالات را به طور مشابه می‌توانیم بررسی کنیم.

حذف در درخت قرمز-سیاه

- حالت ۱ : رأس w همزاد x قرمز است.

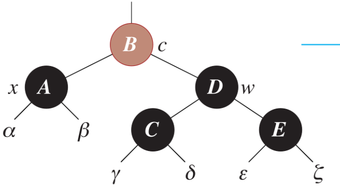
- حالت ۱ در خطوط ۵ تا ۸ بررسی شده و در شکل زیر نشان داده شده است.



- این حالت وقتی رخ می‌دهد که رأس w همزاد x قرمز باشد. چون w قرمز است باید فرزندان سیاه داشته باشد. این حالت رنگ w و $x.p$ را تغییر می‌دهد و سپس یک دوران چپ برروی $x.p$ بدون هیچیک از ویژگی‌های درخت قرمز-سیاه انجام می‌دهد. همزاد جدید رأس x که یکی از فرزندان w قبل از دوران است اکنون سیاه است و بنابراین حالت ۱ تبدیل به یکی از حالت‌های ۲ و ۳ و ۴ می‌شود. حالت ۲ و ۳ و ۴ رخ می‌دهند وقتی رأس w سیاه است.

حذف در درخت قرمز-سیاه

- حالت ۲ : رأس w همزاد x سیاه است و هر دو فرزند w سیاه هستند.
- حالت ۲ در خطوط ۱۰ و ۱۱ بررسی شده و در شکل زیر نشان داده شده است.



- در این حالت هر دو فرزندان w سیاه هستند.

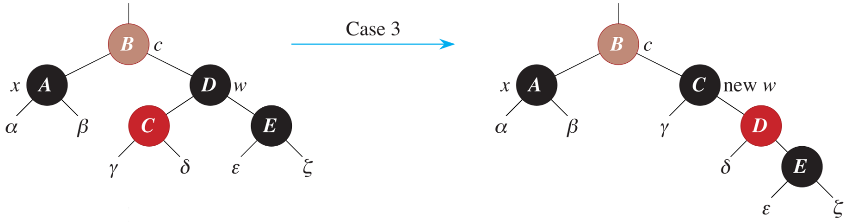
حذف در درخت قرمز-سیاه

- از آنجایی که w سیاه است، در این حالت یک سیاه از هر دوی x و w حذف می‌شود، و بنابراین x یک رأس سیاه و w یک رأس قرمز خواهند شد. برای جبران از دست رفتن یک سیاه از x و w پدر x یعنی x.p یک سیاه اضافی می‌گیرد. خط ۱۱ این کار را با انتقال x یک سطح به بالا انجام می‌دهد، و بنابراین حلقه با جایگزینی x با x.p تکرار می‌شود.

- اگر حالت ۲ از طریق حالت ۱ اجرا شود، رأس جدید x قرمز-سیاه است، زیرا x.p در اصل قرمز بود. بنابراین مقدار c از ویژگی color از رأس x برابر با RED خواهد بود و حلقه با بررسی شرایط حلقه پایان می‌یابد. خط ۴۴ رأس جدید x را تبدیل به سیاه می‌کند.

حذف در درخت قرمز-سیاه

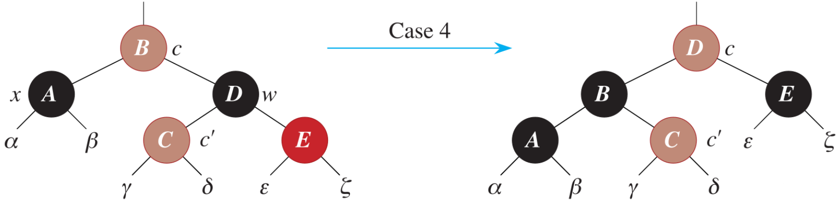
- حالت ۳ : رأس w همزاد x سیاه است، فرزند چپ w قرمز است و فرزند راست w سیاه است.
- حالت ۳ در خطوط ۱۴ تا ۱۷ بررسی شده و در شکل زیر نمایش داده شده است.



- این حالت رنگ‌های w و فرزند چپ آن w.left را تغییر می‌دهد و سپس یک دوران راست برروی w بدون نقض ویژگی‌های درخت قرمز-سیاه اعمال می‌کند. رأس w همزاد جدید x اکنون یک رأس سیاه است که یک فرزند راست قرمز دارد و بنابراین حالت ۳ وارد حالت ۴ می‌شود.

حذف در درخت قرمز-سیاه

- حالت ۴ : رأس w همزاد x سیاه است و فرزند راست w قرمز است.
- حالت ۴ در خطوط ۱۸ تا ۲۲ بررسی شده و در شکل زیر نمایش داده شده است.



- تعدادی تغییر رنگ و یک دوران چپ برروی x.p باعث می‌شود سیاه اضافی x حذف شود و تبدیل به یک سیاه معمولی شود بدون اینکه هیچ‌یک از ویژگی‌های درخت قرمز-سیاه نقض شوند. خط ۲۲ رأس x را ریشه قرار می‌دهد و حلقه پایان می‌یابد وقتی شرایط حلقه در تکرار بعد بررسی می‌شوند.

حذف در درخت قرمز-سیاه

- تحلیل : برای تحلیل زمان اجرای RB-Delete ، از آنجایی که ارتفاع یک درخت قرمز سیاه با n رأس برابر با $O(\lg n)$ است، هزینه کلی تابع بدون فراخوانی RB-Delete-Fixup برابر با $O(\lg n)$ است.

- در تابع RB-Delete-Fixup هر یک از حالت‌های ۱ و ۳ و ۴ بعد از اجرای تعداد ثابتی از تغییر رنگ‌ها و حداکثر سه دوران باعث خاتمه می‌شوند.

- حالت ۲ تنها حالتی است که در آن حلقه می‌تواند تکرار شود، و سپس اشاره‌گر x در درخت به تعداد حداکثر $O(\lg n)$ بار به سمت بالا منتقل می‌شود و هیچ دورانی انجام نمی‌شود.

- بنابراین تابع RB-Delete-Fixup در زمان $O(\lg n)$ اجرا می‌شود و حداکثر سه دوران انجام می‌دهد و زمان کل اجرا برای RB-Delete بنابراین برابر با $O(\lg n)$ است.