به نام خدا

ساختمان داده

آرش شفیعی

داده‌ساختارهای پیشرفته

مجموعه‌های مجزا

- در برخی از الگوریتم‌ها نیاز داریم n عنصر متمایز را در تعدادی مجموعهٔ مجزا افراز کنیم به طوری که هیچ دو مجموعه‌ای عنصر مشترک نداشته باشند. چنین الگوریتم‌هایی معمولا به دو عملگر کلیدی نیاز دارند : پیدا کردن مجموعه‌ای که یک عنصر داده شده در آن قرار دارد و محاسبه اجتماع دو مجموعه.
- در این بخش با روش‌هایی برای نگهداری داده ساختاری آشنا می‌شویم که چنین عملگرهایی را پشتیبانی می‌کند.

مجموعه‌های مجزا

- یک داده‌ساختار مجموعه مجزا [1] یک خانواده [2] از مجموعه‌های پویای مجزا به صورت $S = \{S_1, S_2, ..., S_k\}$ است. برای مشخص کردن یک مجموعه، معمولا یک نماینده [3] از هر مجموعه انتخاب می‌کنیم که عضوی از آن مجموعه است. فرقی نمی‌کن کدام یک از اعضا نماینده باشند. تنها نکته مورد اهمیت این است که اگر نماینده را دوبار برای تعیین مجموعه‌ای که متعلق به آن است فراخوانی کنیم، هر دو بار جواب یکسانی دریافت کنیم.

[1] disjoint-set data structure
[2] collection/family
[3] representative

مجموعه‌های مجزا

مانند همه داده‌ساختارهایی که بررسی کردیم، هر عنصر یک مجموعهٔ یک شیء است. فرض کنید x یک شیء باشد، در آن صورت عملگرهای زیر را در یک مجموعه مجزا خواهیم داشت.

- Make-Set(x) : به طوری که x به هیچ مجموعه‌ای متعلق نیست. در این صورت تابع یک مجموعه جدید با یک عضو x به خانواده اضافه می‌کند. عنصر x نماینده گروه خود نیز خواهد بود.
- Union(x،y) : دو مجموعه مجزای پویا شامل x و y هستند یعنی S_x و S_y را با یکدیگر الحاق می‌کند، بدین معنی که عناصر یکی از آن دو مجموعه را به دیگری انتقال می‌دهد و دو مجموعه را به یکدیگر پیوند داده و مجموعه جدیدی ایجاد می‌کند که اجتماع آن دو مجموعه است. نماینده مجموعه به وجود آمد هر عنصری از $S_x \bigcup S_y$ می‌تواند باشد، اما معمولا یکی از عناصر S_x یا S_y به عنوان نماینده انتخاب می‌شود، بنابراین این تابع $S_x \bigcup S_y$ را محاسبه و به خانواده اضافه می‌کند و S_x و S_y را حذف می‌کند. البته در عمل در هنگام پیاده‌سازی عناصر یک مجموعه به دیگری منتقل می‌شوند.
- Find-Set(x) : یک اشاره‌گر به نماینده مجموعه‌ای که شامل x است بر می‌گرداند.

مجموعه‌های مجزا

زمان اجرای عملیات مجموعه‌های مجزا را بر اساس دو پارامتر تحلیل می‌کنیم :

- n تعداد عملیات Make-Set است.
- m تعداد کل عملیات Make-Set ، Union و Find-Set است.

از آنجایی که تعداد کل عملیات، عملیات Make-Set را نیز بر می‌گیرد، بنابراین $m \geqslant n$ است. تعداد n عملیات اول همیشه Make-Set هستند، بنابراین بعد از n عملیات اول، خانواده از n مجموعه تشکیل شده است. هر عملیات Union تعداد مجموعه‌ها را یک واحد کاهش می‌دهد. بنابراین بعد از $n - 1$ عملیات Union تنها یک مجموعه باقی می‌ماند، پس فقط $n - 1$ عملیات Union می‌تواند انجام شود.

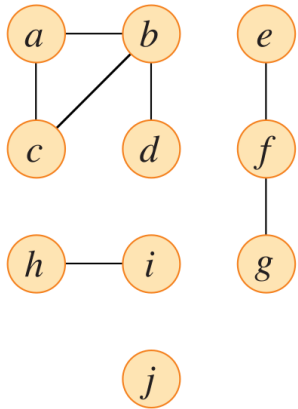
یک کاربرد مجموعه‌های مجزا

- یکی از کاربردهای داده‌ساختار مجموعه‌های مجزا پیدا کردن اجزای همبند [1] یک گراف بدون جهت است.

[1] connected compenent

یک کاربرد مجموعه‌های مجزا

- شکل زیر یک گراف با چهار جزء همبند را نشان می‌دهد.



یک کاربرد مجموعه‌های مجزا

- الگوریتم‌های زیر از عملیات داده‌ساختار مجموعه‌های مجزا برا محاسبه اجزای همبند یک گراف استفاده می‌کند.

Algorithm Connected-Components

```
   function CONNECTED-COMPONENTS(G)
1: for each vertex x ∈ G.V do
2:    Make-Set(v)
3: for each edge (u,v) ∈ G.E do
4:    if Find-Set(u) ≠ Find-Set(v) then
5:       Union(u,v)
```

یک کاربرد مجموعه‌های مجزا

Algorithm Same-Component

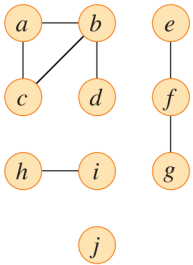
```
   function SAME-COMPONENT(u,v)
1: if Find-Set(u) == Find-Set(v) then
2:    return True
3: else
4:    return False
```

یک کاربرد مجموعه‌های مجزا

- وقتی که تابع Connected-Components گراف را پردازش کرد، تابع Same-Component بررسی می‌کند که آیا دو رأس به یک جزء همبند متعلق هستند یا خیر. توجه کنید که G.V مجموعه رئوس گراف و G.E مجموعه یال‌های گراف است. تابع بررسی همبند بودن گراف، در ابتدا هر رأس v را در یک مجموعه جدید قرار می‌دهد. سپس به ازای هر یال (u،v) مجموعه‌هایی که u و v به آنها تعلق دارند را پیوند می‌دهد. پس از اینکه همه یال‌ها بررسی شدند، دو رأس به یک جزء همیند تعلق دارند اگر و تنها اگر متعلق به یک مجموعه در خانواده مجموعه‌های مجزا باشند.

یک کاربرد مجموعه‌های مجزا

- شکل زیر نشان می‌دهد اجزای همبند توسط مجموعه‌های مجزا چگونه محاسبه می‌شوند.



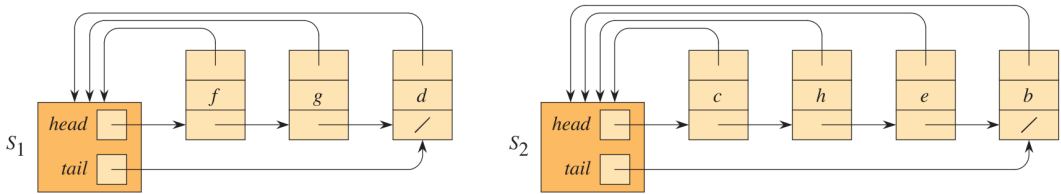
Edge processed	Collection of disjoint sets									
initial sets	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{d\}$	$\{e\}$	$\{f\}$	$\{g\}$	$\{h\}$	$\{i\}$	$\{j\}$
(b,d)	$\{a\}$	$\{b,d\}$	$\{c\}$		$\{e\}$	$\{f\}$	$\{g\}$	$\{h\}$	$\{i\}$	$\{j\}$
(e,f)	$\{a\}$	$\{b,d\}$	$\{c\}$		$\{e,f\}$		$\{g\}$	$\{h\}$	$\{i\}$	$\{j\}$
(a,c)	$\{a,c\}$	$\{b,d\}$			$\{e,f\}$		$\{g\}$	$\{h\}$	$\{i\}$	$\{j\}$
(h,i)	$\{a,c\}$	$\{b,d\}$			$\{e,f\}$		$\{g\}$	$\{h,i\}$		$\{j\}$
(a,b)	$\{a,b,c,d\}$				$\{e,f\}$		$\{g\}$	$\{h,i\}$		$\{j\}$
(f,g)	$\{a,b,c,d\}$				$\{e,f,g\}$			$\{h,i\}$		$\{j\}$
(b,c)	$\{a,b,c,d\}$				$\{e,f,g\}$			$\{h,i\}$		$\{j\}$

یک کاربرد مجموعه‌های مجزا

- اگر گراف ثابت باشد و در طول زمان تغییر نکند، جستجوی عمق اول اجزای همبند را سریع‌تر محاسبه می‌کند اما اگر گراف پویا باشد و یال‌ها به تدریج اضافه شوند، پیاده‌سازی آن توسط مجموعه‌های مجزا بهینه‌تر است.

مجموعه‌های مجزا توسط لیست پیوندی

- شکل زیر یک روش ساده پیاده‌سازی داده‌ساختار مجموعه‌های مجزا را نشان می‌دهد. در این پیاده‌سازی هر مجموعه توسط یک لیست پیوندی ذخیره می‌شود.

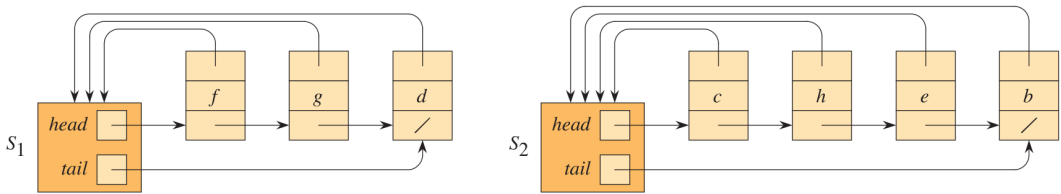


مجموعه‌های مجزا توسط لیست پیوندی

- هر مجموعه یک ابتدا (head) دارد که اولین عضو لیست اشاره می‌کند و یک انتها (tail) دارد که به آخرین عضو لیست اشاره می‌کند. هر عنصر در لیست یک ویژگی برای نگهداری نام خود دارد و همچنین به عنصر بعد از خود اشاره می‌کند. یک عضو اشاره‌گری نیز به مجموعه خود دارد. عناصر در یک مجموعه می‌توانند هر ترتیبی داشته باشند. نمایندهٔ یک مجموعه اولین عنصر لیست است.

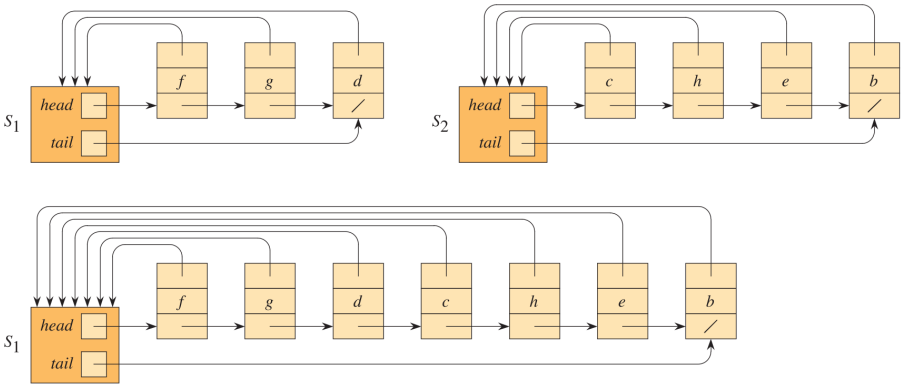
مجموعه‌های مجزا توسط لیست پیوندی

- با استفاده از این پیاده‌سازی لیست پیوندی هر دو تابع Make-Set و Find-Set در زمان $O(1)$ انجام می‌شوند. برای پیاده سازی Make-Set(x) کافی است یک لیست پیوندی جدید بسازیم که تنها x را شامل شود. برای Find-Set(x) اشاره x که به مجموعه آن اشاره می‌کند را دنبال می‌کنیم و سپس اولین عنصر لیست که نماینده آن مجموعه است بر می‌گردانیم. برای مثال در شکل زیر Find-Set(g) مقدار f را باز می‌گرداند.



مجموعه‌های مجزا توسط لیست پیوندی

- ساده‌ترین پیاده‌سازی عملیات Union توسط لیست پیوندی زمان بیشتری نسبت به عملیات Make-Set و Find-Set نیاز دارد. شکل زیر عملیات Union(x،y) برای پیوند دادن لیست y به انتهای لیست x را نشان می‌دهد.

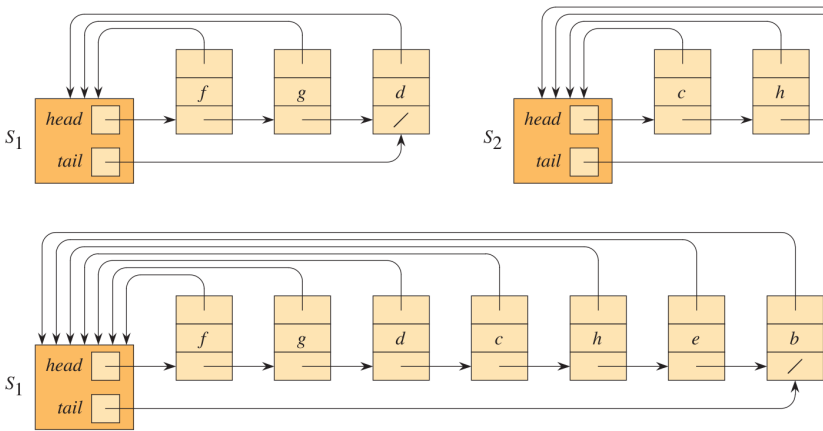


مجموعه‌های مجزا توسط لیست پیوندی

- در نتیجه نماینده لیست x نماینده مجموعه حاصل شده می‌شود. برای اینکه سریعا بتوانیم مکانی را که لیست y باید به آن اضافه شود محاسبه کنیم، از اشاره‌گر tail از لیست x استفاده می‌کنیم. از آنجایی که همهٔ اعضای لیست y به لیست x می‌پیوندند، تابع Union مجموعه لیست y را تخریب می‌کند. تابع Union همچنین باید اشاره‌گر به مجموعه‌ای که اعضای لیست y متعلق به آن هستند را نیز به روز رسانی کند. این به روز رسانی در زمان خطی نسبت به طول لیست y انجام می‌شود.

مجموعه‌های مجزا توسط لیست پیوندی

- در شکل زیر عملیات Union(g،e) همه اشاره‌گرهای عناصر b و c و e و h را به روز رسانی می‌کند.



مجموعه‌های مجزا توسط لیست پیوندی

- می‌توانیم دنباله‌ای از m عملیات بر روی n عنصر را به گونه‌ای بسازیم که به زمان $\Theta(n^2)$ نیاز داشته باشد. با عناصر x_1 ، x_2 ، ... ، x_n آغاز کنیم و تعداد n عملیات Make-Set فراخوانی می‌کنیم و به دنبال آن $n-1$ عملیات Union انجام می‌دهیم به گونه‌ای که $m = 2n - 1$ باشد.

Operation	Number of objects updated
MAKE-SET(x_1)	1
MAKE-SET(x_2)	1
⋮	⋮
MAKE-SET(x_n)	1
UNION(x_2, x_1)	1
UNION(x_3, x_2)	2
UNION(x_4, x_3)	3
⋮	⋮
UNION(x_n, x_{n-1})	$n-1$

مجموعه‌های مجزا توسط لیست پیوندی

- بنابراین تعداد n عملیات Make-Set در زمان $\Theta(n)$ انجام می‌شود. از آنجایی که i امین عملیات Union تعداد i عنصر را به روز رسانی می‌کند، تعداد کل عناصر به روز رسانی شده توسط $n-1$ عملیات Union یک سری حسابی به صورت زیر می‌سازد :

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \Theta(n^2)$$

تعداد کل عملیات $2n-1$ است و بنابراین عملیات به طور میانگین در زمان $\Theta(n)$ به ازای هر یک از عملیات انجام می‌شود.

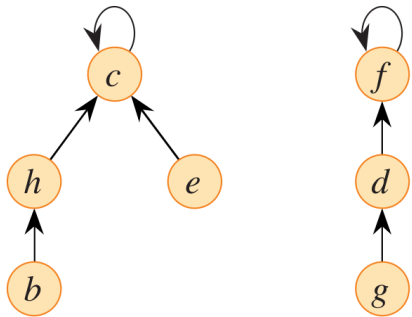
مجموعه‌های مجزا توسط درخت

- یک پیاده‌سازی سریع‌تر مجموعه‌های مجزا توسط درخت انجام می‌شود، به طوری که هر مجموعه توسط ریشه یک درخت نشان داده می‌شود و هر عنصر در یک مجموعه در یک مجموعه یک رأس از یکی از درخت‌هاست. در نتیجه خانواده مجموعه‌های مجزا یک جنگل [1] را تشکیل می‌دهد که خانواده‌ای از درخت‌هاست.

[1] disjoint-set forest

مجموعه‌های مجزا توسط درخت

- در شکل زیر پیاده‌سازی مجموعه‌های مجزا توسط درخت‌ها نمایش داده شده است. ریشهٔ هر درخت نمایندهٔ یک مجموعه است.

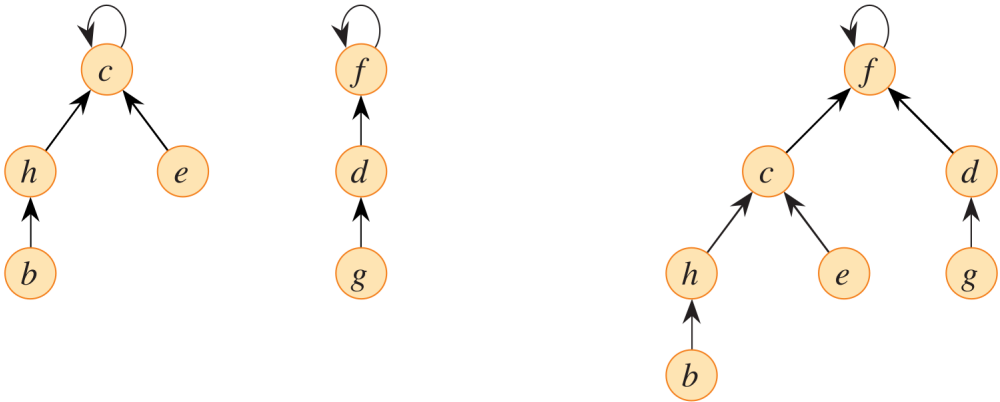


مجموعه‌های مجزا توسط درخت

- سه عملیات مجموعه‌های مجزا پیاده‌سازی ساده‌ای دارند. عملیات Make-Set یک درخت با یک رأس می‌سازد. عملیات Find-Set اشاره‌گرهای پدر را دنبال می‌کند تا ریشه یک درخت را پیدا کند.

مجموعه‌های مجزا توسط درخت

- عملیات Union باعث می‌شود ریشه یکی از درخت‌ها فرزند ریشه درخت دیگر قرار بگیرد.



مجموعه‌های مجزا توسط درخت

- با چنین پیاده‌سازی، دنباله‌ای از $n - 1$ عملیات Union می‌تواند درختی بسازد که زنجیره‌ای از n رأس است. از روشی استفاده می‌کنیم که زمان اجرا را کاهش دهد. روشی که استفاده می‌کنیم بدین صورت است که ریشه درختی که تعداد کمتری رأس دارد به ریشهٔ درختی اشاره می‌کند که تعداد بیشتری رأس دارد. بنابراین برای هر رأس مرتبه [1] آن را نیز ذخیره می‌کنیم. مرتبه یک رأس درواقع یک کران بالا بر روی ارتفاع آن رأس است. بنابراین در روش اجتماع توسط مرتبه [2] ، در عملیات Union ریشه درخت با مرتبه کمتر به ریشهٔ درخت با مرتبه بیشتر اشاره می‌کند.

[1] rank
[2] union by rank

مجموعه‌های مجزا توسط درخت

- در پیاده‌سازی این روش هر رأس x یک عدد صحیح x.rank را نگهداری می‌کند که یک کران بالا بر روی ارتفاع x است. ارتفاع رأس x تعداد یال‌هایی است که بر روی بلندترین مسیر ساده از یکی از برگ‌ها به x قرار می‌گیرد. وقتی تابع Make-Set مجموعه‌ای با یک عضو می‌سازد، تنها رأس مجموعه که ریشهٔ درخت است دارای مرتبه صفر است.

مجموعه‌های مجزا توسط درخت

- عملیات Find-Set مرتبه عناصر را تغییر نمی‌دهد.
- عملیات Union دو حالت دارد، بسته به این که ریشه درخت‌ها دارای مرتبه یکسان باشند یا خیر. اگر دو ریشه دارای مرتبه نابرابر باشند، ریشه درخت با مرتبه بالاتر پدر ریشه درخت با مرتبه پایین‌تر قرار می‌گیرد، اما در مرتبه‌ها تغییری نمی‌کنند. اگر ریشه‌ها مرتبه یکسان داشته باشند، به طور دلخواه یکی از ریشه‌ها پدر قرار می‌گیرد و مرتبه آن یک واحد افزایش پیدا می‌کند.

مجموعه‌های مجزا توسط درخت

- شبه کدهای زیر این روش پیاده‌سازی را نشان می‌دهند.

Algorithm Find-Set

```
   function FIND-SET(x)
1: if x ≠ x.p then  ▷ not the root?
2:    x.p = Find-Set(x.p)      ▷ the root becomes the parent
3: return x.p  ▷ return the root
```

Algorithm Make-Set

```
   function MAKE-SET(x)
1: x.p = x
2: x.rank = 0
```

مجموعه‌های مجزا توسط درخت

Algorithm Union

```
   function UNION(x,y)
1: Link(Find-Set(x),Find-Set(y))
```

Algorithm Link

```
   function LINK(x,y)
1: if x.rank > y.rank then
2:    y.p = x
3: else
4:    x.p = y
5:    if x.rank == y.rank then
6:       y.rank = y.rank + 1
```

مجموعه‌های مجزا توسط درخت

- تابع Link که توسط Union فراخوانی می‌شود اشاره‌گرهایی به دو ریشه به عنوان ورودی دریافت می‌کند. تابع Find-Set به صورت بازگشتی اجرا می‌شود. با اجزای تابع به صورت بازگشتی یک مسیر به سمت ریشه پیدا می‌شود و در بازگشت پدر هر رأس برابر با ریشه قرار می‌گیرد.

مجموعه‌های مجزا توسط درخت

- برای دنباله‌ای از m عملیات که تعداد n تای آنها Make-Set هستند زمان اجرا برابر است با $\Theta(m \lg n)$.