به نام خدا

ساختمان داده

آرش شفیعی

کتاب‌های مرجع

- مقدمه‌ای بر الگوریتم‌ها از کرمن، لایسرسون، ریوست، و استاین [1]
- داده‌ساختارها و الگوریتم‌ها از گودریچ، تاماسیا، و مانت [2]
- طراحی الگوریتم از کلاینبرگ و تاردوس [3]
- هنر برنامه نویسی از دونالد کنوث [4]

[1] Introduction to Algorithms, by Cormen, Leiserson, Rivest, and Stein
[2] Data Structures and Algorithms, by Goodrich, Tamassia, and Mount
[3] Algorithm Design, by Jon Kleinberg and Eva Tardos
[4] The Art of Computer Programming, by Donald Knuth

مقدمه

داده ساختارها

- کامپیوتر ماشینی است که دنباله‌ای از محاسبات (به نام برنامه) و مجموعه‌ای از مقادیر حاوی اطلاعات (به نام داده) را دریافت کرده، محاسبات برنامه مورد نظر را بر روی داده‌های ورودی اعمال کرده و داده‌های خروجی تولید می‌کند.
- بنابراین در علوم کامپیوتر در مورد محاسبات و داده‌ها بحث می‌کنیم. به مبحث محاسبات در دروس نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها و طراحی الگوریتم‌ها پرداخته می‌شود و به مبحث داده‌ها در درس ساختمان داده (یا داده ساختارها) می‌پردازیم.

داده ساختارها

- در علوم کامپیوتر داده‌ها با مجموعه‌ها مدلسازی می‌شوند. بنابراین مجموعه‌ها بنیادهای اصلی علوم کامپیوتر هستند.
- برای مثال دنباله ورودی‌های عددی یک برنامه، یک مجموعه از اعداد صحیح است یا لیست دانشجویان در ورودی یک برنامه مجموعه‌ای از اسامی دانشجویان است.
- در علوم ریاضی، مجموعه‌ها ثابت و بدون تغییر هستند، در صورتی که در علوم کامپیوتر مجموعه‌ها با استفاده از الگوریتم‌ها تغییر می‌کنند. مجموعه‌ها می‌توانند بزرگ یا کوچک شوند و به مرور زمان تغییر کنند. برای مثال مجموعه‌ای از داده‌های دانشجویان را در نظر بگیرید که به مرور زمان با ورود دانشجویان به دانشگاه داده‌هایی به آن اضافه می‌شود و با خروج دانشجویان از دانشگاه داده‌هایی از آن حذف می‌شود.
- بنابراین مجموعه‌ها در علوم کامپیوتر پویا [1] هستند.

[1] dynamic

داده ساختارها

- یک ساختمان داده [1] یا ساختار داده یا داده ساختار روشی برای سازمان دادن و ذخیره سازی داده‌ها یا همان مجموعه‌های پویا و راهکارهایی برای دسترسی به روی داده‌ها و اعمال تغییر بر روی آنها است.
- کلمه دیتا [2] (داده‌ها) در انگلیسی جمع کلمه دیتوم [3] (داده) است اما معمولا داده هم با فعل مفرد و هم با فعل جمع استفاده می‌شود.

[1] data structure
[2] data
[3] datum

داده ساختارها

- یک الگوریتم [1] یک روند محاسباتی [2] است که مقادیری را به عنوان ورودی یا داده‌های ورودی [3] دریافت کرده و مقادیری را به عنوان خروجی یا داده‌های خروجی [4] تولید می‌کند.
- بنابراین یک الگوریتم دنباله‌ای است از گام‌های محاسباتی که داده‌های ورودی را به داده‌های خروجی تبدیل می‌کند.

[1] algorithm
[2] computational procedure
[3] input data
[4] output data

داده ساختارها

- الگوریتم‌ها نیاز دارند عملیات متفاوتی برروی مجموعه‌ها انجام دهند. برای مثال، برخی از الگوریتم‌ها ممکن است نیاز داشته باشند اعضایی به مجموعه اضافه کنند یا اعضایی را از یک مجموعه حذف کنند یا اینکه بخواهند عضویت یک عنصر را در یک مجموعه بررسی کنند.
- عملیاتی که نیاز داریم برروی مجموعه‌ها انجام دهیم را به دو دسته تقسیم می‌کنیم : عملیات پرس و جو [1] که اطلاعاتی را در مورد مجموعه باز می‌گرداند و عملیات اعمال تغییرات [2] که تغییراتی برروی اعضای مجموعه اعمال می‌کند.

[1] query
[2] modifying operation

- در اینجا عملیات مهم مورد نیاز بر روی مجموعه‌ها را معرفی می‌کنیم.
- جستجو Search(S،k) : به ازای مجموعه S و مقدار کلید k ، اشاره‌گر x را به عنصری از S به طوری که x.key = k باشد، باز می‌گرداند و در صورتی که کلید هیچ‌یک از عناصر S برابر با k نباشد مقدار NIL را باز می‌گرداند.
- درج Insert(S،x) : عنصری که با اشاره‌گر x به آن اشاره شده است را به مجموعه S اضافه می‌کند.
- حذف Delete(S،x) : عنصری که با اشاره‌گر x به آن اشاره شده است را از مجموعه S حذف می‌کند. توجه کنید این تابع اشاره‌گری به یک عنصر دریافت می‌کند و نه یک مقدار کلید.

- بیشینه (Maximum(S : اشاره‌گری به عنصری از S با بزرگ‌ترین مقدار کلید باز می‌گرداند.
- کمینه (Minimum(S : اشاره‌گری به عنصری از S با کوچکترین مقدار کلید باز می‌گرداند.
- عنصر بعدی (Successor(S،x : به ازای عنصر x در مجموعه مرتب S ، اشاره‌گری به کوچکترین عنصری که مقدار آن از x بزرگتر است بازمی‌گرداند. در صورتی که x بزرگترین عنصر S باشد مقدار NIL باز گردانده می‌شود.
- عنصر قبلی (Predecessor(S،x : به ازای عنصر x در مجموعه مرتب S ، اشاره‌گری به بزرگترین عنصری که مقدار آن از x کوچکتر است باز می‌گرداند. در صورتی که x کوچکترین عنصر S باشد مقدار NIL بازگردانده می‌شود.

داده ساختارها

- زمان اجرای هر یک از این عملیات را بر اساس اندازه مجموعه S که برابر با n است، می‌سنجیم. در مورد زمان اجرا بیشتر صحبت خواهیم کرد.
- انواع پیاده‌سازی‌های مجموعه‌های پویا یا به عبارت دیگر انواع مختلف داده‌ساختارها، زمان اجرای عملیات را تغییر می‌دهند. برای مثال ممکن است در یک نوع داده‌ساختار درج سریع‌تر و جستجو کندتر باشد و در یک نوع داده‌ساختار درج کندتر و جستجو سریع‌تر باشد. بسته به نوع استفاده می‌توانیم از داده ساختار مناسب استفاده کنیم.

داده ساختارها

- یک ساختمان داده [1] یا ساختار داده یا داده ساختار روشی است برای سازمان دادن و ذخیره سازی داده‌ها و راهکارهایی برای دسترسی و اعمال تغییر بر روی داده‌ها است.
- داده‌های ورودی یک الگوریتم توسط یک ساختمان داده معین به الگوریتم داده می‌شوند و همینطور داده‌های خروجی توسط یک ساختمان داده تعیین شده از الگوریتم دریافت می‌شوند.
- طراحی یک ساختمان داده مناسب، دسترسی و اعمال تغییر بر روی داده‌ها را برای یک کاربرد خاص تسهیل می‌کند.

[1] data structure

الگوریتم‌ها

- یک الگوریتم ابزاری است برای حل یک مسئله محاسباتی معین.
- یک مسئله با تعدادی گزاره، رابطهٔ بین داده‌های ورودی و خروجی را در حالت کلی مشخص می‌کند.
- یک نمونه از مسئله، در واقع با جایگذاری اعداد و مقادیر برای داده‌های ورودی مسئله کلی به دست می‌آید.
- یک الگوریتم روشی گام‌به‌گام را شرح می‌دهد که با استفاده از آن در حالت کلی برای همهٔ نمونه‌های یک مسئله، داده‌های خروجی با دریافت داده‌های ورودی تولید شوند.
- به عنوان مثال، فرض کنید می‌خواهیم دنباله‌ای از اعداد را با ترتیب صعودی مرتب کنیم. این مسئله که مسئله مرتب سازی [1] نام دارد، یک مسئله بنیادین در علوم کامپیوتر به حساب می‌آید که منشأ به وجود آمدن بسیاری از روش‌های طراحی الگوریتم نیز می‌باشد.

[1] sorting problem

الگوریتم‌ها

- مسئله مرتب سازی را به طور رسمی به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

- ورودی مسئله مرتب سازی عبارت است از دنباله‌ای از n عدد به صورت $\langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle$ و خروجی مسئله عبارت است از دنباله‌ای به صورت $\langle a'_1, a'_2, ..., a'_n \rangle$ که از جابجا کردن عناصر دنبالهٔ ورودی به‌دست آمده است به طوری که $a'_1 \leq a'_2 \leq ... \leq a'_n$.

- ورودی مسئله باید در یک ساختمان داده ذخیره شود. در مورد روش‌های متفاوت ذخیره سازی این دنباله صحبت خواهیم کرد.

- بنابراین به ازای دنباله ورودی $\langle 58, 42, 36, 42 \rangle$ دنباله خروجی $\langle 36, 42, 42, 58 \rangle$ جواب مسئله است.

- یک نمونه از یک مسئله [1] تشکیل شده است از یک ورودی معین و شرح ویژگی خروجی مسئله. بنابراین دنبالهٔ ورودی $\langle 58, 42, 36, 42 \rangle$ به علاوه شرح مسئله مرتب سازی یک نمونه از مسئلهٔ مرتب سازی نامیده می‌شود.

[1] instance of a problem

الگوریتم‌ها

- بنابراین به طور خلاصه، یک مسئله تشکیل شده است از (۱) توصیفی از داده‌های ورودی‌های مسئله و (۲) گزاره‌هایی برای بیان رابطهٔ داده‌های ورودی و خروجی (جواب) مسئله.

- یک نمونهٔ مسئله با تعیین مقادیر داده‌های ورودی مسئله به دست می‌آید.

- یک الگوریتم، روندی گام به گام است برای پیدا کردن مقادیر داده‌های خروجی یا جواب یک مسئله است.

الگوریتم‌ها

- سرعت اجرای مسئله مرتب سازی به اندازه ورودی یعنی تعداد عناصر دنباله نامرتب و روند الگوریتم بستگی دارد.
- الگوریتم‌های زیادی برای حل یک مسئله وجود دارند که هر کدام می‌توانند مزایا و معایبی داشته باشند. به طور مثال یک الگوریتم از میزان حافظهٔ بیشتری استفاده می‌کند، اما زمان کمتری برای محاسبه نیاز دارد و الگوریتم دیگر با میزان حافظهٔ کمتر در زمان بیشتری محاسبه می‌شود که به فراخور نیاز می‌توان از یکی از الگوریتم‌ها استفاده کرد.
- عوامل دیگری مانند معماری کامپیوتر، نوع پردازنده و میزان حافظه نیز در زمان اجرای یک الگوریتم مؤثرترند اما این عوامل فیزیکی هستند و صرف نظر از عوامل فیزیکی می‌توان الگوریتم‌ها را از لحاظ میزان حافظه مورد نیاز و زمان اجرا با یکدیگر مقایسه کرد.

تابع پیچیدگی زمانی

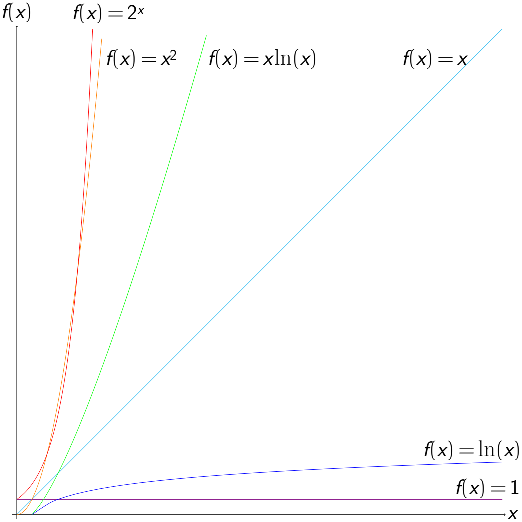
- تابع پیچیدگی زمانی برای یک الگویتم، زمان (و یا تعداد گام‌هایی) را مشخص می‌کند که الگوریتم برای پیدا کردن جواب مسئله نیاز دارد، به طوری که این زمان تابع اندازهٔ ورودی مسئله است.

- بنابراین اگر ورودی یک مسئله n باشد و تعداد گام‌های لازم برای محاسبهٔ جواب مسئله توسط یک الگوریتم $f(n)$ باشد، می‌گوییم زمان محاسبه [1] یا زمان اجرا [2] یا پیچیدگی زمانی [3] الگوریتم $f(n)$ است.

- هر تابع پیچیدگی با یک نرخ معین رشد می‌کند. می‌توانیم نرخ رشد توابع [4] مختلف را با یکدیگر مقایسه کنیم.

[1] computation time
[2] running time
[3] time complexity
[4] growth rate of functions

مقایسه رشد توابع



مقایسه رشد توابع پیچیدگی

- اگر هر گام در یک الگوریتم فقط یک میکروثانیه زمان ببرد، می‌توانیم زمان تقریبی محاسبه به ازای توابع رشد متفاوت را به صورت زیر با یکدیگر مقایسه کنیم.

اندازهٔ n	۲۰	۴۰	۶۰
تابع پیچیدگی $f(n)$			
n	۰/۰۰۰۰۲ ثانیه	۰/۰۰۰۰۴ ثانیه	۰/۰۰۰۰۶ ثانیه
n^2	۰/۰۰۰۴ ثانیه	۰/۰۰۱۶ ثانیه	۰/۰۰۳۶ ثانیه
n^3	۰/۰۰۸ ثانیه	۰/۰۶۴ ثانیه	۰/۲۱۶ ثانیه
n^5	۳/۲ ثانیه	۱/۷ دقیقه	۱۳ دقیقه
2^n	۱ ثانیه	۱۲/۷ روز	۳۶۶ قرن
3^n	۵۸ دقیقه	۳۸۵۵ قرن	$۱/۳ \times ۱۰^{۱۳}$ قرن

مرتب سازی درجی

- یکی از مسائل مهم در علوم و مهندسی کامپیوتر، مسئله مرتب سازی است. یک آرایه از چندین عنصر را در نظر بگیرید. می‌خواهیم عناصر این آرایه را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم. به عبارت دیگر اگر آرایه $A = [a_1, a_2, ..., a_n]$ را داشته باشیم، می‌خواهیم عناصر آرایه یعنی a_i ها را جابجا کنیم و آرایه خروجی $[a'_1, a'_2, ..., a'_n]$ را به دست آوریم به طوری که به ازای هر $1 \leq i < n$ داشته باشیم $a'_i \leq a'_{(i+1)}$.

مرتب سازی درجی

- یکی از الگوریتم‌های ارائه شده برای این مسئله الگوریتم مرتب سازی درجی [1] است.
- به طور خلاصه این الگوریتم به صورت زیر عمل می‌کند. فرض کنید یک آرایه با n عنصر از درایۀ ۱ تا درایۀ k مرتب شده باشد. حال برای مرتب سازی آرایه از درایۀ ۱ تا درایۀ k+۱ باید عنصر k+۱ را در بین عناصر ۱ و k طوری قرار دهیم که از عنصر قبلی خود بزرگ‌تر و از عنصر بعدی خود کوچک‌تر باشد. بدین ترتیب آرایه را از درایۀ ۱ تا k+۱ مرتب کرده‌ایم. این کار را تا جایی ادامه می‌دهیم که کل آرایه مرتب شود.

[1] insertion sort

مرتب سازی درجی

- به طور خلاصه این الگوریتم را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم.

Algorithm Insertion Sort

```
function INSERTION-SORT(A, n)
 ▷ A is an array of n elements
for i = 2 to n do
    key = A[i]
    j = i - 1
    while  j > 0 and A[j] > key  do
        A[j+1] = A[j]
        j = j-1
    A[j+1] = key
```

تحلیل الگوریتم‌ها

- آنالیز الگوریتم یا تحلیل الگوریتم [1] به معنای محاسبهٔ منابع مورد نیاز برای اجرای یک الگوریتم است. منابع مورد نیاز شامل زمان محاسبات، میزان حافظه، پهنای باند ارتباطی و مصرف انرژی می‌شود.
- معمولا برای یک مسئله الگوریتم‌های متعددی وجود دارند که هر یک می‌تواند از لحاظ تعدادی از معیارهای ارزیابی بهینه باشد.

[1] algorithm analysis

تحلیل الگوریتم‌ها

- تحلیل الگوریتم‌ها معمولاً به منظور محاسبهٔ زمان اجرا و میزان حافظه مورد نیاز الگوریتم‌ها به کار می‌رود.
- زمان اجرا و میزان حافظهٔ مورد نیاز یک الگوریتم به ازای ورودی‌های مختلف متفاوت است و این مقادیر بر اساس اندازهٔ ورودی الگوریتم محاسبه می‌شوند.
- زمان اجرا و میزان حافظه مورد نیاز، معیارهایی مهم برای سنجش کارایی الگوریتم‌ها هستند.
- در این قسمت در مورد روش‌های مختلف تحلیل الگوریتم صحبت خواهیم کرد.
- عوامل زیادی در زمان اجرای یک الگوریتم تأثیر می‌گذارند که از آن جمله می‌توان به سرعت پردازنده، کامپایلر استفاده شده برای پیاده سازی الگوریتم، اندازهٔ ورودی الگوریتم و همچنین ساختار الگوریتم اشاره کرد.

تحلیل الگوریتم‌ها

- برخی از این عوامل در کنترل برنامه نویس نیستند. برای مثال سرعت پردازنده عاملی است تأثیر گذار در سرعت اجرا که با پیشرفت صنعت سخت افزار بهبود می‌یابد و در کنترل برنامه نویس نیست. اما ساختار الگوریتم عاملی است که توسط طراح الگوریتم کنترل می‌شود و نقش مهمی در سرعت اجرا دارد.

- صرف نظر از عوامل فیزیکی، می‌توان سرعت اجرای برنامه را تابعی از اندازهٔ ورودی الگوریتم تعریف کرد که تعداد گام‌های لازم برای محاسبهٔ خروجی را بر اساس اندازه ورودی الگوریتم بیان می‌کند.

- تعداد گام‌های یک الگوریتم برای محاسبه یک مسئله به ساختار آن الگوریتم بستگی دارد و تابعی از اندازهٔ ورودی مسئله است.

- البته غیر از اندازهٔ ورودی، ساختار ورودی هم بر سرعت اجرای برنامه تأثیر گذار است. بنابراین سرعت اجرای برنامه را معمولاً در بهترین حالت (یعنی حالتی که ساختار ورودی به گونه‌ای است که الگوریتم کمترین زمان را برای اجرا بر روی یک ورودی با اندازه معین نیاز دارد) و بدترین حالت محاسبه می‌کنیم. همچنین می‌توان زمان اجرای برنامه را در حالت میانگین به دست آورد.

تحلیل الگوریتم‌ها

- یک روش برای تحلیل زمان مورد نیاز برای اجرای الگوریتم مرتب‌سازی، اجرای آن الگوریتم بر روی یک کامپیوتر و اندازه‌گیری زمان اجرا آن است.
- اما این اندازه‌گیری به ماشین مورد استفاده و کامپایلر و زبان برنامه نویسی مورد استفاده و اجرای برنامه‌های دیگر برروی آن ماشین بستگی دارد. نوع پیاده سازی و اندازۀ ورودی نیز دو عامل دیگر در سرعت اجرای برنامۀ مرتب سازی است.
- روش دیگر برای محاسبه زمان اجرای الگوریتم مرتب‌سازی، تحلیل خود الگوریتم است. در این روش محاسبه می‌کنیم هر دستور در برنامه چندبار اجرا می‌شوند. سپس فرمولی به دست آوریم که نشان دهندۀ زمان اجرای برنامه است. این فرمول به اندازۀ ورودی الگوریتم بستگی پیدا می‌کند ولی عوامل محیطی مانند سرعت پردازنده در آن نادیده گرفته می‌شود. از این روش می‌توان برای مقایسۀ الگوریتم‌ها استفاده کرد.

تحلیل الگوریتم‌ها

- اندازهٔ ورودی [1] در بسیاری از مسائل مانند مسئله مرتب‌سازی تعداد عناصر تشکیل دهندهٔ ورودی است. در مسئله مرتب‌سازی اندازه ورودی در واقع تعداد عناصر آرایهٔ ورودی برای مرتب‌سازی است.
- در برخی از مسائل اندازهٔ ورودی در واقع تعداد بیت عدد صحیح ورودی است. برای مثال اندازهٔ ورودی مسئله تجزیهٔ یک عدد به عوامل اول، خود عدد ورودی است.
- در برخی مسائل تعداد ورودی‌ها بیش از یک پارامتر است، بنابراین اندازهٔ ورودی به بیش از یک پارامتر بستگی پیدا می‌کند. برای مثال در الگوریتم پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر در یک گراف، اندازهٔ ورودی تعداد رئوس و تعداد یال‌ها است.

[1] input size

تحلیل الگوریتم‌ها

- زمان اجرای [1] یک الگوریتم وابسته به تعداد دستورات اجرا شده و تعداد دسترسی‌ها به حافظه است. در هنگام محاسبات برای تحلیل الگوریتم فرض می‌کنیم برای اجرای یک دستور در برنامه به یک زمان ثابت نیاز داریم. یک دستور در اجراهای متفاوت ممکن است زمان اجرای متفاوتی داشته باشد ولی فرض می‌کنیم خط k ام برنامه، در زمان c_k اجرا شود.

- کل زمان اجرای یک برنامه، مجموع زمان اجرای همهٔ دستورات آن است. دستوری که m بار در کل برنامه تکرار می‌شود و در زمان c_k اجرا می‌شود، در کل به mc_k واحد زمان برای اجرا نیاز دارد.

- معمولاً زمان اجرای یک الگوریتم با ورودی n را با $T(n)$ نشان می‌دهیم.

[1] execution time

تحلیل الگوریتم مرتب‌سازی درجی

- الگوریتم مرتب‌سازی درجی را یک بار دیگر در نظر می‌گیریم.

Algorithm Insertion Sort

```
function INSERTION-SORT(A, n)
▷ A is an array of n elements
for i = 2 to n do
   key = A[i]
   j = i - 1
   while  j > 0 and A[j] > key  do
      A[j+1] = A[j]
      j = j-1
   A[j+1] = key
```

تحلیل الگوریتم مرتب‌سازی درجی

- برای محاسبه زمان اجرای الگوریتم مرتب‌سازی درجی، ابتدا تعداد تکرار هر یک از خط‌های برنامه را می‌شماریم.
- در این برنامه خط ۱ تعداد n بار و خطوط ۲ و ۳ و ۷ هر یک $n-1$ بار تکرار می‌شوند.
- تعداد تکرار خطوط ۴ و ۵ و ۶ به تعداد تکرار حلقه بستگی دارد.
- زمان اجرای یک الگوریتم علاوه بر اندازه ورودی به ساختار ورودی نیز بستگی دارد. در الگوریتم مرتب‌سازی مسلماً مرتب‌سازی یک آرایهٔ مرتب شده از مرتب‌سازی یک آرایهٔ مرتب نشده سریع‌تر انجام می‌شود.

تحلیل الگوریتم مرتب‌سازی درجی

- زمان اجرای یک الگوریتم را معمولا در بهترین حالت و بدترین حالت محاسبه می‌کنیم. در بهترین حالت آرایۀ ورودی الگوریتم مرتب شده است. بنابراین در بهترین حالت در هر بار اجرای خط ۴ ، برنامه از حلقه `while` خارج می‌شود و بنابراین خط ۴ تعداد $n-1$ بار اجرا می‌شود و خطوط ۵ و ۶ اجرا نمی‌شوند.

- زمان کل اجرای برنامه را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم.

$$\begin{aligned} T(n) &= c_1 n + c_2(n-1) + c_3(n-1) + c_4(n-1) + c_7(n-1) \\ &= (c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_7)n - (c_2 + c_3 + c_4 + c_7) \end{aligned}$$

- زمان اجرای این الگوریتم در بهترین حالت را می‌توانیم به صورت $an + b$ بنویسیم به ازای اعداد ثابت a و b و اندازه ورودی n . بنابراین زمان اجرا در این حالت یک تابع خطی [1] از n است.

[1] linear function

تحلیل الگوریتم مرتب‌سازی درجی

- حال زمان اجرای الگوریتم مرتب سازی درجی را در بدترین حالت محاسبه می‌کنیم. در بدترین حالت آرایهٔ ورودی به صورت معکوس مرتب شده است و بنابراین هر یک از عناصر آرایه نیاز به بیشترین تعداد جابجایی دارد.

- در حلقهٔ `while` هر یک از عناصر $A[i]$ باید با همهٔ عناصر $A[1:i-1]$ مقایسه شود بنابراین حلقه باید تعداد i بار به ازای $2, 3, ..., n$ تکرار شود.

- پس به طور کل خط ۴ باید به تعداد زیر تکرار شود.

$$\sum_{i=2}^{n} i = \Big(\sum_{i=1}^{n} i\Big) - 1 = \frac{n(n+1)}{2} - 1$$

تحلیل الگوریتم مرتب‌سازی درجی

- هر یک از خطوط ۵ و ۶ الگوریتم به ازای $i = 2, 3, ..., n$ تعداد $i - 1$ بار تکرار می‌شود.
- بنابراین برای خطوط ۵ و ۶ تعداد تکرار برابر است با :

$$\sum_{i=2}^{n}(i-1) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \Big(\sum_{i=1}^{n} i\Big) - n = \frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2}$$

تحلیل الگوریتم مرتب سازی درجی

- زمان اجرای برنامه در بدترین حالت را می‌توانیم به صورت زیر محاسبه کنیم.

$$
\begin{aligned}
T(n) =& c_1 n + c_2(n-1) + c_3(n-1) + c_4\left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) \\
&+ c_5\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) + c_6\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) + c_7(n-1) \\
=& \left(\frac{c_4+c_5+c_6}{2}\right)n^2 + \left(c_1+c_2+c_3+\frac{c_4-c_5-c_6}{2}+c_7\right)n \\
&- (c_2+c_3+c_4+c_7)
\end{aligned}
$$

تحلیل الگوریتم مرتب‌سازی درجی

- بنابراین زمان اجرای الگوریتم مرتب سازی درجی در بدترین حالت را می‌توانیم به صورت $an^2 + bn + c$ بنویسیم به طوری که a و b و c اعداد ثابت و n ورودی برنامه است. پس زمان اجرای الگوریتم در بدترین حالت یک تابع مربعی [1] یا تابع درجه دوم از n است.

[1] quadratic function

تحلیل الگوریتم مرتب‌سازی درجی

- در حالت کلی از آنجایی که تعداد تکرارها در حلقه `while` مشخص نیست، زمان اجرای الگوریتم را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم که در آن t_i تعداد متغیر تکرارهای حلقه `while` است.

$$
\begin{aligned}
T(n) = {} & c_1 n + c_2(n-1) + c_3(n-1) + c_4 \sum_{i=2}^{n} t_i \\
& + c_5 \sum_{i=2}^{n} (t_i - 1) + c_6 \sum_{i=2}^{n} (t_i - 1) + c_7(n-1)
\end{aligned}
$$

تحلیل الگوریتم مرتب‌سازی درجی

- معمولاً در تحلیل الگوریتم‌ها، بدترین حالت [1] زمان اجرا را محاسبه می‌کنیم.

- دلیل این امر آن است که زمان اجرا در بدترین حالت در واقع یک کران بالا [2] برای زمان اجرا است و الگوریتم نمی‌تواند به زمانی بیشتر از آن نیاز داشته باشد. پس می‌توانیم تضمین کنیم که الگوریتم در زمانی که در بدترین حالت محاسبه کرده‌ایم اجرا می‌شود. همچنین در بسیاری از مواقع برای بسیاری از الگوریتم‌ها بدترین حالت بسیار اتفاق می‌افتد.

- دلیل دیگر برای تحلیل الگوریتم در بدترین حالت این است که زمان اجرا در بدترین حالت و در حالت میانگین [3] تقریبا معادل یکدیگرند. برای مثال در الگوریتم مرتب‌سازی درجی، در حالت میانگین در حلقهٔ `while` هر یک از $A[i]$ ها باید با نیمی از عناصر $A[1 : i-1]$ مقایسه شوند. بنابراین $t_i = i/2$. اگر کل زمان اجرا در حالت میانگین را محاسبه کنیم، زمان اجرا یک تابع درجه دوم از اندازهٔ ورودی به دست می‌آید. بنابراین زمان اجرا در بدترین حالت و حالت میانگین تقریبا برابرند.

---

[1] worst case
[2] upper bound
[3] average case

تحلیل مجانبی

- در تحلیل الگوریتم‌ها معمولاً در مورد مرتبهٔ رشد [1] یا نرخ رشد توابع [2] صحبت می‌کنیم و جزئیات را در محاسبات نادیده می‌گیریم. در واقع محاسبهٔ زمان اجرا را به صورت حدی در نظر می‌گیریم وقتی که اندازهٔ ورودی بسیار بزرگ باشد. وقتی n به بینهایت میل کند هر تابع درجه دوم با ضریب ثابتی از n^2 برابر است. در این حالت می‌گوییم زمان اجرا برنامه از مرتبه n^2 است.

- برای نشان دادن مرتبه بزرگی از حرف یونانی Θ (تتا) استفاده می‌کنیم. می‌گوییم زمان اجرای مرتب‌سازی درجی در بهترین حالت برابر است با $\Theta(n)$ و زمان اجرای آن در بدترین حالت برابر است با $\Theta(n^2)$، بدین معنی که برای n های بسیار بزرگ زمان اجرای الگوریتم در بدترین حالت تقریبا برابر است با n^2.

- زمان اجرای یک الگوریتم از یک الگوریتم دیگر بهتر است اگر زمان اجرای آن در بدترین حالت مرتبه رشد کمتری [3] داشته باشد.

[1] order of growth
[2] rate of growth
[3] lower order of growth

تحلیل مجانبی

- مرتبه رشد [1] زمان اجرای یک الگوریتم، معیار مناسبی برای سنجش کارایی [2] یک الگوریتم است که به ما کمک می‌کند یک الگوریتم را با الگوریتم‌های جایگزین آن مقایسه کنیم.
- گرچه محاسبه دقیق زمان اجرا در بسیاری مواقع ممکن است، اما این دقت در بسیاری مواقع ارزش افزوده‌ای ندارد چرا که به ازای ورودی‌های بزرگ مرتبه رشد زمان اجرا تعیین کننده مقدار تقریبی زمان اجرا است.
- تحلیل مجانبی [3] در آنالیز ریاضی روشی است برای توصیف رفتار حدی توابع. در تحلیل الگوریتم‌ها نیز می‌خواهیم تابع زمان اجرا را با استفاده از تحلیل مجانبی بررسی کنیم تا زمان اجرا را وقتی ورودی الگوریتم بدون محدودیت بزرگ می‌شود بسنجیم.

---

[1] order of growth
[2] efficiency
[3] asymptotic analysis

تحلیل مجانبی

- نماد O [1] در تحلیل مجانبی توابع، کران بالای مجانبی [2] یک تابع را مشخص می‌کند.
- تابع $f(x)$ برابر است با $O(g(x))$ اگر تابع $f(x)$ از تابع $g(x)$ سریع‌تر رشد نکند. به عبارت دیگر تابع $f(x)$ به ازای n های بسیار بزرگ از ضریب ثابتی از $g(x)$ کوچکتر است.
- برای مثال $10n$ به ازای مقادیر $n \geq 10$ همیشه کوچکتر یا مساوی n^2 است. پس می‌گوییم تابع $10n$ دارای کران بالای مجانبی n^2 است.
- به عنوان مثالی دیگر، تابع $2n^3 + 3n^2 + n + 4$ دارای کران بالای n^3 است، زیرا به ازای مقادیر بزرگ، از ضریب ثابتی از n^3 کوچکتر است. می‌نویسیم این تابع $O(n^3)$ است.
- همچنین می‌توانیم بگوییم این تابع $O(n^4)$ و $O(n^5)$ و به طور کلی $O(n^c)$ به ازای $c \geqslant 3$ است، چرا که سرعت رشد آن از این تابع بیشتر نیست.

---

[1] O-notation

[2] asymptotic upper bound

تحلیل مجانبی

- به ازای تابع دلخواه $g(n)$ ، مجموعهٔ $O(g(n))$ شامل همهٔ توابعی است که کران بالای آنها $g(n)$ است و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$O(g(n)) = \{f(n) : \exists c, n_0 > 0, \forall n \geqslant n_0, 0 \leqslant f(n) \leqslant cg(n)\}$$

- به عبارت دیگر تابع $f(n)$ به مجموعه توابع $O(g(n))$ تعلق دارد اگر عدد مثبت c وجود داشته باشد به طوری‌که به ازای اعداد n بزرگ‌تر از n_0 داشته باشیم $f(n) \leqslant cg(n)$.

- طبق این تعریف توابع $f(n)$ باید توابع غیر منفی باشند.

تحلیل مجانبی

- از آنجایی که نماد O در واقع یک مجموعه را تعریف می‌کند می‌توانیم بنویسیم $f(n) \in O(g(n))$ ، اما گاهی برای سادگی می‌نویسیم $f(n) = O(g(n))$ و می‌خوانیم $f(n)$ از $O(g(n))$ است، یا $g(n)$ کران بالای تابع $f(n)$ است.

- برای مثال $4n^2 + 100n + 500 = O(n^2)$. باید نشان دهیم c و n_0 وجود دارند که در شرایط تعریف شده صدق می‌کنند. به عبارت دیگر $4n^2 + 100n + 500 \leqslant cn^2$ به ازای $n_0 = 1$ برای اینکه این نامعادله درست باشد داریم $c = 604$.

تحلیل مجانبی

- نماد Ω [1] یا نماد اومگا کران پایین مجانبی [2] یک تابع را در تحلیل مجانبی مشخص می‌کند.
- تابع $f(x)$ برابر است با $\Omega(g(x))$ اگر تابع $f(x)$ از تابع $g(x)$ سریع‌تر رشد کند. به عبارت دیگر تابع $f(x)$ به ازای n های بسیار بزرگ از ضریب ثابتی از $g(x)$ بزرگتر است.
- برای مثال $\frac{n}{3}$ به ازای مقادیر $n \geq 9$ همیشه بزرگتر یا مساوی $\sqrt{n}$ است. پس می‌گوییم تابع $\frac{n}{3}$ دارای کران پایین مجانبی $\sqrt{n}$ است.
- به عنوان مثالی دیگر، می‌گوییم تابع $2n^3 + 3n^2 + n + 4$ دارای کران پایین n^3 است، زیرا به ازای همهٔ مقادیر مثبت از n^3 بزرگتر است. می‌نویسیم این تابع $\Omega(n^3)$ است.
- همچنین می‌توانیم بگوییم این تابع $\Omega(n^2)$ و $\Omega(n)$ و به طورکلی $\Omega(n^c)$ به ازای $c \leqslant 3$ است.

[1] Ω-notation
[2] asymptotic lower bound

تحلیل مجانبی

- به ازای یک تابع دلخواه $g(n)$ ، مجموعهٔ $\Omega(g(n))$ شامل همهٔ توابعی است که کران پایین آنها $g(n)$ است و به صورت زیر تعریف می‌شود.
$\Omega(g(n)) = \{f(n) : \exists c, n_0 > 0, \forall n \geqslant n_0, 0 \leqslant cg(n) \leqslant f(n)\}$

- برای مثال $4n^2 + 100n + 500 = \Omega(n^2)$. به عبارت دیگر $4n^2 + 100n + 500 \geqslant cn^2$ به ازای همهٔ n_0 های مثبت این نامعادله درست است اگر $c = 4$.

تحلیل مجانبی

- نماد Θ [1] یا نماد تتا، کران اکید مجانبی [2] یک تابع در تحلیل مجانبی را مشخص می‌کند.
- تابع $f(x)$ برابر است با $\Theta(g(x))$ اگر تابع $f(x)$ از تابع $g(x)$ نه سریع‌تر رشد کند و نه کندتر. به عبارت دیگر تابع $f(x)$ به ازای n های بسیار بزرگ از ضریب ثابتی از $g(x)$ بزرگتر است و از ضریب ثابتی از $g(x)$ کوچکتر است.
- اگر نشان دهیم یک تابع دارای کران بالای $g(n)$ و دارای کران پایین $g(n)$ است و یا عبارت دیگر $O(g(n))$ و $\Omega(g(n))$ است، آنگاه آن تابع دقیقا از مرتبه $g(n)$ است و یا به عبارت دیگر $\Theta(g(n))$ است.
- برای مثال می‌گوییم تابع $2n^3 + 3n^2 + n + 4$ از مرتبه n^3 است و می‌نویسیم این تابع $\Theta(n^3)$ است.

[1] Θ-notation
[2] asymtotically tight bound

تحلیل مجانبی

- به ازای تابع دلخواه $g(n)$ ، مجموعه $\Theta(g(n))$ شامل همهٔ توابعی است که کران اکید آنها $g(n)$ است، یعنی همه توابعی که $g(n)$ هم کران بالای آنها است و هم کران پایین آنها.
- به عبارت دیگر

$$\Theta(g(n)) = \{f(n) : \exists c_1, c_2, n_0 > 0, \forall n \geqslant n_0, 0 \leqslant c_1 g(n) \leqslant f(n) \leqslant c_2 g(n)\}$$

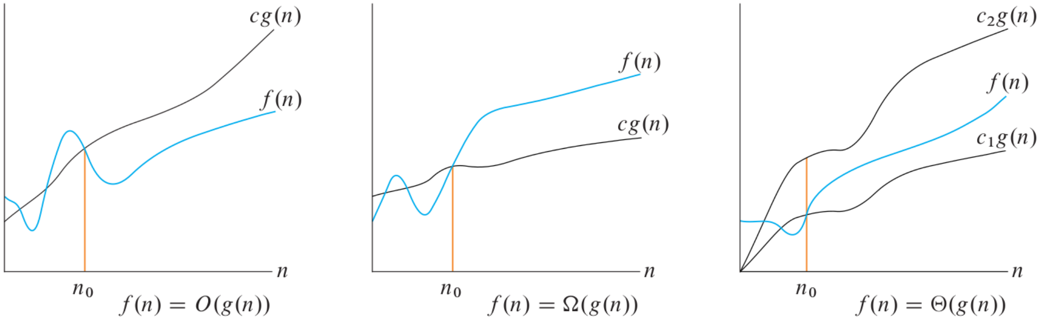
- می‌توانیم ثابت کنیم که به ازای دو تابع $f(n)$ و $g(n)$ داریم $f(n) \in \Theta(g(n))$ اگر و تنها اگر $f(n) \in O(g(n))$ و $f(n) \in \Omega(g(n))$.

تحلیل مجانبی

- نمادهای O، Ω، و Θ بر روی توابع گسسته عمل می‌کند، یعنی توابعی که دامنهٔ آنها بر روی اعداد حسابی $\mathbb{N}$ و برد آنها بر روی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ تعریف شده است. از این نمادها برای تحلیل مجانبی زمان اجرای الگوریتم‌ها یعنی $T(n)$ استفاده می‌کنیم.

تحلیل مجانبی

- در شکل زیر مفاهیم نمادهای مجانبی نشان داده شده‌اند.



تحلیل مجانبی الگوریتم مرتب‌سازی درجی

- حال الگوریتم مرتب‌سازی درجی را یک بار دیگر در نظر می‌گیریم.

Algorithm Insertion Sort

```
function INSERTION-SORT(A, n)
▷ A is an array of n elements
for i = 2 to n do
    key = A[i]
    j = i - 1
    while  j > 0 and A[j] > key  do
        A[j+1] = A[j]
        j = j-1
    A[j+1] = key
```

تحلیل مجانبی الگوریتم مرتب‌سازی درجی

- می‌خواهیم اثبات کنیم زمان اجرای این الگوریتم در بدترین حالت $\Theta(n^2)$ است. باید اثبات کنیم زمان اجرای الگوریتم در بدترین حالت $O(n^2)$ و $\Omega(n^2)$ است.
- این الگوریتم در یک حلقه `for` به تعداد $n-1$ بار تکرار می‌شود. به ازای هر بار تکرار در این حلقه یک حلقه درونی `while` وجود دارد که در بدترین حالت $i-1$ بار تکرار می‌شود و i حداکثر n است بنابراین تعداد کل تکرارها در حلقه درونی حداکثر $(n-1)(n-1)$ است، که کران بالای آن n^2 است. بنابراین $T(n) < n^2$ و طبق تعریف کران بالای مجانبی $T(n) = O(n^2)$ است. بنابراین زمان اجرای این الگوریتم $O(n^2)$ است.

تحلیل مجانبی الگوریتم مرتب‌سازی درجی

- حال می‌خواهیم نشان دهیم زمان اجرای این الگوریتم در بدترین حالت $\Omega(n^2)$ است. برای این کار باید نشان دهیم حداقل یک ورودی وجود دارد که زمان اجرای آن از ضریب ثابتی از n^2 بزرگتر است.

- فرض کنید یکی از ورودی‌های الگوریتم، آرایه‌ای است که طول آن مضرب 3 است و در این ورودی بزرگ‌ترین عناصر آرایه در یک سوم ابتدای آرایه قرار دارند. برای این‌که این آرایه مرتب شود همهٔ این عناصر باید به یک‌سوم انتهای آرایه انتقال پیدا کنند. برای این انتقال هر عنصر باید حداقل $n/3$ بار به سمت راست حرکت کند تا از ثلث میانی آرایه عبور کند. این انتقال باید برای حداقل یک‌سوم عناصر اتفاق بیافتد، پس زمان اجرا در این حالت حداقل $(n/3)(n/3)$ است، بنابراین $T(n) > \frac{1}{9}n^2$ و طبق تعریف کران پایین مجانبی $T(n) = \Omega(n^2)$ است.

- از آنجایی که مرتبه رشد مرتب‌سازی درجی در بدترین حالت حداکثر و حداقل از مرتبه n^2 است یعنی مرتبه رشد آن $O(n^2)$ و $\Omega(n^2)$ است، بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم مرتبه رشد آن در بدترین حالت از مرتبه n^2 است یا به عبارت دیگر $\Theta(n^2)$ است.

مثال: تحلیل مجانبی

- کران بالا و پایین مجانبی الگوریتم زیر را تحلیل کنید.

Algorithm Counter Example

```
function COUNTER(n)
c = 0
i = n
while i > 1 do
   for  j = 1 to i  do
      c = c + 1
   i = i / 2
return c
```

مثال: تحلیل مجانبی

- حلقه بیرونی حداکثر $\lg n$ بار تکرار می‌شود و حلقه درونی حداکثر n بار. بنابراین خط ۵ با بیشترین تعداد تکرار در بین همهٔ خطوط برنامه، حداکثر $n \lg n$ بار تکرار می‌شود. پس کران بالای مجانبی $O(n \lg n)$ است.

Algorithm Counter Example

```
   function COUNTER(n)
1: c = 0
2: i = n
3: while i > 1 do
4:    for  j = 1 to i  do
5:       c = c + 1
6:    i = i / 2
7: return c
```

مثال: تحلیل مجانبی

- حلقه بیرونی به ازای هر ورودی حداقل $\lg n$ بار تکرار می‌شود و حلقه درونی حداقل i بار در هر تکرار. بنابراین خط ۵ با بیشترین تعداد تکرار در بین همهٔ خطوط برنامه، حداقل $\sum_{i=0}^{\lg n}\frac{n}{2^i} = 2n-1$ بار تکرار می‌شود. پس کران پایین مجانبی $\Omega(n)$ است.

Algorithm Counter Example

```
   function COUNTER(n)
1: c = 0
2: i = n
3: while i > 1 do
4:    for  j = 1 to i  do
5:       c = c + 1
6:    i = i / 2
7: return c
```

مثال: تحلیل مجانبی

- با یک تحلیل دقیق به این نتیجه می‌رسیم که کران بالای محاسبه شده هیچ‌گاه اتفاق نمی‌افتد و در اینجا تحلیل کران بالای مجانبی مقداری بیش از اندازهٔ واقعی تخمین زده است و در واقع پیچیدگی زمانی این الگوریتم $\Theta(n)$ است گرچه $O(n \lg n)$ نیز هست.

Algorithm Counter Example

```
function COUNTER(n)
c = 0
i = n
while i > 1 do
   for  j = 1 to i  do
      c = c + 1
   i = i / 2
return c
```