Эхний ном

Зохиогчийн нэр

2016 он

Бүлэг 1

Оршил бодлогууд

1. Бодит x тооны хувьд $\sec x - \operatorname{tg} x = 2$ бол $\sec x + \operatorname{tg} x$-г ол.

Бодолт: $(\sec x + \operatorname{tg} x)(\sec x - \operatorname{tg} x)$ үржвэрийг авч үзье.

$$(\sec x + \operatorname{tg} x)(\sec x - \operatorname{tg} x) = \sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x =$$
$$= \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 1$$

Өөрөөр хэлбэл $\forall x \in D(f)$ хувьд $\sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 1$ болно. Иймд

$$\sec x + \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sec x - \operatorname{tg} x} = \frac{1}{2}$$

болно.

2. $0^\circ < \theta < 45^\circ$ бол

$$t_1 = (\operatorname{tg} \theta)^{\operatorname{tg} \theta}, \qquad t_2 = (\operatorname{tg} \theta)^{\operatorname{ctg} \theta},$$
$$t_3 = (\operatorname{ctg} \theta)^{\operatorname{tg} \theta}, \qquad t_4 = (\operatorname{ctg} \theta)^{\operatorname{ctg} \theta}$$

тоонуудыг буурах эрэмбээр эрэмбэл.

Бодолт: $\forall a > 1$ тооны хувьд $y = a^x$ функц өсөх функц ба $0 < a < 1$ үед уг функц буурах функц юм. $0^\circ < \theta < 45^\circ$ завсарт $\operatorname{ctg} \theta > 1 > \operatorname{tg} \theta > 0$ учир $t_4 > t_3$, $t_1 > t_2$ ба $t_3 > 1 > t_1$ болно. Өөрөөр хэлбэл $t_4 > t_3 > t_1 > t_2$ болно.

3. Тооцоол.

(a) $\sin \frac{\pi}{12}, \cos \frac{\pi}{12}, \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$

(b) $\cos^4 \frac{\pi}{24} - \sin^4 \frac{\pi}{24}$

(c) $\cos 36^\circ - \cos 72^\circ$

(d) $\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$

Бодолт:

(a) Давхар өнцөг болон нийлбэр ялгаварын томъёог ашиглавал

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} = \\ = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \\ = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = \frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}} = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = 2-\sqrt{3}$$

(b)

$$\cos^4\frac{\pi}{24} - \sin^4\frac{\pi}{24} = \left(\cos^2\frac{\pi}{24} + \sin^2\frac{\pi}{24}\right)\left(\cos^2\frac{\pi}{24} - \sin^2\frac{\pi}{24}\right) = 1\cdot\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

(c)

$$\cos 36^\circ - \cos 72^\circ = \frac{2(\cos 36^\circ - \cos 72^\circ)(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ)}{2(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ)} = \frac{2\cos^2 36^\circ - 2\cos^2 72^\circ}{2(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ)}$$

Давхар өнцгийн томьёо ашиглавал

$$\frac{2\cos^2 36^\circ - 2\cos^2 72^\circ}{2(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ)} = \frac{\cos 72^\circ + 1 - \cos 144^\circ - 1}{2(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ)} = \frac{\cos 72^\circ + \cos 36^\circ}{2(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ)} = \frac{1}{2}$$

Дээрх тэнцэтгэлийг геометрийн аргаар баталж болно. Үүний тулд оройн өнцөг $\measuredangle A = 36^\circ$ ба талууд нь $AB = AC$, $BC = 1$ байх адил хажуут гурвалжныг авч үзье. Уг гурвалжны $\angle B$ өнцгийн биссектрис AC талтай огтлолцох огтлолцлыг D гэвэл $BC = BD = AD = 1, AB = 2\cos 36^\circ$ ба $CD = 2\cos 72^\circ$ болохыг та бүхэн бие даан батлаарай. Үр дүн нь дээрх тэнцэтгэлийн геометр баталгаа юм.

(d)

$$8\sin 20^\circ \sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = 8\sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \\ = 4\sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = 2\sin 80^\circ \cos 80^\circ = \sin 160^\circ = \sin 20^\circ$$

Эндээс

$$\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \frac{1}{8}$$

болно.

4. Илэрхийллийг хялбарчил.

$$\sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} - \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x}$$

Бодолт:

$$\sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} - \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x} = \sqrt{\sin^4 x + 4\left(1-\sin^2 x\right)} - \sqrt{\cos^4 x + 4\left(1-\cos^2 x\right)} =$$
$$= \sqrt{\left(2-\sin^2 x\right)^2} - \sqrt{\left(2-\cos^2 x\right)^2} = \left(2-\sin^2 x\right) - \left(2-\cos^2 x\right) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

5. Батал.

$$1 - \operatorname{ctg} 23^\circ = \frac{2}{1-\operatorname{ctg} 22^\circ}$$

Бодолт:

$$(1-\operatorname{ctg} 23^\circ)(1-\operatorname{ctg} 22^\circ) = 2$$

болохыг баталья.

$$(1-\operatorname{ctg} 23^\circ)(1-\operatorname{ctg} 22^\circ) = \left(1-\frac{\cos 23^\circ}{\sin 23^\circ}\right)\left(1-\frac{\cos 22^\circ}{\sin 22^\circ}\right) = \frac{\sin 23^\circ - \cos 23^\circ}{\sin 23^\circ}\cdot\frac{\sin 22^\circ - \cos 22^\circ}{\sin 22^\circ} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}\sin(23^\circ-45^\circ)\sqrt{2}\sin(22^\circ-45^\circ)}{\sin 23^\circ\cdot\sin 22^\circ} = \frac{2\sin(-22^\circ)\sin(-23^\circ)}{\sin 23^\circ \sin 22^\circ} = \frac{2\sin 22^\circ \sin 23^\circ}{\sin 23^\circ \sin 22^\circ} = 2$$

Бодолт: Котангенсийн өнцгүүдийн нийлбэрийн томьёогоор

$$\frac{\operatorname{ctg} 22^\circ \operatorname{ctg} 23^\circ - 1}{\operatorname{ctg} 22^\circ + \operatorname{ctg} 23^\circ} = \operatorname{ctg}(22^\circ + 23^\circ) = \operatorname{ctg} 45^\circ = 1$$

Эндээс $\operatorname{ctg} 22^\circ \operatorname{ctg} 23^\circ - 1 = \operatorname{ctg} 22^\circ + \operatorname{ctg} 23^c irc$ буюу

$$1 - \operatorname{ctg} 22^\circ - \operatorname{ctg} 23^\circ + \operatorname{ctg} 22^\circ \operatorname{ctg} 23^\circ = 2$$

болно. Өөрөөр хэлбэл

$$(1-\operatorname{ctg} 23^\circ)(1-\operatorname{ctg} 22^\circ) = 2$$

болно.

6.

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sin x} + \frac{\sqrt{3}+1}{\cos x} = 4\sqrt{2}$$

тэгшитгэлийн $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ завсар дахь бүх шийдийг ол.

Бодолт: Бодлого $3(a)$ дээр бид $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ ба $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ болохыг харсан. Эдгээрийг тэгшитгэлд орлуулвал

$$\frac{\frac{\sqrt{3}-1}{4}}{\sin x} + \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{4}}{\cos x} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\sin x} + \frac{\cos\frac{\pi}{12}}{\cos x} = 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sin\frac{\pi}{12}\cos x + \cos\frac{\pi}{12}\sin x = 2\sin x\cos x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{12}+x\right) = \sin 2x \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{12}+x = 2x\\ \frac{\pi}{12}+x = \pi - 2x\end{array}\right. \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{12}\\ x = \frac{11\pi}{36}\end{array}\right.$$

7.

8. $\triangle ABC$-ны хувьд $\sin\frac{A}{2} \leq \frac{a}{b+c}$ болохыг харуул.

Бодолт: Гурвалжны хувьд синусын өргөтгөсөн теорем ёсоор

$$\frac{a}{b+c} = \frac{\sin A}{\sin B + \sin C}$$

Синусуудын нийлбэрийн томьёо болон давхар өнцгийн томьёог ашиглавал

$$\frac{a}{b+c} = \frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}$$

Энд $0 \leq |B-C| < 180^\circ \Rightarrow 0 < \cos\frac{B-C}{2} \leq 1$ тул

$$\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}} \geq \sin\frac{A}{2} \Rightarrow \frac{a}{b+c} \geq \sin\frac{A}{2}$$

болно. Үүнтэй адилаар

$$\sin\frac{B}{2} \leq \frac{b}{c+a} \qquad \text{ба} \qquad \sin\frac{C}{2} \leq \frac{c}{a+b}$$

болно.

9. $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ завсрыг I гэе. $[-1,1]$ завсарт тодорхойлогдсон $f\left(\sin 2x\right) = \sin x + \cos x$ чанарыг хангах f функцийг ол. I завсарт $f\left(\tan^2 x\right)$ функцийг хялбарчил.

Бодолт:

$$\left[f\left(\sin 2x\right)\right]^2 = \left(\sin x + \cos x\right)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = 1 + \sin 2x$$

$x \in I$ байх үед $\sin 2x \in [-1,1]$ байна. $\sin 2x = t$ гэвэл $t \in [-1,1]$ ба $[f(t)]^2 = 1 + t$ болно. Эндээс $f(t) = \sqrt{1+t}$ болно.

$-\frac{\pi}{4} \leq x \geq \frac{\pi}{4}$ үед $-1 \leq \operatorname{tg} x \geq 1x$ байх ба $0 \geq \operatorname{tg}^2 x \geq 1$ тул

$$f(\operatorname{tg}^2 x) = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x} = \sqrt{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \sqrt{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

болно.

10. $\forall x \in \mathbb{R}; \forall k \in \mathbb{N}$ үед

$$f_k(x) = \frac{1}{k}\left(\sin^k x + \cos^k x\right)$$

бол

$$f_4(x) - f_6(x) = \frac{1}{12}$$

болохыг батал.

Бодолт: Бид уг тэнцэтгэлийг $12f_4(x) - 12f_6(x) = 1$ гэж баталья.

$$12 \cdot \frac{1}{4}\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) - 12 \cdot \frac{1}{6}\left(\sin^6 x + \cos^6 x\right) = 3\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) - 2\left(\sin^6 x + \cos^6 x\right) =$$
$$= 3\left[\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x\right] - 2\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)\left(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x\right) =$$
$$= 3 - 6\sin^2 x \cos^2 x - 2\left[\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 3\sin^2 x \cos^2 x\right] = 3 - 2 = 1$$

11. [AIME 2004, Jonathan Kane] 15×34 хэмжээтэй $ABCD$ тэгш өнцөгтод нэгж радиустай тойрог агуулагдана. Тэгвэл уг тойрог AC диагональтай огтлолцохгүй байх магадлалыг ол.

Бодолт:

12. [AMC12, 1999] ABC гурвалжны хувьд

$$3\sin A + 4\cos B = 6 \qquad \text{ба} \qquad 4\sin B + 3\cos A = 1$$

C өнцгийн хэмжээг ол.

Бодолт: Өгөгдсөн хоёр тэгшитгэлийн квадратуудын нийлбэрийг олбол

$$24\left(\sin A \cos B + \cos A \sin B\right) = 12 \Rightarrow \sin(A + B) = \frac{1}{2}$$

$$\measuredangle C = 180^\circ - \measuredangle A - \measuredangle B \Rightarrow \sin C = \sin(A + B) \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\measuredangle C = 30^\circ\\ \measuredangle C = 150^\circ\end{array}\right.$$

болно. Гэвч $\measuredangle C = 150^\circ$ үед $\measuredangle A < 30^\circ \Rightarrow 3\sin A + 4\cos B < \frac{3}{2} + 4 < 6$ болж зөрчилдөнө. Иймд бодлогын хариу $\measuredangle C = 30^\circ$ болно.

13. $\forall a \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ хувьд

$$\operatorname{tg} 3a - \operatorname{tg} 2a - \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} 3a \operatorname{tg} 2a \operatorname{tg} a$$

болохыг батал.

Бодолт: Дээрх тэнцэтгэл дараах тэнцэтгэлтэй эквивалент юм.

$$\operatorname{tg} 3a(1 - \operatorname{tg} 2a \operatorname{tg} a) = \operatorname{tg} 2a + \operatorname{tg} a$$
$$\operatorname{tg} 3a = \frac{\operatorname{tg} 2a + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} 2a \operatorname{tg} a}$$
$$\operatorname{tg} 3a = \operatorname{tg}(2a + a)$$

Тэмдэглэл: Ерөнхий тохиолдолд $a_1, a_2, a_3 \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ тоонуудын хувьд $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ бол $\operatorname{tg} a_1 + \operatorname{tg} a_2 + \operatorname{th} a_3 = \operatorname{tg} a_1 \operatorname{tg} a_2 \operatorname{tg} a_3$ тэнцэтгэл биелнэ. Үүний баталгаа 13 ба 20 дугаар бодлоготой төстэйгөөр батлагдах тул дасгал болгон бие даан хийж гүйцэтгээрэй.

14. $a, b, c, d \in [0, \pi]$ тоонууд

$$\sin a + 7\sin b = 4\left(\sin c + 2\sin d\right)$$
$$\cos a + 7\cos b = 4\left(\cos c + 2\cos d\right)$$

тэнцэтгэлүүдийг хангадаг бол

$$2\cos(a-d) = 7\cos(b-c)$$

болохыг батал.

Бодолт: Өгөгдсөн тэнцэтгэлүүдийг дараах хэлбэрт бичье.

$$\sin a - 8\sin d = 4\sin c - 7\sin b$$
$$\cos a + 7\cos b = 4\cos c - 7\cos b$$

Эдгээрийн квадратуудын нийлбэрийг эмхтгэвэл

$$1 + 64 - 16\left(\cos a\cos b + \sin a\sin b\right) = 16 + 49 - 56\left(\cos b\cos c + \sin b\sin c\right)$$
$$2\cos(a-d) = 7\cos(b-c)$$

15.

$$\sin(x-y) + \sin(y-z) + \sin(z-x)$$

илэрхийллийг нэг гишүүнтээр илэрхийл.

Бодолт: Синусуудын нийлбэрийн томьёогоор

$$\sin(x-y) + \sin(y-z) = 2\sin\frac{x-z}{2}\cos\frac{x+z-2y}{2}$$

Давхар өнцгийн томьёогоор

$$\sin(z-x) = 2\sin\frac{z-x}{2}\cos\frac{z-x}{2}$$

болно. Иймд

$$\sin(x-y)+\sin(y-z)+\sin(z-x) = 2\sin\frac{x-z}{2}\left[\cos\frac{x+z-2y}{2} - \cos\frac{z-x}{2}\right] =$$
$$= -4\sin\frac{x-z}{2}\sin\frac{z-y}{2}\sin\frac{x-y}{2} = -4\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{y-z}{2}\sin\frac{z-x}{2}$$

Тэмдэглэл: Ерөнхий тохиолдолд $a+b+c=0$ байх $a, b, c \in \mathbb{R}$ тоонуудын хувьд

$$\sin a + \sin b + \sin c = -4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}$$

тэнцэтгэл биелнэ. Энэ бодлого нь $a = x-y; \quad b = y-z; \quad c = z-x$ байх тухайн тохиолдол юм.

16. Батал.

$$(4\cos^2 9^\circ - 3)(4\cos^2 27^\circ - 3) = \operatorname{tg} 9^\circ$$

Бодолт:

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \Rightarrow 4\cos^2 x - 3 = \frac{\cos 3x}{\cos x}, \forall x \neq (2k+1)\cdot 90^\circ$$

болно. Иймд

$$(4\cos^2 9^\circ - 3)(4\cos^2 27^\circ - 3) = \frac{\cos 27^\circ}{\cos 9^\circ} \cdot \frac{\cos 81^\circ}{\cos 27^\circ} = \frac{\cos 81^\circ}{\cos 9^\circ} = \frac{\sin 9^\circ}{\cos 9^\circ} = \operatorname{tg} 9^\circ$$

болно.

17. $a, b \geq 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$ байх бодит тоонуудын хувьд

$$\left(1 + \frac{a}{\sin x}\right)\left(1 + \frac{b}{\cos x}\right) \geq \left(1 + \sqrt{2ab}\right)^2$$

болохыг батал.

Бодолт: Тэнцэтгэл бишийн хоёр талын хаалтуудыг задлан нийлбэр хэлбэрт бичвэл

$$1 + \frac{a}{\sin x} + \frac{b}{\cos x} + \frac{ab}{\sin x \cos x} \geq 1 + 2ab + 2\sqrt{2ab}$$

болно. Кошийн тэнцэтгэл бишээр

$$\frac{a}{\sin x} + \frac{b}{\cos x} \geq \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{\sin x \cos x}}$$

Давхар өнцгийн томьёогоор $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x \leq \frac{1}{2}$ учир

$$\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{\sin x \cos x}} \geq 2\sqrt{2ab} \Rightarrow \frac{ab}{\sin x \cos x} \geq 2ab$$

болно. Сүүлийн 3 тэнцэтгэл бишийг ашиглавал

$$1 + \frac{a}{\sin x} + \frac{b}{\cos x} + \frac{ab}{\sin x \cos x} \geq 1 + 2ab + 2\sqrt{2ab}$$

болох нь батлагдана.

18. $\triangle ABC$ - ны хувьд $\sin A + \sin B + \sin C \leq 1$ бол $min\,(A + B, B + C, C + A) < 30^\circ$ гэж батал.

Бодолт: Бид $A \geq B \geq C$ гэе. Тэгвэл $B + C < 30^\circ$ гэж батлах шаардлагатай болно. Синусын теорем болон гурвалжны тэнцэтгэл бишийн $(b + c > a)$ чанар ёсоор $\sin B + \sin C > \sin A$ гэдгээс $\sin A + \sin B + \sin C > 2 \sin A$ болно. Өгөгдсөн нөхцлийг ашиглавал $2 \sin A < 1$ буюу $\sin A < \frac{1}{2}$ болно. A өнцгийн хэмжээ гурвалжны бусад өнцгөөсөө их учир $A \geq \frac{A+B+C}{3} = 60^\circ$ болно. Иймд $A > 150^\circ$ учир $B + C < 30^\circ$ болох нь батлагдлаа.

19. ABC гурвалжны хувьд батал.

(a)

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 1$$

(b)

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{9}$$

Бодолт:

(a) Тангенсуудын нийлбэрийн томьёогоор

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}\left(1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)$$

$A+B+C=180^\circ$ тул $\frac{A+B}{2}=90^\circ-\frac{C}{2}\Rightarrow\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$ болно. Иймд

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=$$
$$=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\left(1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)=$$
$$=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}=1$$

болж батлагдлаа.

(b) Кошийн тэнцэтгэл биш ёсоор

$$1=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\geq$$
$$\geq 3\sqrt[3]{\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)^2}$$

Эндээс

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\leq\frac{\sqrt{3}}{9}$$

болох нь батлагдана.

Тэмдэглэл: (a) -ийн эквивалент хэлбэр нь

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$$

юм.

20. Хурц өнцөгт $\triangle ABC$ -ны хувьд

(a) $\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C$

(b) $\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C\geq 3\sqrt{3}$

болохыг батал.

Бодолт:

(a) Тангенсуудын нийлбэрийн томьёо ашиглавал

$$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}(A+B)(1-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B)+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}(180^\circ-C)(1-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B)+\operatorname{tg}C=$$
$$=-\operatorname{tg}C+\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C$$

болно. Өөрөөр хэлбэл $\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C$ болж батлагдлаа.

(b) Кошийн тэнцэтгэл биш ёсоор

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C \geq 3\sqrt[3]{\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C}$$

(a) -г ашиглавал

$$\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C \geq 3\sqrt[3]{\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C}$$

$$(\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C)^{\frac{2}{3}} \geq 3 \Rightarrow \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C \geq 3\sqrt{3}$$

болно.

Тэмдэглэл: $A + B + C = m\pi$ ба $A, B, C \neq \frac{k\pi}{2}$ байх A, B, C өнцгүүдийн хувьд (a) тэнцэтгэл биелнэ. Энд $k, m \in \mathbb{Z}$ болно.

21. $\triangle ABC$ -ны хувьд $\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C + \operatorname{ctg} C \operatorname{ctg} A = 1$ гэж батал.

Эсрэгээр нь $xy + yz + zx = 1$ байх $x, y, z \in \mathbb{R}$ тоонуудын хувьд $\operatorname{ctg} A = x, \operatorname{ctg} B = y, \operatorname{ctg} C = z$ байх $\triangle ABC$ оршино гэж батал.

Бодолт: $\triangle ABC$ -ныг тэгш өнцөгт гурвалжин ба $\measuredangle A = 90°$ гэе. Тэгвэл $\operatorname{ctg} a = 0$ ба $B + C = 90°$ гэдгээс $\operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C = 1$ болно. Өөрөөр хэлбэл тэгш өнцөгт гурвалжны хувьд тэнцэтгэл батлагдлаа. Одоо тэгш өнцөгт биш гурвалжны хувьд баталъя. Өгөгдсөн тэнцэтгэлийг $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$ -гээр үржвэл

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$$

болно. Дээрх тэнцэтгэл үнэн болохыг бид баталсан билээ. (20-р бодлого)

22. $\triangle ABC$ -ны хувьд

$$\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} + 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = 1$$

болохыг батал. Эсрэгээр нь $x, y, z < 1$ байх эерэг бодит тоонуудын хувьд

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$$

чанарыг хангаж байвал $x = \sin \frac{A}{2}, y = \sin \frac{B}{2}, z = \sin \frac{C}{2}$ байх $\triangle ABC$ оршино гэж батал.

Бодолт: Хэрвээ бид өгөгдсөн хоёр дахь тэгшитгэлийн x-ийг квадрат тэгшитгэлийн шийд олох аргаар олвол

$$x = \frac{-2yz + \sqrt{4y^2z^2 - 4(y^2 + z^2 - 1)}}{2} = -yz + \sqrt{(1 - y^2)(1 - z^2)}$$

болно. Бид $y = \sin u, z = \sin v, 0° < u, v < 90°$ орлуулга хийвэл

$$x = -\sin u \sin v + \cos u \cos v = \cos(u + v)$$

болно.

23. $\triangle ABC$-ны хувьд батал.

(a)
$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$$

(b)
$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\ge\frac{3}{4}$$

(c)
$$\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\le\frac{9}{4}$$

(d)
$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

(e)
$$\csc\frac{A}{2}+\csc\frac{B}{2}+\csc\frac{C}{2}\ge 6$$

Бодолт:

(a) Бодлого 8 дээр бид

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

болохыг баталсан.

Кошийн тэнцэтгэл бишийг ашиглавал

$$(a+b)(b+c)(c+a)\ge(2\sqrt{ab})(2\sqrt{bc})(2\sqrt{ca})=8abc$$

болно. Үүнийг орлуулвал

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$$

болно.

(b) (a) хэсгийн тэнцэтгэлийг бодлого 22 дээрх

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=1$$

тэнцэтгэлтэй ашиглавал

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\ge 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

болж батлагдлаа.

(c) (b) хэсгийн тэнцэтгэл бишд $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ орлуулга хийвэл

$$\begin{aligned} 3 - \cos^2\frac{A}{2} - \cos^2\frac{B}{2} - \cos^2\frac{C}{2} &\geq \frac{3}{4} \\ \cos^2\frac{A}{2} - \cos^2\frac{B}{2} - \cos^2\frac{C}{2} &\leq 3 - \frac{3}{4} \\ \cos^2\frac{A}{2} - \cos^2\frac{B}{2} - \cos^2\frac{C}{2} &\leq \frac{9}{4} \end{aligned}$$

болно.

(d) (d) хэсгийн тэнцэтгэл бишд кошийн тэнцэтгэл биш ашиглавал

$$\begin{aligned} \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} \geq 3\sqrt[3]{\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}} \\ 3\sqrt[3]{\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}} \leq \frac{9}{4} \\ \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

болно.

(e) 8-р бодлогыг ашиглавал $\csc\frac{A}{2} \geq \frac{b+c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{a}$ болно. Үүнтэй адилаар $\csc\frac{B}{2} \geq \frac{a}{b} + \frac{c}{b}$ ба $\csc\frac{C}{2} \geq \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ байна. Кошийн тэнцэтгэл биш ашиглавал

$$\begin{aligned} \csc\frac{A}{2} + \csc\frac{B}{2} + \csc\frac{C}{2} \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \geq \\ \geq 6\sqrt[6]{\frac{b}{a}\frac{c}{a}\frac{a}{b}\frac{c}{b}\frac{a}{c}\frac{b}{c}} = 6 \end{aligned}$$

болж батлагдав.

Тэмдэглэл: (a) -г өөр аргаар баталъя. Бодлогын нөхцлөөр $\sin\frac{A}{2}, \sin\frac{B}{2}, \sin\frac{C}{2}$ бүгд эерэг тоонууд. $t = \sqrt[3]{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$ гэе. Тэгвэл бид $t \leq \frac{1}{2}$ гэж батлахад хангалттай. Кошийн тэнцэтгэл бишээр

$$\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} \geq 3t^2$$

22-р бодлогод орлуулвал $3t^2 + 2t^3 \leq 1$ болно. Иймд

$$\begin{aligned} 2t^3 + 3t^2 - 1 &\leq 0 \\ (t+1)(2t^2 + t - 1) &\leq 0 \\ (t+1)^2(2t-1) &\leq 0 \end{aligned}$$

Эндээс харвал $t \leq \frac{1}{2}$ болж (a) батлагдлаа.

24. $\triangle ABC$ -ны хувьд

(a)

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C$$

(b)
$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4\cos A\cos B\cos C$$

(c)
$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A\cos B\cos C$$

(d)
$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C = 1$$

болохыг батал.

Эсрэгээр нь $0 < x, y, z < 1$ эерэг бодит тоонууд
$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$$
чанарыг хангаж байвал $x = \cos A, y = \cos B, z = \cos C$ байх хурц өнцөгт $\triangle ABC$ оршино гэж харуул.

Бодолт: $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$ ашиглавал (c) болон (d) -гийн баталгаа (b)-гээс хялбархан мөрдөн гарна. Иймд бид (a) болон (b) -гийн баталгааг харуулъя.

(a) Синусуудын нийлбэрийн томьёо болон $A + B + C = 180^\circ$ тэнцэтгэлийг ашиглавал
$$\begin{aligned}\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C &= 2\sin(A+B)\cos(A-B) + \sin 2C = \\ = 2\sin C\cos(A-B) + 2\sin C\cos C &= 2\sin C\,[\cos(A-B) - \cos(A+B)] = \\ &= 2\sin C\cdot[-2\sin A\sin(-B)] = 4\sin A\sin B\sin C\end{aligned}$$
болж батлагдлаа.

(b) Косинусуудын нийлбэрийн томьёо болон $A+B+C = 180^\circ$ тэнцэтгэлийг ашиглавал
$$\begin{aligned}\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C &= 2\cos(A+B)\cos(A-B) + \cos^2 C - 1 = \\ = -2\cos C\cos(A-B) + \cos^2 C - 1 &= -2\cos C(\cos(A-B) - \cos C) - 1 = \\ = -2\cos C(\cos(A-B) + \cos(A+B)) - 1 &= -4\cos A\cos B\cos C - 1\end{aligned}$$
болж батлагдлаа.

Тэмдэглэл: (d) -гийн сонирхолтой баталгааг харуулъя. Доорх систем тэгшитгэлийг авч үзье.
$$\begin{aligned}-x + (\cos B)y + (\cos C)z &= 0\\ (\cos B)x - y + (\cos A)z &= 0\\ (\cos C)x + (\cos A)y - z &= 0\end{aligned}$$

Тригонометрийн нийлбэр ялгаварын томъёог ашиглавал уг систем тэгшитгэлийн тэгээс ялгаатай шийд нь $(x, y, z) = (\sin A, \sin C, \sin B)$ болохыг хялбархан олж болно. Иймд уг системийн тодорхойлогч нь тэг болно. Өөрөөр хэлбэл
$$\begin{vmatrix} -1 & \cos B & \cos C \\ \cos B & -1 & \cos A \\ \cos C & \cos A & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2\cos A\cos B\cos C + \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 0$$

болж батлагдана.

25. $\triangle ABC$-ны хувьд

(a) $4R = \frac{abc}{[ABC]}$

(b) $2R^2 \sin A \sin B \sin C = [ABC]$

(c) $2R^2 \sin A \sin B \sin C = r(\sin A + \sin B + \sin C)$

(d) $r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

(e) $a \cos A + b \cos B + c \cos C = \frac{abc}{2R^2}$

Бодолт:

(a) Синусын өргөтгөсөн теоремоор

$$R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{abc}{2bc \sin A} = \frac{abc}{4[ABC]}$$

(b)

$$2R^2 \sin A \sin B \sin C = \frac{1}{2}(2R \sin A)(2R \sin B)(\sin C) = \frac{1}{2} ab \sin C = [ABC]$$

(c) $2R^2 \sin A \sin B \sin C$-г авч үзье.

$$2R^2 \sin A \sin B \sin C = [ABC] = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$$

болно. Синусын өргөтгөсөн теорем ашиглавал

$$2R^2 \sin A \sin B \sin C = rR(\sin A + \sin B + \sin C)$$

болно.

(d) Косинусын теоремоор

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

байна. Хагас өнцгийн теоремоор

$$\begin{aligned}
\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{2} = \frac{1}{2} - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4bc} = \frac{a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc)}{4bc} = \\
= \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc} = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc} = \\
= \frac{(2p-2b)(2p-2c)}{4bc} = \frac{(p-b)(p+b)}{bc}
\end{aligned}$$

болно. Энд $p = \frac{a+b+c}{2}$ болно. Өөрөөр хэлбэл

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p+b)}{bc}}$$

болно. Нөгөө 2 өнцөг дээр мөн адилаар томьёог олон үржвэрийг олвол

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}=\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{pabc}$$

болно. Героны томьёогоор

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{[ABC]^2}{pabc}$$

болох ба

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{[ABC]}{p}\frac{[ABC]}{abc}=r\cdot\frac{1}{4R}$$

болж батлагдлаа.

(e) Синусын өргөтгөсөн теоремоор $a\cos A=2R\sin A\cdot\cos A=R\sin 2A$ болно. Үүнтэй адилаар $b\cos B=R\sin 2B$ болох ба $c\cos C=R\sin 2C$ болно. (a) болон (b) хоёрыг ашиглавал

$$4R\sin A\sin B\sin C=\frac{abc}{2R^2}$$

болно. Иймд одоо бид

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$$

гэж батлахад хангалттай болно. Бид дээрх тэнцэтгэлийг 24-р бодлогоор батласан билээ.

26. $\triangle ABC$-ны хагас периметрийг p гээ. Тэгвэл

(a)

$$p=4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

(b)

$$p\le\frac{3\sqrt{3}}{2}R$$

болохыг батал.

Бодолт:

(a) Бид $p=\frac{[ABC]}{r}$ томъёог мэдэх билээ. Уг томьёонд 25-р бодлогын (b) болон (d)-г орлуулвал

$$p=\frac{R\sin A\sin B\sin C}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

болно. Давхар өнцгийн теорем ашиглавал

$$p=4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

болж батлагдлаа.

(b) 23-р бодлогын (d) хэсэг болон дээрх тэнцэтгэлийг ашиглан батлана.

27. $\triangle ABC$-ны хувьд

(a)
$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

(b)
$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

болохыг харуул.

Бодолт:

28. $\triangle ABC$-ны хувьд

(a)
$$\cos A\cos B\cos C \leq \frac{1}{8}$$

(b)
$$\sin A\sin B\sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

(c)
$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

(d)
$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \frac{3}{4}$$

(e)
$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}$$

(f)
$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -\frac{3}{2}$$

(g)
$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

болохыг батал.

Бодолт:

29. $x \neq \frac{k\pi}{6}, (k \in \mathbb{Z})$ бол

$$\frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

болохыг батал.

Бодолт: Гурван давхар өнцгийн томъёогоор

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} 3x = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{tg} x \cdot \frac{(\sqrt{3} - \operatorname{tg} x)(\sqrt{3} + \operatorname{tg} x)}{(1 - \sqrt{3}\operatorname{tg} x)(1 + \sqrt{3}\operatorname{tg} x)} = \\ = \frac{\sqrt{3} - \operatorname{tg} x}{1 + \sqrt{3}\operatorname{tg} x} \cdot \operatorname{tg} x \cdot \frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg} x}{1 - \sqrt{3}\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + x\right)\end{aligned}$$

болж батлагдлаа.

30. [AMC12P 2002]

$$(1 + \operatorname{tg} 1^\circ)(1 + \operatorname{tg} 2^\circ) \cdots (1 + \operatorname{tg} 45^\circ) = 2^n$$

байх n-г ол.

Бодолт 1:

$$\begin{aligned}1 + \operatorname{tg} k^\circ = 1 + \frac{\sin k^\circ}{\cos k^\circ} = \frac{\cos k^\circ + \sin k^\circ}{\cos k^\circ} = \\ = \frac{\sqrt{2\sin(45^\circ + k^\circ)}}{\cos k^\circ} = \frac{\sqrt{2}\cos(45^\circ - k^\circ)}{\cos k^\circ}\end{aligned}$$

Иймээс

$$(1 + \operatorname{tg} k^\circ)(1 + \operatorname{tg}(45^\circ - k^\circ)) = \frac{\sqrt{2}\cos(45^\circ - k^\circ)}{\cos k^\circ} \cdot \frac{\sqrt{2}\cos k^\circ}{\cos(45^\circ - k^\circ)} = 2$$

болох ба цаашилбал

$$\begin{aligned}(1 + \operatorname{tg} 1^\circ)(1 + \operatorname{tg} 2^\circ) \cdots (1 + \operatorname{tg} 45^\circ) = \\ (1 + \operatorname{tg} 1^\circ)(1 + \operatorname{tg} 44^\circ)(1 + \operatorname{tg} 2^\circ)(1 + \operatorname{tg} 43^\circ) \\ \cdots (1 + \operatorname{tg} 22^\circ)(1 + \operatorname{tg} 23^\circ)(1 + \operatorname{tg} 45^\circ) = 2^{23}\end{aligned}$$

Иймд $n = 23$ болно.

Бодолт 2:

$$\begin{aligned}(1 + \operatorname{tg} k^\circ)(1 + \operatorname{tg}(45^\circ - k^\circ)) = 1 + [\operatorname{tg} k^\circ + \operatorname{tg}(45^\circ - k^\circ)] + \operatorname{tg} k^\circ \operatorname{tg}(45^\circ - k^\circ) = \\ = 1 + \operatorname{tg} 45^\circ\, [1 - \operatorname{tg} k^\circ \operatorname{tg}(45^\circ - k^\circ)] + \operatorname{tg} k^\circ \operatorname{tg}(45^\circ - k^\circ) = 2\end{aligned}$$

болох ба

$$\begin{aligned}(1 + \operatorname{tg} 1^\circ)(1 + \operatorname{tg} 2^\circ) \cdots (1 + \operatorname{tg} 45^\circ) = \\ (1 + \operatorname{tg} 1^\circ)(1 + \operatorname{tg} 44^\circ)(1 + \operatorname{tg} 2^\circ)(1 + \operatorname{tg} 43^\circ) \\ \cdots (1 + \operatorname{tg} 22^\circ)(1 + \operatorname{tg} 23^\circ)(1 + \operatorname{tg} 45^\circ) = 2^{23}\end{aligned}$$

Иймд $n = 23$ болно.

31. [AIME 2003] Координатын хавтгайд $A = (0, 0); B = (b, 2)$ цэгүүд өгчээ. $ABCDEF$ зөв зургаан өнцөгтийн $\measuredangle FAB = 120°, AB \| DE, BC \| EF, CD \| FA$ байх ба оройнуудын y тэнхлэг дээрх координатын олонлог нь $0, 2, 4, 6, 8$ болно. Зургаан өнцөгтийн талбай $m\sqrt{n}$ бол $m + n$-г ол. Энд $m, n > 0$ ба n нь ямар ч анхны тооны квадратад хуваагдахгүй болно.

Тэмдэглэл:

32. Тооны машин дээрх урвууг олдог товчлуур эвдэрсэн гэж саная. Тэгвэл тригонометрийн $\sin, \cos, \mathrm{tg}, \arcsin, \arccos, \mathrm{arctg}$ товчлууруудыг ашиглан аливаа тооны урвууг олж болохыг харуул.

Бодолт: $0 < \theta < \pi/2$ өнцгийн хувьд $\arccos\sin\theta = \pi/2 - \theta$ ба $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\theta}$ байна. $\mathrm{tg}\,\theta$ функцийн утгын муж нь $E(\mathrm{tg}\,\theta)$: $[0, \inf[$ байх тул дурын $x > 0$ тооны хувьд

$$\mathrm{tg}\arccos\sin\mathrm{arctg}\,x = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\,x\right) = \frac{1}{x}$$

болно. Уг бодлогын өөр нэг хариу нь $\mathrm{tg}\arcsin\cos\mathrm{arctg}$ болно.

33. $\triangle ABC$ -ны хувьд $A - B = 120°$ ба $R = 8r$ бол C-г ол.

Бодолт: 25-р бодлогын (d)-г ашиглавал

$$2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{16}$$

болох ба синусуудын нийлбэрийн томъёогоор

$$\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right)\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{16}$$

болно. $A - B = 120°$ болохыг тооцвол

$$\left(\frac{1}{2} - \sin\frac{C}{2}\right)\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{16}$$
$$\left(\frac{1}{4} - \sin\frac{C}{2}\right)^2 = 0$$

болно. Эндээс үзвэл $\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{4}$ болох ба $\cos C = 1 - 2\sin^2\frac{C}{2} = \frac{7}{8}$ болно.

34. $\triangle ABC$ -ны хувьд

$$\frac{a-b}{a+b} = \mathrm{tg}\,\frac{A-B}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{C}{2}$$

батал.

Бодолт: Синусын теорем болон синусуудын ялгаварын томъёог хэрэглэвэл

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \frac{2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}} =$$
$$= \mathrm{tg}\,\frac{A-B}{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{A+B}{2} = \mathrm{tg}\,\frac{A-B}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{C}{2}$$

болно.

35. $\triangle ABC$-ны хувьд $\frac{a}{b} = 2+\sqrt{3}$ ба $C = 60°$ бол A болон B өнцгийн хэмжээг ол.

Бодолт: Өмнөх бодлогын үр дүнг ашиглавал

$$\frac{\frac{a}{b}-1}{\frac{a}{b}+1} = \operatorname{tg}\frac{A-B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

болно. Өөрөөр хэлбэл

$$\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3} = \operatorname{tg}\frac{A-B}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}$$

гэдгээс $\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = 1$ болно. Иймд $A-B = 90°$ болох ба $A+B = 180°-C = 120°$ тул $A = 105°$ ба $B = 15°$ болно.

36. a, b, c нь -1 болон 1-ээс ялгаатай бодит тоонууд ба $a+b+c = abc$ бол

$$\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2} = \frac{4abc}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}$$

болохыг батал.

Бодолт: Бид 20-р бодлогын **Тэмдэглэл**-ийг эргэн харья. $A+B+C = m\pi$ ба $A, B, C \neq \frac{k\pi}{2}$ байх A, B, C өнцгүүдийн хувьд

$$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C = \operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C$$

гэсэн тэнцэтгэл биелнэ. Энд $m, k \in \mathbb{Z}$ болно.

$a = \operatorname{tg}x, b = \operatorname{tg}y, c = \operatorname{tg}z$ гэе. Тэгвэл бодлогын $a+b+c = abc$ нөхцлөөс $\operatorname{tg}(x+y+z) = 0$ болно. Эндээс давхар өнцгийн тангенсийн томьёогоор

$$\operatorname{tg}(2x+2y+2z) = \frac{2\operatorname{tg}(x+y+z)}{1-\operatorname{tg}^2(x+y+z)} = 0$$

болох тул

$$\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}2y+\operatorname{tg}2z = \operatorname{tg}2x\operatorname{tg}2y\operatorname{tg}2z$$

болно. Давхар өнцгийн тангенсийн томьёогоор задалж бичвэл

$$\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}+\frac{2\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}^2y}+\frac{2\operatorname{tg}z}{1-\operatorname{tg}^2z} = \frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}\cdot\frac{2\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}^2y}\cdot\frac{2\operatorname{tg}z}{1-\operatorname{tg}^2z}$$

болох ба a, b, c -г орлуулвал

$$\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2} = \frac{4abc}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}$$

болно.

37. $\triangle ABC$ гурвалжин адил хажуут байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь

$$a\cos B+b\cos C+c\cos A = \frac{a+b+c}{2}$$

болохыг батал.

Бодолт: Синусын өргөтгөсөн теоремоор $a = 2R\sin A, b = 2R\sin B, c = 2R\sin C$ байна. Тэгвэл дээрх тэнцэтгэл

$$2\sin A\cos B + 2\sin B\cos C + 2\sin C\cos A = \sin A + \sin B + \sin C$$
$$\sin(A+B) + \sin(A-B) + \sin(B+C) + \sin(B-C) + \sin(C+A) + \sin(C-A) = \sin A + \sin B + \sin C$$

болно. Энд $A + B + C = 180^\circ$ гэдгээс $\sin(A+B) = \sin C$, $\sin(B+C) = \sin A$, $\sin(C+A) = \sin B$ болох тул

$$\sin(A-B) + \sin(B-C) + \sin(C-A) = 0$$

болно. 15-р бодлогын үр дүнг ашиглавал

$$4\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2} = 0$$

болно. Эндээс $\triangle ABC$ адил хажуут гурвалжин байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь

$$a\cos B + b\cos C + c\cos A = \frac{a+b+c}{2}$$

болох нь батлагдлаа.

38. $a = \frac{2\pi}{1999}$ бол дараах илэрхийллийн утгыг тооцоол.

$$\cos a\cos 2a\cos 3a\cdots\cos 999a$$

Бодолт: Бидний олох илэрхийллийн утгыг P гээд $Q = \sin a\sin 2a\sin 3a\cdots\sin 999a$ гэе. Тэгвэл

$$\begin{aligned}
2^999PQ = (2\sin a\cos a)(2\sin 2a\cos 2a)\cdots(2\sin 999a\cos 999a) = \\
= \sin 2a\sin 4a\sin 6a\cdots\sin 1998a = \\
= (\sin 2a\sin 4a\sin 6a\cdots\sin 998a)\,[-\sin(2\pi - 1000a)]\cdot[-\sin(2\pi - 1002a)]\cdot \\
\cdot[-\sin(2\pi - 1004a)]\cdots[-\sin(2\pi - 1998a)] = \\
= \sin 2a\sin 4a\cdots\sin 998a\sin 999a\sin 997a\cdots\sin a = Q
\end{aligned}$$

$Q \neq 0$ гэдэг нь ойлгомжтой тул $P = \frac{1}{2^999}$ болно.

39. $\alpha, \beta \neq \frac{k\pi}{2}$ ба $k \in \mathbb{Z}$ бол

$$\frac{\sec^4\alpha}{\operatorname{tg}^2\beta} + \frac{\sec^4\beta}{\operatorname{tg}^2\alpha}$$

илэрхийллийн хамгийн бага утгыг ол.

Бодолт: $a = \operatorname{tg}^\alpha, b = \operatorname{tg}^2\alpha$ гэе. Тэгвэл $a, b > 0$ тоонуудын хувьд

$$\frac{(a+1)^2}{b} + \frac{(b+1)^2}{a}$$

илэрхийллийн хамгийн бага утгыг олоход хангалттай болно.

$$\frac{(a+1)^2}{b}+\frac{(b+1)^2}{a}=\frac{a^2+2a+1}{b}+\frac{b^2+2b+1}{a}=$$
$$=\left(\frac{a^2}{b}+\frac{1}{b}+\frac{b^2}{a}+\frac{1}{a}\right)+2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$$

болно. Кошийн тэнцэтгэл бишээр

$$\left(\frac{a^2}{b}+\frac{1}{b}+\frac{b^2}{a}+\frac{1}{a}\right)+2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\geq 4\sqrt[4]{\frac{a^2}{b}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{b^2}{a}\cdot\frac{1}{a}}+4\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=8$$

болно. Дээрх тэнцэтгэл бишийн тэнцэх нөхцөл нь $a=b=1$ болно. Өөрөөр хэлбэл $\alpha=\pm45^\circ+k\cdot180^\circ$, $\beta=\pm45^\circ+k\cdot180^\circ$, $k\in\mathbb{Z}$ үед өгөгдсөн илэрхийлэл хамгийн бага утгаа буюу 8 гэсэн утга авна.

40. $0<x<\frac{\pi}{2}$ бол

$$\frac{(\sin x)^{2y}}{(\cos x)^{y^2/2}}+\frac{(\cos x)^{2y}}{(\sin)^{y^2/2}}=\sin 2x$$

тэгшитгэлийг хангах бүх (x,y) хос шийдийг ол.

Бодолт: Кошийн тэнцэтгэл бишээр

$$\frac{(\sin x)^{2y}}{(\cos x)^{y^2/2}}+\frac{(\cos x)^{2y}}{(\sin)^{y^2/2}}\geq 2(\sin x\cos x)^{y-y^2/4}$$

гэдгээс

$$2\sin x\cos x=\sin 2x\geq 2(\sin x\cos x)^{y-y^2/4}$$

болно. $\sin x\cos x<1$ учир $1\leq y-y^2/4\Rightarrow(1-y/2)^2\leq 0$ болно. Дээрх тэнцэтгэл бишүүдийн тэнцэх нөхцлийг авч үзвэл $y=2$ ба $\sin x=\cos x$ болох тул өгөгдсөн тэгшитгэлийн цор ганц хос шийд нь $(x,y)=\left(\frac{\pi}{4},2\right)$ болно.

41. $\cos 1^\circ$ иррационал тоо болохыг батал.

Бодолт: Эсрэгээр нь $\cos 1^\circ$ рационал тоо гэе. Тэгвэл дурын $n\geq 1$ тооны хувьд

$$\cos(n^\circ+1^\circ)+\cos(n^\circ-1^\circ)=2\cos n^\circ\cos 1^\circ$$

тэнцэтгэл биелэх тул математик индукцын зарчим ёсоор $\cos 2^\circ$, $\cos 3^\circ\cdots$ тоонууд рационал тоо болно. Гэвч $\cos 30^\circ$ иррационал тоо болохыг бид мэдэх тул зөрчилд хүрнэ. Иймд $\cos 1^\circ$ рационал тоо биш болох нь батлагдлаа.

42. [USAMO 2002 proposal by Cecil Rousseau] Хэрвээ $x_1^2+x_2^2=y_1^2+y_2^2=c^2$ бол

$$S=(1-x_1)(1-y_1)+(1-x_2)(1-y_2)$$

илэрхийллийн хамгийн их утгыг ол.

Бодолт: x_1,x_2 хоёрыг P цэгийн координатууд гэвэл бодлогын нөхцлөөс P цэг координатын эх дээр төвтэй c радиустай тойрог дээр оршино. Иймд бид

$x_1 = c\cos\theta$, $x_2 = c\sin\theta$ гэж илэрхийлж болно. Үүнтэй адилаар $y_1 = c\cos\phi$, $y_2 = c\sin\phi$ болно. Тэгвэл

$$\begin{aligned} S = 2 - c(\cos\theta + \sin\theta + \cos\phi + \sin\phi) + c^2(\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi) = \\ = 2 - \sqrt{2}c\,[\sin(\theta + \pi/4) + \sin(\phi + \pi/4)] + c^2\cos(\theta - \phi) \leq \\ \leq 2 + 2\sqrt{2}c + c^2 = (\sqrt{2} + c)^2 \end{aligned}$$

болно. Тэнцэх нөхцөл нь $\theta = \phi = 5\pi/4$. Өөрөөр хэлбэл $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = \frac{-c\sqrt{2}}{2}$ үед өгөгдсөн илэрхийллийн утга хамгийн их буюу $S = (\sqrt{2}+c)^2$ болно.

43. Дурын $0 < a, b < \frac{\pi}{2}$ тоонуудын хувьд

$$\frac{\sin^3 a}{\sin b} + \frac{\cos^3 a}{\cos b} \geq \sec(a - b)$$

тэнцэтгэл бишийг батал.

Бодолт: Тэнцэтгэл бишийн хоёр талыг $\sin a \sin b + \cos a \cos b = \cos(a - b)$ тэнцэтгэлээр үржвэл

$$\left(\frac{\sin^3 a}{\sin b} + \frac{\cos^3 a}{\cos b}\right)(\sin a \sin b + \cos a \cos b) \geq 1$$

болно. Тэнцэтгэл бишийн зүүн талын хаалтыг задалж кошийн тэнцэтгэл биш ашиглавал

$$\begin{aligned} \sin^4 a + \frac{\cos^3 a \sin a \sin b}{\cos b} + \frac{\sin^3 a \cos a \cos b}{\sin b} + \cos^4 a \geq \\ \geq \sin^4 a + 2\sqrt{\cos^4 a \sin^4 a} + \cos^4 = (\sin^2 a + \cos^2 a)^2 = 1 \end{aligned}$$

болж батлагдав.

44. Хэрэв $\sin\alpha\cos\beta = -\frac{1}{2}$ бол $\cos\alpha\sin\beta$-гийн боломжит бүх утгыг ол.

Бодолт: