Эхний ном

Зохиогчийн нэр

2016 он

Бүлэг 1

Оршил бодлогууд

1. Бодит x тооны хувьд $\sec x - \operatorname{tg} x = 2$ бол $\sec x + \operatorname{tg} x$-г ол.

Бодолт: $(\sec x + \operatorname{tg} x)(\sec x - \operatorname{tg} x)$ үржвэрийг авч үзье.

$$\begin{aligned}(\sec x + \operatorname{tg} x)(\sec x - \operatorname{tg} x) &= \sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x = \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 1\end{aligned}$$

Өөрөөр хэлбэл $\forall x \in D(f)$ хувьд $\sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 1$ болно. Иймд

$$\sec x + \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sec x - \operatorname{tg} x} = \frac{1}{2}$$

болно.

2. $0^\circ < \theta < 45^\circ$ бол

$$t_1 = (\operatorname{tg}\theta)^{\operatorname{tg}\theta}, \qquad t_2 = (\operatorname{tg}\theta)^{\operatorname{ctg}\theta},$$
$$t_3 = (\operatorname{ctg}\theta)^{\operatorname{tg}\theta}, \qquad t_4 = (\operatorname{ctg}\theta)^{\operatorname{ctg}\theta}$$

тоонуудыг буурах эрэмбээр эрэмбэл.

Бодолт: $\forall a > 1$ тооны хувьд $y = a^x$ функц өсөх функц ба $0 < a < 1$ үед уг функц буурах функц юм. $0^\circ < \theta < 45^\circ$ завсарт $\operatorname{ctg}\theta > 1 > \operatorname{tg}\theta > 0$ учир $t_4 > t_3$, $t_1 > t_2$ ба $t_3 > 1 > t_1$ болно. Өөрөөр хэлбэл $t_4 > t_3 > t_1 > t_2$ болно.

3. Тооцоол.

(a) $\sin\frac{\pi}{12}, \cos\frac{\pi}{12}, \operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$

(b) $\cos^4\frac{\pi}{24} - \sin^4\frac{\pi}{24}$

(c) $\cos 36^\circ - \cos 72^\circ$

(d) $\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$

Бодолт:

(a) Давхар өнцөг болон нийлбэр ялгаварын томъёог ашиглавал

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} = \\ = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \\ = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{12} = \frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}} = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = 2-\sqrt{3}$$

(b)

$$\cos^4\frac{\pi}{24} - \sin^4\frac{\pi}{24} = \left(\cos^2\frac{\pi}{24} + \sin^2\frac{\pi}{24}\right)\left(\cos^2\frac{\pi}{24} - \sin^2\frac{\pi}{24}\right) = 1\cdot\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

(c)

$$\cos 36^\circ - \cos 72^\circ = \frac{2\left(\cos 36^\circ - \cos 72^\circ\right)\left(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ\right)}{2\left(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ\right)} = \frac{2\cos^2 36^\circ - 2\cos^2 72^\circ}{2\left(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ\right)}$$

Давхар өнцгийн томьёо ашиглавал

$$\frac{2\cos^2 36^\circ - 2\cos^2 72^\circ}{2\left(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ\right)} = \frac{\cos 72^\circ + 1 - \cos 144^\circ - 1}{2\left(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ\right)} = \frac{\cos 72^\circ + \cos 36^\circ}{2\left(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ\right)} = \frac{1}{2}$$

Дээрх тэнцэтгэлийг геометрийн аргаар баталж болно. Үүний тулд оройн өнцөг $\measuredangle A = 36^\circ$ ба талууд нь $AB = AC$, $BC = 1$ байх адил хажуут гурвалжныг авч үзье. Уг гурвалжны $\angle B$ өнцгийн биссектрис AC талтай огтлолцох огтлолцлыг D гэвэл $BC = BD = AD = 1, AB = 2\cos 36^\circ$ ба $CD = 2\cos 72^\circ$ болохыг та бүхэн бие даан батлаарай. Үр дүн нь дээрх тэнцэтгэлийн геометр баталгаа юм.

(d)

$$8\sin 20^\circ\sin 10^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ = 8\sin 20^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ = \\ = 4\sin 40^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ = 2\sin 80^\circ\cos 80^\circ = \sin 160^\circ = \sin 20^\circ$$

Эндээс

$$\sin 10^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ = \frac{1}{8}$$

болно.

4. Илэрхийллийг хялбарчил.

$$\sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} - \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x}$$

Бодолт:

$$\sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} - \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x} = \sqrt{\sin^4 x + 4\left(1 - \sin^2 x\right)} - \sqrt{\cos^4 x + 4\left(1 - \cos^2 x\right)} =$$
$$= \sqrt{\left(2 - \sin^2 x\right)^2} - \sqrt{\left(2 - \cos^2 x\right)^2} = \left(2 - \sin^2 x\right) - \left(2 - \cos^2 x\right) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

5. Батал.
$$1 - \operatorname{ctg} 23^\circ = \frac{2}{1 - \operatorname{ctg} 22^\circ}$$

Бодолт 1:

$$\left(1 - \operatorname{ctg} 23^\circ\right)\left(1 - \operatorname{ctg} 22^\circ\right) = 2$$

болохыг баталья.

$$\left(1 - \operatorname{ctg} 23^\circ\right)\left(1 - \operatorname{ctg} 22^\circ\right) = \left(1 - \frac{\cos 23^\circ}{\sin 23^\circ}\right)\left(1 - \frac{\cos 22^\circ}{\sin 22^\circ}\right) = \frac{\sin 23^\circ - \cos 23^\circ}{\sin 23^\circ} \cdot \frac{\sin 22^\circ - \cos 22^\circ}{\sin 22^\circ} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}\sin\left(23^\circ - 45^\circ\right)\sqrt{2}\sin\left(22^\circ - 45^\circ\right)}{\sin 23^\circ \cdot \sin 22^\circ} = \frac{2\sin\left(-22^\circ\right)\sin\left(-23^\circ\right)}{\sin 23^\circ \sin 22^\circ} = \frac{2\sin 22^\circ \sin 23^\circ}{\sin 23^\circ \sin 22^\circ} = 2$$

Бодолт 2:
Котангенсийн өнцгүүдийн нийлбэрийн томьёогоор

$$\frac{\operatorname{ctg} 22^\circ \operatorname{ctg} 23^\circ - 1}{\operatorname{ctg} 22^\circ + \operatorname{ctg} 23^\circ} = \operatorname{ctg}\left(22^\circ + 23^\circ\right) = \operatorname{ctg} 45^\circ = 1$$

Эндээс $\operatorname{ctg} 22^\circ \operatorname{ctg} 23^\circ - 1 = \operatorname{ctg} 22^\circ + \operatorname{ctg} 23^\circ$ буюу

$$1 - \operatorname{ctg} 22^\circ - \operatorname{ctg} 23^\circ + \operatorname{ctg} 22^\circ \operatorname{ctg} 23^\circ = 2$$

болно. Өөрөөр хэлбэл

$$\left(1 - \operatorname{ctg} 23^\circ\right)\left(1 - \operatorname{ctg} 22^\circ\right) = 2$$

болно.

6.
$$\frac{\sqrt{3} - 1}{\sin x} + \frac{\sqrt{3} + 1}{\cos x} = 4\sqrt{2}$$

тэгшитгэлийн $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ завсар дахь бүх шийдийг ол.

Бодолт: Бодлого $3(a)$ дээр бид $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ ба $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ болохыг харсан. Эдгээрийг тэгшитгэлд орлуулвал

$$\frac{\frac{\sqrt{3}-1}{4}}{\sin x} + \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{4}}{\cos x} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\sin x} + \frac{\cos\frac{\pi}{12}}{\cos x} = 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sin\frac{\pi}{12}\cos x + \cos\frac{\pi}{12}\sin x = 2\sin x\cos x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{12} + x\right) = \sin 2x \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{12} + x = 2x \\ \frac{\pi}{12} + x = \pi - 2x\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{12} \\ x = \frac{11\pi}{36}\end{array}\right.$$

7. $x^2+y^2 \leq 100$ ба $\sin(x+y) \geq 0$ нөхцлүүдийг хангах (x, y) цэгүүдээс бүрдэх $\mathcal{R}$ дүрсийн талбайг ол.

Бодолт: $x^2+y^2 \leq 100$ тэнцэтгэл бишээр илэрхийлэгдэх дугуйг $\mathcal{C}$ гэе. $\sin(x+y)=0$ байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $x+y=k\pi$ (k нь бүхэл тоо) учир $\mathcal{C}$ дугуй $x+y=k\pi$ тэгшитгэлийг хангах параллел шулуунуудаар оготлогдох ба шулуунуудын хооронд $\sin(x+y)>0$ эсвэл $\sin(x+y)<0$ тэнцэтгэл бишүүдийг хангах (x, y) цэгүүдийн мужууд оршино. $\sin(-x-y)=-\sin(x+y)$ учир уг хоёр тэнцэтгэл бишүүдийг хангах цэгүүдийн мужууд нь координатын эхийн хувьд тэгш хэмтэй юм. Иймд бидний олох $\mathcal{R}$ дүрсийн талбай нь $\mathcal{C}$ дугуйн талбайн хагас буюу 50π болно.

8. $\triangle\ ABC$-ны хувьд $\sin\frac{A}{2} \leq \frac{a}{b+c}$ болохыг харуул.

Бодолт: Гурвалжны хувьд синусын өргөтгөсөн теорем ёсоор

$$\frac{a}{b+c}=\frac{\sin A}{\sin B+\sin C}$$

Синусуудын нийлбэрийн томьёо болон давхар өнцгийн томьёог ашиглавал

$$\frac{a}{b+c}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}$$

Энд $0 \leq |B-C| < 180^\circ \Rightarrow 0<\cos\frac{B-C}{2} \leq 1$ тул

$$\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}} \geq \sin\frac{A}{2} \Rightarrow \frac{a}{b+c} \geq \sin\frac{A}{2}$$

болно. Үүнтэй адилаар

$$\sin\frac{B}{2} \leq \frac{b}{c+a} \qquad \text{ба} \qquad \sin\frac{C}{2} \leq \frac{c}{a+b}$$

болно.

9. $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ завсрыг I гэе. $[-1,1]$ завсарт тодорхойлогдсон $f(\sin 2x)=\sin x+\cos x$ чанарыг хангах f функцийг ол. I завсарт $f\left(\tan^2 x\right)$ функцийг хялбарчил.

Бодолт:

$$[f(\sin 2x)]^2=(\sin x+\cos x)^2=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=1+\sin 2x$$

$x \in I$ байх үед $\sin 2x \in [-1,1]$ байна. $\sin 2x=t$ гэвэл $t \in [-1,1]$ ба $[f(t)]^2=1+t$ болно. Эндээс $f(t)=\sqrt{1+t}$ болно.

$-\frac{\pi}{4} \leq x \geq \frac{\pi}{4}$ үед $-1 \leq \operatorname{tg} x \geq 1x$ байх ба $0 \geq \operatorname{tg}^2 x \geq 1$ тул

$$f(\operatorname{tg}^2 x)=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}=\sqrt{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\sqrt{\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{1}{\cos x}=\sec x$$

болно.

10. $\forall x \in \mathbb{R}; \forall k \in \mathbb{N}$ үед

$$f_k(x) = \frac{1}{k}\left(\sin^k x + \cos^k x\right)$$

бол

$$f_4(x) - f_6(x) = \frac{1}{12}$$

болохыг батал.

Бодолт: Бид уг тэнцэтгэлийг $12f_4(x) - 12f_6(x) = 1$ гэж баталья.

$$12 \cdot \frac{1}{4}\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) - 12 \cdot \frac{1}{6}\left(\sin^6 x + \cos^6 x\right) = 3\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) - 2\left(\sin^6 x + \cos^6 x\right) =$$
$$= 3\left[\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x\right] - 2\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)\left(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x\right) =$$
$$= 3 - 6\sin^2 x\cos^2 x - 2\left[\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 3\sin^2 x\cos^2 x\right] = 3 - 2 = 1$$

11. [AIME 2004, Jonathan Kane] 15×36 хэмжээтэй $ABCD$ тэгш өнцөгтөд нэгж радиустай тойрог агуулагдана. Тэгвэл уг тойрог AC диагональтай огтлолцохгүй байх магадлалыг ол.

Тэмдэглэл: Тойрог бүхлээрээ тэгш өнцөгтөд агуулагдаж байхын тулд тойргийн төв 13×34 харьцаатай тэгш өнцөг дотор оршино. Иймд бидний олох ёстой магадлал тойргийн төвөөс AC диагональ хүртэлх зай 1-ээс их байх магадлалгыг олохтой адил юм. Энэхүү магадлал нь 13×34 тэгш өнцөгтийн сонгогдсон нэг цэгээс $\triangle ABC$, $\triangle CDA$ -ны тал бүр хүртэлх зай 1-ээс их байх магадлалтай тэнцүү юм. $|AB| = 36; |BC| = 15 \Rightarrow |AC| = 39$ болно. $\triangle ABC$ -ны дотор талд талуудаас нэгж зайтай байх шулуунуудыг татаж огтлолцлын цэгийг E, F, G гэе. Тэгвэл $\triangle ABC$, $\triangle EFG$ гурвалжнууд төсөөтэй гурвалжнууд байна. Иймд бидний олох магадлал

$$\frac{2 \cdot S_{\triangle EFG}}{13 \cdot 34} = \left(\frac{|EF|}{|AB|}\right)^2 \cdot \frac{2 \cdot S_{\triangle ABC}}{13 \cdot 34} = \left(\frac{|EF|}{|AB|}\right)^2 \cdot \frac{270}{221}$$

болно. E, F, G цэгүүд нь $\triangle ABC$-ны биссектрисүүд дээр орших ба биссектрисүүдийн огтлолцлын цэг буюу уг гурвалжинд багтсан тойргийн төвийг I гэж тэмдэглэе.

Бодолт 1:
E, F цэгүүдийн AB талд дээрх проекцийг нь харгалзан E_1, F_1 гэе. Тэгвэл $|BF_1| = |FF_1| = |EE_1| = 1$ болно. $\angle EAB = \theta$ гэвэл $\angle CAB = 2\theta$, $\sin 2\theta = \frac{5}{12}$, $\cos 2\theta = \frac{12}{13}$ болно. Иймд

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{1}{5}$$

болох ба $\frac{|EE_1|}{AE_1} = \operatorname{tg}\theta = \frac{1}{5} \Rightarrow |AE_1| = 5$ болно. Иймд $|EF| = |E_1F_1| = 30$ гэдгээс бидний олох магадлал $\frac{375}{442}$ болно.

Бодолт 2:
$A = (0, 0), B = (36, 0), C = (36, 15)$ гэе. E цэг $\angle CAB$ өнцгийн биссектрис

дээр орших учир

$$|\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AC} + |\overrightarrow{AC}|\overrightarrow{AB} = 36 \cdot [36, 15] + 39 \cdot [36, 0] = 36 \cdot 15 \cdot [5, 1]$$

вектортой параллел байна. Иймд AE хэрчмийн налуу нь $\frac{1}{5}$ болох ба $|EE_1| = 5$ болж өмнөх бодолттой адилаар магадлал нь $\frac{375}{442}$ болно.

Бодолт 3:
E, F, G цэгүүд нь $\triangle ABC$ -ны биссектрисүүд дээр орших тул I цэг нь $\triangle EFG$ -нд багтсан тойргийн төв болно. Иймд хэрэв $\triangle ABC$ -нд багтсан тойргийн радиусыг r гэвэл $\triangle EFG$ -нд багтсан тойргийн радиус $r-1$ болно. Төсөөтэй гурвалжнуудын чанар ёсоор бидний олох магадлал $\left(\frac{r-1}{r}\right)^2 \cdot \frac{270}{221}$ болно.

$$r(|AB|+|BC|+|CA|) = 2(S_{\triangle AIB}+S_{\triangle BIC}+S_{\triangle CIA}) = 2S_{\triangle ABC} = |AB| \cdot |BC|$$

учир $r = 6$ болно. Иймд бидний олох магадлал $\frac{375}{442}$ болно.

12. [AMC12, 1999] ABC гурвалжны хувьд

$$3\sin A + 4\cos B = 6 \qquad \text{ба} \qquad 4\sin B + 3\cos A = 1$$

бол C өнцгийн хэмжээг ол.

Бодолт: Өгөгдсөн хоёр тэгшитгэлийн квадратуудын нийлбэрийг олбол

$$24\,(\sin A\cos B + \cos A\sin B) = 12 \Rightarrow \sin(A+B) = \frac{1}{2}$$

$$\measuredangle C = 180^\circ - \measuredangle A - \measuredangle B \Rightarrow \sin C = \sin(A+B) \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\measuredangle C = 30^\circ\\ \measuredangle C = 150^\circ\end{array}\right.$$

болно. Гэвч $\measuredangle C = 150^\circ$ үед $\measuredangle A < 30^\circ \Rightarrow 3\sin A + 4\cos B < \frac{3}{2} + 4 < 6$ болж зөрчилдөнө. Иймд бодлогын хариу $\measuredangle C = 30^\circ$ болно.

13. $\forall a \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ хувьд

$$\operatorname{tg} 3a - \operatorname{tg} 2a - \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} 3a \operatorname{tg} 2a \operatorname{tg} a$$

болохыг батал.

Бодолт: Дээрх тэнцэтгэл дараах тэнцэтгэлтэй эквивалент юм.

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} 3a(1 - \operatorname{tg} 2a \operatorname{tg} a) &= \operatorname{tg} 2a + \operatorname{tg} a\\ \operatorname{tg} 3a &= \frac{\operatorname{tg} 2a + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} 2a \operatorname{tg} a}\\ \operatorname{tg} 3a &= \operatorname{tg}(2a + a)\end{aligned}$$

Тэмдэглэл: Ерөнхий тохиолдолд $a_1, a_2, a_3 \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ тоонуудын хувьд $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ бол $\operatorname{tg} a_1 + \operatorname{tg} a_2 + \operatorname{th} a_3 = \operatorname{tg} a_1 \operatorname{tg} a_2 \operatorname{tg} a_3$ тэнцэтгэл биелнэ. Үүний баталгаа 13 ба 20 дугаар бодлоготой төстэйгөөр батлагдах тул дасгал болгон бие даан хийж гүйцэтгээрэй.

14. $a, b, c, d \in [0, \pi]$ тоонууд

$$\sin a + 7\sin b = 4\,(\sin c + 2\sin d)$$
$$\cos a + 7\cos b = 4\,(\cos c + 2\cos d)$$

тэнцэтгэлүүдийг хангадаг бол

$$2\cos(a-d) = 7\cos(b-c)$$

болохыг батал.

Бодолт: Өгөгдсөн тэнцэтгэлүүдийг дараах хэлбэрт бичье.

$$\sin a - 8\sin d = 4\sin c - 7\sin b$$
$$\cos a + 7\cos b = 4\cos c - 7\cos b$$

Эдгээрийн квадратуудын нийлбэрийг эмхтгэвэл

$$1 + 64 - 16\,(\cos a\cos b + \sin a\sin b) = 16 + 49 - 56\,(\cos b\cos c + \sin b\sin c)$$
$$2\cos(a-d) = 7\cos(b-c)$$

15.

$$\sin(x-y) + \sin(y-z) + \sin(z-x)$$

илэрхийллийг нэг гишүүнтээр илэрхийл.

Бодолт: Синусуудын нийлбэрийн томьёогоор

$$\sin(x-y) + \sin(y-z) = 2\sin\frac{x-z}{2}\cos\frac{x+z-2y}{2}$$

Давхар өнцгийн томьёогоор

$$\sin(z-x) = 2\sin\frac{z-x}{2}\cos\frac{z-x}{2}$$

болно. Иймд

$$\sin(x-y)+\sin(y-z)+\sin(z-x) = 2\sin\frac{x-z}{2}\left[\cos\frac{x+z-2y}{2} - \cos\frac{z-x}{2}\right] =$$
$$= -4\sin\frac{x-z}{2}\sin\frac{z-y}{2}\sin\frac{x-y}{2} = -4\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{y-z}{2}\sin\frac{z-x}{2}$$

Тэмдэглэл: Ерөнхий тохиолдолд $a + b + c = 0$ байх $a, b, c \in \mathbb{R}$ тоонуудын хувьд

$$\sin a + \sin b + \sin c = -4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}$$

тэнцэтгэл биелнэ. Энэ бодлого нь $a = x - y;\quad b = y - z;\quad c = z - x$ байх тухайн тохиолдол юм.

16. Батал.

$$(4\cos^2 9^\circ - 3)(4\cos^2 27^\circ - 3) = \operatorname{tg} 9^\circ$$

Бодолт:

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \Rightarrow 4\cos^2 x - 3 = \frac{\cos 3x}{\cos x}, \forall x \neq (2k+1)\cdot 90^\circ$$

болно. Иймд

$$(4\cos^2 9^\circ - 3)(4\cos^2 27^\circ - 3) = \frac{\cos 27^\circ}{\cos 9^\circ}\cdot\frac{\cos 81^\circ}{\cos 27^\circ} = \frac{\cos 81^\circ}{\cos 9^\circ} = \frac{\sin 9^\circ}{\cos 9^\circ} = \operatorname{tg} 9^\circ$$

болно.

17. $a, b \geq 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$ байх бодит тоонуудын хувьд

$$\left(1+\frac{a}{\sin x}\right)\left(1+\frac{b}{\cos x}\right) \geq \left(1+\sqrt{2ab}\right)^2$$

болохыг батал.

Бодолт: Тэнцэтгэл бишийн хоёр талын хаалтуудыг задлан нийлбэр хэлбэрт бичвэл

$$1+\frac{a}{\sin x}+\frac{b}{\cos x}+\frac{ab}{\sin x\cos x} \geq 1+2ab+2\sqrt{2ab}$$

болно. Кошийн тэнцэтгэл бишээр

$$\frac{a}{\sin x}+\frac{b}{\cos x} \geq \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{\sin x\cos x}}$$

Давхар өнцгийн томьёогоор $\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x \leq \frac{1}{2}$ учир

$$\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{\sin x\cos x}} \geq 2\sqrt{2ab} \Rightarrow \frac{ab}{\sin x\cos x} \geq 2ab$$

болно. Сүүлийн 3 тэнцэтгэл бишийг ашиглавал

$$1+\frac{a}{\sin x}+\frac{b}{\cos x}+\frac{ab}{\sin x\cos x} \geq 1+2ab+2\sqrt{2ab}$$

болох нь батлагдана.

18. $\triangle ABC$ - ны хувьд $\sin A+\sin B+\sin C \leq 1$ бол $min\,(A+B, B+C, C+A) < 30^\circ$ гэж батал.

Бодолт: Бид $A \geq B \geq C$ гэе. Тэгвэл $B+C < 30^\circ$ гэж батлах шаардлагатай болно. Синусын теорем болон гурвалжны тэнцэтгэл бишийн ($b+c > a$) чанар ёсоор $\sin B+\sin C > \sin A$ гэдгээс $\sin A+\sin B+\sin C > 2\sin A$ болно. Өгөгдсөн нөхцлийг ашиглавал $2\sin A < 1$ буюу $\sin A < \frac{1}{2}$ болно. A өнцгийн хэмжээ гурвалжны бусад өнцгөөсөө их учир $A \geq \frac{A+B+C}{3} = 60^\circ$ болно. Иймд $A > 150^\circ$ учир $B+C < 30^\circ$ болох нь батлагдлаа.

19. ABC гурвалжны хувьд батал.

(a)

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 1$$

(b)

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\leq\frac{\sqrt{3}}{9}$$

Бодолт:

(a) Тангенсуудын нийлбэрийн томьёогоор

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}\left(1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)$$

$A+B+C=180°$ тул $\frac{A+B}{2}=90°-\frac{C}{2}\Rightarrow\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$ болно. Иймд

$$\begin{aligned}&\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\\=&\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\left(1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)=\\&=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}=1\end{aligned}$$

болж батлагдлаа.

(b) Кошийн тэнцэтгэл биш ёсоор

$$\begin{aligned}1=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\geq\\\geq3\sqrt[3]{\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)^2}\end{aligned}$$

Эндээс

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\leq\frac{\sqrt{3}}{9}$$

болох нь батлагдана.

Тэмдэглэл: (a) -ийн эквивалент хэлбэр нь

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$$

юм.

20. Хурц өнцөгт $\triangle ABC$ -ны хувьд

(a) $\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C$

(b) $\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C\geq3\sqrt{3}$

болохыг батал.

Бодолт:

(a) Тангенсуудын нийлбэрийн томьёо ашиглавал

$$\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C=\operatorname{tg}(A+B)(1-\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B)+\operatorname{tg} C=\operatorname{tg}(180^\circ-C)(1-\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B)+\operatorname{tg} C=$$
$$=-\operatorname{tg} C+\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C+\operatorname{tg} C=\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C$$

болно. Өөрөөр хэлбэл $\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C=\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C$ болж батлагдлаа.

(b) Кошийн тэнцэтгэл биш ёсоор

$$\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C\geq 3\sqrt[3]{\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C}$$

(a) -г ашиглавал

$$\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C\geq 3\sqrt[3]{\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C}$$
$$(\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C)^{\frac{2}{3}}\geq 3\Rightarrow \operatorname{tg} A\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C\geq 3\sqrt{3}$$

болно.

Тэмдэглэл: $A+B+C=m\pi$ ба $A,B,C\neq\frac{k\pi}{2}$ байх A,B,C өнцгүүдийн хувьд (a) тэнцэтгэл биелнэ. Энд $k,m\in\mathbb{Z}$ болно.

21. $\triangle ABC$ -ны хувьд $\operatorname{ctg} A\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} B\operatorname{ctg} C+\operatorname{ctg} C\operatorname{ctg} A=1$ гэж батал.

Эсрэгээр нь $xy+yz+zx=1$ байх $x,y,z\in\mathbb{R}$ тоонуудын хувьд $\operatorname{ctg} A=x,\operatorname{ctg} B=y,\operatorname{ctg} C=z$ байх $\triangle ABC$ оршино гэж батал.

Бодолт: $\triangle ABC$ -ныг тэгш өнцөгт гурвалжин ба $\measuredangle A=90^\circ$ гэе. Тэгвэл $\operatorname{ctg} a=0$ ба $B+C=90^\circ$ гэдгээс $\operatorname{ctg} B\operatorname{ctg} C=1$ болно. Өөрөөр хэлбэл тэгш өнцөгт гурвалжны хувьд тэнцэтгэл батлагдлаа. Одоо тэгш өнцөгт биш гурвалжны хувьд баталъя. Өгөгдсөн тэнцэтгэлийг $\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C$ -гээр үржвэл

$$\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C=\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C$$

болно. Дээрх тэнцэтгэл үнэн болохыг бид баталсан билээ. (20-р бодлого)

22. $\triangle ABC$ -ны хувьд

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=1$$

болохыг батал. Эсрэгээр нь $x,y,z<1$ байх эерэг бодит тоонуудын хувьд

$$x^2+y^2+z^2+2xyz=1$$

чанарыг хангаж байвал $x=\sin\frac{A}{2},y=\sin\frac{B}{2},z=\sin\frac{C}{2}$ байх $\triangle ABC$ оршино гэж батал.

Бодолт: Хэрвээ бид өгөгдсөн хоёр дахь тэгшитгэлийн x-ийг квадрат тэгшитгэлийн шийд олох аргаар олвол

$$x=\frac{-2yz+\sqrt{4y^2z^2-4(y^2+z^2-1)}}{2}=-yz+\sqrt{(1-y^2)(1-z^2)}$$

болно. Бид $y = \sin u, z = \sin v, 0^\circ < u, v < 90^\circ$ орлуулга хийвэл

$$x = -\sin u \sin v + \cos u \cos v = \cos(u+v)$$

болно.

23. $\triangle ABC$-ны хувьд батал.

(a)
$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$$

(b)
$$\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} \geq \frac{3}{4}$$

(c)
$$\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} \leq \frac{9}{4}$$

(d)
$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

(e)
$$\csc\frac{A}{2} + \csc\frac{B}{2} + \csc\frac{C}{2} \geq 6$$

Бодолт:

(a) Бодлого 8 дээр бид

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

болохыг баталсан.

Кошийн тэнцэтгэл бишийг ашиглавал

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq (2\sqrt{ab})(2\sqrt{bc})(2\sqrt{ca}) = 8abc$$

болно. Үүнийг орлуулвал

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$$

болно.

(b) (a) хэсгийн тэнцэтгэлийг бодлого 22 дээрх

$$\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 1$$

тэнцэтгэлтэй ашиглавал

$$\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

болж батлагдлаа.

(c) (b) хэсгийн тэнцэтгэл бишд $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ орлуулга хийвэл

$$\begin{aligned} 3 - \cos^2\frac{A}{2} - \cos^2\frac{B}{2} - \cos^2\frac{C}{2} &\geq \frac{3}{4} \\ \cos^2\frac{A}{2} - \cos^2\frac{B}{2} - \cos^2\frac{C}{2} &\leq 3 - \frac{3}{4} \\ \cos^2\frac{A}{2} - \cos^2\frac{B}{2} - \cos^2\frac{C}{2} &\leq \frac{9}{4} \end{aligned}$$

болно.

(d) (d) хэсгийн тэнцэтгэл бишд кошийн тэнцэтгэл биш ашиглавал

$$\begin{aligned} \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} \geq 3\sqrt[3]{\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}} \\ 3\sqrt[3]{\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}} \leq \frac{9}{4} \\ \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

болно.

(e) 8-р бодлогыг ашиглавал $\csc\frac{A}{2} \geq \frac{b+c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{a}$ болно. Үүнтэй адилаар $\csc\frac{B}{2} \geq \frac{a}{b} + \frac{c}{b}$ ба $\csc\frac{C}{2} \geq \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ байна. Кошийн тэнцэтгэл биш ашиглавал

$$\begin{aligned} \csc\frac{A}{2} + \csc\frac{B}{2} + \csc\frac{C}{2} \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \geq \\ \geq 6\sqrt[6]{\frac{b}{a}\frac{c}{a}\frac{a}{b}\frac{c}{b}\frac{a}{c}\frac{b}{c}} = 6 \end{aligned}$$

болж батлагдав.

Тэмдэглэл: (a) -г өөр аргаар баталъя. Бодлогын нөхцлөөр $\sin\frac{A}{2}, \sin\frac{B}{2}, \sin\frac{C}{2}$ бүгд эерэг тоонууд. $t = \sqrt[3]{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$ гэе. Тэгвэл бид $t \leq \frac{1}{2}$ гэж батлахад хангалттай. Кошийн тэнцэтгэл бишээр

$$\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} \geq 3t^2$$

22-р бодлогод орлуулвал $3t^2 + 2t^3 \leq 1$ болно. Иймд

$$\begin{aligned} 2t^3 + 3t^2 - 1 &\leq 0 \\ (t+1)(2t^2 + t - 1) &\leq 0 \\ (t+1)^2(2t-1) &\leq 0 \end{aligned}$$

Эндээс харвал $t \leq \frac{1}{2}$ болж (a) батлагдлаа.

24. $\triangle ABC$ -ны хувьд

(a)

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A \sin B \sin C$$

(b)
$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4\cos A \cos B \cos C$$

(c)
$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A \cos B \cos C$$

(d)
$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C = 1$$

болохыг батал.

Эсрэгээр нь $0 < x, y, z < 1$ эерэг бодит тоонууд

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$$

чанарыг хангаж байвал $x = \cos A, y = \cos B, z = \cos C$ байх хурц өнцөгт $\triangle ABC$ оршино гэж харуул.

Бодолт: $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$ ашиглавал (c) болон (d) -гийн баталгаа (b)-гээс хялбархан мөрдөн гарна. Иймд бид (a) болон (b) -гийн баталгааг харуулъя.

(a) Синусуудын нийлбэрийн томьёо болон $A + B + C = 180^\circ$ тэнцэтгэлийг ашиглавал

$$\begin{aligned}\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 2\sin(A+B)\cos(A-B) + \sin 2C = \\ = 2\sin C\cos(A-B) + 2\sin C\cos C = 2\sin C\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right] = \\ = 2\sin C \cdot [-2\sin A \sin(-B)] = 4\sin A \sin B \sin C\end{aligned}$$

болж батлагдлаа.

(b) Косинусуудын нийлбэрийн томьёо болон $A+B+C = 180^\circ$ тэнцэтгэлийг ашиглавал

$$\begin{aligned}\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = 2\cos(A+B)\cos(A-B) + \cos^2 C - 1 = \\ = -2\cos C\cos(A-B) + \cos^2 C - 1 = -2\cos C(\cos(A-B) - \cos C) - 1 = \\ = -2\cos C(\cos(A-B) + \cos(A+B)) - 1 = -4\cos A\cos B\cos C - 1\end{aligned}$$

болж батлагдлаа.

Тэмдэглэл: (d) -гийн сонирхолтой баталгааг харуулъя. Доорх систем тэгшитгэлийг авч үзье.

$$\begin{aligned}-x + (\cos B)y + (\cos C)z = 0 \\ (\cos B)x - y + (\cos A)z = 0 \\ (\cos C)x + (\cos A)y - z = 0\end{aligned}$$

Тригонометрийн нийлбэр ялгаварын томъёог ашиглавал уг систем тэгшитгэлийн тэгээс ялгаатай шийд нь $(x, y, z) = (\sin A, \sin C, \sin B)$ болохыг хялбархан олж болно. Иймд уг системийн тодорхойлогч нь тэг болно. Өөрөөр хэлбэл

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos B & \cos C \\ \cos B & -1 & \cos A \\ \cos C & \cos A & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2\cos A\cos B\cos C + \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 0$$

болж батлагдана.

25. $\triangle ABC$-ны хувьд

(a) $4R = \frac{abc}{[ABC]}$

(b) $2R^2 \sin A \sin B \sin C = [ABC]$

(c) $2R^2 \sin A \sin B \sin C = r(\sin A + \sin B + \sin C)$

(d) $r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

(e) $a \cos A + b \cos B + c \cos C = \frac{abc}{2R^2}$

Бодолт:

(a) Синусын өргөтгөсөн теоремоор

$$R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{abc}{2bc \sin A} = \frac{abc}{4[ABC]}$$

(b)

$$2R^2 \sin A \sin B \sin C = \frac{1}{2}(2R \sin A)(2R \sin B)(\sin C) = \frac{1}{2}ab \sin C = [ABC]$$

(c) $2R^2 \sin A \sin B \sin C$-г авч үзье.

$$2R^2 \sin A \sin B \sin C = [ABC] = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$$

болно. Синусын өргөтгөсөн теорем ашиглавал

$$2R^2 \sin A \sin B \sin C = rR(\sin A + \sin B + \sin C)$$

болно.

(d) Косинусын теоремоор

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

байна. Хагас өнцгийн теоремоор

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{2} = \frac{1}{2} - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4bc} = \frac{a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc)}{4bc} = \\ = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc} = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc} = \\ = \frac{(2p-2b)(2p-2c)}{4bc} = \frac{(p-b)(p+b)}{bc} \end{aligned}$$

болно. Энд $p = \frac{a+b+c}{2}$ болно. Өөрөөр хэлбэл

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p+b)}{bc}}$$

болно. Нөгөө 2 өнцөг дээр мөн адилаар томьёог олон үржвэрийг олвол

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}=\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{pabc}$$

болно. Героны томьёогоор

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{[ABC]^2}{pabc}$$

болох ба

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{[ABC]}{p}\frac{[ABC]}{abc}=r\cdot\frac{1}{4R}$$

болж батлагдлаа.

(e) Синусын өргөтгөсөн теоремоор $a\cos A=2R\sin A\cdot\cos A=R\sin 2A$ болно. Үүнтэй адилаар $b\cos B=R\sin 2B$ болох ба $c\cos C=R\sin 2C$ болно. (a) болон (b) хоёрыг ашиглавал

$$4R\sin A\sin B\sin C=\frac{abc}{2R^2}$$

болно. Иймд одоо бид

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$$

гэж батлахад хангалттай болно. Бид дээрх тэнцэтгэлийг 24-р бодлогоор батласан билээ.

26. $\triangle ABC$-ны хагас периметрийг p гэе. Тэгвэл

(a)

$$p=4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

(b)

$$p\le\frac{3\sqrt{3}}{2}R$$

болохыг батал.

Бодолт:

(a) Бид $p=\frac{[ABC]}{r}$ томъёог мэдэх билээ. Уг томьёонд 25-р бодлогын (b) болон (d)-г орлуулвал

$$p=\frac{R\sin A\sin B\sin C}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

болно. Давхар өнцгийн теорем ашиглавал

$$p=4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

болж батлагдлаа.

(b) 23-р бодлогын (d) хэсэг болон дээрх тэнцэтгэлийг ашиглан батлана.

27. $\triangle ABC$-ны хувьд

(a)
$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

(b)
$$\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$$

болохыг харуул.

Бодолт:

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} = 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$1 - \cos C = 2\sin^2\frac{C}{2} = 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

эдгээрийг тэнцэтгэлдээ орлуулвал

$$\begin{aligned}
&\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\\
&\cos A + \cos B + \cos C - 1 = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\\
&2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A+B}{2} = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\\
&2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right] = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\\
&2\sin\frac{C}{2}\cdot 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}
\end{aligned}$$

болж (a) батлагдлаа.

25 дугаар бодлогын (c) -г ашиглавал

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$$

болно.

Гурвалжны багтаасан ба гурвалжинд багтсан тойргийн төвүүд болон радиусуудыг харгалзан O, I, R, r гэвэл эйлерийн теорем ёсоор $|OI|^2 = R^2 - 2Rr$ болно. $|OI|^2 \ge 0$ учир $\frac{r}{R} \le \frac{1}{2}$ болно. Үүнийг дээрх тэнцэтгэлд орлуулвал (b) батлагдана.

28. $\triangle ABC$-ны хувьд

(a)
$$\cos A\cos B\cos C \le \frac{1}{8}$$

(b)

$$\sin A \sin B \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

(c)

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

(d)

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \frac{3}{4}$$

(e)

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}$$

(f)

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -\frac{3}{2}$$

(g)

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

болохыг батал.

Бодолт: (a) -гийн хувьд $\triangle ABC$ нь мохоо өнцөгт гурвалжин байвал тэнцэтгэл бишийн зүүн гар тал сөрөг болох тул тэнцэтгэл биш биелнэ. $t = \sqrt[3]{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$ гэвэл $t \leq \frac{1}{2}$ гэж батлахад хангалттай болно. Кошийн тэнцэтгэл биш ёсоор

$$\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} \geq 3t^2$$

болж 22 дугаар бодлогын тэмдэглэлтэй адилаар батлагдана. (d) -г батлахад 24 дүгээр бодлогын (d)-г ашиглавал

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C \geq \frac{3}{4}$$

болно. Тригонометрийн үндсэн адилтгалаар (d) болон (e) тэнцэтгэл бишүүд нь эквивалент юм.

(e) тэнцэтгэл бишийн хувьд кошийн тэнцэтгэл бишээр

$$\frac{9}{4} \geq \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \geq 3\sqrt[3]{\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C}$$

$$\sin A \sin B \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

болж (b) батлагдана.

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0 \Rightarrow 3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$ болно. $a=\sin A, b=\sin B, c=\sin C$ гэвэл

$$3(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C) \geq (\sin A+\sin B+\sin C)^2$$

(e) -г орлуулвал

$$\frac{27}{8} \geq (\sin A+\sin B+\sin C)^2 \Rightarrow \sin A+\sin B+\sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

болж (c) батлагдлаа. (f) нь (e) болон $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ адилтгалыг ашиглан батлана. (g) тэнцэтгэл бишийг (b) тэнцэтгэл биш болон $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C$ адилтгалыг ашиглан баталнa. Сүүлийн тэнцэтгэл үнэн болохыг 25 дугаар бодлогоор харуулсан билээ.

29. $x \neq \frac{k\pi}{6}, (k \in \mathbb{Z})$ бол

$$\frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$$

болохыг батал.

Бодолт: Гурван давхар өнцгийн томъёогоор

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1-3\operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{tg} x \cdot \frac{(\sqrt{3}-\operatorname{tg} x)(\sqrt{3}+\operatorname{tg} x)}{(1-\sqrt{3}\operatorname{tg} x)(1+\sqrt{3}\operatorname{tg} x)} =$$
$$= \frac{\sqrt{3}-\operatorname{tg} x}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg} x}\cdot \operatorname{tg} x \cdot \frac{\sqrt{3}+\operatorname{tg} x}{1-\sqrt{3}\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\operatorname{tg} x\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$$

болж батлагдлаа.

30. [AMC12P 2002]

$$(1+\operatorname{tg} 1^\circ)(1+\operatorname{tg} 2^\circ)\cdots(1+\operatorname{tg} 45^\circ) = 2^n$$

байх n-г ол.

Бодолт 1:

$$1+\operatorname{tg} k^\circ = 1+\frac{\sin k^\circ}{\cos k^\circ} = \frac{\cos k^\circ+\sin k^\circ}{\cos k^\circ} =$$
$$= \frac{\sqrt{2\sin(45^\circ+k^\circ)}}{\cos k^\circ} = \frac{\sqrt{2}\cos(45^\circ-k^\circ)}{\cos k^\circ}$$

Иймээс

$$(1+\operatorname{tg} k^\circ)(1+\operatorname{tg}(45^\circ-k^\circ)) = \frac{\sqrt{2}\cos(45^\circ-k^\circ)}{\cos k^\circ}\cdot\frac{\sqrt{2}\cos k^\circ}{\cos(45^\circ-k^\circ)} = 2$$

болох ба цаашилбал

$$(1+\operatorname{tg} 1^\circ)(1+\operatorname{tg} 2^\circ)\cdots(1+\operatorname{tg} 45^\circ) =$$
$$(1+\operatorname{tg} 1^\circ)(1+\operatorname{tg} 44^\circ)(1+\operatorname{tg} 2^\circ)(1+\operatorname{tg} 43^\circ)$$
$$\cdots(1+\operatorname{tg} 22^\circ)(1+\operatorname{tg} 23^\circ)(1+\operatorname{tg} 45^\circ) = 2^{23}$$

Иймд $n = 23$ болно.

Бодолт 2:

$$(1 + \operatorname{tg} k^\circ)(1 + \operatorname{tg}(45^\circ - k^\circ)) = 1 + [\operatorname{tg} k^\circ + \operatorname{tg}(45^\circ - k^\circ)] + \operatorname{tg} k^\circ \operatorname{tg}(45^\circ - k^\circ) =$$
$$= 1 + \operatorname{tg} 45^\circ \, [1 - \operatorname{tg} k^\circ \operatorname{tg}(45^\circ - k^\circ)] + \operatorname{tg} k^\circ \operatorname{tg}(45^\circ - k^\circ) = 2$$

болох ба

$$(1 + \operatorname{tg} 1^\circ)(1 + \operatorname{tg} 2^\circ) \cdots (1 + \operatorname{tg} 45^\circ) =$$
$$(1 + \operatorname{tg} 1^\circ)(1 + \operatorname{tg} 44^\circ)(1 + \operatorname{tg} 2^\circ)(1 + \operatorname{tg} 43^\circ)$$
$$\cdots (1 + \operatorname{tg} 22^\circ)(1 + \operatorname{tg} 23^\circ)(1 + \operatorname{tg} 45^\circ) = 2^{23}$$

Иймд $n = 23$ болно.

31. [AIME 2003] Координатын хавтгайд $A = (0, 0); B = (b, 2)$ цэгүүд өгчээ. $ABCDEF$ зөв зургаан өнцөгтийн $\measuredangle FAB = 120^\circ, AB \| DE, BC \| EF, CD \| FA$ байх ба оройнуудын y тэнхлэг дээрх координатын олонлог нь $0, 2, 4, 6, 8$ болно. Зургаан өнцөгтийн талбай $m\sqrt{n}$ бол $m + n$-г ол. Энд $m, n > 0$ ба n нь ямар ч анхны тооны квадратад хуваагдахгүй болно.

Тэмдэглэл:

32. Тооны машин дээрх урвууг олдог товчлуур эвдэрсэн гэж саная. Тэгвэл тригонометрийн $\sin, \cos, \operatorname{tg}, \arcsin, \arccos, \operatorname{arctg}$ товчлууруудыг ашиглан аливаа тооны урвууг олж болохыг харуул.

Бодолт: $0 < \theta < \pi/2$ өнцгийн хувьд $\arccos \sin \theta = \pi/2 - \theta$ ба $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta}$ байна. $\operatorname{tg}\theta$ функцийн утгын муж нь $E(\operatorname{tg}\theta) : [0, \inf[$ байх тул дурын $x > 0$ тооны хувьд

$$\operatorname{tg} \arccos \sin \operatorname{arctg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = \frac{1}{x}$$

болно. Уг бодлогын өөр нэг хариу нь $\operatorname{tg} \arcsin \cos \operatorname{arctg}$ болно.

33. $\triangle ABC$ -ны хувьд $A - B = 120^\circ$ ба $R = 8r$ бол C-г ол.

Бодолт: 25-р бодлогын (d)-г ашиглавал

$$2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{1}{16}$$

болох ба синусуудын нийлбэрийн томъёогоор

$$\left(\cos \frac{A - B}{2} - \cos \frac{A + B}{2}\right) \sin \frac{C}{2} = \frac{1}{16}$$

болно. $A - B = 120^\circ$ болохыг тооцвол

$$\left(\frac{1}{2} - \sin \frac{C}{2}\right) \sin \frac{C}{2} = \frac{1}{16}$$
$$\left(\frac{1}{4} - \sin \frac{C}{2}\right)^2 = 0$$

болно. Эндээс үзвэл $\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{4}$ болох ба $\cos C=1-2\sin^2\frac{C}{2}=\frac{7}{8}$ болно.

34. $\triangle ABC$ -ны хувьд

$$\frac{a-b}{a+b}=\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

батал.

Бодолт: Синусын теорем болон синусуудын ялгаварын томъёог хэрэглэвэл

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}=\frac{2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}=$$
$$=\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}\operatorname{ctg}\frac{A+B}{2}=\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

болно.

35. $\triangle ABC$-ны хувьд $\frac{a}{b}=2+\sqrt{3}$ ба $C=60^\circ$ бол A болон B өнцгийн хэмжээг ол.

Бодолт: Өмнөх бодлогын үр дүнг ашиглавал

$$\frac{\frac{a}{b}-1}{\frac{a}{b}+1}=\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

болно. Өөрөөр хэлбэл

$$\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3}=\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}$$

гэдгээс $\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=1$ болно. Иймд $A-B=90^\circ$ болох ба $A+B=180^\circ-C=120^\circ$ тул $A=105^\circ$ ба $B=15^\circ$ болно.

36. a,b,c нь -1 болон 1-ээс ялгаатай бодит тоонууд ба $a+b+c=abc$ бол

$$\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}=\frac{4abc}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}$$

болохыг батал.

Бодолт: Бид 20-р бодлогын **Тэмдэглэл**-ийг эргэн харья. $A+B+C=m\pi$ ба $A,B,C\neq\frac{k\pi}{2}$ байх A,B,C өнцгүүдийн хувьд

$$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C$$

гэсэн тэнцэтгэл биелнэ. Энд $m,k\in\mathbb{Z}$ болно.

$a=\operatorname{tg}x, b=\operatorname{tg}y, c=\operatorname{tg}z$ гэе. Тэгвэл бодлогын $a+b+c=abc$ нөхцлөөс $\operatorname{tg}(x+y+z)=0$ болно. Эндээс давхар өнцгийн тангенсийн томьёогоор

$$\operatorname{tg}(2x+2y+2z)=\frac{2\operatorname{tg}(x+y+z)}{1-\operatorname{tg}^2(x+y+z)}=0$$

болох тул

$$\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}2y+\operatorname{tg}2z=\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}2y\operatorname{tg}2z$$

болно. Давхар өнцгийн тангенсийн томьёогоор задалж бичвэл

$$\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x}+\frac{2\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}^2 y}+\frac{2\operatorname{tg}z}{1-\operatorname{tg}^2 z}=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x}\cdot\frac{2\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}^2 y}\cdot\frac{2\operatorname{tg}z}{1-\operatorname{tg}^2 z}$$

болох ба a, b, c -г орлуулвал

$$\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}=\frac{4abc}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}$$

болно.

37. $\triangle ABC$ гурвалжин адил хажуут байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь

$$a\cos B+b\cos C+c\cos A=\frac{a+b+c}{2}$$

болохыг батал.

Бодолт: Синусын өргөтгөсөн теоремоор $a = 2R\sin A, b = 2R\sin B, c = 2R\sin C$ байна. Тэгвэл дээрх тэнцэтгэл

$$2\sin A\cos B+2\sin B\cos C+2\sin C\cos A=\sin A+\sin B+\sin C$$
$$\sin(A+B)+\sin(A-B)+\sin(B+C)+\sin(B-C)+\sin(C+A)+\sin(C-A)=\sin A+\sin B+\sin C$$

болно. Энд $A+B+C=180^\circ$ гэдгээс $\sin(A+B)=\sin C$, $\sin(B+C)=\sin A$, $\sin(C+A)=\sin B$ болох тул

$$\sin(A-B)+\sin(B-C)+\sin(C-A)=0$$

болно. 15-р бодлогын үр дүнг ашиглавал

$$4\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2}=0$$

болно. Эндээс $\triangle ABC$ адил хажуут гурвалжин байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь

$$a\cos B+b\cos C+c\cos A=\frac{a+b+c}{2}$$

болох нь батлагдлаа.

38. $a=\frac{2\pi}{1999}$ бол дараах илэрхийллийн утгыг тооцоол.

$$\cos a\cos 2a\cos 3a\cdots\cos 999a$$

Бодолт: Бидний олох илэрхийллийн утгыг P гээд $Q=\sin a\sin 2a\sin 3a\cdots\sin 999a$ гэе. Тэгвэл

$$\begin{aligned}2^999PQ=(2\sin a\cos a)(2\sin 2a\cos 2a)\cdots(2\sin 999a\cos 999a)=\\=\sin 2a\sin 4a\sin 6a\cdots\sin 1998a=\\=(\sin 2a\sin 4a\sin 6a\cdots\sin 998a)\left[-\sin(2\pi-1000a)\right]\cdot\left[-\sin(2\pi-1002a)\right]\cdot\\\cdot\left[-\sin(2\pi-1004a)\right]\cdots\left[-\sin(2\pi-1998a)\right]=\\=\sin 2a\sin 4a\cdots\sin 998a\sin 999a\sin 997a\cdots\sin a=Q\end{aligned}$$

$Q \neq 0$ гэдэг нь ойлгомжтой тул $P = \frac{1}{2^9 99}$ болно.

39. $\alpha, \beta \neq \frac{k\pi}{2}$ ба $k \in \mathbb{Z}$ бол

$$\frac{\sec^4 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \beta} + \frac{\sec^4 \beta}{\operatorname{tg}^2 \alpha}$$

илэрхийллийн хамгийн бага утгыг ол.

Бодолт: $a = \operatorname{tg}^{\alpha}, b = \operatorname{tg}^2 \alpha$ гэе. Тэгвэл $a, b > 0$ тоонуудын хувьд

$$\frac{(a+1)^2}{b} + \frac{(b+1)^2}{a}$$

илэрхийллийн хамгийн бага утгыг олоход хангалттай болно.

$$\frac{(a+1)^2}{b} + \frac{(b+1)^2}{a} = \frac{a^2+2a+1}{b} + \frac{b^2+2b+1}{a} =$$
$$= \left(\frac{a^2}{b} + \frac{1}{b} + \frac{b^2}{a} + \frac{1}{a}\right) + 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$$

болно. Кошийн тэнцэтгэл бишээр

$$\left(\frac{a^2}{b} + \frac{1}{b} + \frac{b^2}{a} + \frac{1}{a}\right) + 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 4\sqrt[4]{\frac{a^2}{b} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1}{a}} + 4\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 8$$

болно. Дээрх тэнцэтгэл бишийн тэнцэх нөхцөл нь $a = b = 1$ болно. Өөрөөр хэлбэл $\alpha = \pm 45^\circ + k \cdot 180^\circ$, $\beta = \pm 45^\circ + k \cdot 180^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$ үед өгөгдсөн илэрхийлэл хамгийн бага утгаа буюу 8 гэсэн утга авна.

40. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ бол

$$\frac{(\sin x)^{2y}}{(\cos x)^{y^2/2}} + \frac{(\cos x)^{2y}}{(\sin)^{y^2/2}} = \sin 2x$$

тэгшитгэлийг хангах бүх (x, y) хос шийдийг ол.

Бодолт: Кошийн тэнцэтгэл бишээр

$$\frac{(\sin x)^{2y}}{(\cos x)^{y^2/2}} + \frac{(\cos x)^{2y}}{(\sin)^{y^2/2}} \geq 2(\sin x \cos x)^{y - y^2/4}$$

гэдгээс

$$2 \sin x \cos x = \sin 2x \geq 2(\sin x \cos x)^{y - y^2/4}$$

болно. $\sin x \cos x < 1$ учир $1 \leq y - y^2/4 \Rightarrow (1 - y/2)^2 \leq 0$ болно. Дээрх тэнцэтгэл бишүүдийн тэнцэх нөхцлийг авч үзвэл $y = 2$ ба $\sin x = \cos x$ болох тул өгөгдсөн тэгшитгэлийн цор ганц хос шийд нь $(x, y) = \left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$ болно.

41. $\cos 1^\circ$ иррационал тоо болохыг батал.

Бодолт: Эсрэгээр нь $\cos 1^\circ$ рационал тоо гэе. Тэгвэл дурын $n \geq 1$ тооны хувьд

$$\cos(n^\circ + 1^\circ) + \cos(n^\circ - 1^\circ) = 2 \cos n^\circ \cos 1^\circ$$

тэнцэтгэл биелэх тул математик индукцын зарчим ёсоор $\cos 2^\circ$, $\cos 3^\circ \cdots$ тоонууд рационал тоо болно. Гэвч $\cos 30^\circ$ иррационал тоо болохыг бид мэдэх тул зөрчилд хүрнэ. Иймд $\cos 1^\circ$ рационал тоо биш болох нь батлагдлаа.

42. [USAMO 2002 proposal by Cecil Rousseau] Хэрвээ $x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 = c^2$ бол

$$S = (1 - x_1)(1 - y_1) + (1 - x_2)(1 - y_2)$$

илэрхийллийн хамгийн их утгыг ол.

Бодолт: x_1, x_2 хоёрыг P цэгийн координатууд гэвэл бодлогын нөхцлөөс P цэг координатын эх дээр төвтэй c радиустай тойрог дээр оршино. Иймд бид $x_1 = c\cos\theta$, $x_2 = c\sin\theta$ гэж илэрхийлж болно. Үүнтэй адилаар $y_1 = c\cos\phi$, $y_2 = c\sin\phi$ болно. Тэгвэл

$$\begin{aligned} S = 2 - c(\cos\theta + \sin\theta + \cos\phi + \sin\phi) + c^2(\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi) = \\ = 2 - \sqrt{2}c\,[\sin(\theta + \pi/4) + \sin(\phi + \pi/4)] + c^2\cos(\theta - \phi) \leq \\ \leq 2 + 2\sqrt{2}c + c^2 = (\sqrt{2} + c)^2 \end{aligned}$$

болно. Тэнцэх нөхцөл нь $\theta = \phi = 5\pi/4$. Өөрөөр хэлбэл $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = \frac{-c\sqrt{2}}{2}$ үед өгөгдсөн илэрхийллийн утга хамгийн их буюу $S = (\sqrt{2}+c)^2$ болно.

43. Дурын $0 < a, b < \frac{\pi}{2}$ тоонуудын хувьд

$$\frac{\sin^3 a}{\sin b} + \frac{\cos^3 a}{\cos b} \geq \sec(a - b)$$

тэнцэтгэл бишийг батал.

Бодолт: Тэнцэтгэл бишийн хоёр талыг $\sin a \sin b + \cos a \cos b = \cos(a - b)$ тэнцэтгэлээр үржвэл

$$\left(\frac{\sin^3 a}{\sin b} + \frac{\cos^3 a}{\cos b}\right)(\sin a \sin b + \cos a \cos b) \geq 1$$

болно. Тэнцэтгэл бишийн зүүн талын хаалтыг задалж кошийн тэнцэтгэл биш ашиглавал

$$\begin{aligned} \sin^4 a + \frac{\cos^3 a \sin a \sin b}{\cos b} + \frac{\sin^3 a \cos a \cos b}{\sin b} + \cos^4 a \geq \\ \geq \sin^4 a + 2\sqrt{\cos^4 a \sin^4 a} + \cos^4 = (\sin^2 a + \cos^2 a)^2 = 1 \end{aligned}$$

болж батлагдав.

44. Хэрэв $\sin\alpha\cos\beta = -\frac{1}{2}$ бол $\cos\alpha\sin\beta$-гийн утгын мужийг ол.

Бодолт:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2} + \cos\alpha\sin\beta$$

$-1 \leq \sin(\alpha + \beta) \leq 1$ байдаг тул $-\frac{1}{2} \leq \cos\alpha\sin\beta \leq \frac{3}{2}$ болно. Үүнтэй адилаар

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

болохыг тооцвол $-\frac{3}{2} \le \cos\alpha \sin\beta \le \frac{1}{2}$ болно. Дээрх үр дүнгүүдийг нэгтгэвэл

$$-\frac{1}{2} \le \cos\alpha \sin\beta \le \frac{1}{2}$$

болно. Гэвч $\cos\alpha\sin\beta$ -гийн бүх утга $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ завсарт оршино гэж харуулах шаардлагатай.

$$\begin{aligned}(\cos\alpha\sin\beta)^2 &= (1-\sin^2\alpha)(1-\cos^2\beta) = \\ &= 1-(\sin^2\alpha+\cos^2\beta)+\sin^2\alpha\cos^2\beta = \\ &= \frac{5}{4}-(\sin^2\alpha+\cos^2\beta) = \\ &= \frac{5}{4}-(\sin\alpha+\cos\beta)^2+2\sin\alpha\cos\beta = \\ &= \frac{1}{4}-(\sin\alpha+\cos\beta)^2\end{aligned}$$

$x=\sin\alpha, y=\cos\beta$ гэвэл $-1 \le x, y \le 1$ ба $xy = -\frac{1}{2}$ болно. x ба y нийлбэрийн утгын мужийг олъё. Хэрэв $s = x+y$ гэвэл x, y нь

$$u^2 - su - \frac{1}{2} = 0$$

квадрат тэгшитгэлийн язгуурууд болох ба $\{x,y\} = \left\{\frac{s+\sqrt{s^2+2}}{2}, \frac{s-\sqrt{s^2+2}}{2}\right\}$ болно. $\frac{s+\sqrt{s^2+2}}{2} \le 1$ нөхцлөөс $s \le \frac{1}{2}$ гэдэг нь илэрхий. Үүнтэй адил нөхцлийг шалгаснаар s- ийн утгын муж нь $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ болох тул $s^2 \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$ болно. Иймд $(\cos\alpha\sin\beta)^2 \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \Rightarrow \cos\alpha\sin\beta \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ болно.

45. a, b, c бодит тоонуудын хувьд

$$(ab+bc+ca-1)^2 \le (a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$$

болохыг батал.

Бодолт: $a = \operatorname{tg} x, b = \operatorname{tg} y, c = \operatorname{tg} z$ ба $-\frac{\pi}{2} < x, y, z < \frac{\pi}{2}$ гэе. Тэгвэл $a^2+1 = \sec^2 x, b^2+1 = \sec^2 y, c^2+1 = \sec^2 z$ болно. Батлах тэнцэтгэл бишийн хоёр талыг $\cos^2 x \cos^2 y \cos^2 z$ -ээр үржүүлвэл

$$[(ab+bc+ca-1)\cos x\cos y\cos z]^2 \le 1$$

болно.

$$\begin{aligned}(ab+bc)\cos x\cos y\cos z = \sin x\sin y\cos z + \sin y\sin z\cos x = \\ = \sin y\sin(x+z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(ca-1)\cos x\cos y\cos z = \sin z\sin x\cos y - \cos x\cos y\cos z = \\ = -\cos y\cos(x+z)\end{aligned}$$

гэдгийг орлуулвал

$$\begin{aligned}[(ab+bc+ca-1)\cos x\cos y\cos z]^2 = \\ = [\sin y\sin(x+z) - \cos y\cos(x+z)]^2 = \\ = \cos^2(x+y+z) \le 1\end{aligned}$$

болж батлагдлаа.

46.

$$(\sin x + a\cos x)(\sin x + b\cos x) \leq 1 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

болохыг батал.

Бодолт: Хэрвээ $\cos x = 0$ бол дээрх тэнцэтгэл биш $\sin^2 x \leq 1 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ болж биелэнэ. Иймд $\cos x \neq 0$ тохиолдлыг авч үзье. Тэнцэтгэл бишийн хоёр талыг $\cos^2 x$ -д хуваавал

$$(\operatorname{tg} x + a)(\operatorname{tg} x + b) \leq \left[1 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right] \sec^2 x$$

болно. $t = \operatorname{tg} x$ гэвэл $\sec^2 x = 1 + t^2$ болох ба дээрх тэнцэтгэл бишд орлуулвал

$$t^2 + (a+b)t + ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 t^2 + t^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + 1$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 t^2 + 1 - (a+b)t + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab \geq 0$$

$$\left(\frac{(a+b)t}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \geq 0$$

болж батлагдана.

47.

$$|\sin a_1| + |\sin a_2| + \cdots + |\sin a_n| + |\cos(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)| \geq 1$$

болохыг батал.

Бодолт: Математик индукцийн аргыг ашиглан баталъя. $n = 1$ үед

$$|\sin a_1| + |\cos a_1| \geq \sin^2 a_1 + \cos^2 a_1 = 1$$

учир тэнцэтгэл биш биелнэ.

$$|\sin a_1| + |\sin a_2| + \cdots + |\sin a_{n+1}| + |\cos(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1})| \geq 1$$

гэдгийг харуулахын тулд бид

$$|\sin a_{n+1}| + |\cos(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1})| \geq |\cos(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)|$$

гэж баталъя.

$s_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ гэвэл дээрх тэнцэтгэл биш $|\sin a_{n+1}| + |\cos s_{n+1}| \geq |\cos s_n|$ болно. Өнцгүүдийн ялгаварын косинусын томьёог ашиглавал

$$\begin{aligned} |\cos s_n| &= |\cos(s_{n+1} - a_{n+1})| = \\ &= |\cos s_{n+1}\cos a_{n+1} + \sin s_{n+1}\sin a_{n+1}| = \\ &= |\cos s_{n+1}\cos a_{n+1}| + |\sin s_{n+1}\sin a_{n+1}| \leq \\ &\leq |\cos s_{n+1}| + |\sin a_{n+1}| \end{aligned}$$

болж батлагдлаа.

48. [Russia 2003, by Nazar Agakhanov]

$$S = \{\sin\alpha, \sin 2\alpha, \sin 3\alpha\}$$
$$T = \{\cos\alpha, \cos 2\alpha, \cos 3\alpha\}$$

олонлогууд тэнцүү байх бүх боломжит α өнцгийг ол.

Бодолт: S, T олонлогууд тэнцүү олонлогууд учир элементүүдийн нийлбэр нь хоорондоо тэнцүү байна.

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha = \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha$$

тэнцүүгийн хоёр талын нийлбэр тус бүрийн нэг болон гуравдугаар нэмэгдэхүүнүүдэд синусуудын болон косинусуудын нийлбэрийн томьёог ашиглавал

$$2\sin 2\alpha\cos\alpha + \sin 2\alpha = 2\cos 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha$$

$$\sin 2\alpha(2\cos\alpha + 1) = \cos 2\alpha(2\cos\alpha + 1)$$

болно. Хэрэв $2\cos\alpha + 1 = 0$ бол $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ болох ба $\alpha = \pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ болно. Гэвч S болон T олонлогууд тэнцүү биш олонлогууд болох тул $2\cos\alpha + 1 \neq 0$ байна. Энэ үед $\sin 2\alpha = \cos 2\alpha \Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha = 1$ болно. Эндээс $\alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$ болно.

49.

50. [Canada 1998] ABC гурвалжны $\angle BAC = 40^\circ$ ба $\angle ABC = 60^\circ$ болно. D, E нь AC, AB дээр $\angle CBD = 40^\circ$, $\angle BCE = 70^\circ$ байхаар оршино. BD ба CE нь F цэгт огтлолцох бол $AF \perp BC$ болохыг батал.

Бодолт: Бодлогын нөхцлөөр $\angle ABD = 20^\circ, \angle BCA = 80^\circ, \angle ACE = 10^\circ$ болно. A цэгээс BC талруу татсан өндрийг AG гэе. Тэгвэл $\angle BAG = 90^\circ - \angle BCA = 10^\circ$ болно. Иймд

$$\frac{\sin\angle BAG \sin\angle ACE \sin\angle CBD}{\sin\angle CAG \sin\angle BCE \sin\angle ABD} = \frac{\sin 30^\circ \sin 10^\circ \sin 40^\circ}{\sin 10^\circ \sin 70^\circ \sin 20^\circ} = \frac{\frac{1}{2}(\sin 10^\circ)(2\sin 20^\circ\cos 20^\circ)}{\sin 10^\circ \cos 20^\circ \sin 20^\circ} = 1$$

болно. Чевийн теоремийн тригонометр хэлбэрээр $AG = BD = CE$ болно. Иймээс $F \in AG$ бөгөөд $AF \perp BC$ болно.

51. [IMO 1991] S нь $\triangle ABC$ -ны дотор орших цэг бол $\angle SAB$, $\angle SBC$, $\angle SCA$ өнцгүүдийн ядаж нэг нь 30° -аас ихгүй байна гэж харуул.

Бодолт 1:
$\alpha = \angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$ чанарыг хангах P цэгийг **(Брокерийн цэг)** авч үзье. S цэг PAB, PBC, PCA гурвалжнуудын дотор орших тул $\triangle PAB$, $\triangle PBC$, $\triangle PCA$ өнцгүүдийн ядаж нэг нь α өнцгөөс ихгүй байна. Иймд бид $\alpha \leq 30^\circ$ буюу $\sin\alpha \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \csc^2\alpha \geq 4$ гэж харуулахад хангалттай. 28 дугаар бодлогоор бид

$$\csc^2\alpha = \csc^2 A + \csc^2 B + \csc^2 C$$

болохыг харуулсан. Cauchy-Schwarz - ийн тэнцэтгэл бишийг ашиглавал

$$\frac{9}{4}\csc^2\alpha \geq (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)(\csc^2 A + \csc^2 B + \csc^2 C) \geq 9$$

гэдгээс $\csc^2 \geq 4$ болж батлагдав.

Бодолт 2:
S цэгээс гурвалжны талууд хүртэлх зайг харгалзан d_a, d_b, d_c, $x = \angle SAB, y = \angle SBC, z = \angle SCA$гэж тэмдэглэвэл

$$d_c = SA\sin x = SB\sin(B-y)$$
$$d_a = SB\sin y = SC\sin(C-z)$$
$$d_b = SC\sin z = SA\sin(A-x)$$

болно. Эдгээрийг хооронд нь үржүүлвэл

$$\sin x\sin y\sin z = \sin(A-x)\sin(B-y)\sin(C-z) \tag{1.1}$$

болно. Хэрвээ $x+y+z \leq \frac{\pi}{2}$ бол уг бодлого илэрхий. Иймд $x+y+z > \frac{\pi}{2}$ үед $(A-x)+(B-y)+(C-z) < \frac{\pi}{2}$) байна. $f(x) = \ln(\sin x)0 < x < \frac{\pi}{2}$ функцийн

хувьд хоёрдугаар зэргийн уламжлал нь $f''(x) = -\csc^2 x$ учир хотгор функц юм. **Jensen's inequality**-аар

$$\frac{1}{3}(\ln\sin(A-x) + \ln\sin(B-y) + \ln\sin(C-z)) \leq \ln\sin\frac{(A-x)+(B-y)+(C-z)}{3}$$

гэдгээс

$$\ln(\sin(A-x)\sin(B-y)\sin(C-z))^{\frac{1}{3}} \leq \ln\sin\frac{6}{\pi} = \ln\frac{1}{2}$$

буюу

$$\sin(A-x)\sin(B-y)\sin(C-z) \leq \frac{1}{8} \Rightarrow \sin x\sin y\sin z \leq \frac{1}{8}$$

болно. Иймд $\sin x, \sin y, \sin z$ -н ядаж нэг нь $\frac{1}{2}$-ээс бага байна.

Бодолт 3:
Өмнөх бодолтын **Jensen's inequality**-г ашигласанаас хойш үргэлжлүүлбэл (1.1) тэнцэтгэлийг

$$(\sin x\sin y\sin z)^2 = \sin x\sin(A-x)\sin y\sin(B-y)\sin z\sin(C-z)$$

хэлбэрээр бичиж болно. Синусуудын үржвэрийг нийлбэрт хувиргах болон давхар өнцгийн томъёогоор

$$2\sin x\sin(A-x) = \cos(A-2x) - \cos A \leq 1 - \cos A = 2\sin^2\frac{A}{2} \Rightarrow \sin x\sin(A-x) \leq \sin^2\frac{A}{2}$$

болно. Иймд 23 дугаар бодлогын (a) -аар

$$\sin x\sin y\sin z \leq \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$$

болж батлагдав.

52. $a = \frac{\pi}{7}$ бол

(a) $\sin^2 3a - \sin^2 a = \sin 2a \sin 3a$ гэж харуул.

(b) $\csc a = \csc 2a + \csc 4a$ гэж харуул.

(c) $\cos a - \cos 2a + \cos 3a$ тооцоол

(d) $\cos a$ нь $8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$ тэгшитгэлийн язгуур болохыг батал.

(e) $\cos a$-г иррационал гэж батал.

(f) $\operatorname{tg} a \operatorname{tg} 2a \operatorname{tg} 3a$ тооцоол.

(g) $\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{tg}^2 2a + \operatorname{tg}^2 3a$ тооцоол.

(h) $\operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg}^2 2a + \operatorname{tg}^2 2a \operatorname{tg}^2 3a + \operatorname{tg}^2 3a \operatorname{tg}^2 a$ тооцоол.

(i) $\operatorname{ctg}^2 a + \operatorname{ctg}^2 2a + \operatorname{ctg}^2 3a$ тооцоол.

Бодолт:

(a) Синусуудын нийлбэр, ялгаварыг үржвэр хэлбэрт оруулан $a = \frac{\pi}{7}$ тохиолдолд $\sin 4a = \sin 3a$ болохыг ашиглавал

$$\begin{aligned} \sin^2 3a - \sin^2 a = (\sin 3a + \sin a)(\sin 3a - \sin a) = \\ = (2\sin 2a \cos a)(2\sin a \cos 2a) = (2\sin 2a \cos 2a)(2\sin a \cos a) = \\ = \sin 4a \sin 2a = \sin 2a \sin 3a \end{aligned}$$

болж батлагдав.

(b)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin a} &= \frac{1}{\sin 2a} + \frac{1}{\sin 4a} \\ \frac{1}{\sin a} &= \frac{\sin 2a + \sin 4a}{\sin 2a \sin 4a} \\ \sin 2a \sin 4a &= \sin a(\sin 2a + \sin 4a) \end{aligned}$$

синусуудын нийлбэрийг үржвэр хэлбэрт оруулвал

$$2\sin a \cos a \sin 4a = \sin a(2\sin 3a \cos a)$$

$\sin 4a = \sin 3a$ тул

$$2\sin a \cos a \sin 4a = 2\sin a \cos a \sin 4a$$

батлагдлаа.

(c) Хариу нь $\frac{1}{2}$. Иймд $\cos 2a + \cos 4a + \cos 6a = -\frac{1}{2}$ гэж батлахад хангалттай. Энэ нь

$$t = \cos 2x + \cos 4x + \cdots + \cos 2nx = -\frac{1}{2}, x = \frac{\pi}{2n+1}$$

тэнцэтгэлийн $n = 3$ үеийн тухайн тохиолдол юм. $2\sin x \cos kx = \sin(k+1)x - \sin(k-1)x$ болохыг ашиглавал

$$\begin{aligned}2t\sin x = 2\sin x(\cos 2x + \cos 4x + \cdots + \cos 2nx) =\\ = [\sin 3x - \sin x] + [\sin 5x - \sin 3x] + \cdots + [\sin(2n+1) - \sin(2n-1)] =\\ = \sin(2n+1)x - \sin x = -\sin x\end{aligned}$$

болж батлагдлаа.

(d) $3a + 4a = \pi \Rightarrow \sin 3a = \sin 4a$ болно.

$$\begin{aligned}\sin a(3 - 4\sin^2 a) = 2\sin 2a \cos 2a = 4\sin a \cos a \cos 2a\\ 3 - 4(1 - \cos^2 a) = 4\cos a(2\cos^2 a - 1)\end{aligned}$$

Иимээс

$$8\cos^3 a - 4\cos^2 a - 4\cos a + 1 = 0 \tag{1.2}$$

болно. $u = 2\cos a$ -г куб тэгшитгэлийн язгуур гэвэл

$$u^3 - u^2 - 2u + 1 = 0$$

болно. Гауссын леммээр дээрх куб тэгшитгэлийн $-1, 1$ гэсэн рационал шийдүүдтэй байх боломжтой. Гэвч эдгээр нь язгуур биш учир энэ тэгшитгэлд рационал язгуур байхгүй. Иймд $\cos a$ иррационал тоо учир (e) батлагдлаа.

(f) $3a + 4a = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} 3a + \operatorname{tg} 4a = 0$ болно. Өнцгүүдийн нийлбэрийн тангенсийн томъёогоор

$$\frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} 2a}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} 2a} + \frac{2\operatorname{tg} 2a}{1 - \operatorname{tg}^2 2a} = 0$$

$$\operatorname{tg} a + 3\operatorname{tg} 2a - 3\operatorname{tg} a \operatorname{tg}^2 2a - \operatorname{tg}^3 2a = 0$$

$\operatorname{tg} a = x$ гэвэл $\operatorname{tg} 2a = \frac{2\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^2 a} = \frac{2x}{1-x^2}$ болох ба

$$x + \frac{6x}{1-x^2} - \frac{12x^3}{(1-x^2)^2} - \frac{8x^3}{(1-x^2)^3} = 0$$

$$\begin{aligned}(1-x^2)^3 + 6(1-x^2)^2 - 12x^2(1-x^2) - 8x^2 = 0\\ x^6 - 21x^4 + 35x^2 - 7 = 0\end{aligned}$$

болно.