
**Física de los
Sistemas Complejos**

Modelo de Axelrod

Curso 2022-2023

*Luis Ardévol Mesa
José Manuel Rodríguez Manjón*

Profesor encargado
Guillermo Barrios Morales

Índice

1. Introducción	2
1.1. Modelo de Axelrod	2
1.2. Enfoques analíticos	3
2. Análisis del modelo original	5
2.1. Caso unidimensional	5
2.2. Caso bidimensional: distribución, transición de fase y nodos	10
3. Extensiones del modelo	17
3.1. Ruido o <i>drift</i>	18
3.2. Aprende a ser sociable	21
3.3. Parecidos razonables	23
3.4. Propaganda masiva	30
4. Conclusión	36

1. Introducción

1.1. Modelo de Axelrod

Los modelos matemáticos de dinámicas sociales empiezan a tener contribuciones desde la disciplina de la física sobre la década de 1990. En particular, las herramientas de la física estadística como campo de interés propio han constituido la punta de lanza de este tipo de teorías de interacción entre individuos. Junto con todo ello, aparece la *sociodinámica*, fruto de la unión entre los estudios sociales y la física de sistemas dinámicos no lineales. Habitualmente, se parte de una serie de variables y ecuaciones microscópicas tal que, en el paso a lo macroscópico, permita analizar las hipótesis sociales propuestas originalmente. Este método no será el seguido por el modelo de Axelrod, que se encuentra en un tipo de sistema basado entre la interacción de agentes. En este sistema, la interacción entre núcleos a los que se les asocia variables interactúan según unas reglas y procedimientos concretos, como son los espines de los átomos según el modelo de Ising.

El modelo centra sus tesis a favor de la relación vecino a vecino en la influencia social y la homofilia. El primero hace referencia a la tendencia de los individuos a parecerse más y más a medida que interactúan, mientras que el segundo recoge la predisposición de personas con rasgos similares a atraerse mutuamente (interactuando así más frecuentemente que aquellas que no lo son). Axelrod predice la persistencia de diversidad cultural bajo determinadas condiciones, contradiciendo a las tesis de sociólogos de la época.

Los individuos son nodos tales que poseen F variables asociadas o *traits* y que toman, cada uno, q valores posibles. Así, si por ejemplo $F = 2$ y $q = 3$, cada individuo tendrá dos *traits* que podrán tomar 3 valores distintos que, al tomarlos en el intervalo $[0, 1]$, podrán ser $\{0, 0.5, 1\}$. El conjunto de valores de los *traits* es lo que define a cultura del agente, por lo que hablamos de individuos culturalmente iguales si y solo si son iguales *trait* a *trait*. De cara a simular el modelo, se fijan tanto el número de individuos N , como F y q , pero los valores que toman los *traits* dentro de la gama de posibilidades que arroja el valor de q dado son aleatorios y siguen una distribución uniforme.

Cada individuo puede interactuar con uno de sus vecinos (elegido de forma aleatoria) en cada iteración; esta probabilidad de interacción viene dada exclusivamente por los *traits* que tengan ambos en común:

$$\omega_{i,j} = \frac{1}{F} \sum_{f=1}^F \delta_{\sigma_f(i), \sigma_f(j)} \quad (1)$$

Si dos agentes interactúan, el activo adquiere uno de los caracteres del vecino con el que interactuó como propio (un *trait* que no tengan en común). Si no interactúan, no hay ningún tipo de intercambio cultural.

En primera aproximación, cada individuo tiene como red de vecinos a los agentes más cercanos; en el caso bidimensional, los que tenga arriba, abajo y a los lados. No se consideran condiciones periódicas, por lo que si el agente activo se sitúa en los bordes de la matriz o en una esquina, tendrá por tanto un menor número de vecinos. Para una ampliación de la red de vecinos, Axelrod propone como criterio la proximidad, es decir, habría que considerar los individuos que tiene en sus diagonales, luego los segundos vecinos, etc.

El modelo de Axelrod ha tenido un desarrollo en torno a propuestas novedosas de interacción.

Como el propio autor comenta en el artículo original, el proceso no incluye dinámicas sociales a gran escala, como son la *mass media* u otros procesos macroscópicos como son los condicionantes de racismo u homofobia en la sociedad. Estos caracteres, en según qué sociedades, son difícilmente variables en la interacción uno a uno y por tanto no pueden considerarse en el modelo. Además, el aprendizaje o habilidad social de los individuos no se considera, pues en función de la habilidad comunicativa del individuo podría ser más o menos fácil establecer el solapamiento de los atributos sociales. Estos aspectos, en cierta medida, serán revisitados a lo largo del trabajo.

1.2. Enfoques analíticos

La sistemática habitual es hacer un análisis probabilístico gracias a la ecuación maestra y el flujo de probabilidad. En general, las soluciones analíticas son escasas, pues no permiten hacer muchas predicciones. Sin embargo, en la Referencia [1], podemos encontrar ciertas matizaciones. Se definen como *estados absorbentes* a aquellos imperturbables frente al paso del tiempo. En particular, son absorbentes el estado homogéneo, en el que para cualquier característica F de las posibles al comparar dos autómatas $i j$, ($\sigma_{i,F} = \sigma_{j,F}$), con lo que el estado no evoluciona. También es estacionario un estado si todas las F son distintas, y la probabilidad de interacción es nula. Todas las características o *features* de nuestro sistema varían entre $1 < \sigma_{i,F} < q$, de tal forma que q será una medida del desorden de nuestro sistema. Es esperable que para valores pequeños del parámetro el sistema sea prácticamente homogéneo, mientras que al aumentar éste, el desorden haga lo mismo. El modelo de Axelrod para un número máximo de características F sufre transiciones discontinuas desde un estado homogéneo hasta la multiculturalidad. Sin embargo, se incide en el artículo que la situación es diferente para $F = 2$, cuando las transiciones son continuas. Conforme el sistema evoluciona, aparecen diversas zonas o clusters homogéneos entre sí, diferenciando zonas con parámetros distintos. En este caso particular, conforme $q \rightarrow q_c^-$, la región homogénea más grande tiende a desaparecer. Según los autores, se define $q_c = 300$ en su estudio particular. Esta transición es mucho más rápida que para $F > 2$. Para explicarlo, en una red de L^2 como área, con $N(q, L)$ regiones en el sistema, se cumple en término medio que:

$$L^2 \sim N(q, L) \sum_{i=1}^{\infty} s P_L(s, q) \quad (2)$$

donde s define el tamaño de la una región. Podemos describir la función de probabilidad de encontrar una region de tamaño s donde los individuos sean similares como:

$$P_L(s, q) \sim s^{-\tau} H(s/s_{co}) + A(q) \delta_{s,s_{max}} \quad (3)$$

La función $H(x)$ es constante para $x \ll 1$ y decae rápidamente en caso contrario. $A(q) = 0$ para $q > q_c$. La variable s_0 define un factor constante tal que $\frac{s}{s_0} \ll 1$ en el estado estacionario. Para el caso de $\tau < 2$, la dependencia en s de la transición de fase es divergente, haciendo que efectivamente, $A(q)$ diverja para $q \rightarrow q_c^-$. Esta situación es típica de las transiciones de segundo orden, y concuerda con los resultados de $F = 2$ y $\tau < 2$ que indica la referencia [3], mientras que para sistemas con $F > 2$, las transiciones son discontinuas y vienen determinadas por un exponente $\tau > 2$. Tal y como se especifica en el artículo anterior, este exponente es universal para $F > 2$, siendo $\tau \approx 2,6$, mientras que toma un valor distinto $\tau \approx 1,6$ para $F = 2$. El parámetro s_{co} es libre, una especie de tamaño de referencia que no cambia la dinámica esencial del sistema.

Para el interés del trabajo, comprobaremos que la naturaleza de las transiciones se puede determinar conociendo los valores de τ . Para ello, haremos uso de la expresión (3) aproximada en el estado

estacionario:

$$P(s) \sim s^{-\tau} \quad (4)$$

Para un sistema infinito ($L \rightarrow \infty$) y $q < q_c$, el sistema permanece indefinidamente en un estado de refinamiento. Por lo tanto, también podemos definir la transición como la separación de dos regímenes dinámicos diferentes, con una rápida descomposición de una que dura un tiempo característico finito para $q > q_c$, y una descomposición lenta e infinitamente larga para $q < q_c$. Para $F = 2$, el comportamiento es cualitativamente el mismo. Cabe destacar que no se puede inferir ninguna señal evidente de la naturaleza diferente de la transición (continua o discontinua) a partir de la evolución dinámica.

El comportamiento dinámico del modelo se puede estudiar mediante un tratamiento de campo medio de un solo enlace. Sea $P_m(t)$ la probabilidad de que un enlace seleccionado al azar sea de tipo m en el tiempo t , es decir, m características a través del enlace son iguales y $F - m$ son diferentes. En $t = 0$, dado que las características tienen valores aleatorios no correlacionados, tenemos $P_m(0) = \binom{F}{m} \rho_0^m (1 - \rho_0)^{F-m}$ donde $\rho_0 = \text{Prob}[\sigma_{i,f} = \sigma_{j,f}]$ es la probabilidad de que dos sitios tengan la característica f con el mismo valor en $t = 0$.

En la aproximación de campo medio, P_m satisface la ecuación maestra.

$$\frac{dP_m}{dt} = \sum_{k=1}^{F-1} \frac{k}{F} P_k \left[\delta_{m,k+1} - \delta_{m,k} + (g-1) \sum_{k=0}^F (P_n W_{n,m}^{(k)} - P_m W_{n,m}^{(k)}) \right] \quad (5)$$

donde g es el número de coordinación de la red y $W_{n,m}^{(k)}$ es la probabilidad de transición de un enlace de tipo n a un enlace de tipo m debido a la actualización de un enlace vecino de tipo k . La obtención de $W_{n,m}^{(k)}$ puede obtenerse si pensamos en proceso de un paso (una interacción vecino a vecino). Consideremos, por ejemplo, un enlace de tipo $k = 1$ adyacente a un enlace de tipo $n = 0$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que las características en los sitios extremos del enlace de tipo 1 son $(0, 0, \dots, 0)$ y $(0, \sigma_2, \dots, \sigma_F)$, donde $\sigma_j \neq 0$. El último sitio es compartido también por el enlace de tipo 0, cuyo otro sitio tiene características $(\sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_F)$ con $\sigma'_1 \neq 0$ y $\sigma'_j \neq \sigma_j$ para $j > 1$. Cuando el enlace de tipo 1 se convierte en un enlace de tipo 2, $\sigma_2 \rightarrow 0$, el enlace de tipo 0 adyacente puede mantenerse como un enlace de tipo 0 si $\sigma'_2 \neq 0$, o puede convertirse en un enlace de tipo 1 si $\sigma'_2 = 0$. Si seguimos la aproximación de campo medio, introducimos la probabilidad $\rho = \text{Prob}(\sigma'_2 = 0)$. Entonces, $W^{(1)}_{0,0} = 1 - \rho$ y $W^{(1)}_{0,1} = \rho$.

Con un razonamiento similar, el artículo de Castellán, Marsili y Vespignani, muestra que los flujos probabilísticos resultan, para el caso simplificado de $F = 2$:

$$W_{0,0}^{(1)} = 1 - \rho, \quad W_{0,1}^{(1)} = \rho \quad (6)$$

$$W_{1,0}^{(1)} = \frac{1}{2}, \quad W_{1,1}^{(1)} = \frac{1-\rho}{2}, \quad W_{1,2}^{(1)} = \frac{\rho}{2} \quad (7)$$

$$W_{2,1}^{(1)} = 1 \quad (8)$$

Como se menciona en [1], para resolver el sistema anterior, necesitamos definir la dependencia temporal de ρ .

La única forma de seguir el razonamiento en un sentido más o menos analítico consiste en usar la

aproximación de campo medio. Definimos la probabilidad de interacción entre elementos con nodos entre ellos como: $\rho = \sum_k k P_k / F$. Esta definición, en esencia, viene a enunciar que entre cualquiera dos elementos existe un nexo, tal que la probabilidad de que cualquier característica tenga el mismo valor para los dos viene determinada por P_m [1]. La densidad n_a de nodos activos, donde hay interacción y solapamiento, sufre una discontinuidad conforme $q = q_c$, pasando de un valor finito en $q < q_c$ hasta ser nulo en $q > q_c$, representando la transición antes comentada. La clave de ciertas aproximaciones actuales consisten en encontrar funciones ρ que reproduzcan claramente los resultados conocidos según las simulaciones numéricas. Estas aproximaciones fuera del campo medio siguen siendo estudiadas, y su complejidad escapa del objetivo del trabajo.

En particular, veremos en la siguiente sección que puede hacerse un pequeño análisis analítico más allá de estas generalidades. Se hará para el caso particular de $F = 2$ en un caso unidimensional. Seguiremos los pasos indicados en [11]

2. Análisis del modelo original

En esta sección se estudiará la evolución del modelo de Axelrod variando el número de características F y el tamaño de la población N . Cada agente interacciona, a menos que se especifique lo contrario, con los cuatro más próximos, en dirección horizontal y vertical. Se distinguirán los casos unidimensional y bidimensional, con el fin de analizar diferencias sutiles pero importantes.

Las simulaciones para un mismo conjunto de parámetros se repiten varias veces (entre cuatro y diez dependiendo de la exigencia computacional del caso concreto), lo que permite obtener la media y un error aproximado de la simulación. En todas las figuras aquí mostradas, se grafica la media de todas las repeticiones y el intervalo en el que estas se han movido como el error de cada punto. Se observará en todas las gráficas que se presenten a lo largo del trabajo que en las fases monoculturales y multiculturales de la sociedad, es decir, antes y después de la transición de fase del sistema, los errores son prácticamente imperceptibles, mientras que para los valores de q próximos al valor crítico q_c , existe un gran error en el cómputo de la fracción de tamaño de la mayor región cultural en el estado “estacionario” de la sociedad, i.e., $\langle S_{max} \rangle / N$. Para el caso de las aportaciones propias, los errores se producen de forma más aleatoria, produciéndose de forma distinta, y por motivos distintos, en cada caso. Con todo esto descrito, se enfatiza que cada punto de cada gráfica será una sociedad con N, F y q fijos, simulada varias veces para obtener su variabilidad (error) debida a la estocasticidad del sistema en sus inicios.

2.1. Caso unidimensional

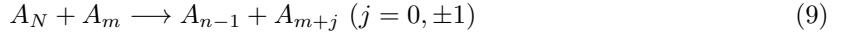
Este caso no es muy relevante desde el punto de vista físico; lo más relevante es la naturaleza las transiciones de fase.

Para empezar, veamos un análisis teórico del modelo unidimensional, presentado en la Referencia [11]. El análisis teórico hecho aquí no se repetirá para el caso bidimensional (englobando así las extensiones que se proponen para el modelo), debido a la complejidad analítica ya comentada en la introducción.

Para una red unidimensional como las anteriores, obtenemos el valor de cada característica inicialmente de forma aleatoria. Como sabemos, elegimos en cada simulación un parámetro máximo de valor

Q hasta el cual pueden tomar valores cada $\sigma_{i,f}$ ¹. Para este análisis, en el que se busca justificar el tipo de transición para estas *unidimensional lattices* estaremos interesados en los nodos *activos* y los nodos *fijos*, que denominaremos por $n_A(t)$ y $n_F(t)$. Como es esperable, un nodo activo es aquel que se da entre dos vecinos con un número $0 < k < F$ características distintas, susceptibles de interaccionar. Un nodo fijo no permite interacción, pues no tienen variables en común con el mismo valor. Aquellos nodos que no se encuentran en ninguna de estas descripciones se denominarán n_0 , conectando individuos idénticos.

Para obtener expresiones analíticas, en [11] se propone el estudio paso por paso de la interacción entre tres vecinos conectados consecutivamente a los que llamaremos (A), (B) y (C). Se define un nodo de orden k como aquel que uno dos individuos con k características diferentes. Por ejemplo, si entre (A) y (B) hay un nodo de tipo n , se tendrá que tras la interacción una variable de uno tomará el valor de esa variable en el otro individuo; en definitiva, se obtiene un nodo de tipo $n - 1$. Así, este efecto hará que el nodo de tipo m entre (B) y (C) se transforme en otro del tipo $m \pm 1$. Se puede representar la transformación, denominando al nodo de tipo k como A_k como:



La probabilidad de que ocurra la reacción (9) entre (A) y (B) es $R_n^{(1)} = (1 - n/F)(1 - \delta_{n,0})$. Si ocurre, una variable $\sigma_{B,f'}$ tomará el mismo valor que otra $\sigma_{A,f'}$. Para el caso de que $\sigma_{B,f}$ sea igual a $\sigma_{B,f'}$, el nodo sea ahora del tipo $m + 1$; la probabilidad de que esto ocurra es:

$$R_{m,+1}^{(2)} = \frac{F - m}{m} \quad (10)$$

En resumen, el enlace (B)-(C) dependerá de si $\sigma_{A,f'}$ es igual a $\sigma_{C,f'}$. La probabilidad de pasar a tener un nodo $m - 1$ es:

$$R_{m,-1}^{(2)} = \frac{m\lambda}{F} \quad (11)$$

Así, el *probability rate* o tendencia a que se dé la reacción (9) es equivalente a $R_n^{(1)} R_{m,j}^{(2)}$. En general, esta probabilidad de que $\sigma_{A,f'}$ y $\sigma_{C,f'}$ sean iguales, tal y como se enunciaba antes, denominada λ , puede aproximarse por campo medio:

$$\lambda_k = \sum_{i \neq k, j \neq k} \tilde{p}_A(i) \tilde{p}_C(j) \delta_{i,j} \quad (12)$$

donde se ha definido $\tilde{p}_A(i) = p(A)/\sum_{i \neq k} p(i)$ como la probabilidad de no tener un nodo k en (A). Para una distribución uniforme se cumple que $p(i) = 1/Q$.

Usando la ecuación maestra, para estas tasas de probabilidad, se puede obtener la siguiente ecuación diferencial para la densidad de nodos n_k de tipo k ($k = 0, \dots, F$):

$$\dot{n}_k = -R_k^{(1)} n_k + R_{k+1}^{(1)} n_{k+1} + \sum_{N=1}^{F-1} R_N^{(1)} n_N [-n_k(1 - R_{k,0}^{(2)}) + n_{k-1} R_{k-1,1}^{(2)} + n_{k+1} R^{(2)_{k+1,-1}}] \quad (13)$$

Las condiciones iniciales que se asumen junto a esta ecuación son:

$$n_k(t=0) = P_{eq}^{F-k} (1 - P_{eq}^{F-k})^k \binom{F}{k} \quad (14)$$

¹En el resto del trabajo, se usa q para denominar a Q . En esta sección particular se denota así para una verificación más clara y directa de lo expuesto en [11].

donde esta probabilidad equivalente, se sustituye por $P_{eq} = 1/Q$ si se trata de una distribución uniforme. Se puede simplificar la resolución de ecuaciones como (13) para el caso de $F = 2$ y conociendo que usando la distribución uniforme se tiene que $\lambda = 1/(1 - Q)$.

$$\dot{n}_1 = -\left[\frac{3}{4} + \frac{1}{4(Q-1)}\right]n_1^2 + \frac{2-Q}{2(Q-1)}n_1n_F \quad (15)$$

$$\dot{n}_F = \frac{1}{4}n_1^2 - \frac{1}{2(Q-1)}n_1n_F \quad (16)$$

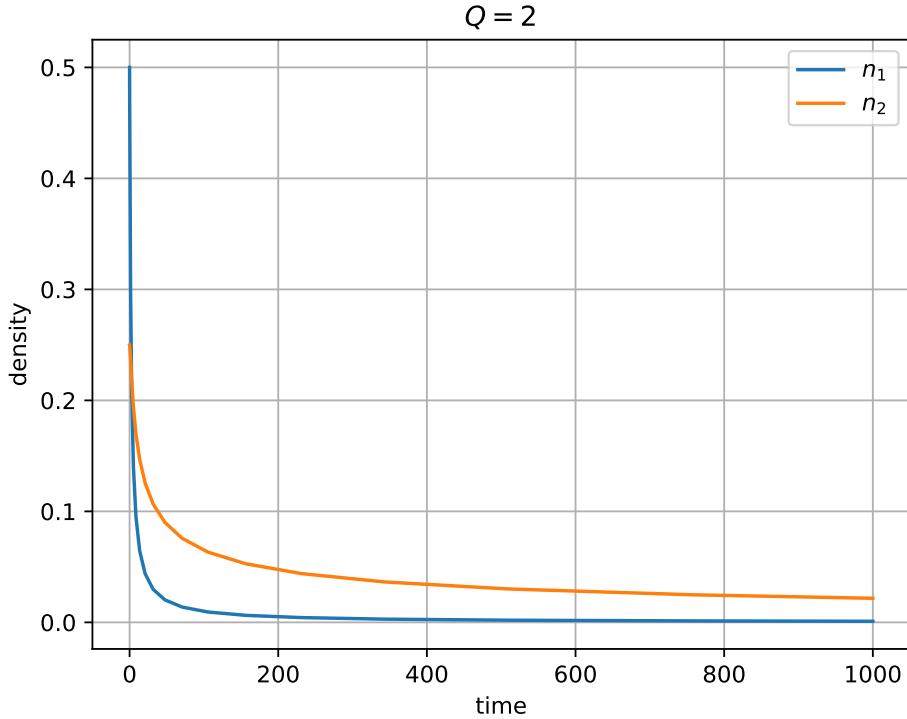


Figura I: Solución para las ecuaciones diferenciales en el caso $Q = 2$.

La solución analítica de las ecuaciones anteriores es:

$$n_1 = \frac{1}{2+t} \quad (17)$$

$$n_F = \frac{1}{(2+t)^{1/2}} - \frac{1}{2(2+t)} \quad (18)$$

En la Referencia mencionada en este desarrollo no se incluye la resolución de estas ecuaciones para $Q \neq 2$, por lo que se añaden a este desarrollo analítico una gráfica que muestra algunas soluciones.

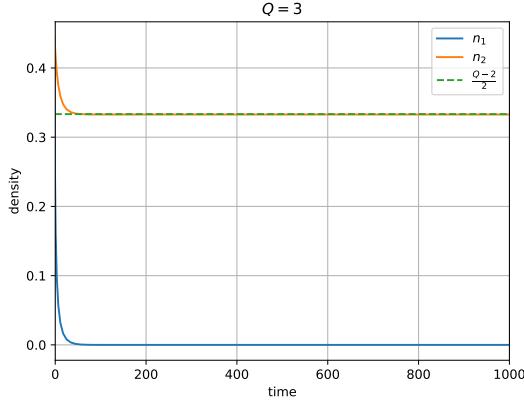


Figura II: Solución para las ecuaciones diferenciales en el caso $Q = 3$.

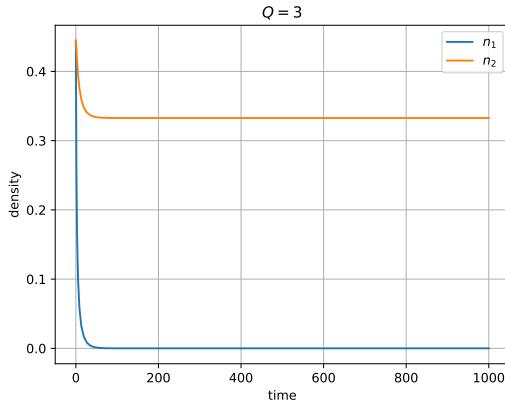


Figura III: Solución para las ecuaciones diferenciales en el caso $Q = 4$.

Se puede ver que ambas soluciones siempre estabilizan, para el caso de $Q = 2$ en prácticamente 0, haciendo que tengamos que tengamos, al final, nula cantidad de nodos tanto fijos como de tipo 1.

Para el caso de Q mayores, la tendencia hace que el número de nodos fijos sea cada vez mayor en la sociedad, con lo que cada vez surgen más 'barreras' o individuos que no interaccionan entre sí, formándose poco a poco las zonas culturales. En cualquier caso, la cantidad de nodos activos decréce continualemente, permitiendo afirmar que siempre, en el modelo original de Axelrod, es posible encontrar estados de *relajación* finales. Se confirma entonces la tendencia que se enuncia en la Referencia [11] e indica que:

$$n_F(t = \infty) = \frac{Q - 2}{Q} \quad (19)$$

Una vez revisado el análisis teórico del modelo unidimensional, que, como ya se comentó, es un caso particular que presenta mayor facilidad para su resolución, procede un análisis numérico del mismo tal y como se plantea en este apartado.

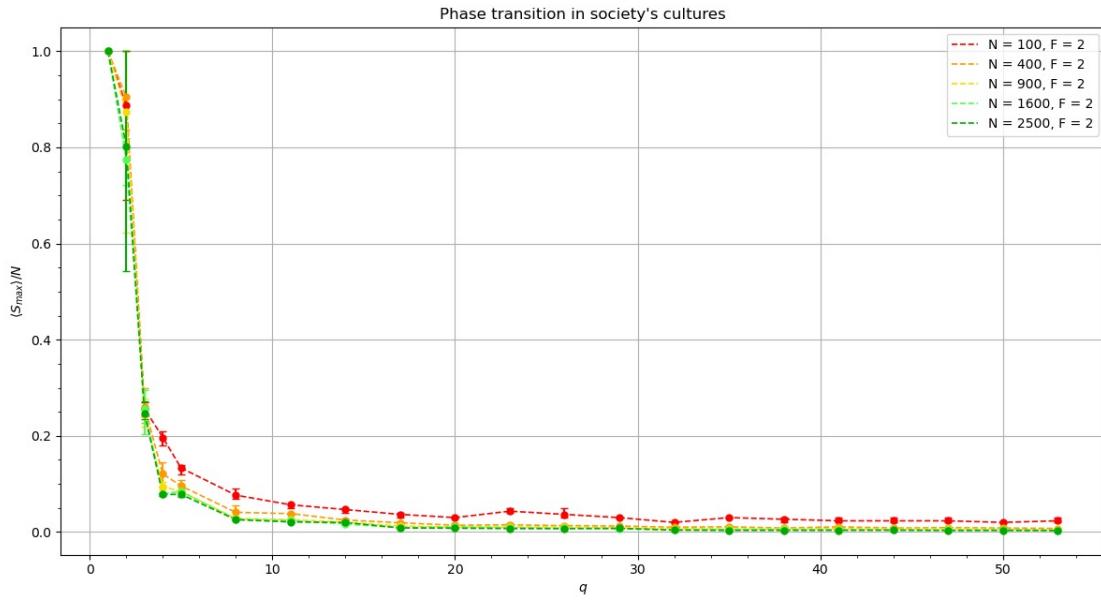


Figura IV: Transición de fase asociada a una población unidimensional con $F = 2$. La variación de N no tiene efecto apreciable sobre la transición de fase; el q_c es siempre el mismo (de forma aproximada), haciendo que la transición de fase, que es continua en todos los casos, ocurra en el mismo rango de valores de q .

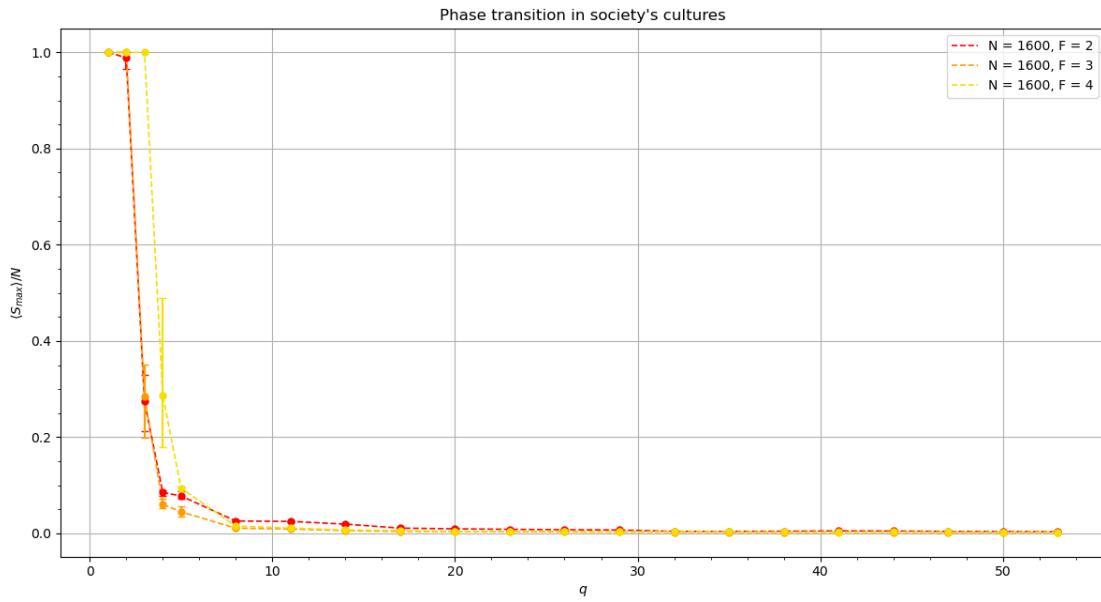


Figura V: Transición de fase asociada a una población unidimensional con $N = 1600$. La transición de fase es continua para todo valor de F , pero se ve una clara dependencia de q_c con F : a mayor F , mayor q_c y por tanto la transición de fase se retrasa (en este caso es un efecto muy sutil).

Como puede observarse en las siguientes gráficas, en el caso particular de una sola dimensión, todas las transiciones de fase muestran un carácter continuo, independientemente del número F de características. En esta transición de fase tiene lugar un cambio en la ordenación de las culturas en el

sistema. En este análisis se ha hecho uso de variaciones independientes tanto del tamaño de la población N , como de la cantidad de características F . Observar las transiciones de fase de forma gráfica para determinar su continuidad (o discontinuidad) es relativamente sencillo. Con cierta generalidad, que la gráfica presente una bajada muy marcada en el tamaño del *clúster* más grande conforme varía q , sin permitir una primera zona horizontal antes de ello, marca una transición continua. En las gráficas siguientes puede hacerse esta lectura. Posteriormente, el análisis se hará más correctamente haciendo uso de los exponentes críticos que marcan cuantitativamente la naturaleza de la transición.

2.2. Caso bidimensional: distribución, transición de fase y nodos

En el caso de dos dimensiones, la transición empieza a mostrar un carácter discontinuo si $F > 2$, un parámetro particular que ya se comentó en la introducción. En las siguientes figuras se muestran los resultados tras cuatro repeticiones. Se determinará la naturaleza de las transición hacia la multiculturalidad en las muestras.

Conforme existe una variación en el número F de *features* la transición cambia. Habitualmente, el exponente τ comentado en la bibliografía se usa para determinar el tipo de transición. En este caso hallaremos coeficientes críticos con la misma intención.

Además, las figuras incluyen una gráfica de evolución temporal de la densidad de nodos activos frente al tiempo (iteraciones), permitiendo obtener, en el estado final, la distribución de regiones monoculturales en relación al número máximo de nodos. Estas gráficas se muestran para distintos valores de q en la transición de fase de sistema, que es donde existe mayor variabilidad de los mismos.

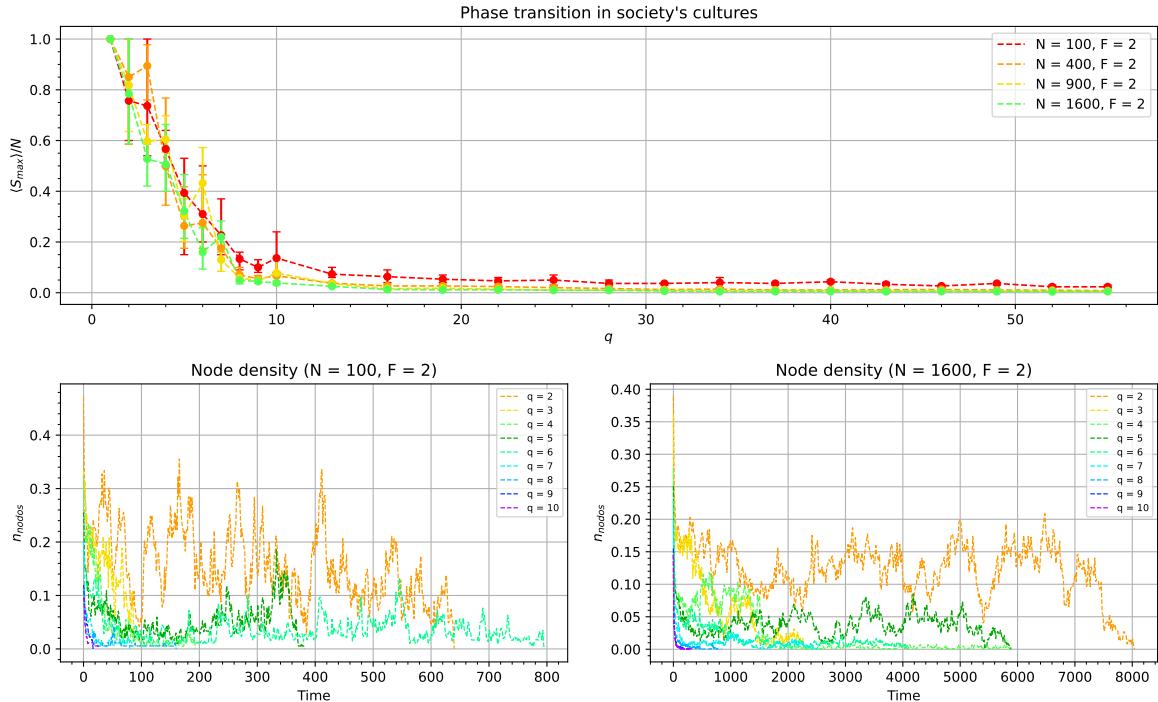


Figura VI: Estudio de un modelo de Axelrod bidimensional con $F = 2$ y N variable. Todas las transiciones son continuas. En este caso si que se observa una ligera dependencia de q_c con N , retrasando sutilmente la transición de fase cuanto mayor sea el tamaño de la sociedad. La evolución de la densidad de nodos sigue una clara tendencia descendente.

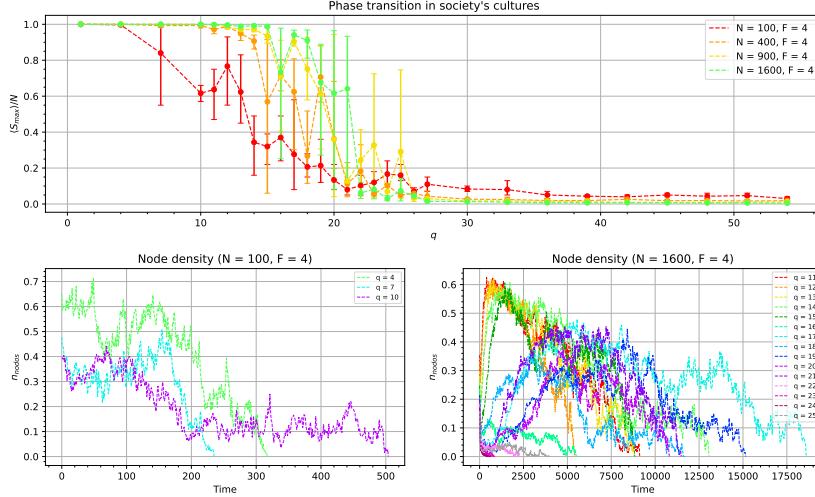


Figura VII: Estudio de un modelo de Axelrod bidimensional con $F = 4$ y N variable. Todas las transiciones presentan un carácter discreto. La dependencia de q_c con N es más acusada que para $F = 2$, pero si bien la transición de fase se retrasa para un N mayor, también se observa que converge antes a un estado multicultural el sistema cuánto mayor sea N . En este caso, la densidad de nodos presenta una evolución más compleja, con un pico máximo y una posterior decadencia.

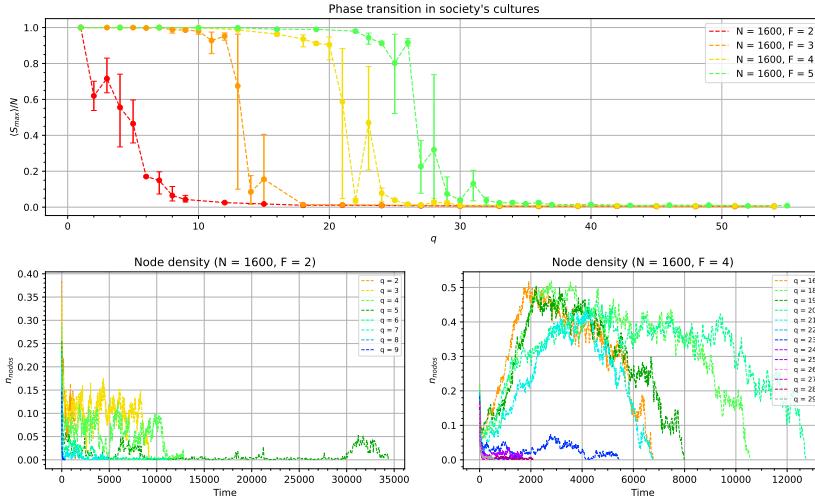


Figura VIII: Estudio de un modelo de Axelrod bidimensional con $N = 1600$ y F variable. La dependencia en este caso tanto de la naturaleza de la transición como de q_c con F queda en evidencia. A mayor F , mayor q_c y más se retrasa la transición de fase del sistema. La evolución de los nodos presenta una forma similar al caso anterior con N variable y $F = 4$.

Cabe destacar que una iteración del programa equivale a recorrer todos los individuos de la sociedad y ver si estos interaccionan con alguno de sus vecinos o no, por lo que el número de interacciones (o no) a nivel computacional agente-agente es N veces el número de iteraciones que se muestra. Se presentan resultados para N variable con un valor de F fijo y viceversa (el N_{\max} que se usa, por motivos computacionales, es $N = 1600$).

Para cualquier $F > 2$ se encuentran transiciones discontinuas. No sólo eso, sino que la evolución de la densidad de nodos también tiene un comportamiento discontinuo en el mismo rango de parámetros. Se encuentra gracias a las figuras que para el caso de $F = 2$, existe un decrecimiento bastante rápido a un valor nulo de nodos activos. Todos los valores superiores sufren una etapa de crecimiento

momentáneo hasta alcanzar un pico máximo volver a relajarse para llegar al estado estacionario.

Es de nuevo destacable la analogía con el modelo de Ising. En el modelo de Axelrod, una vez surgen sociedades con un valor $q > q_c$, transiciona inevitablemente hacia un estado multicultural (desordenado), mientras que para valores por debajo de este, mantiene la homogeneidad en la sociedad (estado ordenado). Más adelante se destaca si esto se “rompe” con la inclusión de algunas de las extensiones del modelo, de mantenerse la misma tendencia no tiene sentido comentarla.

En este caso, la transición de fase es de no equilibrio en la que el parámetro de control de la misma, q se comporta de forma distinta a parámetros de control habituales como la temperatura en el modelo de Ising previamente mencionado. Aquí, se va cambiando el sistema y con esto cambia el propio valor de q , ya que es un parámetro necesario en la definición de la sociedad y no varía con el tiempo en la misma. De esta modo, la transición que a simple vista ocurre variando q , implica necesariamente variar el propio sistema. El parámetro de orden que representa la simetría que se rompe en el sistema, $\langle S_{max} \rangle / N$, será analizado más adelante.

En el modelo original, como se ha visto en los resultados, solo se puede hablar de coexistencia de fases durante la transición; fuera de ella, se tienen estados (culturales) completamente ordenados ($q < q_c$) o desordenados ($q > q_c$).

Se puede demostrar [10] que el estado/espacio monocultural (el que se da para $q < q_c$, donde $\langle S_{max} \rangle / N = 1$), es equivalente a la restricción al subespacio de la cultura de un único individuo. Este subespacio se identifica con el espacio $V_N^{\otimes F}$, con N y F el tamaño del sistema y el número de *traits* de cada individuo, respectivamente, y V_N un espacio vectorial N -dimensional. En dicho artículo se también demuestra que el observable que se toma en el eje y de las representaciones, $\langle S_{max} \rangle / N$, es invariante frente acción del grupo de permutación S_N .

Se conoce que una transición de fase va, generalmente, asociada a una ruptura de simetría, por lo que el breve análisis bibliográfico anterior permite conocer con exactitud la simetría presente en el sistema bajo estudio. En las interacciones agente-agente, no se rompe la simetría, lo que evidencia una de las premisas fundamentales de la física estadística: el comportamiento del todo es más que la suma de sus partes. Un breve análisis cualitativo del sistema en base a los resultados ya obtenidos permitirá conocer si esta simetría se rompe o no. La acción del grupo de permutación S_N será permutar los *traits* del *array* que representa a cada individuo. Teniendo en cuenta que estos valores se generan siempre de forma aleatoria, se tiene que permutar dos o más *traits* de un individuo, al poder todos cambiar con la misma facilidad y estar todos en el mismo rango de valores, no afecta al $\langle S_{max} \rangle / N$ final. Sin embargo, en la propia transición de fase existe, como se ve en los errores de los resultados anteriormente mostrados, una gran variabilidad en el $\langle S_{max} \rangle / N$ final. Esto viene a indicar que en la transición de fase, la simetría descrita anteriormente se rompe y una permutación de los *traits* de un individuo conduce a un estado más o menos ordenado. Un análisis mucho más detallado de todo esto se presenta en el artículo ya citado en el párrafo anterior.

También es posible hablar de percolaciones de una o varias culturas en la sociedad. Para $q < q_c$, una única cultura consigue percolar en el sistema, generando lo que hasta ahora se ha denotado por estado monocultural ordenado. En el caso de que exista coexistencia de fases, existirán varios culturas; como norma general, una consigue percolar de forma predominante, aunque se puede dar el caso de que más culturas percolen en el sistema al mismo tiempo (como se verá en el cálculo de los exponentes, este

caso es extremadamente raro y se aleja de la norma). Para $q > q_c$, ninguna cultura consigue percolar en el sistema. Debido a la dificultad de un tratamiento analítico del sistema, estas percolaciones no se tratarán de forma cuantitativa pero se tendrán en consideración a la hora de analizar los cambios introducidos por las extensiones propuestas en la próxima sección.

Todas estas características asociadas a una transición de fase típica se revisarán en cada una de las extensiones del modelo que se propondrán durante el trabajo. Por no hacer repetitivo el análisis, se comentará explícitamente cada una cuando difieran de los ya expuesto en esta sección; de lo contrario, no tiene sentido reafirmar una por una todas las características que presenta una transición de fase al uso. Se intentará comentar siempre la naturaleza de la transición, la forma de la evolución de la densidad de nodos y si ocurre algo destacable como una no ruptura de la simetría expuesta, cambios en los comportamientos para $q < q_c$ o $q > q_c$, coexistencias de fase fuera de la transición, etc.

Una vez obtenido el estado estacionario, lo más conveniente es obtener una visión gráfica de la separación de culturas. Ya en el artículo original de Axelrod se proponían este tipo de representaciones, en las que se representa a cada individuo como un cuadrado blanco y existen barreras entre cada agente; estas barreras toman un color en escala de grises dependiendo del número de *traits* que tenga en común con el vecino en cuestión, siendo blanco el equivalente a vecinos culturalmente iguales y negro si son radicalmente opuestos (lo que implica, según la descripción del modelo, una probabilidad de interacción nula). Además, se propone un mapa de color, que refleje la posibilidad de que surjan regiones culturalmente similares o iguales en extremos opuestos de la sociedad, que nunca llegan a interaccionar entre sí.

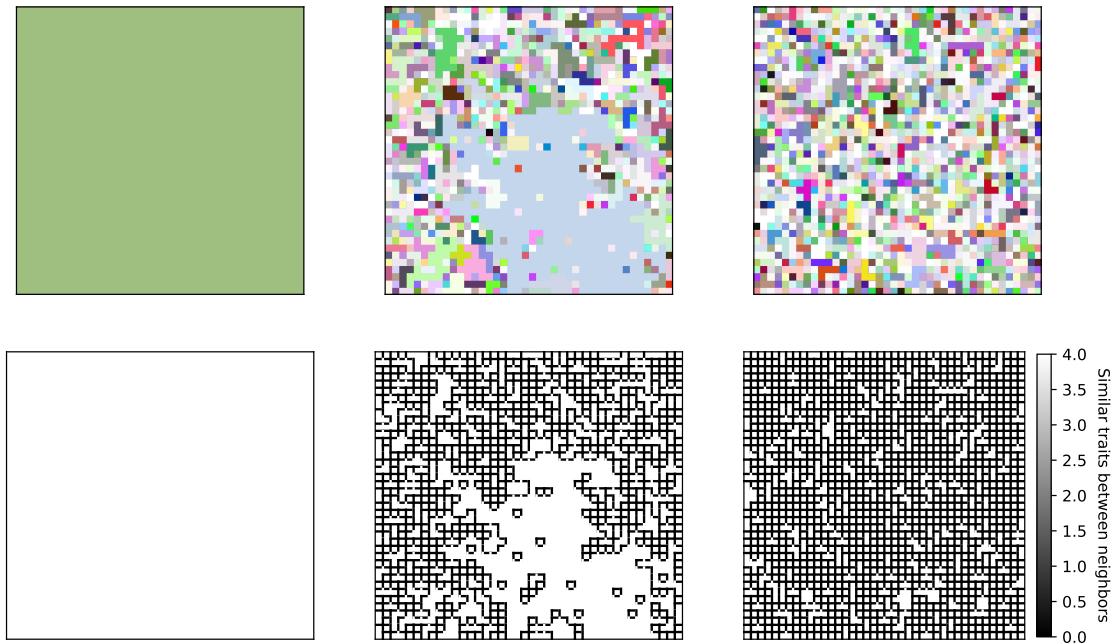


Figura IX: Estudio de un modelo de Axelrod, disposición de las regiones culturales en base a los *traits* compartidos. Sistema de $N = 1600$, $F = 4$ y $q = 5, 23$ y 50 , respectivamente.

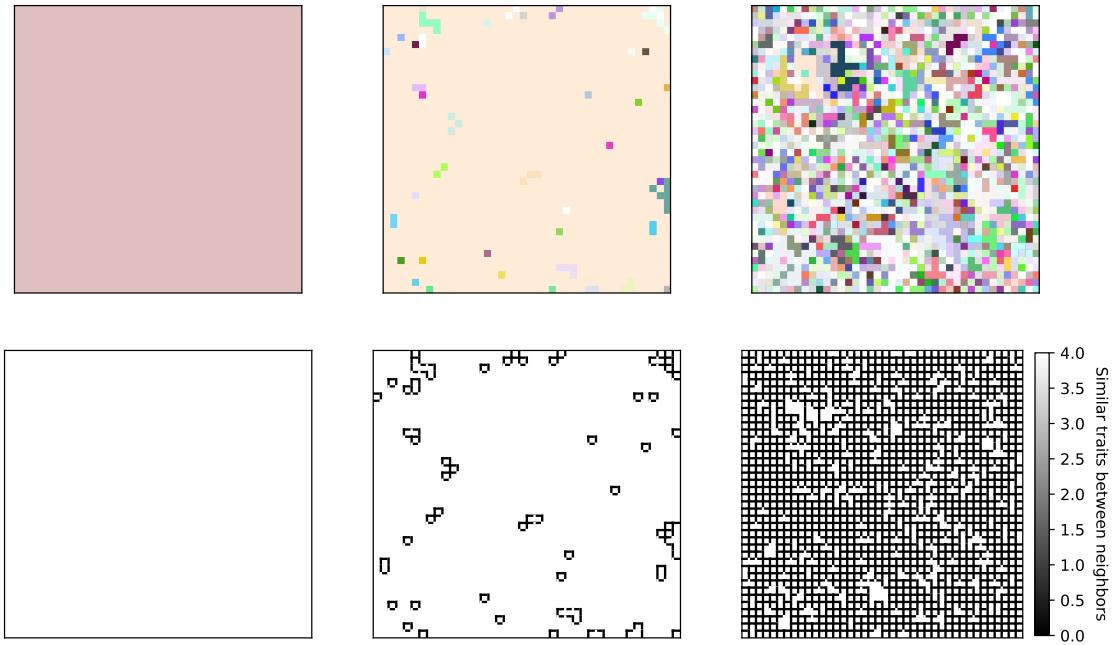


Figura X: Estudio de un modelo de Axelrod, disposición de las regiones culturales en base a los *traits* compartidos. Sistema de $N = 1600$, $F = 4$ y $q = 5, 23$ y 50 , respectivamente. Cada agente interacciona con 8 vecinos, los 4 considerados anteriormente y los 4 que se sitúan en sus diagonales.

Se han tomado valores del parámetro de orden que aseguren un estado ordenado, desordenado o con coexistencia de fases. En Física de los Sistemas Complejos, se espera que las transiciones de fase vengan asociadas a un exponente crítico (modelos como Ising), tal que caracterice esta y sea similar a valores esperados en otras transiciones [1], [4]. Los exponentes críticos marcan transiciones de fase en teorías como la atribuida a Landau ([8]) o a otras herramientas más modernas como el grupo de renormalización. El alcance teórico de estos conceptos no es el objetivo del trabajo. Sin embargo, se usará la aproximación (4) para definir un “exponente crítico” y comprobar si están en acuerdo con las referencias usadas en la descripción anterior del mismo .

Para hallarlos, se necesita conocer la distribución de tamaños en la sociedad estacionaria cerca del q_c , es decir, es necesario analizar qué tamaños aparecen en la sociedad en dicho estado (s) y cómo de probable es su presencia en el estado final del sistema ($P(s)$). Por simplicidad, se redujo la ecuación de partida tomando logaritmos (en base 10 para una mejor visualización del tamaño real del sistema) para poder hacer un ajuste lineal de los datos,

$$\log_{10}(P(s)) \sim -\tau \log_{10}(s) \quad (20)$$

siendo por tanto el exponente buscado el valor de la pendiente del ajuste realizado. Además, se ha limitado el ajuste a los puntos fuera de la cola de la distribución, ya que en esta zona la distribución se ensancha y no sigue la *power law* mencionada en la bibliografía, con lo que se nos recomendó por parte del profesor obviar esta sección de los datos.

En las siguientes figuras se muestran los resultados derivados de la simulación vista en la Figura VIII, tomando siempre un $q \approx q_c$ en base a lo visto en la misma:

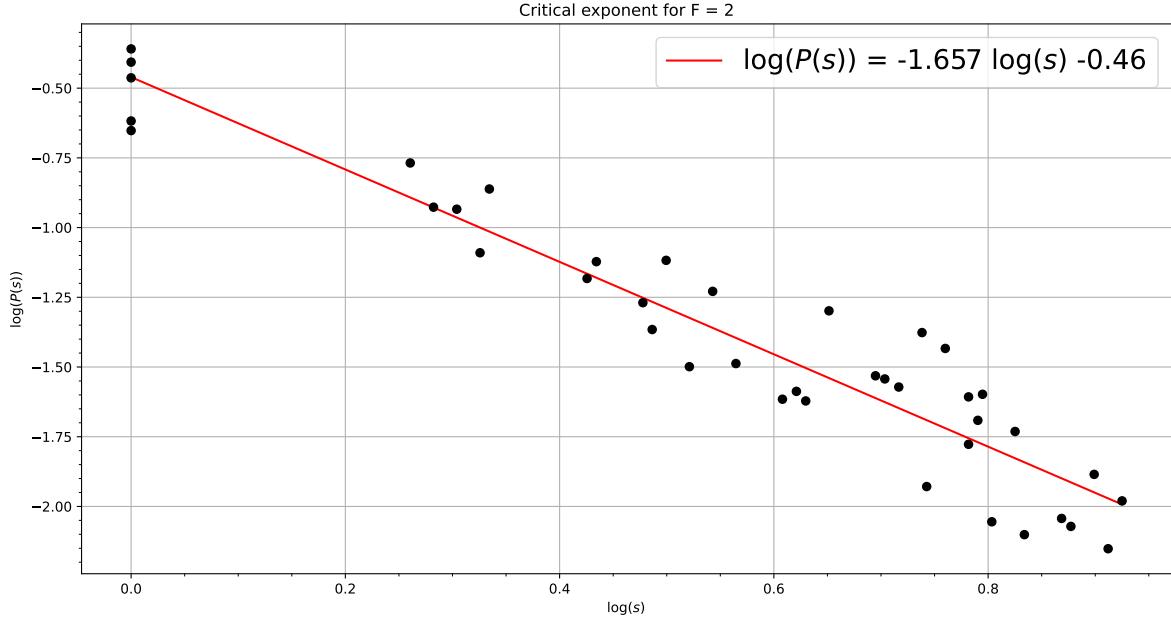


Figura XI: Simulación para $F = 2$. La pendiente asociada al exponente crítico tiene un valor de $\tau \approx 1,657$. Tal y como se especifica en la introducción: $\tau < 2$, por lo que se concluye que la transición de fase es de segundo orden, de carácter continuo.

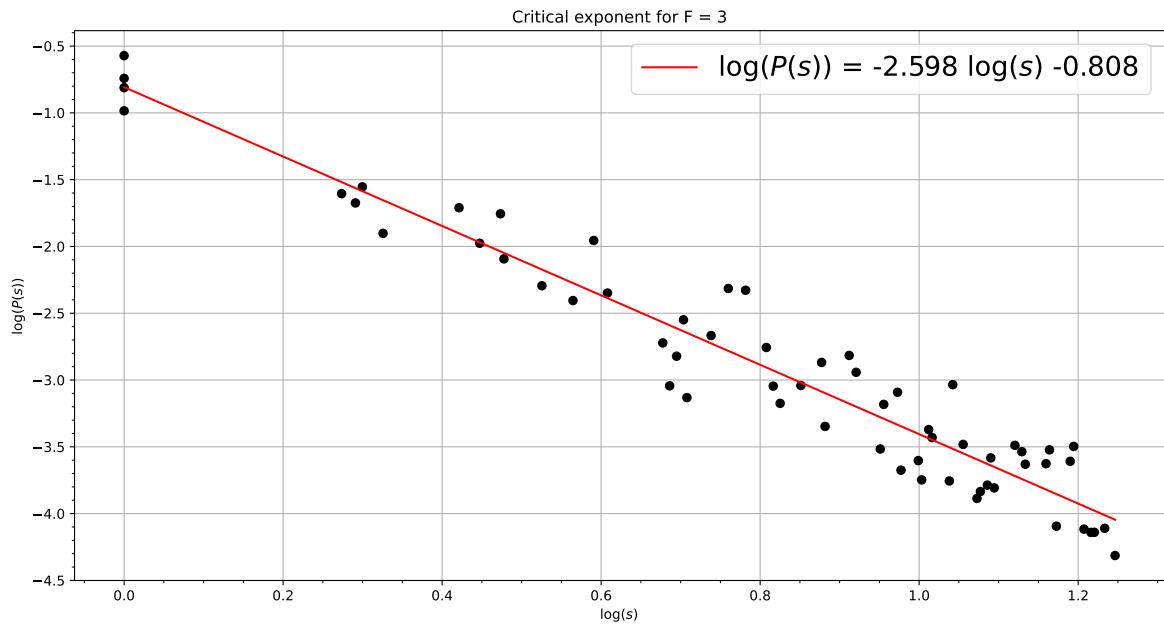


Figura XII: Simulación para $F = 3$. La pendiente asociada al exponente crítico tiene un valor de $\tau \approx 2,598$. Tal y como se especifica en la introducción: $\tau > 2$, por lo que la transición es discontinua.

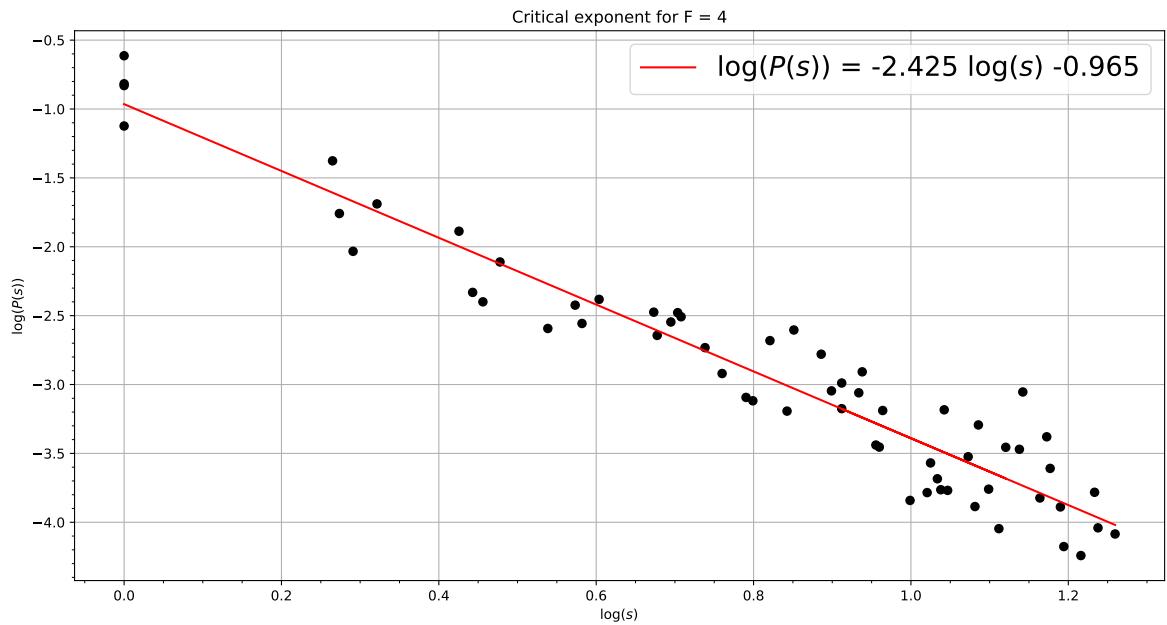


Figura XIII: Simulación para $F = 4$. La pendiente asociada al exponente crítico tiene un valor de $\tau \approx 2,425$. Tal y como se especifica en la introducción: $\tau > 2$; la transición es discontinua.

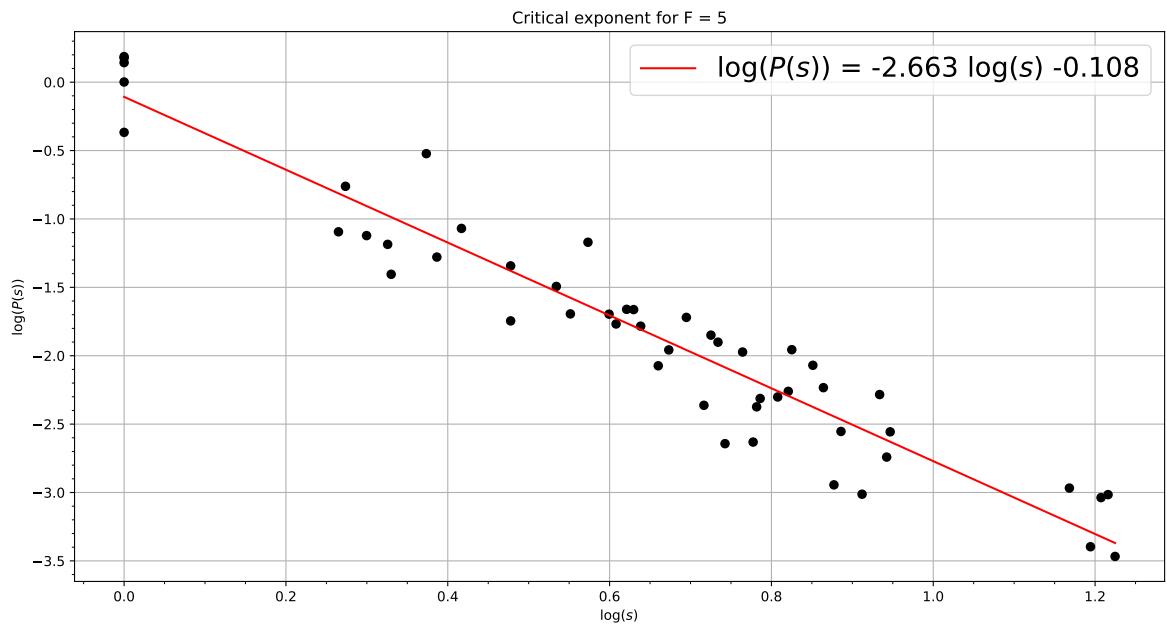


Figura XIV: Simulación para $F = 5$. La pendiente asociada al exponente crítico tiene un valor de $\tau \approx 2,663$. Tal y como se especifica en la introducción: $\tau > 2$; la transición es discontinua.

En todos los casos encontramos resultados correspondientes a aquellos de la Referencia [1]. Los datos ofrecidos permiten mostrar los resultados habituales en cualquier representación razonable del modelo de Axelrod. De hecho, todos estos resultados acerca de exponentes críticos son posteriores a la presentación del modelo; en el artículo original, Axelrod no realiza el estudio desde este punto

de vista. Las transiciones corresponden a los órdenes correctos, lo cual se verifica visualmente y, más rigurosamente, mediante los exponentes críticos. Además, se estudia como evoluciona la densidad de nodos en varias circunstancias (para el caso bidimensional).

Cabe destacar, que tal y como se dice en la introducción, es imposible determinar correctamente, de una forma completa, la naturaleza de la transición si no es definiendo τ . Podríamos encontrar transiciones discontinuas que gráficamente tengan una zona de 'monoculturalidad' que desaparezca en pocos q , lo cual nos haría percibir que prácticamente no existe, recordando a una transición continua. En cualquier caso, el número de puntos simulados es suficiente como para afirmar con seguridad que los resultados obtenidos son correctos, tanto numéricamente por aproximación, como gráficamente en la mayoría de casos.

Hasta ahora, la aplicación del modelo replica los resultados originales dados por Axelrod en su artículo. Así, al igual que ahí se enuncia, se puede asegurar que el número de regiones estables en la sociedad:

- i. Aumenta conforme lo hacen los valores de q . Este resultado se ve claramente con el mapa de color de la figura, IX.
- ii. Decrece con el rango de interacción. Comparando las Figuras IX y X se confirma esta tendencia; al considerar interacción a ocho vecinos, el caso de $q = q_c \approx 23$ presenta una región monocultural mucho más dominante y escasas regiones culturales residuales.
- iii. Decrece conforme aumentan la cantidad de F .
- iv. Decrecen con el tamaño de la población N .

Estas dos últimas tendencias pueden observarse en las gráficas ya presentadas. La tercera conclusión se ve claramente en la Figura VIII, donde para un mismo valor de q , los valores más altos de F se mantienen más tiempo en un estado monocultural (se retrasa la transición de fase del sistema), lo cual implica un menor número de regiones estables que sean monoculturales. Con un argumento análogo, se confirma la última conclusión en las Figuras VI y VII.

3. Extensiones del modelo

Debido a las problemáticas y limitaciones del modelo, se han propuesto una serie de añadidos con el objetivo de dar un mayor realismo tanto a las interacciones como al intercambio cultural en ellas. Se mostrará en la misma gráfica la sociedad de Axelrod (representada por la línea de color rojo) junto a la sociedad una vez añadida la respectiva propuesta (representada por un $v > 0$, siempre de un color distinto al rojo). Además, se presentará la evolución de los nodos únicamente en la sociedad una vez añadida la propuesta, ya que los resultados en la sociedad de Axelrod ya son conocidos y ensuciarián la representación.

La gran mayoría de propuestas aumentan el esfuerzo computacional, por lo que se toma un N menor pero representativo de los efectos buscados. Además, por el mismo motivo, se toma como "estado estacionario" el momento en el que la cantidad de enlaces activos representa un 10% del total. Esta elección se ha hecho siguiendo resultados obtenidos para simulaciones tempranas: la tendencia tanto en la transición como en la evolución de los nodos no sufre cambios significativos tras sobrepasar este límite fijado, por lo que se puede estudiar la dinámica del sistema sin pérdida de generalidad.

Este pequeño sacrificio ahorra una gran cantidad de tiempo de espera, con una pérdida de información prácticamente nula.

3.1. Ruido o *drift*

Este cultural *drift* viene a mostrar un aspecto obviado en Axelrod, la autoconciencia. Este ruido viene a aplicarse de forma que cada región individual, de forma aleatoria, puede variar alguno de sus *traits* de forma completamente aleatoria sin la necesidad de interacción, algo así como un “pensador libre”. Este añadido, como se mostrará a continuación, es capaz de evitar un estado de multicultura-lidad desordenado en ciertos casos.

El ruido está normalizado, esto es, posee una media nula y una dispersión de valor unidad. La función de distribución asociada es gaussiana. Este ruido se implementará en la sociedad como una probabilidad de cambio; se irá variando hasta donde los recursos computacionales lo permitan. Los resultados obtenidos para una probabilidad de *drift* del 1% son los siguientes

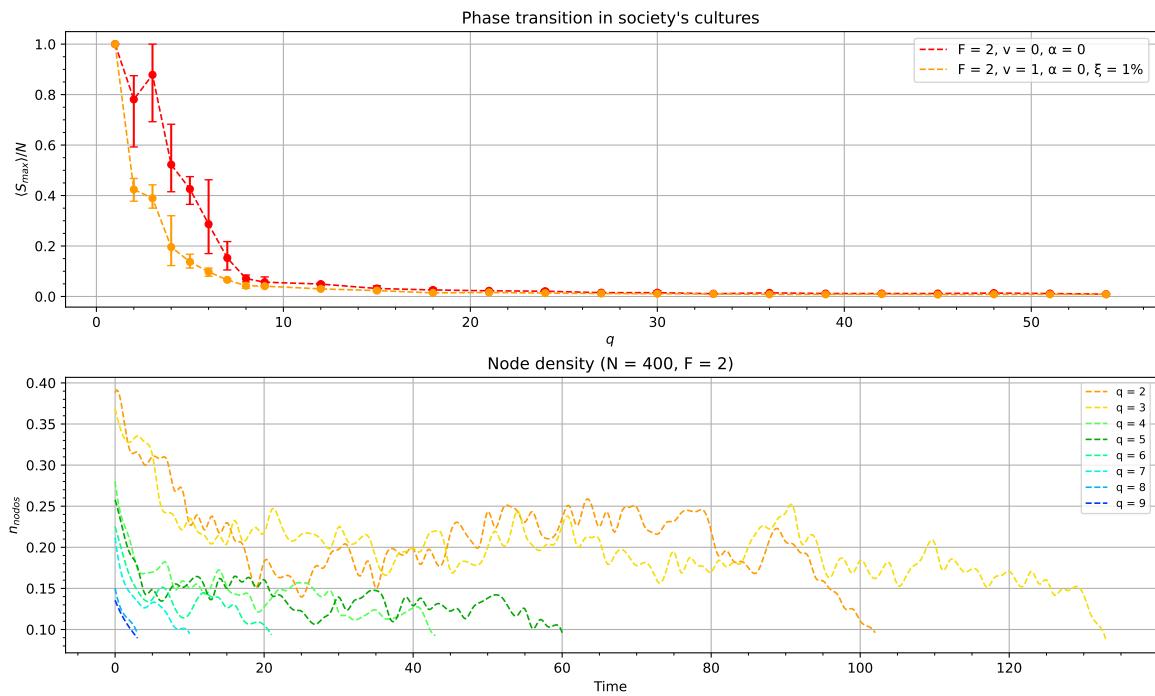


Figura XV: Sistema con $N = 400$, $F = 2$ y un ruido del 1%.

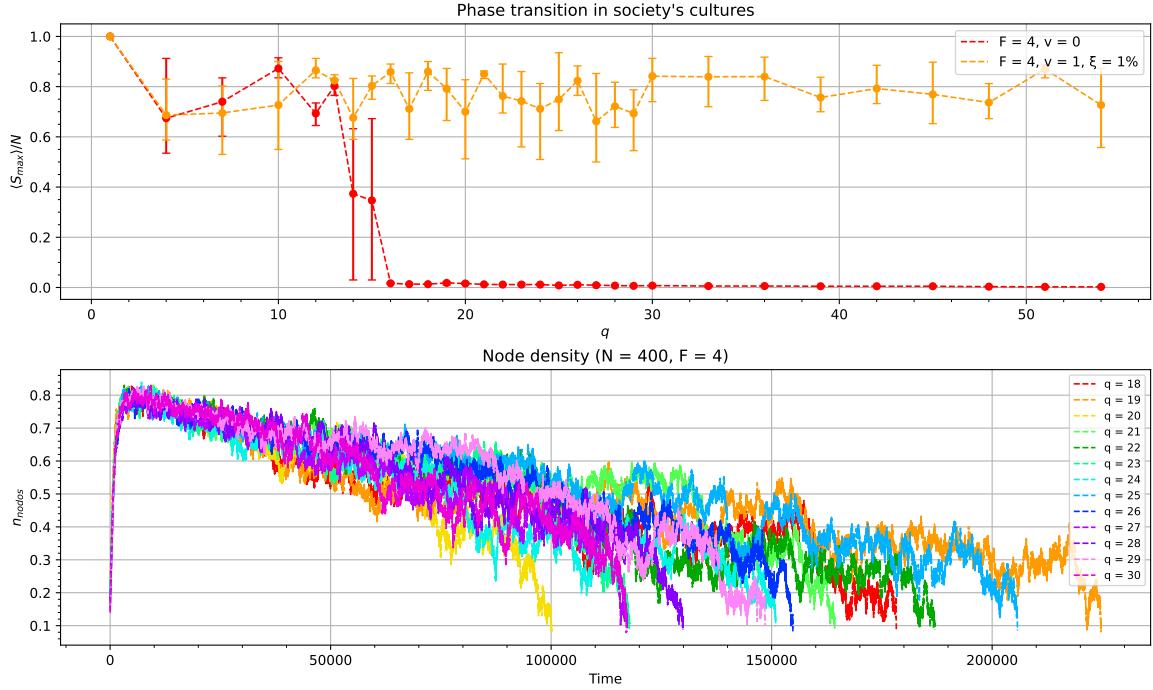


Figura XVI: Sistema con $N = 400$, $F = 4$ y un ruido del 1%.

La transición de fase para el caso de $F = 2$ se mantiene continua pero se retrasa en el eje q ; esto indica que el q_c debe depender del ruido aplicado. La evolución temporal de los nodos en este caso tampoco sufre cambios considerables respecto a lo ya visto para este valor de F .

Con la adición de un pequeño ruido al sistema con $F = 4$, para valores pequeños de q ya se desvía del comportamiento original y se pierde por completo la transición de fase (en el rango de valores de q) en favor de un estado prácticamente monocultural; encuentra el equilibrio, en el rango de valores de q simulados, cerca de $\langle S_{max} \rangle / N \approx 0.8$. Al no tratarse de un estado completamente ordenado, existe una coexistencia de fases, con una región cultural claramente predominante y otras residuales. Un mayor esfuerzo de cómputo podría confirmar si q_c se encuentra en un valor mucho más alto para $F = 4$, y $\xi = 1\%$ o simplemente no hay transición. La evolución temporal de los nodos en este caso presenta el mismo pico que antes para este valor de F , siendo en este caso un poco más acusado.

A continuación se comprueba el efecto de añadir un ruido mayor. Se muestra el efecto de un ruido del $\xi = 10\%$, que mantiene las características del ruido anterior en lo que a distribución se refiere (gaussiana normalizada):

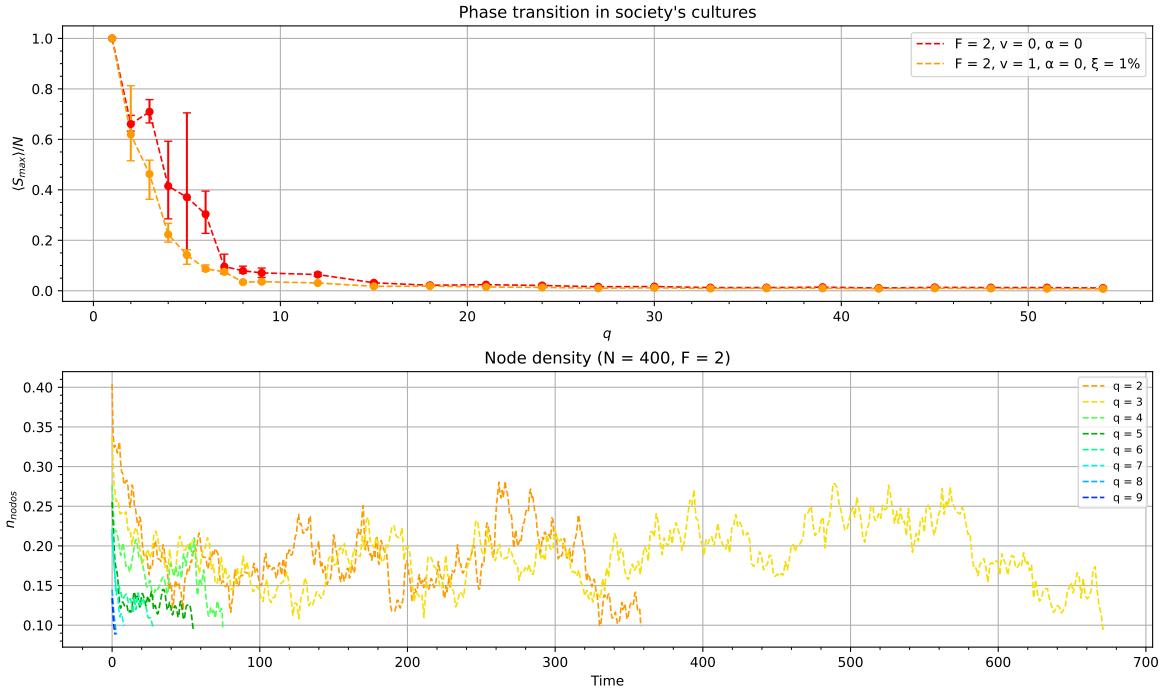


Figura XVII: Sistema con $N = 400$, $F = 2$ y un ruido del 10 %.

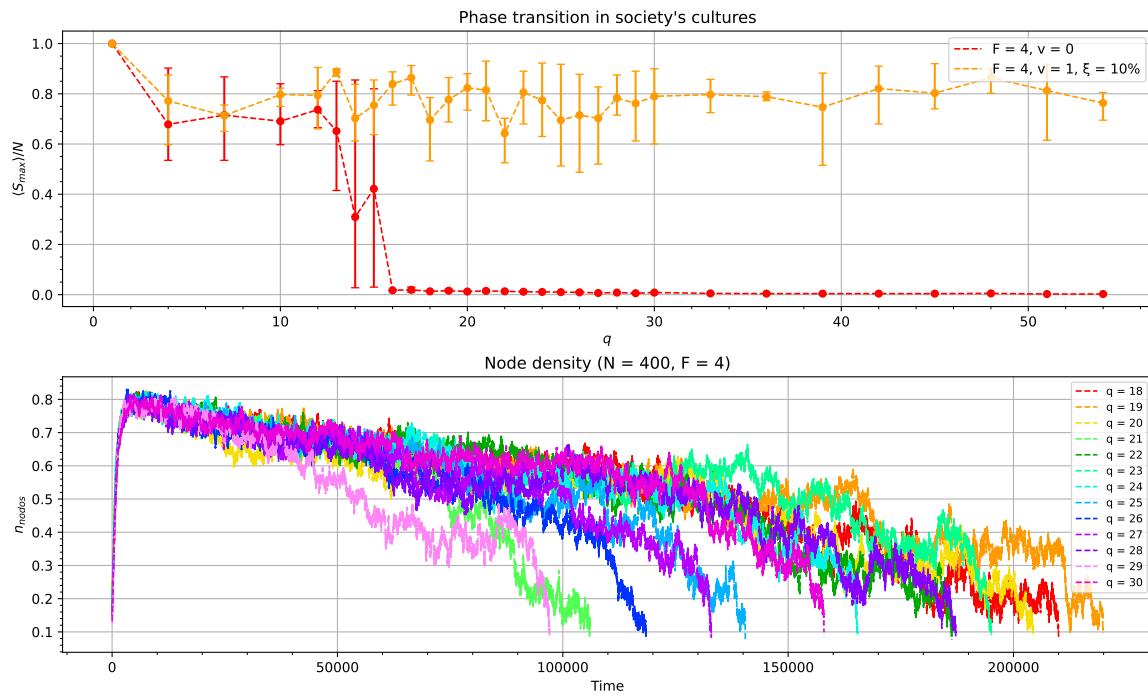


Figura XVIII: Sistema con $N = 400$, $F = 4$ y un ruido del 10 %.

Con la adición de un ruido de un 10 %, se tienen los mismos cambios que se vieron para la introducción de un ruido del 1 %, por lo que la dependencia de la transición de fase y los valores asociados a esta con el ruido ξ debe ser muy sutil aunque no nula, ya que hay pequeños cambios cuantitativos como ya se vio.

Se ha visto entonces que, para $F = 2$, no se consigue pasar de un estado multicultural a uno

monocultural completamente ordenado mediante la adición de un ruido de, como mucho, un 10 %. El único efecto del ruido sobre este tipo de sistemas es retrasar ligeramente la transición de fase, lo que, como se comentó anteriormente, indica una posible dependencia de q_c con el ruido añadido. Obtener esta relación requeriría de muchas simulaciones para variaciones razonables del ruido.

Sin embargo, para $F > 2$, la transición de un estado multicultural desordenado a uno monocultural ordenado se consigue de forma muy sencilla. Se observa para ambos ruidos que este estado monocultural no surge entorno a $\langle S_{max} \rangle / N = 1$, sino cerca de 0,8. Esto indica que una única cultura es capaz de percolar en el sistema, dejando solo culturas residuales a su paso. Además, se aprecian errores típicos de puntos que se sitúan en la transición de fase del sistema (mucha variabilidad, como ya se comenta anteriormente), lo que sugiere que se pueda estar ante una transición de fase muy lenta del sistema y que, para valores mucho mayores de q , incluso tendiendo al continuo, la tendencia sea de nuevo un estado multicultural. De este modo, no se puede hablar con seguridad de una coexistencia de fases en el equilibrio. Además, se ve que en los casos de $F > 2$ la ruptura de simetría perdura en q , a diferencia de lo ya visto tanto en el modelo original como en el caso de un sistema con $F = 2$ y un ruido de hasta el 10 %. Sin embargo, por lo explicado anteriormente de poder estar ante una transición de fase, no se puede asegurar una ruptura total de simetría en el sistema.

No se descarta que la inclusión de un ruido mayor pueda generar el efecto presenciado para $F = 4$ en sistemas con $F = 2$, lo que denominamos '*ruptura de la transición*' pero la inclusión de un ruido mayor al 10 % genera un esfuerzo computacional inasumible para los tiempos marcados de entrega del trabajo y los ordenadores disponibles.

3.2. Aprende a ser sociable

Los individuos de Axelrod son cambiantes en su opinión, pero siempre obedecen las mismas reglas de interacción. En la experiencia humana, es claro que no sólo la homofilia es determinante en nuestras relaciones sociales, sino que, además, la capacidad de socialización aparece como otra habilidad más, susceptible de ser entrenada y mejorada. En particular, este tipo de práctica se lleva a cabo con personas con dificultad social, que pueden sufrir *ansiedad social*, cada vez más estudiada. En virtud de este tipo de investigaciones psicológicas, comentadas en [3], se propone una función que permita, conforme los nodos socializan, que su tendencia a solaparse con los demás aumente.

Lo interesante de esta función es que para valores constantes (sin tener en cuenta la vida del autómata), la transición de fase se “rompe”, manteniendo una sociedad que no transiciona al estado de relajación en los valores de q simulados. Se propone una nueva probabilidad de interacción:

$$\omega_{i,j}^{(\text{mod})} = \frac{1}{1 - \alpha} (\omega_{i,j} + \alpha(1 - n_{\text{int}}^{-3})) \quad (21)$$

siendo $\omega_{i,j}$ la probabilidad de interacción de Axelrod y n_{int} el número de veces que ha interaccionado el agente activo en cuestión. Este se comienza a tener en cuenta cuando el individuo ha interaccionado una vez, para evitar singularidades. La elección de esta función es relativamente subjetiva, pues permite un manejo sencillo al ser polinómica en el cómputo, además de ser una curva lo suficientemente elevada como para tener efectos notables.

El parámetro libre α es el grado de sociabilidad añadida a nuestra sociedad, permitiendo así tratar la sociabilidad a escala macroscópica (sociedad) y microscópico (individual). Nótese que esta proba-

bilidad se ha construido de modo que, para un grado de sociabilidad nulo, i.e., $\alpha = 0$, se recupera la probabilidad de interacción de Axelrod.

A continuación se presentan los resultados de este nuevo modelo tomando como valores del parámetro libre $\alpha = \{0, 0.075, 0.6\}$, es decir, la sociedad de Axelrod (por comparar con un resultado ya conocido), una sociedad muy poco sociable y otra no excesivamente abierta:

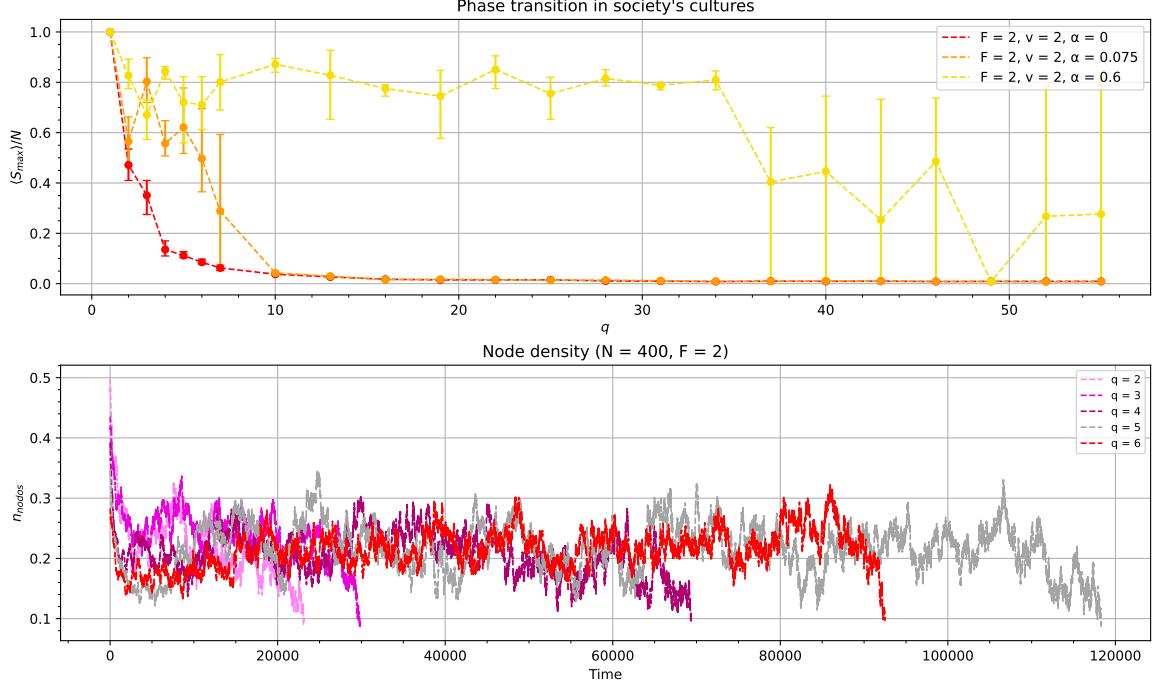


Figura XIX: Evolución y transición de fase de la población para $N = 400$, y $F = 2$.

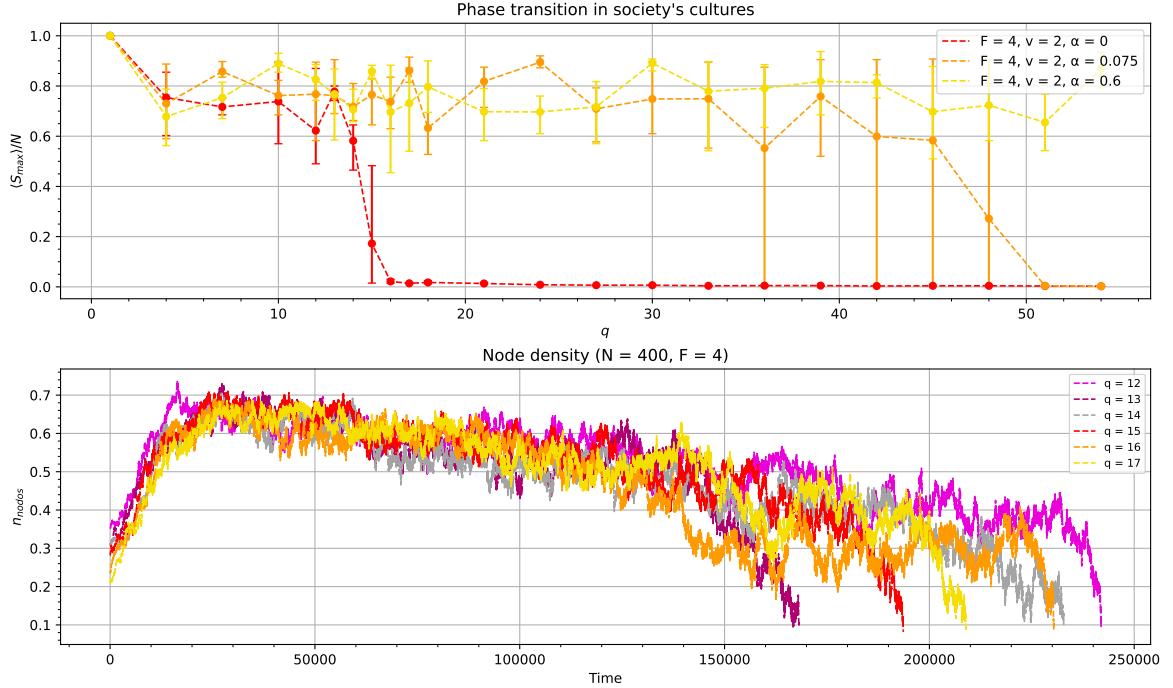


Figura XX: Evolución y transición de fase de la población para $N = 400$, y $F = 4$.

La evolución temporal de la densidad de nodos no sufre variaciones cualitativas si se compara con lo esperado según el modelo original. Lo interesante de esta propuesta viene en los cambios introducidos en las transiciones de fase.

En sistemas con $F = 2$, un valor pequeño del parámetro α retrasa ligeramente la transición de fase y la aparición de un estado monocultural. Tomando valores mayores de este parámetro, se consigue retrasar aún más esta transición de fase, perdiendo además la naturaleza continua que suele presentar. La transición de fase que aparece en este caso es prolongada en las q , lo que dificulta la obtención de un q_c y, en consecuencia, un exponente crítico. Si bien en el rango de valores simulados no se llega a un estado completamente multicultural, la tendencia permite aventurar su llegada. Se destaca también la ruptura de simetría y la coexistencia de fases en el sistema con $\alpha = 0,6$ desde valores muy pequeños de q a lo largo de todos prácticamente todos los valores simulados. Esta coexistencia de fases es de notable relevancia ya que, a diferencia de la que se veía para el *cultural drift*, esta se posiciona en torno a valores de $\langle S_{max} \rangle / N$ en todo su dominio ($\langle S_{max} \rangle / N \in [0, 1]$). Esto es lo mismo que ocurre en una transición de fase usual del sistema, pero la particularidad de este caso es que el suceso ocurre en un rango de valores de q de tamaño comparable al rango de valores tomados para este parámetro de control, no es un intervalo localizado como en la transición de fase típica ya estudiada.

Para $F = 4$ no hay grandes cambios: las transiciones de fase, en principio, no cambian su naturaleza y se presenta el mismo problema que para $F = 2$, transiciones muy prolongadas en q y por tanto dificultades para obtener un q_c concreto y mostrar exponente crítico. En este caso, un valor de α tan pequeño como 0,075 consigue retrasar la transición de fase (que acaba en un estado completamente multicultural) hasta el límite de valores simulador; el efecto de la sociabilidad acumulada es para $F > 2$ enorme desde valores muy pequeños. En este caso, la ruptura de simetría y la coexistencia de fases en el sistema se da desde valores de α tan pequeños como 0,075, y de nuevo desde valores muy pequeños de q a lo largo de todos prácticamente todos los valores simulados. En el caso de $\alpha = 0,6$ esto perdura más allá de los valores de q usados para la obtención de los resultados.

En conclusión, parámetros de alrededor 0,5 del parámetro de sociabilidad permiten evitar transiciones en el rango de iteraciones alcanzado y la consiguiente percolación de una cultura en la sociedad; no se descarta que exista transiciones de fase para valores mucho mayores de q . En valores de $F > 2$, el límite es incluso más pequeño. Esta tendencia indica que una mayor cantidad de temas o características individuales (*traits*) requiere de mayores valores máximos para realizar la transición. Por darle un significado natural en el contexto del modelo, se podría afirmar, de forma aproximada, que las sociedades con individuos muy tendentes a la socialización evitan la desparición de sus *zonas culturales* si sus opiniones no son muy variadas. Una especie de resistencia a que sus pensamientos u opiniones sean cambiadas.

3.3. Parecidos razonables

En este cambio, se introduce una modificación de la función delta presente en $\omega_{i,j}$. Se establece un parámetro de “tolerancia” (representado por ν) que permite que vecinos no exactamente iguales interaccionen siempre y cuando el parecido de cada *trait* esté dentro de este parámetro umbral. El modelo con esta propuesta no es técnicamente nuevo, puesto que ya existen aproximaciones similares

en dinámicas de lenguaje. La probabilidad de interacción se escribirá como

$$\omega_{i,j}^{(\text{mod})} = \frac{1}{F} \sum_{i=1}^F \xi_f(i,j), \quad \xi_f(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma_f(i) \in [\sigma_f(j) - \nu, \sigma_f(j) + \nu] \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad (22)$$

Se ha simulado para sociedades con $F = 2$ y, como representativo del caso $F > 2$, $F = 4$, con parámetros de tolerancia $\nu = \pm 0,05$ y $\nu = \pm 0,15$. Esto se hace con el fin de comprobar no solo el efecto de la nueva función, sino de su rango de acción sobre la dinámica del sistema. Los resultados son los siguientes:

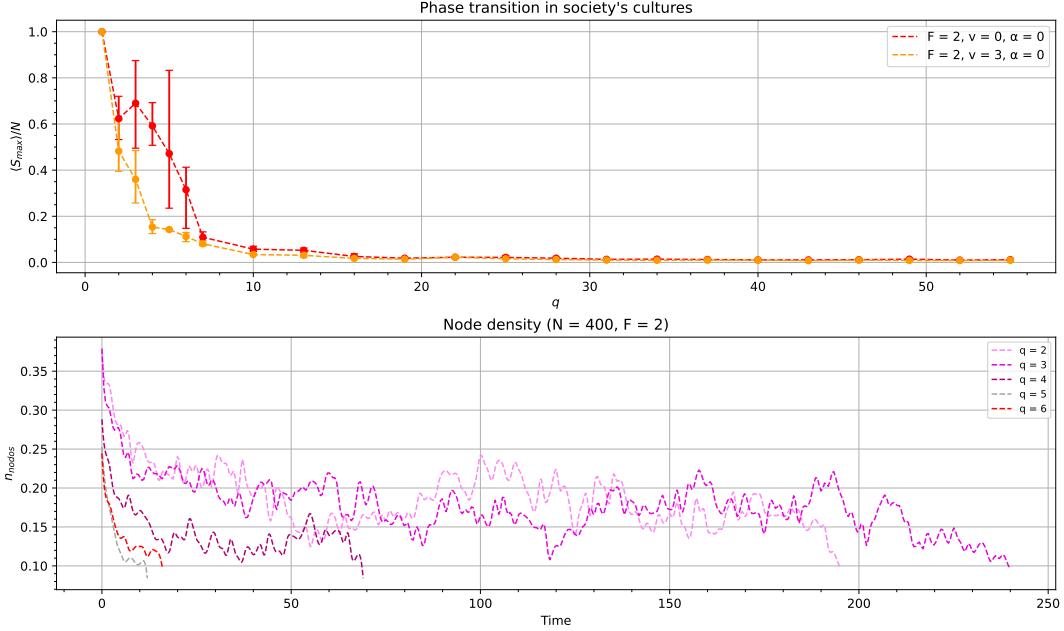


Figura XXI: Sistema con $N = 400$, $F = 2$ y $\nu = \pm 0,05$.

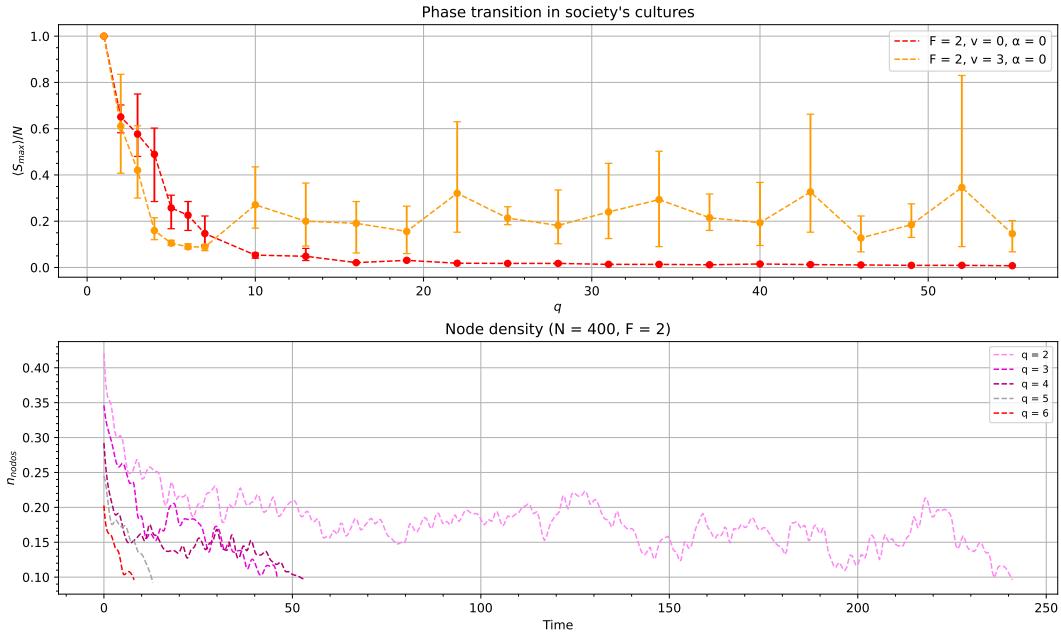


Figura XXII: Sistema con $N = 400$, $F = 2$ y $\nu = \pm 0,15$.

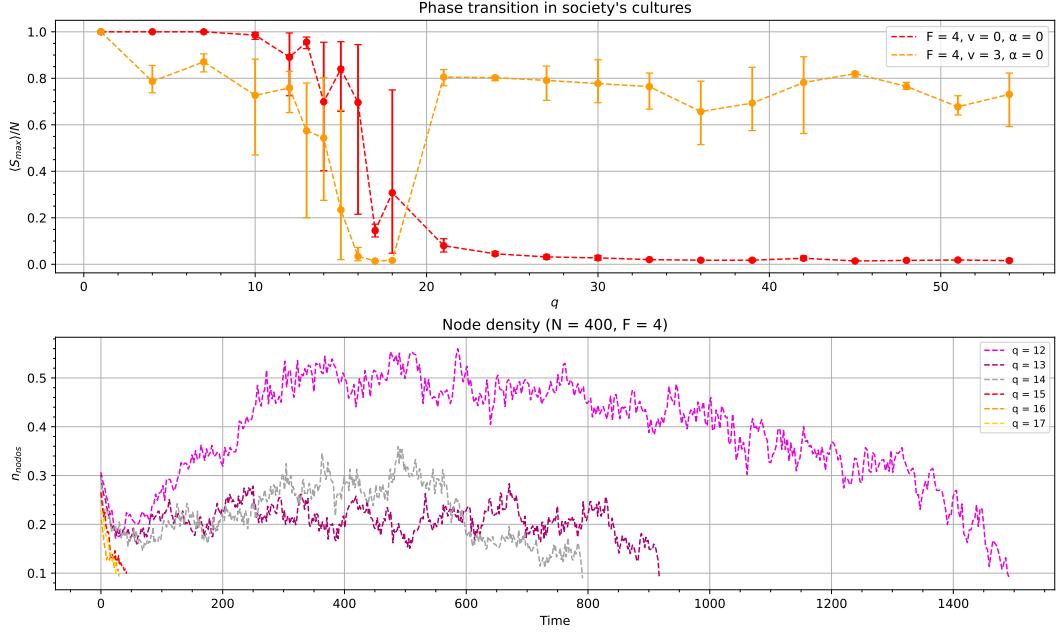


Figura XXIII: Sistema con $N = 400$, $F = 4$ y $\nu = \pm 0,05$.

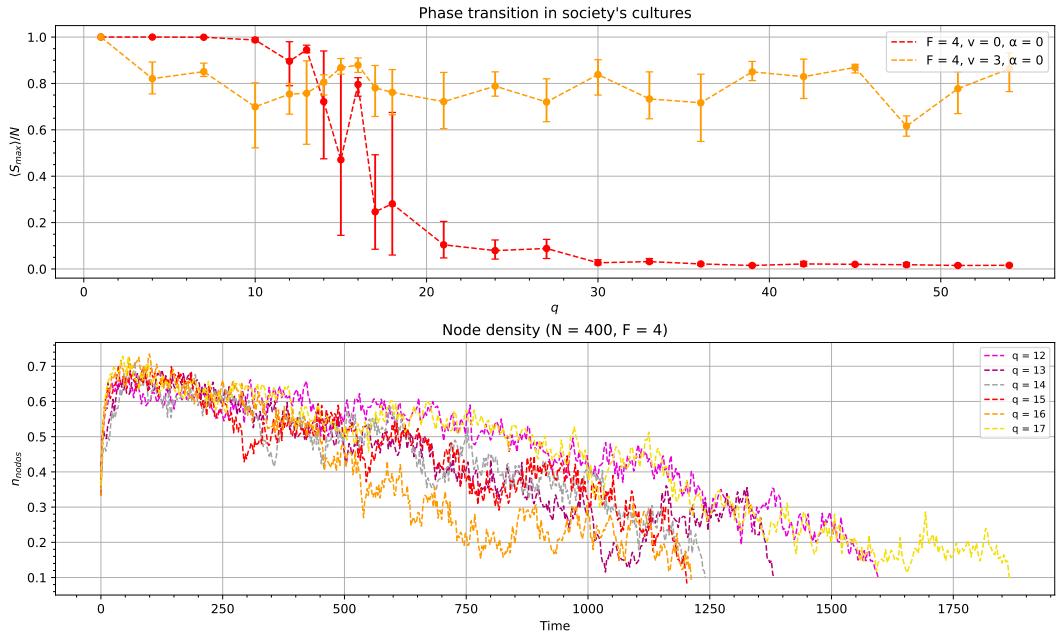


Figura XXIV: Sistema con $N = 400$, $F = 4$ y $\nu = \pm 0,15$.

Comencemos hablando de los sistemas con $F = 2$. La transición de fase se mantiene continua independientemente del parámetro de tolerancia ν . Sin embargo, el nuevo modelo presenta una convergencia más rápida que el original, de modo que se podrá deducir una relación entre q_c y el parámetro ν . La evolución temporal de los nodos parece seguir la misma tendencia que en el modelo de Axelrod original para este valor de F , independientemente del parámetro de tolerancia ν .

Sería necesario llegar a un estado estacionario real para saber si la coexistencia de fases que se muestra en torno a $\langle S_{\max} \rangle / N \approx 0,2$ para el caso de $\nu = \pm 0,15$ es un cambio introducido por la propuesta, mostrando así un estado estacionario con coexistencia de fases o no. Aún así, el criterio

aplicado para parar a escasos pasos antes del estado propiamente estacionario parece adecuado para esta situación. Dados los errores típicos de una transición de fase, se puede intuir que el sistema de la figura XXII se encuentra en dicha transición de fase, a la espera de converger a un estado completamente multicultural. En el caso de esta figura vemos de nuevo una ruptura de simetría con la característica comentada en las dos extensiones anteriores: gran duración en q .

Queda claro que los resultados para $F = 2$, salvo el matiz de estabilidad en la figura anterior en torno a $\langle S_{\max} \rangle / N \approx 0,2$, no se alejan de lo ya visto en el modelo original, presentando ligeras diferencias en la coexistencia de fases, simetría y velocidad de convergencia; el nuevo modelo propuesto converge a un estado multicultural de forma más rápida que el modelo de Axelrod.

Para el caso de $F = 4$, se obtiene una sociedad prácticamente monocultural a lo largo de todos los valores de q . De nuevo, no se puede asegurar con certeza si deja de existir la transición de fase en favor de un sistema monocultural ordenado, o simplemente se retrasa fuera de los límites que permite nuestra simulación. La evolución de la densidad de nodos no presenta cambios cualitativos respecto a los esperado para un sistema bidimensional de $F = 4$, simplemente destaca el pico más acusado al principio, siguiendo a partir de ahí una tendencia clara. La ruptura de simetría y la coexistencia de fases es la norma en ambos resultados para este valor de q en los valores explorados del parámetro de control.

Un caso que merece tiempo de análisis es el de $F = 4$ y $\nu = \pm 0,05$ (figura XXIII). La evolución de los nodos es la cualitativamente esperable, pero el pico se retrasa en gran medida. Destaca sin embargo la “transición de fase” existente para $q_c \approx 15$. Deja de ser cierto que para $q > q_c$ se tenga siempre un estado desordenado, ya que vuelve a “transicionar” a un estado de relativo orden con coexistencia de fases. Esto es algo a destacar ya que en todos los casos anteriores se ha verificado esta norma: de existir transición de fase visible en el rango de valores de q simulados, a partir de sistemas con $q > q_c$ se obtenía un estado de desordenado. Para ver si el punto de inflexión implica transiciones periódicas, simulamos hasta un valor de q mayor:

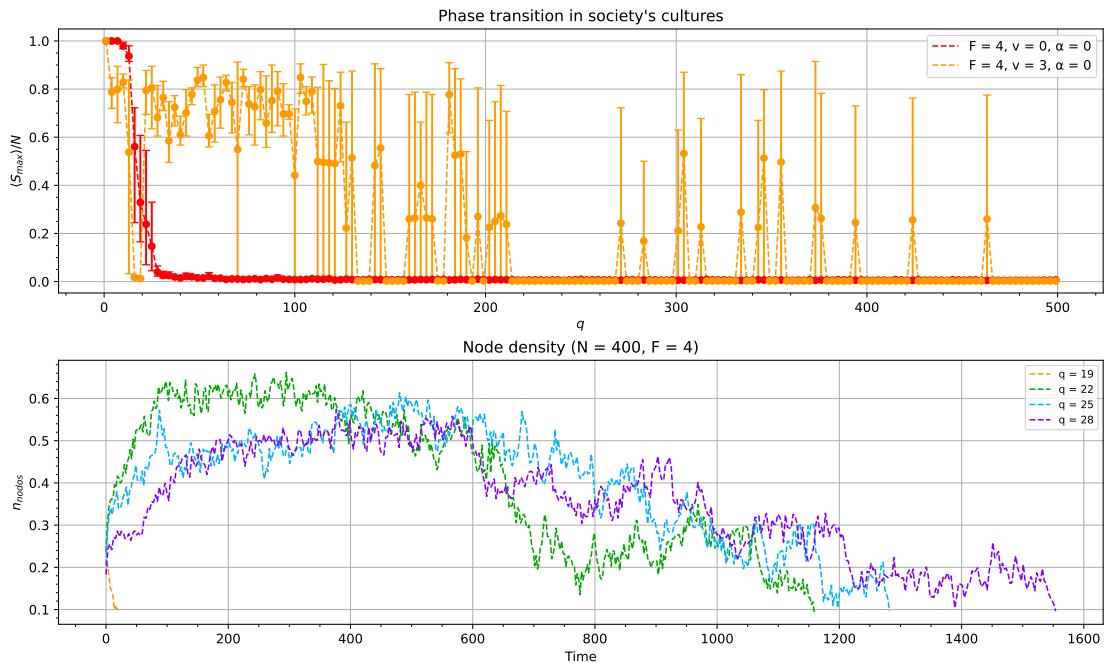


Figura XXV: Sistema con $N = 400$, $F = 4$ y $\nu = \pm 0,05$.

Con esta última simulación mucho más costosa computacionalmente, se obtiene el resultado que se presuponía: para $F = 4$ y $\nu = \pm 0,05$ se obtienen transiciones de fase periódicas. A simple vista, se tratan de transiciones de fase discontinuas: la primera de todas ocurre, como ya se vio anteriormente, para $q \approx 15$, y no vuelve a existir otra hasta $q \approx 130$; a partir de ahí, el periodo entre transiciones no es uniforme, por lo que a priori no se puede definir una periodicidad. Destaca un largo periodo en el que se obtiene un sistema multicultural desordenado, pasado $q = 200$, que puede dar una falsa sensación de estabilidad que recuerde a los casos ya estudiados. Sin embargo, el sistema presenta de nuevo transiciones a estados más cerca de la monoculturalidad. De este modo, la norma general de este resultado es un estado de coexistencia de fases, con transiciones discontinuas hacia estados desordenados que quedan interrumpidas por repetidos casos en los que una cultura consigue percolar en la sociedad, dando un sistema con $\langle S_{max} \rangle / N \in (0, 1)$. Estas percolaciones que rompen lo que podría ser el estado del sistema, se hacen cada vez menos frecuentes con el aumento de q , lo que muestra una clara tendencia del sistema hacia un estado de desorden. Esta tendencia se ve truncada en repetidas ocasiones por la ruptura de la simetría planteada en el sistema, generando esos picos con $\langle S_{max} \rangle / N \in (0, 1)$. Sería necesario una simulación con muchos más valores de q para ver si esta tendencia finalmente resulta en un estado multicultural desordenado o estas rupturas de simetría ocasionales se mantienen en q .

En general, la propuesta no produce cambio en el carácter de las transiciones. Así, hasta donde el esfuerzo de cómputo permite llegar, la dependencia en F de las transiciones es prácticamente la misma. Además, la evolución temporal de la densidad de nodos mantiene las mismas tendencias, variando solo el rango de valores en el que se mueve. Llevar esta propuesta hasta un estado estacionario real, así como ampliar el rango de valores de q , permitiría confirmar o desmentir las hipótesis planteadas en el análisis individual de estos resultados.

Lo más interesante ocurre para $F > 2$. En este caso, sobre todo el de $\nu = \pm 0,05$, habría que definir un exponente crítico para cada transición, puesto que aparecen inflexiones y cambios de sentido bruscos en el eje $\langle S_{max} \rangle / N$. Esto implica que puede haber diferencias muy notorias entre las transiciones del mismo sistema (aunque luzcan todas discontinuas), complicando aún más el análisis de este resultado. Para el caso de $F = 4$ y $\nu = 0,15$, no hay nada más a destacar respecto a lo que ya se comentó del mismo.

Cambio gradual

En este añadido, en lugar de adquirir como propio algún *trait* del vecino con el que interacciona, este se acercará o alejará en un valor determinado η al del agente con el que interaccionen. Esto viene a referenciar cómo una interacción con otro agente puede hacer que te acerques (o alejes) de su punto de vista en base a los argumentos que usados y el propio pensamiento crítico del propio individuo.

Este cambio gradual se junta con la modificación realizada de “parecidos razonables”; es lógico que la relajación en las condiciones de interacción venga de la mano con una “relajación” del sistema de intercambio cultural tan radical del modelo original. De cualquier forma, se muestran a continuación una serie de resultados para varios *trials* de la propuesta:

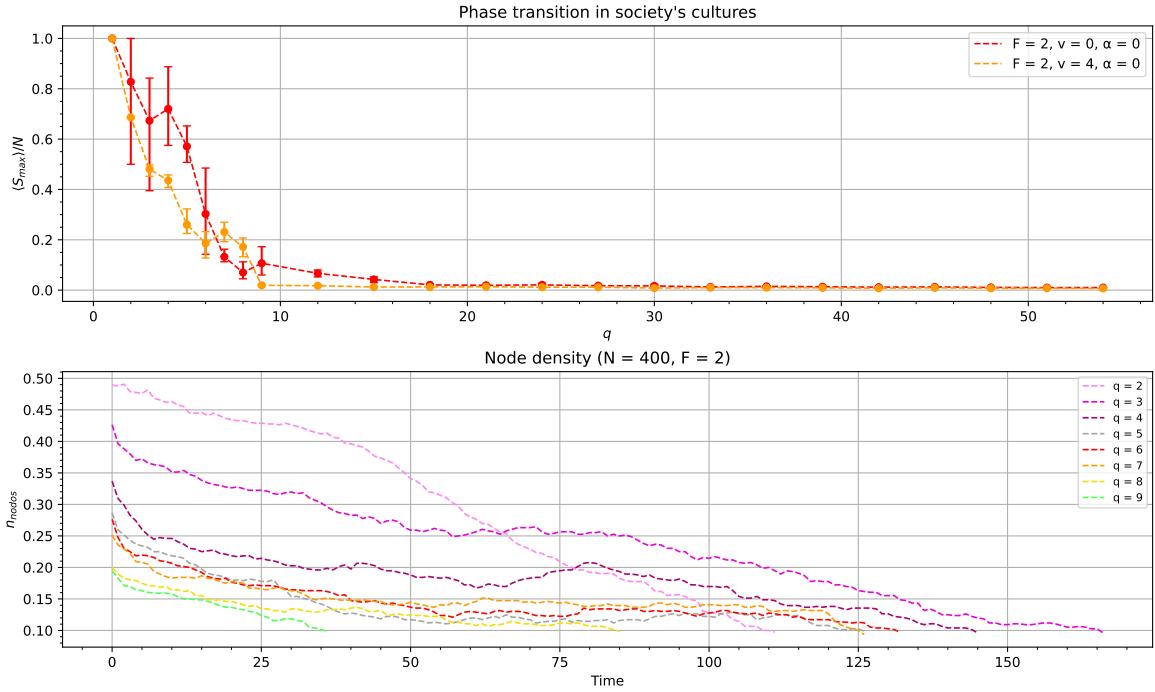


Figura XXVI: Sistema con $N = 400$, $F = 2$ y $\eta = \nu = \pm 0,05$.

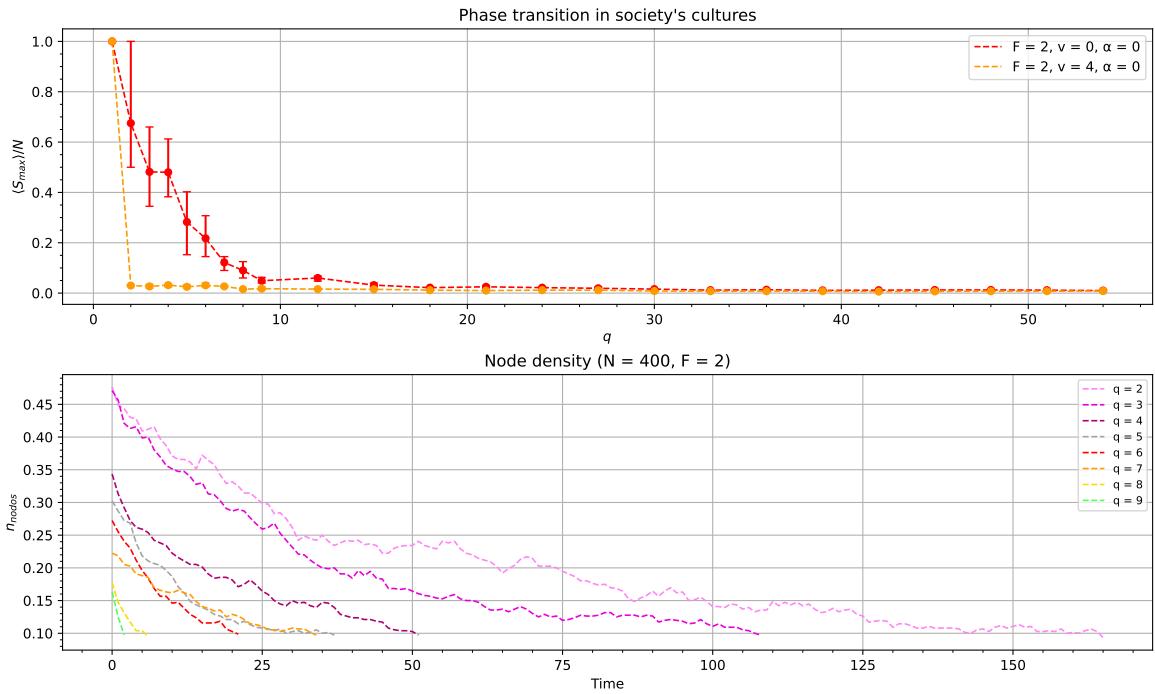


Figura XXVII: Sistema con $N = 400$, $F = 2$ y $\eta = \pm 0,15$.

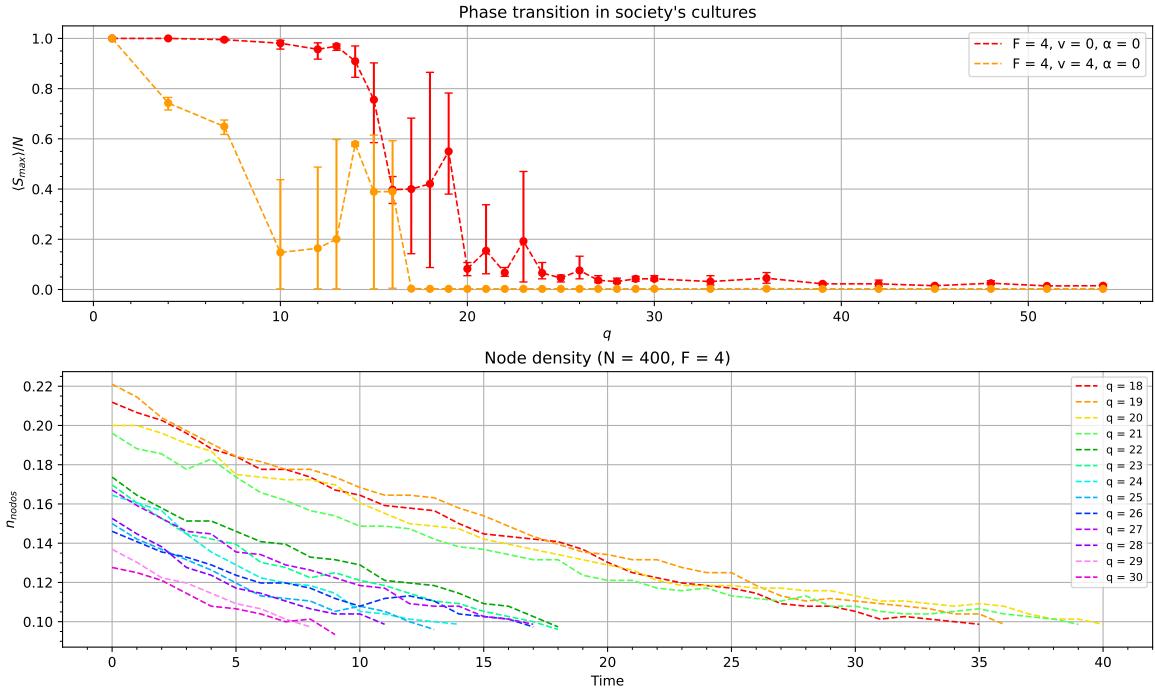


Figura XXVIII: Sistema con $N = 400$, $F = 4$ y $\eta = \pm 0,05$.

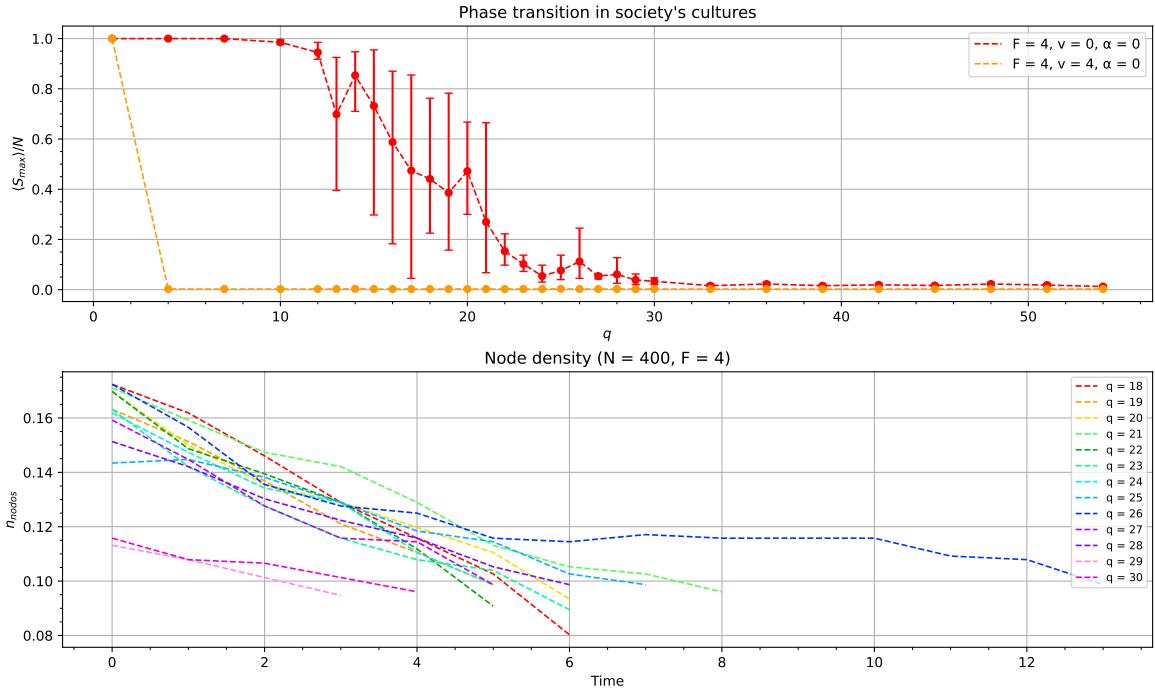


Figura XXIX: Sistema con $N = 400$, $F = 4$ y $\eta = \pm 0,15$.

El resultado de la propuesta combinada mantiene en el carácter continuo de la transición en sistemas con $F = 2$. La evolución de los nodos sigue siempre la misma tendencia uniforme, sin cambios bruscos. Para este F no hay diferencias notorias ni en el carácter de la transición de fase ni en la evolución del número de nodos, simplemente una convergencia un poco más acelerada que en el resto de casos ya estudiados. Resulta complicado “romper” la dinámica de un sistema con $F = 2$; sin embargo, para $F > 2$ es bastante más sencillo.

Para el caso de $F = 4$ con $\eta = \pm 0,05$ (figura XXVIII) se encuentra una distorsión bastante importante de la transición de fase, presentando así una coexistencia de fases que perdura más en q de lo esperado, así como una ruptura de la simetría estudiada. En particular, la evolución en q experimenta una subida importante, como si hubiese un pequeño período en el que se trata de volver a un estado ordenado. Esto dificulta en gran medida la descripción de la continuidad de la transición y el cálculo de un q_c que permita obtener el exponente crítico asociado a la transición. Sería necesario una simulación con un N mayor para intentar suavizar esta transición y poder describirla como continua o discontinua. La evolución temporal de los nodos muestra una clara diferenciación respecto a la tendencia mostrada para $F = 4$ en el modelo original; se pierde el pico inicial que a lo largo de las propuestas había variado únicamente su magnitud y se consigue una tendencia uniforme con una convergencia relativamente rápida al estado estacionario.

Por el contrario, la transición en la figura XXIX solo destaca por mostrar un carácter continuo, a pesar de tratarse de un sistema con $F > 2$. Además, se trata de una transición muy abrupta, que decae rápidamente al estado estacionario, haciendo que la suavidad de la transición sea casi imperceptible y que no existe coexistencia de fases en ninguna de las sociedades simuladas. La densidad de nodos evoluciona como en la descrita anteriormente, diferenciándose así de la tendencia que se venía viendo para este valor de F .

De este modo, para $F > 2$ se presentan cambios drásticos tanto en la transición de fase como en la evolución temporal de la densidad de nodos. En vista de los resultados se intuye la existencia de una dependencia de q_c con η , pero es complicado concluirlo con precisión sin simulaciones de un mayor número de individuos. También es destacable la rápida convergencia de este modelo en sistemas con $F = 4$, así como los cambios en la transición de fase, distinta incluso para los dos casos simulados con este valor de F .

3.4. Propaganda masiva

Se valora a continuación un fenómeno social a gran escala, concretamente el efecto de propaganda masiva sobre las opiniones de los individuos. Esto se introduce formalmente como un superagente, definido a todos los efectos como un individuo más (mismo número de *traits* y posibles valores de estos), pero no es incluido en la sociedad como tal.

Su efecto radica en la posibilidad no nula de cada individuo de interactuar, además de con uno de sus vecinos, con este superagente; su único efecto en la sociedad es cambiar la opinión de los individuos. Así, el superagente es a todos los efectos equivalente a lo que serían dinámicas sociales a gran escala como las mencionadas en la introducción del modelo. En casos extremos, este superagente es capaz de absorber gran parte de la dinámica del sistema, puesto que puede provocar que todos los vecinos sean como él. De esta forma, se pretende evitar la heterogeneidad en la sociedad.

Este efecto de propaganda es conocido en disciplinas sociales, políticas y similares. El añadido de un vecino distinto, lo suficientemente influyente, puede hacer posible dinámicas y estudios sobre situaciones actuales como la *mass media*, los estados autoritarios, la publicidad invasiva... Si se quiere conocer más sobre esta posibilidad, se incluye una referencia acerca de este tema en la bibliografía, un artículo escrito por Arezky H. Rodríguez y Y. Moreno en 2010.

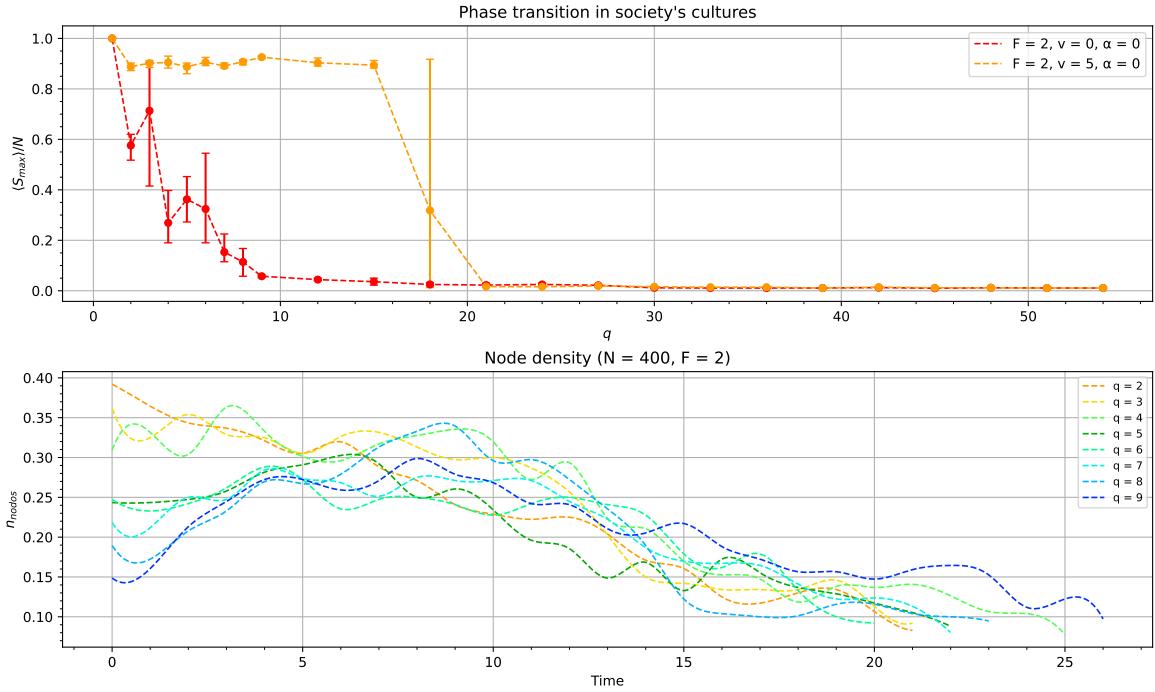


Figura XXX: Sistema con $N = 400$, $F = 2$ y probabilidad de interacción con el superagente de un 5 %.

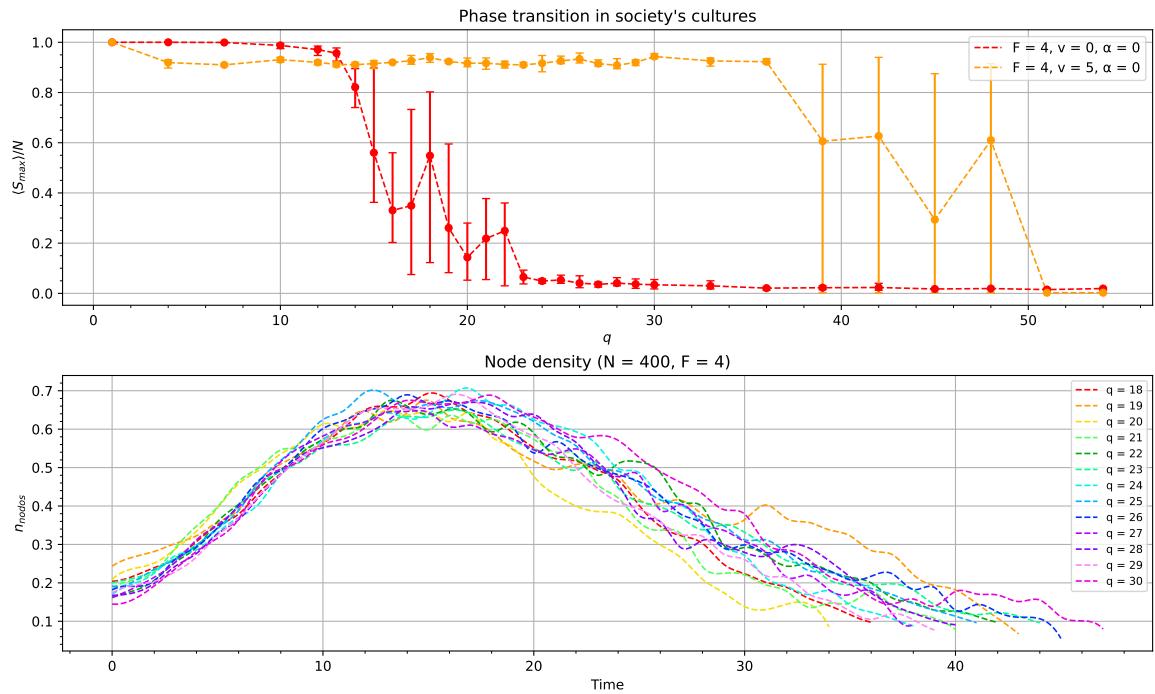


Figura XXXI: Sistema con $N = 400$, $F = 4$ y probabilidad de interacción con el superagente de un 5 %.

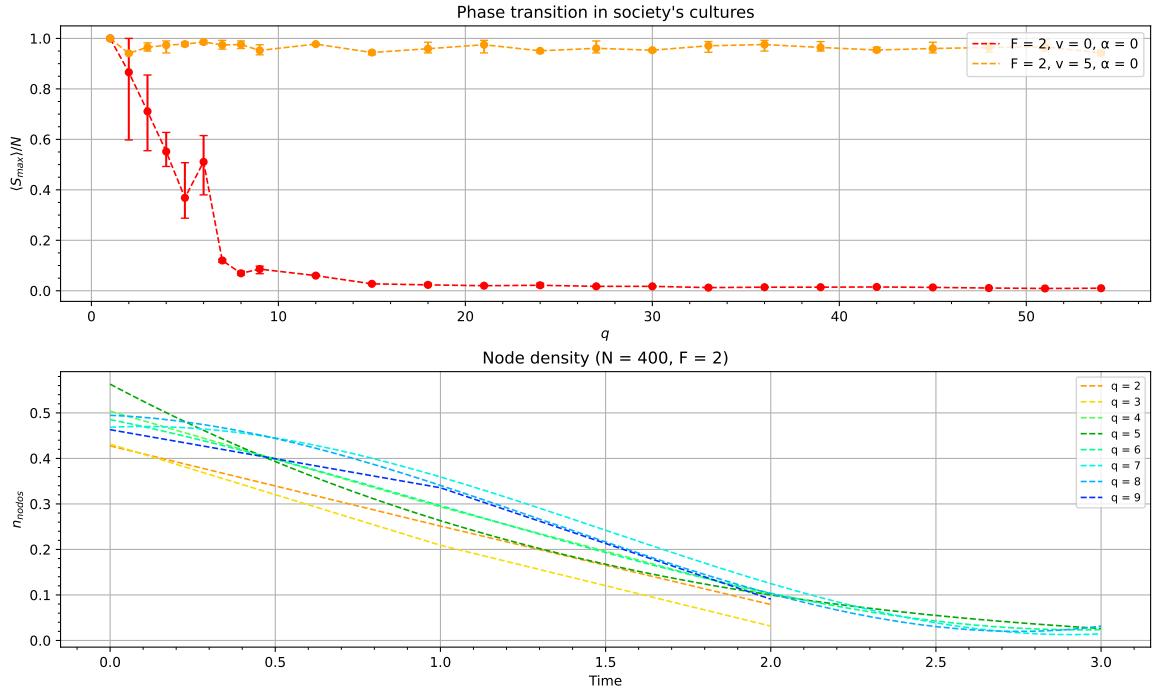


Figura XXXII: Sistema con $N = 400$, $F = 2$ y probabilidad de interacción con el superagente de un 80 %.

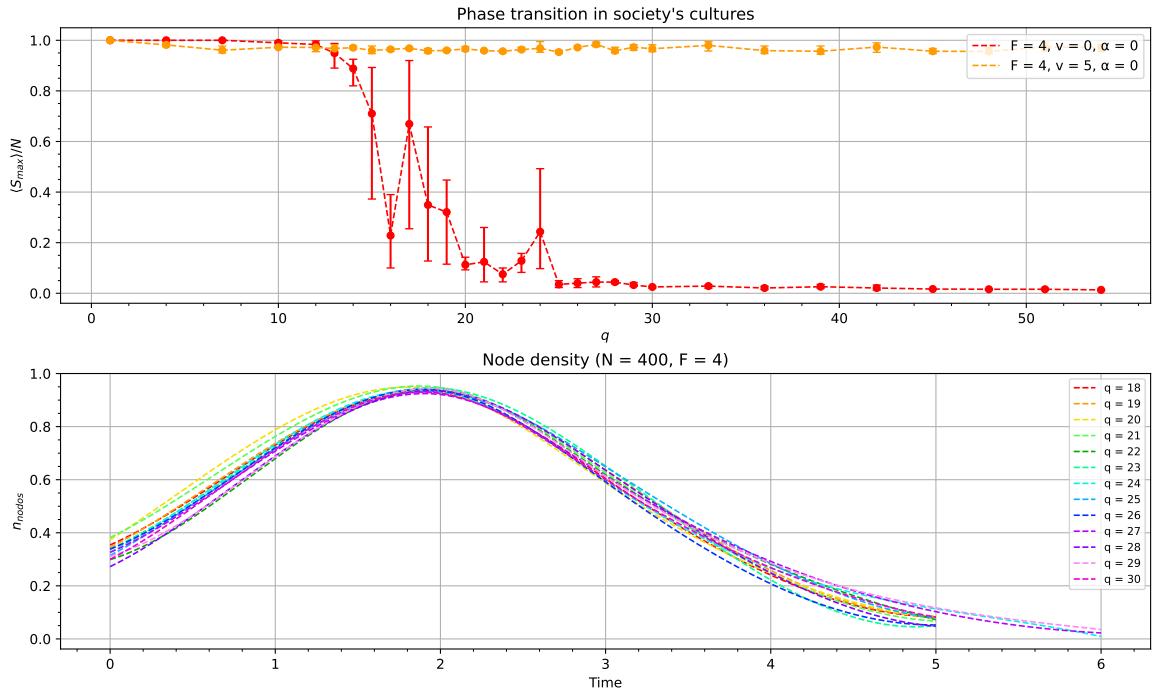


Figura XXXIII: Sistema con $N = 400$, $F = 4$ y probabilidad de interacción con el superagente de un 80 %.

La adición del superagente provoca un cambio drástico en la transición de fase, tornándola en discontinua (figura XXX); esto hasta ahora no había sido posible para el caso de $F = 2$. Además, antes de la transición existe un breve periodo de coexistencia de fases en torno a $\langle S_{max} \rangle / N \approx 0.9$ y se rompe la simetría desde valores tempranos de q . Aumenta considerablemente el q crítico hasta

valores cerca de los típicos para $F = 4$ en el modelo original. La transición de fase del modelo en la figura antes mencionada es bastante acusada. La densidad de nodos no evoluciona uniformemente: algunos casos presentan una bajada continua mientras que otros presentan un pico antes de decaer.

Para un $F > 2$ (figura XXXI), el efecto más reseñable es el retardo de la transición de fase, ya que el carácter de la misma no cambia. Además, se presenta una coexistencia de fases prolongada en q ; una simulación con un N mayor podría permitir suavizar la transición y hablar con mayor certeza de su naturaleza y la duración de la coexistencia de fases. La evolución temporal de la densidad de nodos es uniforme y se destaca la presencia de un pico antes de la decaída, como ocurría en el modelo original.

Se ve que con una probabilidad de interacción con el superagente de un 5 % se consigue “romper” la dinámica del sistema para $F = 2$. Sin embargo, la dinámica del sistema para $F > 2$ se mantiene en la tendencia esperable según el modelo de Axelrod, simplemente con un retardo en la transición de fase. Es evidente que q_c depende de la probabilidad de interacción con el superagente.

Se considera en las dos últimas figuras (XXXII y XXXIII) un superagente mucho más influyente, con probabilidad de interacción del 80 %, con el fin de evitar la heterogeneidad (estado desordenado), tal y como se propone anteriormente.

Más allá de los resultados inmediatos, esta predicción muestra que los elementos masivos que permiten dirigir las interacciones personales y las inclinaciones, pueden percolar con facilidad, influyendo en la opinión general (lo que equivale a, por ejemplo, el efecto de añadir un campo magnético al modelo de Ising). Además, destaca la rapidez con la que se llega a una sociedad sin actividad social. Antes de esto, la *mass media* de nuestro sistema acelera rápidamente el número de nodos activos. Tras un pico, la sociedad ya es lo suficiente homogénea como para que no haya más interacciones entre ellos. Vuelve a destacarse que el número de nodos en las gráficas es una magnitud normalizada a la unidad.

La transición de fase (si existe) deja de ser continua para todo F ; el superagente absorbe casi toda la dinámica en el rango de q bajo estudio. El cambio social es, en la práctica, tendente a un estado absorbente de parecido casi total al *mass media*. La evolución de la densidad de nodos sigue una tendencia que ya venía mostrando en el modelo original, pero mucho más uniforme y suave.

Al tener un rango de valores de q finito, no se puede asegurar que la transición de fase desaparezca; de hecho, es probable que se retrase en gran medida hasta valores de q mucho mayores. Respecto a esto, estamos limitados computacionalmente por lo que no se pueden sacar conclusiones firmes.

A destacar (aunque sea previsible) también queda lo rápido que converge el sistema al introducir esta dinámica social a gran escala. En muy pocas iteraciones el sistema consigue llegar a un estado estacionario monocultural ordenado.

A diferencia de lo que ya podíamos ver en la introducción, con este sistema de superagentes se encuentran estados absorbentes distintos del estado “muerto” (sin interacción) y la multiculturalidad. Con una influencia suficiente, la propaganda es capaz de generar un estado absorbente de monoculturalidad. Además, aumentar la probabilidad de interacción con el superagente equivale a facilitar la percolación de la cultura del mismo en el sistema bajo estudio, pudiendo llegar al punto de evitar por completo la transición de fase y que su cultura percole el 100 % de las veces para todo valor de q .

La introducción de otro superagente generaría un estado absorbente que presente una coexistencia de fases y una ruptura completa de simetría; el estado estacionario estaría en algún punto entre $\langle S_{max} \rangle / N = 0$ o 1 , que son los casos límite. Debido a como se plantea la probabilidad de interacción $\omega_{i,j}$, si estos superagentes no tienen ningún *trait* en común, el estado estacionario sería como el recién descrito; la percolación de las culturas impuestas por los superagentes dependerá únicamente de la probabilidad de interacción con cada uno. Sin embargo, si comparten algún *trait*, la percolación será más compleja y habría que estudiarla en detalle; lo más probable sería que la cultura del superagente más influyente sea la predominante en el sistema.

Cambio gradual

Ahora se considera la acción conjunta de un superagente y el cambio gradual propuesto. Se tomará un superagente poco influyente y un cambio gradual con un parámetro $\eta = \pm 0,05$, es decir, las modificaciones serán muy sutiles y no habrá una que, a priori, vaya a destacar más. Esto se hace así con el fin de estudiar si los cambios introducidos por el superagente poco influyente pueden ser paliados por el cambio gradual en la opinión de los individuos

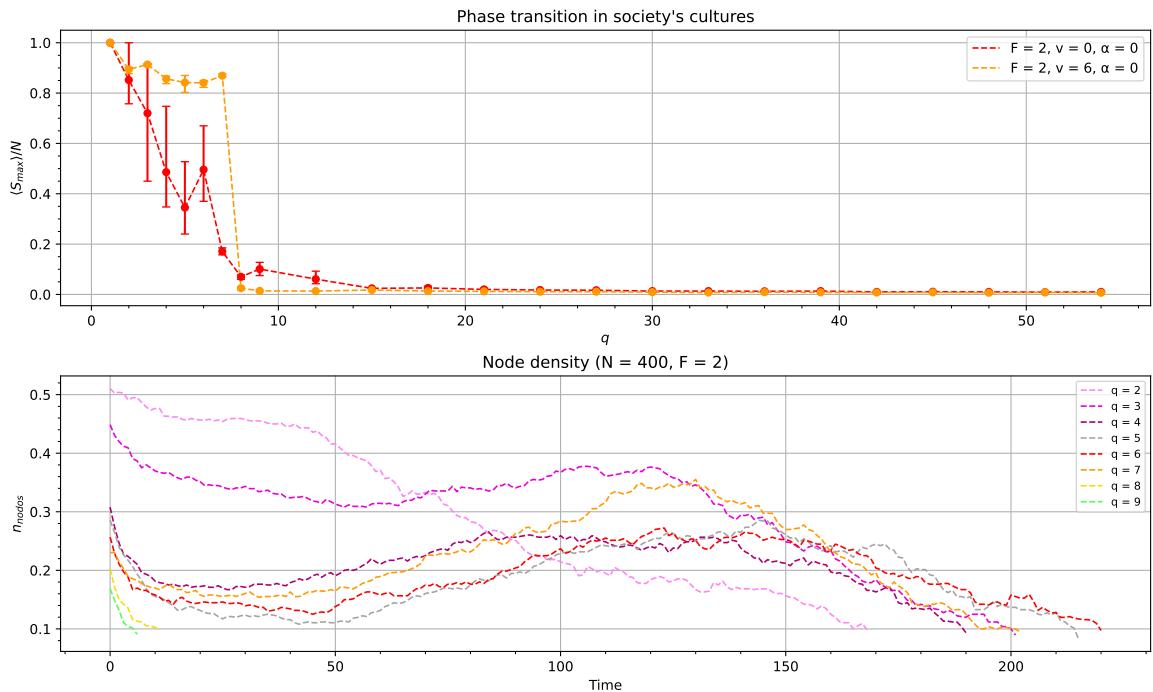


Figura XXXIV: Sistema con $N = 400$, $F = 2$, $\eta = \pm 0,05$ y probabilidad de interacción con el superagente de un 5 %.

En la figura XXXIV, la adición del cambio gradual no altera la transición discontinua que se obtuvo anteriormente, simplemente consigue adelantar la transición de fase y “dispersar” la evolución temporal de la densidad de nodos.

Estableciendo un parámetro η mayor, es posible que se consiga mitigar por completo el efecto del superagente poco influyente en el sistema, devolviendo así la transición continua característica del caso $F = 2$. Sin embargo, el aumento de la probabilidad de interacción con el superagente tiene efectos drásticos en los resultados; esta dinámica es claramente dominante ante las estudiadas con anterioridad.

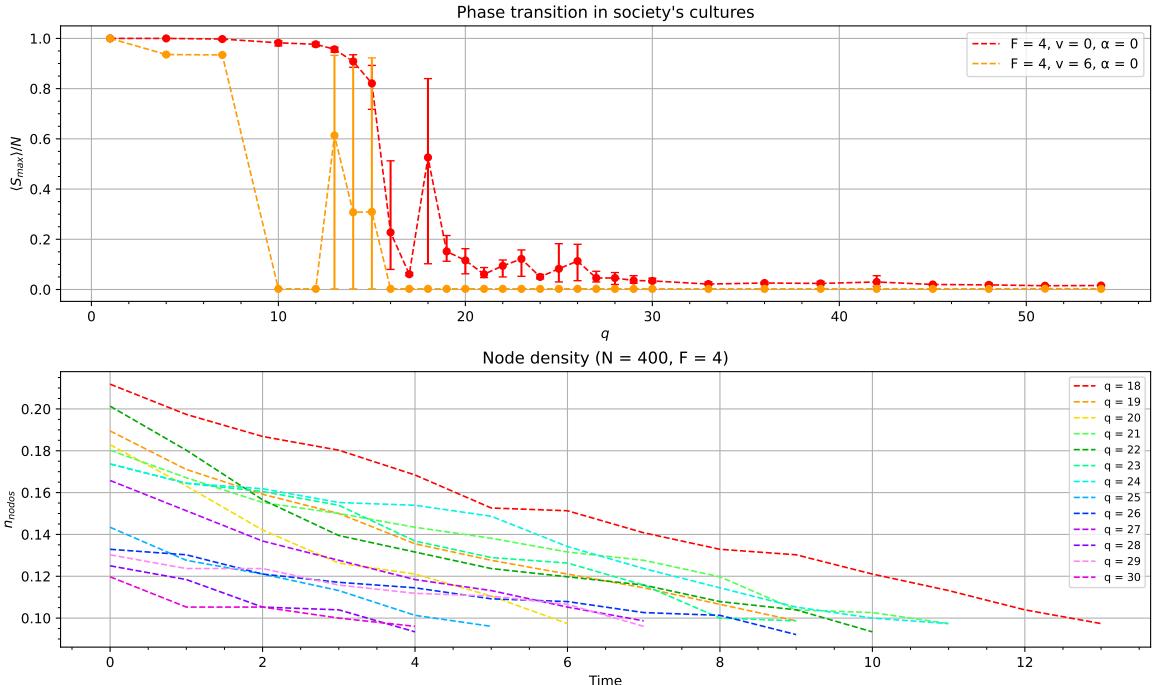


Figura XXXV: Sistema con $N = 400$, $F = 4$, $\eta = \pm 0,05$ y probabilidad de interacción con el superagente de un 5 %.

En la figura XXXV, la adición del cambio gradual también adelanta la transición de fase, manteniendo la naturaleza discontinua de la misma. Se destaca la presencia de un pico una vez llegados al supuesto estado de relajación; este pico presenta de nuevo una transición al estado absorbente multicultural. La densidad de nodos pierde el pico característico que se venía observando en sistemas con $F = 4$ y evoluciona como lo haría un sistema típico con $F = 2$.

Como conclusión, el cambio gradual afecta ligeramente a la acción del superagente, pero no es lo suficientemente intensa para cambiar los cambios impuesto por el mismo; se vuelve a destacar por tanto la dominancia de este añadido al modelo sobre el resto de las extensiones estudiadas. Esto equivaldría a entornos sociales que, sin ser muy radicales respecto a con quién pueden relacionarse, pueden evitar la imposición de opiniones externas que llegan de forma masiva, evitando así que se acabe con su diversidad. Una especie de *unión que hace la fuerza*.

Sin embargo, el cambio gradual es capaz de alterar la dinámica en la evolución de los nodos impuestos por el superagente y, asimismo, induce en la sociedad una mayor dispersión en dicha evolución. Además, provoca que la convergencia del sistema se acelere en el caso de $F = 2$ respecto al ritmo impuesto por el superagente. Destaca, sin embargo, la transición de fase tan acusada que presentan estos sistemas; los estados con coexistencia de fases son prácticamente inexistentes.

En general, introducción de un superagente no provoca cambios en la “norma” acerca de qué ocurre en el entorno del punto crítico q_c ; para valores por debajo del mismo se tienen estados monoculturales ordenados y para valores mayores se transiciones inevitablemente a un estado multicultural desordenado.

4. Conclusión

En física, se toma una teoría matemática válida y a continuación se tienen en cuenta las consideraciones físicas del problema en cuestión, ya sean experimentales o teóricas, para dar la solución completa del problema y comprobar la validez de la teoría usada. Se ha querido extraer esta estructura: se está tratando un sistema sociológico mediante un modelo físico, por lo que lo primero y más fundamental es revisar que los cambios introducidos son físicamente aceptables. A continuación, se deberían tener en cuenta las consideraciones psicosociales del problema y dar así un sentido a los resultados del modelo en el ámbito de uso del mismo.

Este modelo permite obtener resultados sociológicamente coherentes con una gran facilidad. Al ser un modelo tan simple, admite una gran cantidad de nuevas implementaciones que permitan refinar el modelo, buscando de nuevo resultados satisfactorios a partir de consideraciones más realistas. Por supuesto, esto último conllevaría dotar de significado concreto y pormenorizado a cada una de las variables consideradas.

En el presente trabajo se ha estudiado la física detrás del modelo y de los cambios introducidos con el fin de validarlos, obteniendo resultados coherentes con lo esperado. Lo que procedería, por completitud, sería un análisis psicosocial de los resultados que verifiquen si tienen o no sentido (sean o no intuitivos). En el caso de este trabajo esto se ha hecho de forma sucinta: se ha comprobado, principalmente, si al favorecer (o no) la interacción entre individuos tendría sentido un desplazamiento de la transición de fase o la desaparición de esta en favor de un estado mono o multicultural; así con todos los cambios introducidos.

Además, la añadida complejidad en los comportamientos de los autómatas con las propuestas permiten obtener dinámicas en las que el rol individual tome importancia. Estas proposiciones se han valorado usando referencias en el ámbito de la física y de la modelización, así como de la psicología social.

Todo esto permite concluir que el modelo es válido físicamente y lo muestra como un buen punto de partida para futuras implementaciones como las siguientes, que permitan aproximarse con mayor exactitud a la simulación de un sistema tan complejo como es la sociedad:

- **Redes complejas.** Actualmente se trabaja con una red simple, que puede adaptarse para contener más o menos vecinos, pero siempre dentro de la vecindad. Una buena consideración sería añadir otro tipo de redes, como pueden ser las redes *scale-free*. Esta consideración da un enfoque más realista y permitiría dar un enfoque más dinámico a la red. Por ejemplo, en redes *scale-free* tipo Barabási-Albert, puede encontrarse numéricamente que el valor del umbral crítico escala con el tamaño del sistema como $q_c \sim N^{0.39}$, perdiéndose la transición en el límite termodinámico [9]
- **Espacio multidimensional en F.** Aquí se plantearía la representación de cada individuo como un punto en el espacio F-dimensional de los *traits* considerados (véase [7]). Se pueden considerar que los individuos se parecen más cuanto menor sea la distancia entre sus puntos en el espacio de los *traits* en lugar de considerar la homofilia *trait* a *trait*.

De la misma forma, la implementación de una red dinámica podría actualizar el modelo. Así, mantener una lista asociada a cada individuo de la sociedad sobre otros individuos con los que

puede interaccionar por homofilia a pesar de la lejanía permitiría interacciones más realistas. Uno de los problemas del modelo básico es asumir que vecinos lejanos, por muy parecidos que sean, no van a interaccionar. Esto da lugar a culturas muy similares no interaccionantes por lejanía espacial. Deja fuera la posibilidad de personas que se comuniquen a distancia.

- **Polarización de la sociedad.** En el modelo tratado, así como en todas las modificaciones, la sociedad inicial se genera de forma aleatoria: hay N individuos con F traits que pueden tomar q valores distintos. Los valores asignados a cada trait son aleatorios, es decir, si $q = 3$, cada trait tomará valores aleatorios entre $\{0, 0.5, 1\}$.

Otra posibilidad sería que estos valores no fueran aleatorios, es decir, partir de una sociedad polarizada. Esto abre un nuevo análisis de los datos y haría necesaria a priori la revisión de todas las modificaciones propuestas. Se podría asimismo estudiar el tipo de polarización necesaria para llegar a cierto estado monocultural, multicultural o que se llegue al equilibrio en un estado medio, con una cultura dominante y otras, aunque no dominantes, relevantes.

- **Aplicación de PCA.** En modelizaciones básicas como la aquí estudiada, con una simetría absoluta en el espacio de las F , la aplicación de PCA se torna irrelevante. Sin embargo, si se dispone de funciones que modifiquen la interacción individual en términos de las features, (algo así como una $w_{ij}(F)$), habrá direcciones privilegiadas en el sistema. El uso de un PCA tendría entonces sentido si se verifican las condiciones para la aplicación del mismo.

La idea sería reducir la dimensionalidad en F hasta el estado fundamental, encontrando así los traits más relevantes en interacciones agente-agente para generar estados mono o multiculturales con su respectiva transición de fase siguiendo todo lo revisado en este trabajo. Así, tendría sentido introducir la asimetría dando ya un significado psicosocial a cada trait, de modo que sea sencillo estudiar como cambia. Lo ideal sería tomar el límite termodinámico $N \rightarrow \infty$ y un continuo de opiniones $q \rightarrow \infty$.

El proceso sería similar al necesario para crear ciertos test psicológicos. Se propone un número aleatorio de traits, cada uno con su significado psicosocial; lo ideal sería considerar tantos cómo características se crean fundamentales en las interacciones individuo-individuo. A continuación se realiza un test tipo Likert con el cual se estudiará la facilidad de cambio de las opiniones de individuos reales respecto a los traits considerados; los individuos deberían someterse a dicho test con cierta frecuencia durante un periodo de tiempo dado. A partir de estos resultados reales se puede deducir una $w_{ij}(F)$ y aplicar el PCA, que idealmente indicará las F relevantes desde un punto de vista psicosocial para obtener resultados físicamente coherentes sin perder información.

Esto sería equivalente a la simplificación de un problema matemático a partir de la física del mismo, ya que si por ejemplo se encuentra que este $F_{\min} > 2$, se pueden eliminar del estudio las transiciones de fase continuas que, aunque físicamente aceptables, podrían no tener sentido en el modelo. El motivo es que ciertas características o temas producen distanciamiento y polarización social inmediata y, en algunos casos, insalvable (como la política y la religión). Otros, sin embargo, podrían ser temas de 'carácter continuo', pues suelen ser menos proclives a desestabilizar la situación social a escala masiva.

Referencias

- [1] Castellano, C., Marsili, M. and Vespignani, A. (2000). Nonequilibrium Phase Transition in a Model for Social Influence. *Physical Review Letters*, 85(16), 3536-3539. DOI: 10.1103/PhysRevLett.85.3536
- [2] P. José Olivares-Olivares, P. Francisco Ortiz-González, José Olivares. Role of social skills training in adolescents with social anxiety disorder. I. *Journal of Clinical and Health Psychology* (2018). DOI: 10.1016/j.jchp.2018.11.002
- [3] Arezky H. Rodríguez and Y. Moreno. Effects of mass media action on the Axelrod model with social influence. *Phys. Rev. E* 82, 016111 (21 July 2010). DOI: 10.1103/PhysRevE.82.016111.
- [4] Castellano, C., Fortunato, S., & Loreto, V. (2009). Statistical physics of social dynamics. *Reviews of Modern Physics*, 81(2), 591–646. DOI: 10.1103/RevModPhys.81.591
- [5] Axelrod, R. (1997). The Dissemination of Culture: A Model with Local Convergence and Global Polarization. *Journal of Conflict Resolution*, 41(2), 203–226. <https://doi.org/10.1177/0022002797041002001>
- [6] Klemm, K., Eguíluz, V. M., Toral, R., & Miguel, M. S. (2003). Global culture: A noise-induced transition in finite systems. *Physical Review E*, 67(4), 045101. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.67.045101>
- [7] Christian Hofer, Gernot Lechner, Thomas Brudermann*, Manfred Füllsack (2016). Adapting Axelrod's cultural dissemination model for simulating peer effects. <http://dx.doi.org/10.1016/j.mex.2016.11.003>
- [8] K. Huang, *Statistical Mechanics* (John Wiley and Sons, New York, 1987).
- [9] UGR, Departamento de Electromagnetismo y Física de la Materia (2023). Modelo de Axelrod, trabajo propuesto para Física de los Sistemas Complejos.
- [10] Hasina Tahiridimbisoa, Nirina Maurice & Fantaye, Yabebal. (2020). Symmetric group and the Axelrod model for dissemination of cultures. *Scientific African*. 7. e00272. 10.1016/j.sciaf.2020.e00272.
- [11] D. Vilone, A. Vespignani, and C. Castellano. (2002). Ordering phase transition in the one-dimensional Axelrod model. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems* volume 30. DOI: 10.1140/epjb/e2002-00395-2
- [12] Lucas R Peres & José F Fontanari 2010 *J. Phys. A: Math. Theor.* 43 055003
- [13] Mazzitello, K. I., Candia, J., & Dossetti, V. (2007). Effects of mass media and cultural drift in a model for social influence. *International Journal of Modern Physics C*, 18(09), 1475-1482.
- [14] McQuail, D. (1977). The influence and effects of mass media. *Mass communication and society*, 70-94.