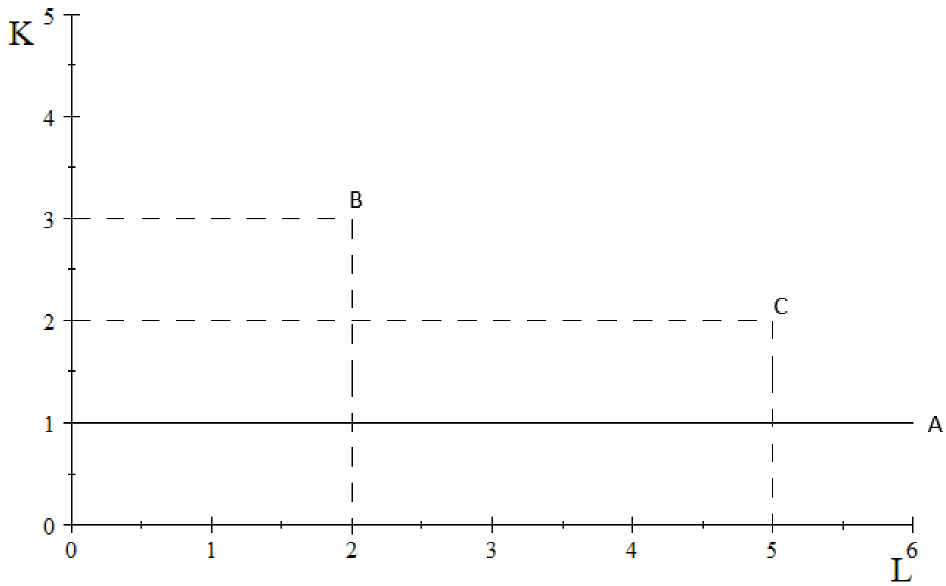
SOK-1004 Økonomiske emner og programmering

Seminar 4 - løsninger

Oppgave 1

a)



b) A dominerer C for $5 \geq X$. Både B og C er dominert av A for $X \leq 2$. For $X > 5$ er ingen teknologi dominant.

c) La k være produksjonskostnad. Da er

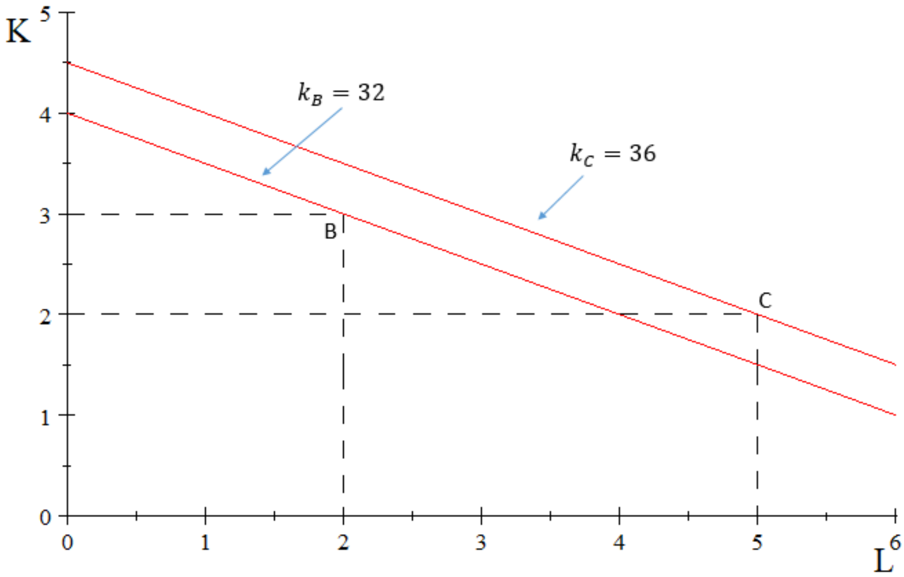
$$k = wL + rK \tag{1}$$

likningen som angir totale produksjonskostnader.

d) Anta at $w = 4, r = 8$. Fra (1) kan vi skrive

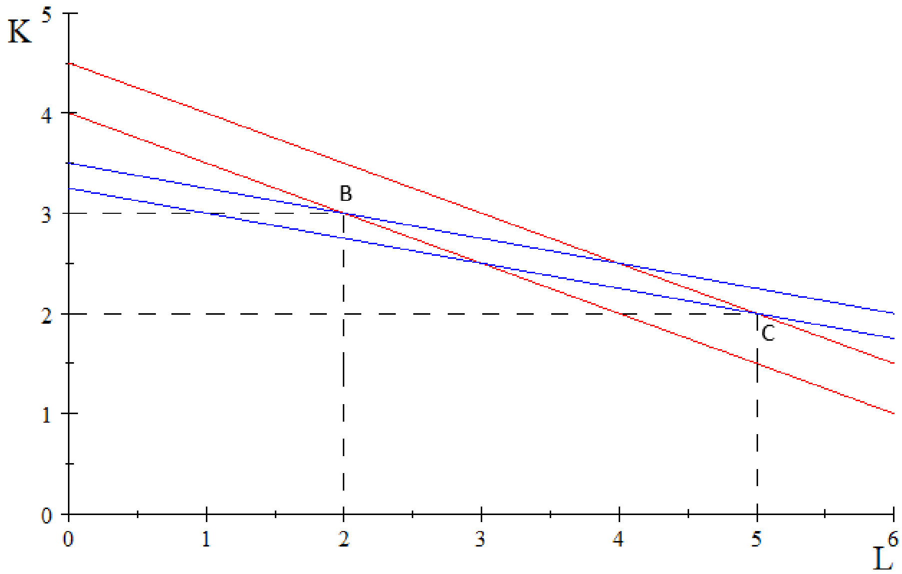
$$\begin{aligned} rK &= k - wL \\ &\Rightarrow \frac{rK}{r} = \frac{k}{r} - \frac{w}{r}L \\ &\Rightarrow K = \frac{k}{r} - \frac{w}{r}L \end{aligned} \tag{2}$$

som er en rett linje med helning $-\frac{w}{r}$, og som treffer K aksen i punkt $\frac{k}{r}$. Med $w = 4, r = 8$, er $-\frac{w}{r} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$, som tegnet i figuren nedenfor:



Kostnaden med å produsere ved bruk av teknologi B og C er $k_B = 2*4+3*8 = 32, k_C = 5*4+2*8 = 36$. Det er billigere å produsere ved hjelp av B.

e) $w = 2$ gir helningen på isokostnadskurver $-\frac{w}{r} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$. Blå linjer i figuren nedenfor



Nå er C billigst $k_B = 2*2+3*8 = 28, k_C = 5*2+2*8 = 26$. C gjør intensiv bruk av faktor L som er blitt relativt billigere.

f) Legg merke til at i deloppgave d) var $\frac{w}{r} = \frac{1}{2}$, og da ble B valgt, mens i e) var $\frac{w}{r} = \frac{1}{4}$ og C ble foretrukket.

g) For at bedriften skal velge C over B må det være at $k_B > k_C$, dvs

$$\begin{aligned} k_B &= 2w + 3r > 5w + 2r = k_C \\ &\Rightarrow 2w + 3r > 5w + 2r \\ &\Rightarrow 3r - 2r > 5w - 2w \\ &\Rightarrow r > 3w \\ &\Rightarrow \frac{1}{3} > \frac{w}{r} \end{aligned}$$

For $\frac{1}{3} > \frac{w}{r} > 0$ velger bedriften C over B, og for $\frac{w}{r} > \frac{1}{3}$ foretrekkes B over C. For $\frac{w}{r} = \frac{1}{3}$, da er $k_B = k_C$ (og bedriften er indifferent).

h) Med $\frac{w}{r} = \frac{1}{4}$ vet vi at C velges over B. C velges over A dersom

$$\begin{aligned} k_A &= Xw + r > 5w + 2r = k_C \\ &\Rightarrow Xw > 5w + r \\ &\Rightarrow \frac{Xw}{w} > \frac{5w}{w} + \frac{r}{w} \\ &\Rightarrow X > 5 + \frac{r}{w} \\ &\Rightarrow X > 5 + 4 = 9 \end{aligned}$$

Hvor vi har brukt $\frac{w}{r} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{r}{w} = 4$. Hvis C velges fremfor A må det være at $X > 9$.

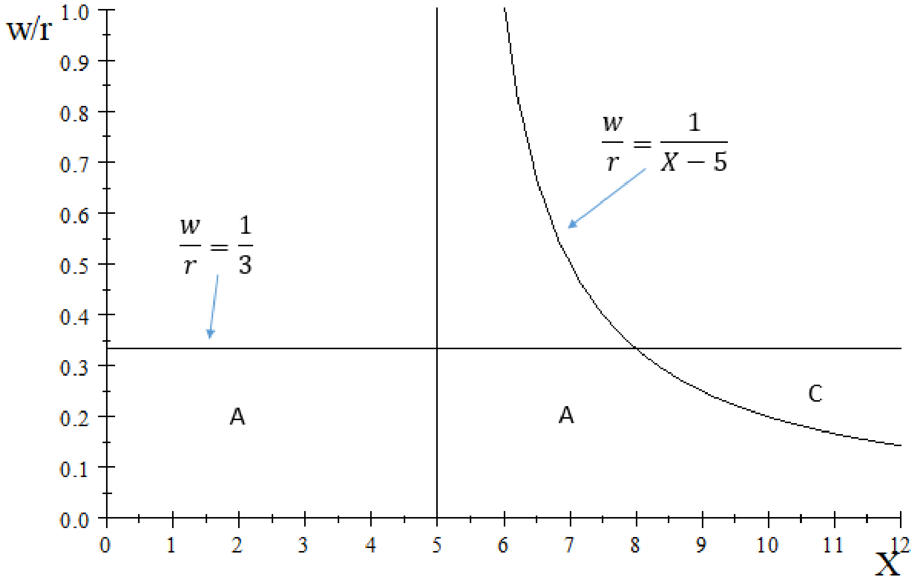
i) Fra g) vet vi at $\frac{w}{r} < \frac{1}{3}$ gjør at teknologi C velges over B. Vi kan sammenlikne A og C som i h). C velges dersom

$$\begin{aligned} k_A &= Xw + r > 5w + 2r = k_C \\ &\Rightarrow Xw - 5w > 2r - r \\ &\Rightarrow w(X - 5) > r \end{aligned} \tag{3}$$

Legg merke til at dette aldri kan oppfylles dersom $X \leq 5$ (for da er venstreside 0 eller et negativt tall, mens høyresiden er at positivt tall). Da har vi at A foretrekkes fremfor C uansett verdi på w, r dersom $X \leq 5$ (dette bør ikke være overraskende ettersom vi vet at A dominerer C i dette tilfellet - se på deloppgave b). Dersom $X > 5$ kan (3) skrives som

$$\frac{w}{r} > \frac{1}{X - 5}.$$

For $\frac{w}{r} < \frac{1}{3}$ har vi to områder i figuren hvor A foretrekkes, og ett hvor C er bedre en A:



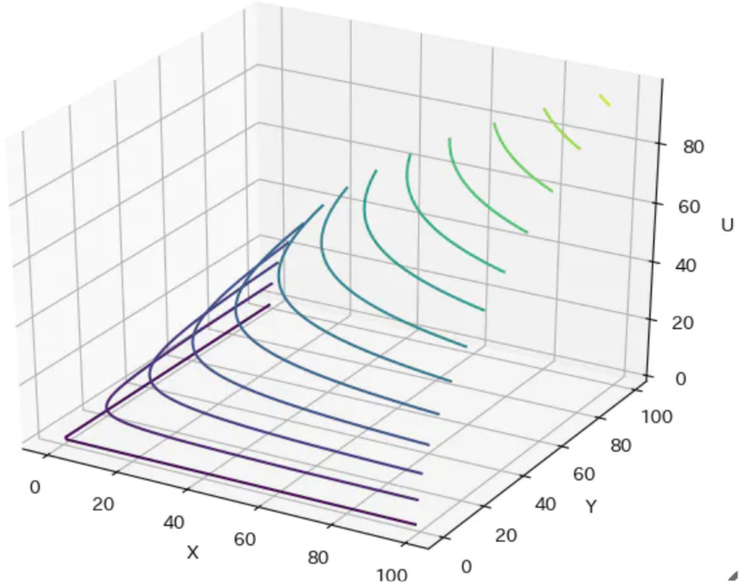
Oppgave 2

Produktfunksjon av type Cobb-Douglas med produksjonsfaktorer Arbeidskraft (L) og Kapital (K):

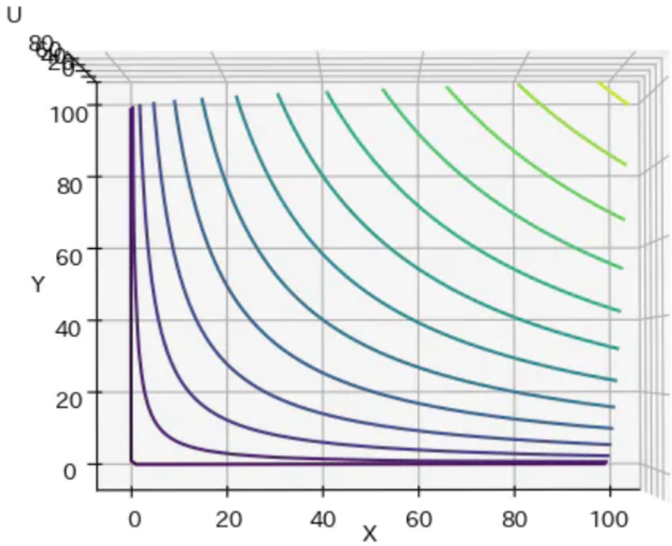
$$y = AL^{\beta}K^{1-\beta}.$$

Her er $A > 0$, og $1 > \beta > 0$ er produksjonselastisiteten på arbeidskraft. Bruker man 1% mer L i produksjonsprosessen økes produksjon med β%; økes bruken av K med 1% vil produksjon økes med $(1-\beta)$%. Se forelesning 10.

a) R koden som viser denne funksjonen i 3D er gitt i oppgaven. Det er mulig å tegne denne funksjonen i 2D ved å fastsette produksjonsnivået og se etter kombinasjoner av L, K som gir nøyaktig denne mengden. Her finner du et eksempel av Python kode som også tegner figuren i 3D (https://titanwolf.org/Network/Articles/Article?AID= 127a-494d-a892-ee553ca4bb93#gsc.tab=0). Fra samme side kan du finne dette bildet

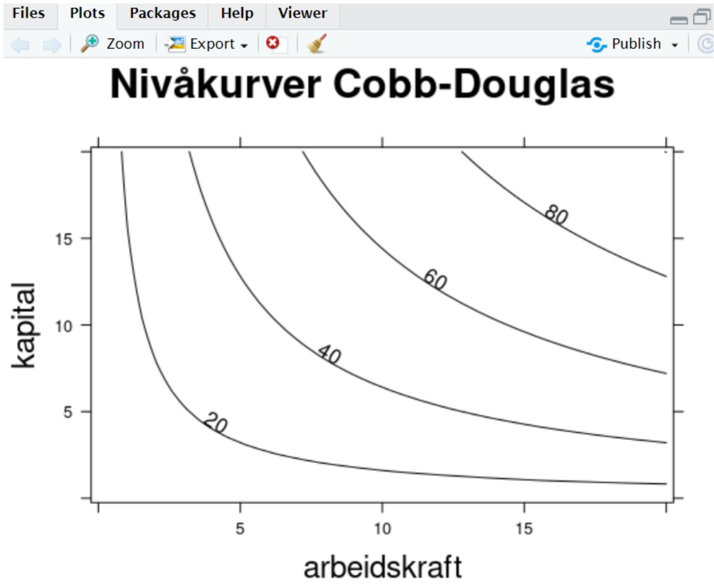


(her er x, y produksjonsfaktorer og u er produsert mengde). Hver kurve representerer ett produksjonsnivå, og angir kombinasjoner med produksjonsfaktorer som gir nøyaktig denne mengden. Dersom du klarer å se overfra og ned, hva ville du ha sett? Følgende figur gir svaret:

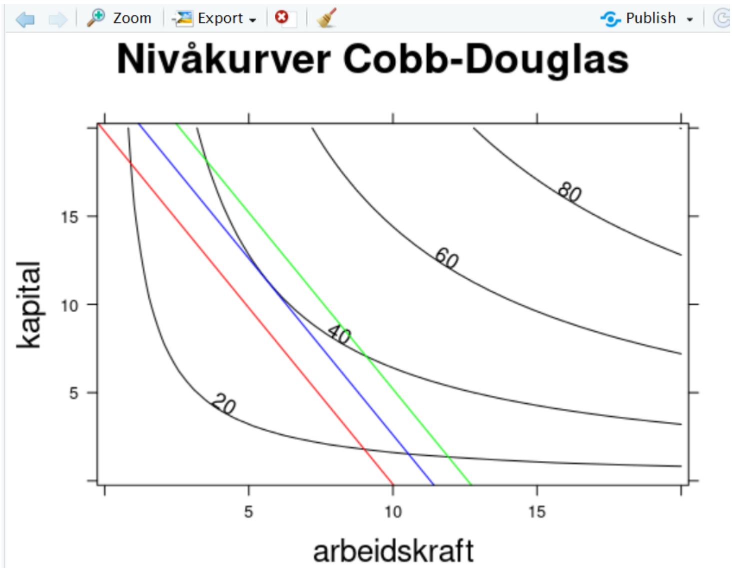


Dette er en figur tegnet i 2D hvor kurvene heter "nivåkurver" ettersom de gir kombinasjoner av variablene som gir dette nivået (denne verdien) på funskjonen. Desto lenger bort fra origo vi kommer, jo større er produskjonen.

Det er disse kurvene som du tegner med R koden oppgitt i oppgaven. Her kalles de produksjonsisokvanter. Iso=lik, kvant=kvantum, dvs lik kvantum produsert.



b) Så må du legge på isokostnadskurver som gjenspeiler den relative prisen på arbeidskraft $-\frac{w}{r} = -\frac{2}{1} = -2$. R koden finnes på github: https://github.com/uit-sok-1004-h21/uit-sok-1004-h21.github.io/blob/main/sem%204%20oppgave%202%20solution%20



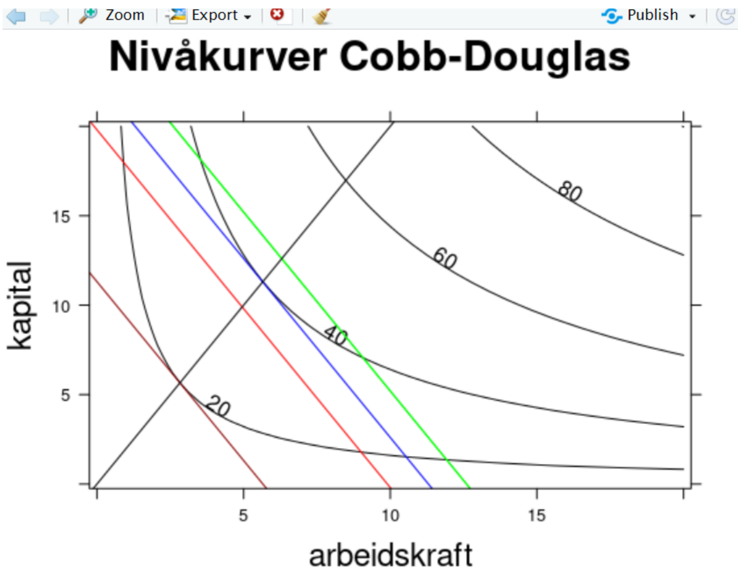
Her er følgende kode brukt:
ladd(panel.abline(a=19.8, b=-2, col="red"))
ladd(panel.abline(a=22.6, b=-2, col="blue"))
ladd(panel.abline(a=25.2, b=-2, col="green"))

Denne koden tegner en rett linje $y = a + bx$ hvor a angir hvor linjen treffer y-aksen, og b er helningen til linjen; med $b > 0$ heller linjen oppover (y øker når x

øker), og linjen heller nedover for $b < 0$ (økning i x fører til reduksjoner i y). Her er $b = -\frac{w}{r} = -2$.

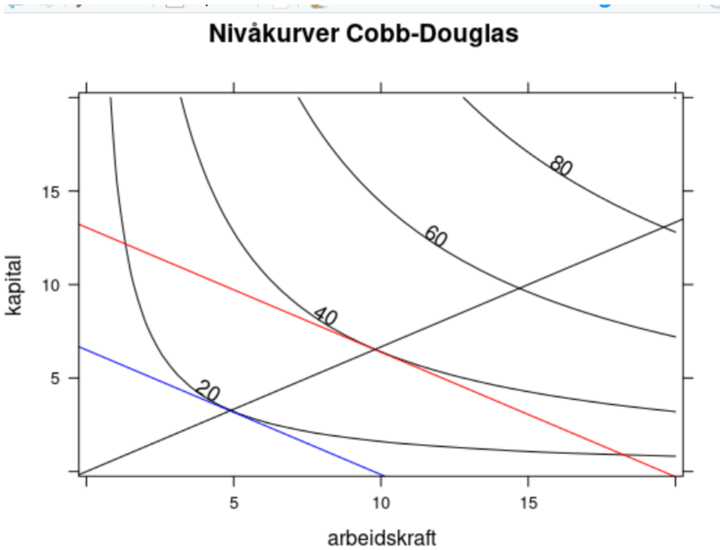
c) Kombinasjoner av L, K på den røde linjen koster $19,8$, på blå $22,6$ og $25,2$ på den grønne. Vi vil minimere kostnaden ved å produsere 40 enheter, dvs vi må velge en kombinasjon av L, K som er på isokvant 40 i figuren. Det er ingen punkter på den røde isokostnadslinjen som går gjennom 40 isokvanten. Det er derimot to punkter på den grønne linjen som krysser 40 isokvanten, noe som innebærer at det er mulig å produsere 40 enheter til en kostnad på 25,2. Men dette er ikke kostnadsminimerende. Flytt den grønne linjen litt mot origo (med samme helning), så finner du to nye punkter som krysser 40 isokvanten, dvs to kombinasjoner av L, K som gir 40 enheter produkt, og til en lavere kostnad enn på den grønne linjen.

Denne prosessen kan du gjenta inntil du oppnår den blå linjen som **tangerer** 40 isokvanten (dvs at linjen er borte i isokvanten i kun ett punkt). Denne linjen kan ikke flyttes lenger til venstre ettersom vi da ikke oppnår kombinasjoner på 40 isokvanten. Kombinasjonen i tangeringspunktet gir den kostnadsminimerende måten å produsere 40 enheter gitt $w = 2, r = 1$. I figuren nedenfor er det tegnet isokostnadskurven som tangerer 20 isokvanten, samt en stråle som går fra origo gjennom disse tangeringspunktene.



Denne strålen er $K = 2L$, og viser at en kostnadsminimerende bedrift bruker dobbelt så mye kapital som arbeidskraft i en optimal løsning. (Utregningen som viser at dette stemmer, samt hvordan man finner alle tangeringspunkter skal vi komme tilbake til i kurset om mikroøkonomi). Intuitivt har hver produksjonsfaktor like mye effekt i produksjonen ($\beta = 0,5$), og K koster halvparten så mye som L så det brukes dobbelt så mye K.

d) Når prisen på K økes til $r = 3$, vil en isokostnadslinje nå ha helning $-\frac{w}{r} = -\frac{2}{3}$ (dvs slakere linjer enn vi har tegnet til nå). Kostnadsminimerende kombinasjoner av K, L er tegnet nedenfor:



Strålen som viser alle optimale løsninger har likning $K = \frac{2}{3}L$. Nå har arbeidskraft blitt relativt billigere, så det brukes mer av det!

Dette verktøyet er veldig kraftig for å løse problemer i samfunnsøkonomi. Samme type analyse gjøres for å finne optimale beslutninger til en konsument - mer i mikroøkonomikurset!