SOK-1006 Mikro V23
Løsningsforslag - Forelesning 8 (Ren & Jie, 2019)

a) Det er nærliggende å tro at hL måler mengde arbeidskraft justert for kvalitet. Her måler h menneskelig kapital (blant annet investering i utdanning og opplæring, kombinert med ferdigheter, arbeidsmoral og -erfaring), og kan måle kvaliteten til arbeidsstyrken (sektorspesifikk i paperet til Ren og Jie, 2019). Legg merke til at produktfunksjonen er spesifisert over tid (i angir sektor, t angir tid), og teknologisk nyvinning kan påvirke hvor mye som produseres for ett gitt sett med innsatsfaktorer. FoU er tatt med i produktfunksjonen for å reflektere dette.

Noe av det som kunne identifiseres som problematisk i forelesning 7 er at man forutsetter at det finnes kun to innsatsfaktorer, og at disse er homogene. Her er produktfunksjonen utvidet med en ekstra innsatsfaktor (FoU) og man tar hensyn til kvaliteten på arbeidsstyrken (dvs arbeidskraft er ikke nødvendigvis det samme fra sektor til sektor, eller over tid).

Er dette problematisk? I den enkle teoretiske produktfunksjonen er arbeidskraft og kapital gitt i *fysiske* enheter, men FoU er vanligvis angitt som et *pengemessig* beløp. Da kan det tenkes at man blander sammen fysiske og finansielle verdier i produktfunksjonen. Det kan også tenkes at det er noe problematisk å måle kvaliteten på arbeidsstyrken, og forskjellige metoder kan gi forskjellige input til produksjonsprosessen. Ett sett med metoder for å måle kvaliteten til arbeidsstyrken er basert på fysiske egenskaper (oppnådd grad, gjennomsnittlig antall år på skolen, klassestørrelser, eksamenskarakterer osv). Andre metoder prøver å gi et pengemessig anslag på kvaliteten på arbeidsstyrken ved å se på (i) hvor mye man har investert i menneskelig kapital (kostnadsbasert), eller (ii) strømmen av fremtidige inntekter fra menneskelig kapital (inntektsbasert). (Jeg kjenner til et par studier som har brukt sistnevnte tilnærming for å måle menneskelig kapital i Norge).

I anvendt arbeid vil forskere ofte bruke finansielle data ettersom det er dette som er lettest tilgjengelig. Det er vanskelig å finne et omforent mål på "Kapital" brukt i en produksjonsprosess, men man kan lett identifisere investeringer (målt i penger) i fysisk kapital fra bedriftens regnskap. Dersom alle variabler på høyre side av produktfunksjon er spesifisert i penger vil man også spesifisere verdien av det produserte produktet på venstresiden.

b) Vi vet fra tidligere at α, β, γ er produksjonselastisitetene til kapital, arbeidskraft og FoU. En 1% økning i kapital/arbeidskraft/FoU fører til en $\alpha/\beta/\gamma\%$ økning i produksjon. Dette er lett å se om man tar logaritmer av begge sidene til produktfunksjonen:

$$\begin{aligned}\ln Y_{it} &= \ln(A_i K_{it}^{\alpha}(h_{it}L_{it})^{\beta} R_{it}^{\gamma} e^{\varepsilon_{it}}) \\ &= \ln A_i + \ln K_{it}^{\alpha} + \ln(h_{it}L_{it})^{\beta} + \ln R_{it}^{\gamma} + \ln e^{\varepsilon_{it}} \\ &= \ln A_i + \alpha \ln K_{it} + \beta \ln(h_{it}L_{it}) + \gamma \ln R_{it} + \varepsilon_{it}.\end{aligned}$$

For å undersøke skalagenskapene tar vi utgangspunkt i produktfunksjonen

$$Y_{it} = A_i K_{it}^{\alpha}(h_{it}L_{it})^{\beta} R_{it}^{\gamma} e^{\varepsilon_{it}}$$

Tenk at vi dobler alle innsatsfaktorer (K, hL, R), så får vi $Y_{it}(2)$ gitt ved

$$\begin{aligned}Y_{it}(2) &= A_i(2K_{it})^{\alpha}(2h_{it}L_{it})^{\beta}(2R_{it})^{\gamma} e^{\varepsilon_{it}} \\ &= A_i 2^{\alpha} K_{it}^{\alpha} 2^{\beta}(h_{it}L_{it})^{\beta} 2^{\gamma} R_{it}^{\gamma} e^{\varepsilon_{it}} \\ &= 2^{\alpha}2^{\beta}2^{\gamma} A_i K_{it}^{\alpha}(h_{it}L_{it})^{\beta} R_{it}^{\gamma} e^{\varepsilon_{it}} \\ &= 2^{\alpha+\beta+\gamma} A_i K_{it}^{\alpha}(h_{it}L_{it})^{\beta} R_{it}^{\gamma} e^{\varepsilon_{it}} \\ &= 2^{\alpha+\beta+\gamma} Y_{it}\end{aligned}$$

Vi har tiltakende skalautbytte om

$$\begin{aligned}Y_{it}(2) - 2Y_{it} &> 0 \\ &\rightarrow 2^{\alpha+\beta+\gamma} Y_{it} - 2Y_{it} > 0 \\ &\rightarrow 2^{\alpha+\beta+\gamma} - 2 > 0 \\ &\rightarrow 2(2^{\alpha+\beta+\gamma-1} - 1) > 0 \\ &\rightarrow 2^{\alpha+\beta+\gamma-1} > 1\end{aligned}$$

som er bare mulig om $\alpha + \beta + \gamma > 1$. Likeså for avtakende skalautbytte $(\alpha + \beta + \gamma < 1)$ og konstant SUB $(\alpha + \beta + \gamma = 1)$.

c) Gjennomsnittsproduktivitet til arbeidskraft

$$\begin{aligned}\frac{Y_{it}}{(h_{it}L_{it})} &= \frac{A_i K_{it}^{\alpha}(h_{it}L_{it})^{\beta} R_{it}^{\gamma} e^{\varepsilon_{it}}}{(h_{it}L_{it})} \\ &= (h_{it}L_{it})^{-1} A_i K_{it}^{\alpha}(h_{it}L_{it})^{\beta} R_{it}^{\gamma} e^{\varepsilon_{it}} \\ &= A_i K_{it}^{\alpha}(h_{it}L_{it})^{\beta-1} R_{it}^{\gamma} e^{\varepsilon_{it}}\end{aligned}$$

d) Likning 2 i paperet er utledet ovenfor som en del av løsningen til deloppgave b).

e) Vi tar svaret fra c)

$$\frac{Y_{it}}{(h_{it}L_{it})} = A_i K_{it}^{\alpha}(h_{it}L_{it})^{\beta-1} R_{it}^{\gamma} e^{\varepsilon_{it}}$$

og tar logaritmer av hver side:

$$\ln(\frac{Y_{it}}{(h_{it}L_{it})}) = \ln(A_i K_{it}^{\alpha}(h_{it}L_{it})^{\beta-1}R_{it}^{\gamma}e^{\varepsilon_{it}})$$

dvs

$$\ln Y_{it} - \ln(h_{it}L_{it}) = \ln A_i + \alpha \ln K_{it} + (\beta - 1)\ln(h_{it}L_{it}) + \gamma \ln R_{it} + \varepsilon_{it}$$

Trikset for å få dette på samme form som i paperet er å legge $\alpha \ln(h_{it}L_{it})+ \gamma \ln(h_{it}L_{it})$ til begge sidene:

$$\begin{aligned} & \ln Y_{it} - \ln(h_{it}L_{it}) + \alpha \ln(h_{it}L_{it}) + \gamma \ln(h_{it}L_{it}) \\ = \; & \ln A_i + \alpha \ln K_{it} + (\beta - 1)\ln(h_{it}L_{it}) + \gamma \ln R_{it} + \varepsilon_{it} + \alpha \ln(h_{it}L_{it}) + \gamma \ln(h_{it}L_{it}) \end{aligned}$$

som gir

$$\begin{aligned} & \ln Y_{it} - \ln(h_{it}L_{it}) + \alpha \ln(h_{it}L_{it}) + \gamma \ln(h_{it}L_{it}) \\ = \; & \ln A_i + \alpha \ln K_{it} + (\alpha + \beta + \gamma - 1)\ln(h_{it}L_{it}) + \gamma \ln R_{it} + \varepsilon_{it} \end{aligned}$$

og ta $\alpha \ln(h_{it}L_{it}) + \gamma \ln(h_{it}L_{it})$ fra venstre til høyre side:

$$\begin{aligned} & \ln Y_{it} - \ln(h_{it}L_{it}) \\ = \; & \ln A_i + \alpha (\ln K_{it} - \ln(h_{it}L_{it})) + (\psi - 1)\ln(h_{it}L_{it}) + \gamma (\ln R_{it} - \ln(h_{it}L_{it})) + \varepsilon_{it} \end{aligned}$$

hvor $\psi = \alpha + \beta + \gamma$. Dette er likning (3) i paperet.

f) I henhold til svaret i (b) kan vi si at (i) avtakende SUB, (ii), stigende SUB, (iii) konstant SUB.

g) Konstant SUB finner vi ofte i sektorer med små bedrifter (en konsulent som jobber alene kan ta ca dobbelt så mange oppdrag ved å ansette en konsulent til). Stigende skalautbytte forventer vi i sektorer hvor få store bedrifter utfører mesteparten av produksjonen (telekommunikasjon, bygging av fly/biler). Avtakende SUB er det vanligste tilfellet, og kan finnes i sektorer som har med utvinning av naturressurser, eller hvor produksjon er risikofylt (strøm for eksempel).