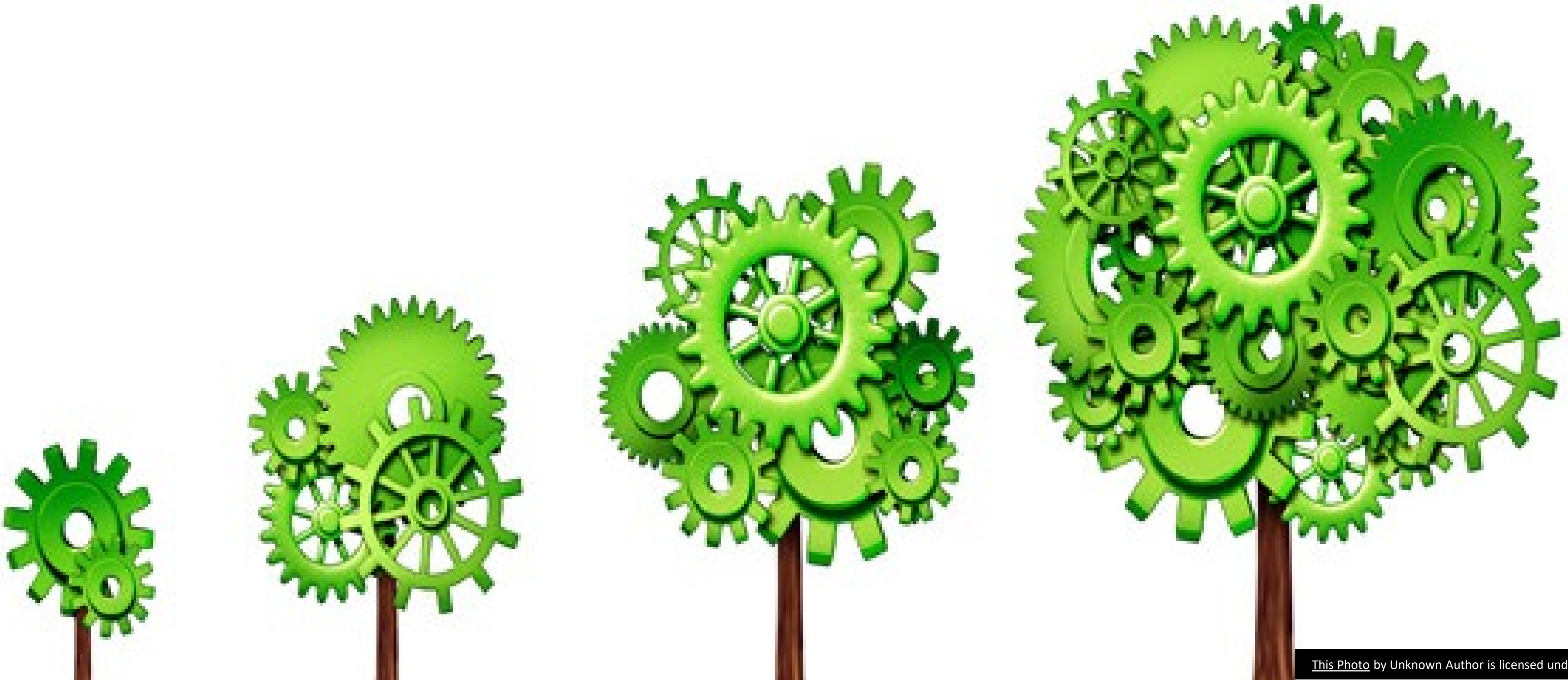


F5. SOK-2011: Økonomisk vekst

Konvergensteori og Solow-modellen med teknologisk utvikling

Prediksjoner fra Solowmodellen når det kommer til vekst i materiell velferd i fattige og rike land

1. Betingelsesløs konvergens

Prediksjon:

Dersom to land har ulik nivå på BNP per arbeider, men lik...

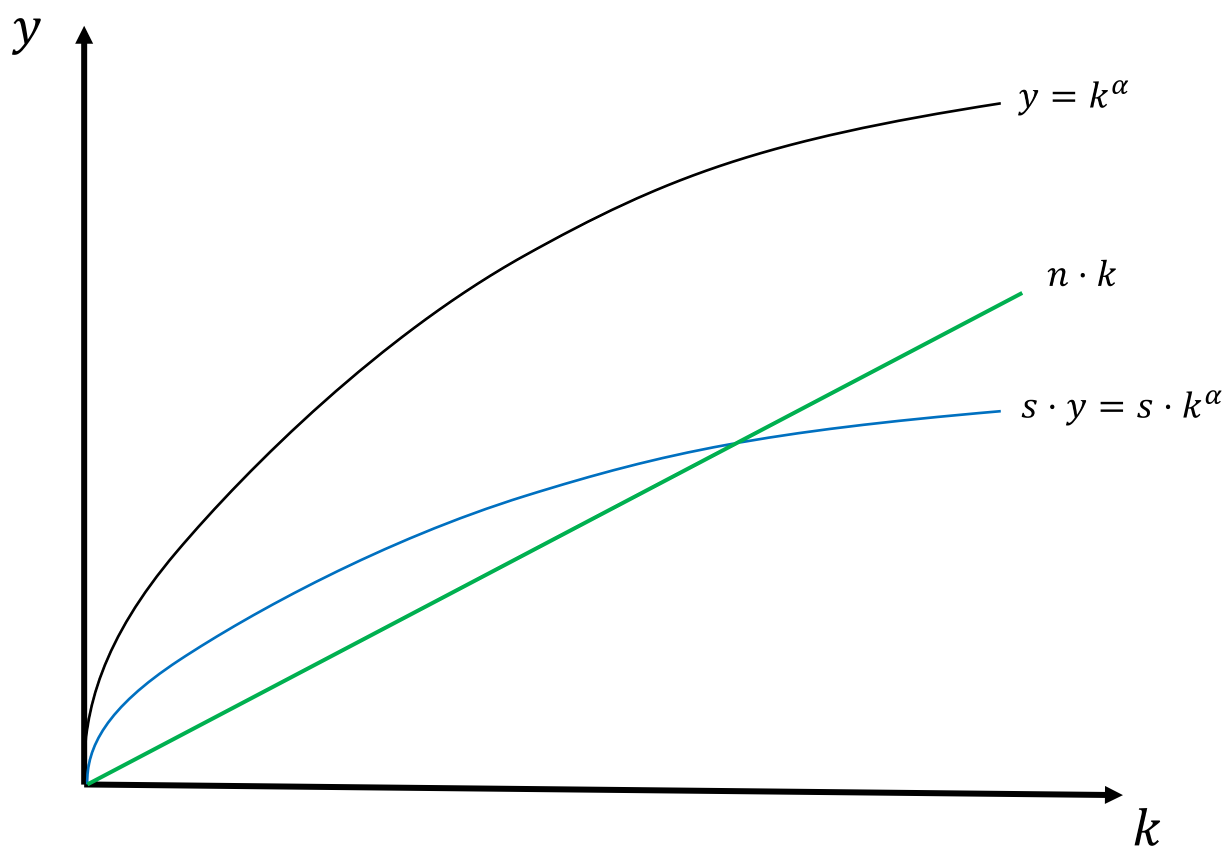
- Produksjonsfunksjon (f.eks. $Y(t) = K(t)^{\alpha} \cdot L(t)^{1-\alpha}$)
- Sparerate (f.eks $s = 0.1$)
- Befolkningsvekstrate (f.eks $n = 0.02$)
- Depresieringsrate i kapitalen (f.eks $\delta = 0.005$)

Vil...

- Det fattigere landet vokse raskere enn det rike landet
$$g_y^{fattig} > g_y^{rik}$$
- Nivået i BNP per arbeidere på sikt konvergere i de to landene
$$y^{fattig} \rightarrow y^{rik}$$

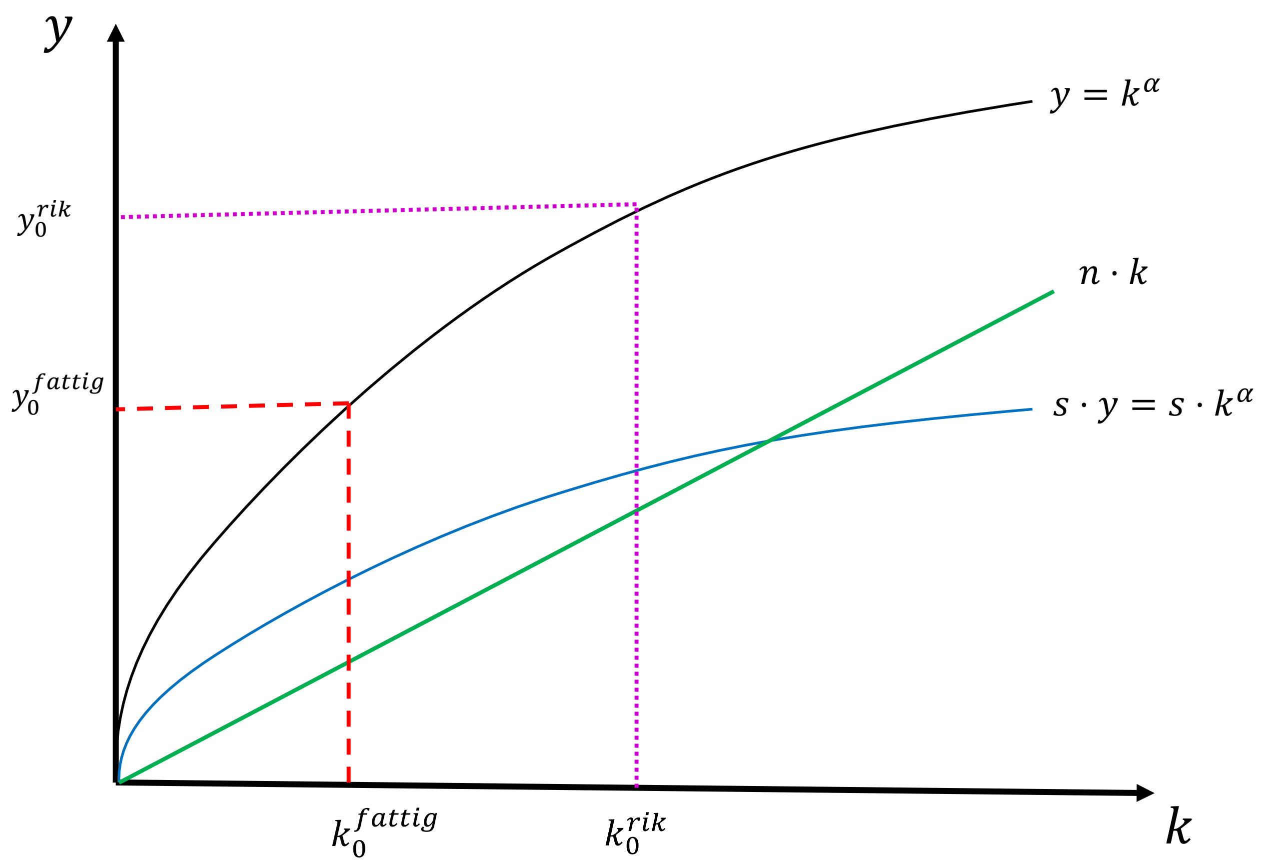
Prediksjoner fra Solowmodellen (BAS) når det kommer til vekst i materiell velferd i fattige og rike land

1. Betingelsesløs konvergens



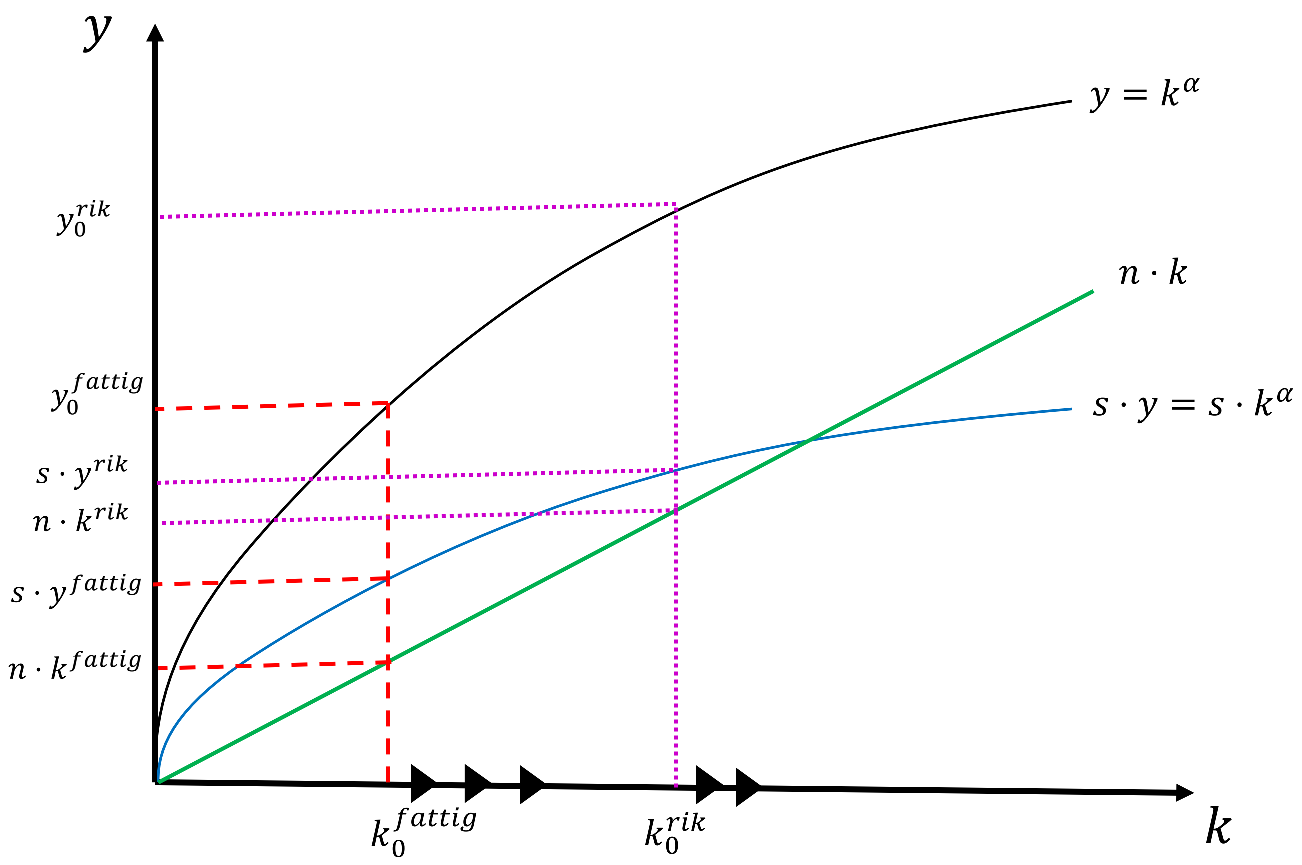
Prediksjoner fra Solowmodellen når det kommer til vekst i materiell velferd i fattige og rike land

1. Betingelsesløs konvergens



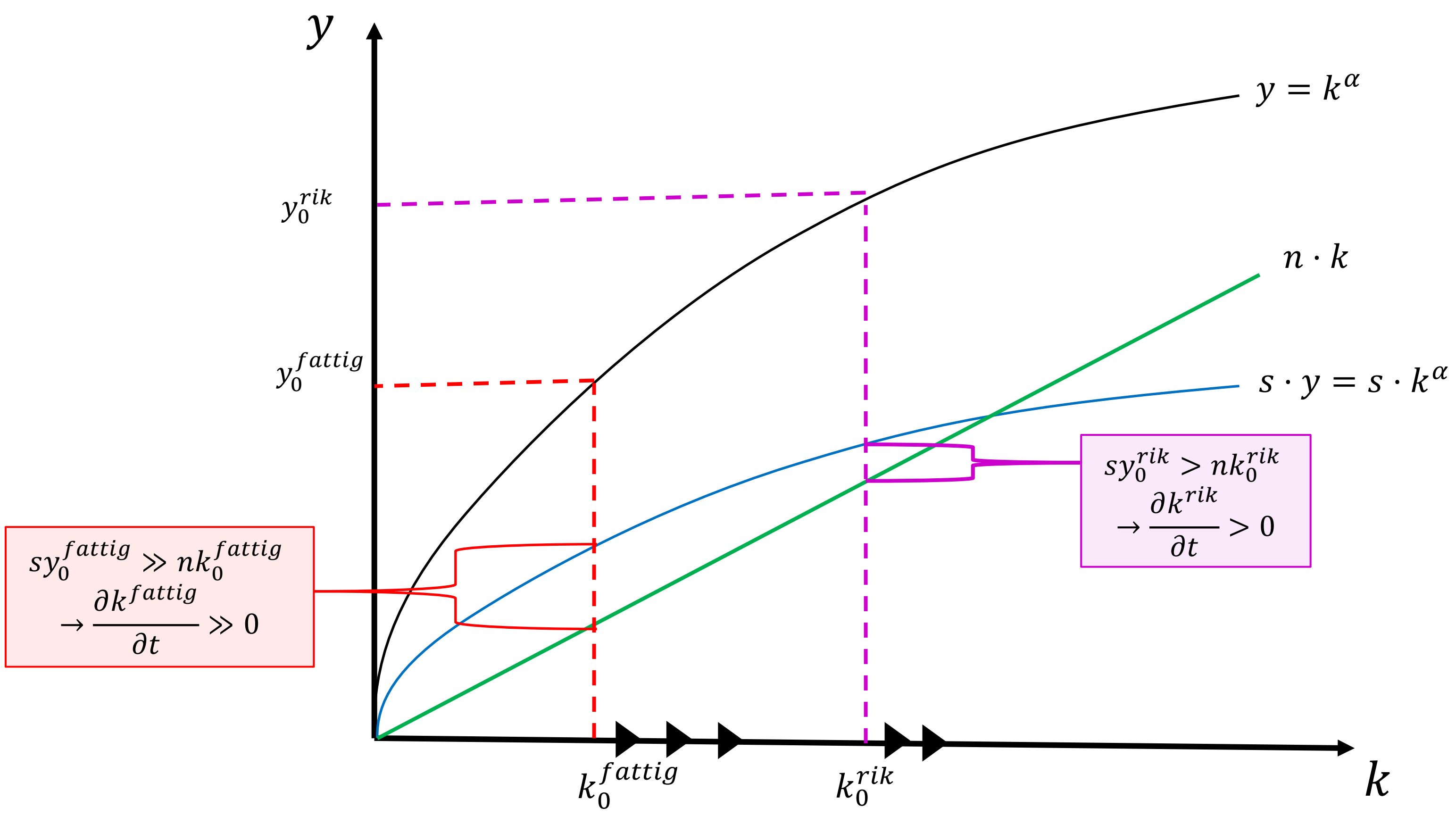
Prediksjoner fra Solowmodellen (BAS) når det kommer til vekst i materiell velferd i fattige og rike land

1. Betingelsesløs konvergens



Prediksjoner fra Solowmodellen (BAS) når det kommer til vekst i materiell velferd i fattige og rike land

1. Betingelsesløs konvergens

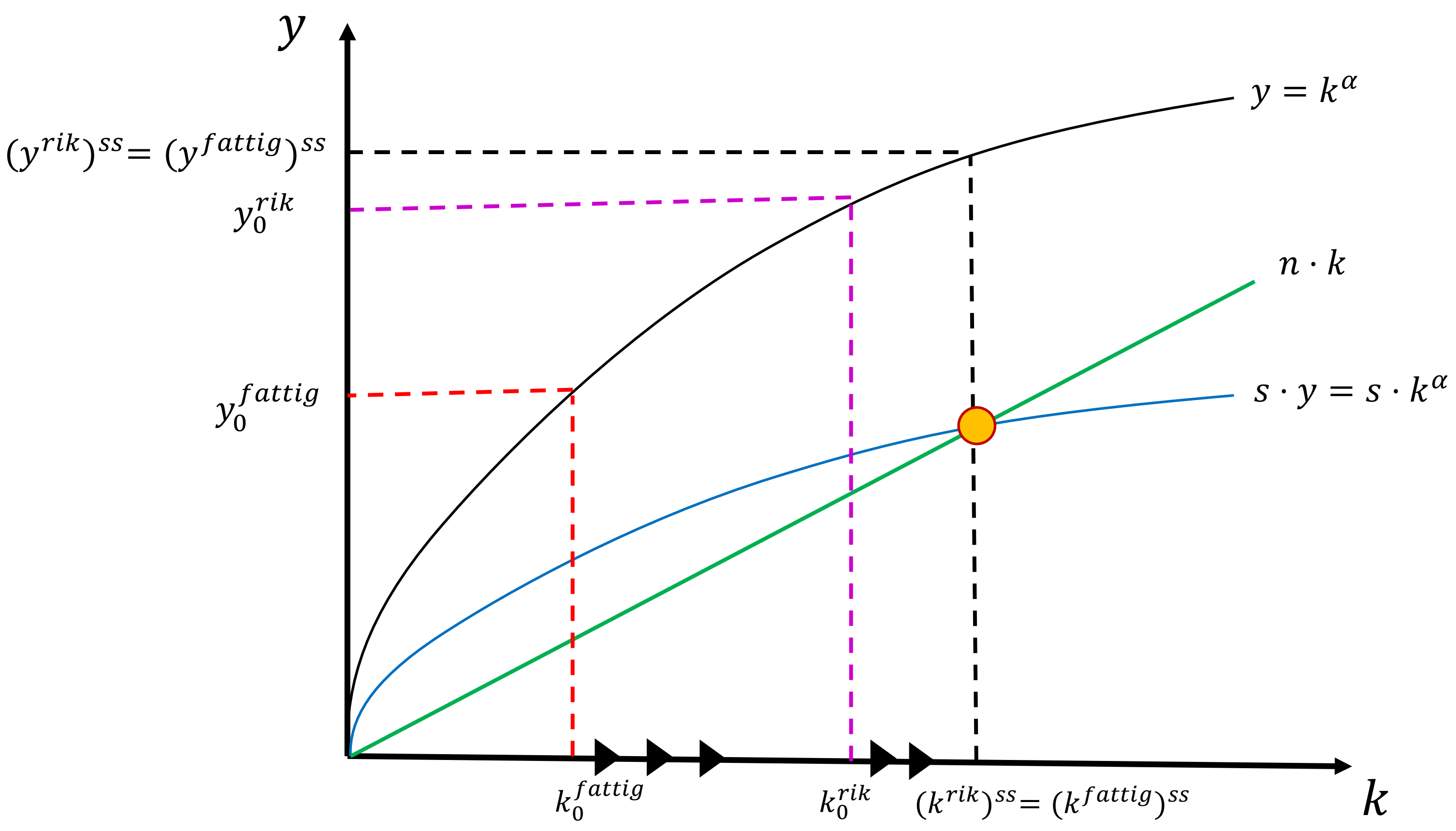


$$\frac{\partial k^{fattig}}{\partial t} > \frac{\partial k^{rik}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial y^{fattig}}{\partial t} > \frac{\partial y^{rik}}{\partial t}$$

Prediksjoner fra Solowmodellen (BAS) når det kommer til vekst i materiell velferd i fattige og rike land

1. Betingelsesløs konvergens



$$\frac{\partial k^{fattig}}{\partial t} > \frac{\partial k^{rik}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial y^{fattig}}{\partial t} > \frac{\partial y^{rik}}{\partial t}$$

$$(y^{rik})^{ss} = (y^{fattig})^{ss}$$

Prediksjoner fra Solowmodellen (BAS) når det kommer til vekst i materiell velferd i fattige og rike land

2. Betinget konvergens

Prediksjon:

Dersom to land har lik **produksjonsfunksjon** (f.eks. $Y(t) = K(t)^{\alpha} \cdot L(t)^{1-\alpha}$), og økonomien er åpent

Men ulik nivå på **sparerate** og **befolkningsvekst**, vil nivået på BNP per arbeider konvergere, gitt at produksjons-faktorene kan flytte fritt mellom landene (åpen økonomi)

Intuisjon?

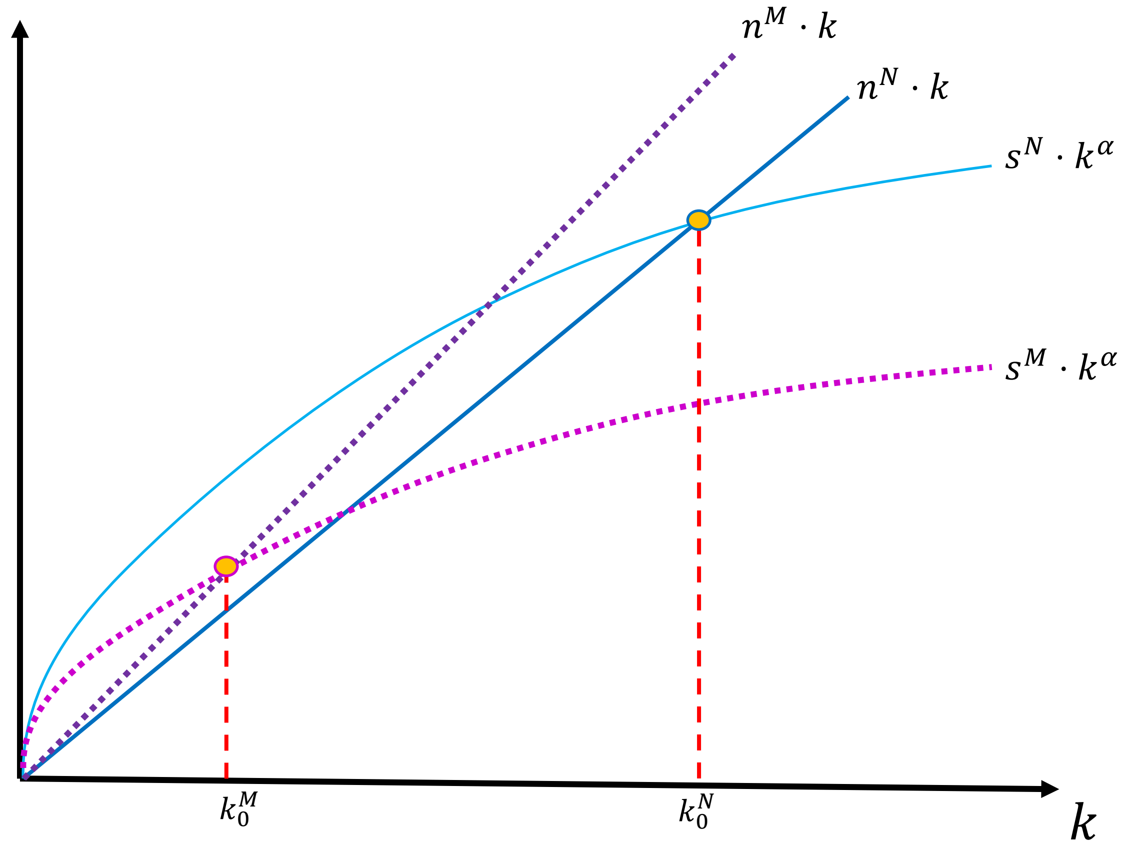
Prediksjoner fra Solowmodellen (BAS) når det kommer til vekst i materiell velferd i fattige og rike land

2. Betinget konvergens

Eksempel med et fattig og et rikt land:

Malawi:
Lav s, høy n
⇩
Lav k^{ss}
⇩
Mange arbeidere per kapitalenhet
⇩
Høy avkastning på kapital
Lav avkastning på arbeid

Norge:
Høy s, lav n
⇩
Høy k^{ss}
⇩
Få arbeidere per kapitalenhet
⇩
Lav avkastning på kapital
Høy avkastning på arbeid



Prediksjoner fra Solowmodellen (BAS) når det kommer til vekst i materiell velferd i fattige og rike land

2. Betinget konvergens

Malawi:
Lav s, høy n

Høy avkastning på kapital
Lav avkastning på arbeid

Malawiske arbeidere vil flytte til Norge

$n^M \downarrow$

$n^N \uparrow$

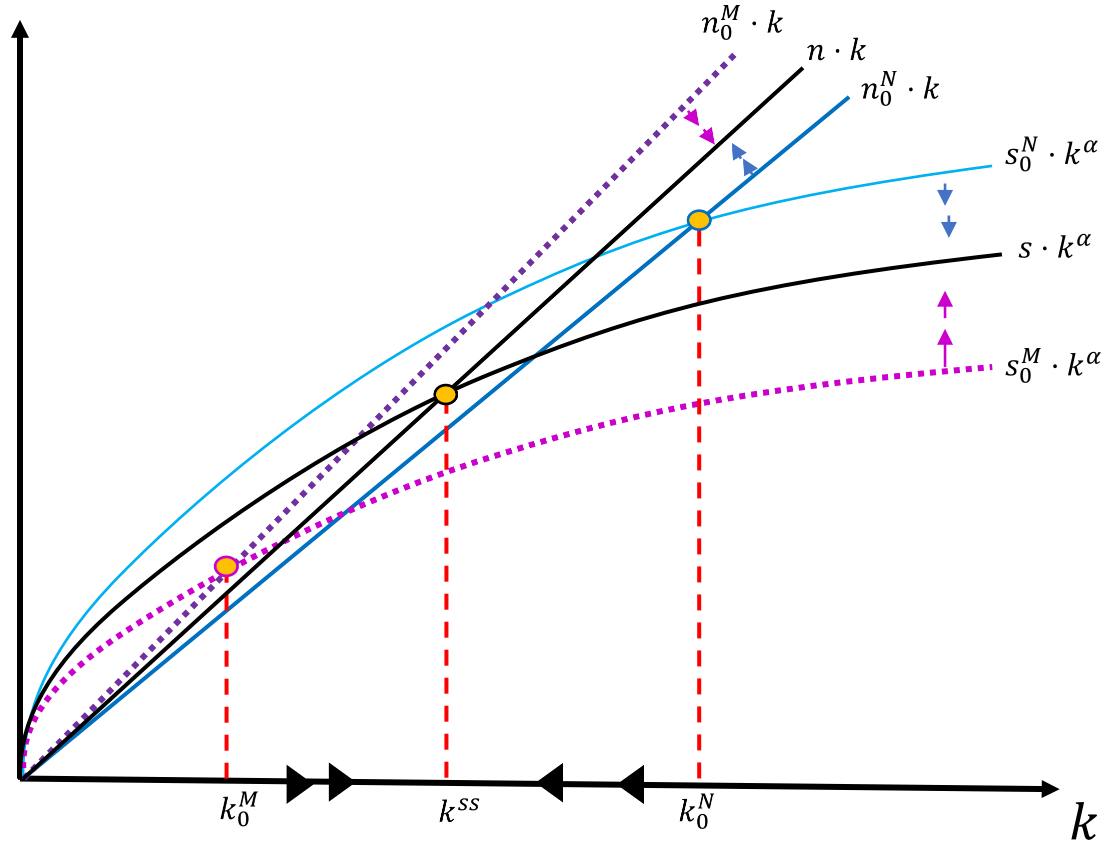
Norge:
Høy s, lav n

Lav avkastning på kapital
Høy avkastning på arbeid

Norske kapitaleiere vil investere i Malawi

$s^N \downarrow$

$s^M \uparrow$



Prediksjoner fra Solowmodellen (BAS) når det kommer til vekst i materiell velferd i fattige og rike land

2. Betinget konvergens

PREDIKSJON

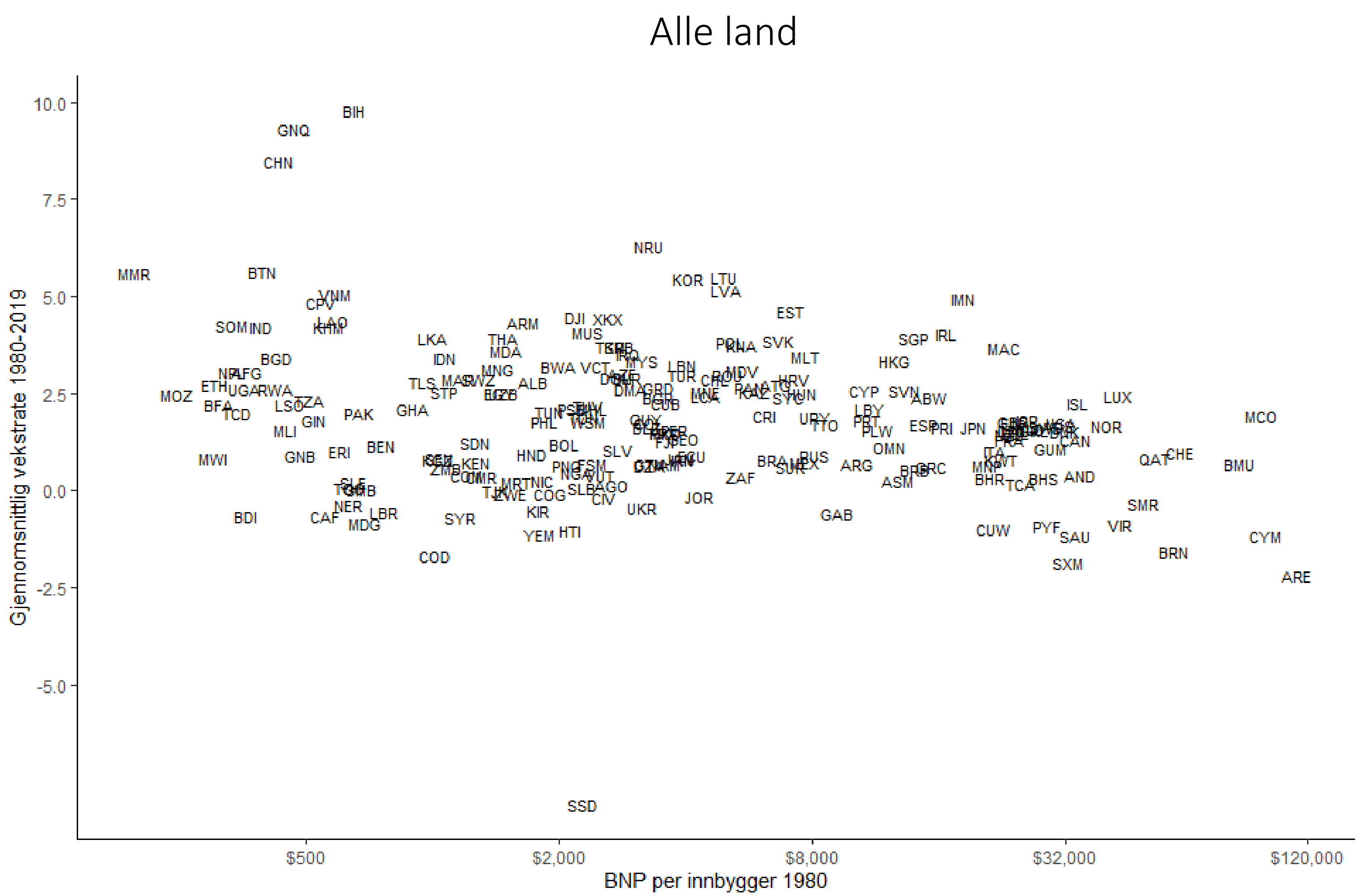
Forskjeller i avkastning på produksjonsfaktorene vil føre til at produksjonsfaktorene flytter dit avkastningen er høyest.

På sikt vil avkastning på produksjonsfaktorene (inntekt), og nivået på produksjon per arbeider utjevnes mellom land.

Hvor gode er prediksjonene?

Land med høy og middels høy inntekt

Hvor gode er prediksjonene?



Noe mangler!

Solow-modellen med teknologisk utvikling

Solow-modellen med teknologisk utvikling

Disse antakelsene er lik

- $L(t) \quad = L_0 e^{nt}$
- $I(t) \quad = S(t)$
- $S(t) \quad = s \cdot Y(t) = \frac{\partial K(t)}{\partial t}$
- Konstant skala-utbytte
- Avtakende grenseproduktivitet
- Lukket økonomi

Solow-modellen med teknologisk utvikling

Disse antakelsene er lik

- $L(t) = L_0 e^{nt}$
- $I(t) = S(t)$
- $S(t) = s \cdot Y(t) = \frac{\partial K(t)}{\partial t}$
- Konstant skala-utbytte
- Avtakende grenseproduktivitet
- Lukket økonomi

Solow-modellen med teknologisk utvikling

Disse antakelsene er lik

- $L(t) = L_0 e^{nt}$
- $I(t) = S(t)$
- $S(t) = s \cdot Y(t) = \frac{\partial K(t)}{\partial t}$
- Konstant skala-utbytte
- Avtakende grenseproduktivitet
- Lukket økonomi

Solow-modellen med teknologisk utvikling

$$Y(t) = A(t) \cdot F(\underbrace{q_K(t) \cdot K(t)}_{\underline{K}(t)}, \underbrace{q_L(t) \cdot L(t)}_{\underline{L}(t)})$$

Alle andre antagelser er lik

- $L(t) \quad = L_0 e^{nt}$
- $I(t) \quad = S(t)$
- $S(t) \quad = s \cdot Y(t) = \frac{\partial K(t)}{\partial t}$
- Konstant skala-utbytte
- Avtakende grenseproduktivitet
- Lukket økonomi

$A(t)$	$= A_0 \cdot e^{g_A t}$	Total faktorproduktivitet (Hicks-nøytral teknologi)	Vekstrate: g_A
$q_K(t)$	$= e^{jt}$	Kvalitetsindeks til kapital	Vekstrate: j
$q_L(t)$	$= e^{mt}$	Kvalitetsindeks til arbeid (Harrod-nøytral teknologi)	Vekstrate: m

Solow-modellen med teknologi

Diskrete endringer i teknologi og kvalitet i produksjonsfaktorene

Spørsmål:

Hvilke prediksjoner gir denne modellen i forhold til hva som bestemmer nivået på materiell velferd på lang sikt (hvilken land vil være rik og hvilke vil være fattig)?

Antakelser:

A er eksogent gitt og konstant

Teknologien (kvaliteten) knyttet til arbeid (q_L) og kapital (q_K) er eksogent gitte og konstante

Total produksjon kan beskrives av Cobb-Douglas funksjonen under:

$$Y(t) = A(t) \cdot \Big(\underbrace{q_K(t) \cdot K(t)}_{\underline{K}(t)}\Big)^{\alpha} \cdot \Big(\underbrace{q_L(t) \cdot L(t)}_{\underline{L}(t)}\Big)^{1-\alpha}$$

Disse antakelsene er lik

- ★ $L(t) = L_0 e^{nt}$
- ★ $I(t) = S(t)$
- ★ $S(t) = s \cdot Y(t) = \frac{\partial K(t)}{\partial t}$
- ★ Konstant skala-utbytte
- ★ Avtakende grenseproduktivitet
- ★ Lukket økonomi

Solow-modellen med teknologi

Diskrete endringer i teknologi og kvalitet i produksjonsfaktorene

Produksjon per innbygger

Solow-modellen med teknologi

Diskrete endringer i teknologi og kvalitet i produksjonsfaktorene

Produksjon per innbygger

Solow-modellen med teknologi

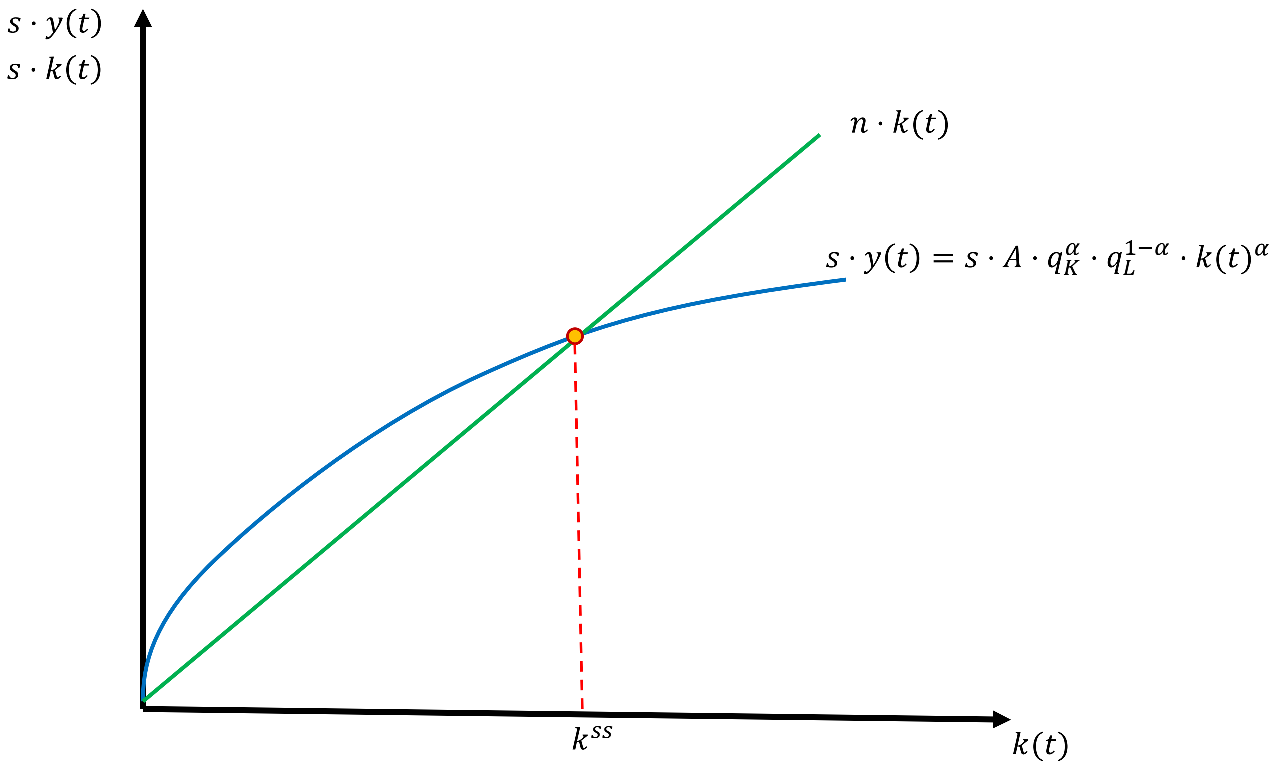
Diskrete endringer i teknologi og kvalitet i produksjonsfaktorene

Steady state

Solow-modellen med teknologi

Diskrete endringer i teknologi og kvalitet i produksjonsfaktorene

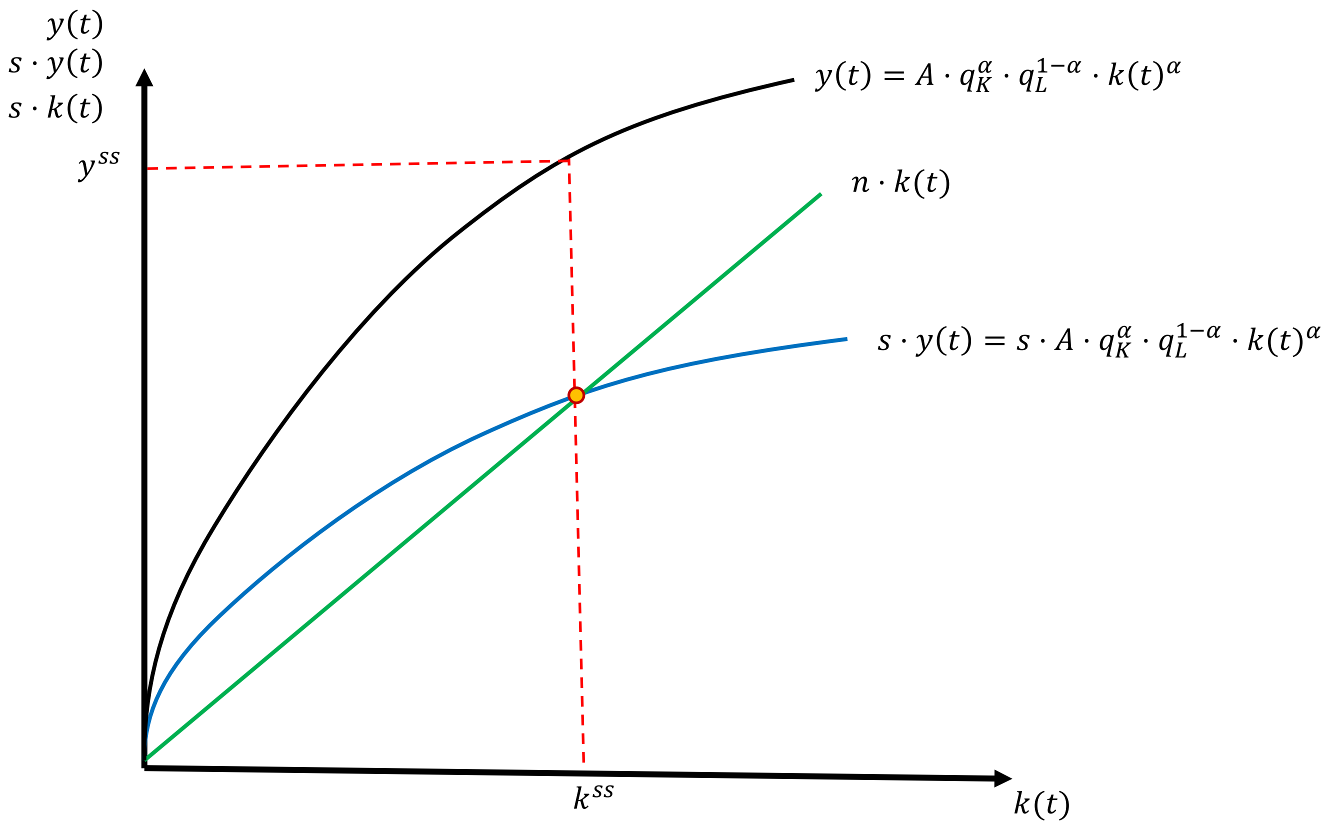
<u>Steady state</u>



Solow-modellen med teknologi

Diskrete endringer i teknologi og kvalitet i produksjonsfaktorene

Steady state



Solow-modellen med teknologi

Diskrete endringer i teknologien

Hva skjer med produksjon per innbygger dersom teknologien blir bedre?

Solow-modellen med teknologi

Diskrete endringer i teknologien

Hva skjer med produksjon per innbygger dersom teknologien blir bedre?

Solow-modellen med teknologi

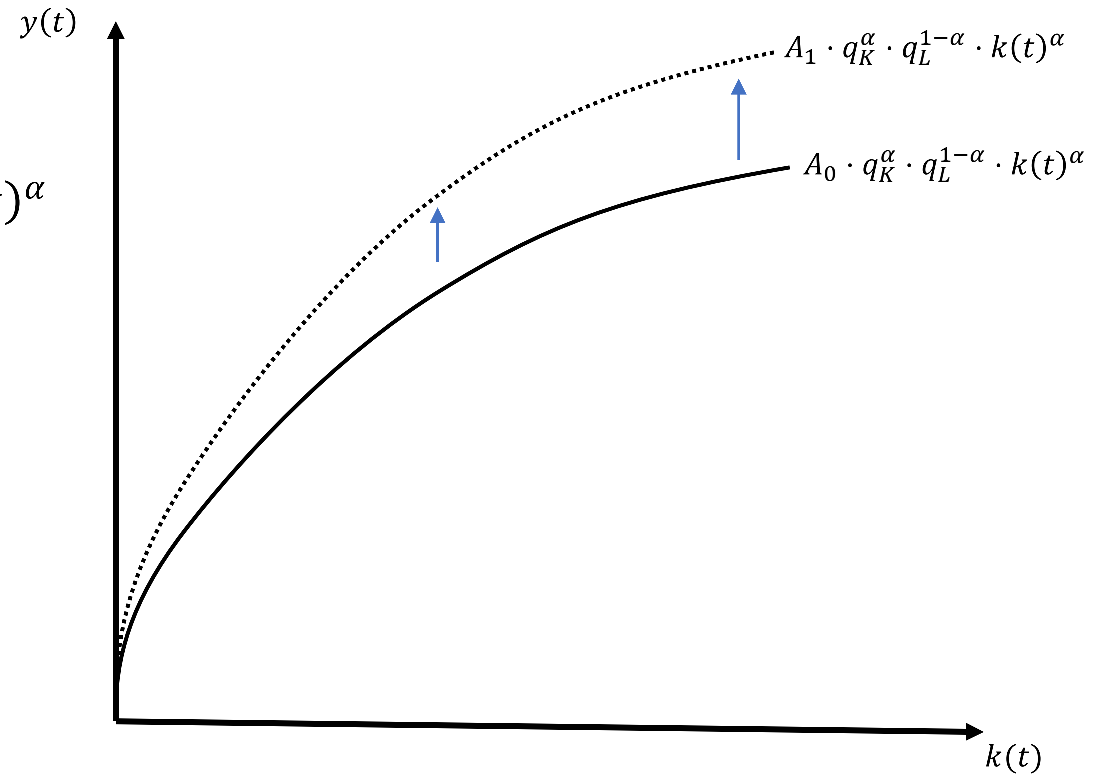
Diskrete endringer i teknologien

Hva skjer med produksjon per innbygger dersom teknologien blir bedre?

Det teknologiske nivået øker fra $A_0 \rightarrow A_1$

Produksjonsnivået i tidspunkt t øker fra
$y(t) = A_0 \cdot q_K^\alpha \cdot q_L^{1-\alpha} \cdot k(t)^\alpha$ til $y(t)' = A_1 \cdot q_K^\alpha \cdot q_L^{1-\alpha} \cdot k(t)^\alpha$

- En bedre teknologi øker BNP per innbygger ved hver nivå på kapitalintensiteten
- MEN! Økningen i produksjon per innbygger vil også føre til at kapitalintensiteten endres!



Solow-modellen med teknologi

Diskrete endringer i teknologi og kvalitet i produksjonsfaktorene

Hva skjer med produksjon per innbygger dersom teknologien blir bedre?

De faktiske investeringene øker fra

$$s \cdot A_0 \cdot q_K^{\alpha} \cdot q_L^{1-\alpha} \cdot k^{\alpha} \rightarrow s \cdot A_1 \cdot q_K^{\alpha} \cdot q_L^{1-\alpha} \cdot k^{\alpha}$$

Ved k_0^{SS} er $s \cdot A_1 \cdot q_K^{\alpha} \cdot q_L^{1-\alpha} \cdot \left(k_0^{SS}\right)^{\alpha} > n \cdot k_0^{SS}$

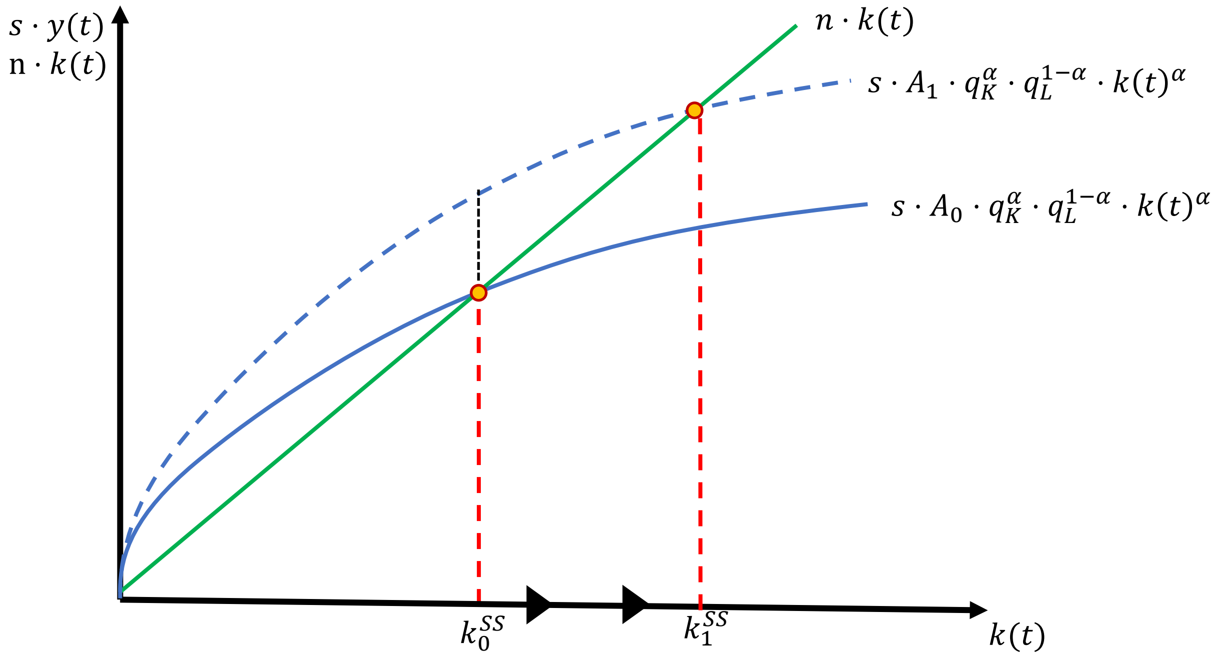
Kapital per arbeider øker: $\frac{\partial k(t)}{\partial t} > 0$

Produksjon per arbeider øker: $\frac{\partial y(t)}{\partial t} > 0$

Nytt steady state, med høyere produksjon per arbeider, der:

$$s \cdot A_1 \cdot q_K^{\alpha} \cdot q_L^{1-\alpha} \cdot \left(k_1^{SS}\right)^{\alpha} = n \cdot k_1^{SS}$$

$$y_1^{SS} = A_1 \cdot q_K^{\alpha} \cdot q_L^{1-\alpha} \cdot (k_1^{SS})^{\alpha}$$

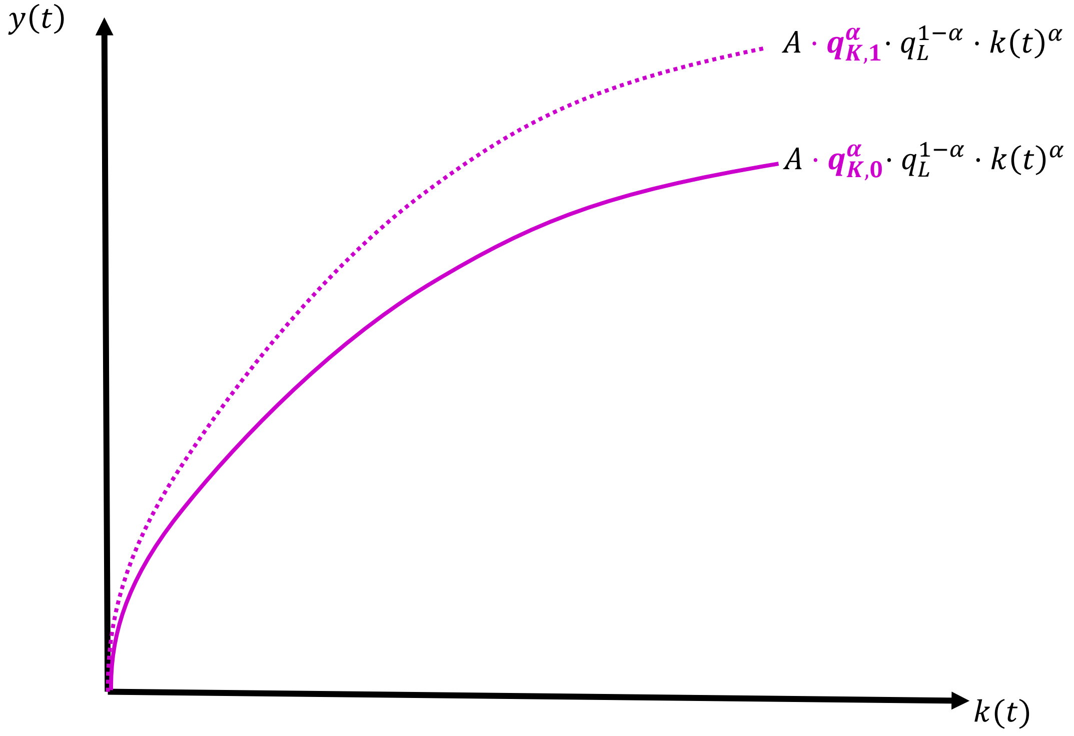


Solow-modellen med teknologi:

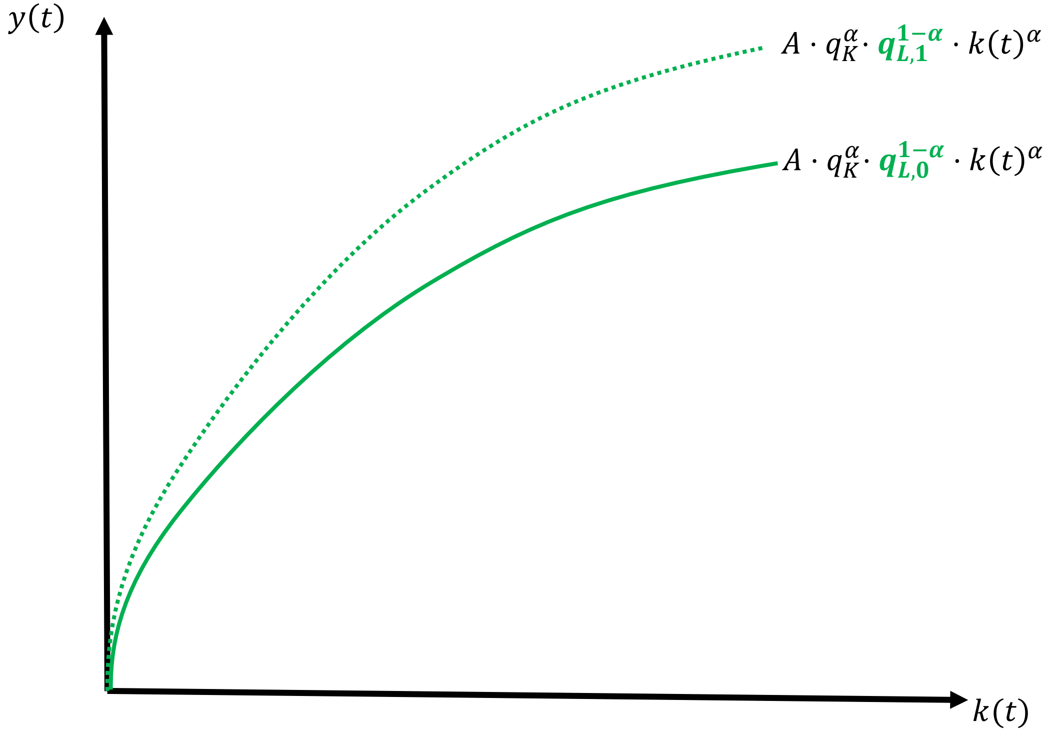
Diskrete endringer i kvaliteten til arbeid og kapital

Hva skjer med produksjon per innbygger dersom kvaliteten til arbeid og kapital blir bedre?

En økning i kvaliteten til kapitalen



En økning i kvaliteten til arbeidskraften



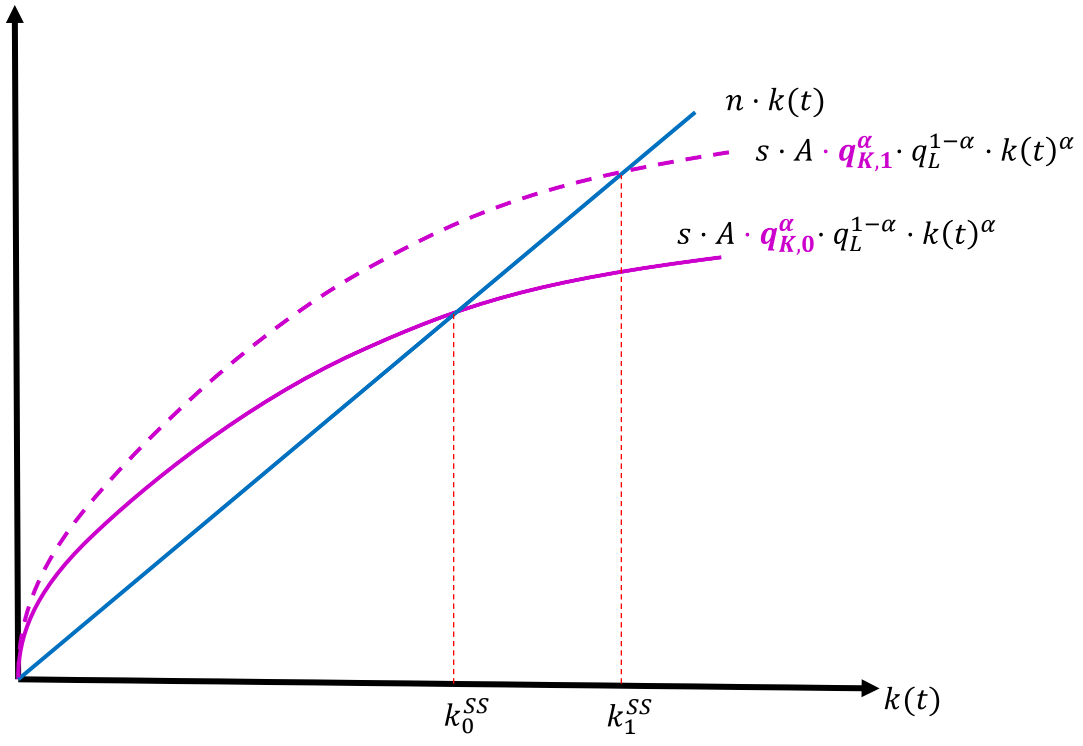
Dersom kvaliteten til kapital og/eller arbeid øker, vil produksjon per arbeider øke ved hvert nivå på kapitalintensiteten

Solow-modellen med teknologi:

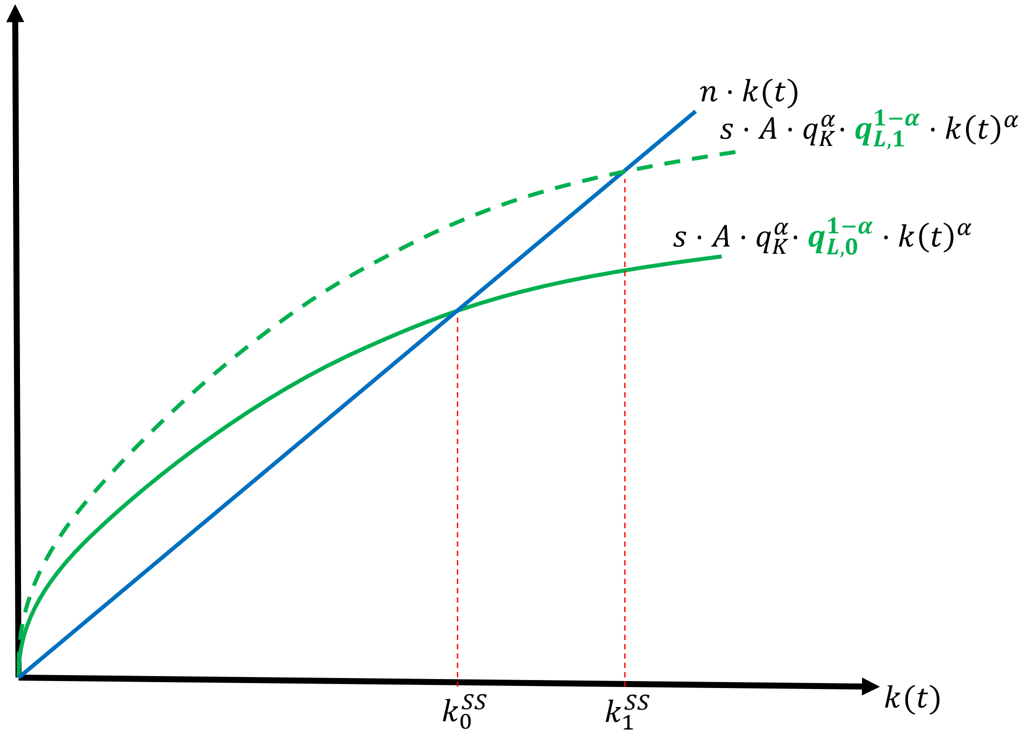
Diskrete endringer i kvaliteten til arbeid og kapital

Hva skjer med produksjon per innbygger dersom kvaliteten til arbeid og kapital blir bedre?

En økning i kvaliteten til kapitalen



En økning i kvaliteten til arbeidskraften

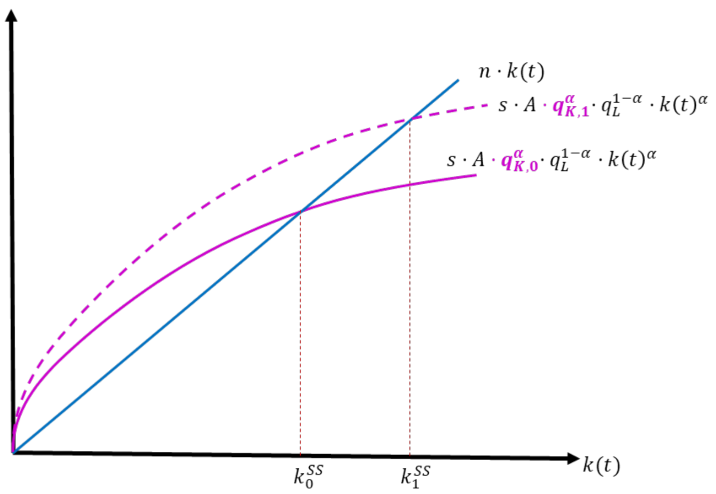


Solow-modellen med teknologi:

Diskrete endringer i kvaliteten til arbeid og kapital

Hva skjer med produksjon per innbygger dersom kvaliteten til arbeid og kapital blir bedre?

En økning i kvaliteten til kapitalen

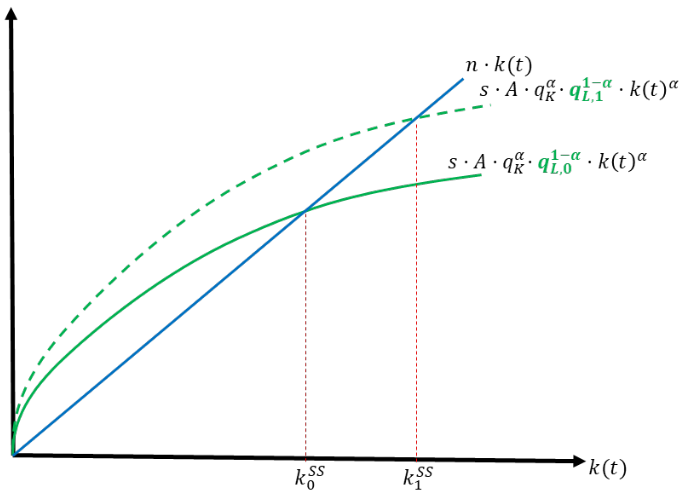


Nytt steady state, med høyere produksjon per arbeider, der:

$$s \cdot A \cdot q_{K,1}^{\alpha} \cdot q_L^{1-\alpha} \cdot \left(k_1^{SS}\right)^{\alpha} = n \cdot k_1^{SS}$$

$$y_1^{SS} = A \cdot q_{K,1}^{\alpha} \cdot q_L^{1-\alpha} \cdot (k_1^{ss})^{\alpha}$$

En økning i kvaliteten til arbeidskraften



Nytt steady state, med høyere produksjon per arbeider, der:

$$s \cdot A \cdot q_K^{\alpha} \cdot q_{L,1}^{1-\alpha} \cdot \left(k_1^{SS}\right)^{\alpha} = n \cdot k_1^{SS}$$

$$y_1^{SS} = A \cdot q_K^{\alpha} \cdot q_{L,1}^{1-\alpha} \cdot (k_1^{ss})^{\alpha}$$

Solow-modellen med teknologi

Prediksjoner

Rike land karakteriseres av **høy** s, **lav** n, **høy** A, og **høyt** nivå på q_L, q_K

Fattige land karakteriseres av **lav** s, og/eller **høy** n, og/eller **lav** A, og/eller **lavt** nivå på q_L, q_K

Solow-modellen med teknologi:
Kontinuerlig vekst i teknologien og i kvaliteten til arbeid og kapital

NB:

Pensumboken antar at teknologien er «**Hicks**-nøytral» (påvirker alle produksjonsfaktorer likt)

$$Y(t) = A(t) \cdot F(K(t), L(t))$$

En vanligere antakelse er at teknologien er «**Harrod**-neutral» (knyttet til arbeid):

$$Y(t) = F(K(t), A(t) \cdot L(t))$$

Med **Harrod**-neutral teknologi er det ganske enkelt å ta fram et uttrykk for nivået på produksjon per arbeider og vekstraten i BNP per arbeider i steady state.

Med **Hicks**-neutral teknologi er dette ikke mulig med en generell produksjonsfunksjon. Det går likevel å **finne den balanserte vekstbanen** dersom vi bruker en Cobb-Douglas funksjon til å beskrive produksjonen. Vi vil likevel ikke kunne ta fram nivået på produksjon per innbygger i steady state.

Solow-modellen med teknologi:
Kontinuerlig vekst i teknologien og i kvaliteten til arbeid og kapital

NB:

Pensumboken antar at teknologien er «**Hicks**-nøytral» (påvirker alle produksjonsfaktorer likt)

$$Y(t) = A(t) \cdot F(K(t), L(t))$$

Jeg vil følge pensumboken.

Dette fører til at vi ikke kan ta fram et uttrykk for nivået på produkjson per arbeider i steady state (selv om vi bruker Cobb-Douglas). Vi vil likevel kunne ta fram bestemmelsesfaktorer for vekstraten i produksjon per innbygger i steady state.

NB: Hess skriver at vi ikke kan utlede vekstraten i steady-state. Dette er riktig dersom vi bruker en generell produksjonsfunksjon. Jeg har lastet opp et dokument på GitHub der jeg viser hvordan vi kan ta fram vekstraten i steady state da vi bruker en Cobb-Douglas funksjon med Hicks-nøytral teknologi. Jeg viser også hvordan vi løser modellen med Harrod-nøytral teknologi.

Jeg krever <u>ikke</u> at dere lærer denne utledningen.

Solow-modellen med teknologi:
Kontinuerlig vekst i teknologien og i kvaliteten til arbeid og kapital

Total produksjon

$$Y(t) = A(t) \cdot (q_K(t) \cdot K(t))^{\alpha} \cdot (q_L(t) \cdot L(t))^{1-\alpha}$$

Produksjon per arbeider

$$y(t) = A(t) \cdot q_K(t)^{\alpha} \cdot q_L(t)^{1-\alpha} \cdot k(t)^{\alpha}$$

Solow-modellen med teknologi:
Kontinuerlig vekst i teknologien og i kvaliteten til arbeid og kapital

	Nivå	Vekstrate
Teknologi	$A(t) = A_0 \cdot e^{g_A \cdot t}$	$\frac{1}{A(t)} \cdot \frac{\partial A(t)}{\partial t} = g_A$
Kvalitetsindeks: Kapital	$q_K(t) = e^{j \cdot t}$	$\frac{1}{q_K(t)} \cdot \frac{\partial q_K(t)}{\partial t} = j$
Kvalitetsindeks: Arbeid (humankapital)	$q_L(t) = e^{m \cdot t}$	$\frac{1}{q_L(t)} \cdot \frac{\partial q_L(t)}{\partial t} = m$

Solow-modellen med teknologi:
Kontinuerlig vekst i teknologien og i kvaliteten til arbeid og kapital

Nivå på produksjon per arbeider i tidspunkt t

$$y(t) = A(t) \cdot q_K(t)^{\alpha} \cdot q_L(t)^{1-\alpha} \cdot k(t)^{\alpha}$$

Vekstraten i produksjon per arbeider i tidspunkt t

Solow-modellen med teknologi:
Kontinuerlig vekst i teknologien og i kvaliteten til arbeid og kapital

Solow-modellen med teknologi:
Kontinuerlig vekst i teknologien og i kvaliteten til arbeid og kapital

Solow-modellen med teknologi:
Kontinuerlig vekst i teknologien og i kvaliteten til arbeid og kapital

$$A(t) = A_0 \cdot e^{g_A \cdot t}$$

$$q_K(t) = e^{j \cdot t}$$

$$q_L(t) = e^{m \cdot t}$$

Vekst i produksjon per arbeider

$$\frac{1}{y(t)} \cdot \frac{\partial y(t)}{\partial t} = \frac{1}{A(t)} \cdot \frac{\partial A(t)}{\partial t} + \alpha \cdot \frac{1}{q_K(t)} \cdot \frac{\partial q_K(t)}{\partial t} + (1-\alpha) \cdot \frac{1}{q_L(t)} \cdot \frac{\partial q_L(t)}{\partial t} \alpha \cdot \frac{1}{k(t)} \cdot \frac{\partial k(t)}{\partial t}$$

$$g_y = \underbrace{g_A + \alpha \cdot i + (1-\alpha) \cdot m}_{\theta} + \alpha \cdot g_k$$

$$g_y = \theta + \alpha \cdot g_k$$

Vekstraten i produksjon per arbeider (materiell velferd) drivs av veksten i teknologien, veksten i kvaliteten i kapital og arbeid (**θ**), og av veksten i kapitalintensiteten

Solow-modellen med teknologi:
Kontinuerlig vekst i teknologien og i kvaliteten til arbeid og kapital

Vekst i produksjon per arbeider

$$g_y = \theta + \alpha \cdot g_k$$

Solow-modellen med teknologi:
Kontinuerlig vekst i teknologien og i kvaliteten til arbeid og kapital

Solow-modellen med teknologi:
Kontinuerlig vekst i teknologien og i kvaliteten til arbeid og kapital

Vekst i produksjon per arbeider utenom steady state

$$g_y(t) = \theta + \alpha \cdot \left(\frac{s \cdot A_0 \cdot e^{\theta \cdot t} \cdot k(t)^{\alpha} - n \cdot k(t)}{k(t)} \right)$$

Prediksjoner

Vekstraten i produksjon per arbeider drivs av vekstraten i teknologien og i kvaliteten til arbeid og kapital

Nettoinvesteringene vil øke kontinuerlig som en konsekvens av en kontinuerlig økning i produktiviteten (multiplikatoreffekt).

Utledning av vekstraten i steady state
https://github.com/uit-sok-2011-v2024/uit-sok-2011-v2024.github.io/blob/main/assets/Utledning_ss_hicks_harrod_fs.pdf

Konklusjoner så langt

- **I fravær av teknologisk utvikling** vil veksten i materiell velferd stanse opp på lang sikt (i steady state).
- Nivået på materiell velferd blir bestemt av nivået på sparераten (investeringsraten) og befolkningsvekstraten.
- Konvergensteorien predikerer at fattige land vil vokse raskere enn rike land, fordi de ligger <u>lengre ifra steady state</u>, og som følge av at produksjonsressursene vil «flytte» dit de har størst avkastning

- **Dersom teknologien og kvaliteten i produksjonsfaktorene blir bedre over tid,** vil det være vekst i materiell velferd også på lang sikt.
- Nivået på vekstraten i materiell velferd blir bestemt av nivået på vekstraten i teknologien og kvaliteten til produksjonsfaktorene.
- **Kontinuerlig vekst i materiell velferd er helt avhengig av vekstraten i teknologien og kvaliteten til produksjonsfaktorene**