Utledning av steady state med Hicks-nøytral og Harrod-nøytral teknologi

Antakelser som holder i begge modellene:

$$\frac{dK(t)}{dt} = s \cdot Y(t)$$

$$L(t) = L_0 \cdot e^{n \cdot t}$$

$$A(t) = A_0 \cdot e^{g_A \cdot t}$$

Der s, n og g_A er konstante og eksogent gitte

1. Harrod-nøytral teknologi

Produksjonsfunksjon:

$$Y(t) = K(t)^{\alpha} \cdot \big(A(t) \cdot L(t)\big)^{1-\alpha}$$

Produksjon per arbeider:

$$y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)}$$

$$y(t) = \frac{K(t)^{\alpha} \cdot \big(A(t) \cdot L(t)\big)^{1-\alpha}}{L(t)}$$

$$y(t) = A(t)^{1-\alpha} \cdot \left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)^{\alpha}$$

$$y(t) = \ A(t)^{1-\alpha} \cdot (k(t))^{\alpha}$$

Som følge av at teknologien vokser over tid i steady state, vil også produksjon per arbeider vokse over tid i steady state.

Vekstrate i produksjon per arbeider:

$$\ln\big(y(t)\big) = (1-\alpha) \cdot \ln\big(A(t)\big) + \alpha \cdot \ln\big(k(t)\big)$$

$$\frac{1}{y(t)} \cdot \frac{\partial y(t)}{\partial t} = (1-\alpha) \cdot \frac{1}{A(t)} \cdot \frac{\partial A(t)}{\partial t} + \alpha \cdot \frac{1}{k(t)} \cdot \frac{\partial k(t)}{\partial t}$$

$$g_y(t) = (1 - \alpha) \cdot g_A + \alpha g_k(t)$$

For å finne langsiktig likevekt (steady state), må vi finne en situasjon da økonomien vokser langs med en balansert vekstbane. Dette skjer når økonomien vokser med en konstant rate. Denne raten kan være lik null (som i grunnmodellen), eller positiv (men konstant).

For å fortsatt kunne identifisere likevekt må vi definere et nytt begrep: produksjon og kapital per «effektiv arbeider»

Produksjon per «effektiv arbeider»:

$$\tilde{y} = \frac{y(t)}{A(t)} = \frac{Y(t)}{A(t) \cdot L(t)}$$

Kapital per «effektiv arbeider»:

$$\tilde{k} = \frac{k(t)}{A(t)} = \frac{K(t)}{A(t) \cdot L(t)}$$

Dersom vi bruker den spesifikke produksjonsfunksjonen $Y(t) = K(t)^\alpha \cdot \big(A(t) \cdot L(t)\big)^{1-\alpha}$ ser vi at produksjon per effektiv arbeider avhenger nivået på kapital per effektiv arbeider, og at vekstraten i produksjon per effektiv arbeider avhenger vekstraten i kapital per effektiv arbeider.

Nivå på produksjon per «effektiv arbeider»

$$\tilde{y} = \frac{K(t)^\alpha \cdot \big(A(t) \cdot L(t)\big)^{1-\alpha}}{A(t) \cdot L(t)}$$

$$\tilde{y} = K(t)^\alpha \cdot A(t)^{1-\alpha} \cdot L(t)^{1-\alpha} \cdot A(t)^{-1} \cdot L(t)^{-1}$$

$$\tilde{y} = K(t)^\alpha \cdot A(t)^{1-\alpha} \cdot L(t)^{1-\alpha} \cdot A(t)^{-1} \cdot L(t)^{-1}$$

$$\tilde{y} = K(t)^\alpha \cdot A(t)^{1-\alpha-1} \cdot L(t)^{1-\alpha-1}$$

$$\tilde{y} = K(t)^\alpha \cdot A(t)^{-\alpha} \cdot L(t)^{-\alpha}$$

$$\tilde{y} = \frac{K(t)^\alpha}{A(t)^{-\alpha} \cdot L(t)^{-\alpha}} = \left(\frac{K(t)}{A(t) \cdot L(t)}\right)^\alpha$$

$$\tilde{y} = \big(\tilde{k}(t)\big)^\alpha$$

Vekstraten i produksjon per «effektiv arbeider»:

$$\ln(\tilde{y}(t)) = \alpha \cdot \ln\left(\tilde{k}(t)\right)$$

$$\frac{1}{\tilde{y}(t)} \cdot \frac{\partial \tilde{y}(t)}{\partial t} = \alpha \cdot \frac{1}{\tilde{k}(t)} \cdot \frac{\partial \tilde{k}(t)}{\partial t}$$

$$g_{\tilde{y}}(t) = \alpha \cdot g_{\tilde{k}}(t)$$

Steady - state

Siden vekstraten i produksjon per «effektiv arbeider» kun avhenger vekstraten i kapital per effektiv arbeider, kan vi finne en situasjon der kapital «per effektiv arbeider» er konstant:

$$\frac{\partial \tilde{k}(t)}{\partial t} = 0$$

For å finne ut når kapital per «effektiv arbeider» er konstant må vi først finne ut hva det deriverte av k-tilde med hensyn på tiden er. Vi kan bruke samme metode som tidligere:

1) Bruk at k-tilde er lik kapitalstokken dividert med det teknologiske nivået multiplisert med mengde arbeidskraft:

$$\tilde{k} = \frac{K(t)}{A(t) \cdot L(t)}$$

2) logaritmer dette uttrykket og ta det deriverte med hensyn på tiden:

$$\ln\left(\tilde{k}(t)\right) = \ln(K(t)) - \ln(A(t)) - \ln(L(t))$$

$$\frac{1}{\tilde{k}(t)} \cdot \frac{\partial \tilde{k}(t)}{\partial t} = \frac{1}{K(t)} \cdot \frac{\partial K(t)}{\partial t} - \frac{1}{A(t)} \cdot \frac{\partial A(t)}{\partial t} - \frac{1}{L(t)} \cdot \frac{\partial L(t)}{\partial t}$$

3) substituer inn informasjon om veksten i kapitalstokken, vekstraten i teknologien og vekstraten i arbeidskraften:

$$\frac{1}{\tilde{k}(t)} \cdot \frac{\partial \tilde{k}(t)}{\partial t} = \frac{1}{K(t)} \cdot s \cdot Y(t) - g_A - n$$

$$\frac{1}{\tilde{k}(t)} \cdot \frac{\partial \tilde{k}(t)}{\partial t} = s \cdot \frac{Y(t)}{K(t)} - g_A - n$$

4) multipliser $s \cdot \frac{Y(t)}{K(t)}$ med $\frac{A(t) \cdot L(t)}{A(t) \cdot L(t)}$ for å få uttrykket som en funksjon kun av $\tilde{k}(t)$ og av eksogene termer:

$$\frac{1}{\tilde{k}(t)} \cdot \frac{\partial \tilde{k}(t)}{\partial t} = s \cdot \frac{\left(\frac{Y(t)}{A(t) \cdot L(t)}\right)}{\left(\frac{K(t)}{A(t) \cdot L(t)}\right)} - g_A - n$$

$$\frac{1}{\tilde{k}(t)} \cdot \frac{\partial \tilde{k}(t)}{\partial t} = s \cdot \frac{\tilde{y}(t)}{\tilde{k}(t)} - g_A - n$$

$$\frac{\partial \tilde{k}(t)}{\partial t} = s \cdot \tilde{y}(t) - (g_A + n) \cdot \tilde{k}(t)$$

5) Finn steady state: sett uttrykket for $\frac{\partial \tilde{k}(t)}{\partial t} = 0$, bruk at $\tilde{y} = \tilde{k}^{\alpha}$, og løs for $\tilde{k}^{ss}$

$$s \cdot \tilde{y} - (g_A + n) \cdot \tilde{k} = 0$$

$$s \cdot \tilde{k}^{\alpha} - (g_A + n) \cdot \tilde{k} = 0$$

$$s \cdot \tilde{k}^{\alpha} = (g_A + n) \cdot \tilde{k}$$

$$\frac{1}{(g_A + n) \cdot \tilde{k}^{\alpha}} \cdot s \cdot \tilde{k}^{\alpha} = \frac{1}{(g_A + n) \cdot \tilde{k}^{\alpha}} \cdot (g_A + n) \cdot \tilde{k}$$

$$\frac{s}{g_A + n} = \frac{\tilde{k}}{\tilde{k}^{\alpha}}$$

$$\frac{s}{g_A + n} = \tilde{k}^{1-\alpha}$$

$$\left(\frac{s}{g_A + n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \tilde{k}^{ss}$$

6) Bruk at $\tilde{y}^{ss} = \left(\tilde{k}^{ss}\right)^{\alpha}$, og at $y(t) = A(t) \cdot \tilde{y}(t)$, for å finne $y^{ss}(t)$

$$\tilde{y}^{ss} = \left(\tilde{k}^{ss}\right)^{\alpha} \rightarrow \tilde{y}^{ss} = \left(\frac{s}{g_A + n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$y^{ss}(t) = A(t) \cdot \left(\frac{s}{g_A + n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Produksjon per innbygger i steady state:

$$y^{ss}(t) = A_0 \cdot e^{g_A \cdot t} \cdot \left(\frac{s}{g_A + n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Vekstraten i produksjon per innbygger i steady state:

$$\ln\left(y^{ss}(t)\right) = \ln(A_0) + g_A \cdot t + \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) \cdot (\ln(s) - \ln(g_A + n))$$

$$\frac{1}{y^{ss}(t)} \cdot \frac{\partial y^{ss}(t)}{\partial t} = 0 + g_A + \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) \cdot (0 - 0)$$

$$g_y^{ss} = g_A$$

Vi ser at vekstraten i produksjon per innbygger helt blir bestemt av vekstraten i teknologien.

2. Hicks-nøytral teknologi

Med Hicks nøytral teknologi går det ikke å finne en balansert vekstbane i alle situasjoner. Det er faktiskt kun da vi bruker en **Cobb-Douglas produksjon** som økonomien vil tilpasse seg til en balansert vekstbane.

Vi bruker en Cobb-Douglas-funksjon

$$Y(t) = A(t) \cdot K(t)^{\alpha} \cdot L(t)^{1-\alpha}$$

Og vi kan derfor finne vekstraten i steady state, g_y^{SS}.

For å finne g_y^{SS} vil vi bruke at total produksjon ($Y(t)$) og total kapital ($K(t)$) må vokse med samme konstante rate i steady state: $g_Y^{SS} = g_K^{SS}$.[1]

Hva er $\boldsymbol{g_Y^{SS} = g_K^{SS}}$?

Vi vet at: $g_K(t) = \frac{1}{K(t)} \cdot \frac{\partial K(t)}{\partial t} = s \cdot \frac{Y(t)}{K(t)}$

$$g_K(t) = s \cdot \frac{A(t) \cdot K(t)^{\alpha} \cdot L(t)^{1-\alpha}}{K(t)}$$

$$g_K(t) = s \cdot A(t) \cdot K(t)^{\alpha} \cdot L(t)^{1-\alpha} \cdot K(t)^{-1}$$

$$g_K(t) = s \cdot A(t) \cdot K(t)^{\alpha-1} \cdot L(t)^{1-\alpha}$$

$$g_K(t) = s \cdot A(t) \cdot K(t)^{-(1-\alpha)} \cdot L(t)^{1-\alpha}$$

Vi har sagt at et vilkår for steady state er at vekstraten er konstant, det vil si at $\frac{\partial g_K^{SS}}{\partial t} = 0$. La oss derfor ta det deriverte av $g_K(t)$ og sette det lik null.

---

[1] Ved å logaritme og derivere produksjonsfunksjonen ($Y(t) = A(t) \cdot K(t)^{\alpha} \cdot L(t)^{1-\alpha}$), ser vi at:

$$g_Y = g_A + \alpha g_K + (1-\alpha)n$$

Steady-state er en situasjon da økonomien vokser langs ved en balansert vekstbane (g_Y er konstant. Enten lik null eller en positiv konstant vekstrate). Dette betyr at $\frac{\partial g_Y}{\partial t} = 0$. Vekstraten i teknologien og vekstraten i arbeidskraften er konstante, men vekstraten i kapitalstokken kan endres over tid.

$$\frac{\partial g_Y}{\partial t} = \alpha \frac{\partial g_K}{\partial t}$$

Et vilkår for steady state er derfor at:

$$\frac{\partial g_Y}{\partial t} = \frac{\partial g_K}{\partial t} = 0$$

Dette betyr at $\frac{Y(t)}{K(t)}$ må være konstant over tid i steady state.

$$\frac{\partial g_K}{\partial t} = s \cdot K(t)^{-(1-\alpha)} \cdot L(t)^{1-\alpha} \cdot \frac{\partial A(t)}{\partial t} - (1-\alpha) \cdot s \cdot A(t) \cdot K(t)^{-(1-\alpha)-1} \cdot L(t)^{1-\alpha} \cdot \frac{\partial K(t)}{\partial t} + (1-\alpha) \cdot s \cdot A(t) \cdot K(t)^{-(1-\alpha)} \cdot L(t)^{1-\alpha-1} \cdot \frac{\partial L(t)}{\partial t}$$

Noter at vi kan skrive dette uttrykket som:

$$\frac{\partial g_K}{\partial t} = s \cdot K(t)^{-(1-\alpha)} \cdot L(t)^{1-\alpha} \cdot \frac{\partial A(t)}{\partial t} - (1-\alpha) \cdot s \cdot A(t) \cdot \frac{K(t)^{-(1-\alpha)}}{K(t)} \cdot L(t)^{1-\alpha} \cdot \frac{\partial K(t)}{\partial t} + (1-\alpha) \cdot s \cdot A(t) \cdot K(t)^{-(1-\alpha)} \cdot \frac{L(t)^{1-\alpha}}{L(t)} \cdot \frac{\partial L(t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial g_K}{\partial t} = s \cdot K(t)^{-(1-\alpha)} \cdot L(t)^{1-\alpha} \cdot \frac{\partial A(t)}{\partial t} - (1-\alpha) \cdot s \cdot A(t) \cdot K(t)^{-(1-\alpha)} \cdot L(t)^{1-\alpha} \cdot \boldsymbol{\frac{1}{K(t)} \frac{\partial K(t)}{\partial t}} + (1-\alpha) \cdot s \cdot A(t) \cdot K(t)^{-(1-\alpha)} \cdot L(t)^{1-\alpha} \cdot \boldsymbol{\frac{1}{L(t)}} \cdot \boldsymbol{\frac{\partial L(t)}{\partial t}}$$

Med andre ord kan vi skrive om uttrykket slik at vi får fram noen vekstrater:

$$\frac{\partial g_K}{\partial t} = s \cdot K(t)^{-(1-\alpha)} \cdot L(t)^{1-\alpha} \cdot \frac{\partial A(t)}{\partial t} - (1-\alpha) \cdot s \cdot A(t) \cdot K(t)^{-(1-\alpha)} \cdot L(t)^{1-\alpha} \cdot \boldsymbol{g_K} + (1-\alpha) \cdot s \cdot A(t) \cdot K(t)^{-(1-\alpha)} \cdot L(t)^{1-\alpha} \cdot \boldsymbol{n}$$

For å få fram vekstraten i $A(t)$ multipliserer vi med $\frac{A(t)}{A(t)} = 1$.

$$\frac{\partial g_K}{\partial t} = \frac{A(t)}{A(t)} \cdot s \cdot K(t)^{-(1-\alpha)} \cdot L(t)^{1-\alpha} \cdot \frac{\partial A(t)}{\partial t} - (1-\alpha) \cdot s \cdot A(t) \cdot K(t)^{-(1-\alpha)} \cdot L(t)^{1-\alpha} \cdot \boldsymbol{g_K} + (1-\alpha) \cdot s \cdot A(t) \cdot K(t)^{-(1-\alpha)} \cdot L(t)^{1-\alpha} \cdot \boldsymbol{n}$$

$$\frac{\partial g_K}{\partial t} = s \cdot A(t) \cdot K(t)^{-(1-\alpha)} \cdot L(t)^{1-\alpha} \cdot \boldsymbol{g_A} - (1-\alpha) \cdot s \cdot A(t) \cdot K(t)^{-(1-\alpha)} \cdot L(t)^{1-\alpha} \cdot \boldsymbol{g_K} + (1-\alpha) \cdot s \cdot A(t) \cdot K(t)^{-(1-\alpha)} \cdot L(t)^{1-\alpha} \cdot \boldsymbol{n}$$

Noter at alle vekstrater er multiplisert med $s \cdot A(t) \cdot K(t)^{-(1-\alpha)} \cdot L(t)^{1-\alpha}$. Vi kan samle disse termene:

$$\frac{\partial g_K}{\partial t} = s \cdot A(t) \cdot K(t)^{-(1-\alpha)} \cdot L(t)^{1-\alpha} \cdot (\boldsymbol{g_A} - (1-\alpha)\boldsymbol{g_K} + (1-\alpha) \cdot \boldsymbol{n})$$

For å finne steady state setter vi $\frac{\partial g_K}{\partial t} = 0$

$$s \cdot A(t) \cdot K(t)^{-(1-\alpha)} \cdot L(t)^{1-\alpha} \cdot (\boldsymbol{g_A} - (1-\alpha)\boldsymbol{g_K} + (1-\alpha) \cdot \boldsymbol{n}) = 0$$

For at dette skal skje må følgende vilkår være oppfylt:

$$(g_A - (1-\alpha)g_K + (1-\alpha) \cdot n) = 0$$

$$\rightarrow g_A + (1-\alpha)n = (1-\alpha)g_K$$

Med andre ord er g_K^{ss} gitt av:

$$g_K^{ss} = \frac{1}{1-\alpha} g_A + n$$

Siden $g_Y^{SS} = g_K^{ss}$ vil $g_Y^{SS} = \frac{1}{1-\alpha} g_A + n$

Hva er vekstraten i produksjon <u>per arbeider</u> i steady state?

Dette er enklere å finne enn man kan tro.

$$y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)}$$

$$\rightarrow g_y(t) = g_Y(t) - n$$

$$\rightarrow g_y^{SS} = g_Y^{SS} - n$$

$$\rightarrow g_y^{SS} = \frac{1}{1-\alpha} g_A + n - n$$

$$\rightarrow g_y^{SS} = \frac{1}{1-\alpha} g_A$$