



This Photo by Unknown Author is licensed under [CC BY-SA-NC](#)

F3. SØK-2011: Økonomisk vekst

Solow: grunnmodell del 2

Solow-modellen

Antakelser

1. Alle bedrifter produserer et homogent gode
2. Fullkommen konkurranse
3. Produksjonen (Y) skjer ved bruk av to produksjonsfaktorer: kapital (K) og arbeid (L)
4. Produksjonen er karakterisert av konstant skala-utbytte og avtakende marginalproduktivitet
5. Alle i befolkningen (P) er i arbeid: Arbeidskraften (L) = P
6. Befolkningen vokser med en konstant, og eksogent gitt rate (n): $L(t) = L_0 e^{n \cdot t}$
7. Spareraten (netto) er eksogent gitt, lik for alle, og kan beskrives som en andel av total inntekt: $0 \leq s \leq 1$
8. Det er ingen handel med utlandet: Eksport (X) = Import (M) = 0

Solow: grunnmodell

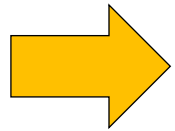
Produksjon og kapital per arbeider

Solow: grunnmodell

Produksjon og kapital per arbeider

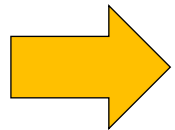
$$y = \frac{Y}{L}, \quad k = \frac{K}{L}$$

Generell produksjonsfunksjon: $Y = F(K, L)$



$$y = \frac{F(K, L)}{L} = f(k)$$

Cobb-Douglas produksjonsfunksjon: $Y = K^\alpha \cdot L^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$



$$y = \frac{K^\alpha \cdot L^{1-\alpha}}{L} = \left(\frac{K}{L}\right)^\alpha = k^\alpha$$

Solow: grunnmodell

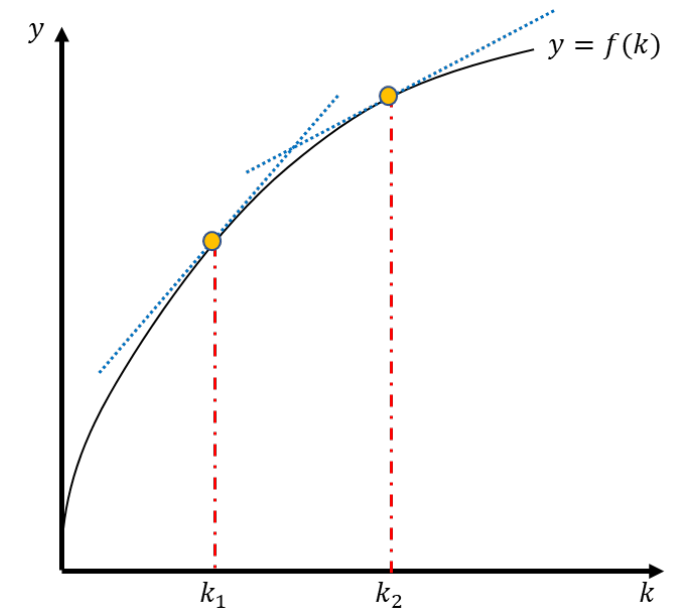
Produksjon per arbeider

Positiv og avtakende marginalproduktivitet til kapital-intensiteten

Solow: grunnmodell

Produksjon per arbeider

Positiv og avtakende marginalproduktivitet til kapital-intensiteten



Solow: grunnmodell

Produksjon per arbeider

Generell
 $y = f(k)$

Spesifikk
 $y = k^\alpha$

Hva skjer med produksjon per arbeider dersom kapital-intensiteten øker?

$$\frac{\partial y}{\partial k} = \frac{\partial f(k)}{\partial k} > 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial k} = \alpha \cdot k^{\alpha-1} > 0$$

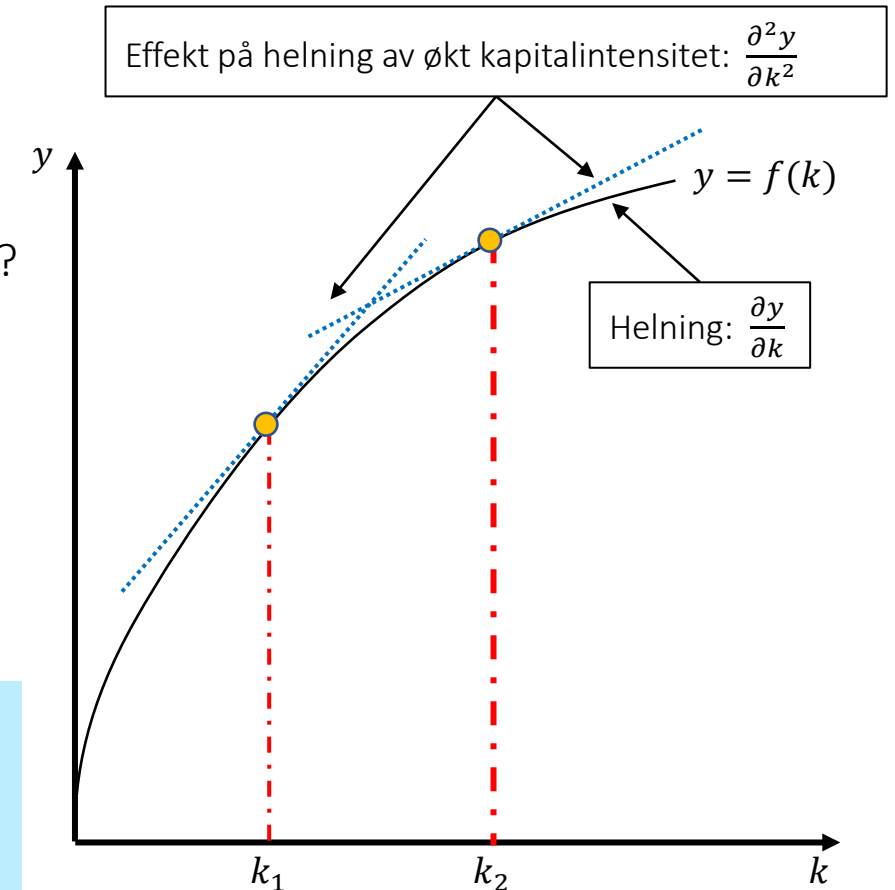
$$\frac{\partial^2 y}{\partial k^2} = \frac{\partial f^2(k)}{\partial k^2} < 0$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial k^2} = (\alpha - 1) \cdot \alpha \cdot k^{\alpha-2} < 0$$

Tolkning:

Om kapitalintensiteten øker, vil produksjon per innbygger øke (positiv grenseproduktivitet).

Jo høyere kapitalintensiteten er, desto mindre effekt vil en økning i kapitalintensiteten ha på produksjon per arbeider.



Solow: grunnmodell

Konklusjoner så langt

- Gitt antakelsene i Solow-modellen:
 - Nivået på produksjon per arbeider = materiell velferd
 - Nivået på produksjon per arbeider avhenger mengde kapital per arbeider (kapitalintensiteten): $y = f(k)$
 - Utviklingen i kapitalstokken (total mengde kapital) avhenger netto-sparing i økonomien: $s \cdot Y(t) = \frac{\partial K(t)}{\partial t}$

Solow-modellen

Vekst i produksjon per arbeidere

$Y =$ Total produksjon

$K =$ Kapitalstokk

$L =$ Arbeidsstyrke

$y = \frac{Y}{L} =$ Produksjon per arbeider

$k = \frac{K}{L} =$ Kapital per arbeider

Solow-modellen

Vekst i produksjon per arbeidere

$Y =$ Total produksjon

$K =$ Kapitalstokk

$L =$ Arbeidsstyrke

$y = \frac{Y}{L} =$ Produksjon per arbeider

$k = \frac{K}{L} =$ Kapital per arbeider

Solow-modellen

Vekst i produksjon per arbeidere

$Y =$ Total produksjon

$K =$ Kapitalstokk

$L =$ Arbeidsstyrke

$y = \frac{Y}{L} =$ Produksjon per arbeider

$k = \frac{K}{L} =$ Kapital per arbeider

Solow-modellen

Vekst i produksjon per arbeidere

$$g_y = \frac{\frac{\partial y(t)}{\partial t}}{y(t)} = \alpha \cdot \frac{\frac{\partial k(t)}{\partial t}}{k(t)} = \alpha \cdot g_k$$

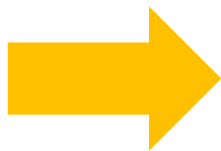
Cobb-Douglas produksjonsfunksjon

$$y(t) = k(t)^\alpha$$

Produksjon per arbeider avhenger kapital per arbeider (kapitalintensiteten).

→ Veksten i produksjon per arbeider vil avhenge veksten i kapitalintensiteten.

I denne enkle modellen drivs veksten i produksjon per arbeider **KUN** av **veksten i kapitalintensiteten** (vekstraten avhenger hvor viktig kapitalen er i produksjonen, α)



For å finne ut hva som driver veksten i produksjon per arbeider, må vi finne ut hva som driver veksten i kapitalintensiteten

Solow-modellen

Konklusjoner så langt

Nivået på BNP per arbeider avhenger nivået på kapital per innbygger (kapitalintensiteten)

Veksten i BNP per arbeider avhenger veksten i kapitalintensiteten

Så lenge kapitalintensiteten vokser, vil BNP per arbeider vokse

Viktig spørsmål:

Hva bestemmer veksten og vekstraten i kapitalintensiteten?

Solow-modellen

Vekst i kapital per arbeider

Hvordan utvikles kapitalintensiteten over tid? $\frac{\partial k(t)}{\partial t} = ?$

Solow-modellen

Vekst i kapital per arbeider

Hvordan utvikles kapitalintensiteten over tid? $\frac{\partial k(t)}{\partial t} = ?$

Solow-modellen

Vekst i kapital per arbeider

Hvordan utvikles kapitalintensiteten over tid? $\frac{\partial k(t)}{\partial t} = ?$

Solow-modellen

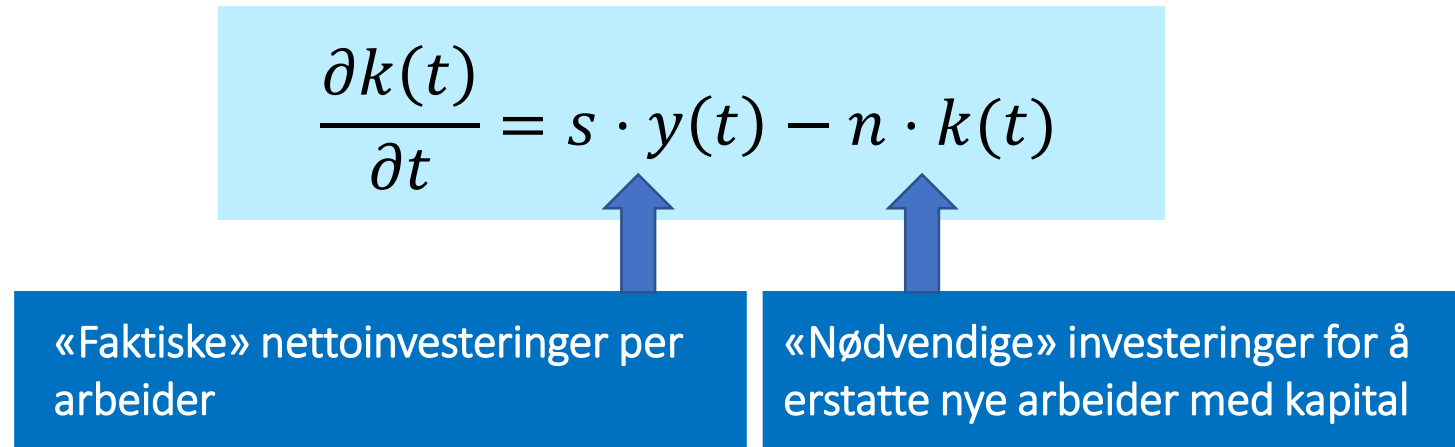
Vekst i kapital per arbeider

Hvordan utvikles kapitalintensiteten over tid? $\frac{\partial k(t)}{\partial t} = ?$

Solow-modellen

Kapital per arbeider (kapitalintensitet)

Hvordan utvikles kapitalintensiteten over tid?



Dersom de faktiske investeringene er **større** enn de nødvendige (nettoinvesteringene er større enn hva som trengs for å erstatte nye arbeidere), vil kapitalintensiteten øke → produksjon per innbygger øker



Dersom de faktiske investeringene er **mindre** enn de nødvendige (nettoinvesteringene er ikke store nok for å dekke behovet blant arbeidere), vil kapitalintensiteten minke → produksjon per innbygger minker

Solow-modellen

Konklusjoner så langt

Nivået på BNP per arbeider avhenger nivået på kapital per innbygger (kapitalintensiteten)

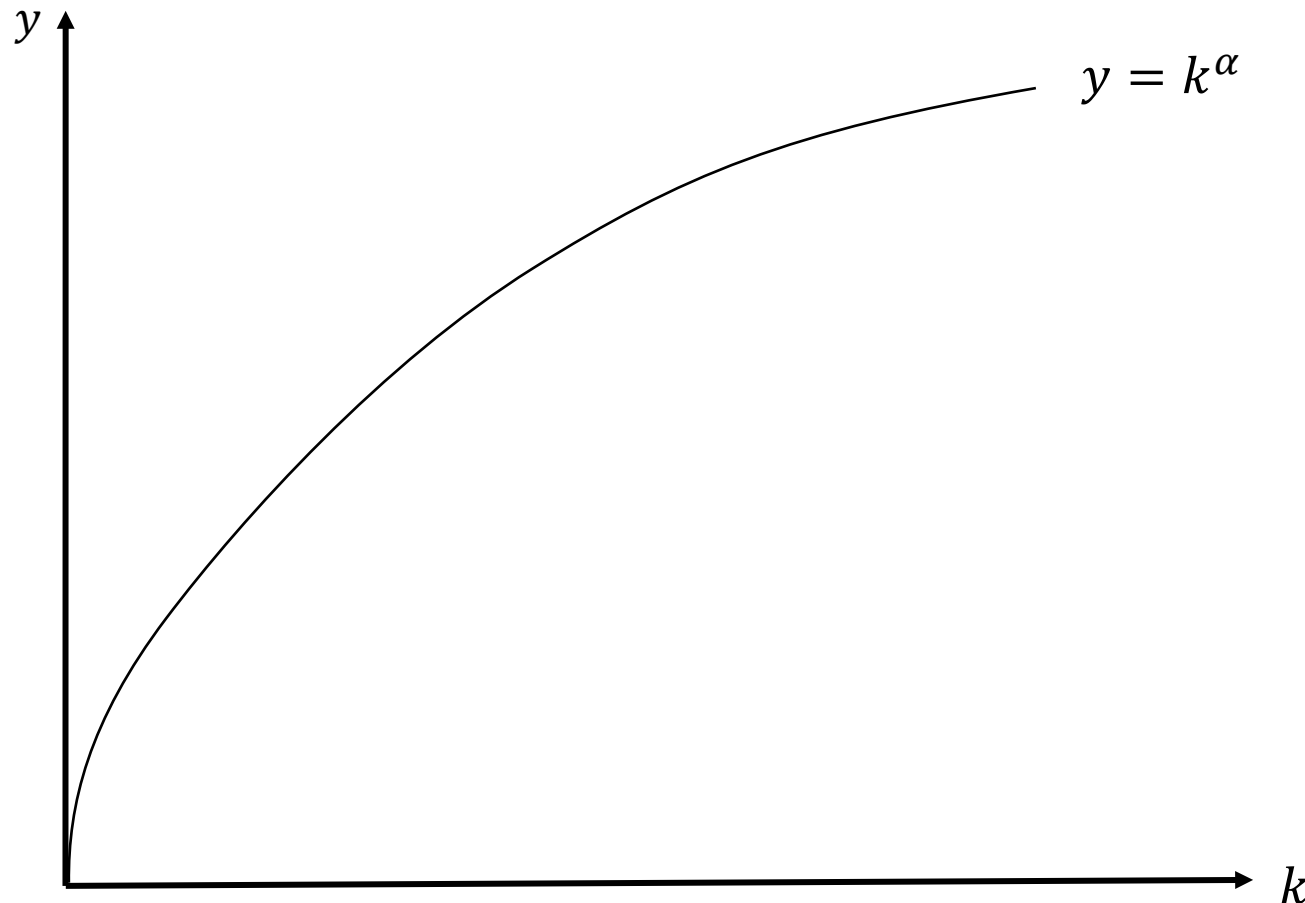
Veksten i BNP per arbeider avhenger veksten i kapitalintensiteten

Så lenge kapitalintensiteten vokser, vil BNP per arbeider vokse

Veksten i kapitalintensiteten avhenger størrelsen på faktiske og nødvendige investeringer per innbygger

Solow-modellen

Hva bestemmer nivået på BNP per arbeider i **langsiktig likevekt (steady state)**?



Så lenge kapitalintensiteten vokser, vil BNP per arbeider vokse

$$g_y = \alpha \cdot g_k$$

Solow-modellen

Hva bestemmer nivået på BNP per arbeider i langsiktig likevekt (steady state)?

Kan vi identifisere en situasjon der økonomien er i langsiktig likevekt, eller vokser BNP per innbygger til evig tid?

$$\frac{\partial k(t)}{\partial t} = s \cdot y(t) - n \cdot k(t)$$

Solow-modellen

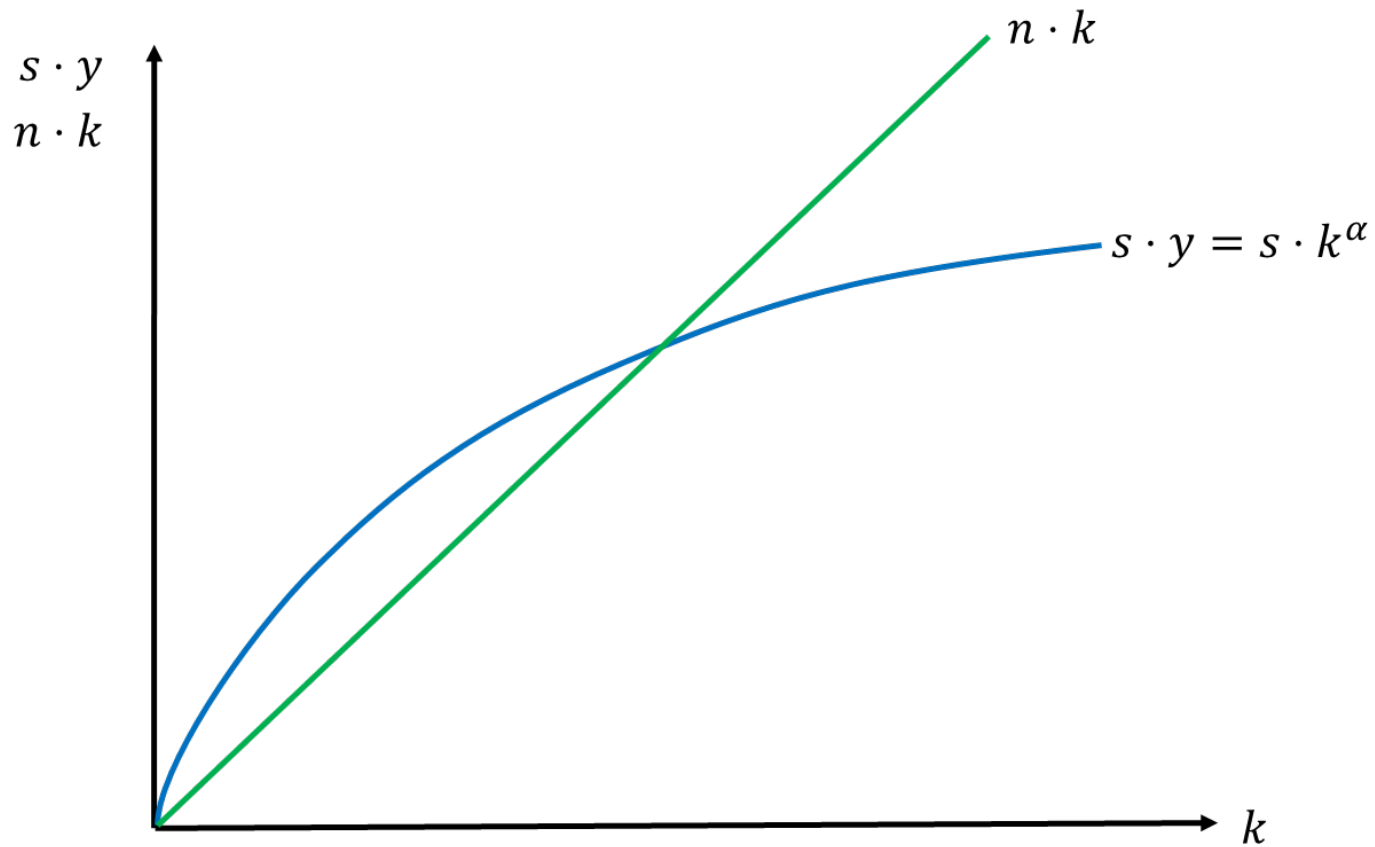
Hva bestemmer nivået på BNP per arbeider i langsiktig likevekt (steady state)?

Grafisk utledning av steady state

Solow-modellen

Hva bestemmer nivået på BNP per arbeider i langsiktig likevekt (steady state)?

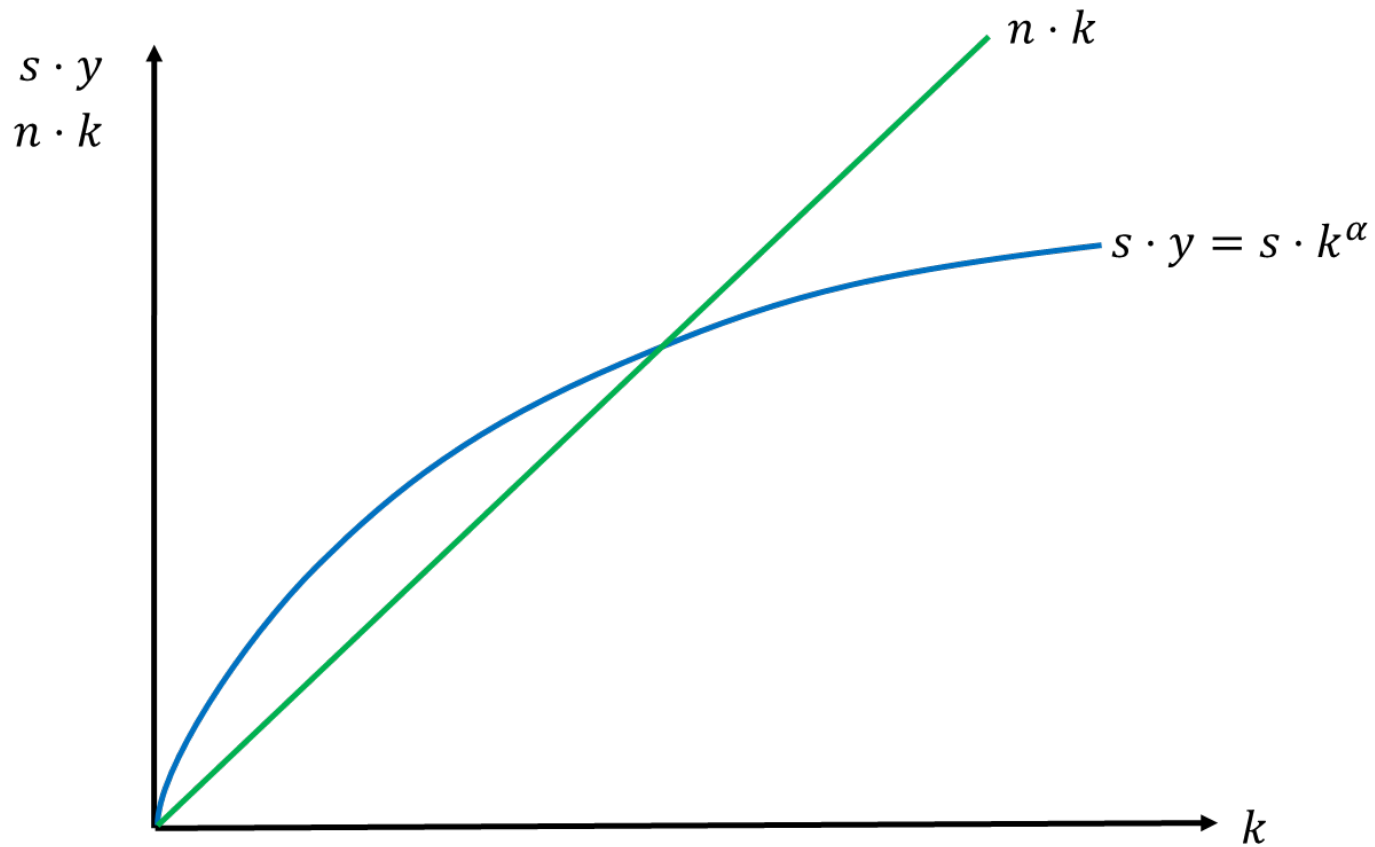
Grafisk utledning av steady state



Solow-modellen

Hva bestemmer nivået på BNP per arbeider i langsiktig likevekt (steady state)?

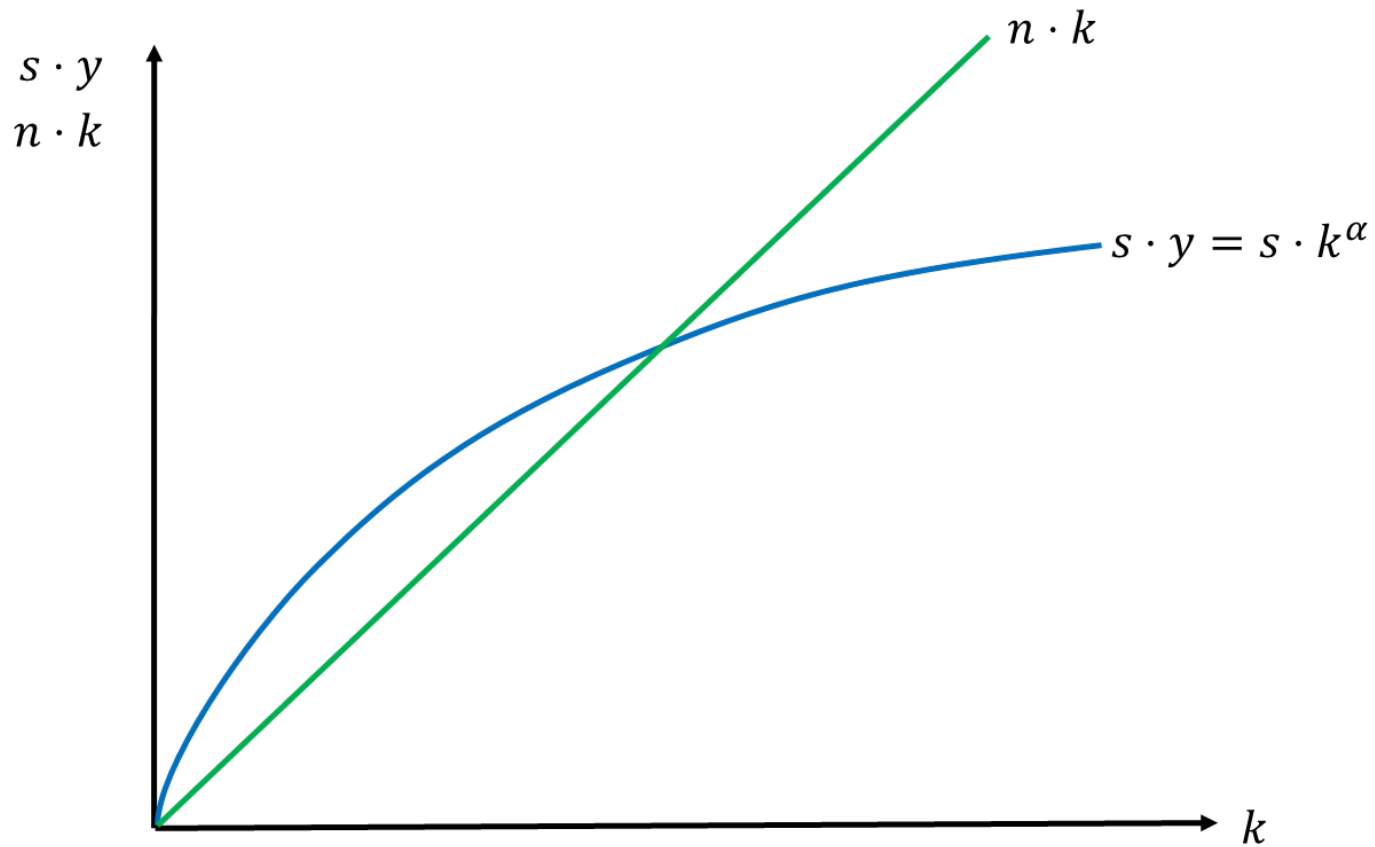
Grafisk utledning av steady state



Solow-modellen

Hva bestemmer nivået på BNP per arbeider i langsiktig likevekt (steady state)?

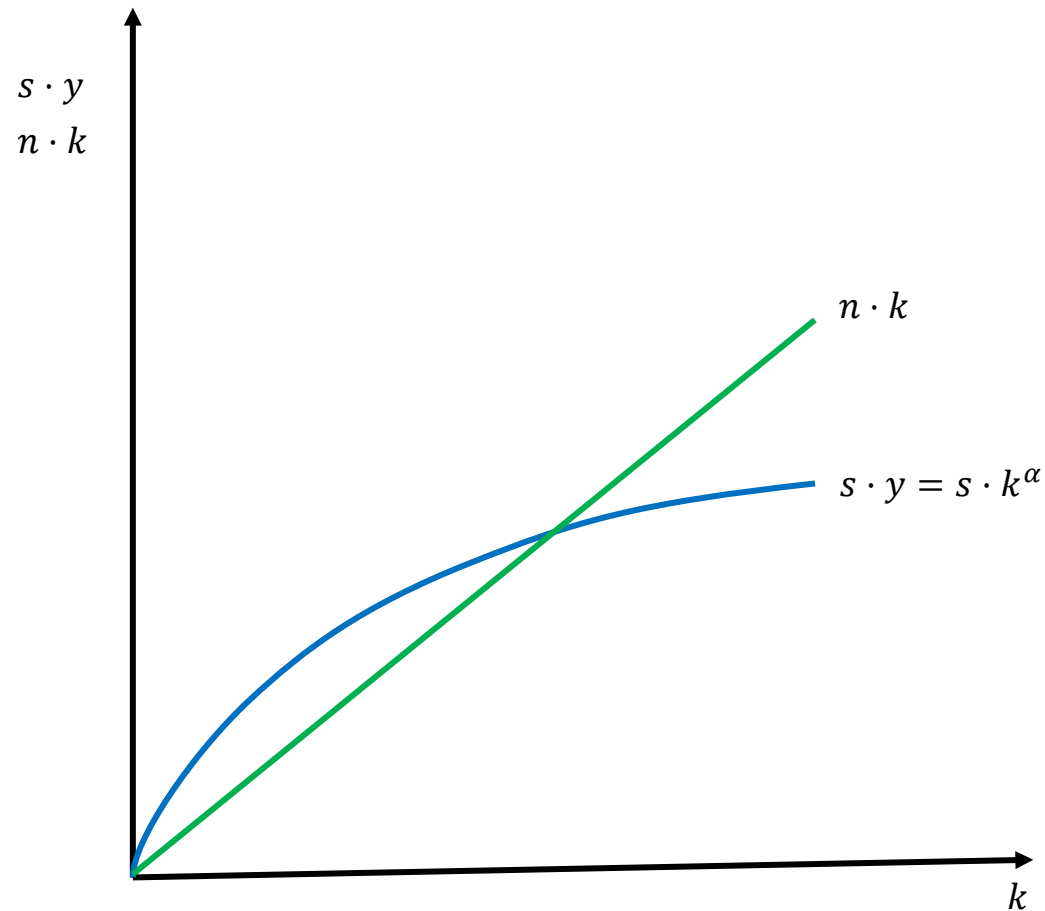
Grafisk utledning av steady state



Solow-modellen

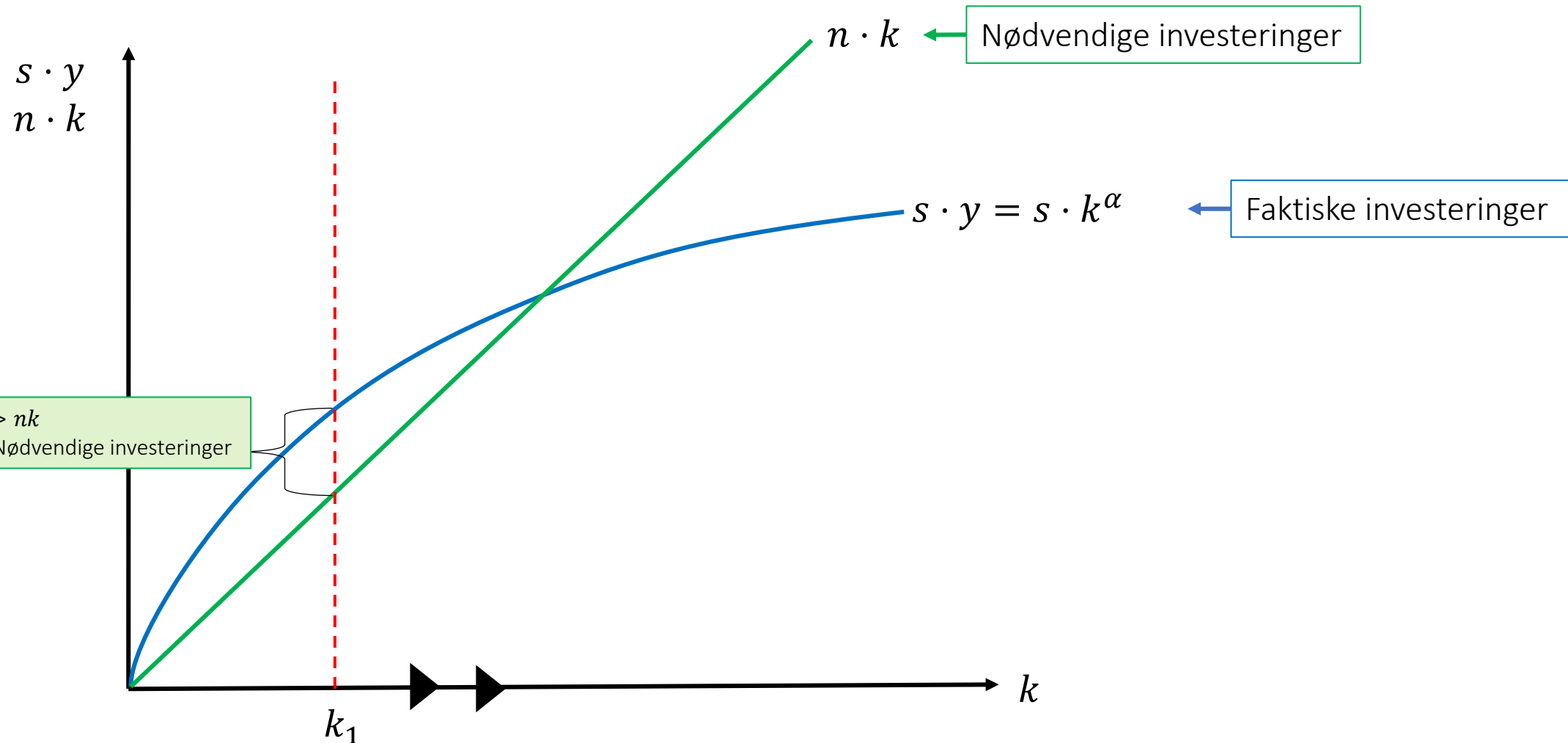
Hva bestemmer nivået på BNP per arbeider i langsiktig likevekt (steady state)?

Grafisk utledning av steady state



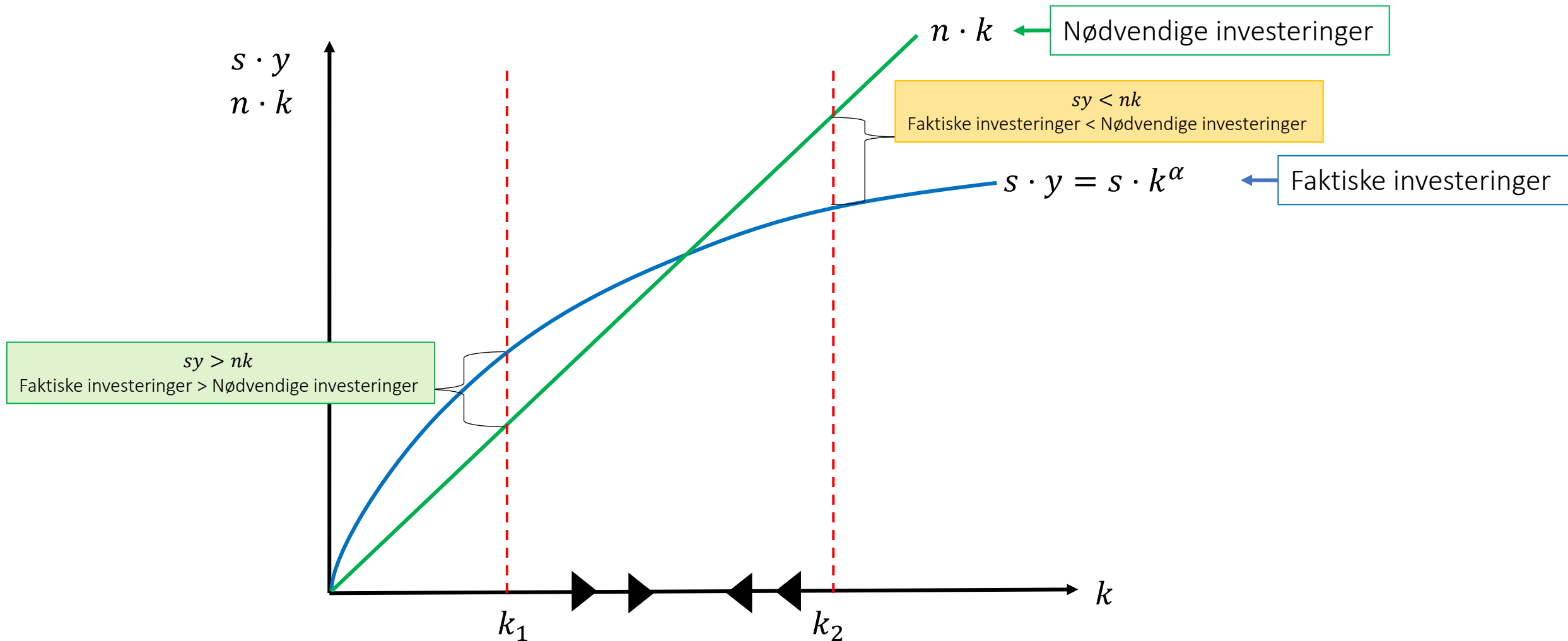
Solow-modellen

Hva bestemmer nivået på BNP per arbeider i langsiktig likevekt (steady state)?



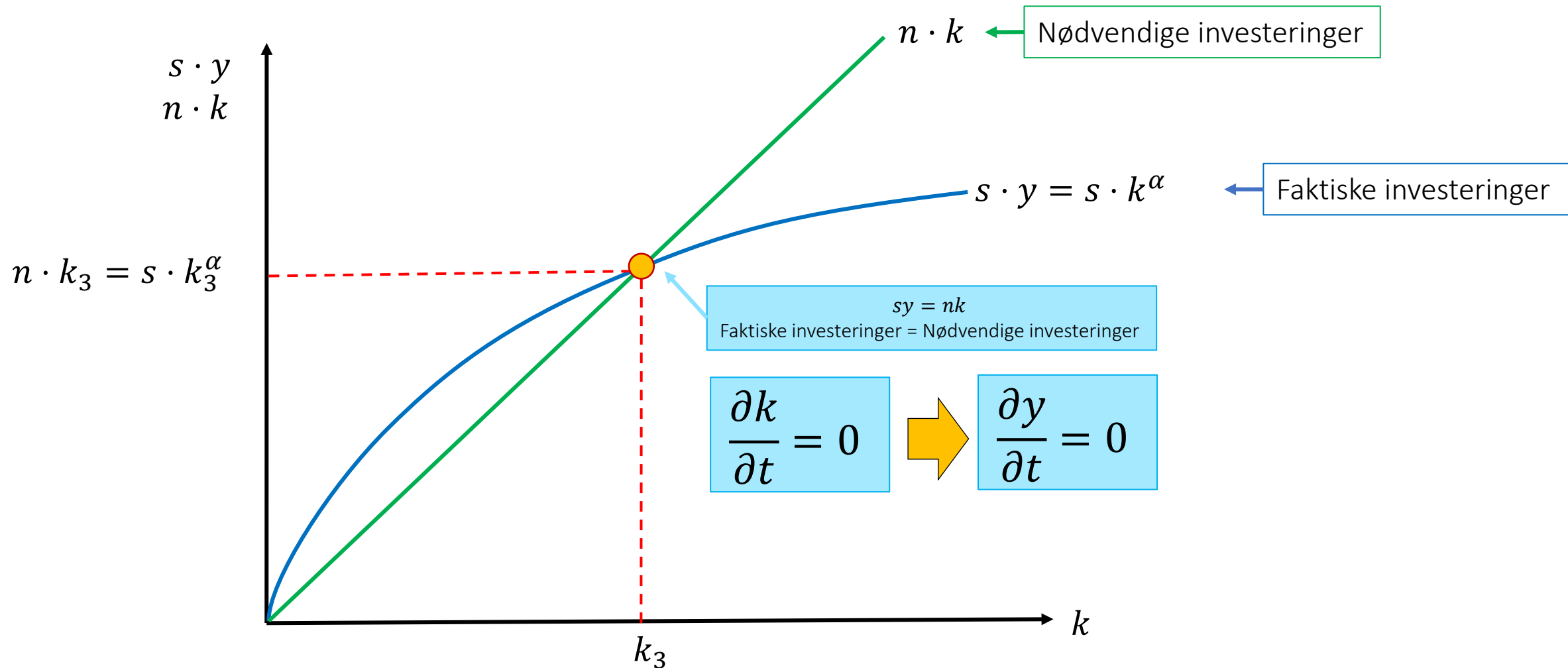
Solow-modellen

Hva bestemmer nivået på BNP per arbeider i langsiktig likevekt (steady state)?



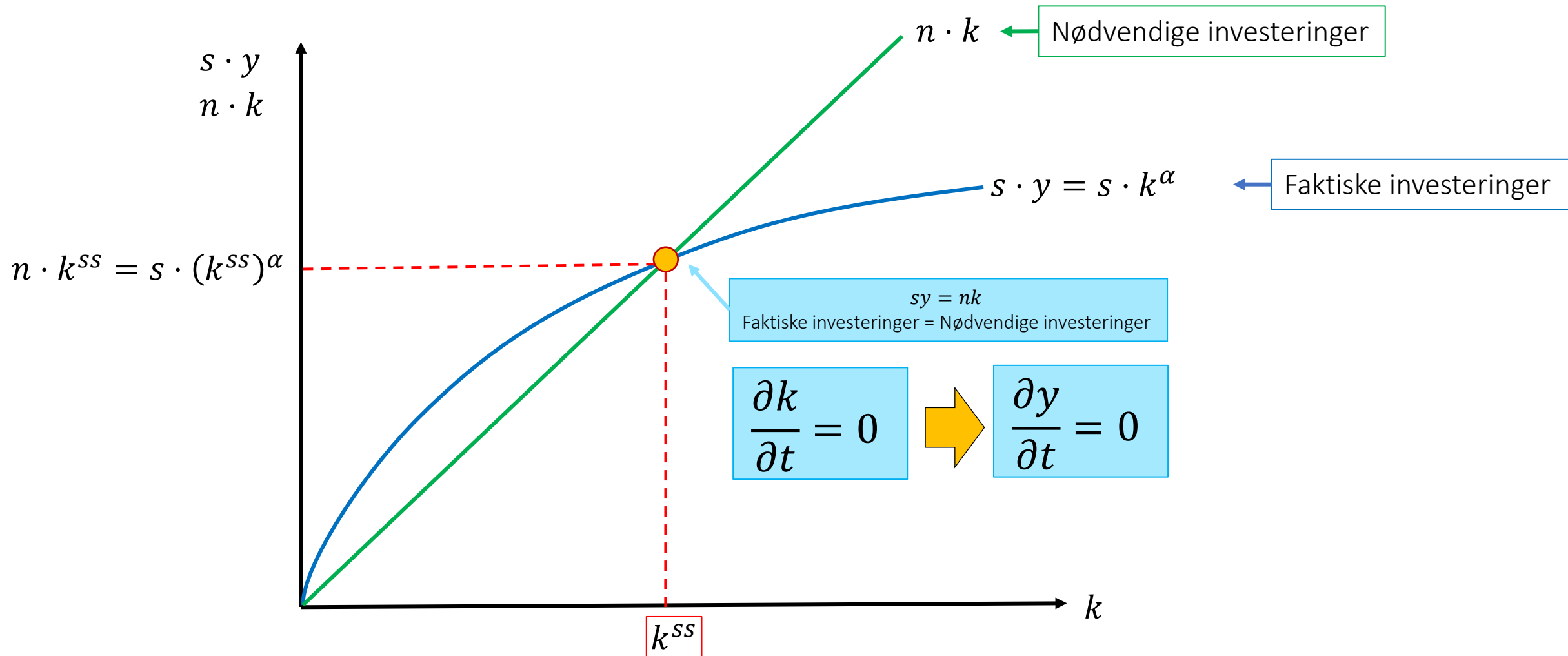
Solow-modellen

Hva bestemmer nivået på BNP per arbeider i langsiktig likevekt (steady state)?



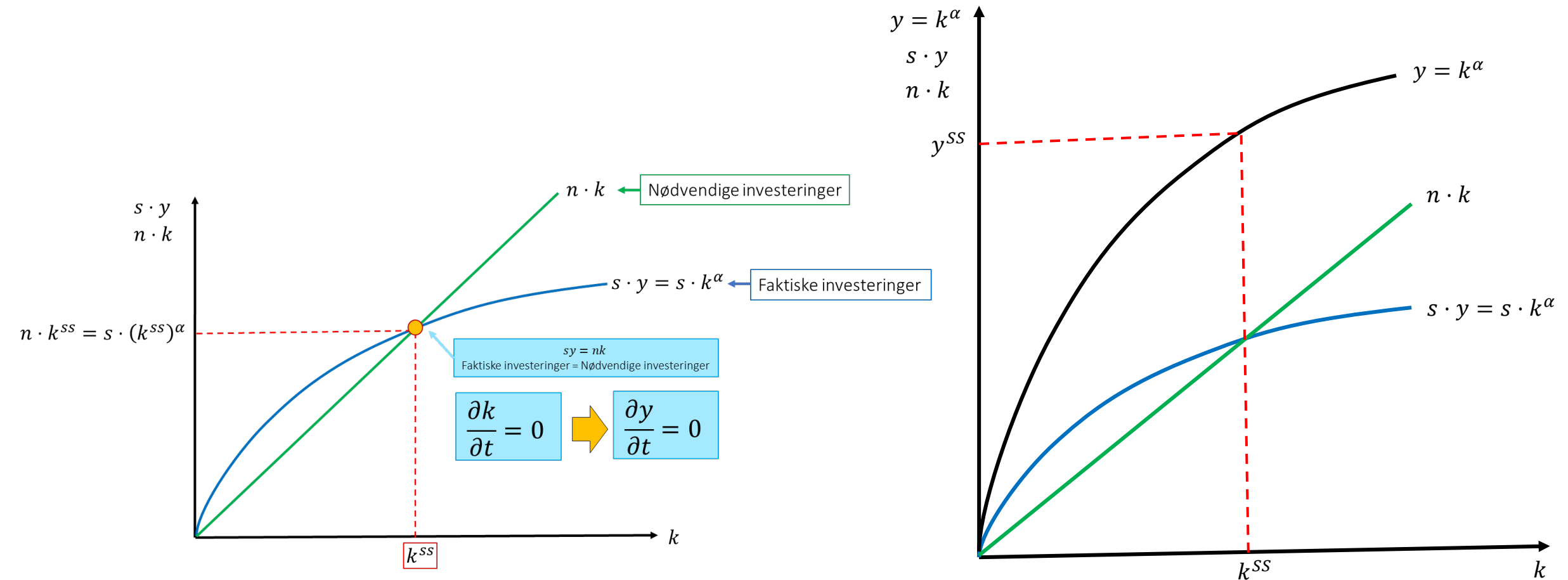
Solow-modellen

Hva bestemmer nivået på BNP per arbeider i langsiktig likevekt (steady state)?



Solow-modellen

Hva bestemmer nivået på BNP per arbeider i langsiktig likevekt (steady state)?



Solow-modellen

Hva bestemmer nivået på BNP per arbeider i langsiktig likevekt (steady state)?

Matematisk utledning av produksjon per arbeider i langsiktig likevekt (y^{ss}):

Solow-modellen

Hva bestemmer nivået på BNP per arbeider i langsiktig likevekt (steady state)?

Matematisk utledning av produksjon per arbeider i langsiktig likevekt (y^{ss}):

Solow-modellen

Hva bestemmer nivået på BNP per arbeider i langsiktig likevekt (steady state)?

Matematisk utledning av produksjon per arbeider i langsiktig likevekt (y^{ss}):

Solow-modellen

Hva bestemmer nivået på BNP per arbeider i langsiktig likevekt (steady state)?

(start til) matematisk utledning av produksjon per arbeider i langsiktig likevekt (y^{ss}):

$$y(t) = k(t)^\alpha$$

$$\frac{\partial k(t)}{\partial t} = s \cdot y(t) - n \cdot k(t)$$

Dersom faktiske investeringer er **større** enn nødvendige, vil kapitalintensiteten øke → produksjonen øker

Dersom faktiske investeringer er **mindre** enn nødvendige, vil kapitalintensiteten minke → produksjonen minker

➡ Vilkår for likevekt (steady state):

$$\frac{\partial k(t)}{\partial t} = 0$$

➡ I steady state vil de faktiske investeringene være lik de nødvendige investeringene:

$$s \cdot (k^{ss})^\alpha = n \cdot k^{ss}$$

Solow-modellen

Seminar 1

- OECD skriver årlige rapporter om den økonomiske situasjonen i verden. Én av de indikatorer som rapportene tar opp er investeringsraten (spareraten) i enkelte land.
 - a) **Bruk grafisk analyse for å analysere hvordan en økt investeringsrate (sparerate) påvirker produksjon per arbeid i et land på midlertidig og lang sikt (steady state).**
 - b) **Bruk matematisk analyse til å analysere effekten av en økt sparerate i steady state.**
 - c) **Hvilke konklusjoner kan vi trekke fra analysen i forhold til hvorfor noen land er fattig og andre er rik?**
- Bruk grunnmodellen til Solow og gå ut ifra at økonomien er i likevekt før spareraten endres.
 - Gå ut ifra at total produksjon kan beskrives av:

$$Y(t) = K(t)^\alpha \cdot L(t)^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1$$

- Gå ut fra at utviklingen i kapitalstokken kan beskrives av:

$$\frac{\partial K(t)}{\partial t} = s \cdot Y(t), \quad 0 < s < 1$$