

Noen matematiske regler

1. Noen algebraiske regler

$$x^1 = x$$

$$x^{-1} = \frac{1}{x^1}$$

$$\rightarrow x^{-\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha}}$$

$$x^0 = 1$$

$$x^{\alpha} \cdot x^{\beta} = x^{\alpha+\beta}$$

$$\rightarrow \frac{x^{\alpha}}{x^{\beta}} = x^{\alpha} \cdot x^{-\beta} = x^{\alpha-\beta}$$

$$(x^{\alpha})^{\beta} = x^{\alpha \cdot \beta}$$

$$\rightarrow (x^{\alpha})^{1/\beta} = x^{\alpha/\beta}$$

$$\log(x + z) = \log(x + z)$$

$$\log(x \cdot z) = \log(x) + \log(z)$$

$$\log(x/z) = \log(x) - \log(z)$$

$$\log(x^z) = z \cdot \log(x)$$

$$\log(e) = 1$$

$$\log(e^x) = x \cdot \log(e) = x$$

2. Regler for derivering

2.1 Eksponentregeln (power rule)

$$\frac{dx^{\alpha}}{dx} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

Eksempel:

$$y = x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot x^{2-1} = 2 \cdot x^1 = 2x$$

$$y = x^{-2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot x^{-2-1} = 2 \cdot x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

2.1 Derivasjon av additive funksjoner

$$\frac{d(f(x) + g(x))}{dx} = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx}$$

Eksempel:

$$y = 2x + x^2 \rightarrow f(x) = 2x, g(x) = x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 + 2x$$

2.2 Produktregelen

$$\frac{d(f(x) \cdot g(x))}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \cdot g(x) + \frac{dg(x)}{dx} \cdot f(x)$$

Eksempel:

$$y = 2x \cdot x^2 \rightarrow f(x) = 2x, g(x) = x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot x^2 + 2x \cdot 2x = 2x^2 + 4x^2 = 6x^2$$

Notere at vi hadde kunnet bruke de algebraiske reglene for å gjøre dette enklere

$$y = 2x \cdot x^2 \rightarrow y = 2x^{1+2} = 2x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = 3 \cdot 2x^{3-1} = 6x^2$$

2.3 Kjederegeln (chain rule)

$$\frac{d(f(z(x)))}{dx} = \frac{df(z(x))}{dz(x)} \cdot \frac{dz(x)}{dx}$$

Eksempel

$$y = z^2, \quad z = \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{2-1} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x} \cdot \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^3}$$

Notere at vi hadde kunnet skrive dette enklere ved bruk av noen algebraiske regler

$$y = z^2, \quad z = \frac{1}{x}$$

$$\rightarrow y = (x^{-1})^2 = x^{-2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -2 \cdot x^{-2-1} = -2 \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

2.4 Derivasjon av den naturlige logaritmen

$$\frac{d\log(x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d\log(f(x))}{dx} = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{df(x)}{dx}$$

Eksempel

$$y = \alpha \cdot x + x^\beta \rightarrow \log(y) = \log(\alpha \cdot x + x^\beta)$$

$$\frac{d\log(y)}{dx} = \left(\frac{1}{\alpha \cdot x + x^\beta} \right) \cdot (\alpha + \beta \cdot x^{\beta-1})$$

2.5 Derivasjon funksjoner av det naturlige tallet e

$$\frac{de^{f(x)}}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \cdot e^{f(x)}$$

Eksempel:

$$y = e^{\alpha \cdot x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \alpha \cdot x^{1-1} \cdot e^{\alpha \cdot x} = \alpha \cdot e^{\alpha \cdot x}$$