

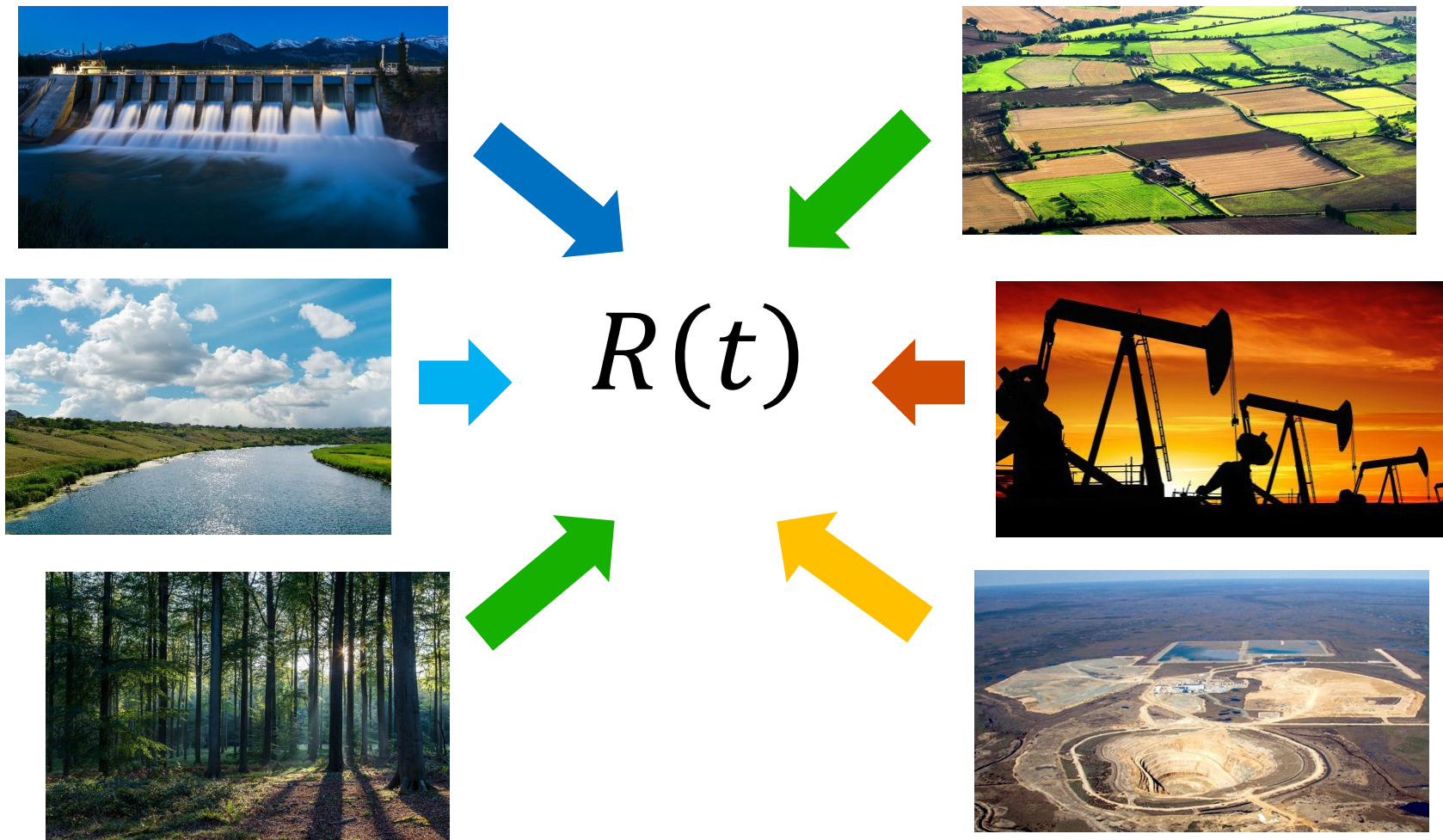


This Photo by Unknown Author is licensed under [CC BY-SA-NC](#)

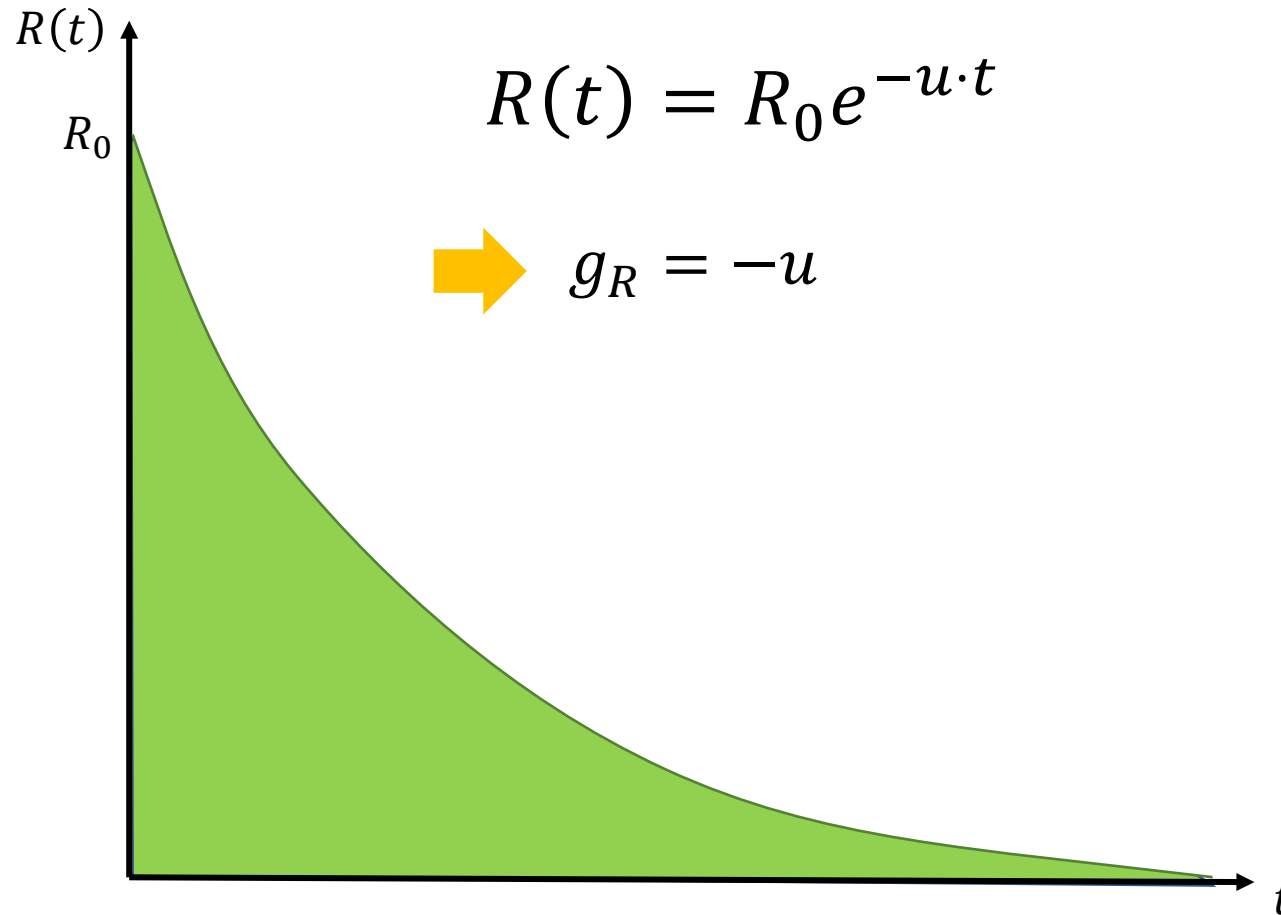
## F5. SØK-2011: Økonomisk vekst

Solow-modellen med  
naturressurser og policy  
implikasjoner

# Solow-modellen med **naturressurser**



# Solow-modellen med **naturressurser**



# Solow-modellen med **naturressurser**

Solow-modellen BAS (ingen teknologi):

Produksjon per arbeider blir bestemt av kapital per arbeider:  $y(t) = k(t)^\alpha$ .

Veksten i produksjon per arbeider drivs kun av veksten i kapital per arbeider:  $g_y(t) = \alpha g_k(t)$

I steady state vokser total kapital med samme rate som arbeidskraften:  $s \cdot \frac{Y(t)}{K(t)} = n$

I steady state er kapitalintensiteten konstant, hvilket fører til at produksjon per innbygger er konstant:  $g_y^{ss} = 0$

Solow-modellen med naturressurser (ingen teknologi):

En produksjonsfaktor (naturressurser) MINKER over tid!

I hver tidsperiode finnes det mindre av naturressursene → mindre naturressurs per arbeider (innbygger)

I hver tidsperiode blir befolkningen større → ENDA mindre naturressurs per arbeider (innbygger)



Dersom kapitalintensiteten er konstant og det ikke er teknologisk utvikling, vil vekstraten i produksjon per arbeider være NEGATIV i steady state!

# Solow-modellen med teknologi og naturressurser

Effektiv mengde naturressurser

$$\underline{R} = q_R(t) \cdot R(t)$$

$$R(t) = R_0 e^{-u \cdot t}$$

Mengde naturressurser

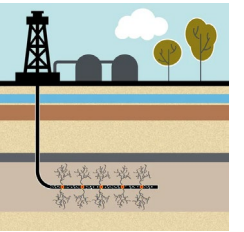
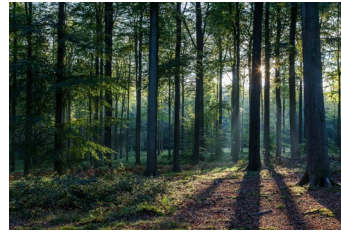
Vekstrate i  $R(t)$ :  $-u$

$$q_R(t) = e^{h \cdot t}$$

Kvalitet på naturressurser

Vekstrate i  $q_R(t)$ :  $h$

$$h \gtrless 0$$



# Solow-modellen med teknologi og naturressurser

Total produksjon

Generell produksjonsfunksjon

$$\underline{K}(t) = q_K(t) \cdot K(t)$$
$$\underline{R}(t) = q_R(t) \cdot R(t)$$
$$Y(t) = A(t) \cdot F(\underline{K}(t), \underline{L}(t), \underline{R}(t))$$
$$\underline{L}(t) = q_L(t) \cdot L(t)$$

Alle andre antagelser er lik

- ★  $L(t) = L_0 e^{nt}$
- ★  $I(t) = S(t)$
- ★  $S(t) = s \cdot Y(t) = \frac{\partial K(t)}{\partial t}$
- ★ Konstant skala-utbytte
- ★ Avtakende grenseproduktivitet
- ★ Lukket økonomi



# Solow-modellen med teknologi og naturressurser

Total produksjon

Spesifikk produksjonsfunksjon

$$\underline{K}(t) = q_K(t) \cdot K(t)$$

$$\underline{L}(t) = q_L(t) \cdot L(t)$$

$$\underline{R}(t) = q_R(t) \cdot R(t)$$

$$Y(t) = A(t) \cdot (q_K(t) \cdot K(t))^\alpha \cdot (q_L(t) \cdot L(t))^\beta \cdot (q_R(t) \cdot R(t))^\gamma$$

$$0 < \alpha, \beta, \gamma < 1, \quad \alpha + \beta + \gamma = 1$$

$$A(t) = A_0 \cdot e^{g_A t}$$

Total faktorproduktivitet (Hicks-neutral teknologi)

Vekstrate:  $g_A$

$$q_K(t) = e^{j t}$$

Kvalitetsindeks til kapital

Vekstrate:  $j$

$$q_L(t) = e^{m t}$$

Kvalitetsindeks til arbeid (Harrod-neutral teknologi)

Vekstrate:  $m$

$$R(t) = R_0 e^{-u \cdot t}$$

Mengde naturressurser

Vekstrate:  $-u$

$$q_R(t) = e^{h \cdot t}, \quad h \geq 0$$

Kvalitet på naturressurser

Vekstrate:  $h$

# Solow-modellen med teknologi og **naturressurser**

Total produksjon

$$Y(t) = A_0 \cdot e^{g_A t} \left( \overset{q_K(t)}{e^{j \cdot t} \cdot K(t)} \right)^\alpha \cdot \left( \overset{q_L(t)}{e^{m \cdot t} \cdot L(t)} \right)^\beta \cdot \left( \overset{q_R(t)}{e^{h \cdot t} \cdot R_0} \overset{R(t)}{e^{-u \cdot t}} \right)^\gamma$$

➔ 
$$Y(t) = A_0 \cdot e^{(g_A + \alpha j + \beta m + \gamma h) \cdot t} K(t)^\alpha \cdot L(t)^\beta \cdot R_0^\gamma \cdot e^{-\gamma u t}$$

Produksjon per arbeider

$$y(t) = A_0 \cdot e^{(g_A + \alpha j + \beta m + \gamma h) \cdot t} K(t)^\alpha \cdot L(t)^{\beta-1} \cdot R_0^\gamma \cdot e^{-\gamma u t}$$

- ★  $A(t) = A_0 \cdot e^{g_A t}$
- ★  $q_K(t) = e^{j t}$
- ★  $q_L(t) = e^{m t}$
- ★  $q_R(t) = e^{h \cdot t}$
- ★  $R(t) = R_0 e^{-u \cdot t}$



# Solow-modellen med teknologi og naturressurser

$$y(t) = A_0 \cdot e^{(g_A + \alpha j + \beta m + \gamma h) \cdot t} K(t)^\alpha \cdot L(t)^{\beta-1} \cdot R_0^\gamma \cdot e^{-\gamma u t}$$

$$\star A(t) = A_0 \cdot e^{g_A t}$$

$$\star q_K(t) = e^{j \cdot t}$$

$$\star q_L(t) = e^{m \cdot t}$$

$$\star q_R(t) = e^{h \cdot t}$$

$$\star R(t) = R_0 e^{-u \cdot t}$$

Vekst i produksjon per arbeider i, og utenom, steady state

$$g_y(t) = (g_A + \alpha j + \beta m + \gamma h) + \alpha \cdot \frac{\frac{\partial K(t)}{\partial t}}{K(t)} + (\beta - 1)n - \gamma u$$

Ved å substituere for  $\frac{\frac{\partial K(t)}{\partial t}}{K(t)}$ , løfte ut  $\gamma u$  ur parentesen og bruke at  $1 - \alpha - \beta = \gamma$ , kan vi skrive om uttrykket for  $g_y$

$$g_y(t) = (g_A + \alpha j + \beta m + \gamma h) + \alpha \left( \frac{sy(t) - nk}{k(t)} \right) - \gamma(u + n)$$

# Solow-modellen med teknologi og naturressurser

Vekst i produksjon per arbeider i, og utenom, steady state

$$g_y(t) = (g_A + \alpha j + \beta m + \gamma h) + \alpha \cdot \frac{\frac{\partial K(t)}{\partial t}}{K(t)} + (\beta - 1)n - \gamma u$$

$$\frac{\partial K(t)}{\partial t} = s \cdot Y(t) \rightarrow g_y(t) = (g_A + \alpha j + \beta m + \gamma h) + \alpha \cdot \frac{s \cdot Y(t)}{K(t)} + (\beta - 1)n - \gamma u$$

$$\frac{s \cdot Y(t)}{K(t)} = \frac{s \cdot Y(t)/L(t)}{K(t)/L(t)} = \frac{s \cdot y(t)}{k(t)} \rightarrow g_y(t) = (g_A + \alpha j + \beta m + \gamma h) + \alpha \cdot \frac{s \cdot y(t)}{k(t)} + (\beta - 1)n - \gamma u$$

# Solow-modellen med teknologi og naturressurser

Vekst i produksjon per arbeider i, og utenom, steady state

$$g_y(t) = (g_A + \alpha j + \beta m + \gamma h) + \alpha \cdot \frac{s \cdot y(t)}{k(t)} + (\beta - 1)n - \gamma u$$

Legg til og dra vekk  $\alpha \cdot n$ :  $\alpha \cdot n - \alpha \cdot n = 0$

Årsak: vi ønsker å ta fram et uttrykk som viser vekstraten i kapitalintensiteten

$$g_y(t) = (g_A + \alpha j + \beta m + \gamma h) + \alpha \cdot \left( \frac{s \cdot y(t) - n \cdot k(t)}{k(t)} \right) + (\alpha + \beta - 1)n - \gamma u$$

$$\frac{\frac{\partial k(t)}{\partial t}}{k(t)} = g_k(t)$$

# Solow-modellen med teknologi og naturressurser

Vekst i produksjon per arbeider i, og utenom, steady state

$$g_y(t) = (g_A + \alpha j + \beta m + \gamma h) + \alpha \cdot \left( \frac{s \cdot y(t) - n \cdot k(t)}{k(t)} \right) + \underbrace{(\alpha + \beta - 1)n - \gamma u}$$

Bruk at  $\alpha + \beta - 1 = -(1 - \alpha - \beta) = -\gamma$

$$g_y(t) = (g_A + \alpha j + \beta m + \gamma h) + \alpha \cdot \left( \frac{s \cdot y(t) - n \cdot k(t)}{k(t)} \right) - \gamma \cdot (u + n)$$

# Solow-modellen med teknologi og **naturressurser**

Vekst i produksjon per arbeider i, og utenom, steady state

$$g_y(t) = \underbrace{(g_A + \alpha j + \beta m + \gamma h)}_{\theta} - \underbrace{\alpha \left( \frac{sy(t) - nk}{k(t)} \right)}_{\text{Vekst i kapital per arbeider}} - \underbrace{\gamma(u + n)}_{\text{Reduksjon i naturressurser per arbeider}}$$

Vekst i teknologi og kvalitet på  
produksjonsressurser

Vekst i kapital per arbeider

Reduksjon i natur-  
ressurser per arbeider

- ★  $A(t) = A_0 \cdot e^{g_A t}$
- ★  $q_K(t) = e^{j t}$
- ★  $q_L(t) = e^{m t}$
- ★  $q_R(t) = e^{h \cdot t}$
- ★  $R(t) = R_0 e^{-u \cdot t}$

Vekst i produksjon per arbeider i steady state

← Årsak: I steady-state vil  $g_k^{ss} = g_y^{ss}$

$$g_y(t) = \frac{1}{1 - \alpha} \cdot \underbrace{(g_A + \alpha j + \beta m + \gamma h)}_{\theta} - \frac{\gamma}{1 - \alpha} (u + n)$$

# Solow-modellen med teknologi og naturressurser

Vekst i produksjon per arbeider i steady state

$$g_y(t) = \frac{1}{1 - \alpha} \cdot \underbrace{(g_A + \alpha j + \beta m + \gamma h)}_{\theta} - \frac{\gamma}{1 - \alpha} (u + n)$$

$$\star A(t) = A_0 \cdot e^{g_A t}$$

$$\star q_K(t) = e^{j t}$$

$$\star q_L(t) = e^{m t}$$

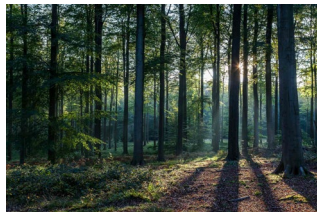
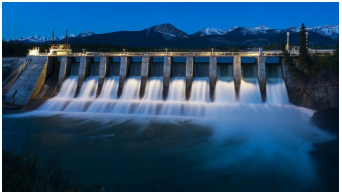
$$\star q_R(t) = e^{h \cdot t}$$

$$\star R(t) = R_0 e^{-u \cdot t}$$

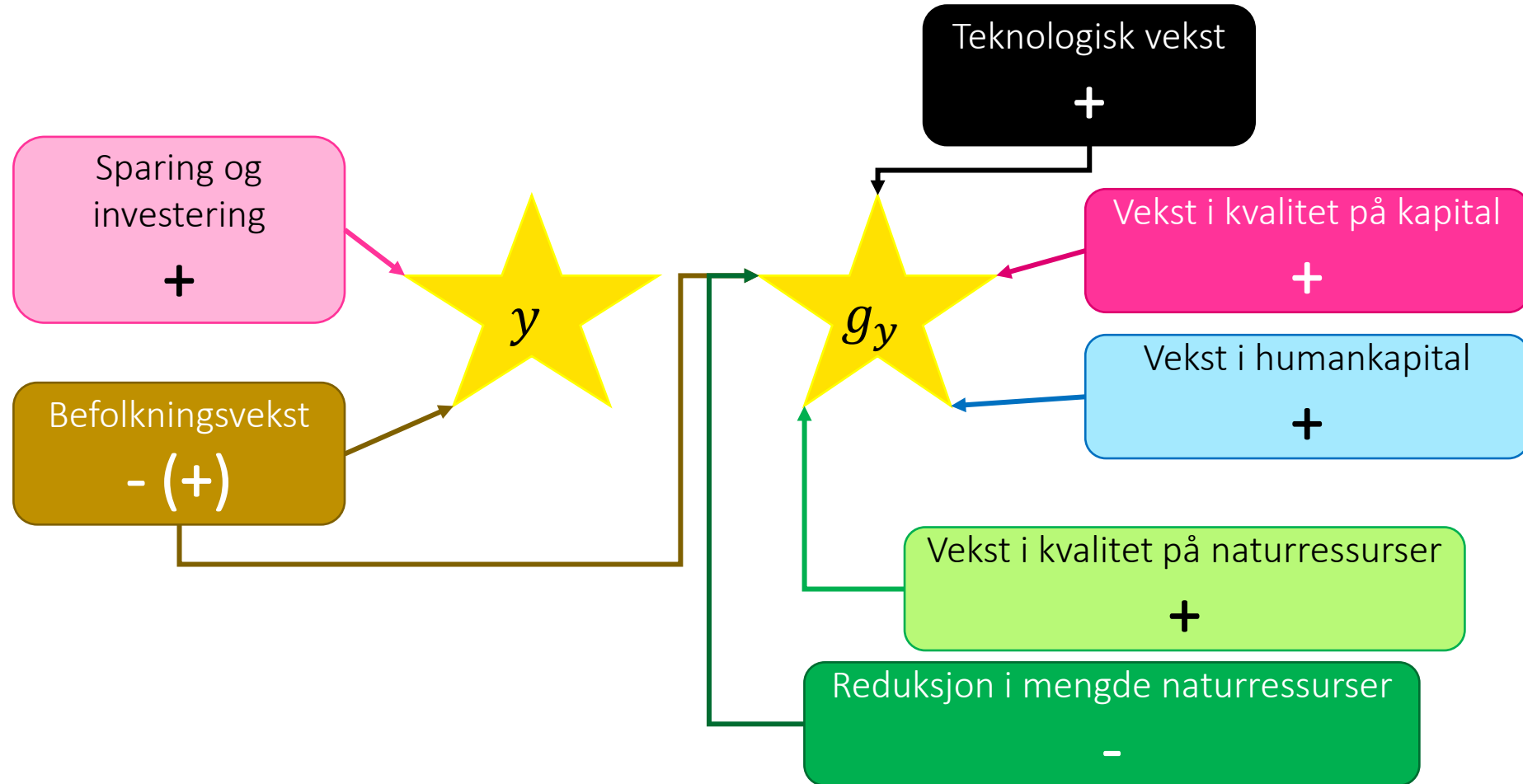
Spørsmål:

Hvordan og hvorfor påvirker endelige naturressurser:

- 1) Nivået på BNP per innbygger?
- 2) Vekstraten i BNP per innbygger?



# Solow-modellen med teknologi og naturressurser





# Solow-modellen med teknologi og naturressurser

## Prediksjoner:

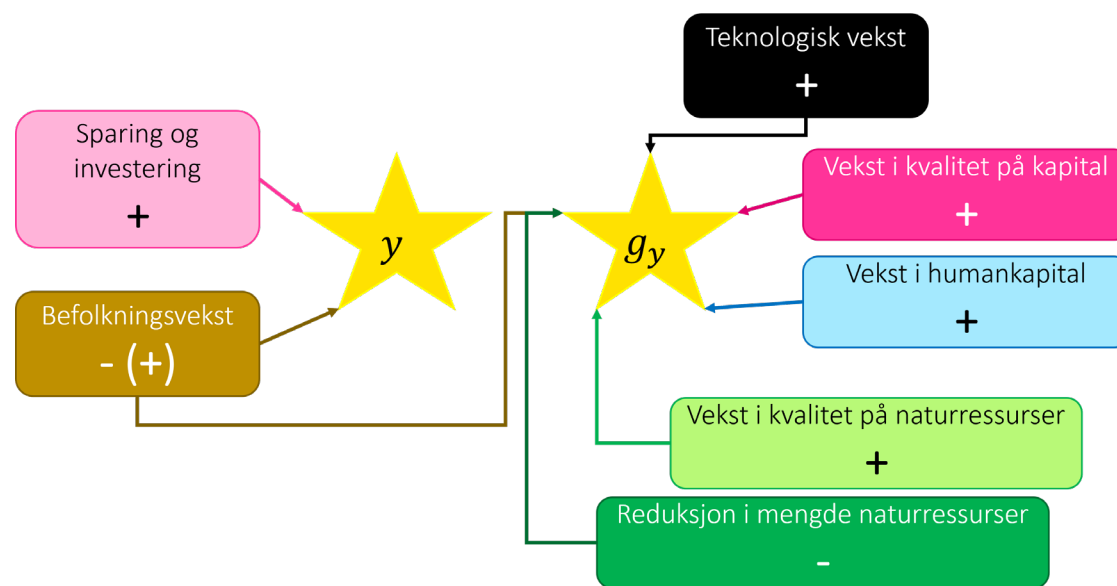
Land som har høy  $s$ , lav  $n$ , høy  $A$ , mye humankapital, og mye naturressurser vil være rike

Veksten i steady state drivs av veksten i teknologien (inklusive kvaliteten til produksjonsfaktorene).

Endelige ressurser lager en «growth drag»

## Konvergens (vil fattige land komme i kapp rike land)?

Dersom ulike land har ulike mye naturressurser og ulik teknologi kan forskjeller i produksjon per arbeider bestå over tid



# Solow-modellen med teknologi og naturressurser

## Policy implikasjoner

Hvordan øke ressursene tilgjengelige for investering i fysisk kapital (og øke sannsynligheten at investeringene blir av)?

Sparing og investering i **fysisk** kapital

+

Økt sparing

- ❖ Lave skatter på sparing
- ❖ Lav, stabil, inflasjon
- ❖ Overskudd i offentlige finanser

Økte investeringer

- ❖ Lave kostnader for investeringer
- ❖ Høy forventet avkastning på investeringer
- ❖ Lav usikkerhet

# Solow-modellen med teknologi og naturressurser

## Policy implikasjoner

Sparing og  
investering

+

Hvilket land ville du ha  
investert i, og hvorfor?

Venezuela

Et av de 10 rikeste landene i  
verden når det kommer til  
naturressurser



Sverige

Noe rikt på naturressurser



# Solow-modellen med teknologi og naturressurser

## Policy implikasjoner

Sparing og  
investering

+

### Corruption Perception Index, 2018

Transparency International's Corruption Perception Index. Scores are on a scale of 0-100, where 0 means that a country is perceived as highly corrupt.

Our World  
in Data

Sverige  
5/180

Venezuela  
177/180



# Solow-modellen med teknologi og naturressurser

## Policy implikasjoner

Sparing og  
investering

+

Kostnad og tid brukt til å starte opp en bedrift

Land	Antall arbeidsdager	Kostnad (% av BNP per capita)
USA	4	1 %
Norway	4	0.80 %
Sweden	7,5	0.50 %
China	9	1.10 %
Germany	8	6.50 %
Zimbabwe	27	76.60 %
Ethiopia	32	45.40 %
Congo. Rep	49	16.60 %
Haiti	97	179.70 %
Venezuela	230	211.80 %

Årsaker til høye kostnader:

Ineffektiv byråkrati  
Korrupsjon

# Solow-modellen med teknologi og naturressurser

## Policy implikasjoner

Sparing og  
investering

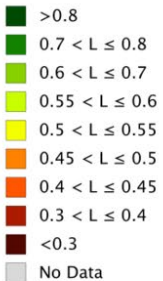
+

Rettsakerhet

Sverige  
4/139

Venezuela  
139/139

Countries by adherence to the  
Rule of Law (L), 2017-18  
(World Justice Project)

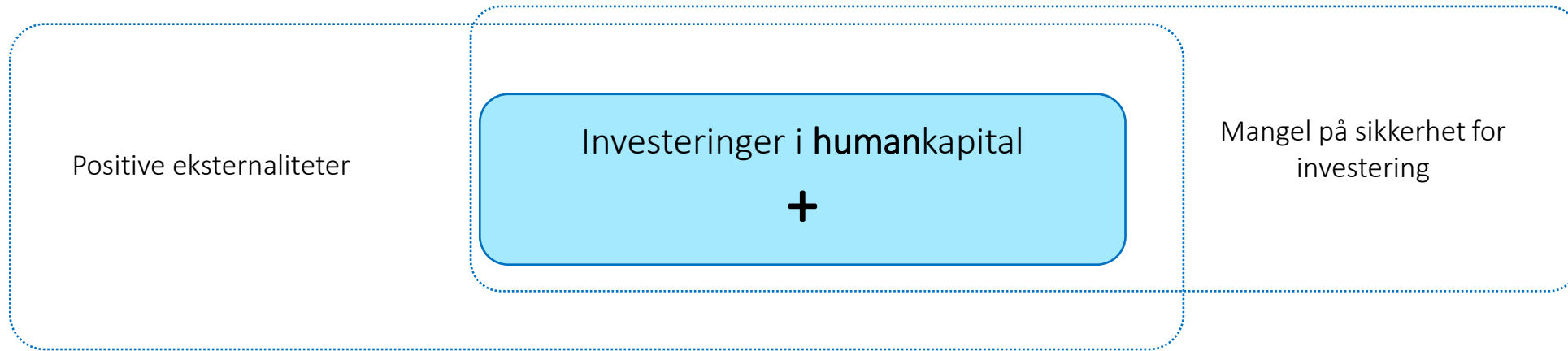


[https://en.wikipedia.org/wiki/World\\_Justice\\_Project](https://en.wikipedia.org/wiki/World_Justice_Project)

Full data  
<https://worldjusticeproject.org/rule-of-law-index/global>

# Solow-modellen med teknologi og naturressurser

## Policy implikasjoner



Økte investeringer

- ❖ Offentlig finansiert utdanning
- ❖ Høy kvalitet på lærer (offentlige investeringer)
- ❖ Høy kvalitet på fysisk kapital i utdanningssystemet (offentlige investeringer)

- ❖ Lave kostnader for investeringer
- ❖ Høy forventet avkastning på investeringer
- ❖ Lav usikkerhet



# Solow-modellen med teknologi og naturressurser

## Policy implikasjoner

Investeringer i humankapital

+

Rett til utdanning



Kostnad for utdanning

Direkte kostnader



Indirekte kostnader

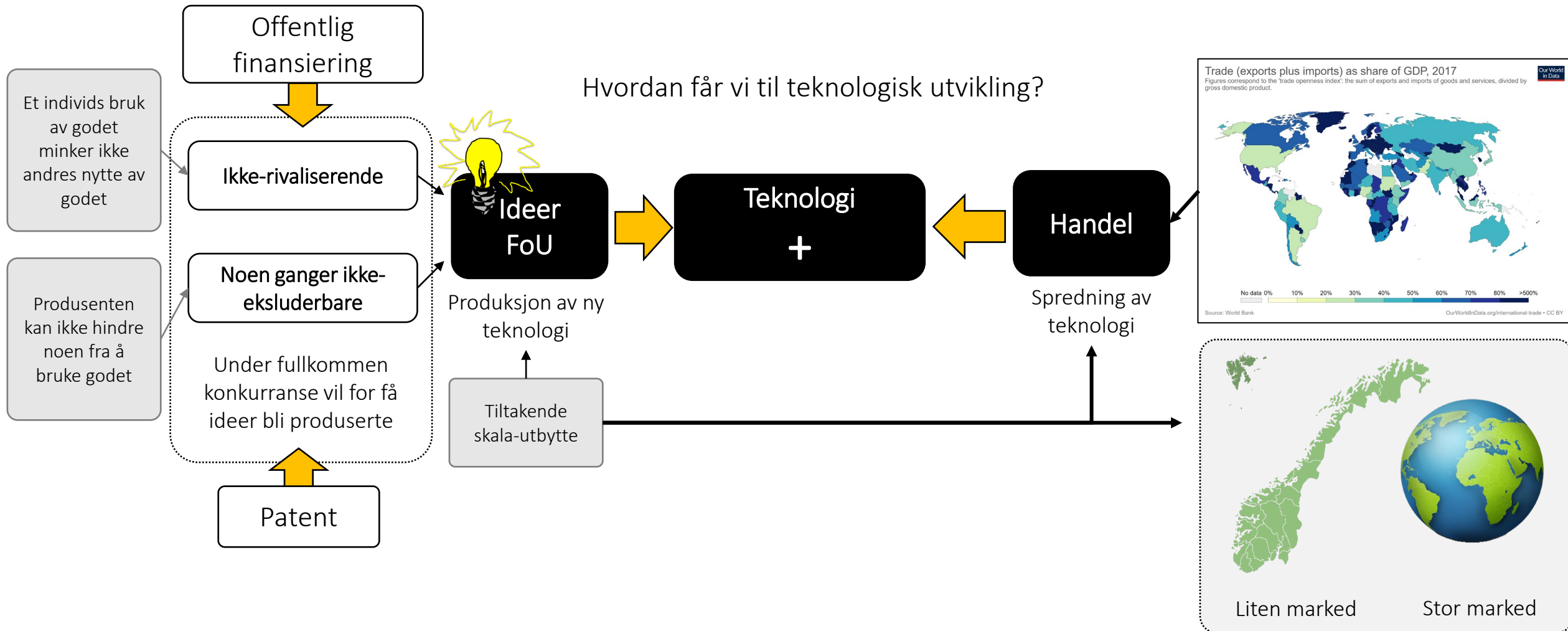


Forventet avkastning på utdanning



# Solow-modellen med teknologi og naturressurser

## Policy implikasjoner



# Solow-modellen med teknologi og naturressurser

## Policy implikasjoner



# Solow-modellen med teknologi og naturressurser

## Begrensninger

### Fokus på lang sikt:

Produksjonen drivs av tilbudet (produksjonsmulighetene)

Modellen ser vekk ifra svingninger i priser og etterspørsel

*«In the long run, we're all dead» (John Maynard Keynes)*

Konjunkturer, og inflasjon, kan ha effekter både på kort OG lang sikt.

- ❖ Økt strukturell arbeidsledighet og uførhet (økt forsørgelsesbyrde)
- ❖ Lavere investeringer i kapital og FoU (mindre vekst i kapitalintensitet og teknologisk vekst)
- ❖ Forverrete offentlige finanser (mindre offentlige investeringer i  $q_K, q_L, q_R, A$ )

# Solow-modellen med teknologi og naturressurser

## Begrensninger

### Forenklinger:

Konstante og eksogent gitte parametere:  $s, n, \alpha, \beta, \gamma, g_A, j, m$

- ❖ Spareraten avhenger en rekke faktorer (inntekt, usikkerhet om framtiden, lover og regler, demografi)
- ❖ Befolkningsvekstraten avhenger sannsynligvis både inntekt og usikkerhet om framtiden
- ❖ Andelen i befolkningen som jobber varierer mellom land og over tid (avhenger demografi og økonomiske insentiver)
- ❖ Produksjonselastisiteten (hvor viktig en produksjonsfaktor er) avhenger teknologisk utvikling
- ❖ Teknologisk vekst avhenger tilgjengelig teknologi, kvaliteten til arbeidskraften, regler og lover, størrelse på markedet med mere med mere

# Solow-modellen med teknologi og naturressurser

## Begrensninger

Likevel....

- ❖ Vekstmodeller gir oss viktig kunnskap om faktorer som driver, og begrenser, vekst i materiell velferd.
- ❖ Med kunnskap om enklere vekstmodeller kan vi bygge mer avanserte simuleringsmodeller som kan løses ved bruk av datamaskiner (men som ikke gir like tydelige analytiske resultater).