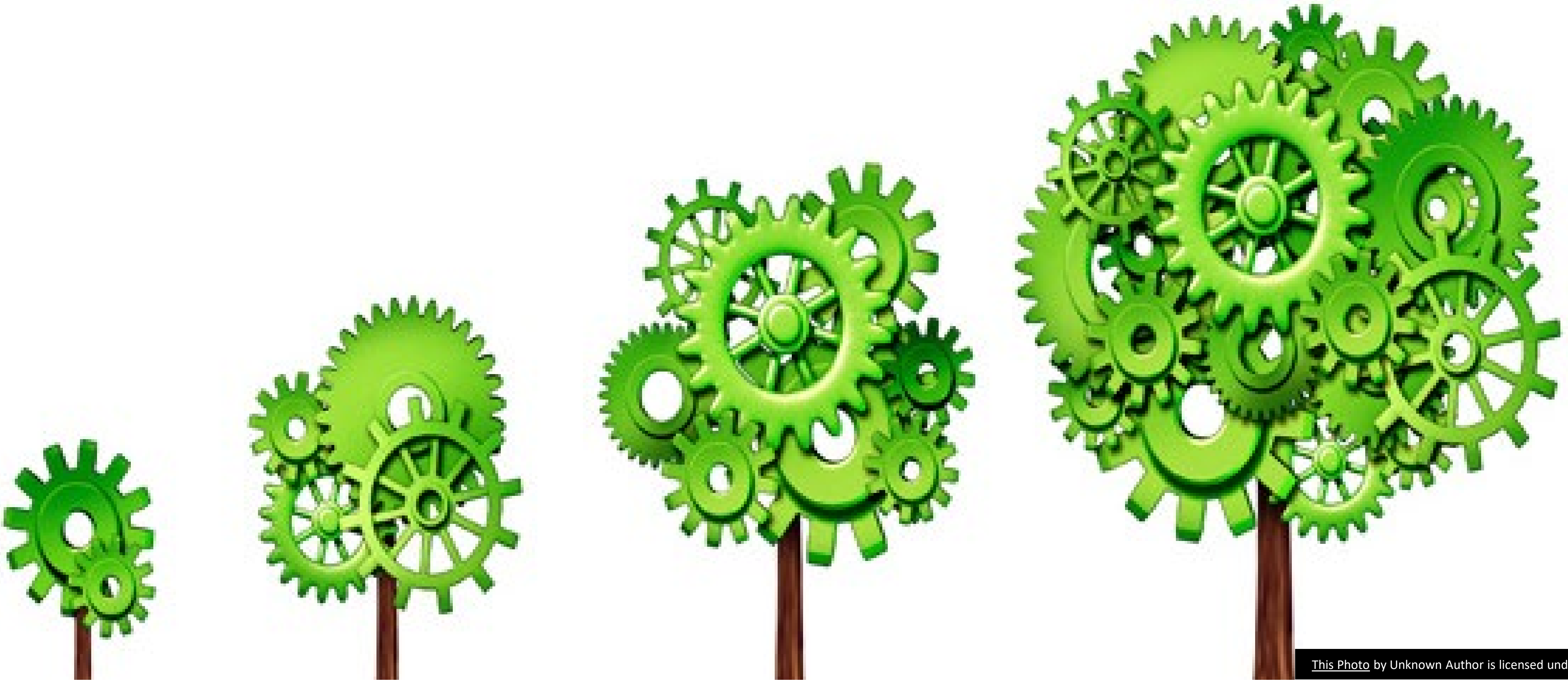




# F4. SOK-2011: Økonomisk vekst

Konvergensteori og Solow-modellen med teknologisk utvikling

# Prediksjoner fra Solowmodellen (BAS) når det kommer til vekst i materiell velferd i fattige og rike land

## 1. Betingelsesløs konvergens

**Prediksjon:**

Dersom to land har ulik nivå på BNP per arbeider, men samme…

- Produksjonsfunksjon (f.eks. $Y(t) = K(t)^{\alpha} \cdot L(t)^{1-\alpha}$ )
- Sparerate (f.eks $s = 0.1$)
- Befolkningsvekstrate (f.eks $n = 0.02$)
- Depresieringsrate i kapitalen (f.eks $\delta = 0.005$)

Vil…

- Det fattigere landet vokse raskere enn det rike landet

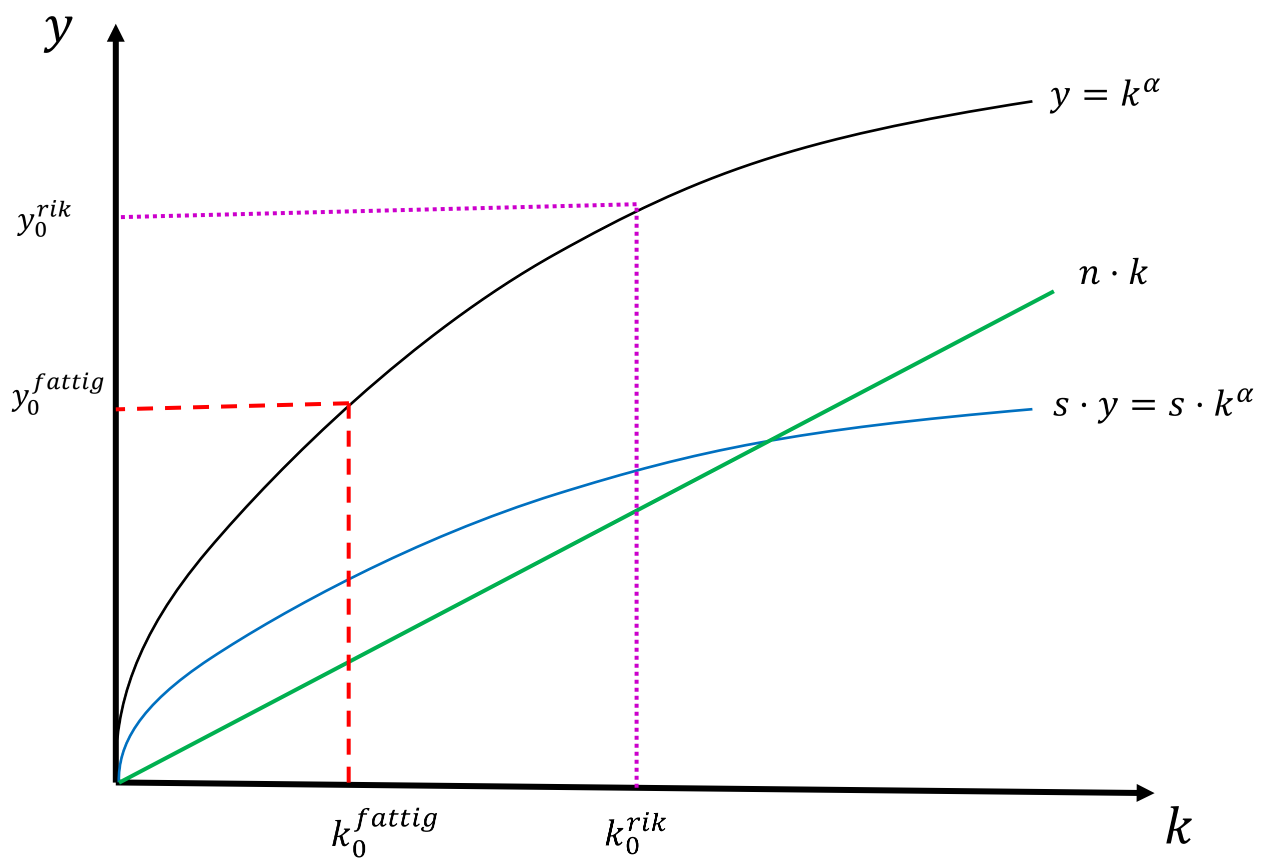
$$g_y^{fattig} > g_y^{rik}$$

- Nivået i BNP per arbeidere på sikt konvergere i de to landene

$$y^{fattig} \rightarrow y^{rik}$$

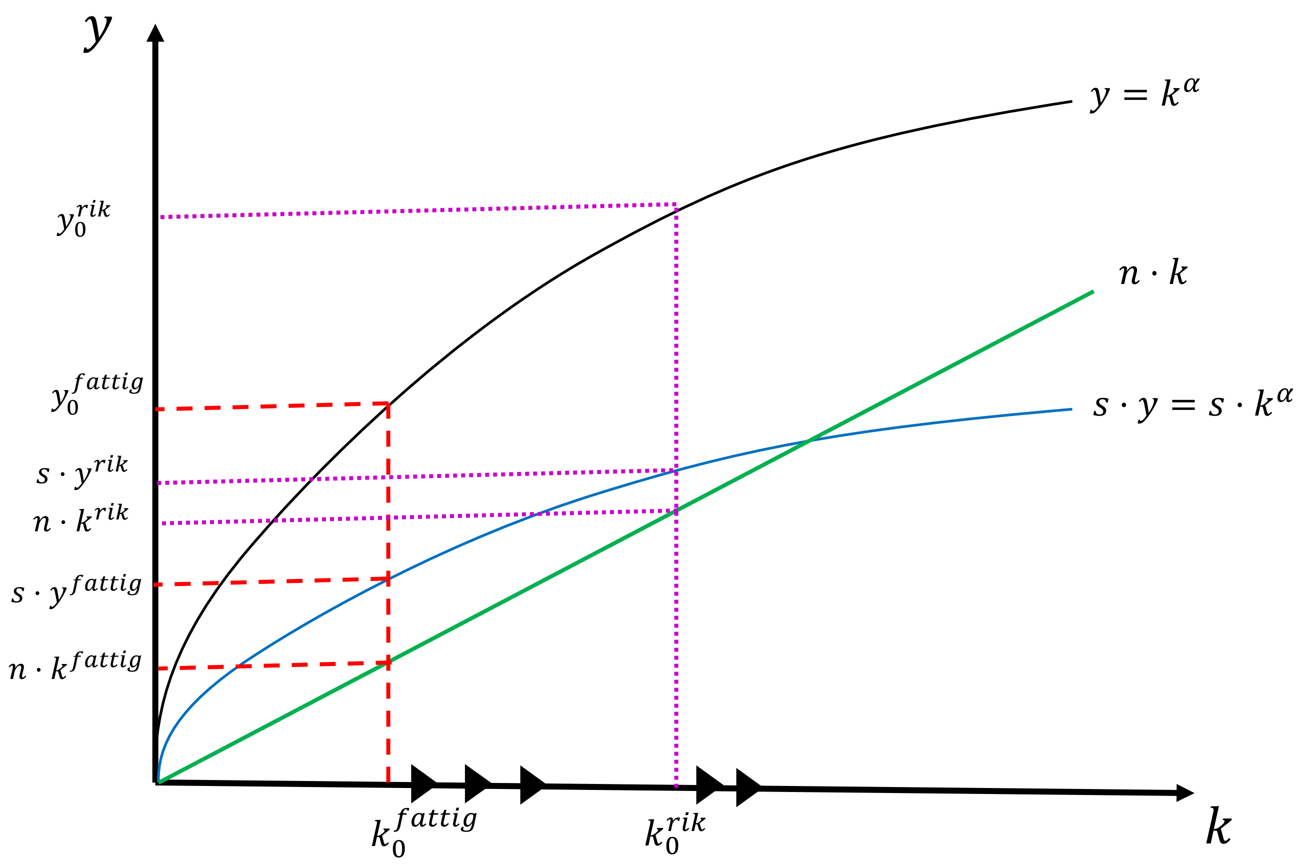
# Prediksjoner fra Solowmodellen (BAS) når det kommer til vekst i materiell velferd i fattige og rike land

1. Betingelsesløs konvergens



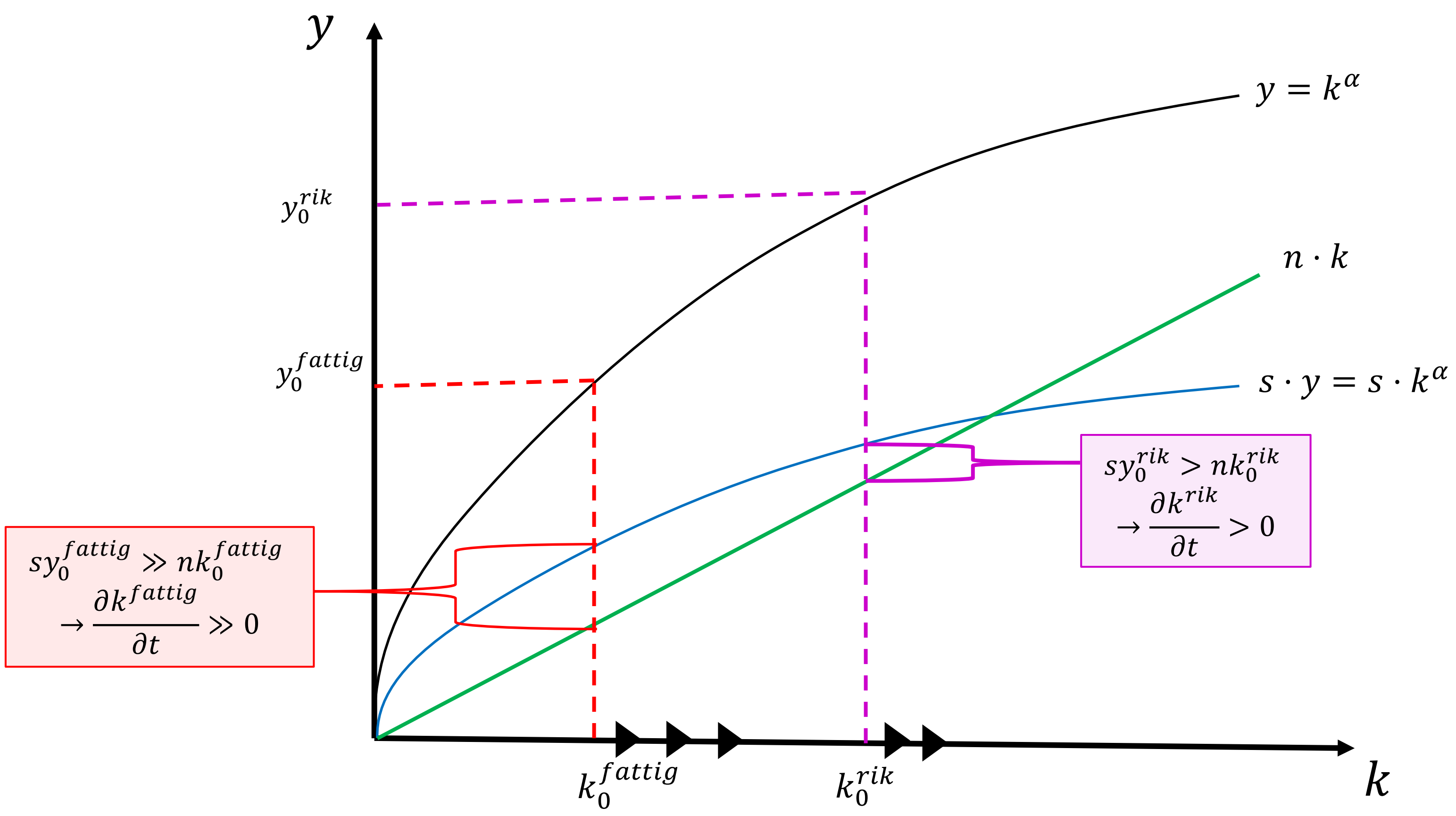
# Prediksjoner fra Solowmodellen (BAS) når det kommer til vekst i materiell velferd i fattige og rike land

## 1. Betingelsesløs konvergens



# Prediksjoner fra Solowmodellen (BAS) når det kommer til vekst i materiell velferd i fattige og rike land

## 1. Betingelsesløs konvergens

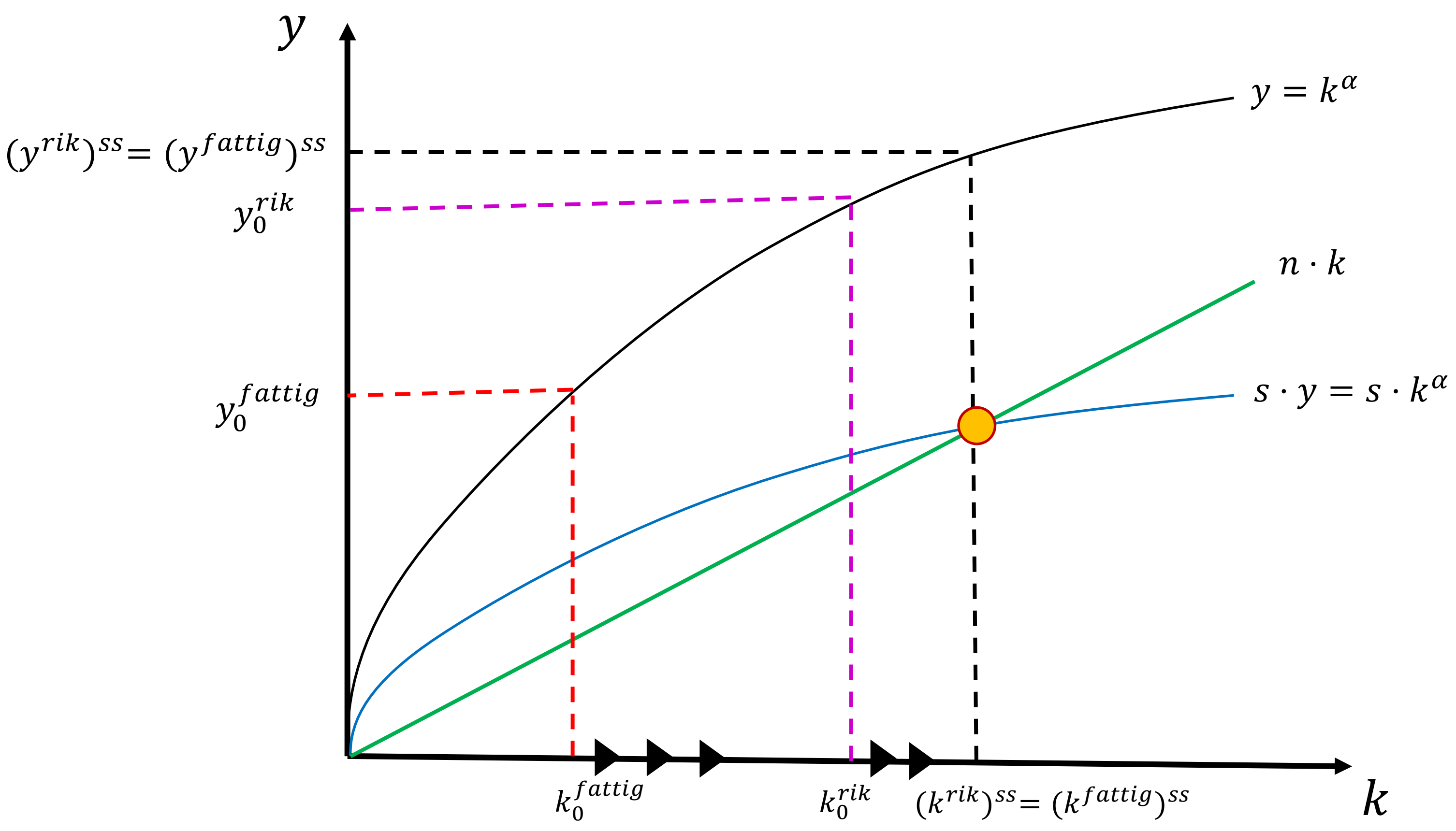



$$\frac{\partial k^{fattig}}{\partial t} > \frac{\partial k^{rik}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial y^{fattig}}{\partial t} > \frac{\partial y^{rik}}{\partial t}$$

# Prediksjoner fra Solowmodellen (BAS) når det kommer til vekst i materiell velferd i fattige og rike land

## 1. Betingelsesløs konvergens




$$\frac{\partial k^{fattig}}{\partial t} > \frac{\partial k^{rik}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial y^{fattig}}{\partial t} > \frac{\partial y^{rik}}{\partial t}$$

$$(y^{rik})^{ss} = (y^{fattig})^{ss}$$

# Prediksjoner fra Solowmodellen (BAS) når det kommer til vekst i materiell velferd i fattige og rike land

## 2. Betinget konvergens

**Prediksjon:**

Dersom to land har samme **produksjonsfunksjon** (f.eks. $Y(t) = K(t)^{\alpha} \cdot L(t)^{1-\alpha}$ )

Men ulik nivå på **sparerate** og **befolkningsvekst**, vil nivået på BNP per arbeider konvergere, gitt at produksjons-faktorene kan flytte fritt mellom landene (åpen økonomi)

**Intuisjon?**

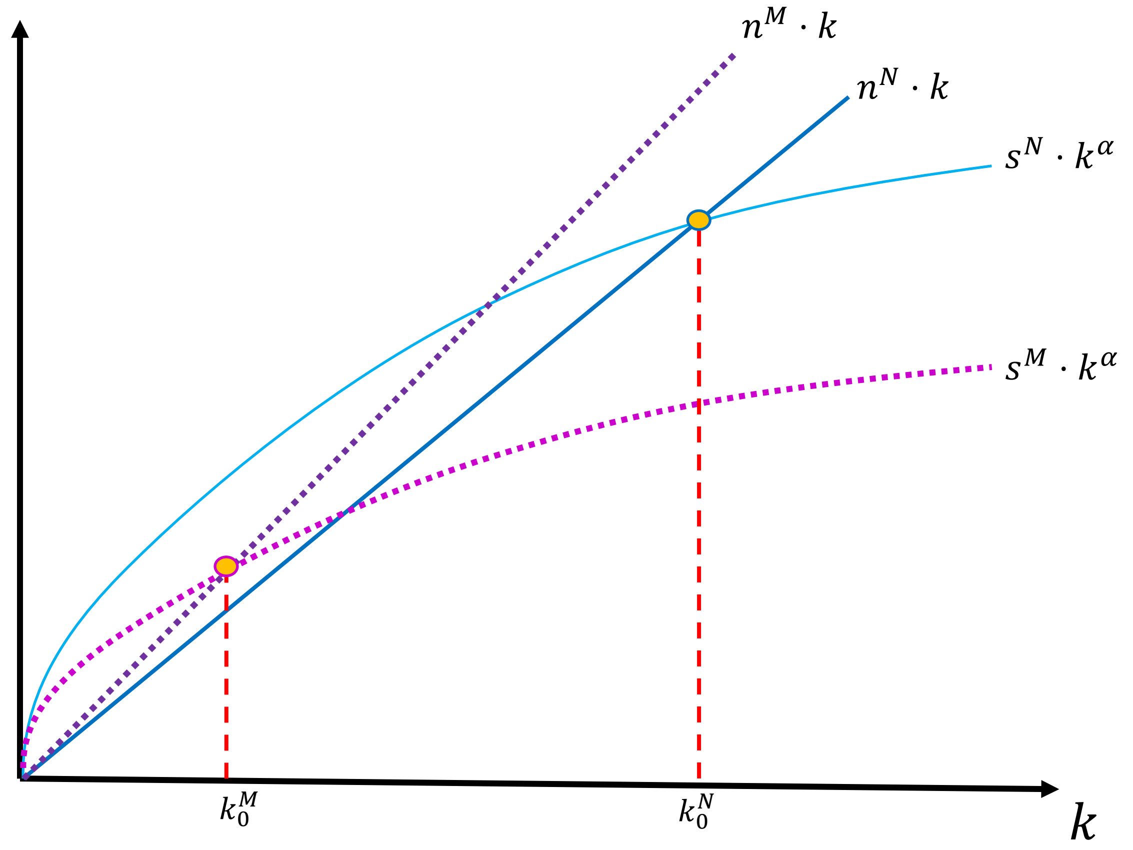
# Prediksjoner fra Solowmodellen (BAS) når det kommer til vekst i materiell velferd i fattige og rike land

## 2. Betinget konvergens

**Eksempel med et fattig og et rikt land:**

Malawi:
Lav $s$, høy $n$
Lav $k^{ss}$
Mange arbeidere per kapitalenhet
Høy avkastning på kapital
Lav avkastning på arbeid

Norge:
Høy $s$, lav $n$
Høy $k^{ss}$
Få arbeidere per kapitalenhet
Lav avkastning på kapital
Høy avkastning på arbeid



# Prediksjoner fra Solowmodellen (BAS) når det kommer til vekst i materiell velferd i fattige og rike land

## 2. Betinget konvergens

Malawi:
Lav $s$, høy $n$

Høy avkastning på kapital
Lav avkastning på arbeid

Malawiske arbeidere vil flytte til Norge

$n^M \downarrow$

$n^N \uparrow$

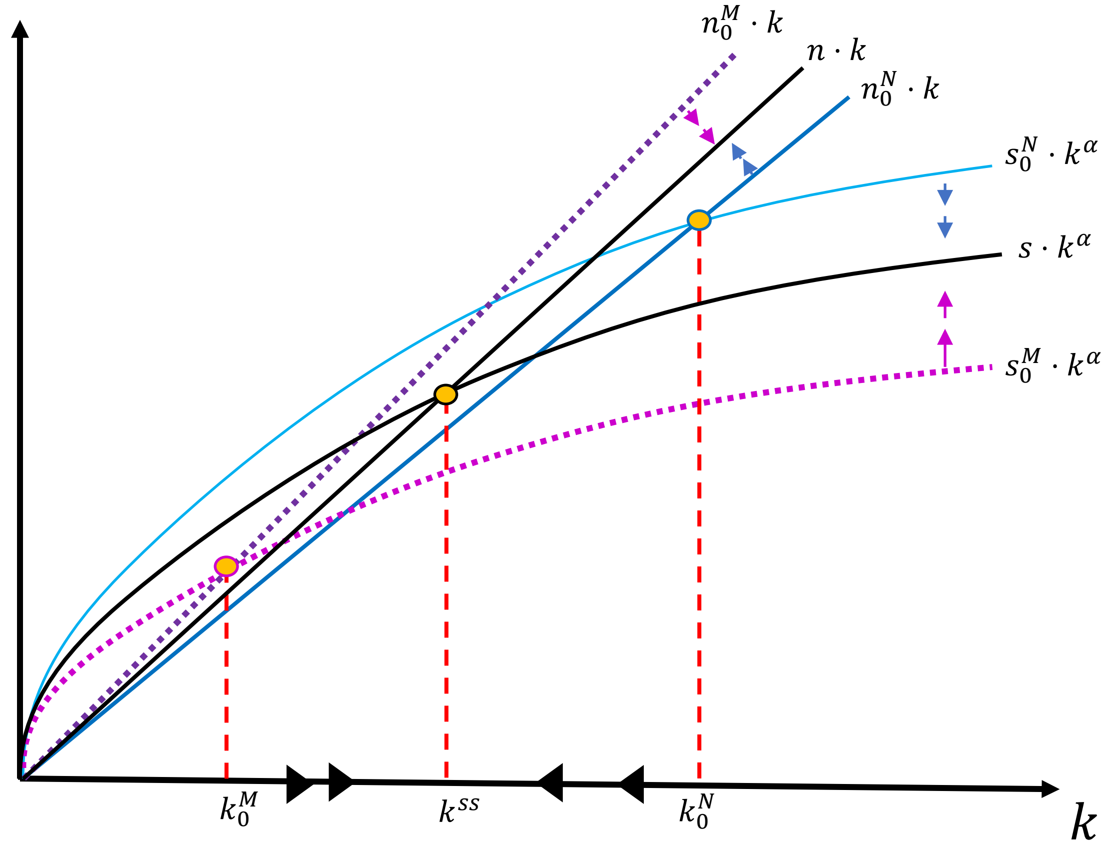
Norge:
Høy $s$, lav $n$

Lav avkastning på kapital
Høy avkastning på arbeid

Norske kapitaleiere vil investere i Malawi

$s^N \downarrow$

$s^M \uparrow$



# Prediksjoner fra Solowmodellen (BAS) når det kommer til vekst i materiell velferd i fattige og rike land

2. Betinget konvergens

PREDIKSJON
Forskjeller i avkastning på produksjonsfaktorene vil føre til at produksjonsfaktorene flytter dit avkastningen er høyest.

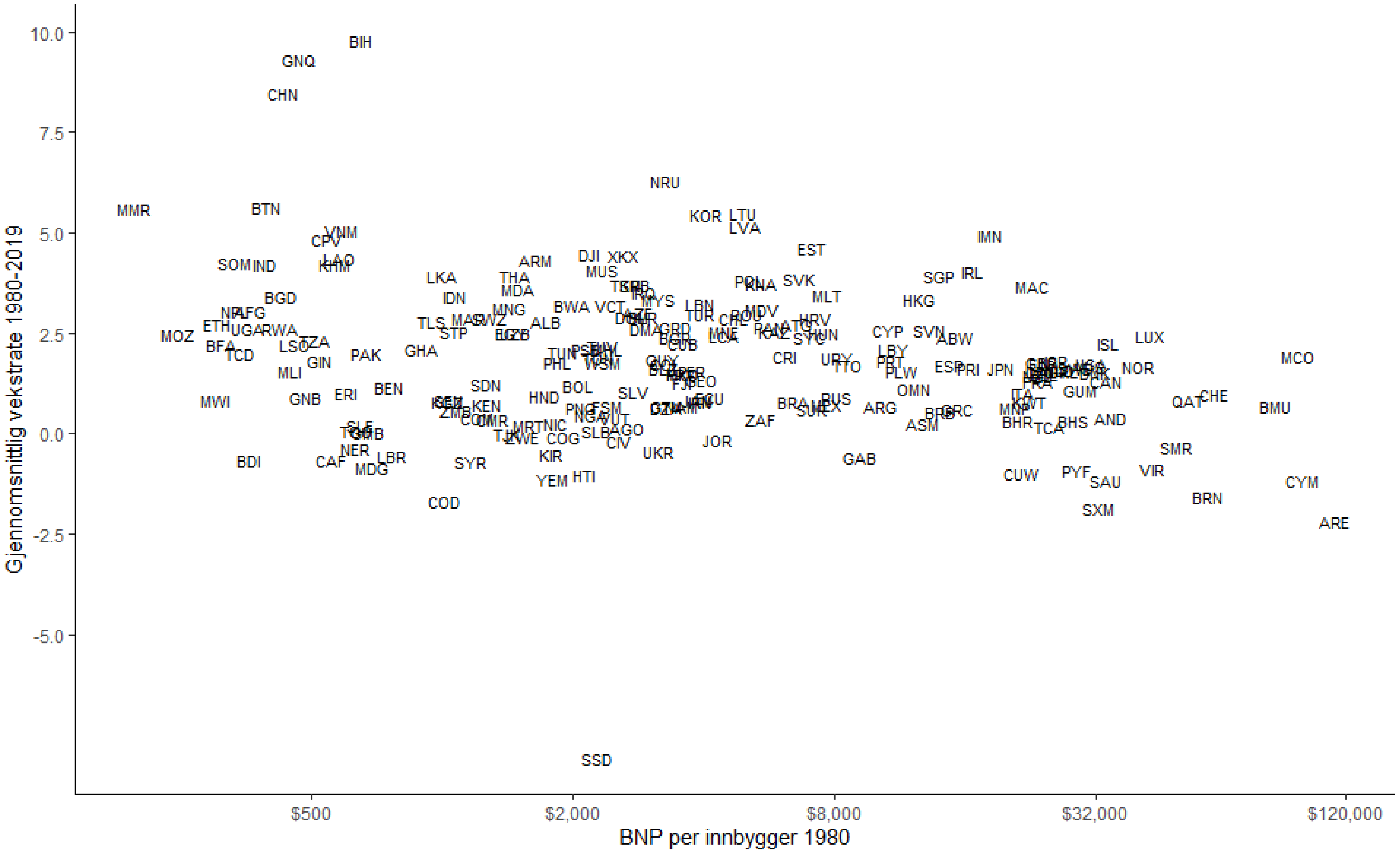
På sikt vil avkastning på produksjonsfaktorene (inntekt), og nivået på produksjon per arbeider utjevnes mellom land.

# Hvor gode er prediksjonene?

Land med høy og middels høy inntekt

# Hvor gode er prediksjonene?

Alle land




Noe mangler!

# Solow-modellen med teknologisk utvikling (vekst i $\boldsymbol{A(t)}$)

## Problem:

1. Ikke mulig å identifisere nivået på BNP per innbygger i steady-state
2. Mulig å identifisere vekstraten i BNP per innbygger i steady state, men feil i pensumboka

## Opplegg:

| | | |
|---|---|---|
| Fysisk forelesning | ⇨ | Fokus på grafisk analyse og intuisjon (økonomisk forklaring) |
| Videoforelesninger | ⇨ | Matematiske utledninger |

1. Evaluering av effekten av <u>diskrete</u> skift i det teknologiske nivået ($A_0 \rightarrow A_1$) på steady state
2. Evaluering av effekten av vekst i teknologien på vekst i produksjon per arbeider i steady state)

Solow-modellen med teknologisk utvikling

# Endringer i total faktorproduktivitet ($A(t)$)

## 1. Hvordan påvirker teknologisk nivå, nivået på materiell velferd?

**Antakelser:**

- $A$ er eksogent gitt og konstant
- Ingen teknologi (kvalitetsindeks) knyttet til arbeid og kapital
- To produksjonsfaktorer: Kapital ($K$), og arbeid ($L$)

**Produksjonsfunksjonen for total produksjon:**

$$Y(t) = A \cdot F(K(t), L(t))$$

$$Y(t) = A \cdot K(t)^{\alpha} L(t)^{1-\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1$$

Alle andre antagelser er lik

- ★ $L(t) \quad = L_0 e^{nt}$
- ★ $I(t) \quad = S(t)$
- ★ $S(t) \quad = s \cdot Y(t) = \dfrac{\partial K(t)}{\partial t}$
- ★ Konstant skala-utbytte
- ★ Avtakende grenseproduktivitet
- ★ Lukket økonomi

Solow-modellen med teknologisk utvikling

# Endringer i total faktorproduktivitet ($A(t)$)

1. Hvordan påvirker teknologisk nivå, nivået på materiell velferd?

Produksjon per innbygger: $\frac{Y(t)}{L(t)} = y(t)$ $\frac{K(t)}{L(t)} = k(t)$

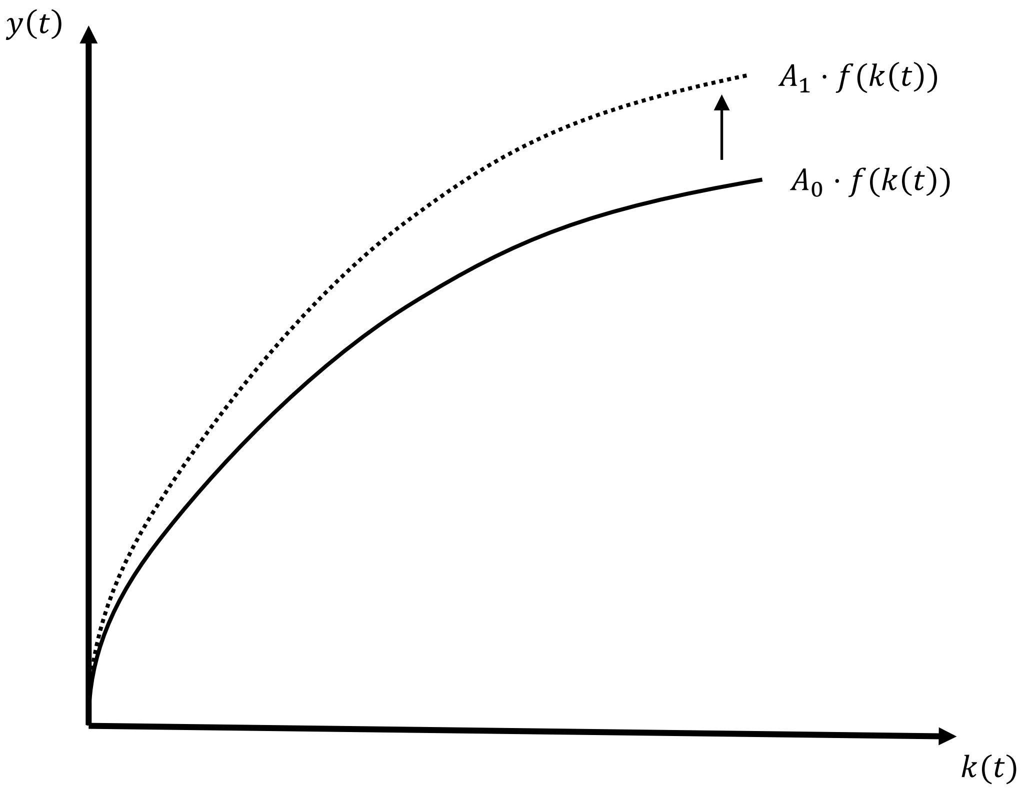
$$y(t) = A \cdot \frac{F\big(K(t), L(t)\big)}{L(t)} \rightarrow y(t) = A \cdot f\big(k(t)\big),$$

$$y(t) = A \cdot \frac{K(t)^{\alpha} L(t)^{1-\alpha}}{L(t)} \rightarrow y(t) = A \cdot k(t)^{\alpha}$$

Solow-modellen med teknologisk utvikling

# Endringer i total faktorproduktivitet ($A(t)$)

1. Hvordan påvirker teknologisk nivå, nivået på materiell velferd?




En bedre teknologi øker BNP per innbygger ved hver nivå på kapitalintensiteten

Solow-modellen med teknologisk utvikling

# Endringer i total faktorproduktivitet ($A(t)$)

1. Hvordan påvirker teknologisk nivå, nivået på materiell velferd?

Veksten i produksjon per arbeider drivs fortsatt av vekst i kapitalintensiteten

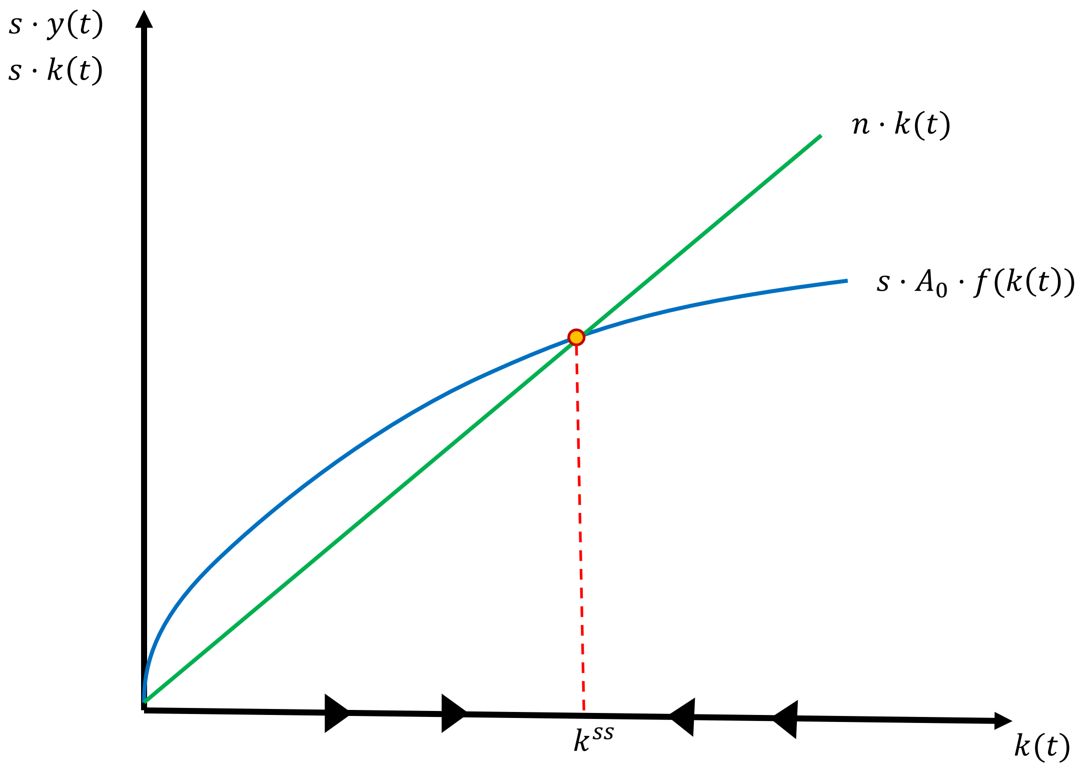
$$y(t) = A \cdot f\big(k(t)\big) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial y(t)}{\partial t} = A \cdot \frac{\partial f\big(k(t)\big)}{\partial k} \cdot \frac{\partial k(t)}{\partial t}$$

$$y(t) = A \cdot k(t)^{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial y(t)}{\partial t} = A \cdot \alpha k(t)^{\alpha-1} \frac{\partial k(t)}{\partial t}$$

Solow-modellen med teknologi

# Endringer i total faktorproduktivitet ($A(t)$)

1. Hvordan påvirker teknologisk nivå, nivået på materiell velferd?




Om $k < k^{ss}$, vil $\frac{\partial k(t)}{\partial t} > 0 \rightarrow \frac{\partial y(t)}{\partial t} > 0$

Om $k > k^{ss}$, vil $\frac{\partial k(t)}{\partial t} < 0 \rightarrow \frac{\partial y(t)}{\partial t} < 0$

Solow-modellen med teknologi

# Endringer i total faktorproduktivitet ($A(t)$)

1. Hvordan påvirker teknologisk nivå, nivået på materiell velferd?

Steady state

$$\frac{\partial k(t)}{\partial t} = 0$$

Generell produksjonsfunksjon

$$s \cdot y^{ss}(t) = n \cdot k^{ss}$$

$$k^{ss} = f(A, s, n, \alpha)$$

Spesifikk produksjonsfunksjon

$$s \cdot A \cdot (k^{ss})^{\alpha} = n \cdot k^{ss}$$

$$k^{ss} = \left(\frac{s \cdot A}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Solow-modellen med teknologisk utvikling

# Endringer i total faktorproduktivitet ($A(t)$)

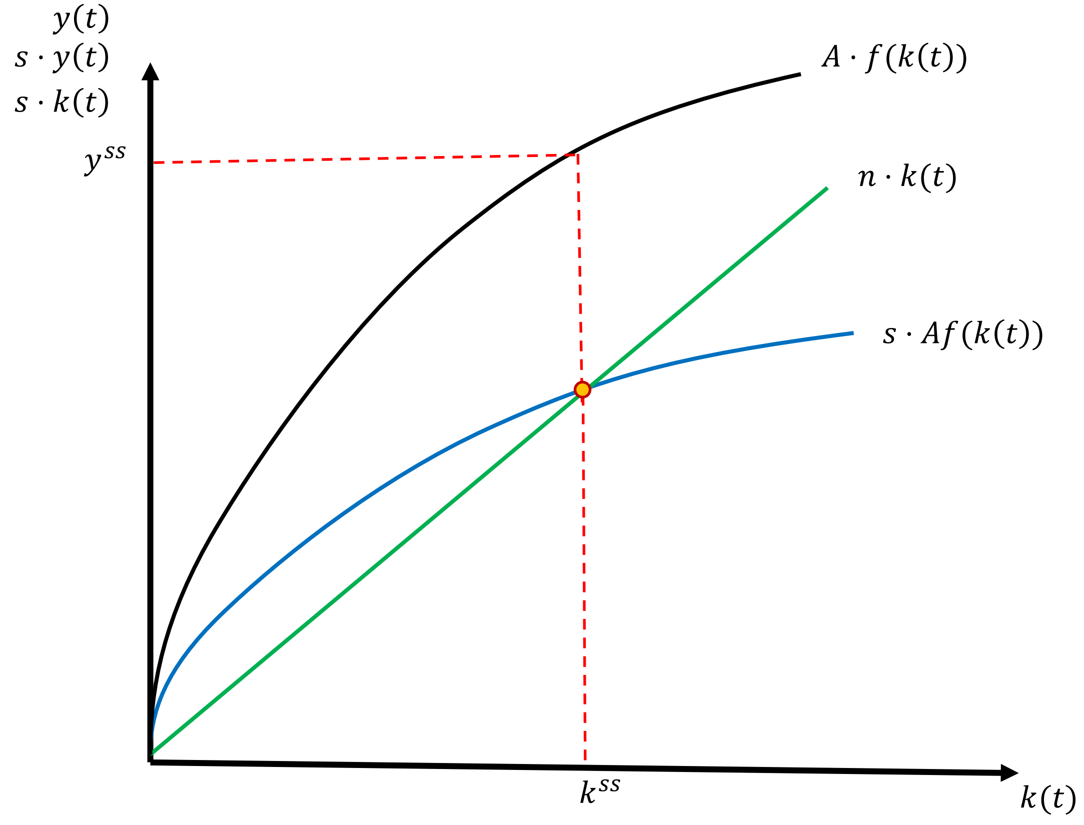
1. Hvordan påvirker teknologisk nivå, nivået på materiell velferd?

Steady state

$$k^{ss} = \left(\frac{s \cdot A}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

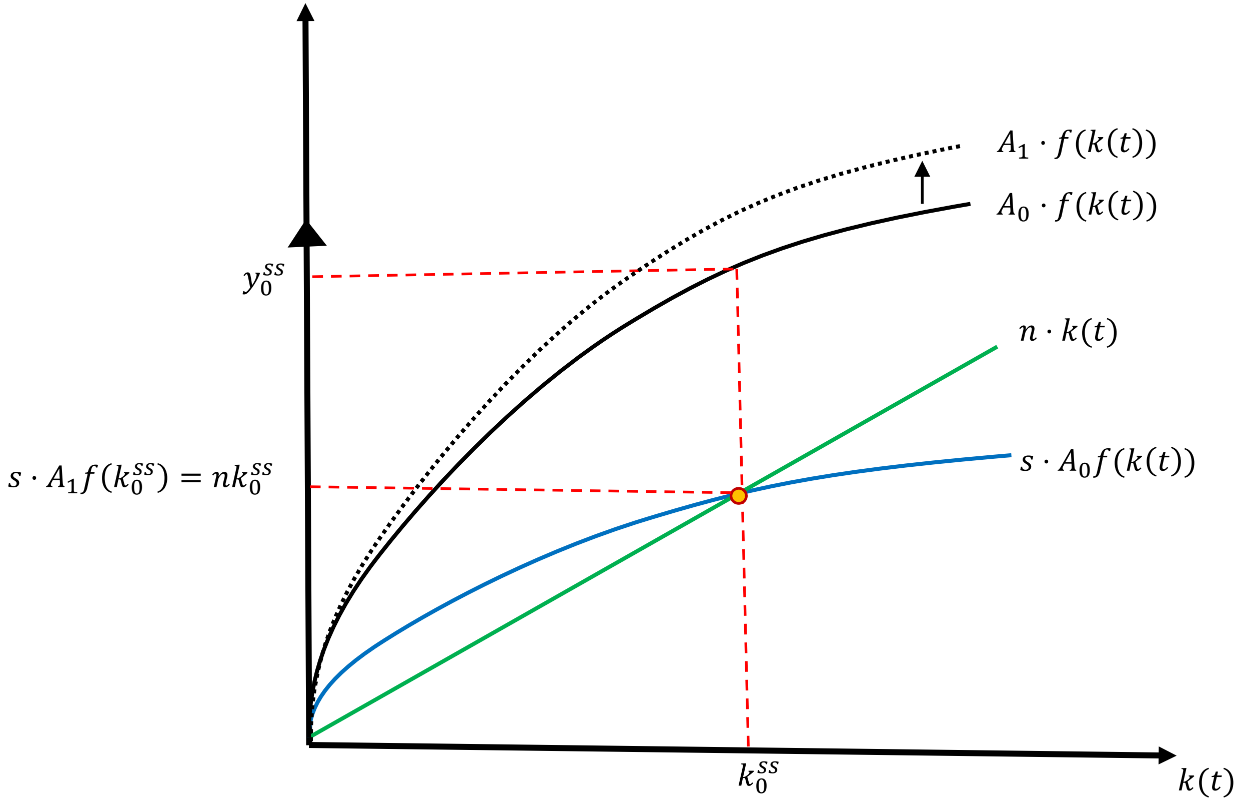
$$y^{ss} = A \cdot (k^{ss})^{\alpha}$$

$$y^{ss} = A \cdot \left(\frac{s \cdot A}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$



# Endringer i total faktorproduktivitet ($A(t)$)

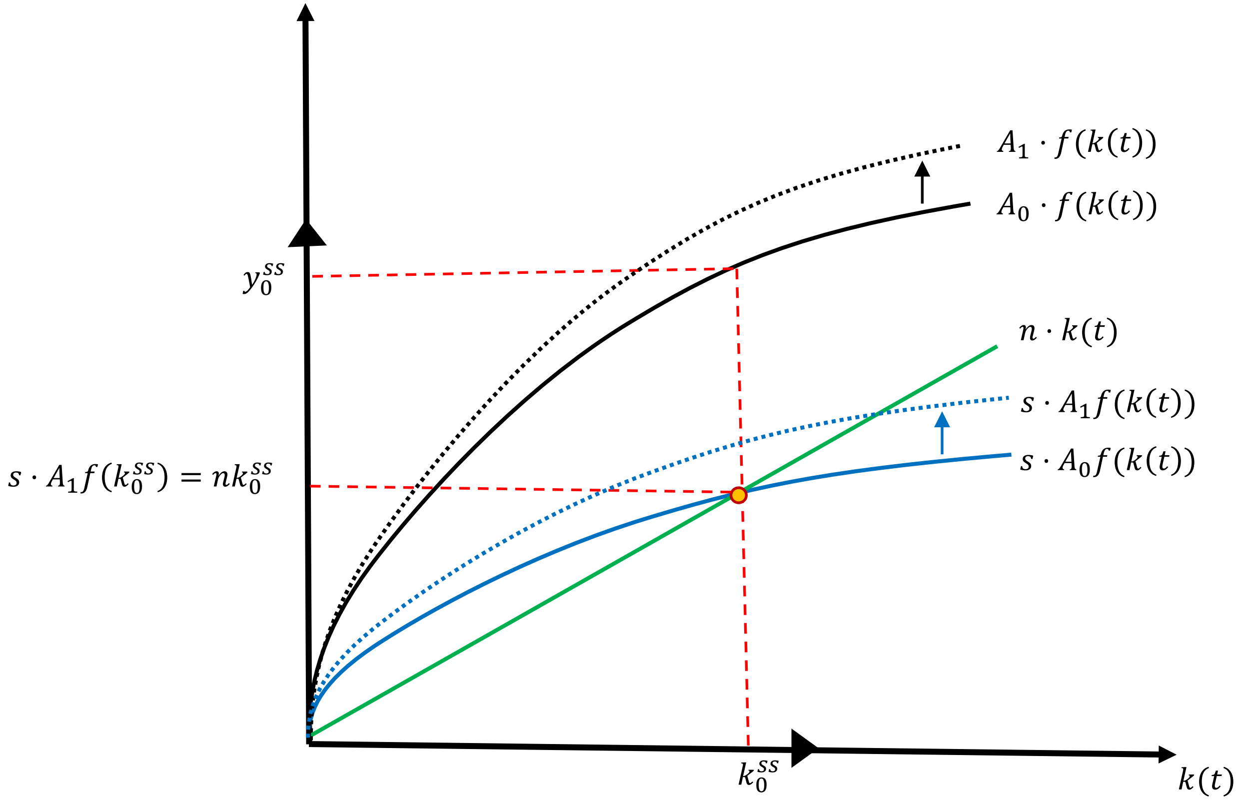
1. Hvordan påvirker teknologisk nivå, nivået på materiell velferd?



Solow-modellen med teknologisk utvikling

# Endringer i total faktorproduktivitet ($A(t)$)

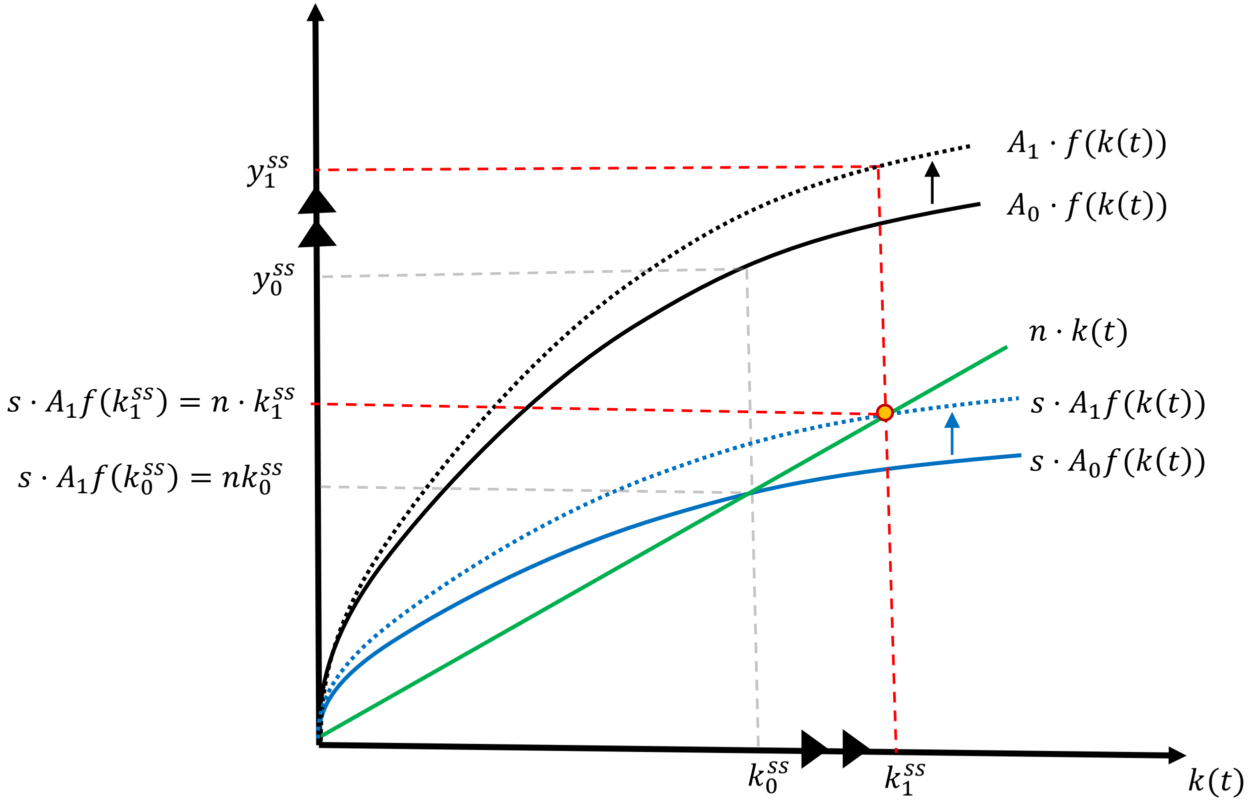
1. Hvordan påvirker teknologisk nivå, nivået på materiell velferd?



Solow-modellen med teknologisk utvikling

# Endringer i total faktorproduktivitet ($A(t)$)

1. Hvordan påvirker teknologisk nivå, nivået på materiell velferd?



Solow-modellen med teknologi

# Endringer i total faktorproduktivitet ($A(t)$)

Prediksjon

Dersom teknologien blir bedre, vil produksjon per arbeider øke

To mekanismer:

**Direkte effekt:** Produktiviteten til kapital og arbeid øker. Økonomien kan produsere mer ved gitte ressurser.

**Indirekte effekt:** Økt produktivitet i kapitalintensiteten fører til høyere faktiske nettoinvesteringer, hvilket fører til økt kapitalintensitet og derved til høyere produktivitet til arbeidskraften.

Solow-modellen med teknologisk utvikling

# Vekst i total faktorproduktivitet ($A(t) = A_0 e^{g_A t}$)

Total produksjon

$$Y(t) = A(t) \cdot K(t)^{\alpha} L(t)^{1-\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1$$

Produksjon per innbygger:

$$y(t) = A(t) \cdot k(t)^{\alpha}$$

Vekstrate i produksjon per innbygger:

$$g_y(t) = g_A + \alpha g_k(t)$$

Solow-modellen med teknologisk utvikling

# Vekst i total faktorproduktivitet ($A(t) = A_0 e^{g_A t}$)

Vekstrate i produksjon per innbygger (i og utenom steady state):

$$g_y(t) = g_A + \alpha g_k(t)$$

$$g_k(t) = s \cdot \frac{y}{k} - n$$

$$g_k(t) = \frac{s \cdot A_0 e^{g_A t}}{k^{1-\alpha}} - n$$

$$g_y(t) = \boxed{g_A} + \alpha \cdot \left( \frac{s \cdot A_0 e^{\boxed{g_A t}}}{k^{1-\alpha}} - n \right)$$

Solow-modellen med teknologisk utvikling

# Vekst i total faktorproduktivitet ($A(t) = A_0 e^{g_A t}$)

<u>Steady state:</u>

Produksjon per arbeider vokser langs ved en balansert vekstbane (konstant vekstrate)

Pensumboken viser <u>ikke</u> hvordan vi finner denne vekstrate (feil på side 245).

For å finne $g_y^{ss}$ vil vi benytte at $\frac{K(t)}{Y(t)}$ vil være konstant i steady state (se video-forelesning)

Se video!

Solow-modellen med teknologisk utvikling

# Vekst i total faktorproduktivitet ($A(t) = A_0 e^{g_A t}$)

## Utledning av vekstraten i steady state:

Transformasjon av total produksjon

$$Y(t) = A(t)^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \left(\frac{K(t)}{Y(t)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} L(t)$$

Transformasjon av produksjon per innbygger:

$$y(t) = A(t)^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \left(\frac{K(t)}{Y(t)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Vekstrate i produksjon per innbygger:

$$g_y(t) = \frac{1}{1-\alpha} g_A + \frac{\alpha}{1-\alpha} g_{\frac{K}{Y}}(t)$$

Se video!

Solow-modellen med teknologisk utvikling

# Vekst i total faktorproduktivitet ($A(t) = A_0 e^{g_A t}$)

**Vekstrate i <u>steady state:</u>**

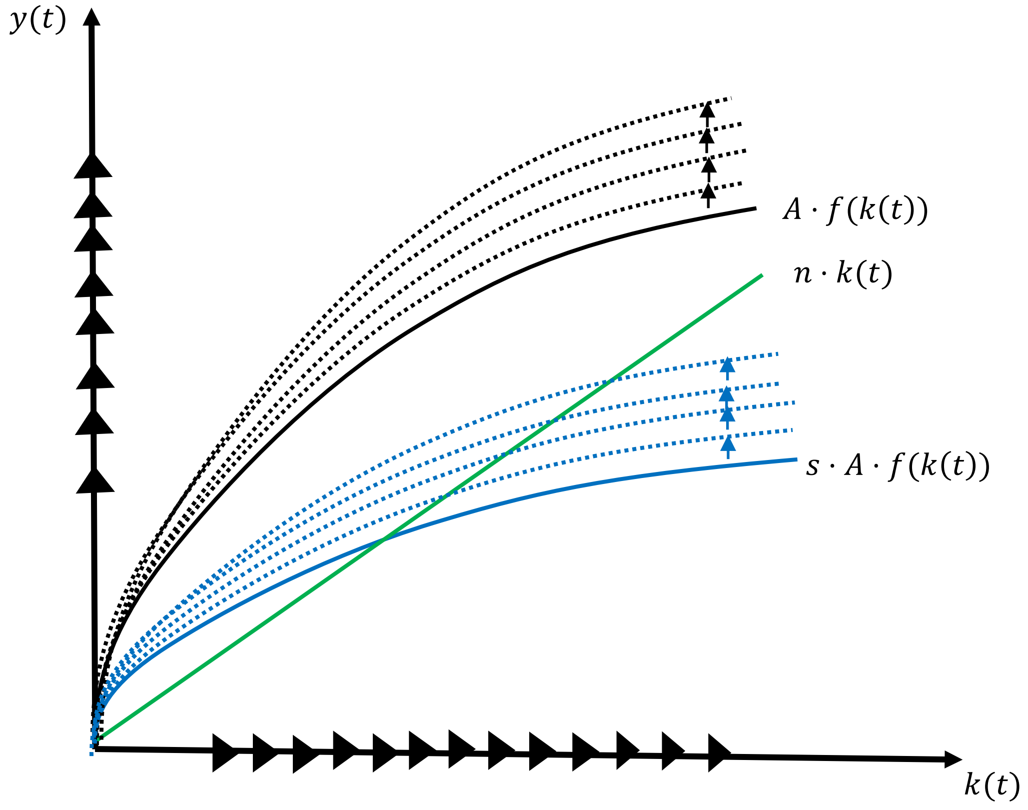
$$\left(\frac{K(t)}{Y(t)}\right)^{ss} = konstant \rightarrow g_{\frac{K}{Y}}^{ss} = 0$$

$$g_y(t) = \frac{1}{1-\alpha} g_A$$

Solow-modellen med teknologisk utvikling

# Vekst i total faktorproduktivitet ($A(t) = A_0 e^{g_A t}$)

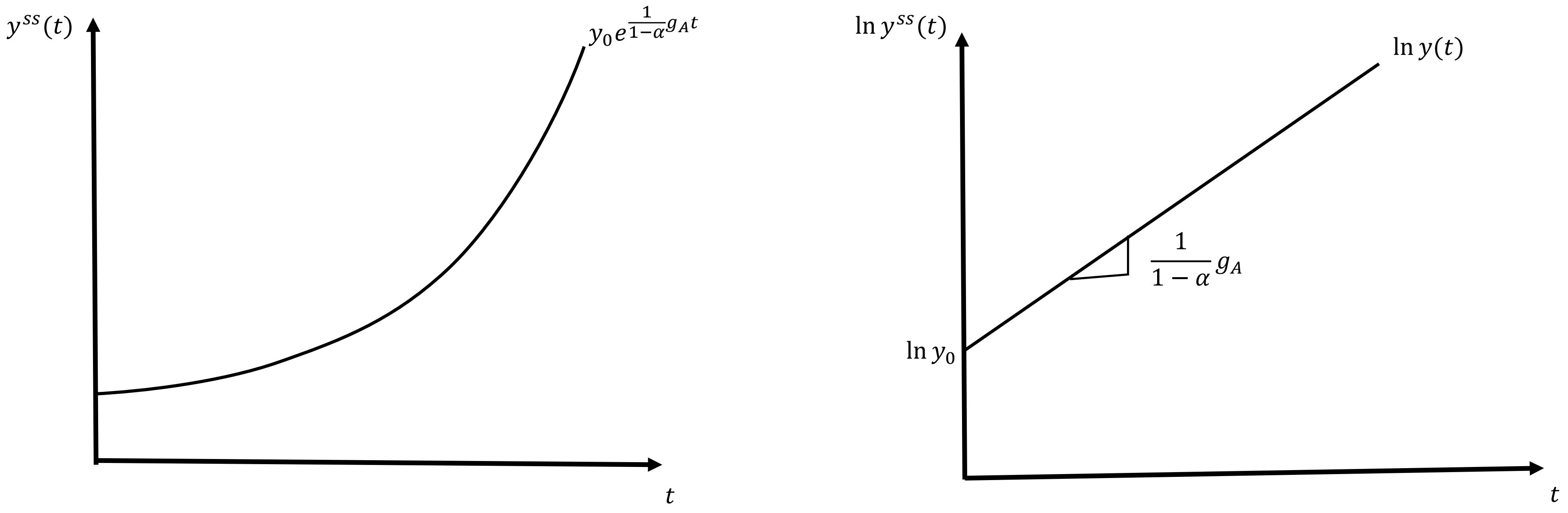
**Steady state:**



Solow-modellen med teknologisk utvikling

# Vekst i total faktorproduktivitet ($A(t) = A_0 e^{g_A t}$)

**Steady state:**



Solow-modellen med teknologisk utvikling

# Vekst i kvaliteten til arbeid og kapital $(q_K(t), q_K(t))$

**Generell produksjonsfunksjon**

$$Y(t) = A(t) \cdot F(\underbrace{q_K(t) \cdot K(t)}_{\underline{K}(t)}, \underbrace{q_L(t) \cdot L(t)}_{\underline{L}(t)})$$

**Spesifikk produksjonsfunksjon**

$$Y(t) = A(t) \cdot \left(q_K(t) \cdot K(t)\right)^{\alpha} \left(q_L(t) \cdot L(t)\right)^{1-\alpha}$$

Alle andre antagelser er lik

- $L(t) \quad = L_0 e^{nt}$
- $I(t) \quad = S(t)$
- $S(t) \quad = s \cdot Y(t) = \dfrac{\partial K(t)}{\partial t}$
- Konstant skala-utbytte
- Avtakende grenseproduktivitet
- Lukket økonomi

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A(t)$ | $= A_0 \cdot e^{g_A t}$ | Total faktorproduktivitet (Hicks-netural teknologi) | Vekstrate: $g_A$ |
| $q_K(t)$ | $= e^{jt}$ | Kvalitetsindeks til kapital | Vekstrate: $j$ |
| $q_L(t)$ | $= e^{mt}$ | Kvalitetsindeks til arbeid (Harrod-neutral teknologi) | Vekstrate: $m$ |

Se video!

Solow-modellen med teknologisk utvikling

# Vekst i kvaliteten til arbeid og kapital $(q_K(t), q_K(t))$

Total produksjon

$$Y(t) = A(t) \cdot \left(q_K(t) \cdot K(t)\right)^{\alpha} (q_L(t) \cdot L(t))^{1-\alpha}$$

Produksjon per innbygger:

$$y(t) = A(t) \cdot q_K(t)^{\alpha} \cdot q_L(t)^{1-\alpha} \cdot k(t)^{\alpha}$$

$$y(t) = A_0 \cdot e^{g_A t} \cdot e^{\alpha j t} \cdot e^{(1-\alpha) m t} \cdot k(t)^{\alpha}$$

$$y(t) = A_0 \cdot e^{(g_A + \alpha j + (1-\alpha) m) t} \cdot k(t)^{\alpha}$$

$$A(t) = A_0 e^{g_A t}$$

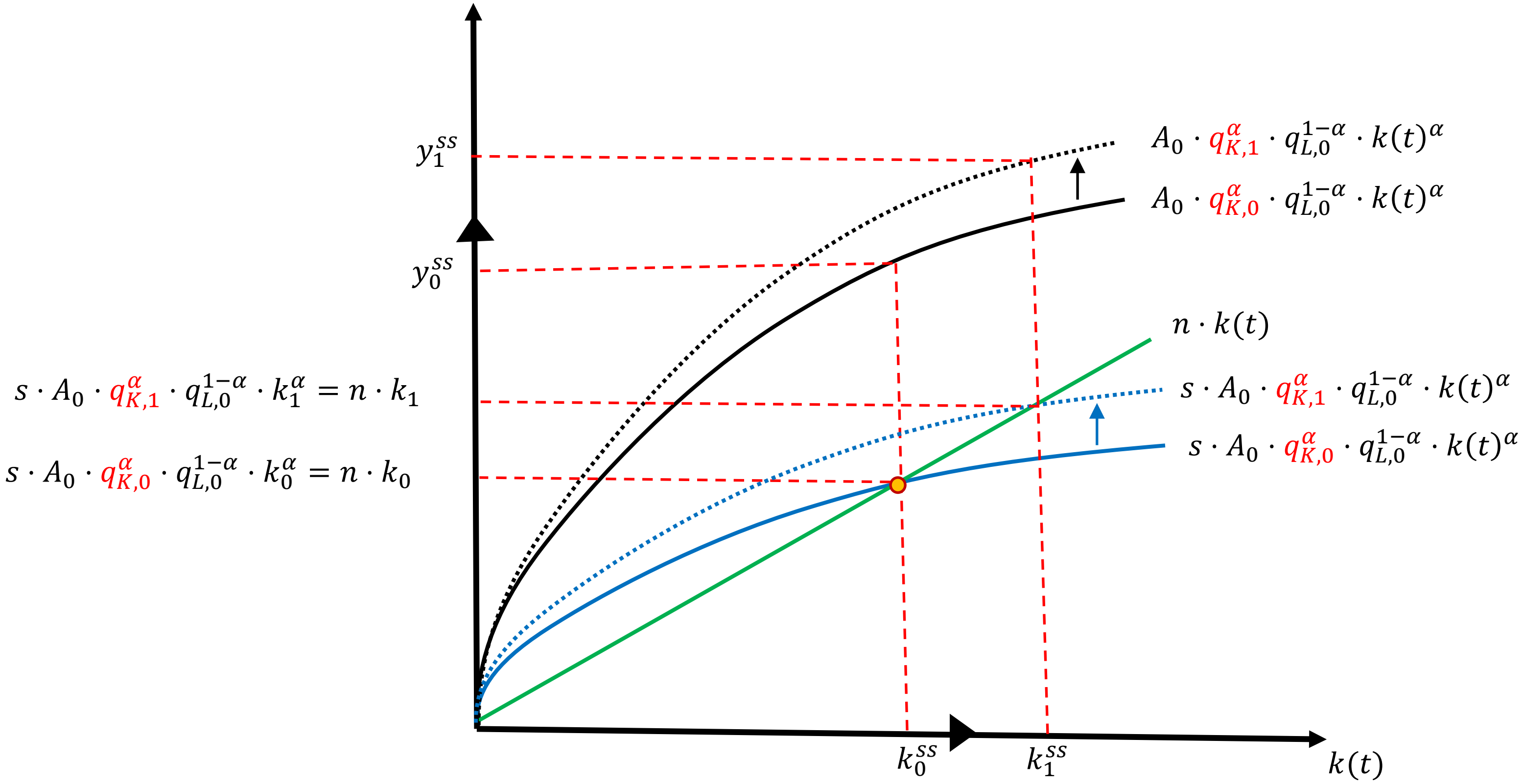
$$q_K(t) = e^{jt}$$

$$q_L(t) = e^{mt}$$

Solow-modellen med teknologisk utvikling

# Vekst i kvaliteten til arbeid og kapital $(q_K(t), q_K(t))$

Effekt av en (diskret) økning i kvaliteten til kapital: $q_{K,0} \rightarrow q_{K,1}$



Se video!

Solow-modellen med teknologisk utvikling

# Vekst i kvaliteten til arbeid og kapital $(q_K(t), q_K(t))$

Produksjon per innbygger:

$$y(t) = A_0 \cdot e^{(g_A + \alpha j + (1-\alpha)m)t} \cdot k(t)^{\alpha}$$

Vekstrate i produksjon per innbygger (i og <u>utenom steady state</u>):

$$g_y(t) = g_A + aj + (1-\alpha)m + \ \alpha g_k(t)$$

$$g_y(t) = \boxed{g_A + aj + (1-\alpha)m} + \alpha \cdot \left( \frac{s \cdot A_0 \boxed{e^{(g_A + \alpha j + (1-\alpha)m)t}}}{k^{1-\alpha}} - n \right)$$

Se video!

Solow-modellen med teknologisk utvikling

# Vekst i kvaliteten til arbeid og kapital $(q_K(t), q_K(t))$

## Steady state:

Samme transformasjon som ved vekst i teknologien

$$y(t) = A_0^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot e^{\left(\frac{g_A+\alpha j+(1-\alpha)m}{1-\alpha}\right)t} \cdot \left(\frac{K(t)}{Y(t)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$\frac{K(t)}{Y(t)}$ Er konstant i steady state

$\Rightarrow$ $\left(g_{\frac{K}{Y}}\right)^{ss} = 0$

Vekstrate i produksjon per innbygger i steady state:

$$g_y^{ss}(t) = \frac{(g_A + aj + (1-\alpha)m)}{1-\alpha}$$

Solow-modellen med teknologi

# Vekst i kvaliteten til arbeid og kapital $(q_K(t), q_K(t))$

Prediksjon

Dersom teknologien og/eller kvaliteten til arbeid og kapital blir bedre, vil produksjon per arbeider øke

To mekanismer:

**Direkte effekt:** Produktiviteten til kapital og arbeid øker. Økonomien kan produsere mer ved gitte ressurser.

**Indirekte effekt:** Økt produktivitet i kapitalintensiteten fører til høyere faktiske nettoinvesteringer, hvilket fører til økt kapitalintensitet og derved til høyere produktivitet til arbeidskraften.

**Effekten av en økning i kvaliteten til kapital og arbeid, på vekstraten til produksjon per arbeider, avhenger den partielle produksjonselastisiteten til produksjonsfaktoren**

# Solow-modellen med teknologisk utvikling $(A(t), q_K(t), q_L(t))$

**Viktig konklusjon**

Teknologisk utvikling og bedre kvalitet i produksjonsfaktorene, fører til at produksjonsfaktorene kan utnyttes mer effektivt. Vi kan produsere mer, med samme mengde ressurser.

**Viktige spørsmål**

Hva fører til at total faktorproduktivitet øker?

Hva fører til økt kvalitet i arbeid og kapital?

Hva kan politiker gjøre for å øke total faktorproduktivitet og kvaliteten til arbeid og kapital?