Kom i gang med økonomiske modeller

SOK-1010

Even Soltvedt Hvinden og Hanna Persson

Forord

For å mestre SOK-1010 må du være stødig på å analysere økonomiske modeller i form av lineære ligningssystemer. Dette notatet er ment som et kompakt supplement til pensum for å hjelpe deg på veien.[1] Notatet er organisert som følger. I del 1-3 har vi laget oppgaver til videre å friske opp matematikken utover øvingsboken. I del 4 diskuterer vi forskjellen på eksogene og endogene variable, et tema som erfaringsmessig kan gi opphav til forvirring. I del 5 gir vi et detaljert løsningsforslag på oppgave M.10 fra øvingsboken.

Før du går i gang med notatet anbefaler vi deg å lese vedlegget "Enkel matematikk for økonomer" på side 495-504 i pensumboka og å løse oppgavene M.1 – M.8 i øvingsboken for å opparbeide nødvendig forkunnskap. Vi anbefaler deg så å gjøre oppgavene i del 1-3 og lese deg grundig gjennom del 4 og 5.

[1] Pensumet er Steinar Holdens *Makroøkonomi*, 1. utgave, kapittel 1-16 og vedlegget "Enkel matematikk for økonomer" og Steinar Holdens, Tord Kroghs og Joakim Blix Prestmos *Makroøkonomi – oppgaver og løsningsforslag*, begge utgitt av Cappelen Damm.

1 Oppfrisking: Algebra

I disse oppgavene skal du forenkle uttrykkene. Du kan anta at $a+d<1$ slik at ingen uttrykk er delt på 0 og det derfor eksisterer en løsning. Oppgavene har økende vanskelighetsgrad og du bør være i stand til å løse alle de som ikke er markert med utropstegn - de er for spesielt interesserte.

a.

$$\left(C+\frac{C}{1-a}\right)\frac{2-a}{1-a}$$

b.

$$C+\frac{aC}{1-a}$$

c.

$$C+\frac{(1+a+d)(C+B)}{1-a-d}$$

d.

$$\frac{C}{a}+\frac{B}{d}-\frac{dC}{ad}+\frac{B}{a}$$

e.

$$-\frac{(1+d)(1-d)A-A}{d}$$

f!

$$\left(\frac{C}{1-a}+\frac{B}{1-d}\right)\left(\frac{1-a-d+ad}{(1-a)B+(1-d)C}\right)$$

g!

$$C+\frac{C}{1-a}+\frac{C}{(1-a)^2}-\frac{(3(1-a)+a^2-1)C}{1-2a+a^2}$$

h!

$$\frac{C}{(1+a)(1-a)}+\frac{C}{1-a}-\frac{C(1+a)}{1-a^2}$$

2 Oppfrisking: Ligningsystemer

I disse oppgavene skal du løse ligningsystemene, som vil si at du skal finne tallverdier for alle de ukjente variablene som gjør at likhetstegnet holder. Du kan anta at en løsning eksisterer. Du bør være i stand til å løse alle disse ligningene før du går videre. Hvis ikke må du spørre foreleser, mentor eller seminarleder om hjelp.

a.

$$Y = 1 + X$$
$$X = 1$$

b.

$$Y = 2 + \frac{Y}{1 - X}$$
$$X = \frac{1}{2}$$

c.

$$Y = X + 1$$
$$X = Z + 1$$
$$Z = 1$$

d.

$$Y = X + Z$$
$$X = 1 + Y$$
$$Z = 2Y$$

e.

$$Y = X + Z$$
$$X = 1 + \frac{Y}{2}$$
$$Z = 1 + \frac{Y}{3}$$

3 Oppfrisking: Eksistens av løsninger

Les nøye om telleregelen på side 501 i pensumboken og gå gjennom eksemplene der. Betrakt følgende ligningsystemer og undersøk hvorvidt det finnes en løsning. Begrunn svaret ditt.

a.

$$\begin{aligned} Y &= 1 + X \\ X &= 1 \\ 3 + 2X &= 4 + X \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} Y &= X + Z + \frac{Y}{6} \\ X &= \frac{Y}{2} \\ Z &= \frac{Y}{3} \end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned} Y &= X + Z \\ X &= 1 + \frac{Y}{2} \\ Z &= 1 + \frac{Y}{3} \end{aligned}$$

d.

$$\begin{aligned} Y &= X + Z \\ X &= 1 + \frac{Y}{2} \\ Z &= 1 + \frac{Y}{3} \\ X &= Z + 3 \end{aligned}$$

4 Endogene og eksogene variable, skiftanalyse

En økonomisk modell består av et sett med ligninger som gir oss relasjoner mellom variable. En variabel er et symbol som representerer et tall. For å unngå tvetydigheter og misforståelser benyttes det et presist språk når vi arbeider med økonomiske modeller. Vi skiller mellom *endogene* og *eksogene* variable. Dette er greske ord som grovt forklart betyr "gitt utenfra" og "gitt innenfra" ligningssystemet. De kalles også for *avhengige* og *uavhengige*, eller bare for *variable* og *konstanter*. I noen anvendelser skiller man mellom to typer eksogene variable, *parameter* og *skiftfaktor*. Dette er for å understreke at en parameter betraktes som en konstant mens skiftfaktorer kan variere (eksogent).

Definisjon: Verdien til en endogen eller avhengig variabel bestemmes av relasjonene i modellen. En eksogen eller uavhengig variabel får sin verdi gitt utenfor modellen.

En eksogen variabel kan behandles som et fastsatt tall. Én måte å tenke på forskjellen er at vi betrakter et ligningssystem hvor de eksogene variablene allerede er løst. La oss ta et veldig enkelt eksempel for å bygge forståelse. Betrakt følgende ligningssystem

$$\begin{aligned} Y &= X + \frac{Y}{2} \\ X &= \frac{3}{4} \end{aligned} \tag{1}$$

og merk at det ikke er mulig å forenkle uttrykket $X = 3/4$ i (1) ytterligere. Det er åpenbart at vi også kunne representert informasjonen i ligning (1) som

$$Y = \frac{3}{4} + \frac{Y}{2} \tag{2}$$

hvor vi har erstattet X med 3/4. Eksemplene (1) og (2) er to representasjoner av eksakt samme informasjon. Verdien av X er *eksogent* spikret ned, variabelen Y er *endogent* bestemt av verdien til X.

Når vi analyserer en modell er vi som regel interessert i egenskapene til relasjonen mellom Y og X, ikke å løse for den eksakte tallverdien til Y for en gitt X.

Det mest vanlige spørsmålet vi stiller er: Hvor mye vil Y endres hvis X øker med 1 enhet? Dette er en såkalt skiftanalyse. I vårt eksempel over er ikke denne relasjonen åpenbar fordi Y fremkommer på begge sider av likhetstegnet. Hvis vi løser

$$Y = X + \frac{Y}{2} \tag{3}$$

for Y får vi at $Y = 2X$. Her har vi samlet de eksogene X på høyre side og den endogene Y på venstre side. Anta nå at X endrer verdi fra til X^*, hvor $X \neq X^*$. Det følger at Y endres fra $2X$ til $2X^*$. I makroøkonomi er det vanlig å kalle endringen for $\Delta X = X^* - X$, hvor Δ er den greske bokstaven delta og betegner endring (*difference*). Vi kan så regne ut

$$\Delta Y = Y^* - Y = 2X^* - 2X = 2(X^* - X) = 2\Delta X.$$

En økning i X på ΔX øker Y med dobbelt så mye, $2\Delta X$. Vi vil nå prøve oss på en oppgave fra boken hvor vi benytter skiftanalyse.

5 Detaljert løsningsforslag for M.10

Oppgave M.10 i øvingsboken lyder som følger:

"En økonomisk modell for variablene Y, C, og T er gitt ved:

$$\begin{aligned} Y &= C + G \\ C &= z^C + c_1(Y - T) \\ T &= z^T + tY \end{aligned} \tag{4}$$

hvor G, z^C, z^T, c_1 og t er konstanter.

a *Finn løsningen for Y, C og T.*

b *Hva blir effekten på Y hvis skiftfaktoren z^C endres med $\Delta z^C > 0$?*

c *Anta at myndighetene kan bestemme verdien på z^T. Finn hvilken endring i z^T som må til for å gjøre at den samlede virkningen på Y av endringene i z^C og z^T blir null, det vil si $\Delta Y = 0$."*

a. Vi merker oss umiddelbart at G, z^C, z^T, c_1 og t er konstanter eller eksogene variable og behandles som kjente tall. Merk også at de har brukt en indeks i eksponenten, z^C og z^T. Dette betyr *ikke* at det er en variabel z som er opphøyd i C eller T! Vi vil bruke denne notasjonen i løsningsforslaget, men anbefaler dere å indeksere variablene som z_C og z_T for å unngå forvirring. Vi har tre endogene variable, Y, C, og T. Det er ikke mulig å manipulere noen av ligningene i (4) slik at de blir identiske. Modellen har derfor tre uavhengige ligninger og endogene variable, så det eksisterer en løsning.[2] Vi ser også at modellen ikke er løst fordi det er endogene variable på begge sider av likhetstegnet.

[2] Strengt tatt er dette en nødvendig, men utilstrekkelig betingelse. Det er ingen restriksjoner på de eksogene variablene. Hvis de tar tallverdier slik at vi må dele på null så har vi ikke en løsning selv om telleregelen har gitt grønt lys! Dette vil vi komme tilbake til senere.

Vi løser modellen med den såkalte innsettingsmetoden. Vi begynner nederst og setter inn ligningen for T, markert i rødt, i C, og forenkler.

$$C = z^C + c_1(Y - [z^T + tY]) = z^C + c_1(Y(1-t) - z^T) \tag{5}$$

Så setter nå det siste uttrrykket i (5), markert med rødt, inn i uttrykket for Y fra (4)

$$Y = z^C + c_1(Y(1-t) - z^T) + G$$

og noterer oss at variabelen Y nå er på begge sider av likhetstegnet. Vi flytter over Y,

$$Y - c_1 Y(1-t) = z^C - c_1 z^T + G$$

setter Y som felles faktor utenfor parentesen,

$$Y(1 - c_1(1-t)) = z^C - c_1 z^T + G$$

og deler på begge sider med $(1 - c_1(1-t))$ for å isolere Y:

$$\frac{Y(1 - c_1(1-t))}{1 - c_1(1-t)} = Y = \frac{z^C - c_1 z^T + G}{1 - c_1(1-t)} \tag{6}$$

Nå har vi løst Y som en funksjon (se side 497 i pensum) av eksogene variable.

I neste steg setter vi funksjonen for Y (6), markert med rødt, inn i konsumligningen (5) og etter en rekke algebraiske manipulasjoner komme frem til:

$$C = z^C + c_1\left(\frac{z^C - c_1 z^T + G}{1 - c_1(1-t)}(1-t) - z^T\right)$$

$$C = z^C + c_1\left(\frac{z^C - c_1 z^T + G}{1 - c_1(1-t)}(1-t) - \frac{z^T(1 - c_1(1-t))}{1 - c_1(1-t)}\right)$$

$$C = z^C + c_1\left(\frac{(z^C + G)(1-t) - z^T + z^T c_1(1-t) - z^T c_1(1-t)}{1 - c_1(1-t)}\right)$$

$$C = \frac{z^C(1 - c_1(1-t))}{1 - c_1(1-t)} + c_1\left(\frac{(z^C + G)(1-t) - z^T}{1 - c_1(1-t)}\right)$$

$$C = \frac{z^C - z^C c_1(1-t) + z^C c_1(1-t) + c_1(1-t)G - c_1 z^T}{1 - c_1(1-t)}$$

$$\implies C = \frac{z^C + c_1[G(1-t) - z^T]}{1 - c_1(1-t)} \tag{7}$$

Tips. *Algebra krever presisjon og erfaring. Hvis du sliter er det tungt og du vil kun orke å arbeide konsentrert i noen timer. Du må begynne å øve tidlig i semesteret og være forberedt på mange titalls arbeidstimer. Underveis vil du finne din egen arbeidsmetode som fungerer for deg. Til slutt er det alltid lurt å dele opp problemet i mange små steg.*

Til slutt setter vi (6) inn i uttrykket for T. Da får vi:

$$T = z^T + t\left(\frac{z^C - c_1 z^T + G}{1 - c_1(1-t)}\right)$$

$$T = \frac{(1 - c_1(1-t))z^T + t(z^C - c_1 z^T + G)}{1 - c_1(1-t)}$$

$$T = \frac{(1 - c_1 + c_1 t - c_1 t)z^T + t(z^C + G)}{1 - c_1(1-t)}$$

$$\implies T = \frac{(1 - c_1)z^T + t(z^C + G)}{1 - c_1(1-t)}$$

Nå har vi løst modellen, og i et siste steg så samler ligningene. Betrakt løsningene

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{1 - c_1(1-t)} \times \left(z^C - c_1 z^T + G\right) \\ C &= \frac{1}{1 - c_1(1-t)} \times \left(z^C + c_1[G(1-t) - z^T]\right) \\ T &= \frac{1}{1 - c_1(1-t)} \times \left((1 - c_1)z^T + t(z^C + G)\right) \end{aligned} \tag{8}$$

og merk den felles faktoren

$$\frac{1}{1 - c_1(1-t)}$$

som gjerne kalles for en multiplikator. Vi kan se at størrelsen på multiplikatoren, bestemt av c_1 og t, styrer effekten av endringer i z^C, z^T og G på de endogene variablene Y, C og T.

Spørsmål: Finnes det en løsning hvis $c_1(1-t) = 1$?

b. Den eksogene variabelen (kalt skiftfaktoren i oppgaveteksten) har endret seg med $z^{C*} - z^C = \Delta z^C > 0$, hvor z^{C*} og z^C er den nye og gamle verdien til skiftfaktoren. Vi skriver nå $Y(z^C)$ for å understreke at produksjonen Y er en funksjon av z^C. Endringen i produksjon blir da $Y(z^{C*}) - Y(z^C)$. Tallverdien kan regnes ut ved å sette inn (6) på følgende måte:

$$\begin{aligned} Y(z^{C*}) - Y(z^C) = \Delta Y &= \frac{z^{C*} - c_1 z^T + G}{1 - c_1(1-t)} - \frac{z^C - c_1 z^T + G}{1 - c_1(1-t)} \\ \implies \Delta Y &= \frac{z^{C*} - z^C}{1 - c_1(1-t)} = \frac{\Delta z^C}{1 - c_1(1-t)} \end{aligned} \tag{9}$$

c. Vi skal finne en verdi z^{T*} slik at Y ikke endres. Vi skriver da $Y(z^C, z^T)$ for å understreke at produksjonen Y er en funksjon av både z^C og z^T. Gitt endringen Δz^C og z^T ser vi altså etter en ny verdi Δz^{T*} slik at

$$Y(z^{C*}, z^{T*}) - Y(z^C, z^T) = \frac{\Delta z^C - c_1 \Delta z^T}{(1 - c_1(1-t))} = 0$$

og merker oss at denne ligningen kun holder når telleren, uttrykket over brøkstreken, er lik null. Vi kan derfor isolere telleren og løse:

$$\Delta z^{C*} - c_1 \Delta z^T = 0 \implies \Delta z^T = \frac{\Delta z^{C*}}{c_1}$$