LISTA 3

Exercício 1 Considere as relações de recorrência a seguir:

$$H(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \leq 0 \\ 1 & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ H(n-1) + H(n-2) - H(n-4) & \text{se } n > 2. \end{cases}$$

(a) Calcule $H(n)$ para $n = 1, 2, \ldots, 10$.

(b) Usando o padrão da parte (a), adivinhe quanto vale $H(100)$.

Solução

(a)

$H(1) = 1$

$H(2) = 1$

$H(3) = H(2) + H(1) - H(-1) = 1 + 1 - 0 = 2$

$H(4) = H(3) + H(2) - H(0)$
$= 2 + 1 - 0 = 3$

$H(5) = H(4) + H(3) - H(1)$
$= 3 + 2 - 1 = 4$

$H(6) = H(5) + H(4) - H(2)$
$= 4 + 3 - 1 = 6$

$H(7) = H(6) + H(5) - H(3)$
$= 6 + 4 - 2 = 8$

$H(8) = H(7) + H(6) - H(4)$
$= 8 + 6 - 3 = 11$

$$H(9) = H(8) + H(7) - H(5)$$

$$= 11 + 8 - 4 = 15$$

$$H(10) = H(9) + H(8) - H(6)$$

$$= 15 + 11 - 6 = 20$$

Exercício 2 Todo ano, Alice ganha um aumento de R$1.000 mais 10% do seu salário do ano anterior. Seu salário inicial é R$10.000 por ano. Dê uma relação de recorrência para $S(n)$, o salário de Alice após n anos, para $n \geq 0$.

Solução

salário inicial: R$ 10.000

$$S(0) = 10.000$$

salário do ano n

$$S(n) = S(n-1) + 1.000 + 10\% \cdot S(n-1)$$
$$= 1.000 + 110\% \, S(n-1)$$

$$S(n) = \begin{cases} 10.000 & ; n = 0 \\ 1.000 + 110\% \cdot S(n-1) & n > 0 \end{cases}$$

Exercício 3 O somatório

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots (n-1) + n.$$

Dê uma relação de recorrência para $\sum_{i=1}^{n} i$.

Solução

Definamos S

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} i$$

* Para $n = 1$

$$S(1) = \sum_{i=1}^{1} i = 1$$

* $S(1) = 1$

$S(2) = 1 + 2 = S(1) + 2$

$S(3) = 1 + 2 + 3 = S(2) + 3$

$S(4) = 1 + 2 + 3 + 4 = S(3) + 4$

$\vdots$

$S(n) = S(n-1) + n$

$$S(n) = \begin{cases} 1 & ; \ n = 1 \\ S(n-1) + n & ; \ n > 1 \end{cases}$$

Exercício 4 Seja $S(n) = 1^3 + 2^3 + ... + n^3$ a soma dos n primeiros cúbicos perfeitos. Encontre uma relação de recorrência para $S(n)$.

Solução

Para $n = 1$

$S(1) = 1^3 = 1$

Para $n > 1$

$S(2) = 1^3 + 2^3 = S(1) + 2^3$

$S(3) = 1^3 + 2^3 + 3^3 = S(2) + 3^3$

$S(4) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = S(3) + 4^3$

$\vdots$

$S(n) = S(n-1) + n^3$

então a relação de recorrência é

$$S(n) = \begin{cases} 1 & ; \ n = 1 \\ S(n-1) + n^3 & ; \ n > 1. \end{cases}$$

Exercício 5 Encontre relações de recorrência que produzam as sequências a seguir:

(a) $4, 8, 12, 16, 20, 24, \ldots$

(b) $1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots$

(c) $1, 5, 12, 22, 35, 51, \ldots$

Solução

(a) $4, 8, 12, 16, 24, \ldots$

Denotemos

$S(1) = 4$, $S(2) = 8$; $S(3) = 12$, $S(4) = 16$; $S(5) = 24$

Para $n = 1$

$S(1) = 4$

Para $n > 1$

$$\underbrace{4 \quad 8}_{4} \quad \underbrace{\;}_{4} \; 12 \quad \underbrace{\;}_{4} \; 16 \quad \underbrace{\;}_{4} \; 20 \ldots$$

$S(2) = 4 + 4 \times 1 = 4 + 4(2-1)$

$S(3) = 4 + 4 \times 2 = 4 + 4(3-1)$

$S(4) = 4 + 4 \times 3 = 4 + 4(4-1)$

$\vdots$

$S(n) = 4 + 4(n-1)$

$$S(n) = \begin{cases} 4 & ; n = 1 \\ 4 + 4(n-1) & ; n > 1 \end{cases}$$

(b) 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...

3 5 7 9 11

2 2 2 2

$$S(n) = S(n-1) + 3 + 2(n-2)$$

$$S(n) = \begin{cases} 1 \; ; & n \geq 1 \\ S(n-1) + 3 + 2(n-1) \; ; & n > 1 \end{cases}$$

(c) 1, 5, 12, 22, 35, 51

4 7 10 13 16

3 3 3 3

$$S(n) = S(n-1) + 4 + 3(n-2)$$

$$S(n) = \begin{cases} 1 \; ; & n = 1 \\ S(n-1) + 4 + 3(n-2) \; ; & n > 1 \end{cases}$$

Exercício 6 Considere a relação de recorrência a seguir:

$$B(n) = \begin{cases} 3 & \text{se } n = 1 \\ 3 \cdot B(n-1) & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Use indução para provar que $B(n) = 3^n$.

Demonstração

Denotemos $f(n) = 3^n$

objetivo demonstrar $f(n) = B(n)$; $\forall n \in \mathbb{N}$

* Para $n = 1$.

$$f(1) = 3^1 = 3 = B(1)$$

* Suponha valido para $n = k - 1$

$$f(k-1) = B(k-1) \quad \text{-----} \quad (*)$$

* Para $n = k$

$$f(k) = 3^k = 3 \times 3^{k-1}$$

$$= 3 \times f(k-1)$$

da hipótese $(*)$

$$f(k) = 3 \times B(k-1)$$

$$f(k) = B(k)$$

Portanto para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$f(n) = B(n).$$

Exercício 7 Considere a relação de recorrência a seguir:

$$P(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ 4 \cdot P(n-1) + 1 & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Demonstre por indução que $P(n) = \frac{4^n - 1}{3}$ para todo $n \geq 0$.

Solução

Denotemos: $f(n) = \dfrac{4^n - 1}{3}$

Provemos $f(n) = P(n)$

* Para $n = 0$

$$f(0) = \frac{4^0 - 1}{3} = \frac{1-1}{3} = 0 = P(0)$$

* Suponha que é válido para $n = k$

$$f(k) = P(k)$$

* Para $n = k+1$

Provar $f(k+1) = P(k+1)$.

$$f(k+1) = \frac{4^{k+1} - 1}{3}$$

$$= \frac{4 \, 4^k - 1}{3}$$

$$f(k+1) = \frac{4\left(\frac{4^k - 1}{3} + \frac{1}{3}\right)3 - 1}{3}$$

$$= \frac{4\,(f(k) + 1/3)\,3 - 1}{3}$$

Da hipótese

$$f(n+1) = \frac{4\left(p(n) + 1/3\right)3 - 1}{3}$$

$$= \frac{4(3p(k) + 1) - 1}{3}$$

$$= \frac{4 \times 3p(k) + 4 - 1}{3}$$

$$= \frac{4 \times 3p(n) + 3}{3}$$

$$= 4p(k) + 1 = p(n+1)$$