

Fortgeschrittenen Praktikum Teil 2: PI

Versuch 4: Magnetische Resonanz

Betreuer: Paul Eibisch

Gruppe 1: Reinhold Kaiser, Florian Stoll

09.07.2018

Inhaltsverzeichnis

1	Target	3
2	Theorie	3
3	construction of experiment and used devices	6
4	Durchführung und Auswertung	6
5	Zusammenfassung/Fazit	8

1 Target

2 Theorie

Die grundlegende Eigenschaft für den vorliegenden Versuch ist der Spin. Als rein quantenmechanische Eigenschaft besitzt der Spin kein klassisches Analogon und kann zwar mit dem Eigendrehimpuls eines Körpers verglichen aber nicht gleichgesetzt werden. Wichtige Unterschiede liegen vor allem in der Quantelung des Spins und in der fehlenden räumlichen Ausdehnung der quantenmechanischen Teilchen wie z.B. dem Elektron. Der Spin eines Teilchens lässt sich über zwei Kenngrößen beschreiben, wobei man üblicherweise die z-Komponente und den Betrag des Spin-Vektors auswählt. Im Fall eines Spins I lauten diese:

$$|I| = \sqrt{I(I+1)} \hbar^2 \quad (1)$$

$$I_z = m_I \hbar \quad (2)$$

$$m_I \in [-I, I] \quad (3)$$

Über die magnetische Quantenzahl m_I ergeben sich dann $2I + 1$ verschiedene Einstellungsmöglichkeiten, die jedoch in Abwesenheit externer Felder alle energetisch entartet sind.

Wie jeder Drehimpuls geladener Teilchen ist natürlich auch der Spin mit einem magnetischen Moment verbunden, über das er z.B. mit einem externen Magnetfeld wechselwirken kann. Den teilchenabhängigen Proportionalitätsfaktor zwischen Spin und magnetischem Moment bezeichnet man als gyromagnetisches Verhältnis γ . Dieses ist schon in klassischer Rechnung bekannt und ergibt sich im Fall eines Elektrons mit Ladung $-e$, Masse m_e und klassischem Bahndrehimpuls L zu:

$$\vec{\mu}_L = \gamma \cdot \vec{L} = \frac{q}{2m} \cdot \vec{L} = \frac{-e}{2m_e} \cdot \vec{L} = -\mu_B \cdot \frac{\vec{L}}{\hbar} \quad (4)$$

Dabei bezeichnet $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$ das sogenannte Bohrsche Magneton, eine Naturkonstante.

Das gyromagnetische Verhältnis im Fall des Spins lässt sich prinzipiell nach obigem Beispiel berechnen. Aus Messungen und auch aus relativistischen Quantenmechanik-Rechnungen lässt sich jedoch feststellen, dass obige Gleichung im Fall des Spins noch um den Landé-Faktor g ergänzt werden muss. Dieser ist ebenfalls teilchenabhängig und gibt eine unterschiedlich starkes magnetisches Moment im Bezug auf den Spin an. Im Fall eines Elektrons und eines Atomkerns lautet die Beziehung zwischen den Spins S (Elektronspin) bzw. I (Kernspin) und dem jeweiligen magnetischen Moment wie folgt:

$$\vec{\mu}_S = -\frac{\mu_B}{\hbar} \cdot \vec{S} \cdot g \quad (5)$$

$$\vec{\mu}_I = \frac{e\hbar}{2m_p} \cdot \frac{\vec{S}}{\hbar} \cdot g \quad (6)$$

Die Größe $\frac{e\hbar}{2m_p}$ bezeichnet man analog zum Bohrschen Magneton als Kernmagneton μ_N . Um auch bei verschiedenen Teilchen weiter mit diesen beiden Naturkonstanten rechnen zu können, definiert man alle Abweichungen von dieser Größe in den jeweiligen g-Faktor des untersuchten Teilchens. Im Fall des Protons beträgt dieser ungefähr: $g \approx 5,586$.

Durch Vergleich der Formeln lässt sich nun das gyromagnetische Verhältnis in Beziehung zum Landé-Faktor g setzen:

$$\gamma = \frac{\mu_N g}{\hbar} \quad (7)$$

Legt man nun ein konstantes externes Magnetfeld in z-Richtung an, koppelt das magnetische Moment eines Kerns an das Magnetfeld und die Entartung der Zustände mit verschiedener Quantenzahl m_I wird aufgehoben. Diesen Effekt bezeichnet man als Zeeman-Effekt, dessen Energien E_Z sich wie folgt berechnet:

$$E_Z = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu_N \cdot g \cdot B_0 \cdot m_I \quad (8)$$

$$\vec{B} = B_0 \cdot \vec{e}_z \quad (9)$$

Wie zu erkennen nimmt die Energiedifferenz zwischen den Zuständen linear mit dem angelegten Magnetfeld zu, sodass sich im Fall eines Kernspins $I = \frac{1}{2}$ der in Abbildung 1 dargestellte Verlauf ergibt:

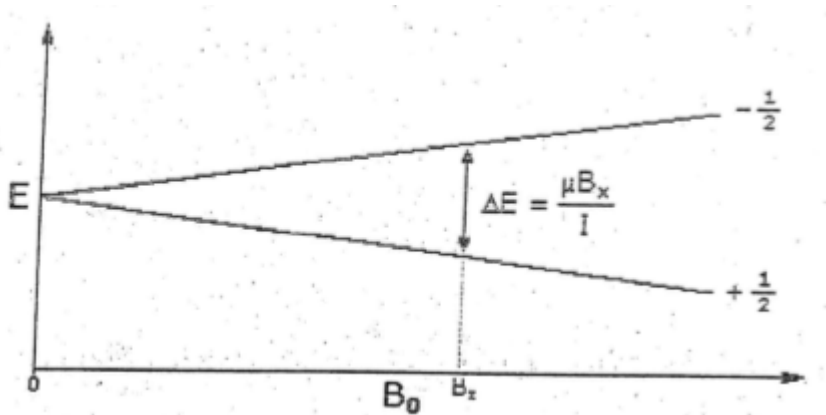


Abbildung 1: Proportionalität der Energiedifferenz zwischen zwei Zeemann-Zuständen

Die Energiedifferenz zwischen den beiden Zuständen ergibt sich weiterhin zu:

$$\Delta E = |E_{m=\frac{1}{2}} - E_{m=-\frac{1}{2}}| = \mu_N \cdot g \cdot B_0 = \hbar \cdot \gamma \cdot B_0 = \hbar \omega_L \quad (10)$$

ω_L bezeichnet dabei die der Energiedifferenz entsprechenden Frequenz, mit der sich Übergänge zwischen den beiden Zuständen anregen lassen. Mit dem Zahlenwert für das Kernmagneton $\mu_N = 5,05 \cdot 10^{-27} \frac{J}{T}$ wird ersichtlich, dass die so entstehenden Energiedifferenzen sehr klein (ungefähr im μeV -Bereich) liegen.

Liegen die Vektoren \vec{I} und \vec{B} nun nicht parallel zueinander, stellt sich ein Effekt ein, den man ebenfalls schon klassisch betrachten kann. Der Drehimpuls-Vektor präzessiert dabei wie in Abbildung 2 dargestellt um den Magnetfeld-Vektor mit der sog. Larmor-Frequenz ω . Diese bestimmt sich über vektorielle Rechnungen zu:

$$\omega_L = B_0 \cdot \gamma \quad (11)$$

Die Bezeichnung ω_L ist in obiger Formel für die Energiedifferenz ist dabei nicht zufällig gewählt, da dies ebenfalls genau die Larmor-Frequenz ist.

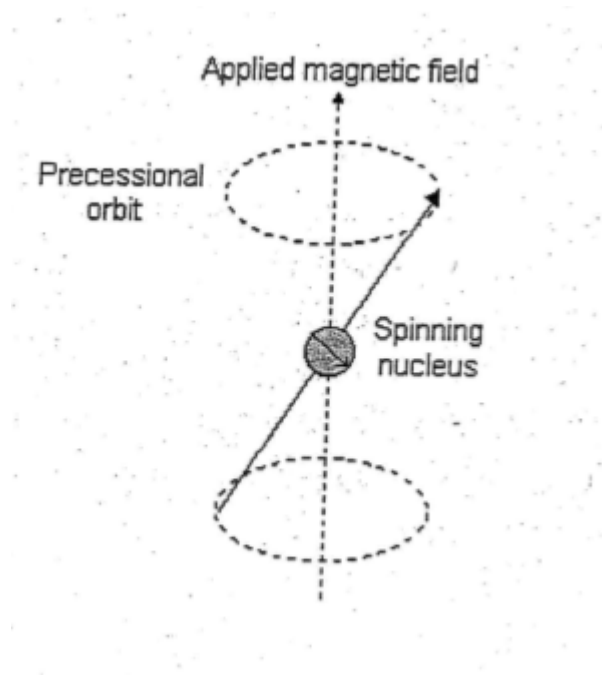


Abbildung 2: Larmor-Präzession eines Drehimpulsvektors um ein angelegtes Magnetfeld

Für das zu untersuchende Phänomen der Kernspinresonanz müssen wir noch die Besetzungen der beiden Zuständen im Fall $I = \frac{1}{2}$ betrachten. Diese lassen sich durch die Boltzmann-Verteilung beschreiben:

$$\frac{N_{m_{I+1}}}{N_{m_I}} \sim e^{-\frac{\Delta E}{k_B T}} \quad (12)$$

Wenn wir nun unsere größenordnungsmäßig kleine Energieaufspaltung zwischen den beiden Zuständen berücksichtigen nähert sich die Boltzmann-Verteilung nahezu zu 1. Wäre dies exakt der Fall, würden wir keinerlei Resonanz-Effekte messen, da sich die beiden Effekte der Photon-Absorption und der stimulierten Emission gerade aufheben würden. Dies ist aber nicht exakt der Fall, denn natürlicherweise liegen mehr Kernteilchen im energetisch niedrigeren Zustand vor. Durch Anregung mit der Resonanzfrequenz

ω_L lassen sich diese Kernteilchen auf den energetisch höheren $m_I = -\frac{1}{2}$ -Zustand anheben und wir können eine Absorption der Strahlung im entsprechenden Frequenzbereich beobachten. Bestrahlt man eine Probe längere Zeit mit der entsprechenden Frequenz, so stellt sich nach und nach das oben erwähnte Gleichgewicht ein und anschließend wird keine Absorption mehr beobachtet. Mit der Zeit stellt sich nach Abstellen der Strahlung wieder der Grundzustand ein, da die Kernteilchen über Spin-Spin- oder Spin-Gitter-Wechselwirkungen wieder Energie abgeben können. Charakteristisch für diese Effekte sind die sogenannten Relaxationszeiten, welche zwischen $10^{-4}s$ und mehreren 10^4s liegen können.

3 construction of experiment and used devices

4 Durchführung und Auswertung

In unserem Versuch untersuchen wir drei verschiedene Proben auf ihre spezifische Resonanzenergie, die für den Übergang zwischen den beiden Zeeman-Zuständen charakteristisch ist. Zunächst untersuchen wir Glycerin, dessen g-Faktor mit $g = 5,586$ bekannt ist. Damit können wir gemäß der Theorie das eingestrahlte Magnetfeld berechnen und für die anderen Messungen verwenden. Anschließend untersuchen wir jeweils eine Probe mit in Wasser aufgelöstem $CuSO_4$ und Teflon und bestimmen aus den ermittelten Resonanzenergien die g- und γ -Faktoren.

Um keine Sättigung der Zustände zu erhalten, überlagern wir das konstante Magnetfeld des Hufeisenmagnets mit einem geringen Wechselfeld mithilfe von einem Spulenpaar, welches von Wechselstrom durchflossen wird. Das Wechselstromsignal zeigen wir gemeinsam mit dem Signal der Detektorspule auf dem Oszilloskop an, wie in Abbildung 3 zu sehen.

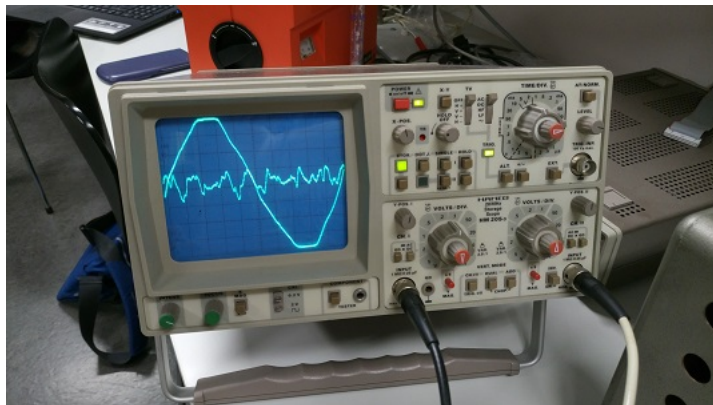


Abbildung 3: Oszilloskop mit Wechselstromsignal und Detektorsignal

Um unsere Messungen vergleichen zu können, ist es wichtig diese bei gleichem Magnetfeld durchzuführen. Um die entsprechenden Resonanzfrequenzen bestimmen zu können, verändern wir die Frequenz des eingestrahlten Feldes kontinuierlich, bis sich die beiden

am Oszilloskop erkennbaren Maxima genau aufheben. Dies geschieht genau am Maximum bzw. Minimum des magnetischen Wechselfeldes, sodass wir so den minimalen bzw. maximalen Wert des angelegten Magnetfelds bestimmen und annehmen können. Leider zeigen die verwendete Elektronik und Leitungen ein sehr hohes Rauschen, sodass die tatsächlichen Maxima im Detektorsignal nur sehr schwer vom Hintergrundrauschen zu unterscheiden waren. Aus diesem Grund nehmen wir für jede Messung 10 Messwerte am Magnetfeld-Maximum und -Minimum auf, um eventuelle Ungenauigkeiten herausmitteln zu können.

Die aufgenommenen Messwerte zusammen mit den berechneten Mittelwerten für die Resonanzfrequenzen finden sich in Tabelle 1.

Tabelle 1: Resonanzfrequenzen der untersuchten Verbindungen

	Glycerin		$CuSO_4$		Teflon	
	f_{max} in kHz	f_{min} in kHz	f_{max} in kHz	f_{min} in kHz	f_{max} in kHz	f_{min} in kHz
1	32415	31644	32409	31645	30486	29772
2	32413	31648	32416	31642	30480	29781
3	32408	31645	32410	31643	30480	29784
4	32410	31649	32410	31645	30477	29788
5	32416	31647	32409	31644	30469	29789
6	32411	31648	32406	31646	30472	29780
7	32411	31648	32408	31647	30479	29794
8	32412	31645	32406	31647	30475	29782
9	32410	31649	32408	31649	30477	29786
10	32413	31647	32408	31647	30478	29789
$\bar{}$	32411,9	31647	32409	31645,5	30477,3	29784,5
σ	2,3	1,7	2,7	2,0	4,4	5,8

Aus den aufgenommenen Werten für Glycerin können wir nun das angelegte Magnetfeld im Maximum und im Minimum berechnen. Dies ergibt sich zu:

$$B = \frac{f \cdot 2\pi}{\gamma} \quad (13)$$

$$B_{max} = \frac{32411,9 \cdot 10^3 \cdot 2\pi}{26,75 \cdot 10^7} \pm \frac{2,3 \cdot 10^3 \cdot 2\pi}{26,75 \cdot 10^7} \approx 0,76131 \pm 0,00005T \quad (14)$$

$$B_{min} = \frac{31647 \cdot 10^3 \cdot 2\pi}{26,75 \cdot 10^7} \pm \frac{1,7 \cdot 10^3 \cdot 2\pi}{26,75 \cdot 10^7} \approx 0,74334 \pm 0,00004T \quad (15)$$

Mit diesen Werten und den gemessenen Resonanzfrequenzen können wir nun γ und die g-Faktoren für $CuSO_4$ und Teflon bestimmen.

Tabelle 2: Experimentell bestimmte Faktoren

	$CuSO_4$			Teflon		
	f_{max}	f_{min}	\varnothing	f_{max}	f_{min}	\varnothing
Landé-Faktor g	5,5855	5,5857	5,5856	5,2526	5,2572	5,2549
$\gamma \cdot 10^{-7}$ in rad. $T^{-1}s^{-1}$	26,747	26,749	26,748	25,153	25,176	25,165

5 Zusammenfassung/Fazit