

# Fortgeschrittenen Praktikum Teil 2: PI

**Versuch 1: Hall-Effekt**  
**Betreuer: Peter Gruszka**

Gruppe 1: Reinhold Kaiser, Florian Stoll

04.06.2018

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Zielsetzung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>3</b>
2.1	Bandstrukturen . . . . .	3
2.2	Dotierung von Halbleitern . . . . .	4
2.3	Ladungstransport in Halbleitern . . . . .	6
2.4	Hall-Effekt . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Versuchsaufbau und Messgeräte</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Durchführung und Auswertung</b>	<b>8</b>
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung/Fazit</b>	<b>10</b>

# 1 Zielsetzung

Ziel dieses Versuchs ist es, einige Eigenschaften einer Germaniumprobe temperaturabhängig zu bestimmen. Als Methode wird dafür der Hall-Effekt verwendet, sodass der Hall-Koeffizient, die Dotierungsart, die Ladungsträgerkonzentration und die Hall-Beweglichkeit direkt oder indirekt erhalten werden kann. Aus dem Temperaturverlauf der Ladungsträgerkonzentration kann dann auch die Energielücke von Germanium bestimmt werden. Zusätzlich soll noch der spezifische Widerstand dieser Germaniumprobe bestimmt werden.

## 2 Theoretische Grundlagen

### 2.1 Bandstrukturen

Bandstrukturen in Kristallen sind dadurch zu erklären, dass sich die Atomorbitale der einzelnen Atome überlagern. Aus den diskreten Energieniveaus der einzelnen Atome werden so Energiebänder. Dieses Modell nennt man auch "tight binding". Ein anderes Modell genannt "plane wave expansion" nimmt an, dass die Elektronen im Kristall quasi frei sind und so durch ausgedehnte Wellen beschrieben werden können. Die Dispersionsrelation wird aber durch die Gitterstruktur verändert und so entstehen Energiebänder, die so Bandlücken in die eigentlich verbundene Energieverteilung bringen.

Anhand der Besetzung dieser Energiebänder lassen sich Materialien in drei unterschiedliche Kategorien bezüglich der Leitfähigkeit einordnen. Denn ein Material leitet nur, wenn das energetisch höchste Energieband nur teilweise besetzt ist. Im Gegensatz zu diesen Metallen haben die Isolatoren zwischen dem letzten besetzten Energieband (Valenzband) und dem nächsten unbesetzten Energieband (Leitungsband) eine Bandlücke, die von den Elektronen normalerweise nicht überwunden werden kann. Bei den Halbleitern ist diese Bandlücke besonders klein, sodass Elektronen beispielsweise durch thermische Anregung in das Leitungsband gelangen können. Die Größe der Energielücken für Halbleiter ist im Bereich von einigen Zehntel eV.

Intrinsische Halbleiter sind Halbleiter, die keine Fehlstellen oder Fremdatome haben und dennoch durch elektronische Anregungen leitfähig werden können. Um nun die Konzentration der Elektronen im Leitungsband zu berechnen nutzt man die Beziehung

$$\frac{N}{V} = n = 2 \cdot \int_{E_L}^{\infty} D_L(E) \cdot f(E) dE \quad (1)$$

mit der Fermi-Verteilung  $f(E)$  und der Zustandsdichte im Leitungsband  $D_L(E)$ . Analog findet man die Beziehung für die Konzentration der Löcher im Valenzband:

$$\frac{P}{V} = p = 2 \cdot \int_{E_V}^{\infty} D_V(E) \cdot [1 - f(E)] dE \quad (2)$$

Dazu muss gesagt werden, dass Löcher im Valenzband einfach fehlende Elektronen darstellen. Sie entstehen, indem Elektronen angeregt werden und aus dem Valenzband ins

Leitungsband gehen. Das Konzept des Lochs ist wichtig, weil sie auch zum Ladungstransport beitragen, indem die anderen Valenzelektronen in die Löcher nachrücken. Effektiv bewegt sich dann das Loch und transportiert so positive Ladung.

Für die Dispersionsrelation für Elektronen im Leitungsband bzw. Löcher im Valenzband wird

$$E(\vec{k}) = E_L + \frac{\hbar}{2} \cdot \left( \frac{k_x^2}{m_{xx}^*} + \frac{k_y^2}{m_{yy}^*} + \frac{k_z^2}{m_{zz}^*} \right) \quad (3)$$

angenommen und dies führt im Fall isotroper effektiver Massen zu den Zustandsdichten

$$D_L(E) = \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{2m_n^*}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} (E - E_L)^{\frac{1}{2}}, \quad E > E_L \quad (4)$$

$$D_V(E) = \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{2m_p^*}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} (E_V - E)^{\frac{1}{2}}, \quad E_V > E. \quad (5)$$

## 2.2 Dotierung von Halbleitern

Die Ladungsträgerkonzentrationen sind in den meisten Halbleitern zu niedrig, um bei Raumtemperatur eine nennenswerte Leitfähigkeit zu liefern. Die Situation lässt sich ändern, indem man eine sehr kleine Menge elektrisch aktiver Störstellen (Fremdatome) in den Halbleiter einbringt. Diesen Prozess nennt man Dotierung. Die Fremdatome ändern die Leitfähigkeit, indem sie entweder Elektronen in das Leitungsband abgeben oder Elektronen aus dem Valenzband aufnehmen, also Löcher erzeugen. Dementsprechend nennt man sie auch Elektronendonator bzw. Elektronenakzeptor. Es gibt zwei Arten von Dotierungen in einem Halbleiter. n-Dotierung nennt man das Einbringen von Störstellennatomen (Donatoren), die freie Elektronen in das Leitungsband abgeben. Als p-Dotierung bezeichnet man das Einbringen von Störstellenatomen (Akzeptoren), die freie Löcher im Valenzband erzeugen. Bei der n-Dotierung werden dagegen fünfwertige Donatoratome wie P, As oder Sb in das Si-Gitter eingebracht, vergleiche hierzu Abbildung 1.

Eine wichtige Kenngröße für Halbleiter ist die intrinsische Ladungsträgerdichte und die Ladungsträgerverteilung. Diese sind maßgeblich für die sogenannte Eigenleitung, daher die Leitfähigkeit der Halbleiter abhängig der Temperatur. Wie oben beschrieben, können Elektronen erst durch Energieanregung ins Leitungsband „springen“ und somit als Ladungsträger zur Verfügung stehen. Wenn man äußere Anregungen vernachlässigt, hängt die intrinsische Ladungsträgerdichte also sehr stark von der Temperatur ab, da die Elektronen nur durch thermische Anregungen Energie erhalten können. Die intrinsische Ladungsträgerdichte bleibt daher bis zu einer gewissen Temperatur quasi null, da die thermischen Anregungen aufgrund der Temperatur nicht groß genug sind, um die Bandlücke zu überwinden. In Abbildung 2 stellt die gestrichelte Kurve den Verlauf der intrinsischen Ladungsträgerdichte im Leitungsband dar. Im Falle von dotierten Halbleitern (durchgezogene Linie), tragen zunächst die durch die Fremdatome eingebrachten Ladungsträger zur konstanten Ladungsträgerdichte bei, bis die thermischen Anregungen hier auch zum Tragen kommen.

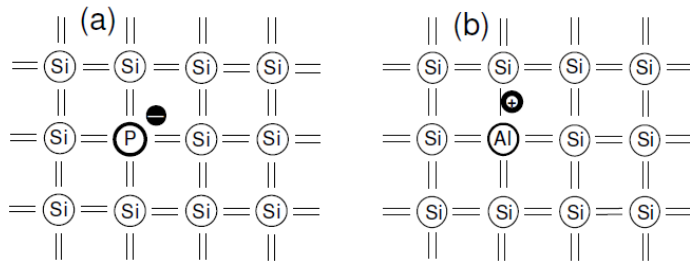


Abbildung 1: n- und p-Dotierung im Si-Kristall [? ]

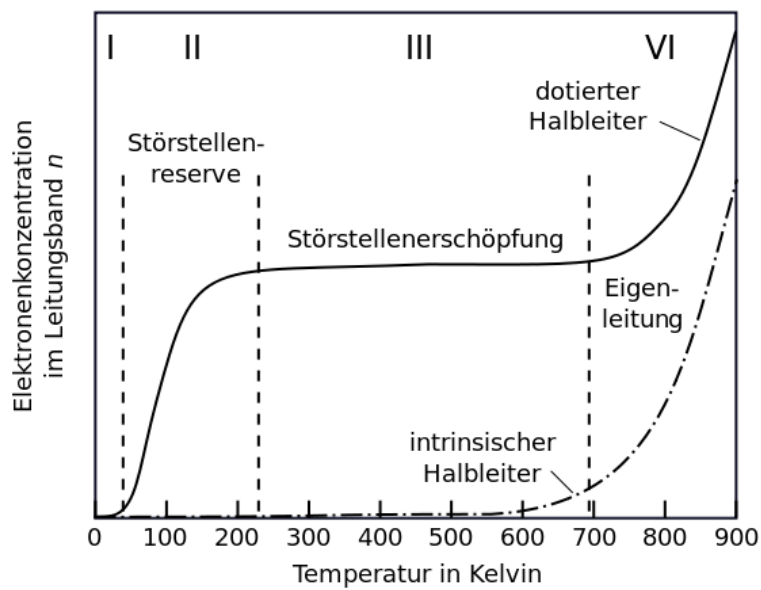


Abbildung 2: Ladungsträgerdichte im Leitungsband abhängig der Temperatur [? ]

## 2.3 Ladungstransport in Halbleitern

Ein bekanntes Modell für den Ladungstransport in Halbleitern ist das Drude-Modell. Dieses betrachtet die Bewegungen von Elektronen durch ein Kristallgitter als Abfolge von Stößen mit den Kristallionen. Dabei werden die Stoßvorgänge durch eine mittlere Stoßzeit, in der sich das Elektron frei im Kristall bewegt, und einer sog. Driftgeschwindigkeit beschrieben. Die Driftgeschwindigkeit bezeichnet dabei die Geschwindigkeit des Elektrons, welche ausschließlich durch ein angelegtes elektrisches Feld erzeugt wird. Thermische Beiträge zur Elektron-Geschwindigkeit werden hier nicht berücksichtigt. Mit der bekannten elektrischen Kraft auf ein Elektron im elektrischen Feld ergibt sich folgende Bewegungsgleichung:

$$\frac{m_e}{\tau} v_D = -eE \quad (6)$$

mit der Driftgeschwindigkeit  $v_D$  und der mittleren Stoßzeit  $\tau$ . Über diesen Zusammenhang zwischen Driftgeschwindigkeit und angelegtem elektrischen Feld kann man die sog. Beweglichkeit  $\mu$  definieren:

$$\mu = \frac{v_D}{E} = \frac{e\tau}{m_e} \quad (7)$$

Im allgemeinen beschreibt das Drude-Modell die Elektronen eines Halbleiters als Elektronengas, in dem alle Elektronen zur Leitung beitragen.

## 2.4 Hall-Effekt

Der Hall Effekt tritt auf, wenn in einem Leiter oder einem Halbleiter senkrecht zu einem Magnetfeld  $\vec{B}$  ein Strom fließt. Die Lorentzkraft

$$m_e \frac{dv}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (8)$$

lenkt dann die Ladungsträger so ab, dass ein elektrisches Feld  $E_H$  entsteht, das zu Magnetfeld  $B$  und Strom  $j_x$  senkrecht steht. Im Folgenden fließe der angelegte Strom in x-Richtung, das Hall-Feld zeige in y-Richtung und das Magnetfeld in z-Richtung. Nun definiert man die Hall-Konstante durch

$$R_H = \frac{E_H}{j_x \cdot B}. \quad (9)$$

$j$  wird durch die Konzentrationen  $n, p$  und die Driftgeschwindigkeiten  $v_e, v_h$  der Löcher und Elektronen ausgedrückt:

$$\vec{j} = -ne\vec{v}_e + pe\vec{v}_h \quad (10)$$

und wiederum die Driftgeschwindigkeiten durch

$$v_x^e = -\mu_e E_x + \mu_e \omega_e \tau_e E_H \quad (11)$$

$$v_x^h = +\mu_h E_x + \mu_h \omega_h \tau_h E_H \quad (12)$$

$$v_y^e = -\mu_e E_H - \mu_e \omega_e \tau_e E_x \quad (13)$$

$$v_y^h = +\mu_h E_H - \mu_h \omega_h \tau_h E_x. \quad (14)$$

Dabei sind die  $\mu$  die Beweglichkeiten der Löcher bzw. Elektronen, die  $\omega = \frac{eB}{m}$  die Zyklotronfrequenzen und die  $\tau$  die Relaxationszeiten der Elektronen bzw. Löcher. Dabei wurden Terme der Ordnung  $\omega^2$  vernachlässigt, was äquivalent zur Vernachlässigung des Magnetoresistiven Effekts ist. Der Magnetoresistive Effekt bezeichnet das Ändern des elektrischen Widerstands eines Materials durch Anlegen eines Magnetfelds.

Setzt man nun den statischen Fall als Voraussetzung, ist also  $j_y = 0$ , dann ergibt sich durch Einsetzen der Driftgeschwindigkeiten und elektrischer Felder die Hall-Konstante zu

$$R_H = \frac{1}{e} \cdot \frac{p - n \left( \frac{\mu_e}{\mu_h} \right)^2}{\left( p + n \frac{\mu_e}{\mu_h} \right)^2} \quad (15)$$

### 3 Versuchsaufbau und Messgeräte

Unser Versuch findet aufgrund der nötigen Kühlung mit flüssigem Stickstoff in einem Kryostaten statt. Gleichzeitig ist eine Heizwicklung direkt am Probenträger angebracht, um auch höhere Temperaturbereiche vermessen zu können. Der gesamte Kryostat wird weiterhin unter Vakuum betrieben, für das eine Diffusionspumpe verwendet wird. Im Falle von konventionellen Hall-Effekt-Vermessungen wird von einer quaderförmigen Probengeometrie ausgegangen, um Widerstände quer und längs der Probe wohl definiert bestimmen zu können. In unserem Versuchsaufbau kommt dagegen die sogenannte Van-der-Pauw-Methode zum Einsatz. Bei dieser wird eine undefiniert geformte Germaniumprobe in konstanter Dicke auf eine Trägerplatte aufgedampft. Hierdurch lässt sich eine nahezu planparallele Form der Probe darstellen. An die Ge-Probe werden vier Anschlüsse A, B, C und D angebracht, wobei zwischen zwei Anschlüssen der Messstrom fließen wird und an den anderen beiden der Spannungsabfall gemessen. Um zwischen den Messanschlüssen umschalten zu können, sind die jeweiligen Anschlussleitungen mit einer Umschaltbox verbunden, sodass jegliche Strom- und Spannungskontaktkombinationen vermessen werden können.

Um nun das für die Vermessung des Hall-Effekts benötigte Magnetfeld anlegen zu können, befindet sich eine Spule am Kryostat. Aufgrund des magnetoresistiven Effekts treten bei der Vermessung des Hall-Effekts unerwünschte Widerstandsänderungen auf, welche unsere Messung verfälschen. Um diese zu minimieren legen wir daher unser Magnetfeld einmal in positiver und einmal in negativer Richtung an, anstatt den Fall mit Magnetfeld zu dem ohne zu vergleichen. Anschaulich gesprochen ändern wir hierfür die Stromrichtung in der Spule. Dafür sind die Spulenanschlüsse mit einem Schalter gekoppelt, über den sich die Stromrichtung umdrehen lässt. Durch den angelegten Strom und die gemessenen Potentialdifferenz lässt sich folgender Widerstand definieren:

$$R_{AB,CD} = \frac{V_D - V_C}{I_{AB}} \quad (16)$$

Aus verschiedenen Kombinationen der Anschlüsse für den angelegten Stroms und die gemessene Spannung lässt sich der spezifische Widerstand der Probe herleiten:

$$\rho = \frac{\pi d}{\log 2} \left( \frac{R_{AB,CD} + R_{BC,DA}}{2} \right) f \left( \frac{R_{AB,CD}}{R_{BC,DA}} \right) \quad (17)$$

Die Funktion  $f$  stellt dabei einen nicht-analytischen Korrekturfaktor dar, welchen wir aus einer in der Anleitung gegebenen Grafik ablesen können.

Der Hall-Koeffizient lässt sich ebenfalls mit der van-der-Pauw-Methode bestimmen und ergibt sich zu:

$$R_H = \frac{1}{en} = \frac{d}{B} \Delta R_{BD,AC} \quad (18)$$

Für die Temperaturmessung haben wir weiterhin ein Thermospannungselement im Kryostaten hängen. Dieses misst die über eine Temperaturdifferenz abfallende Spannung. Da die Zimmertemperatur als Referenztemperatur zu ungenau ist, verwenden wir ein Becherglas mit Eiswasser als Referenz. Die im Becherglas vorliegende Temperatur beträgt aufgrund des Phasenübergangs exakt  $0^\circ\text{C}$ , sodass wir die gemessene Thermospannung in Temperatur umrechnen können. Die entsprechende Eichentabelle findet sich in der Anleitung des Versuchs.

Während die Abkühlung des Versuchsaufbaus mithilfe von flüssigem Stickstoff realisiert wird, verwenden wir für den höheren Temperaturbereich einen Heizdraht, welcher mit maximal  $5\text{V}$  betrieben wird und die Probe langsam aufheizt.

## 4 Durchführung und Auswertung

In unserem Versuch vermessen wir nun unsere Germanium-Probe im Temperaturbereich  $-180$  bis  $40^\circ\text{C}$  also von  $\approx 90$  bis  $\approx 315\text{K}$ . Mit der Van-der-Pauw-Methode messen wir also die entstehenden Spannungen bei einem Probenstrom von  $1\text{mA}$  und berechnen daraus die temperaturabhängigen Verläufe von spezifischem Widerstand, Hall-Konstante und Ladungsträgerdichte. Für die Temperaturen verwenden wir die gemessene Temperaturspannung, wobei wir den Mittelwert aus den Spannungen vor und nach der Aufnahme eines Messwerts verwenden. Die genaue Temperatur ergibt sich aus der gemittelten Spannung über einen Fit 5. Grades, welcher zur Veranschaulichung in Abbildung 3 dargestellt ist.

Aus den Messwerten direkt ersichtlich ist das negative Vorzeichen der Hall-Konstante, woraus die Dotierung als n-Dotierung identifiziert werden kann.

Die Verläufe der Größen  $R_H$ ,  $n$  und  $\rho$  sind in den Abbildungen 4 bis 5 logarithmisch gegenüber  $\frac{1}{T}$  dargestellt. Für die Berechnung des spezifischen Widerstands wurde dabei ein konstanter Wert von  $f = 0.97$  für den Korrekturfaktor verwendet.

Unsere Ladungsträgerdichte  $n$  weist im hohen Temperaturbereich das charakteristische exponentielle Verhalten auf und steigt rasant an. Im mittleren Temperaturbereich erwarten wir einen konstanten Verlauf der Ladungsträgerdichte, wohingegen wir einen leichten Anstieg messen. Dies ist physikalisch unsinnig, da bei niedrigerer Temperatur natürlich



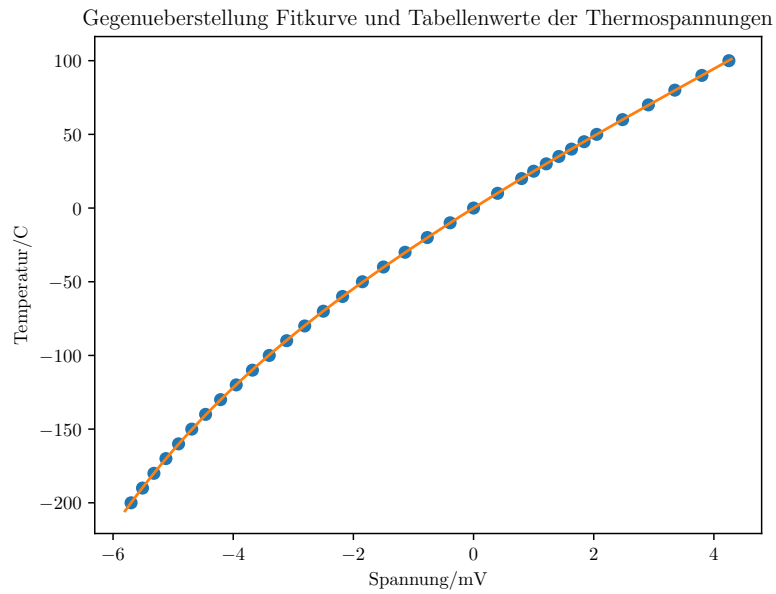


Abbildung 3: Temperaturfit der Temperaturspannung

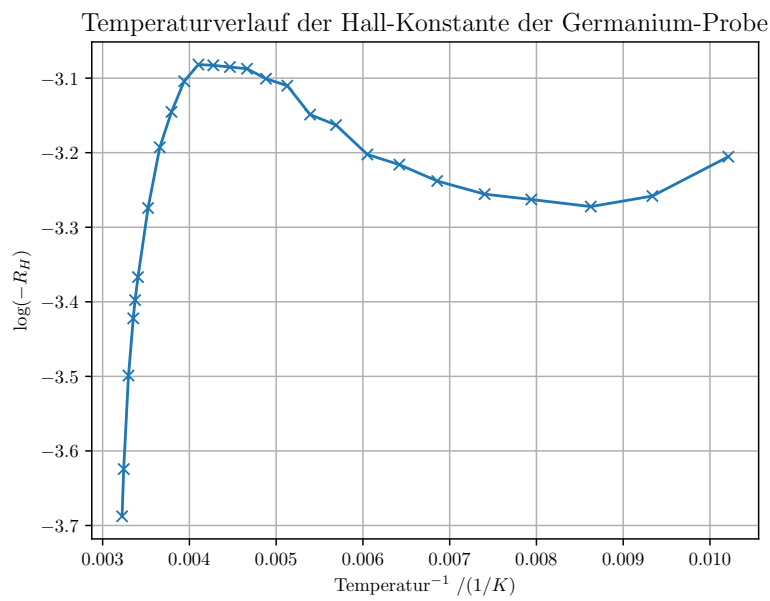


Abbildung 4: Temperaturverlauf der Hall-Konstante

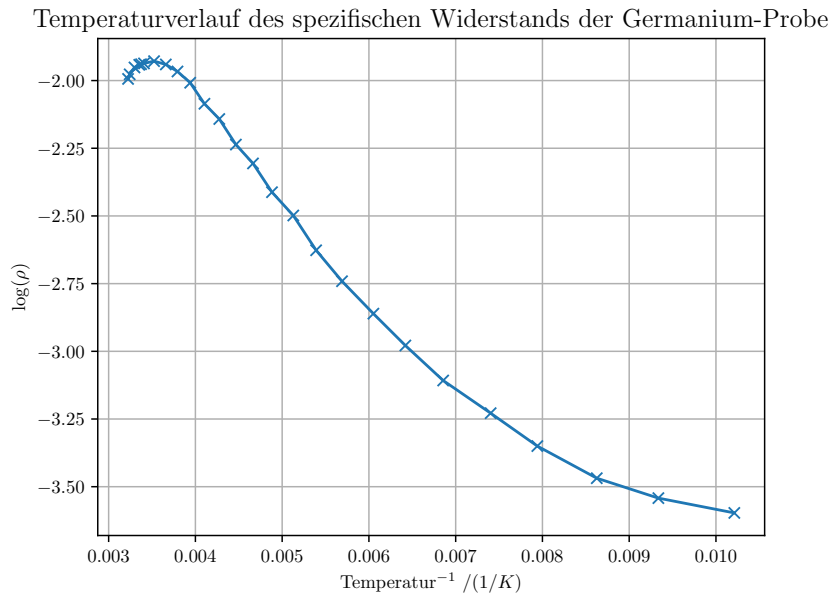


Abbildung 5: Temperaturverlauf des spezifischen Widerstands

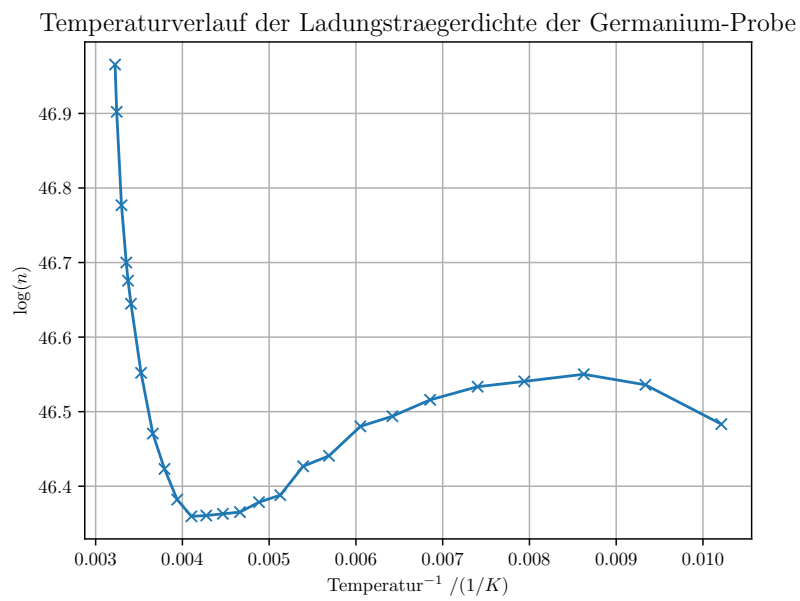


Abbildung 6: Temperaturverlauf der Ladungsträgerdichte

auf keinen Fall mehr Ladungsträger im Leitungsband vorhanden sein sollten, sondern die Ladungsträgerdichte aufgrund der Störstellenerschöpfung konstant sein sollte. Hin zu besonders niedrigen Temperaturen sinkt die gemessene Ladungsträgerdichte wiederum ab, was aufgrund der Anhebung von immer weniger Elektronen ins Leitungsband auch so zu erwarten war. Bei Betrachtung unserer Messwerte muss allerdings auch die sehr hoch aufgelöste Skala beachtet werden, sodass unsere Schwankungen im konstant erwarteten Bereich im Vergleich besonders zu den sehr stark steigenden Messwerten im Hochtemperaturbereich nicht sehr stark ins Gewicht fallen. Da weiterhin die Tief- und Mitteltemperaturmessung mit sehr schnell steigenden Temperaturen durchgeführt wurden, sind die Messwerte mit Vorsicht zu genießen und weisen vermutlich einen hohen Fehler auf.

Aus den Messergebnissen kann man weiterhin noch die Beweglichkeit der Elektronen in Germanium berechnen. Es gilt nämlich für die Leitfähigkeit:

$$\sigma = ne\mu \quad (19)$$

Daraus folgt für die Beweglichkeit:

$$\mu = \frac{1}{ne\rho} \quad (20)$$

Die Beweglichkeit ist ebenfalls temperaturabhängig und in Abbildung t doppelt logarithmisch dargestellt.

## 5 Zusammenfassung/Fazit