S(ST?

内容简介

由A，K狄西特著（英）的本书是一本介绍经济使论中最优化问题的入门教材。书中的内容包括：拉格朗日方法，影子价格，最大值函数，不等式约束，凹性规划，结果及应用，比较静态经济学，二阶条件，时间最优化，动态规划，应用实例等。为了便于学习，本书把有关的数学知识和经济理论融为一体，力求从经济学的角度对所用到的数学进行说明。在每章中，作者先给出本章的主要理论，然后举例进行说明，对于一些较深的概念在习题中进行了进一步的发展。而且，书中所采用的例子大都和实际情况有关。

本书的特点是编排新颖，简明易懂。此书，既可做为广大经济理论工作者和大专院校师生之参考资料，也可做为大专院校的教材，并适用于广大经济理论工作者自修使用。

GD)58/09

前　　言

从一组方案中选择一个最好的分析方法是大多数经济问题所具有的一个共同特点。需求经济模型自然引入一个总的标准函数，在考虑了资源可靠性和技术可能性的情况下，使该标准函数取最大值。市场经济模型发现用最优选择的方法系统地描述各个代理人的特征是很有用的。对于每个消费者，使他的效用在其预算约束下取最大值；对于每个生产者，当其生产能力给定时，使其企业的净值最大。在这两种极端情况之间是混合经济，在这种经济中，政府可制定某些政策作为工具，但对资源的分配不能完全控制。这种经济包含两级最优化：政府给定一组政策，其他的代理人做出他们自己最好的选择；而政府在考虑确定其最优政策时，不仅需考虑总的资源和技术约束，而且还要考虑到这些私人代理人的响应。

既使在目前大多数经济学家已经具备了一定的数学基础的时代，在约束条件下求最优所使用的技术，常常还被认为是非常奥秘的。特别是在包含时间的决策问题，更是如此，在那里某时刻的选择将会影响以后可采用的选择。通常出现这个问题是由于学生们突然接触到这门数学，并且感到很奇妙，以致于从这样突然相遇的经历中不可能完全恢复起来。实际上，完全可能从一种非常简单的方法来开始这种问题的讨论，即从开始就把数学和经济学联系起来，并且以一种容

易处理的步骤逐步搞清楚更加深入的方法。本书就打算这样进行。

很自然，我们强调了理解而不是精确。证明过程仅是为了帮助进一步的理解才给出，并且实例和应用都是从其经济意义和使用角度来选取的。

在每一章中，先给出本章所讲的内容，然后依次为例题、习题和进一步的参考文献。就主要思路而言，例题是全解出来了，虽然为了节省篇幅，省去了一些代数或积分的机械推导步骤。习题是对本书中由例题引出的一些概念的进一步发展。象一般的数学教科书一样，本书中的例题和习题是很重要的，并且对于学习本书，这些内容是一个不可缺少的部分。所列的参考文献包括一些有关的基本数学知识或读者所需的一些经济学知识的文献，也包括一些更深入的著作和论文，在这些文献中有兴趣的读者可对本书中还没有搞清楚的概念（或想法）进行仔细琢磨。大部分的习题和应用实例是从微观经济理论中选取的。然而，这并不意味着这是一本有关过渡微观经济的教科书，最好是把这本书和有关数学书结合起来学习，或者反过来进行。

书中给出的经济内容主要是大学一年级课程中的大部分内容。数学知识开始时仅限于偏导数和矩阵的乘积。二次型在第八章出现，第九章用到积分，但是在每种情况下，仅使用了最基本的性质。第四章和第五章所用的凸性性质象在第十一章有关微分方程所用的一些基本记号一样，在所用到的地方都进行了论述。

文中所用的数学记号是一致的，但在例题和习题中经常使用不同的记号，通常对于所讨论的特殊应用都是这样做

的。只要记住这一点，就不会引起任何混淆。同样，我们没有用黑体字表示矢量，其目的是说明用文中的自然方法，我们根据矢量和矩阵可以从标量推得一般的结果，这在书中已区别得很清楚了。最后，为了减少繁锁的重复，我们经常仅给出最大值的一般理论。只要对最大值的结果进行简单的符号改变，就能用到最小值问题中。当所得的结果不同时或值得分开来说明时，我们把需要做的说明或推导放到习题中。

A. K. 狄西特

一九七五年五月。

目　　录

一、拉格朗日方法

经济学中许多简单的最优化问题的解就是两条曲线的切点。这方面最著名的例子是：一个消费者在其预算线上选择两种商品的量以在其同好（indifference）图中达到最高可能的同好曲线的问题。在选择点，预算线和最高可达到的同好曲线相切。另外一个例子是：一个给定资源的生产者可按放置在一条转换曲线上两种货物量的任意一种组合生产使得转换边际率趋于零。当两种货物的价格给定时，生产者将按使其得到最大收入的组合生产。在第一个例子中，约束曲线是一条直线，而在第二个例子中，等收入线构成了一个平行直线族。一般说来，上述约束线和等目标线族可以是非线性的。已知转换曲线的计划经济问题就是这方面的一个例子，该计划的目的是选择使社会福利标准最大的生产计划。等社会福利线将形成了一个凸的同好图，而生产可能性计划表将是一条凹曲线。对这些曲线的曲率也有限制条件，这些将在后面讨论。

一般的问题导致了图1.1所示的图形。这种图形对于大部分人来说是很熟悉的。为了进行代数处理，我们得用一个方程来定义约束曲线。用x_1和x_2分别代表两种货物的量，并且假定联系这两种货物的方程可写为：

$$G(x_1, x_2) = c \qquad (1.1)$$

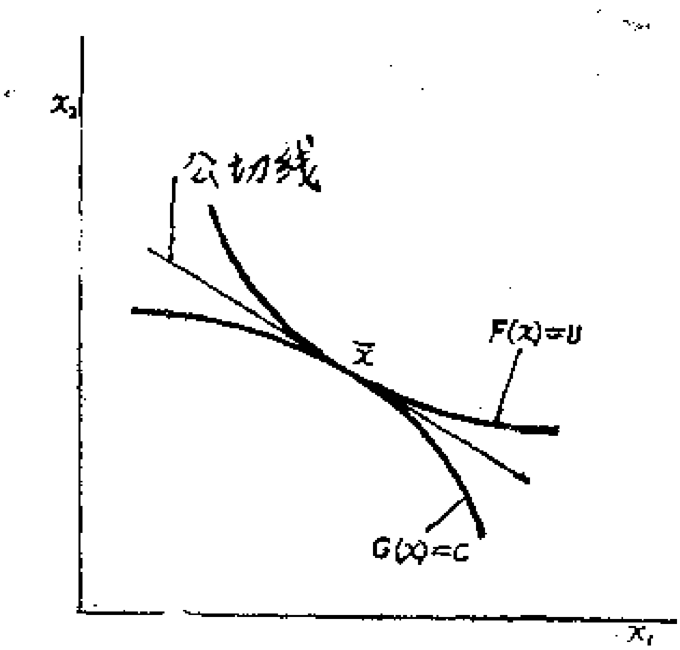

图1.1

式中G是一个函数，c是一个常数。例如，在上述消费者问题中，约束具有形式$p_1x_1+p_2x_2=m$，这里p_1和p_2是两种货物的价格，m是其收入。

令最优选择量为（x_1，x_2），通过该点的等目标函数F的方程为：

$$F(x_1x_2)=v \qquad (1.2)$$

注意到c是问题的已知数，而v的值仅在最优选择确定以后才能知道，即$v=F(x_1,x_2)$。

前面的量可用矢量写成更紧凑的形式

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{x}=\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}$$

开始时我们用矢量仅是为了简化分量的写法。矢量和矩阵的实际运算在后面将逐步用到。

观察图1.1，我们得到一个著名的经济条件：即如果$\bar{x}$是最优选择，那么由方程（1.1）和方程（1.2）确定的两条曲线在该点应该是相切的。换言之，在该点它们应具有相同的斜率。为了从代数上给予表达，我们必须找到用F和G来

表示的斜率表达式。先看约束线G，考虑该线上点$(\bar{x}+dx)$，此点接近于$\bar{x}$，且$dx=(dx_1, dx_2)$是一个无穷小量。这样dx_2/dx_1就是曲线在点$\bar{x}$处的斜率。

这样的无穷小增量具有边际改变的自然经济意义，并且能严格地说明它们的用处。但是，初学者通常在处理无穷小量时容易犯错误，重新温习一下微积分教科书中有关这方面的论述，对于他们将是很有帮助的。微积分中指出：无穷小量是先取很小的有限量然后再取极限。

由于所考虑的两点$(\bar{x}, \bar{x}+dx)$在曲线（1.1）上，所以G的值在这两点上相同。特别是，一阶改变量dG（这个量通过用x的导数值取G的线性增量得到）为零。这样有

$$0=dG=G_1(\bar{x})dx_1+G_2(\bar{x})dx_2$$

式中G_1，G_2分别是当$j=1$和2时偏导数$\frac{\partial G}{\partial x_j}$的值。当然，它们都是x的函数，在上述方程中，它们是在$\bar{x}$点计算的。这样则有

$$dx_2/dx_1=-G_1(\bar{x})/G_2(\bar{x})$$

这是隐函数求导数的标准计算公式。注意到：如果$G_1(\bar{x})$，$G_2(\bar{x})$中的任意一个为零，我们还可以定义这个式子有意义，即可能为零或无穷大。如两者都为零，有可能碰到一些问题。尽管在一些特殊情况下，还是有意义的，但是为了确保一般结果的正确性，我们只考虑这两者中至少有一个在$\bar{x}$点不为零的情况。

同理，我们可得到式（1.2）在$\bar{x}$点斜率为$-F_1(\bar{x})/F_2(\bar{x})$。如果$\bar{x}$是最优选择，那么在该点上述两斜率应相等，即

$$F_1(\bar{x})/F_2(\bar{x})=G_1(\bar{x})/G_2(\bar{x}) \quad (1.3)$$

这样的一个需要在最优点满足的条件称为最优必要条件。一个保证最优的条件，即一个这样的条件，如果它在$\bar{x}$成立，那么$\bar{x}$是最优，称为充分条件。

式（1.3）左边项，即等F值的线的斜率，是沿着一取最大值的同好曲线的边际替换（主观）率。同样，右边是关于约束的边际转换或者技术替换率。这样它们相等的条件应该是熟悉的；在这里两者仅仅是根据其基本函数的偏导数表达的。

当然，点$\bar{x}$必须在约束线上，即

$$G(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = c \qquad (1.4)$$

在式（1.3）和（1.4）中，我们得到了求解未知数$\bar{x}_1$和$\bar{x}_2$的两个方程。这些方程通常是非线性的，这样在确定方程的解是否存在或唯一之前，我们要对方程进行仔细检查。甚至更坏的是：如果我们对同一函数在相同的约束条件下取最小值，那么相同切线的论断将导致了完全相同的必要条件。这样我们的必要条件远非充分。然而这些问题可用不同的方法得到较好的处理。在这里我们将暂不考虑这些问题，将继续假定$\bar{x}$是唯一的最大值参数。

这里应该注意到一个很重要的事实。就是在前面我们说过v的值，只有在最优选择确定之后，才能知道。幸运的是v在式（1.3）和（1.4）中都不出现。这样在开始时v是否已知对于求解是无影响的。我们在不知道v的值的情况下，可求得$\bar{x}$，然后利用$\bar{x}$求得v之值。

为使用方便，把式（1.3）表示成另外一种形式

$$F_1(\bar{x})/G_1(\bar{x}) = F_2(\bar{x})/G_2(\bar{x}) \qquad (1.5)$$

令上式的比值为π，则有

$$F_1(\bar{x})-\pi G_1(\bar{x})=0=F_2(\bar{x})-\pi G_2(\bar{x}) \quad (1.6)$$

这些方程可解释成如下的说法：定义了π之后，再定义一个新函数

$$L(x)=F(x)-\pi G(x) \qquad (1.7)$$

这样方程（1.6）意味着在$\bar{x}$点L的两个偏导数都为零。这是一个众所周知的微积分结果，即如果一个函数在没有约束的条件下取最大值，那么它的所有一阶偏导数在该点的值都为零。这点从其经济学方面来看也是很明显的。例如，一个没有预算限制的消费者将不停地选取货物，直到不增加效用为止，即直到所有货物的边际效用都降为零为止。有鉴于第六章讨论的复杂性，在这里我们看到$\bar{x}$满足在无约束条件下L（x）取最大值的一阶必要条件。这种从有约束的最优化问题降为无约束的最优化问题具有很重要的经济意义，在第四章这一点将会看得清楚。

条件（1.6）给我们提供了另外一种确定$\bar{x}$的方法。在式（1.4）和（1.6）中，我们有三个方程，其中包括三个知数$\bar{x}_1$，$\bar{x}_2$和π。注意到前面对ν的说明，我们可用这些方程求得解。象ν的情况一样，我们不必事先知道π的值，尽管开始时我们是根据最优选择来定义π的。在建立函数L时，我们可把π作为一个待定乘子引入，并把求解其值作为整个求解过程的一部分。

这种方法称为约束最优化的拉格朗日方法。π称为拉氏乘子，函数L称为拉格朗日函数或者拉氏表达式。

这种方法易于推广到几个变量和几个约束的情况。很明显，在图1.1仅选了两个变量的目的是容易进行几何说明。具有多个约束的问题在经济学中是常碰到的。例如，一个消费

者不仅要对其收入进行预算，而且还会对其时间也进行预算，或者他可能遇到在起草一定时间范围内的最优消费计划时的各时间离散预算约束。一个国家计划者也得保证他的生产计划中所用的任何一种资源的量都不能超过实际可提供的量。对于下几章的许多结果，我们将用这个例子来进行说明和解释。

拉氏方法易于推广到这些问题的处理中，并且这种明显的推广也是正确的。假设有n个选择变量形成一个矢量x，并且这n个变量经受一个约束条件G（x）＝c，这在n维空间中确定了一个超平面。对于F（x）的最大值，我们有关于一阶导数的条件，即一阶条件

$$F_j(\bar{x})-\pi G_j(\bar{x})=0 \qquad j=1,2,\cdots n \quad (1.8)$$

用这n个方程和约束方程G（x）＝c，我们可求得$\bar{x}$的n个分量和乘子π。其次，假设有n个选择变量和m个约束$G^i(x)=c_i$，式中我们用上标来表示函数以免和代表偏导数的下标相混淆。这里需要m＜n，是因为n个约束通常将把可行集合降为一个离散点集合，而更多的约束一般将是相互不协调的。为了把拉氏方法推广到这种情况，我们得对每一个约束定义一个乘子。如果用π_i记第i个约束的乘子，则得

$$F_j(\bar{x})-\sum_{i=1}^{n}\pi_i G_j^i(\bar{x})=0 \quad j=1,2\cdots\cdots n \quad (1.9)$$

式中G_j^i代表偏导数$\partial G^i/\partial x_j$。容易验证：方程（1.9）和约束方程$G^i(\bar{x})=c_i$的总个数正好等于分量$\bar{x}_j$和乘子$\pi_i$的总个数。这样方程是可求解的。

用矢量表示式(1.9)将显得更为紧凑。令c为具有c_i分量

的行矢量，G是一个具有G^i分量函数的矢量函数。这样，所有的约束方程可写为矢量形式$G(x)=c$。其次，把偏导数$F_j(x)$用矢量$F_x(\bar{x})$来代替，这里下标x表示矢量函数$F(x)$对x求导。我们将作如下的约定：如果一个函数的自变量是一个行矢量，那么这个函数的偏导数矢量将是一个列矢量（反之亦然，后面我们会碰到列矢量变量）。数学上这个结论将是很明确的，这里我们引入这个结论的目的在于省得我们以后再进行重复性转换。同样，对于每个G^i，偏导数列矢量为$G^i_x(\bar{x})$，并且所有$G^i_x(x)$将形成一个m×n维矩阵，记为$G_x(\bar{x})$。乘子π_i将形成一个列矢量π。现在，把矩阵相乘的定义应用到式（1.9），容易看到：列矢量或1×n维矩阵$F_x(\bar{x})$等于1×m维矩阵π和m×n维矩阵$G_x(\bar{x})$的乘积。当仅有一个约束时，我们必须假设至少有一个$G_j(\bar{x})$不为零，即$G_x(\bar{x})$至少有一个非零分量。对于多个约束，则需要矩阵$G_x(\bar{x})$的列矢量线性无关，即矩阵$G_x(\bar{x})$的秩为m。容易看到一个约束的情况是这个一般情况的特例：即矢量和其自身是线性无关的，只有仅有当其不为零时。

上述这些一般性结论的证明既非容易也非简单。在第五章和第六章推导更一般的结果时我们也将使用其他的更直观的方法。所以，这里我们将不给出证明过程，仅概括地给出结果作为参考。

如果$\bar{x}$使$F(x)$在约束$G(x)=c$下取最大值，并且$G_x(\bar{x})$是满秩的，那么将存在一个列矢量π，使得

$$F_x(\bar{x})-\pi G_x(\bar{x})=0 \qquad (1.10)$$

拉氏方法提供了一种求解许多经济最优化问题的方便的机械方法。对每个约束定义一个乘子，形成函数L，然后令其偏导数为零，求解所得方程和约束方程。后面我们将会看到对这个方法进行修正和补充的方法，以便使这个基本方法能够包括一些和经济问题有关的复杂因素，但是这个基本方法将还是一个有价值的工具。

例　　题

例1.1　求$F(x, y) = x^{\alpha}y^{\beta}$在约束$px + qy = m$下的最大值。在预算约束下效用最优化问题就是这方面的一个典型例子，式中p、q是货物x、y的价格，m是经济收入（当有两个变量时，用记号（x、y）比用记号（x_1，x_2）方便）。

第一种求解方法是令等目标函数线的斜率等于约束曲线的斜率。如前所述，我们将用隐函数求导的方法求出前者的斜率，如此则

$$-\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) \Big/ \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = -(\alpha x^{\alpha-1}y^{\beta}) / (\beta x^{\alpha}y^{\beta-1})$$

$$= -(\alpha/x)/(\beta/y)$$

后者的斜率为$-p/q$。在这个例子中，上述表达式也可容易地通过对每条曲线的显式表达式求导获得。这样

$$F(x, y) = v \quad 意味着 y = v^{1/\beta}x^{-\alpha/\beta}$$

沿着约束曲线，则有$y = m/q - (p/q)x$

一般情况，找显式表达式要难得多。

现在，最优选择（$\bar{x}$，$\bar{y}$）满足两条曲线的斜率相等的条件，即

$$(\alpha/\bar{x})/(\beta/\bar{y})=p/q$$

或者

$$p\bar{x}/\alpha=q\bar{y}/\beta \qquad (1,11)$$

使用预算约束，我们可得到解

$$p\bar{x}/m=\alpha/(\alpha+\beta) \text{和} q\bar{y}/m=\beta/(\alpha+\beta)$$

这个解具有预算份额为常数的特性。这种解通常不能表征消费者的实际特性，而应该采用更好的解（例如下面的例1.2和习题1.4）。然而，这个例子在许多情况下具有很大的说明价值。而且和其类似的例子更能表征生产者的特性。

第二种求解方法是引入一个拉氏乘子π和形成拉氏表达式

$$L(x,y)=x^{\alpha}y^{\beta}-\pi(px+qy)$$

使F（x，y）取最大值的一阶条件是通过令L的每个偏导数为零来得到。这样最优选择（$\bar{x}$，$\bar{y}$）满足

$$\alpha x^{\alpha-1}y^{\beta}-\pi p=0$$

$$\beta x^{\alpha}y^{\beta-1}-\pi q=0$$

当约束方程是线性方程时，求解上述方程的一种有用办法是：用x乘第一个方程，y乘第二个方程，然后，把两个方程相加，则有

$$(\alpha+\beta)x^{\alpha}y^{\beta}=\pi(px+qy)=m\pi$$

如果我们把从这个方程求得的π值代入到上述每一个方程，我们得到和第一种方法一样的解。此外，如果我们愿意，也可根据该问题的有关参数求得π值。这一步骤留作一个习题。

这个例子的反问题是在约束$x^{\alpha}y^{\beta}=z$ （1,12）下求（$px+qy$）的最小值，上式中z是一个给定标量。利用生

产因素x、y来达到使生产目标输出z的成本最低的问题就是这方面的一个典型例子，这时p、q是生产因素x、y的价格，生产函数是式（1.12）所给的指数乘积形式，这种形式的函数称为考伯——道格拉斯函数(Cobb—Douglas)。如果是比例固定收益，那么可取$\alpha+\beta=1$。

用第一种方法可以立即证明最低成本选择满足式（1.11）。然而，合成项$p\bar{x}+q\bar{y}$不再是一个已知值，它是待定的最小生产成本。这样，我们仅可说每个因素在总因素中占的份额是常数。

$$p\bar{x}/(p\bar{x}+q\bar{y})=\alpha/(\alpha+\beta),\quad q\bar{y}/(p\bar{x}+q\bar{y})=\beta/(\alpha+\beta)$$

当是比例固定收益时，指数α和β就是因素份额。这种因素份额常数对于所观察的生产者特征是一个比较可行的一阶近似，而且正因为如此，考伯——道格拉斯函数已被广泛地采用。

例1.2　考察具有如下效用函数的消费选择问题：

$$F(x,y)=[\alpha x^{\varepsilon}+\beta y^{\varepsilon}]^{1/\varepsilon}$$

沿着这个等目标函数的边际替换率为

$$-\frac{(1/\varepsilon)F(x,y)^{1-\varepsilon}\alpha\varepsilon x^{\varepsilon-1}}{(1/\varepsilon)F(x,y)^{1-\varepsilon}\beta\varepsilon y^{\varepsilon-1}}=-\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x}{y}\right)^{\varepsilon-1}$$

如果同好曲线对于原点是凸的，这个式子的值应随x增加或者y减少而减少。这就需要$\varepsilon<1$。画出一些特定值的等值线对此进行检验。当$\varepsilon=2$时，曲线变成椭园，其曲率和所要求的不一致。当$\varepsilon=-1$或$2/3$时，得到几何中很熟知的图形。可以看到例1.1是当$\varepsilon\to0$时的极限情况。

当把上述斜率和预算约束线的斜率等起来时，我们得到最优选择的条件

$$(\alpha/\beta)\left(\frac{\bar{x}}{\bar{y}}\right)^{\varepsilon-1}=p/q \qquad 即$$

$$\frac{\bar{y}}{\bar{x}}=\left[\frac{(p\beta)}{(q\alpha)}\right]^{\sigma}$$

式中定义σ为$\sigma=\dfrac{1}{(1-\varepsilon)}$。容易通过用预算平衡方程$p\bar{x}+q\bar{y}=m$求得这个方程的解为

$$p\bar{x}/m=\alpha^{\sigma}p^{-\varepsilon\sigma}/(\alpha^{\sigma}p^{-\varepsilon\sigma}+\beta^{\sigma}q^{-\varepsilon\sigma})$$

对于另一货物的预算份额也可求解类似的表达式。

如果在上述方程中令$\varepsilon=0$即$\sigma=1$，则该方程变为(1.11)式。这样我们看到例1.1是例1.2的特殊情况。例1.2允许预算份额随价格规则地变化。例如，如果ε是正的，x的预算份额当$p\to\infty$时，趋于零；当$p\to0$，趋于1。因此，用此例来对消费者的特征进行描述比例1.1要好一些。然而，当价格给定时，对于每种商品的支出是和收入成正比的，即两者的要求收入弹性都为1。这一点不是很充分的，还有改进的余地。

习　题

1.1　用拉氏方法求解例1.2。

1.2　把上面两个例子推广到n个变量的情况(把(x,y)变成$(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n)$，$(\alpha, \beta)$变成$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots \alpha_n)$)。

1.3　在消费者理论中众所周知，只要选择的优先权保持不变，那么效用函数的精确形式是无关重要的，即只要$F(x)\geqslant F(y)$，当且仅有$\hat{F}(x)\geqslant\hat{F}(y)$，那么选择$\hat{F}$或$F$作为效用函数效果一样。如果有一个增函数$\phi$使得对于

所有的x都有$\widehat{F}=\phi(F(x))$，那么这种情况就是一例。为了对此进行验证，求解具有如下效用函数的消费问题

$$\widehat{F}(x, y)=x^{3\alpha}y^{3\beta}$$

和

$$\widehat{F}(x, y)=\alpha\log x+\beta\log y$$

证明它们给出和例1.1相同的结果。

1.4　求解具有如下效用函数的消费问题

$$\alpha\log(x-x_0)+\beta\log(y-y_0)$$

式中x_0和y_0是给定的数。证明：只要m超过$m_0=px_0+qy_0$，则解为

$$\bar{x}=x_0+\alpha(m-m_0)/p,\ \bar{y}=y_0+\beta(m-m_0)/q$$

参数α、β都是正的，且$\alpha+\beta=1$。根据习题1.3，这对于问题的一般性没有任何影响。如果你能用一种不需花费很多精力的巧妙方法求解上述问题，将会使你更加相信上述论断。

这就提供了另外一种推广例1.1的方法，该方法使得收入和价格有更大的收缩性。这种处理方法在实际估计需要系统中应用很广泛。

参考文献

1. SAMUELSON, P. A. Economics, ninth edition, 1973, McGraw-Hill, New York, Chapter 2b and he appendix to chapter 22.

2. LIPSEY, R. G. Positive Economics, fourth edition, 1975, Weidenfeld and Nicholson, London, Chapter 4 and the appendix to Chapter 15

3. DORFMAN, R. Prices and Markets, Prentice—

Hall, Englewood Cliffs, N. J. ,second edition, 1972, chapter 4,5 and 7.
4. COURANT, R. and JOHN, F. Introduction to Calculus and Analysis, Wiley—Interscience New York and London, Vol.I 1965, Vol.II 1974.
5. YAMANE, T. Mathematics for Economics Prentice—Hall, New York, second edition, 1968.
6. ARCHIBALD, G. C. and LIPSEY, R. G. A Mathematical Treatment of Economics, Weidenfeld and Nicholson, London, second edition, 1973.

二、影子价格

到目前为止，我们还没有给出引入乘子来求解最优问题的任何真正的理由。对于具有两个变量一个约束的问题，引入乘子将使问题变得难一些：即引入乘子后，把原来求解两个未知数问题变成求解三个未知数的问题。但对于多个变量，引入乘子将使条件更加对称和容易记忆。每一次我们可观察两个变量的横截面，然后得到了（$n-1$）个必要条件

$F_1(\bar{x})/F_2(\bar{x})=G_1(\bar{x})/G_2(\bar{x})$，$F_2(\bar{x})/F_3(\bar{x})=G_2(\bar{x})/G_3(\bar{x})$，……$F_{n-1}(\bar{x})/F_n(\bar{x})=G_{n-1}(\bar{x})/G_n(\bar{x})$

并证明了没有其他的独立条件，把这些方程和约束方程$G(\bar{x})=c$联立求解。这种求解方法是比较麻烦的；当有多个约束时，显得更加麻烦。

但是引入乘子决不是由于某种艺术魅力的吸引也不是图简单。如果这些乘子不能表达有关经济问题的某些特征的话，我们将不会引入它们的。这可从下面的论述看得清楚：

最大值问题有几个数据参数。数c_i就是其中之一，还有象包含在函数F和G中的其他参数。经济学家经常需要知道，当这些参数取不同的值时，问题的解是怎样改变的。例如，在消费者理论中，我们通过比较对应于不同价格和收入的各个预算线的最优选择，来讨论收入和替换影响。对于给定输出价格的生产者，需要知道当该价格或者他的生产技术有变动时，供给计划是怎样变化的。比较对应于各种参数的

解的这种一般方法称为比较静态经济学法，而拉氏方法的重要性在于它提供了求解最基本比较静态经济学问题的方法。

为了用最简单的方法对此进行说明，考虑两个变量一个约束的问题。象前面一样，取最大值的函数用F表示，约束方程用$G(x)=c$表示，最优选择为$\bar{x}$，最大值$v=F(\bar{x})$。现在再考虑另一个其他条件同上而c仅有边际增量dc之差别的问题，即约束方程为$G(x)=c+dc$。按常规，我们期望着两个解仅相差一个边际量$d\bar{x}$。最大值的改变量为$F(\bar{x}+d\bar{x})-F(\bar{x})$。这个差值的一阶近似值可用F和G在$\bar{x}$点的导数表达的一阶泰勒展开式和条件（1.6）式求得。这样对于一阶近似，则有

$$\begin{aligned} dv &= F_1(\bar{x})d\bar{x}_1+F_2(\bar{x})dx_2 \\ &= \pi[G_1(\bar{x})d\bar{x}_1+G_2(x)d\bar{x}_2] \\ &= \pi[G(x+d\bar{x})-G(\bar{x})] \\ &= \pi[(c+dc)-c]=\pi dc \end{aligned}$$

或者 $dv/dc=\pi$

这样，乘子π就是标准函数可达最大值对于约束参数的改变率。例如在消费者问题中，乘子就是效用对应于收入增加的增加率；这时，可很自然地称乘子为收入的边际效用。

上述结论可容易地推广到一般的情况。我们将通过对一般情况的讨论来说明使用矢量的方便和有利之处。如果$d\bar{x}$是对应于行矢量c的增量dc的行矢量$\bar{x}$的增量，那么最大值的一阶增量可写为：

$$dv=F_x(\bar{x})d\bar{x}$$

这是一个列矢量和一个行矢量的矩阵乘积。然后，进行如前述的推导过程并用式（1，10），则有：

$$dv = F_x(\bar{x})d\bar{x} = \pi G_x(\bar{x})d\bar{x} = \pi dc$$

这个结果很重要，有必要单独写出来作为参考。

如果dv是由于c的无穷小增量dc所引起的F(x)的最大值的一阶增量，π是对应于约束方程G(x)=c的乘子矢量，那么则有

$$dv = \pi dc \qquad (2.1)$$

特别是，如果dc_i是dc的唯一非零分量，这样仅第i个约束有改变，因而有$dv = \pi_i dc_i$。这样π仅是v相对于c_i的变化率；$\pi_i = \frac{\partial v}{\partial c_i}$。

应该强调的是，方程(2，1)仅是v增量的一阶(线性)近似。对于c的有限改变量，也可取更多的导数项，给出更高阶的泰勒展开式，以得到更精确的近似表达式。在第八章中，我们是这样处理的，尽管是对于稍有不同的目的。

为了举例说明和解释上述结论，考虑一个计划经济问题，该问题是选择一个生产消费计划x使得社会福利指示函数F(x)取最大值。假设各种约束是把该计划的各种资源要求与这些资源的可采用性等同起来。假设该问题已解出并且已得到拉氏乘子的值。现在假定由于经济外的某种权力机构根据其目的施加了额外的单位小时个人工作量。这个问题可用新的劳动约束重新求解，以确定新的生产模型。但是我们不用重新求解就能知道社会福利最后的增长限，这可由原来的拉氏乘子得到(至少对于线性近似来说)。这样我们可以说根据该问题的标准函数可由乘子给出问题的边际劳动产品值。

另外一种考虑这个问题的方法更为直观。假定我们使用上述额外工作量仅增加货物j的产量。如果用dx_j表示该增加量，约束方程为G(x)=c，那么，为了要满足当c增加1时

（假定把这个量记为一小增量）的约束条件，必须有$G_j(\bar{x})$ $dx_j = 1$，这样，则有$dx_j = 1/G_j(\bar{x})$，并且社会福利贡献为

$$F_j(\bar{x})dx_j = F_j(\bar{x})/G_j(\bar{x})$$

这是货物j的社会福利边际贡献与其边际资源要求的比值。当达到最优时，上述比值对于所有的j都要相等，因为，如果不相等的话，可以通过把具有低比值的某种货物生产中的一些劳动移到具有高比值的生产中以满足其他方面的某种社会福利需求。回想一下，就是根据这个论据，在基本教科书中才建立起对于消费者问题的边际效用和对应价格成正比的关系的。回想起式（1，8），拉氏乘子表明了约束和标准函数之间的某种权衡。很显然这是一条非常重要的经济信息，并且这也就是为什么拉氏方法在经济学中很有用的缘由。

现在假设要使用上述额外的工作量得花费某种代价。该经济问题根据其标准愿意接受的最大代价显然等于拉氏乘子值，这是因为用任何较低的成本使用这个工作量都能给其带来净增利润。从这个自然的意义上讲，拉氏乘子表示了该经济问题中的额外工作量的价格。就最大社会福利问题而论，根据社会单位福利所表示的支出或价格好象是一个生疏的概念。然而，对此概念稍加修改就能使我们熟悉其本质。考虑某种资源，如土地。令劳动约束为1，土地约束为2，π_1和π_2分别表示各自的乘子。现在假定给定经济问题提供了一个额外工作量，但要求对dc_2土地的占用提供报酬。从上述额外工作量得到的社会福利为π_1，而从放弃dc_2土地的使用所引起的损失为$\pi_2 dc_2$。这样只要$\pi_1 - \pi_2 dc_2$是正的，那么就能得到社会福利，因此，对于单位劳动提供报酬的最大土地使用支出为π_1/π_2。这当然就是该经济问题中相对于土

地所表达的劳动需求价。如果另外一个经济问题根据其资源或技术情况具有不同权衡，并且愿意为较少量土地的使用提供工作量来作为报酬，那么就会有对两者都有利的交易可能性。

当然，经济中的内部机构不能与价格有任何联系，并且乘子（或者相对于另一个乘子所表示）不需和对每个工作量所付的报酬相等。在一个指令经济中，劳动可直接按排到各种任务中。或许可能有差价存在。然而，乘子在所求解的最优问题的结果中保持为一个完整的部分，而且它们隐含着对资源如劳动施加了某种价值。

然而，假如经济制度允许用市场来分配资源，而且市场是处在平衡状态，即价格能保证追求其最大标准的个人供求量等于总的供求量。现假定某个经济学家使用某个给定的标准来对该经济问题的效益进行估计。当他求解这个约束最优化问题时，将会得到一组有关资源约束的乘子。好象很难找到为什么市场应该对这种分配有调解作用的原因，并且上述乘子也无需和资源市场价格有什么联系。但是在有一些情况下，最优是受市场平衡反馈的，这时经济学家将会说该经济是由某种看不见的手（invisible hand）引导到最优的，下面就是一个这方面的例子。假定标准函数的自变量仅是消费者的效用水平高低。而且该标准函数是自变量的增函数。如果该经济问题是可竞争的，没有任何外在影响和生产中的明显的增长比例收益，并且也能调整资源的初始分配量直到我们认为合适为止，那么在这种情况下，上述“看不见的手”就会出现。这种问题多年来一直是经济理论中主要考虑的问题。目前，对于这种现象不出现的情形已日益重视，因

为很明显，上面所述的条件是非常严格的。在这样的情况下，经济学家必须寻求某些政策，以能对自由市场进行一些改进。当然，所得到的结果可能与理想结果有差别。这就导致了一个两级优化问题，在该问题中，个人根据他们各自的标准对计划者所指定的政策作出响应；计划者当根据其标准来指定最好的政策时，必须把上述个人响应考虑进去。在这种情况下，我们可得到计划者的乘子和市场价格之间的某种规则关系，但这种关系并不是恒等关系，差别在于所采用的税务或津贴政策。这方面的例子有：〈i〉具有明显增长利润的工业调整问题，〈ii〉有关外事和大众货物的政策指定问题，〈iii〉考虑财产价值和效益平衡的税务政策指定问题。在后面几章中，我们要对上述某些问题单独进行说明。

为了明确和价格的关系，而又和市场价格有概念性的区别，我们经常把拉氏乘子称为影子价格(Shadow Prices)。

现在，出现了这样的一个经济学问题。我们期望着市场价格是非负的，但是至今我们还没有理由说为什么在标准最优化问题中，影子价格也应该是非负的。很自然，取掉一个约束应该能使我们得到一个至少等于所对应的标准值的值，但是在该问题的一般说明中，c的增加并不意味着放松某个约束。作为尝试，我们可把约束写成$-G(x)=-c$，这样在该式右边的增加意味着c的减少。而且，并不是所有的约束都是有关资源可用性的。我们也可对给定消费货物量的投资额问题进行最优化。这时，该投资额的增加将会使经济约束变得更为严格，所以应选取小的投资额，这样乘子变为负值。以上这个例子表明：如果要使乘子为正，我们必须以这样的一种方法写出约束方程，使得在该方程右边的增量能够松弛

所选择的约束。

还有一种更为重要的情况需要考虑。在有些问题中某种资源的边际值在某点之后变为负值。在这个负值域内，进一步使用这种资源将意味着一个较低的最大值，并且乘子变为负值。前面我们把约束都用等式来表示，这就意味着，既使当把某种资源的一部分不加利用而更有利时，也要强迫使用它。如果约束是一个不等式，如$G(x)\leqslant c$，我们将能克服上述缺点，达到自由地使用某种资源的目的。当然，在增加了这种自由性而不改变问题的其他方面时，我们假定，不利用某种资源无需花费成本，这不是实际情况。实际情况是某些资源象人的大脑一样，当不使用时可能退化得更快。但是只要我们在标准中计入这样的成本，给计划者这种自由是有利的，即如果不用某部分资源而会对其选择的标准有利，他可以不用这部分资源。进一步说，如果我们放弃这种无成本的任意性假设，甚至在经济学中更为直观的市场价格的非负性也将得不到保证。

为了使用不等式所表示的约束，我们必须建立一些数学技术。这将在第四和第五章中进行，但是其中有一个是很重要的，并且从上面的讨论中看也是明显的结论。就是如果某种资源的一部分未加利用，那么该部分中的任何增加量也将不能被利用。该标准最优值也将不会改变，对应的影子价格也为零。另一方面，正的影子价格意味着资源的利用率的增加将会增加标准值。很清楚，原来可采用的资源量在最大值利润中将会全部被利用。上述这两个结论可以结合在一起说成：在资源利用中，影子价格和松弛至少有一个将总是为零。这个一般原理是最优化经济问题中最重要的特点之一，

称之为补充松弛。在第六章中将要对此进行更明显的公式化，并且在后面我们会时常用到这个原理。

注意到：前面以不等式写出的约束方程满足了前述问题的要求，因为对于任何大于c的c'，满足$G(x)\leqslant c$的任意x也满足$G(x)\leqslant c'$，这就保证了通过该式右边的增加，自由选择x。一个能使某种货物的分配量最小的约束具有形式$G(x)\geqslant c$。以标准形式，可写成$-G(x)\leqslant -c$，该式右边的增加，即c的减少，将再一次意味着约束的松弛。

例　题

例2.1 回到例1.1的消费者问题，找到经济收入的边际效用。在例1.1中没有考虑进去乘子，因为在那里对其不感兴趣，但是作为该问题求解的一部分，可把乘子表示为

$$\pi=(\alpha+\beta)\bar{x}^{\alpha}\bar{y}^{\beta}/m$$

现在仅把$\bar{x}$和$\bar{y}$的值代入该式，可得到

$$\pi=(\alpha+\beta)\left(\frac{\alpha m}{p(\alpha+\beta)}\right)^{\alpha}\left(\frac{\beta m}{q(\alpha+\beta)}\right)^{\beta}/m$$

$$=\left(\frac{\alpha}{p}\right)^{\alpha}\left(\frac{\beta}{q}\right)^{\beta}\left(\frac{m}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta-1}$$

特别是，当$\alpha+\beta=1$，最后一项为1，这时π和m无关。这在经济上是有意义的。在这种情况下，对于所选取的生产规模，效用表明了比例固定收益。而且，当价格不变时，经济收入的成倍增加仅仅带来了所选取商品量的成本增加，因此

也就是效用的成本增加。因此，经济收入的边际效用和经济收入的高低无关，并且其值等于经济收入的平均效用值。

需要再次强调的是：就消费者理论而论，上面所说的都是很奇特的，这是因为上述的效用函数的表达式没有任何特定的意义，并且象比例固定收益这样的概念也是不合适的。然而，在做个人之间的相互比较时，福利经济常对于消费者效用强加上某种特定的表达式，这时，上述问题就变得重要了。而且，对于在比例固定收益下的生产，也存在类似的性质，而且这些性质也是感兴趣的。

例2.2 作为建立前述的“看不见手”现象的一个步骤，让我们来考虑这样的一个计划阶段，这时，各种货物的总量已知并且保持恒定，剩下来的问题是把这些货物分配给消费者。假定有I个消费者，记为i＝1，2，……I，G种货物，记为g＝1，2，………G，令x_g是货物g的总量，分配到消费者i的该种货物量为x_{ig}。每个消费者的效用仅是其分配量的函数

$$u_i = U^i(x_{i1}, x_{i2}, \cdots\cdots x_{iG}) \quad i=1, 2, \cdots I$$

社会福利是这些效用量的增函数

$$w = W(u_1, u_2, \cdots\cdots u_I)$$

这时的约束为，对于每种货物，其分配到每个消费者的量的总和等于总的可用量，即

$$x_{1g} + x_{2g} + \cdots + x_{Ig} = x_g \qquad g=1, 2, \cdots G$$

对于该约束定义拉氏乘子π_g，得到拉氏表达式

$$L = W(U^1(x_{11}, \cdots, x_{1G}), \cdots\cdots, U^I(x_{I1}, \cdots, x_{IG}))$$

$$-\sum_g \pi_g \left[\sum_i x_{ig}\right]$$

式中每个求和的范围以及L的自变量都是明显的。

上式对于每个x_{ig}求微分，得到条件

$$W_i U_g^i - \pi_g = 0 \qquad (2,2)$$

式中函数的下标表示对应的偏导数。照例这些偏导数是在最优点计算的，但是为了简单起见省略了自变量。

现在假设所得到的π_g值是代表市场经济中的各种货物的价格。假定每个消费者i的经济收入为m_i，根据下述预算约束来求U_i的最大值

$$\pi_1 x_{i1} + \pi_2 x_{i2} + \cdots + \pi_G x_{iG} = m_i$$

对于该约束定义一个拉氏乘子λ_i，则有

$$L^i = U^i(x_{i1}, \cdots x_{iG}) - \lambda_i \sum_g \pi_g x_{ig}$$

对x_{ig}求导，得到条件

$$U_g^i - \lambda_i \pi_g = 0 \qquad (2.3)$$

果把这个式子与式（2.2）相比较，可以发现，只要对于每个i，消费者i的经济收入边际效用λ_i等于$1/W_i$，那么上两式恒等。如果我们对资源的所有权加以控制，就可以通过分配资源来调整m_i，使得λ_i等于$1/W_i$（当m_i对λ_i无影响时，这种情况除外，在这种情况下，分配不是我们主要所考虑的，因而也不会出现上述问题）。当然，这种论述和列出方程与未知数具有同样的重要性，但是象前面的大部分有意义的论述一样，对此论述我们也可以进行严格的论证。这种论证就是对于分配问题的"看不见的手"。

习　　题

2.1　虽然选取不同的效用表达式对于一个消费者的日用品最优选择无影响，但是对于所计量的效用大小有影响，这样也必然影响经济收入的边际效用值。通过证明：对于习题1.3的第二表达式，可以得到

$$\pi = (\alpha + \beta) / m$$

来验证上述论断。该表达式具有经济收入的边际效用为零的性质，这个性质和福利经济有一定的关系。

2.2　考虑一个消费者需要计划其两年的消费量问题。第一年的收入为为m_1，第二年m_2，p_1和q_1是货物x_1和y_1在第一年的价格。p_2和q_2是货物x_2和y_2在第二年的价格。对如下的效用函数求最大值

$$u = \alpha_1 \log x_1 + \beta_1 \log y_1 + \alpha_2 \log x_2 + \beta_2 \log y_2$$

约束条件为上述两个预算条件，m_1为第一年，m_2为第二年。

求解这个问题并找到对于上述两个约束的乘子π_1和π_2。检验这些量和经济收入、价格以及效用函数中的其它参数的关系是怎样的。为了得到单位m_1，消费者将愿意放弃多大的m_2？为什么在包括有不同收入和效用函数的经济中，你将会期望着建立借出借入机构呢？

2.3　推广例2.2"看不见的手"的结果到下述情况，这里生产的货物量也是可调的。假定有F个生产因素，量z_f为固定，$f = 1, 2, \cdots F$。如果因素f用于货物g的生产的量为z_{fg}，那么各种货物的输出为

$$X_g = X^g(z_{1g}, z_{2g}, \cdots z_{fg})$$

象前面一样取W的最大值，但是这里约束条件不仅要平衡货物的供求关系而且也要平衡各种生产因素的供求关系。从最优选择的条件，找出影子价格和生产因素之间的关系，并从经济学的观点对这些关系式进行解释。

2.4 进一步推广上述结果到如下情况：这里生产因素供给量也是可调的。消费者提供生产因素，但是在提供因素时有效用损失。记y_{if}为消费者i提供给因素f的量，合理地列出约束方程，并按上题的解法求解。

参考文献

1. MALINVAUD, E. Lecture on Microeconomic Theory, North—Holland, Amsterdam, 1972, ch.4.
2. KOOPMANS, T. C. Three Essays on the State of Economic Science, Mc Graw—Hill, New York, 1957, Essay1.
3. HEAL, G. M. The Theory of Economic Planning, North—Halland, Amsterdam, 1973, Section4.5 and AppendixA. 7.

三、最大值函数

在讨论不等式约束之前，我们先讨论比较静态经济学中的一些其它重要结果。在第二章我们已讨论了可达到的最大标准值相对于约束方程右边项的改变率。换言之，最优选择，也就是最大值，都依赖于约束方程的右边项，并且我们还研究了这种函数依赖关系$v(c)$的一个性质，即它的导数$v'(c)$。把这个概念做进一步推广，我们可以得到很多东西。约束最优问题中可以包括几个其它的参数，而且最大值都是这些参数的函数。例如，消费者可达到的最大效用，是价格和其收入的函数；该函数称为间接效用函数。从这个间接效用函数的性质，可以得到许多有关消费者选择的结果，而且有时用间接效用函数来描述消费者的特征要比用直接效用函数的显式最大值描述好得多。在本章末尾的例题和习题中，我们将考虑这方面的例子。在此之前，我们将根据一般的约束最优化问题来考虑这个问题，并且推导一些以后要用的结果。

首先，考虑参数仅对取最大值的函数有影响的情况。对于一个在给定输出指标下使其生产成本最低的生产者，可能会发生这种情况，这时参数就是生产因素的价格。或者参数可能是某个小国家所面临的世界价格，该小国希望当其资源和技术给定时使其输出值最大。无论哪一种情况，都令这些参数为行矢量b，并把b也包括在标准函数F的自变量中。这时

问题变成，选择x在约束$G(x)=c$下使$F(x、b)$取最大值。定义一个乘子矢量π，这样最优选择$\bar{x}$满足

$$F_x(\bar{x}, b)-\pi G_x(\bar{x})=0 \tag{3, 1}$$

式中F_x是表示当b不变时，F相对于x分量的偏导数列矢量函数。最大值为$v=F(\bar{x}, b)$，这里根据式（3，1），$\bar{x}$本身就是b的函数。现假定b有增量db，令$d\bar{x}$和dv是$\bar{x}$和v的一阶对应增量。如前章所述，我们可得到

$$\begin{aligned} dv &= F_x(\bar{x}, b)d\bar{x}+F_b(\bar{x}, b)db \\ &= \pi G_x(\bar{x})d\bar{x}+F_b(\bar{x}, b)db \end{aligned}$$

但是，约束方程中不包括b，因此

$$G_x(\bar{x})d\bar{x}=dG=0$$

因而

$$dv=F_b(\bar{x}, b)db \tag{3, 2}$$

在这里，当b有一个有限增量时，我们还可以利用泰勒展开式来给出v的更高阶近似式。然而，根据其简单性，上述一阶近似也是很有用处的。因为上述近似式告诉我们：在计算由于某个对标准函数有影响的参数的改变所引起最大值的一阶改变量时，我们不需要担心选择变量$\bar{x}$本身的改变。我们所要做的只是计算对应于这些参数的偏导数，并在初始最优点计算这些偏导数值。例如，对于一个要使其成本最低的生产者，如果生产因素的价格改变，那么最优因素的分配量（假如在生产中有一定的替换可能性存在）也要改变。但是，就生产的最低成本的改变而论，我们可（对于一阶近似）忽略替换；并且看成在固定的系数下来计算改变量。

现在，假定约束方程中也包括参数b。事实上我们也可以把约束方程右边的矢量c归并到矢量b中，把一般的约束

方程写成形式$G(x, b)=0$。前面所给的约束实际上就是$G(x, b)=G(x)-c$时的一种特殊情况。在上面的一般约束情况下，则有

$$0=dG=G_x(\bar{x}, b)d\bar{x}+G_b(\bar{x}, b)db$$

从而

$$F_x(\bar{x}, b)d\bar{x}=\pi G_x(\bar{x}, b)d\bar{x}=-\pi G_b(\bar{x}, b)db$$

这样，可求得最大值的改变量为

$$dv=[F_b(\bar{x}, b)-\pi G_b(\bar{x}, b)]db \qquad (3, 3)$$

对式(3，2)和式(3，3)的差别可做明确的解释。当b对约束有影响时，由db所引起的G的改变量为$G_b(\bar{x}, b)db$，这就等于等量资源可用性的降低。最大值的成本这时为$\pi G_b(\bar{x}, b)db$。然而，在这里我们将还不考虑对于$\bar{x}$的改变量。

这些结果使我们想到了一个更为一般的问题：就是如果$\bar{x}$的某些分量调整到新的最优值而其它的分量保持不变，将会出现什么样的问题？为了更明确起见，把矢量x分成两个矢量y和z，它们对应的最优值$\bar{y}$和$\bar{z}$。我们将要比较当所有的$\bar{x}$分量都做最优调整时与当保持$\bar{y}$不变而仅对$\bar{z}$做最优调整时，由b的改变所引起的v的改变。当然，必须得有足够的可变分量来保证约束条件的满足，这就需要可变分量数至少等于约束方程的个数。

首先，我们用拉氏方法来研究这个问题。在第一种情况，当所有的分量都是可变的时，我们可用分离后的记号重写条件(3，1)为

$$\begin{cases} F_y(\bar{y}, \bar{z}, b)-\pi G_y(\bar{y}, \bar{z}, b)=0 \\ F_z(\bar{y}, \bar{z}, b)-\pi G_z(\bar{y}, \bar{z}, b)=0 \end{cases} \qquad (3, 4)$$

式（3，2）变为

$$dv = [F_b(\bar{y}, \bar{z}, b) - \pi G_b(\bar{y}, \bar{z}, b)]\, db \quad (3, 5)$$

当仅调整z时，我们将在约束$G(\bar{y}, \bar{z}, b) = 0$下求$F(\bar{y}, \bar{z}, b)$的最大值。定义λ为乘子矢量，则有条件

$$F_z(\bar{y}, z, b) - \lambda G_b(\bar{y}, \bar{z}, b) = 0 \quad (3, 6)$$

这时

$$dv = [F_b(\bar{y}, \bar{z}, b) - \lambda G_b(\bar{y}, \bar{z}, b)]\, db \quad (3, 7)$$

目前我们还不清楚是否式(3，7)和式(3，5)会给出同样的结果。要使两者一样的充分条件是$\pi = \lambda$，对此结果的证明不仅有些麻烦而且还需要一定的基础知识。

我们引出了上述说明力不强的论断的目的是通过对照来说明另外一种方法的功用。这种方法直接和最优化的定义相关而和根据导数所表示的必要条件无关。很简单，我们仅使用了不等式：即对应于最优选择的标准函数值必须至少要和对应于任何可变选择的标准函数相等。在目前的情况下，该方法可很容易地告诉我们何时所需的结果是合理的，而且也能给出所引起的限制条件的意义。

为了用公式来表述，应该明确最优值和对应的选择值都是参数的函数。这样，当y和z都是可变时，令$v = V(b)$为最大值，$\bar{y} = Y(b)$，$\bar{z} = Z(b)$是对应的最优选择，那么

$$V(b) = F(Y(b), Z(b), b) \quad (3, 8)$$

当y为固定时，我们必须把它看成另外一个参数矢量。对于当z仅是可变的问题，记$V(y, b)$为最大值，$Z(y, b)$为最优选择，那么则有

$$V(y, b) = F(y, Z(y, b), b) \quad (3, 9)$$

在上述两种情况下，使用了同样的函数符号将不应该引起混

乱，因为在每一种情况下，自变量都已明确地写出来以区别是哪一种情况。

很简单，上述论断所依据的事实是：选择$(y, Z(y, b))$满足当两组变量都为可变时所需的约束方程，即$G(y, z, b) = 0$。当$V(b)$为后一种情况的最优值时，我们必须有

$$V(y, b) \leqslant V(b) \tag{3,10}$$

一个特殊情况是当y刚好固定在当其为可变时的值时，两个解重合，即

$$V(Y(b), b) = V(b) \tag{3,11}$$

现在来考虑b的某个增量db。虽然$\bar{y} = Y(b)$是对应于当y为可变时的最优选择，但是当b变成$(b + db)$时，$\bar{y}$不一定是最优选择了。因此，我们有

$$\left.\begin{array}{l} V(\bar{y}, b) = V(b) \\ V(\bar{y}, b+db) \leqslant V(b+db) \end{array}\right\} \tag{3,12}$$

把这两个式子相减，可得到

$$V(\bar{y}, b+db) - V(\bar{y}, b) \leqslant V(b+db) - V(b) \tag{3,13}$$

这就是当某些选择固定和全都不固定时的对应最大值的差值。为了清楚起见，考虑仅有一个参数b的情况。这可从图3.1来说明。正如式(3,12)所要求的，图中表示当y取$\bar{y}$值时最大值是b的函数的曲线总是位于当y是可变时的对应曲线的下面，而且两者只有在一个特定的b值下才重合，这时$\bar{y}$正好就是最优选择。如果两个函数都是可微的，那么两者在该点必须相切，如图3.1所示。这样则有

$$V_b(\bar{y}, b) = V_b(b) \tag{3,14}$$

式中 V_b代表导数V'。

为了对以上结论从代数上给予证明，把db取为一个有限改变量，并用它除式（3,13）的两边。如果db为正，不等式不变号；为负

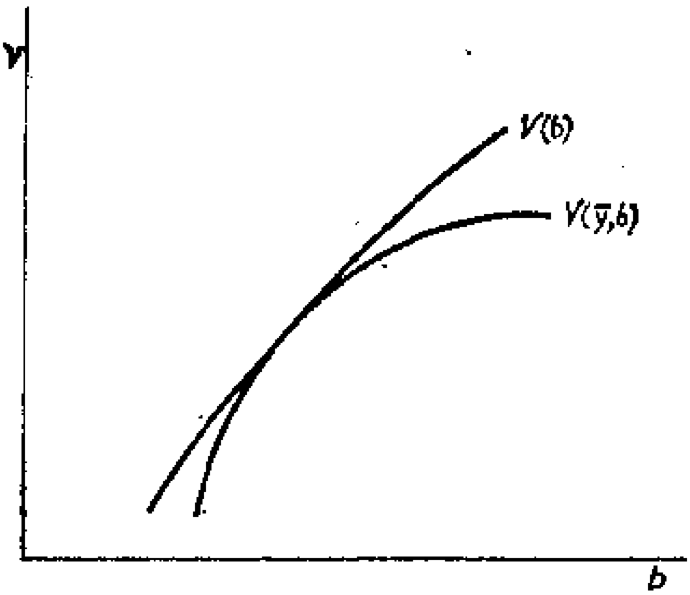

图 3.1

时，要变号。在每种情况下，取db趋于零的极限。这样就得到了两个弱不等式，指向和式（3,14）两边之间的指向相反。这样只要导数存在，我们就能建立起方程式（3,14）。如果b是一个矢量，对其每个分量可分别进行上述过程，对于上面两个函数的每一对对应偏导数，可建立起类似式（3,14）的方程式：即建立起作为整体的偏导数矢量等式。这种结果就是我们所寻求的：它把最优值相对于参数的变化率表示成等式，而不考虑所有的变量是可变的或者其中一些是保持不变的。

然而，后面我们将要看到：最大值函数的导数可能不存在，即可能在一个点有不同的斜率。斜率取决于是从左或右接近于该点。这种情况既使当所有的基本标准函数和约束方程都是可微时也可能发生。这就会产生图3.2所示的情况，图中式（3,12）得到满足，但是，从这些式子不可能推出象

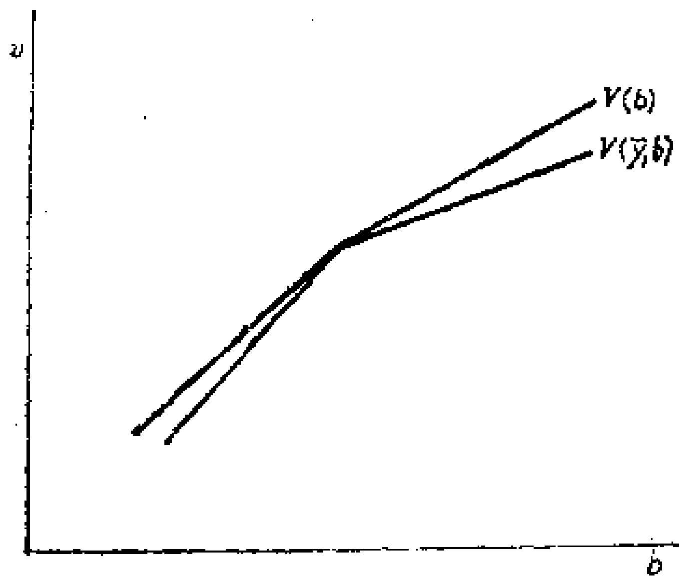

图 3,2

式（3.14）一样的等式。我们所做的最好方法是分别定义“左”和“右”导数，依赖于db是从正的趋于零还是从负的趋于零，然后建立不等式，该不等式说明上面的曲线对于右边更陡，对于左边更平，即用记号写成

$$V_b(b)_+ \geqslant V_b(\bar{y},b)_+,\quad V_b(b)_- \leqslant V_b(\bar{y},b)_- \qquad (3,15)$$

仅在这样的情况下，象式（3,5）和（3,7）那样的方程才有意义，但是这时的拉氏乘子值是不同的。

在讨论应用时，在有适当的而没有严格的证明时，我们还将假定最大值函数的可微性存在。一个这方面的应用已在经济学中变得很有名，因为它是第一个具有本章所讨论的一般特性的例子。该例子为：通过使生产定额输出的成本最低并把该最低成本的值看成是输出额的函数来找到成本曲线。这样当输出参数改变时，边际成本就是该成本曲线的斜率。从长期来看，所有因素的选择都是固定的，但从短期来看，仅一部分可自由选取。对于每一条短期成本曲线，将有一个输出指标，达到该指标时，所有不变的因素恰好就是

它们的长期最优指标。因此，式（3,14）告诉我们，当达到这个输出指标时，短期边际成本将和长期边际成本相等，于是对应的平均成本曲线相切。从式（3,12）我们可进一步看到：长期总（或者平均）的成本曲线必须处处都在对应的短期成本曲线之下（记住：这是一个最小值问题）。如果我们对于所有的短期成本曲线重复上述过程，那么长期成本曲线将成为对于不同的固定因素的短期成本曲线族的包络线。由此，这个一般的结果常常被称之为包络定理。或者称之为伍恩——维纳（Wong—Viner）定理，以这两个人的名子来命名是因为当他们研究成本曲线的性质时碰巧发现了上述这个性质。

对于上述结果的一阶导数的性质也应该强调一下。一般说来，函数V（b）和V（y,b）的高阶导数将不相等。从图3.1我们看到函数V（$\bar{y}$,b）必须有较大的向下曲率，即它必须更凹。这个结果具有一些重要的含义，在第八等中，我们将会时常提到这些含义的。

下一个很自然的比较静态经济学问题就是要考虑当参数改变时，$\bar{x}$本身的响应。自身替换效应的负值性等都属于这类问题。当从方程(1,10)和约束方程求得$\bar{x}$后，我们需要知道当参数改变时这些$\bar{x}$是怎样变化的。这可通过求导数来完成，但是式（1,10）本身已包括一阶导数，这样式（1,10）的改变将会产生二阶导数项。由于下述两个原因，我们将推迟讨论$\bar{x}$的变化情况。首先，到那时，读者将会同时有了更多的数学证明练习，并能更加容易地理解上述论证过程和结论。其次，下两章给出的一些求解方法，在许多重要的情况下，是不利用二阶导数来求解比较静态经济学问题的

简单方法。本章提供的直接推理已经给出了一个说明这种方法的功能和简单性的例子。有关进一步发展和更加广泛地使用这种方法，还需要做更多的说明。

例　　题

例3.1　作为对包络定理的主要应用范围的一个说明例子，考虑下述问题。从短期来看，如果设计能力为k的一个工厂用来生产输出q，成本为

$$C(q,k)=a+\frac{1}{2}bk^2\left[1+(q/k)^4\right]$$

从长期来看，k是变量。在长期生产中为了以最低成本生产输出q，生产者将要选择k使得C（q,k）最小。此问题的一阶条件为

$$C_k(q,k)=b\left[k-q^4k^{-3}\right]=0$$

二阶导数为

$$C_{kk}(q,k)=b\left[1+3(q/k)^4\right]$$

该式为正，从而保证了最小值存在。从一阶条件，我们得到k＝q，即生产能力应该等于所计划的长期输出指标。这样，通过把上述值代入可得到长期成本曲线为

$$C(q)=a+bq^2$$

这时，短期边际成本为

$$C_q(q,k)=\frac{1}{2}bk^2\cdot4q^3/k^4=2bq^3/k^2$$

长期边际成本为

$$C'(q)=2bq$$

很显然，当$k=q$时两者相等

把上述函数和相应的平均成本曲线按比例画在图上，将是一种有用的练习。为了计算和画图简单起见，取$a=240$，$b=150$分别画出$k=2$，3，4，5和6时的图形。如果有计算尺或计算器，可根据自己选取的数进行练习。

例3.2　本章中引入的最重要的概念是认为标准函数的最大值为该问题参数的函数。这种函数包括了所研究的最优问题的许多有用的经济信息，而且还具有一些重要的应用。本例打算来说明在消费理论中的一些这方面的应用。

一个消费者，要使其效用在预算约束$px=m$下为最大，这里p是价格列矢量，m是经济收入。该消费者所能达到的最大效用是p和m的函数。该函数称为间接效用函数，记为$V(p,m)$。这个函数的一些性质是很明显的：如按等比例改变所有的价格和经济收入，将会使可采用的日用品量x保持不变，这样将不会影响可达到的最大效用限；因而$V(p,m)$是关于其自变量的零次齐次函数。后面将要讨论一些其它的性质。这里特别感兴趣的一个性质是前面已推导的比较静态经济学结果的应用。用V_m表示$\frac{\partial V}{\partial m}$，$V_j$表示$\frac{\partial V}{\partial p_j}$。如果我们用$\lambda$代表该问题的拉氏乘子，那么从影子价格的解释我们知道

$$\lambda=V_m(p,m) \tag{3,16}$$

我们也可以使用式(3,3)。如果除了第j个之外的所有价格都是不变的，我们可以从式(3,3)得到V关于p_j的变化率，即V_j为

$$V_j(p,m)=-\lambda\frac{\partial(px)}{\partial p_j}=-\lambda x_j$$

该式的值在最优点计算。当然，最大效用选择也就确定了需

求函数$x_j = D^j(p, m)$。这样，则有

$$D^j(p, m) = -V_j(p, m)/V_m(p, m) \tag{3,17}$$

这是一个有用而且重要的结果。如果我们已经知道消费者的效用函数来求其需求函数，我们得进行全约束最优化求解，这种求解既使在最简单的情况下也是很麻烦的。另一方面，如果我们已知间接效用函数，仅需要求导数就可找到需求函数。因此，用间接效用函数来概括消费者的上述特性要比用直接效用函数简单得多。特别是在消费者仅是所要描述的一部分的模型中，所需付出的代价和所用的记号从经济的角度考虑差别很大。下几章将要给出一些这方面的应用。

下面来考虑上述问题的反问题，这里设想消费者使其为达到一个给定的目标效用指标所需的支出最低。所得到的最小值这时是价格和效用指标的函数。这个函数称为支出函数，记为$E(p, u)$。保持u不变，按同样的比例改变所有的价格将会使所需的支出按相同的比例变化，因此，对于每个固定的u，支出函数是p的一次齐次函数。同样，该函数的其它性质也将放在后面讨论，和前面一样，该函数的一阶改变量能够告诉我们一些有关需求函数的东西。

根据前面所述，如果μ是拉氏乘子，则

$$\mu = E_u(p, u) \tag{3,18}$$

在这种情况下，价格的改变不影响约束，因此我们可采用式(3,2)。这样可以得到

$$E_j(p, u) = x_j$$

该值是在最优点计算的。对于一个给定的效用指标，最小成本日用品选择就是补充需求函数，即$C^j(p, u)$。该过程就好

象是随着价格的改变，消费者可通过改变其收入来得到补充，以使他处在相同的同好曲线上。在两种货物的情况下，上述过程可以通过使预算曲线和同好曲线相切而达到，这样就可以分离开一种价格改变的替换效应。这样我们得到了关系

$$C^j(p,u)=E_j(p,u) \qquad (3,19)$$

这个表达式比上面的补充需求函数的表达式甚至更简单，而且该式常常用处更大。在后面将要给出该式的应用。

例3.3 由于约束方程右边的矢量c可以被归并到本章所用的参数矢量b中，因此也应该能推导出式(2,1)是式(3.3)的特殊情况。为此，让我们还是写出b和c，来考虑$G(x,b)=G(x)-c$的特殊情况。这时，第i个分量函数关于c_j的偏导数，当$i=j$时，为-1，其他情况为零；这样矩阵G_b变成$-I$，这里I是一个（$m\times m$）维单位矩阵。因取最大值的函数不包括c，因此，式（3,3）变成

$$dv=[0-\pi(-I)]dc=\pi dc$$

这就是式（2,1）。通常把约束方程$G(x)=c$写成$G(x)-c=0$。这时拉氏表达式（1,7）可写成

$$L(x)=F(x)-\pi[G(x)-c] \qquad (3,20)$$

此式在一些理论推导中（我们将不讨论）通常是很有用的，但是真正的益处是式(2,1)和（3,3）可用一种简单的形式来陈述：最大值相对于参数的一阶导数等于在最优点计算的拉氏表达式的对应偏导数值。

习 题

3.1 给出式（3,14）和（3,15）的极限推导过程。

3.2 考虑一个生产者，他使用输入矢量x来按生产函数$y=F(x)$生产一个给定量输出y。输入的价格为w。定义其最小成本为w和y的函数，称之为成本函数$C(w,y)$。根据成本函数的导数来推导达到最低成本生产所需的因素需求量。解释该最小值问题的拉氏乘子的意义。

现在假设输出的价格为P，选择输出量使得利润最大。这时将会出现什么样的进一步条件？如果把利润函数定义为最大利润关于所有价格的函数，那么怎样从这个函数推得输出的生产供给曲线？

3.3 对于习题1,3的第二种情况，证明间接效用函数为

$$V(p,q,m)=\alpha\log\alpha+\beta\log\beta-(\alpha+\beta)\log(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)\log m-\alpha\log p-\beta\log q$$

对于例1,2,则为

$$V(p,q,m)=m(\alpha^{\sigma}p^{-\sigma_\varepsilon}+\beta^{\sigma}q^{-\sigma_\varepsilon})^{1/(\sigma_\varepsilon)}$$

对每一种情况，找出对应的支出函数。通过适当地改变记号，把这些表达式推广到n个选择变量的情形。

3.4 对于生产函数

$$y=Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$$

证明成本函数为

$$C(w,y)=r(y/A)^{1/r}\left(\frac{w_1}{\alpha_1}\right)^{\alpha_1/r}\cdots$$

$\cdot\left(\frac{w_s}{\alpha_s}\right)^{\alpha_s/r}$

式中$r=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j$。如果$r<1$，计算对应的利润函数。如果$r=1$，即在生产中是比例固定收益，将会出现什么样的错误？

参考文献

1. VINER, J. 'Cost Curves and Supply Curves', reprinted in Readings in Price Theory, (eds. G. J. Stigler and K. E. Boulding), Irwin, Homewood, Ill., 1952.

2. McFADDEN, D. L. 'Cost, Revenue and Profit Functions', University of California, Berkey, Working Paper, 1970.

3. DIEWERT, W. E. 'Application of duality throry', in Frontiers of Quantitative Economic, Vol. II, eds. M. D. Intriligator and D. A. Kendrik, North Holland, Amsterdam, 1974, pp. 106—71.

四　不等式约束

第二章中影子价格的讨论指出了使用等式（方程）约束的最优化理论的一个主要缺点：就是既使没有必要使用的资源也要强加使用。本章和下两章给出的方法克服了上述缺点，这样使得理论和实际的经济问题相符合得更好。另一方面，从下面的陈述中，我们也能看出这些方法的优点。在前面几章中，所有的函数都被假定对它们的自变量的导数存在。但在经济理论中经常碰到的函数不是足够光滑的。下面给出的结果对于连续函数是成立的，因此，更为一般。这就能使我们从理论的基本假设中除去可微性假设。以一种方便的近似来代替可微性假设。这种近似处理方法只有当它对实际问题不会带来很大的害处时，才能使用。

最后要指出的一点是，我们在这里所需的数学知识是简单的解析几何——特别是直线和平面方程。这一点很重要，因为进行乘、加和比较数值的大小一定要比求微分来得简单。

首先，我们来讨论两个变量一个约束的情况。可很容易地把图1.1的图形修改成考虑不等式约束的情况，这样就得到了图4.1。在通常情况下，F和G都是x的增函数，这样选择的x可能在约束曲线上或在它的下面，如图中的阴影面积A所示。可很方便地把这个区域与不可达到或最大刚好达到标准值的点集进行比较；该点集是在通过最优选择x的指标

线上或在其之上的阴影面积B。如果上述两条曲线相交，那么最优选择可能是不唯一的，这时A和B除了点$\bar{x}$之外，还有其它的公共点；在后面我们将对这些情况进行讨论。这里必须注意的是，两个区域的任何公共点必须在这两个区域的边界上。在A中没有满足F(x)>y的点，在B中也没有使G(x)<c的点；否则，对于每一种情况，我们将能够找到一个$\bar{x}$的改进值，这样就和我们把$\bar{x}$定义为最优的结论相矛值。

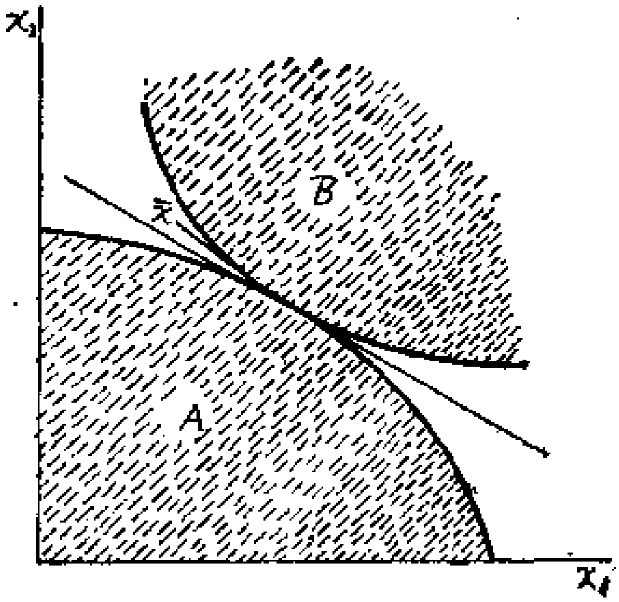

图 4.1

我们已经以一种直观的几何方法使用了术语“边界”，这对于我们的大部分工作够用了。但是，这样定义可能会产生一些错觉，因此，需要严格定义。如果某集合中的一个点，在一定的范围内都由该集合中的点所包围，那么这个点称为该集合的内点。这样在集合φ中的点S将是一个内点，如果有一个正数r使得在离S为r距离内空间的所有点也都在φ中。在平面上，这些点形成了以S为中心r为半径的圆面。另一方面，一个既不是φ的内点，也不是该空间其余部分的内点的点称为φ的边界点。这样，S将是φ的一个边界点，如果在以S为中心的r范围内即能找到不在φ内的点，也能找

到在φ内的点。任何满足$F(x)>F(\bar{x})=v$的点x将是集合B的一个内点，只要F是连续的；同样，满足$G(x)<c$的任何x将是A的一个内点，只要G是连续的。这种最小值假定规则在下面将一直延用。进一步说，只要F和G是连续的，并且集合A是有界的，那么可以严格地证明：在约束$G(x)\leqslant c$下，$F(x)$的最大值问题的解存在。除了第十章和第十一章之外，其它地方不再考虑解的存在性问题。

边际转换率为零的一般性假定是要求集合A是凸的，即给定该集合中的任意两点，连接这两点的直线弦的全部应该也在该集合中。令该两点的矢量坐标分别为x和x′。那么，象它们的中点$(x+x')/2$一样，连接两点的直线弦上的全部点可用$[\delta x+(1-\delta)x']$给出；这里δ的变化域为$0\leqslant\delta\leqslant1$。这就能使我们根据解析几何定义一个凸集合，以便于以后使用。

同样，边际替换率为零的假设对应于集合B为凸的情况。如果做了如上两个假定，结果如图4.1所示，这时两个集合分别处在$\bar{x}$点的公共切线的每一侧。假定该切线的方程为

$$\theta_1 x_1+\theta_2 x_2=d \tag{4.1}$$

因为该方程是有意义的，所以θ_1和θ_2不可能同时为零，并且对于通过$\bar{x}$的线，必须有

$$\theta_1\bar{x}_1+\theta_2\bar{x}_2=d \tag{4.2}$$

对于该线一边的所有点，式(4.1)表示的值将大于d值，而对于另一边的点，将小于d值。如果我们用相同的非零数乘于上述方程的两边，直线将不会改变，这样，我们可选择该乘数符号使得

$$\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \begin{cases} \leqslant d & \text{对于A中的所有x} \\ \geqslant d & \text{对于B中的所有x} \end{cases}$$

如图4.1所示，这时的θ_1，θ_2和d都是正的。不久我们就会搞清楚这种情况的经济学意义。

可很容易地把上述结果推广到一般的情况。在一个任意维的空间中，给定仅有公共边界点的两个凸集合，我们可找到一个超平面使得这两个集合分别处在这个超平面的两侧，或者说，这个超平面把上两个集合分开。一个超平面可用线性方程 $\theta x = d$ 来表示，这里 θ 是一个非零列矢量。这样对于上两个集合中的一个集合的所有点，将有$\theta x \leqslant d$；对于另一个集合，则有$\theta x \geqslant d$。从几何上看，这是相当明显的。这个问题留给读者通过画几何图形来证实，这里将不给出证明过程。然而，还有一个稍微复杂的问题需要解决。平面上的直线弦是凸集合，而且这个集合没有内点，因为围绕此集合中的任一点的任何园面都包括不在这条直线上的点。因此，这个集合中的所有点都是边界点。现在有两条互相相交的直线弦，这两个弦是仅有公共边界点的凸集合，但是，不可能用一条线来分开这两个集合。困难是很明显的，就是两个集合都有空内点。对此我们无需担扰，因为我们以后碰到的所有集合都具有非空内点。但在更进一步的工作中，这个问题可能变得很严重，特别是在无限维的情况下。这样，既使会有更一般的结果存在，我们还可使用下述定理：

分离定理：如果A和B是两个没有公共内点的凸集合，并且如果两个集合中至少有一个具有非空内点，那么我们可找到一个非零列矢量θ和一个数d使得

$$\theta x \begin{cases} \leqslant d & \text{对于A中的所有 } x \\ \geqslant d & \text{对于B中的所有 } x \end{cases} \qquad (4.4)$$

在标准的最大值问题中，$d=\theta\bar{x}$，式中$\bar{x}$是最优选择。这时分离定理可意译为

(a)$\bar{x}$使$\theta\bar{x}$对于A中的所有点x取最大值

(b)$\bar{x}$使$\theta\bar{x}$对于B中的所有点x取最小值

这个双重结果就是边际转换和替换率为零假设的结果，而且这也就是该假设对于分离假定的经济重要性所在。因为采用该假设，就能使人们有可能进行离散经济决策。为了解释简单起见，以下例来进行说明：在仅有一个消费者的经济问题中，生产货物x使得效用F(x)在约束G(x)⩽c下取最大值。通过求解，我们不仅能得到$\bar{x}$，而且也能得到公共切线的方程。现假定θ是上述货物的价格矢量。这时上述结果(a)说明最优量$\bar{x}$是由一个使输出值最大的企业家所生产；而(b)说明$\bar{x}$也是由一个消费者用最小的支出来达到效用F(x)所需要的量。如果我们忽略当货物自由选取时所引起的某些技术复杂因素，那么上述问题就等同于在预算约束$\theta x \leqslant d$下求效用的最大值。这种离散化的决策有两个优点。一个优点是可提供信息：就是生产者无需知道任何有关消费者感兴趣的东西；消费者也无须知道任何有关生产技术的东西。对于每一方，和另一方相联系的信息由价格适当地概括进去。另一个优点是和刺激相联系的：上述过程取决于每一方自身的利益，这样就能保证最优的有效补偿。

为了把上述结果推广到多个生产者和多个消费者的情况，我们得需要做进一步的假设。特别是外部事物的影响因

素和收入分布问题必须是，或者不存在或者在该过程中能够有效地解决。但是，既使做了这些假定，还有一个重要的问题存在。这个问题就是最优量$\bar{x}$和价格θ的计算基本上是一样的，而且两种方法形式上也是等同的。这样，如果在价格计算中需要知道有关资源、技术以及消费者的兴趣等方面的详细情况（这些情况中的大部分是和自身利益的需求有关的，这种需求一般是不定的），则所得到的信息将会是不准确的。

集中和离散计划的相对优缺点的问题是一个非常活跃的研究领域。一种研究学派是计算两个过程的信息流，这样所得到的理论比较难。另一种学派是研究是否能在不详细地求解整个最优化问题的条件下，求得最优价格的合理近似值。还有一些重要的特殊情况，例如小规模的开放经济问题，就可做如上近似，然而，一般的结果是很难得到的，并且，要通过市场本身的动态过程来找到上述近似解，将会碰到一些十分困难的问题。最后需要指出的是，不定性的实际特性给由数量决定的计划和由价格决定的计划带来差别。对此感兴趣的读者，可阅读一些更加深入的书。

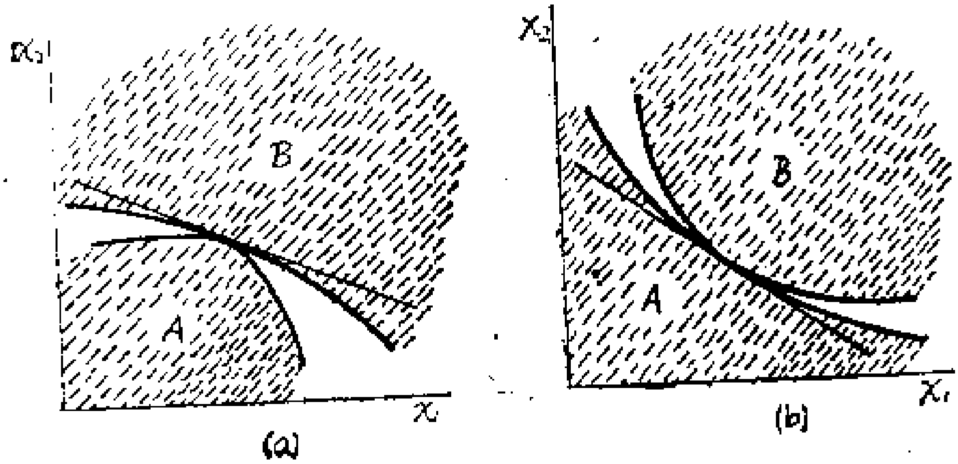

图 4.2

如果我们不假定A和B两者都是凸的，那么就不可能进行整个离散过程。图4.2对此进行了说明。图(a)，B不是凸的，$\bar{x}$不能使θx在B中取最小值。图(b)，A不是凸的，$\bar{x}$不能使θx在A中取最大值。(b)这种情况是更常见的，主要起因于生产中的增加利润。在这种情况下，边际利润和成本必须通过检查离散选择是否完全用来生产来得到补充。这就要求我们检查消费者的盈余以及有关的概念。

下一步我们必须找到当集合B和A都是凸集合时，F和G所需要满足的条件。因为B是定义为满足$F(x)\geqslant v$的点x的集合，所以函数F应该满足：对于点x和点x'，当有$F(x)\geqslant v$和$F(x')\geqslant v$时，必有一个数δ满足$0\leqslant\delta\leqslant 1$，使得$F(\delta x+(1-\delta)x')\geqslant v$。当然，我们不能事先知道v，因此，我们应该在开始时就把这个条件变成对于所有v的条件。一个函数F，如果在其定义域内的所有点x和x'，和在它的值域内的所有v，以及满足$0\leqslant\delta\leqslant 1$的所有的数$\delta$，能从不等式$F(x)\geqslant v$和不等式$F(x')\geqslant v$推得$F(\delta x+(1-\delta)x')\geqslant v$，那么这个函数称为准凹函数。这个名字可能初听起来有点奇怪，但在下章中将会明白为什么这样命名的理由。

同样，当$G(x)\leqslant c$，$G(x')\leqslant c$和$0\leqslant\delta\leqslant 1$，对于集合A，也应有$G(\delta x+(1-\delta)x')\leqslant c$。我们事先知道c，但是在处理比较静态经济学问题时，我们更喜欢用不同的c值进行偿试。因此，我们应该把上述条件变成对于所有c的条件，满足这样的条件的函数称为准凸函数。这时，我们就可根据所定义的上述两个集合的函数性质来把前面的结果陈述为

如果$\bar{x}$使$F(x)$在约束$G(x)\leqslant c$下取最大值，这里F是一个准凹函数，G是准凸函数，那么有一个列矢量$\theta\neq 0$存在，

使得

(a)$\bar{x}$使θx在$G(x)\leqslant c$下取最大值，以及

(b)$\bar{x}$使θx在$F(x)\geqslant F(\bar{x})$下取最小值。

对于几个约束的推广也是很直接的。满足$G^i(x)\leqslant c_i$的点的集合A_i将是凸的，如果G^i是准凸的。如果这个关系对于所有的i都成立，那么满足所有约束的点集合A（这里是集合A_i的交集）本身就是凸的；这可从凸集合的定义很容易地得到验证。

我们可把所有的约束写成矢量形式$G(x)\leqslant c$，式中对于矢量的不等号$\leqslant$，实际上就是各个分量的不等号。在后面还将使用其它类型的矢量不等式。上面的弱不等式并没有排除所有分量都相等的特殊情况。如果要排除这种情况，使得最少有一个分量不等式严格地满足($<$)，那么我们将用记号$<$来表示这种矢量不等式。如果要求所有的分量不等式都严格满足（$<$），就用$\ll$来表示。反过来，同样有，$\geqslant$是对每个分量的弱不等式，$>$是至少有一个分量严格满足的不等式，$\gg$是对于所有分量都严格满足的不等式。

使用不等式约束的另一个优点是不再需要限制约束的条件数至少等于选择变量数。选择变量的可行集合既使在具有更多的约束下也可能是非平凡的。图4.3给出了这方面的两个例子。情况（a）有两个约束，根据标准函数的等值线的斜率，最优可能在两个约束的交点，或在任意一边，在这里两个约束中必有一个是严格的不等式约束。这就解释了为什么需要留下一部分资源不同的缘由。情况（b）有三个约束。一般情况下，三个约束不可能交于一点，因此，就需要三者中至少有一个约束是不受限制的。哪一个约束为严格的不等式

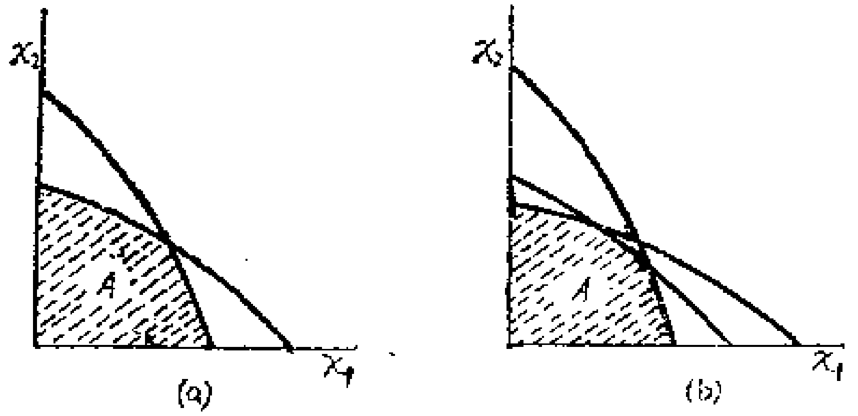

图 4.3

约束取决于所选择的标准函数。如果最优在三个约束之一上，那么其余的两个约束将是不受限制的。在线性规划理论中，F和G都是线性函数，这样就能对上述不限制约束的个数做出更明确的解释。

在上述讨论中，我们仅要求A和B是凸的。它们的边界无需是光滑曲线，可能还会有纽节或平直线存在。这就会出现象图4.4中画出的一些可能情况。情况（a），两个拐角恰好在最优点相遇。这时我们可找到许多条通过$\bar{x}$的线来分离两个集合A和B，即θ不是唯一的。在通常的意义下，这些直线都不是公共切线，但是，从该问题的经济学方面看，这是无关紧要的。离散化仅取决于离散的性质，即两个集合处在线$\theta x = d$的每一侧。因此，离散就是公共切线概念的推广，这也就是我们为什么忽略F和G的可微性要求的理由。情况（b），两个集合有一个公共直线段。对此我们不需过分担扰，因为对最优选择的所有可选量沿着这个公共段必须有相同的F(x)值，而这个值才是我们感兴趣的。然而，对于离

散化，还有一个问题。给定θ以后，在A的平直线上的所有点将会对生产者产生等值的输出，在B上的所有点对于消费者将产生同样的效用。从这个意义上讲，选择是任意的，并且也没有理由说明为什么独立的选择应该重合。我们仅能提供一个不太充分的理由，就是如果两个选择变量碰巧重合，这两个量都没有能力来改变它们的值。在有关经济平衡理论的详细说明中都是这样说的。

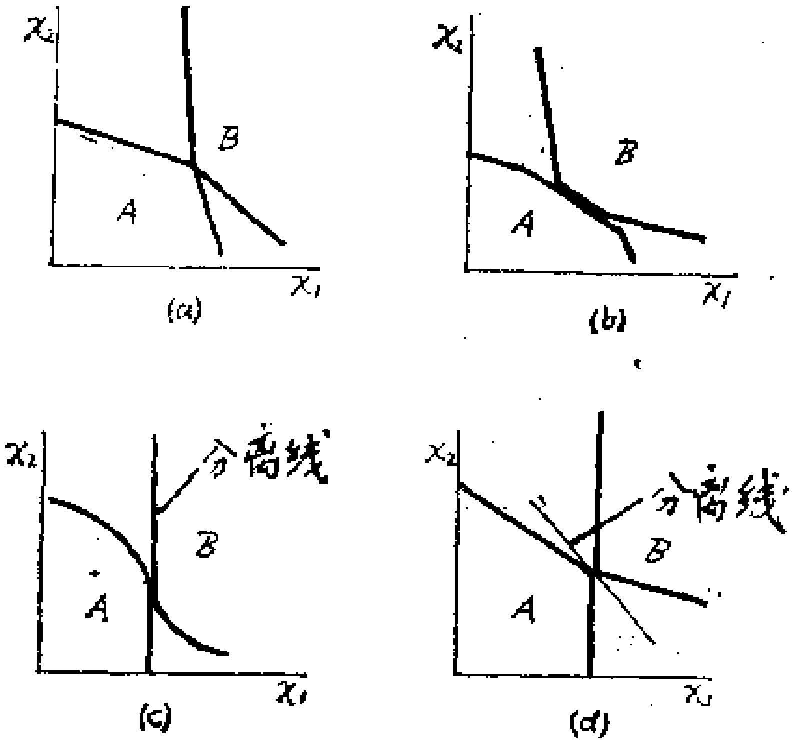

图 4.4

如果两个边界在最优时具有相同的垂直部分，则可能有一条$\theta_2=0$的垂直分离线，这就是图中情况（c）。然而，在情况（d），既使边界在最优点具有相同的垂直部分，也可能没有垂直分离线。同样，对于水平部分，也可能产生$\theta_1=0$的情况。这就表明：不用做更严格的假定，是不可能保证价格是严格为正的。事实上，如果边界在最优点朝上倾

斜，那么公切线的斜率将为正，于是其中之一价格为负。这种情况常通过做如下之一假定来排除：（a）两种货物可自由地进行搭配，这时A的边界不可能朝上倾斜；（b）两种货物都是所需求的，这样B的边界不可能朝上倾斜。在图4.4的说明图中都隐含着上述假设。

最后，我们还应注意到：如果我们用同样的正数乘以列向量θ和有关的数（如d），则对该问题的经济本质毫无影响。或者换成另一种说法：仅相对价格 θ_1/θ_2 才是我们所关心的。当然，当有光滑的曲线存在时，相对价格等于在最优点的边际转换和替换率两者中的较小值，并且根据离散的概念，这些价格提供了一些适当的概括性结果。

本章已经引入了一些有关的处理不等式约束的基本数学概念，并且也给出了对于定义和解释附随于输出或选择变量本身的价格的分析。在下章中，将用这些概念来得到附随于资源约束的影子价格。

例　　题

例 4.1 为了举例说明分离过程，考虑如下的简单情况：

$$F(x,y)=xy,\qquad G(x,y)=x^2+y^2$$

要求x、y为非负值，考虑由 $G(x,y)\leqslant 25$ 定义的集合A和由 $F(x,y)\geqslant v$，对于各种v值所定义的集合 B。众所周知，A是一个四分之一园盘，B是一矩形双曲线，指向为上。两个集合都是凸的。

在图4.5中对上述情况作了说明。当 $v=16$ 时，两个集

合有公共内点，这时不能分离这两个集合。当 $v=12.5$ 时，它们仅有唯一的公共边界点（$5/\sqrt{2}$，$5/\sqrt{2}$），我们可通

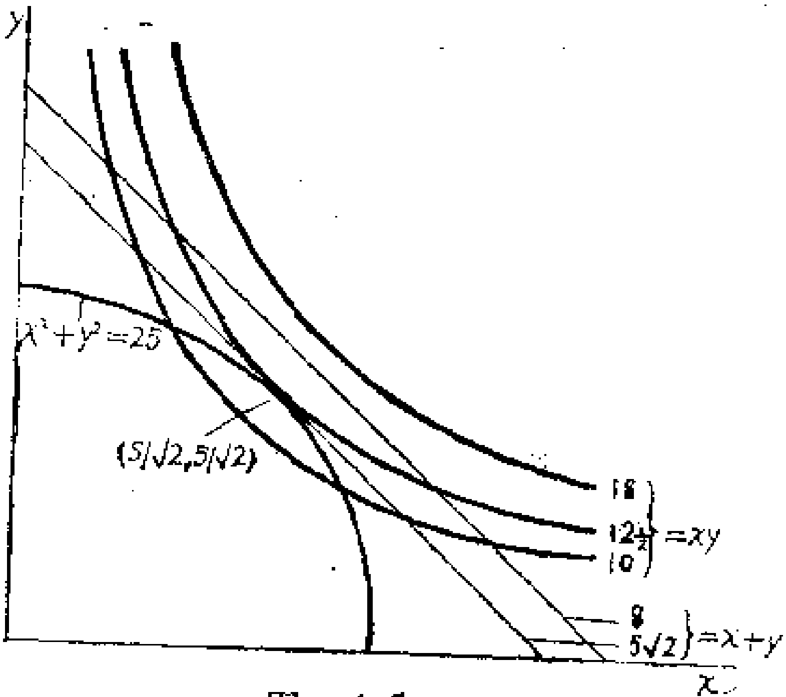

图 4.5

过选择 $\theta_1=1$，$\theta_2=2$ 和 $d=5/\sqrt{2}$ 或任何上述三个值的正数倍数的数来分离两个集合。当 v 取更大值的时，例如 $v=18$，两个集合没有公共点。这时，我们可严格地分离这两个集合，即可找到一个 θ 和 d 值使得式（4.4）的不等式严格成立。可取 $\theta_1=1$，$\theta_2=1$ 和 $d=8$ 来作为一例子加以验证。

例 4.2 为了从另一个角度来说明不等式约束的重要性，考虑效用函数为 $ax+\log y$ 的消费者问题。按前面所用的记号，可以得到

$$a=\pi p, \qquad 1/y=\pi q$$

应用预算约束，可得

$$m=px+qy=(ax+1)/\pi$$

这样

$$a=p(ax+1)/m$$

因而需求函数为

$$x = m/p - 1/a, \qquad y = p/(aq)$$

如果$m < p/a$，需求x为负。这在某些情况下可能会发生，例如，在一个允许“卖空”（Short Sales）的有价证券选择问题中就会出现这样的问题。然而，一般说来，我们将要求这些量为正。要保证为正的唯一方法是对该问题加上一个明显的约束$x \geqslant 0$。

例4.3 作为对于不等式约束的另外一种说明，考虑在两个相互之间有嫉妒心的消费者之间的分配收入问题。如果第一个人分配的收入为y_1，第二个人为y_2，他们的效用分别为

$$u_1 = y_1 - a y_2^2 \qquad u_2 = y_2 - a y_1^2$$

式中 a 是一个正常数，这样每个人从对方的收入中得到非效用。假设社会福利的标准允许这样的嫉妒存在，并且仅使效用和$u_1 + u_2$取最大值。

既使对可采用的总收入没有限制，这个最大问题也有一个有限解存在。可以很容易地验证无约束的最大值当 $y_1 = y_2 = 1/(2a)$时达到。因此，既使总收入增加$1/a$我们也不会使用它。嫉妒影响将能够变得足以吞没掉每个消费者从自己的额外收入所得到的额外效用。根据这个结果，如果 y^* 是给定的总收入，那么就应该把约束表示成$y_1 + y_2 \leqslant y^*$，约束是否是作为一个不等式成立应该在该问题的求解过程中得到答案。

习　题

4.1 怎样把本章所用的概念和分析方法应用到不等式约

束的最小值问题中？

4.2 如果我们假设排除集合A和B 有平直段边界的可能性，那么最优选择将是唯一的。检验为了达到此目的，怎样来加强准凹性和准凸性的定义？

4.3 在下列情况下，图4.1会变成怎样的：(a)选择变量之一为劳动，这对于消费者是非效用，对生产是一份输入；(b)选择变量之一是污染，这对于消费者也是非效用，而且是某种货物生产的副产品，这时另一个选择变量是什么？解释上述每种情况的“伴随价格”（associated prices）

参考文献

1. WEITZMAN, M.L.'Prices vs. Quantities', Review of Economic Studies, XLI(4), October 1974, pp.477-91.

五 凹性规划

第二章的分析表明：拉氏乘子计量了约束和目的值之间的某种权衡关系。为了把这个方法推广到不等式约束的情况，我们必须用同前面一样的方法来考查这种权衡关系，并用解析几何语言来表述。

象一些和价格有关的情况一样，如果这种权衡带来了利润增加，那么就会出现新问题。为了避免这种情况发生，至少在开始时，我们将对F和G做比前面几章更为严格的限制。与消费理论相比较，这里对F的假设为，不仅边际替换率为零，而且边际效用也趋于零。

对于一个以标量为变量的函数，边际效用为零的条件是二阶导数小于零。这个结论可用矩阵推广到矢量变量的函数，但由于几何上的原因，我们将暂不考虑这个问题。我们可以从几何上表征上述标量函数，就是说连接该函数图形上的任意两点的弦将完全在这两个点之间的图形之下。代数上可表示成

$$F(\delta x+(1-\delta)x')\geqslant\delta F(x)+(1-\delta)F(x') \quad (5,\ 1)$$

该式对于F的定义域内的所有x'和x以及对于满足$0\leqslant\delta\leqslant1$的所有$\delta$都成立。具有这种性质的函数称为凹函数。当然，也包括直线的特殊情况，这种情况可通过要求不等式对$0<\delta<1$严格成立来排除，不包括直线的函数称为严格凹函数。

凹性要求比准凹性强，即每个凹函数是准凹函数，但是

反过来不成立。这事实上就是引入准凹术语的理由，要不这个术语一定看起来有点陌生。

假定F是一个凹函数，并且对于某个标量v，$F(x)$和$F(x')$都$\geqslant v$。这样，使用式(5，1)，可得到

$$F(\delta x+(1-\delta)x')\geqslant\delta v+(1-\delta)v=v。$$

这就证明了凹一定是准凹的。为了证明反过来不成立，我们仅需要记住零边际效用和零边际替换率之间的差别；例如，可容易地验证$F(x_1, x_2)=x_1x_2$是准凹的，但不是凹的。

凹函数的另外两个等价特性在后面将是很有用的。第一个是，在凹函数图形上和在该图形下面的点集合是一个凹集合，即如果(x, y)和(x', y')使得$y\leqslant F(x)$，$y'\leqslant F(x')$，那么对于$0\leqslant\delta\leqslant1$，则有

$$\delta y+(1-\delta)y'\leqslant F(\delta x+(1-\delta)x')$$

这可从式(5,1)立即得到。第二个是，把上述不等式写成

$$[F(x'+\delta(x-x'))-F(x')]/\delta\geqslant F(x)-F(x')$$

现在让δ趋于零。只要F是可微的，那么可以证明上式左边项趋于$F_x(x')(x-x')$，这是应用点x'的切线来对曲线进行近似求得的F的线性近似。因此，可以得到

$$F(x)-F(x')\leqslant F_x(x')(x-x') \qquad (5,2)$$

换言之，一个凹函数在任意点的改变量用它在该点的切线来计算偏大，即曲线的所有切线都在曲线之上。对于一个以标量为变量的函数，可以容易看到上述特性的等价性。不久我们将会碰到把式(5,2)推广到不可微函数的情况。

同样，如果对于在函数G的定义域内的所有点x，x'和满足$0\leqslant\delta\leqslant1$的所有$\delta$，有

$$G(\delta x+(1-\delta)x')\leqslant\delta G(x)+(1-\delta)G(x') \quad (5,3)$$

那么就称满足这个关系式的函数G为凸函数，并且当上述不等式对于$0<\delta<1$严格满足时，称G为严格凸函数。在凸函数的图形上和在这个图形上方的点的集合称为凸集合。而且用线性近似来估计这种函数的增量将会偏低。如果一个矢量函数的每个分量函数都是凸函数，那么这个矢量函数也是凸函数。本章我们将假定标准函数是凹的。矢量约束函数是凸的；这种问题就是凹性规划问题。

现在我们来讨论拉氏乘子。在所有的论证过程中，我们将用生产例子来做为具体说明的例子，该例中，x为输出量，c为可利用的资源。对于标准函数，我们不做特殊说明，将以一般的形式给出其值。

考虑这个问题的标准形式；即在约束$G(x)\leqslant c$下求$F(x)$的最大值。而且最大值是c的函数，记为$V(c)$。这正好就是表示资源和价值之值的权衡关系的函数，因此，在下面的讨论中它将是一个很重要的概念。这里我们很想立即指出该函数的编导数就是拉氏乘子，但是为了找到一些中间问题，我们得一步一步地来。

下述论证所依赖的一个重要的一般结论是：如果F是凹的，G是凸的，那么V就是凹的。对此结论的证明就是一个直接的验证过程，但是这种类型的证明过程是常常要碰到的，而且其证明的步骤和经济学有一定的联系。因此，有必要详细地给出证明过程。

令c和c'是任意两种资源的可用量，并且假定它们对应价值$v=V(c')$和$v'=V(c')$是分别在$\bar{x}$和$\bar{x}'$得到的。因为最优选择量必须是可行的，所以应有$G(\bar{x})\leqslant c$和$G(\bar{x}')\leqslant c'$。现在

令δ是一个满足$0 \leqslant \delta \leqslant 1$的任意数，要问是否当资源为$\delta c+(1-\delta)c'$时，对应的价值至少能够达到$\delta V(c)+(1-\delta)V(c')$，这样就证明了V的凹性。很自然，可取所试的输出矢量为$\delta\bar{x}+(1-\delta)\bar{x}'$。要检查的第一点是看这个值是否是可行的。根据G的凸性，我们有

$$G(\delta\bar{x}+(1-\delta)\bar{x}') \leqslant \delta G(\bar{x})+(1-\delta)G(\bar{x}') \leqslant \delta c+(1-\delta)c'$$

这就证明了可行性。其次要找到其价值。使用F的凹性，我们有

$$F(\delta\bar{x}+(1-\delta)\bar{x}') \geqslant \delta F(\bar{x})+(1-\delta)F(\bar{x}')=\delta V(c)+(1-\delta)V(c')$$

由于我们已经找到了一个可行矢量，它所产生的价值至少和上式最右边的值一样大，这样最大值$V(\delta c+(1-\delta)c')$不可能再比上式最右边的值小。这就是我们所要证明的结论。

上述结论所隐含的经济意义是，G的凸性排除了增加利润，这样保证了在给定一定的加权平均资源时，能够生产出相同的加权平均输出，这样，F的凹性在于它至少能产生相等的加权平均价值。

当v是一个凹函数时，在这条曲线图形上或在该图形下面的点的集合是一个凸集合。这个集合A就是满足$v \leqslant V(c)$的点(c, v)的集合，即使用不多于c的资源至少可生产v的价值。因此，可自然地把这个集合想象为价值生产可能性集合。很清楚，一旦给定A中的任意一点，那么在该点的东南方的所有点都在A内（等价地说，F是一个单调非减函数）。这是因为我们已经把约束写成了这样的形式，使得c

的增加加宽了选择域。当m是约束的个数时，该集合的维数为(m+1)。图5,1给出了m=1时的图形。我们可以看到V是一个凹增函数对应于生产价值时的正的但趋于零的边际资源利润。

凸集合意味着它可以从其它的凸集合中分离出来。为了以最简单的方法对此进行说明，在A中选择一个点(c^*, v^*)使得$v^*=V(c^*)$。该点必须是一个边界点，因为对于任意正数r，点(c^*, v^*-r)在A中，而点(c^*,v^*+r)不在A中。现在令B是满足$c\leqslant c^*$,$v\geqslant v^*$的所有点(c,v)的集合，即当$c=c^*$和$v=v^*$时，价值v是不可能通过节约资源c来达到。这样，集合B所对应的函数也应和第四章的对应集合的函数一样。

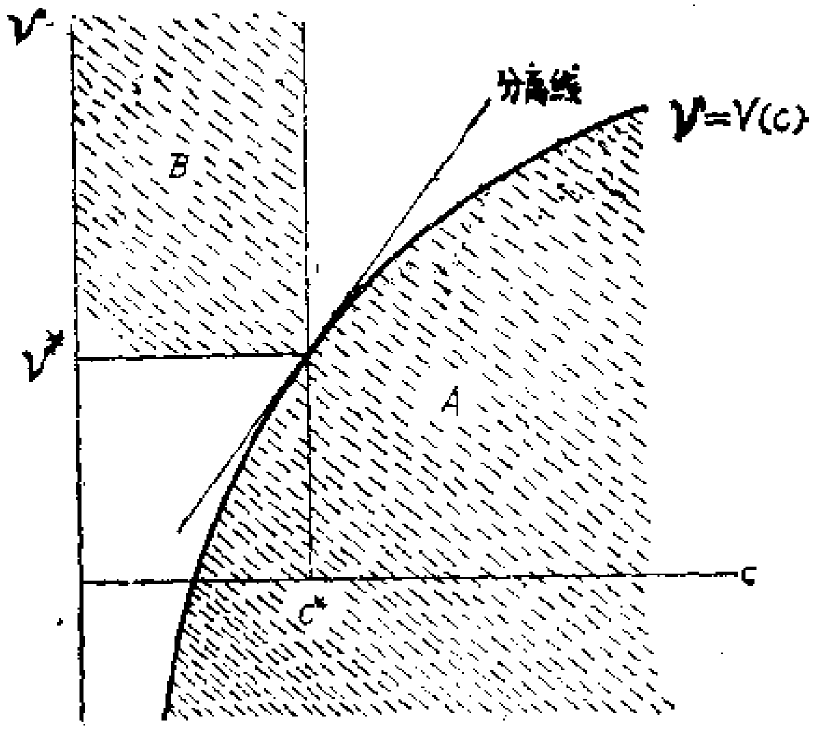

图 5.1

很清楚，B是一个具有非空内点的凸集合，并且A和B仅有公共边界点，这样就可使用分离定理。由于一些显见的原因

（稍后就能看到），可以把分离超平面的方程写成如下的形式

$$iv-\pi c=d=iv^*-\pi c^*$$

按排正负号，使得

$$iv-\pi c\begin{cases}\leqslant d\text{对于A中的所有}(c,\ v)\\ \geqslant d\text{对于B中的所有}(c,\ v)\end{cases}\qquad(5,4)$$

首先应该注意的是：数i和列矢量π必须都是非负的。例如，假设i为负，来考虑点$(c^*,\ v^*+1)$，显见这个点在B中，因此则有

$$i(v^*+1)-\pi c^*<iv^*-\pi c^*=d$$

这和分离性质相矛盾。同样，来考虑点$(c^*-e_i,\ v^*)$，这里e_i是一个矢量，它的第i个分量为1，其余分量都为零。我们可以发现，对于每个i，π_i必须都是非负的。

其次来看$(c^*,\ v^*)$使$(iv-\pi c)$在A中取最大值的问题。对此将有一个很重要的解释。考虑一个假想的生产者，他用输入材料来加工标准价值。如果每单位价值的价格为i，对于输入c的使用所付费用为π，那么生产计划$(c,\ v)$使他得到的利润为$iv-\pi c$。这时，$(c^*,\ v^*)$将是在所有可想象到的计划（即集合A)中使他的利润最大的一种选择。很可能在资源的利用方面对c^*有一个总的限制，但是这对生产者是无需考虑的，因为生产者是不愿意强行破坏这种限制的。上述解释是特殊的，但是其原理是一般的和重要的；就是如果适当的约束空白价值或影子价值能从标准函数中净赚，那么约束选择可转化为无约束选择。对于经济学家来说，这是拉氏方法在凹性规划中最重要的特性。

这里我们所关心的还是相对价格，而且如果我们用任何正数乘以i，π和d，将对问题毫无影响。这也就会出现一种使人感兴趣的情况：如果我们选择边际价值本身为钞票，这样$i=1$，那么资源价格π将变成了第二章中拉氏乘子的直接延伸。但是。在选择钞票之前，我们必须保证对应的货物不能自由选择，而且到目前为止还没有办法能够保证$i>0$。整个矢量（i，π）不可能为零，但这还是不够的。

现在我们来看当$i=0$时，将会出现什么情况。这时至少有一个π的分量不为零，即为正。分离超平面的方程这时变为$-\pi c=-\pi c^*$，即$\pi(c-c^*)=0$。对于A中的所有(c，v)，则有$-\pi c\leqslant-\pi c^*$，即$\pi(c-c^*)\geqslant0$。在一个约束的情况下，这就意味着起平面在c^*处是垂直的，并且整个集合A在该平面的右侧。这就是说：如果可采用的资源少于c^*，那么以在F的定义域中的水准来进行生产是不可能的。这种情况通常是由不可分性造成的。

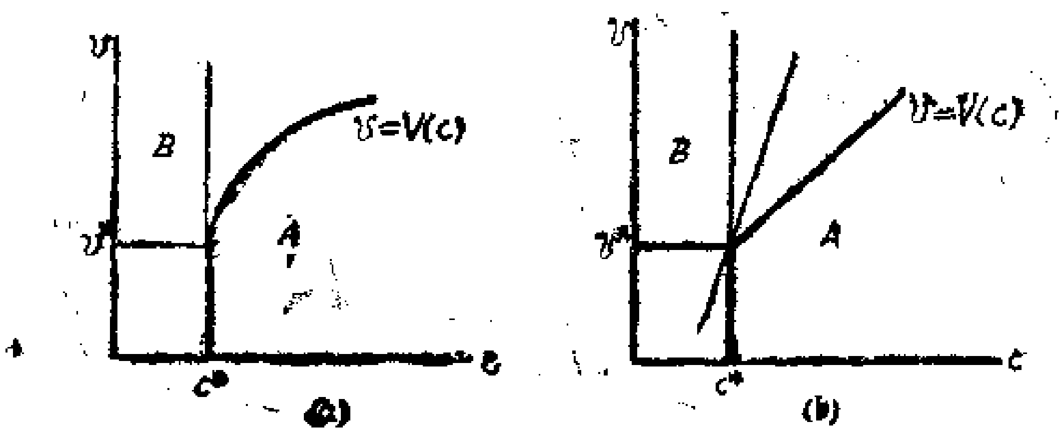

图5.2

图5，2给出了这方面的两个例子。在图（a）中，资源的

边际产品在c^*点是无限大，然后逐渐下降；这样仅有一条分离线。在图（b）中，情况有点不同，当有一条垂直分离线存在时，也可能找到几条有限斜率的分离线，这样，i为正。这就证明了下面给出的保证上述条件成立的条件是充分的，不是必要的。

不可分性概念为我们寻找一个自然条件提供了线索。如果集合A的所有点都在c^*的左边，那么它的边界在(c^*, v^*)处不可能有无限大的斜率。如果这个条件满足，那么必有一个x^0使得$G(x^0)<c$，因为这时我们可以选择$(G(x^0), F(x^0))$作为所需求的点。如果有几个约束，我们必须对每个约束做上述假定，即有一个x^0使得$G(x^0) \ll c$。这个条件称为约束限定（constraint qualification）。我们也可以使用一个比上述条件弱得多的条件，来得到一个较强的结果。但是该证明过程是相当复杂的，所以最好把这方面的内容留到更进一步的工作中去。

可以容易地从形式上证明约束限定保证了一个正的i存在。否则，至少会有一个π的分量为正。这时$G(x^0)-c<0$。因此，如果我们用π的分量乘以$G(x^0)-c$的分量，所得到的乘积都为负，并且至少有一个乘积一定是负的。把这些乘积相加，得到$\pi(G(x^0)-c)<0$。然而，点$(G(x^0), F(x^0))$是在A中的，并且由分离性质，我们可有$-\pi G(x^0) \leqslant -\pi c$，即$\pi(G(x^0)-c) \geqslant 0$。这种矛盾说明假定$i=0$是错误的，从而也就证明了前述结论。

从现在起，我们将假定约束限定是能够满足的，并且把它标准化为$i=1$。

对于任意c，点$(c, V(c))$在A中。因此，根据分离性

质，我们可有$V(c)-\pi c \leqslant V(c^*)-\pi c^*$或者

$$V(c)-V(c^*)\leqslant \pi(c-c^*) \qquad (5,5)$$

这样，右边的线性函数高估了V的改变量。这个式看起来很象式(5,2)，这样更加使我们深信π是和$V_c(c^*)$紧密相关的，这里$V_c(c^*)$是V在初始点c^*的偏导数矢量。但是还存在一个困难：就是我们不能确信V是否可微。本章到此为止，我们还未假设F和G是可微的。但是，即使它们是可微的，V也可能不可微。这是因为不同的不等式约束对于不同的参数值可能会变成严格的等式约束，而且从一个域移到另一个域中时，V的斜率可能会突然变化。考查下述情况，这时某种资源正好处在变得多余的边际点。这种资源的任何增加量都将变得无用，这样V的右偏导数为零。可用量有微小减少时的情况依赖于是否该多余点是随资源的边际产品的光滑减少而达到的。如果是这样的话，资源可用量的微小减少将会引起价值的二阶小量损失，并且左偏导数也将为零。如果在达到这点之前，边际产品保持为某一正值，那么这时左偏导数必将为正，并且在这个值和零之间的任何乘子值对于分离都是适用的。这在线性规划中，是常常出现的，在线性规划中，边际产品是常数，这是由于在约束不成立之前线性关系都是成立的。

既使当上述不连续性存在时，也可很自然地推广利润趋于零的概念。左偏导数决不会小于右偏导数，这就是说资源的第k个分量的边际产品不可能超过第(k－1)个分量的边际产品。这是V的凹性的一个简单结果，V的凹性在经济学中确实是一个很重要的性质。

我们已用星号来表示(c，v)空间中的分离点，现在我们去掉这些星号，并来考虑一个具有乘子π的点(c，V(c))，

把这个点与邻近点（$c+he_i$），$V(c+he_i)$）相比较，这里h是一个数，e_i是一矢量，它的第i个分量等于1，其余为零。象式（5.5）一样，我们可有

$$V(c+he_i)-V(c)\leqslant h\pi_i$$

如果h是正的，用它来除上式，得到

$$[V(c+he_i)-V(c)]/h\leqslant\pi_i.$$

可容易地证明：当V是一个凹函数时，这个式子的左边是h的单调减函数，因此，当h趋于零时，必有极限存在。这个极限就是右偏导数，由$V_i(c)_+$表示。这样，我们就证明了$V_i(c)_+\leqslant\pi_i$。如果h为负，用它除上式，不等式变号，同样可定义一个左偏导数$V_i(c)_-$，并且$V_i(c)_-\geqslant\pi_i$。这样，我们就得到了推广利润为零概念和把乘子与上述导数联系起来的最终结果

$$V_i(c)_-\geqslant\pi_i\geqslant V_i(c)_+ \tag{5,6}$$

本章我们已经根据最大值函数对乘子做了必要的解释。下章将要根据选择变量x来考虑乘子所隐含的意义，以对乘子做完整的解释。届时将会明确地给出一些有关的结果，并且还要对一些应用进行讨论。

例　题

例5.1　为了对约束限定进行说明，我们来考查如下的著名最优化问题：在约束$G(x,y)=(x+y-1)^3<0$下求$F(x,y)=xy$的最大值。上述约束是有效的，并且根据乘子我们可把必要条件写成

$$y-3\pi(x+y-1)^2=0$$

$$x-3\pi(x+y-1)^2=0$$

但是当约束为$(x+y-1)^3=0$时，$(x+y-1)^2=0$这样从上述条件可得$x=y=0$。然而这又和约束相矛盾。

反过来，假定我们使用上述条件得到$x=y$，然而再使用约束条件得到$x=y=\frac{1}{2}$。这个结果事实上才是正确的。然而，这时上述条件又变成了$\frac{1}{2}-\pi 0=0$，这种情况只有在π为无限大时才有可能。因为仅相对价格是我们所关心的，那么无穷大的π，根据前面的记号，就意味着$i=0$，这样约束限定不能满足。不幸的是，我们不可能对此进行直接检验，因为我们所使用的形式对凸的G适用。

然而，我们可把该问题同第一章的条件联系起来。该条件要求至少有一个G的偏导数在最优点不为零。在目前的情况下，G的每一个偏导数都是$3(x+y-1)^2$，所以当$x=y=\frac{1}{2}$两个偏导数都为零。这时，回想起π在方程(1,5)中作为一个公共值的定义，我们就可看到为什么在这种情况下π为无穷大。

例5.2　考虑函数$F(x)=1+[1-(x-2)^2]^{\frac{1}{2}}$在$x\leqslant c$下的最大值问题。式中取了平方根的正号。函数在$(x, y)$空间的图形是一个半径为1中心在$(2, 1)$的上半园。函数的定义域为$1\leqslant x\leqslant 3$。这些都在图5.3中画出，图中还给出了对应的最大值函数$v=V(c)$。当$c<1$时，该函数无意义。当$1\leqslant c\leqslant 2$时，该函数和函数$F(x)$的变化一样。然而，当$c>2$时，该函数变为2，这样当函数$F(x)$对于$c>3$变得更小或无定

义时，函数V（c）的值为2。因此，V（c）的值当c≥2时保持为2。

这个例子不仅说明了不等式约束的必要性问题，而且也说明了约束限定问题。

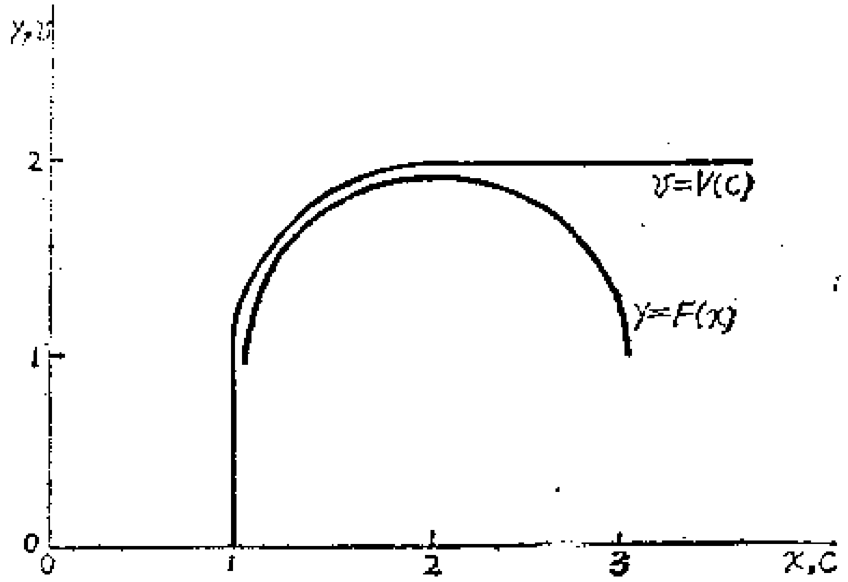

图5.3

习　题

5.1　对于有约束的最小值问题，重新推导本章的分析过程，包括对于各种函数所做的凹性和凸性条件。画出和图5.1相类似的图，并通过分离论证过程得到乘子的值。

5.2　对于使函数$F(x)=\frac{1}{2}x+\sin x$在$x\leqslant c$下取最大值的问题，画出最大值函数$v=V(c)$的图形。

(注：当画F(x)的图形时，可用关系式$\frac{d(\sin x)}{dx}=\cos x$，并且当x在120°和240之间时，$\cos x<-\frac{1}{2}$，该函数的周期为360。)

参考文献

1. GALE, D. "A Geometric Duality Theorem with Applications", Review of Economic Studies XXXIV(1), January 1967, (pp. 19—24).
2. EGGLESTON, H. G. Convexity, Cambridge University Press, Cambridge, 1963.

六、结果及应用

为了完成对凹性规划的讨论，让我们重新根据基本选择变量来对图5.1进行讨论。假定$\bar{x}$使F（x）在约束G（x）$\leqslant c$下取最大值，并且令π是从点（c，V(c)）的分离超平面推得的矢量；记住我们已经省略了星号。这时，点（F（$\bar{x}$），G（$\bar{x}$））在A中，并从分离性质式（5，4），我们可得

$$F(\bar{x})-\pi G(\bar{x})\leqslant V(c)-\pi c \qquad (6,1)$$

当然，F（$\bar{x}$）=V（c），因此

$$\pi\,[c-G(\bar{x})]\leqslant 0 \qquad (6,2)$$

这样就出现了一个问题。π的每个分量是非负的，并且由于$\bar{x}$满足约束方程，那么[c－G（$\bar{x}$）]的每个分量也是非负的。因此式（6，2）左边的矢量内积的每一项是非负的。仅有一种情况，才能使这些项的和不大于零，就是这些项的每一项都为零，从而整个内积为零。因此，对于每个，$\pi_i\,[c_i-G^i(\bar{x})]=0$，即至少两者中必有一项为零。全部结果都可按对于每个i的说明来说明，因此，我们必须有

$\pi_i\geqslant 0$，$G^i(\bar{x})\leqslant c_i$中至少有一个等式成立。（6，3）

这时式（6,1）和式（6，2）也都变成等式。

这就是第二章所说的不等式约束的重要的经济含义，因为式（6，3）指出每种资源或者全部被利用或者具有零的影

子价格。注意完全没有理由来排除对于任意的 i，$\pi_i=0$和 $G^i(\bar{x})=c_i$都同时成立的情况。当某种约束刚好要不起作用时，可能出现这种情况。式（6，3）仅能保证非用资源不可能具有正的影子价格。

当两个矢量不等式的每个分量对中至少有一个是严格的等式，即不可能把两个分量不等式松驰在一起，这时我们就说这两个矢量不等式具有补充松驰（Complementary slackness）。这样我们可重新把式（6，3）陈述为

$$\pi\geqslant 0,\ G(\bar{x})\leqslant c，具有补充松驰 \qquad (6,3)$$

其次，来考虑对于任意的x，点（F（x），G(x)）在A中这个情况。因为式（6，1）已经被证明是一个等式，所以分离性质可写成

$$F(x)-\pi G(x)\leqslant F(\bar{x})-\pi G(\bar{x}) \qquad (6,4)$$

即$\bar{x}$使F（x）$-\pi$G（x）在无约束下取最大值。这是根据基本函数对于拉氏方法的功能的另一种说明。这种说明比前面用集合A来说明要方便一些。这样，我们就以下述结论来完成对拉氏乘子特征的说明——

假定F是一个凹函数，G是一个凸矢量函数，并且存在一个x°，满足$G(x^\circ)\leqslant c$。如果$\bar{x}$使F（x）在约束$G(x)\leqslant c$下取最大值，那么存在一个列矢量$\pi\geqslant 0$，使得

(i) $\bar{x}$使F（x）$-\pi$G（x）在无约束下取最大值

(ii) $\pi\geqslant 0$，$G(\bar{x})\leqslant c$表示补充松驰。

这些结果都不要求F和G有导数存在。如果它们正好是可微的，那么对于上述结论（i）的一阶条件为

$$F_x(\bar{x}) - \pi G_x(\bar{x}) = 0 \qquad (6,\ 5)$$

这个式子看起来完全和式（1，10）相同，但是不等式约束使它们产生了差别。为了求得$\bar{x}$和π，我们必须使用式（6，5）和补充松驰条件（6，3）。式（6，3）的每一对分量给出了一个方程，而且原则上要得到足够的方程是没有困难的。但是，我们不能事先知道对于任意的i，方程是$\pi_i = 0$，还是$G^i(\bar{x}) = c_i$。我们可能要对所有的可能组合（总计有2^m个）进行逐个尝试，并对每个组合进行一致性查对，希望能找到一个真正的方程，从而排除其余的。这种方法可能是很繁琐的，但是这也就是使用不等式约束所付的代价。有了一些经验后，我们就能对许多标准经济问题辨认出哪些约束是严格的等式约束，从而就能减少需要查对的数目。这样，对于一个永不满足的消费者，很显然他的约束就是预算约束。

如果F和G是不可微的，可使用已熟悉的技术来建立起左右偏导数的不等式

$$F_x(\bar{x})_- - \pi G_x(\bar{x})_- \geqslant 0 \geqslant F_x(\bar{x})_+ - \pi G_x(\bar{x})_+ \qquad (6,\ 6)$$

这个解将更为复杂。

本章的问题与第一章不同的另一点是：第一章在推导必要条件时没有参考函数的凹性或凸性。既使在不等式约束时，也可不作凹性和凸性假定而使用分离过程来得到必要条件。这将要用到一些更特殊的数学定理，这里我们对此不进行讨论，而仅把所包括的不同之处叙述出来。首先，条件（6，5）还是成立的，而且对于取F（x）的最小值问题或者取F（x）关于某些变量的最大值和另外一些变量的最小

值问题或者更一般地说对于F的一个滞止点问题，我们将会得到和条件（6，5）完全一样的条件。条件（6,5）甚至对于局部滞止点也是成立的，即在该点，F的值与这个点小邻域内的点值相比较是滞止的。这样，式（6，5）对于一个真正的总体最大值问题是不充分的。在凹性规划中，我们不久将会看到这些条件是充分的。

其次，还需要一个不同的约束限定。最后，也就是最重要的一点是：既使$\bar{x}$是一个真正的总体最大选择，不作凹性假定，我们也不能确定它是否能使拉氏表达式取最大值；它很可能仅是拉氏表达式的一个滞止点。这个问题类似于当有不同规模的经济时确定最优输出的问题。价格和边际成本相等的一阶条件还是需要的，但是利润不需要取局部最大值。拉氏方法把有约束最大价值问题转化成无约束的最大利润问题是仅适用于凹性规划情形的。

然而，如果我们能找到一个$\bar{x}$，使得拉氏表达式最大，并具有补充松驰，那么我们就可确信这个$\bar{x}$是总体最优选择。这样，就得到了充分条件。为了证明这个结论，考虑一个可行的x，即满足$G(x) \leqslant c$的x。由于$\bar{x}$使L在无约束下取最大值，因此，我们一定能得到。

$$F(\bar{x}) - \pi G(\bar{x}) \geqslant F(x) - \pi G(x)$$

另外还需记住，对于每个i，$\pi_i \geqslant 0$。如果我们用π_i乘以$G^i(x) \leqslant c_i$，然后相加，利用矩阵的乘积，就可得到$\pi G(x) \leqslant \pi c$。然而，当把x换成$\bar{x}$时，我们则得到$G^i(\bar{x}) = c_i$或者$\pi_i = 0$，因此，对于每个i，可有$\pi_i G^i(\bar{x}) = \pi_i c_i$。把这些式子相加，得到$\pi G(\bar{x}) = \pi c$。把这个式子和式$\pi G(x) \leqslant \pi c$结合在一起，则得到

$$\pi G(\bar{x}) \geqslant \pi G(x)$$

从式 $F(\bar{x}) - \pi G(\bar{x}) \geqslant F(x) - \pi G(x)$，可得

$$F(\bar{x}) \geqslant F(x)$$

由于x是一个任意的可行选择，这样我们就证明了$\bar{x}$是总体最大选择。到此为止的证明，根本没有用到凹性。要求凹性主要是由于满足（i）的$\bar{x}$理论上是不易找到的。如果$F-\pi G$是凹的，对此只需F是凹的，G是凸的就可，这样寻找$\bar{x}$的任务可简化。这时我们仅需找到满足（6,5）式的$\bar{x}$，或者当不可微时，找到满足（6，6）式的$\bar{x}$。这样就完成了寻找$\bar{x}$的任务。例如，在可微的情况下，我们已经知道线性近似高估了凹函数的改变量，因此，则有

$$[F(x) - \pi G(x)] - [F(\bar{x}) - \pi G(\bar{x})]$$
$$\leqslant [F_x(\bar{x}) - \pi G_x(\bar{x})](x - \bar{x}) = 0$$

在更一般的情况下，可分别从左右的线性近似得到同样的结果。所有这些都可综述如下：

如果$\bar{x}$和π使得〈i〉$\bar{x}$使$F(x) - \pi G(x)$取最大值，〈ii〉$\pi \geqslant 0$，$G(x) \leqslant c$具有补充松驰，那么$\bar{x}$使$F(x)$在约束$G(x) \leqslant c$下取最大值。如果$(F - \pi G)$是一个凹函数，或者更严格地说，如果F是一个凹函数，G是一个凸函数，那么式（6，5）或式（6,6）对于上述条件〈i〉是充分的。注意在这个充分条件中没有约束限定。

在许多经济问题中，一个很自然的要求是所选择的变量应是非负的。在某些情况下，要达到最优，就得满足等式约束。在一些国际间的贸易中，生产的专门化就是这方面的一个实例。我们可使用上述结果，很容易地把这种约束考虑进去，这是因为$x \geqslant 0$可写成$-x \leqslant 0$，并且$-x$是一个凹函

数。但是通常是把这种特殊情况明显地表示出来。假设除了非负性约束外，还有约束$G(x) \leqslant c$。我们所要做的是对于约束$G(x) \leqslant c$定义一个矢量乘子π，对于约束$-x \leqslant 0$，定义另一个乘子ρ，于是必要条件变为：

假设F是一个凹函数，G是一个凸矢量函数，并且存在一个满足$G(x^\circ) << c$的x°。如果$\bar{x}$使$F(x)$在约束$G(x) \leqslant c$，$x \geqslant 0$下取最大值，那么将有一个适当维的列矢量π和ρ使得

（i）$\bar{x}$使$F(x) - \pi G(x) + \rho x$在无约束下取最大值，

（ii）$\pi \geqslant 0$，$G(\bar{x}) \leqslant c$表示补充松驰，

（iii）$\rho \geqslant 0$，$\bar{x} \geqslant 0$表示补充松驰。

如果F和G是可微的，那么结论（i）意味着

$$F_x(\bar{x}) - \pi G_x(\bar{x}) + \rho = 0 \qquad (6,7)$$

否则，我们可得到一个适当的左右不等式。这些推导过程和对应的充分条件的说明留做习题。

例　题

例6.1　非负性影响的最简单说明是，取$F(x)$对于标量变量x在唯一的约束$x \geqslant 0$下的最大值。这时，式（6，7）变成$F'(\bar{x}) = -\rho \leqslant 0$，并且根据补充松驰，$\rho$和$\bar{x}$至少有一个必须为零。这样，就得到了两种可能性，$\bar{x} = 0$和$F'(0) \leqslant 0$，或者$\bar{x} > 0$和$F'(x) = 0$。画一个简单的草图就能看到这两种可能性的意义。而且还能证明如果F是凹的，同样的

条件也是充分的。

例6.2　本章的方法可用来求解例4.2所引出的问题。假设我们要求函数$F(x, y)=ax+\log y$在约束$px+qy\leqslant m$，$x\geqslant0$和$y\geqslant0$下的最大值。为了节省篇幅，假设已知道预算约束是等式约束，这样就不需进行查对，并且约束$y\geqslant0$将不起作用；这时它的乘子值为零，因此在这里根本不需要引入它。然而，我们不能事先知道$x\geqslant0$是否起作用。令ρ为其乘子，π为预算约束的乘子，这样所得条件为

$$a-\pi p+q=0,\ 1/\bar{Y}-\pi q=0 \text{ 以及}$$

$$\rho\geqslant0,\ x\geqslant0 \text{ 具有补充松驰}$$

现在让我们对不同的可能性进行偿试。

首先，假定$\rho>0$。这时，根据补充松驰得到$\bar{x}=0$，并且从预算约束得$\bar{y}=m/q$。从第二个导数条件得到$\pi=1/(q\bar{y})=1/m$，最后从第一个条件得到

$$\rho=\pi p-a=p/m-a$$

只要$p/m-a>0$，那么$\rho>0$。

其次，假定$\bar{x}>0$。使用补充松驰，上述条件变成例4.2的条件，并且进行和那里一样的步骤，我们可以得到：只要$p/m-a<0$，一致性满足。

最后，如果$p/m=a$，这时$\bar{x}$和　都为零。上述三种情况是相互独立的和完备的（exhaustive），即只有仅有它们中的一个必须满足，因此，解是完全的。

例6.3　本章结果最重要的应用是线性规划理论。这里，我们想求如下线性函数的最大值。

$$F(x)=ax \qquad (6, 8)$$

约束条件为线性约束和非负性约束

$G_i(x)=b^i x \leqslant ei \qquad i=1, 2, \cdots m$

$x \geqslant 0 \qquad (6, 9)$

式中a和bi是n维列矢量。把bi化成m×n维矩B之后，我们可用矢量把约束方程写为

$$G(x)=Bx \leqslant c \qquad (6, 10)$$

凹性和凸性条件是满足的。如果约束不能把可行的选择降到一个维数小于n的空间中，那么约束限定也是满足的。事实上，由于图5.2所解释的各种原因，这是无关重要的。

我们可得到偏导数为$F_j(x)=a_j$，$G^i_j(x)=b^i_j$，因此，$F_x(x)=a$，$G_x(x)=B$。这时，我们可写出标准结果的必要条件。这里所用的记号将稍有不同。由于在这个问题中，常把乘子作为变量来考虑，因此，我们将用加一横来表示问题的特定值。

根据凹性，必要条件也是充分的。这些条件为

$a-\bar{\pi}B+\rho=0 \qquad (6, 11)$

$\bar{\pi} \geqslant 0$，$B\bar{x} \leqslant c$表示补充松驰（6，12）

$\bar{\rho} \geqslant 0$，$x \geqslant 0$表示补充松驰（6，13）

现在定义$\bar{y}=c-B\bar{x}$，并使用式（6，11）来表示$\bar{y}$，以及式（6，12）和（6，13）成如下的形式

$-c+B\bar{x}+\bar{y}=0 \qquad (6, 14)$

$\bar{x} \geqslant 0$，$-\bar{\pi}B \leqslant -a$表示补充松驰（6，15）

$y \geqslant 0$，$\bar{\pi} \geqslant 0$表示补充松驰（6，16）

除了列和行的交换之外，这些式子和式(6，11)—（6，13）完全等同，因此，这些式子就是下述问题的充分必要条件：该问题是选择变量π使得$-\pi c$在约束$-\pi B \leqslant -a$，$\pi \geqslant 0$

下取最大值。即取

$$\phi(\pi)=\pi c \qquad (6, 17)$$

在约束

$$\pi \geqslant 0 \qquad (6, 18)$$

和

$$r(\pi)=\pi B \geqslant 0 \qquad (6, 19)$$

下的最小值。

这时，我们会立刻看出：由方程(6, 17)，式(6, 18)和(6, 19)定义的新的线性规划问题和由式(6, 8)，(6, 9)和(6, 10)所定义的旧问题保持了非常对称的关系。习惯上称这新问题为原来问题的对偶(dual)，原问题称为原始问题(primal)。从最大值到最小值的改变，行和列的交换以及目的函数和约束方程的右边项的系数之间的交换，所有这些特性，通过检查该问题的提法，就变得清楚了。通过检查对应的最优条件，我们还可看到选择变量和乘子之间的一个更有趣的交换。原始问题的最优选择$\bar{x}$变成了对偶问题的乘子，对于π，反之亦然。而且，$\bar{y}$是表示原始问题的资源利用c和使用量$B\bar{x}$之间的差别的矢量，ρ是对于对偶问题的约束所做同样的目的而引入的一个矢量。这时我们可看到$\bar{y}$对于对偶问题的非负性约束起了一个乘子的作用，对$\bar{e}$反亦之然。

从补充松驰，我们还可得到另外一个有趣的关系，考虑条件(6, 12)。对于任意一个分量$_i$，我们或者有

$$(B\bar{x})_i=c_i，从而\pi_i(B\bar{x})i=\pi ic$$

或者有

$$\pi i=0，从而\pi i(B\bar{x})i=\pi ici=0$$

把这些关系式对i求和，可得到$\bar{\pi}B\bar{x}=\pi c$。对于式（6，15）进行同样的过程，可得到

$$a\bar{x}=\pi B\bar{x}=\bar{\pi}c \qquad (6,\ 20)$$

这样，原始问题的最大值就等于对偶问题的最小值。

上述关系也为线性规划问题的解提供了一个充分条件。这样，如果我们成功地找到了对应问题的可行选择$\bar{x}$和π，使得$a\bar{x}=\pi c$，那么每个选择对于各自的问题是最优的。对于原始问题，为了看到这一点，考虑满足式（6，9）和（6，10）的任意x。由于$\bar{\pi}$是非负的，这样我们可用$\bar{\pi}$对应分量去乘式（6，10）的每一个分量不等式，并把这些乘积相加，得到$\bar{\pi}Bx\leqslant\bar{\pi}c$。同样，由于$\bar{\pi}$满足式（6，19）式，并且$x$是非负的，因此我们得到$\bar{\pi}Bx\geqslant ax$。这样，对于任意可行的$x$，我们就有$ax\leqslant a\bar{x}$，这就是所要求的结果。同样的推理过程也可应用到对偶问题。该方法对于求解上述类型的问题是一个有用的技窍方法。

以上所讲基本上就是线性规划的对偶理论，除了一点之外。这一点就是解的存在性问题。这个问题可能存在，因为约束可能是相互不一致的，或者是因为这些约束在某方面定义了一个无界的可行集合，这样会使得目的函数在该集合上无界。这也是一个对偶问题。如果原始问题是不可行的，那么对偶问题或者是不可行的，或者是无界的，反过来也一样。如果两者（原始和对偶）都是可行的，那么两者都有最优解，并且前面的理论是成立的。我们将省略这方面的讨论。

最后，容易看到：如果我们把对偶问题作为求解的起点，通过求解该问题，我们可回到原始问题，换言之，对偶

是可“反身的”（reflexive）。

关于$\bar{\rho}$的解释是一个很重要的经济问题。如在对生产问题的一般解释中，当$\bar{x}$是最优输出指标，$\bar{\pi}$是资源的影子价格时，就可得到一个很自然的解释。式（6，19）左边的第j分量是$\sum_i \bar{\pi}_i b^i_j$。由于b_j是生产单位货物j所需的第i资源的量，上述分量仅仅就是单位输出货物j的阴子成本。由于a_j是目的函数给予这样的单位货物上的价值，所以约束（6，19）就是要求当处在阴子成本时，货物将不能带来任何利润。这是很自然的，因为当问题是线性时，如果有这样的利润存在，就需要扩大生产。另一方面，$\bar{\sigma}$这时就是生产中各种货物的阴子损失矢量，并且补充松驰条件（6，13）指出：对于包括影子损失的货物的生产是不能进行的。另外，由于线性，一个正损失的出现就是需要完全关闭那条生产线的信号。这在经济学上是明显的，但是为了节省篇幅，我们将省去论证过程。同样，我们也将把线性规划的其它问题，如解的特征以及计算过程，放到一些专门的书中去讨论，这里不再赘述。

习　　题

6．1　阐述把本章的结果应用到最小值问题的过程，并对其中之一结果进行证明。

6．2　用本章的方法求解例4．2。

6．3　对于例2．2和习题2．3“看不见的手”的问题，如果在那里找到的必要条件，根据本章的结果，也是充分

的，那么对于这两个例子中的各种函数，需要满足什么样的条件，才能保证该结论成立？

参考文献

1. DORFMAN, R. , SAMUELSON, P. A. and SOLOW, R. M. Linear Programming and Economic Analysis, McGraw--Hill, New York, 1958, especially chs. 1—7

2. INTRILIGATOR, M. D. Mathematical Optimization and Economic Theory, Prentic—Hall,Englewood Cliffs, N.J.,1971, chs. 4, 5.

3. KUHN, H. W. and TUCKER, A. W. 'Nonlinear programming', in Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, .edJ.Neyman, University of California Press, Berkeley, Cal. 1950 (pp. 481—92)

4. ARROW, K. J. and ENTHOVEN, A. C 'Quasi—concave Programming',Econometrica, 29(4), October 1961, pp. 779—800.

5. LUENBERGER, D. G. Introductio to Linear and Nonlinear Programming, Addison—Wesley, Reading, Mass. , 1973.

6. LUENBERGER, D. G. Optimization by

Vector Space Methods, Wiley, New York, 1969 chs. 7 and9.

7. DIAMOND, P. A. and MIRRLEES, J. A. 'Optimal Taxation and Public Production: II Tax Rules', American Economic Review, LXI(3), June 1971, pp. 261—78, SectionX

8. SYDSAETER, K. 'Letter to the Editor on Some Frequently Occuring Errors in the Economic Literature concering Problems of Maxima and Minima', Journal of Economic Theory, 9(4), December 1974, pp. 464—6.

七、比较静态经济学

比较静态经济学的概念已在第二章中引出，并且这方面的一些例子已在前面几章中出现过。如拉氏乘子作为影子价格的解释是基于比较静态经济学考虑的，以及第五章的最大值函数$V(c)$的凹性证明也是具有这种特性的。现在我们来回到更一般的参数变化的比较静态经济学问题中来。一般结果从理论上讲有点弱，但是其应用是很广泛的。因此，本章的特点是，正文简短，而例子较长。

以第三章中的记号，令b为参数矢量。考虑函数$F(x, b)$在约束$G(x, b) \leqslant 0$下的最大值问题，并令$V(b)$为该最大值。这样，我们得到如下的一般结果——

如果F是凹的，G是凸的，并且它们都是选择变量和参数的函数，那么V也是凹的。

证明的思路和前面常用的一样。令b和b'是任意两个参数值，$\bar{x}$和$\bar{x}'$是对应的最优选择。这样，$G(\bar{x}, b) \leqslant 0$，$V(b) = F(\bar{x}, b)$以及$G(\bar{x}', b) \leqslant 0$，$V(b') = F(\bar{x}', b)$。现在令$\delta$是满足$0 \leqslant \delta \leqslant 1$的任意一个数，来考虑选择$\delta\bar{x} + (1-\delta)\bar{x}'$。由于$G$是凸的，所以有$G(\delta\bar{x} + (1-\delta)\bar{x}', \delta b + (1-\delta)b') \leqslant \delta G(\bar{x}, b) + (1-\delta)G(\bar{x}, b) \leqslant 0$，因此，所选取的选择是可行的。而且，对于该选择，根据F的凹性，可得

$$F(\delta\bar{x} + (1-\delta)\bar{x}', \delta b + (1-\delta)b') \geqslant \delta$$

$F(\bar{x}, b)+(1-\delta)F(\bar{x}', b)=\delta V(b)+(1-\delta)V(b')$

这时，$V(\delta b+(1-\delta)b')$不可能小于该式的右边项。

上述结果的应用很多。作为一个简单例子，第五章的函数$V(c)$的情况就是上述结果的特殊情况。还有一个应用主要是关于动态规划中的最优化的充分条件的。然而，上述结果是一个弱结果，因F的凹性和G的凸性同时对于选择变量和参数的要求，在经济问题中经常不能满足。例如，预算约束对于数量和价格不能同时都是凸的，效用和生产函数对于数量和其它参数也不能同时都是凹的。因此，我们得寻求更为特殊的结果。

作为一个例子，考虑参数不影响约束的情况。这时，对于一个参数集合的最优选择对于其他的参数集合也是可行的，这个事实给出了一些很简单且有用的价值比较结果。下面就是一个——

令$V(b)$代表$F(x, b)$在约束$G(x)\leqslant 0$下的最大值。如果F对于任意固定的x，仅是b的凸函数，那么V是凸的。

为了验证这，象往常一样，记$V(b)=F(\bar{x}, b)$，$V(b')=F(\bar{x}', b)$。令$0\leqslant\delta\leqslant 1$，来考虑加权平均值：$\delta b+(1-\delta)b'$。假定$x^*$是这个参数集合的最优选择。由于当$\bar{x}$或$\bar{x}'$是选定时，$x^*$是可行的，因此我们必须有

$F(x^*, b)\leqslant F(\bar{x}, b)$和$F(x^*, b')\leqslant F(\bar{x}', b')$

这样，使用F为b的凹函数性，我们有

$$V(\delta b+(1-\delta)b')\leqslant F(x^*,\delta b+(1-\delta)b')\leqslant\delta F(x^*,b)+(1-\delta)F(x^*,b')$$

$$\leqslant\delta F(\bar{x},b)+(1-\delta)F(\bar{x},b')=\delta V(b)+(1-\delta)V(b')$$

该结果有一个很有趣的特点：就是对G没有施加任何条件。对于选择变量的凸性或者准凸性，这在前面的证明中是一个很重要的条件，在这里是不要求的。当然，还需要一些条件来保证解的存在性，但是，一旦给定解的存在性后，参数变化而可行变量的集合不变的结论正是我们所需要的。

上述结果在下面所讨论的例子中有一些很重要的应用。

在上述情况下，还可做另外一种简单的价值比较，通过比较能使我们推导出一些最优选择本身的特性，而且在这里，除了保证解的存在性条件之外，也无需施加任何条件。考虑使F（x，b）在约束G（x）$\leqslant$0下的最大值问题，并假定$\bar{x}'\bar{x}''$分别是对应于参数b'和b''的最优选择。由于当一个变量选定时，另一个还是可行的，因此，我们必须有

$$F(\bar{x}',b')\geqslant F(\bar{x}'',b')\text{和}F(\bar{x}'',b'')\geqslant(\bar{x}',b'')\qquad(7,1)$$

另外，在当参数对目的函数无影响而仅对约束有影响的极端情况下，也有相似的结果。考虑F（x）在约束G（x，b）$\leqslant$0下的最大值问题。采用上面的记号，假定$\bar{x}'$碰巧就是当参数为b''时的选择量，即G（$\bar{x}'$，b''）$\leqslant$0。由于$\bar{x}''$是在$\bar{x}'$选定后选取的，因此，我们必须有F（$\bar{x}''$）$\geqslant$F(x')。然而，x'是对于参数b'所选择的，这时不能对$\bar{x}''$选取更高值的唯一原因是这时它是不可行的，即G（$\bar{x}''$，b'）$>$0。这样，我们得到

如果$G(\bar{x}', b'')\leqslant 0$，那么$G(x'', b')>0$ (7,2)

这些结果的应用也放到了下面的例子中。下面的例子将仅用最基本的最优化概念，如可行性、最优性、凹性和凸性的定义等，来对一些比较静态经济学方法进行说明。这种处理方法是很一般的，仅包括基本的数学知识，并且从艺术的角度看也是很合意的。另一方面，比较静态经济学的结果很少能达到如此一般的程度。很多特定的经济问题的构造更为复杂，即函数F和G是已知的，或者除了在建立最优的条件时所用到的凹性和凸性之外，还要假定一些其他的性质。这些性质，如加法分离性，对于得到更进一步的比较静态经济学结果是很有用的，但是，本章的方法不能处理这些结果。

下章将要给出一个比较静态经济学的补充方法。该方法是从$(m+n)$个方程开始的，这$(m+n)$个方程确定了n个变量m个乘子，并对这些方程相对于参数取微分来得到变数和乘子的改变率。这个求解过程是比较麻烦的，但是也是很机械的。在特定的问题中，对于各种函数的附加条件经常是用它们的导数表示的，因此，可通过用微分方法来得到附加条件。然而，微分方法也是有限制的，不仅是因为某些问题可能包括不可微的函数，而且也由于不等式约束本身提出问题来。通过对一个不等式的两边取导数而要得到另一个不等式，这个过程是不合理的。如果我们想把该方法应用到不等式约束的情况，我们得事先知道哪些约束是等式约束，哪些不起作用的约束可省略。进一步讲，我们还必须保证在所考虑的全部参数变化域中等式集合也是满足的，因为从一个域到另一个域的转换可能对可微性有影响。

因此，上述两种方法具有相互补充的优缺点。我们应该

掌握两种方法，以便能对所考虑的问题选取其中较好的一个方法。对于这种决定的正确判断，当然，仅来自于实践。

例　题

例7.1　这个例子将使用间接效用函数和支出函数继续发展消费理论。使用的记号和例3.2一样。我们将假定上两个函数是二次可微的。粗略地讲，这就等于假设效用函数，除了两次可微性之外，对于它的同好面来说没有平直段存在。

先来讨论支出函数。首先注意到的是：对于任意的固定u，E（p，u）是p的凹函数，这是因为参数仅对标准函数有影响。写成标准最大值形成，就是－px对于固定的x是p的凹函数（虽然仅刚好是）。本书中的标准结果指出：－E（p，u）是p的凸函数，即E（p，u）是p的凹函数。其经济原因主要在于消费中的替换。例如，当p的某个分量增加时，可能会发生的最坏情况是：为了达到给定的效用指标，需要保持原来的消费计划，在这种情况下，支出将随价格线性增加。如果能替换掉价格更高的商品，支出将会增加得比线性慢一些。当然，某一方面的凹性不能说明总的凹性存在，但是它可对前面已证明的结果提供一些经济上的直观性。

对于一个两次可微的凹函数，它的偏导数必须为非正。这也就是意味着补充需求函数的导数为非正。记住上标代表商品的个数，下标代表偏导数，这样可从式（3.19）得到

$$C_i^i(p, u) = E_{ii}(p, u) \leqslant 0$$

这样，当某种价格上涨时，对那种商品的补充需求量不能增加，即它自身的替换效应是非正的。这是消费理论中一个很著名的重要定理。

不用做可微性假定，也可从式（7.1）得到同样的结果。考虑价格矢量p'，p''以及对应的补充需求量$\bar{x}'$和$\bar{x}''$。记$p''-p'=\Delta p'$，$\bar{x}''-\bar{x}'=\Delta\bar{x}$。这时，从式（7.1）得到

$$-p''\bar{x}''\geqslant -p''\bar{x}' \qquad 和\ -p'\bar{x}'\geqslant -p'\bar{x}''$$

把这些不等式相加，并化简，得到

$$\Delta p\Delta\bar{x}\leqslant 0 \qquad (7.3)$$

如果仅Δp的第i个分量不为零，上式变为

$$\Delta p_i\Delta\bar{x}_i\leqslant 0$$

这就是我们所要求的结果。

现在我们回到间接效用函数。这种函数是不服从标准的定理的。事实上，当m给定时，V是p的准凸函数，即对于给定的m和u，满足$V(p, m)\leqslant u$的矢量p的集合是凸的。为了证明这，假定$V(p, m)\leqslant u$，$V(p', m)\leqslant u$ 以及$0\leqslant\delta\leqslant 1$。我们希望能证明$V(\delta p+(1-\delta)p'', m)\leqslant u$。假定这个不等式不成立，即假定存在一个可行的$x^*$，使效用$U(x^*)>u$。这就超过了当价格为$p$和$p'$时，实际选择可达到的效用。因此，$x^*$在这些情况下将是不可行的，即$px^*>m$，$p'x^*>m$。这时，$\delta$和$(1-\delta)$都是非负的，并且两者不可能同时为零，因此，$(\delta px^*+(1-\delta)p'x^*)>\delta m+(1-\delta)m$，即$(\delta p+(1-\delta)p')x^*>m$。这样$x^*$对于加权平均价格矢量是不可行的。这个矛盾迫使我们放弃$U(x^*)>u$的假设，这样就证明了准凸性结果。

上述讨论也带来了一些问题。考虑一个二级最大值问题，在这个问题中，政府通过其税务政策，可对消费者的价格有影响。消费者根据政府的政策来做最优调整。政府，然后在选择政策时，可把消费者的响应考虑进去。这就是一个选择p使V（p，m）在一些约束下取最大值的问题。但是，准凸函数是不宜做取最大值的函数的，特别是希望建立充分条件时。这种情况后面将会出现。

从式（7.2）可得到一个有用的性质（在式（7,2）中没有做凹性假设）。由于价格和收入对预算约束有影响，而对效用函数没有直接影响，因此，我们可把方程（7,2）用常用的记号写成

如果$p''\bar{x}'\leqslant m''$　　　　那么$p'\bar{x}''>m'$

或者

$$\text{如果}p''\bar{x}'\leqslant p''\bar{x}''\text{，那么}p'\bar{x}''>p'\bar{x}' \qquad (7,4)$$

假定条件没有满足，这样对于每个选择，仅预算约束起约束作用。该结果有一个重要的应用，就是有可能把消费理论建立在需求函数的性质上而不是效用函数的性质上，这是很需要的。因为前者是可观察到的，而后者不能。上述方法称为消费理论的可见优先法(revealed perference method)。根据如上的说明，式（7,4）不是一个定理，而是一个基本假设，称之为可见优先法的弱公理。然而，该结果表明，发展消费理论的两种方法，一旦对所用的每一种理论做了足够的假定，形式上是等同的。

最后，我们来说明间接函数和支出函数，或者非补充和补充需求函数之间的关系。假定我们从某个u，找到了m＝

$E(p, u)$。然后，让m代替经济收入，来找到最大效用选择。除了当某些货物价格为零所带来的技术问题之外，我们是能够得到预期的结果$u = V(p, m)$的，这样最优选择是一致的。我们将假定这个结果成立，即

$$u = V(p, m) \text{ 只有仅有 } m = E(p, u). \quad (7,5)$$

而且如果m和u是如此相关的，那么

$$C^i(p, u) = D^i(p, m) \quad (7,6)$$

特别是，$m = E(p, V(p, m))$，并且使用式(3,16)和式(3,17)进行微分，可得到

$$\lambda\mu = 1 \quad (7,7)$$

镜像最优化问题的拉氏乘子之间的这个关系有明显的经济意义。

最后，对于固定的u，取式(7,6)对于p_k的微分，并且记住根据式(7,5)，m是改变的，由此可得

$$C^i_k(p, u) = D^i_k(p, m) + D^i_m(p, m) E_k(p, u)$$

使用式(3,19)和(7,6)的定义，上式变为

$$C^i_k(p, u) = D^i_k(p, m) + D^k(p, m) D^i_k(p, m) \quad (7,8)$$

替换、收入和一种价格改变的总效应之间的这个关系是消费理论中的最重要的结果之一。上述关系式称为斯露茨克—黑克斯(Slutsky—Hicks)方程。把上述的简单推导与仅根据直接法的沉长的规范化证明过程相对[redacted]就可得到一些有益启示。

[redacted].

对于上面所使用的记号还不熟悉[redacted]，应该能看懂以

下述形式所给的结果

$$\left.\frac{\partial x_j}{\partial p_k}\right|_{u\text{为常数}}=\left.\frac{\partial x_j}{\partial p_k}\right|_{m\text{为常数}}+x_k\frac{\partial x_j}{\partial m}$$

例7.2　这个例子将用来发展生活费指数的基本理论。考查一个兴趣固定的消费者。选用一个固定的效用指标u，该指标被选择作为比较基础的生活标准。对于每个价格矢量p，我们可很容易地计算达到上述生活标准所需要的支出m，其值为$m=E(p,\ u)$。

现在来分两种情况考虑，即当价格为p'时的初始或基础时期和当价格为p''时的最后或现行时期，并假定对应的支出分别为m'和m''。如果为了达到目标效用指标，在现期要比初期所需要的支出多，那么就说生活费增高了，反之就说生活费降低了。现在我们寻找一个标准来根据可观察到的价格和数量对上述问题进行判断。我们知道，支出函数是凹的。如果假设它是可微的，那么其改变量由基于切线的线性近似高估。而且，在任何点的导数矢量也仅是那点处的补充需求矢量。记$\bar{x}'=E_p(p',\ u)$，$\bar{x}''=E_p(p'',\ u)$，注意：p是一个列矢量，$E_p(p,\ u)$是一个行矢量。这样，我们得到

$$m''-m'=E(p'',\ u)-E(p',\ u)\leqslant(p''-p')\bar{x}'$$

和　$$m'-m''=E(p',\ u)-E(p'',\ u)\leqslant(p'-p'')\bar{x}''$$

从这些式子，我们得到如下的充分条件

如果$(p''-p')\bar{x}'<0$，那么$m''<m'$

如果$(p'-p'')\bar{x}''<0$，那么$m'<m''$

第一种情况，生活费降低，而在第二种情况，生活费增高。稍微变化一下，我们就可用标准指数形式写出这些方程为

如果$p''x'/p'x' < 1$，那么$m'' < m'$

如果$p''x''/p'x'' > 1$，那么$m' < m''$

这两个比值看起来很象拉斯波叶斯(Laspeyres，加权初始量)和帕斯车(Passche，加权现行量)价格指数。但是，我们必须记住这里出现的这些量是指在特定的效用指标u下的补充需求量，这些量无需和每一时期的实际需求量或效用有任何联系。在一般的使用中，比较标准选为在每一时期的实际效用指标；而且数量也选为该时期的实际需求量。这样，所得到的结论仅依赖于可观察到的价格和数量。这样，如果拉斯波叶斯价格指数小于1，那么根据初始时期的效用标准来判断，目前的生活费降低了；如果帕斯车价格指数大于1，那么根据目前的效用标准来判断，初期的生活费低于目前的生活费。

上面的结果实际上都是比较弱的，因为它们没有对一些很大范围内的可能性进行说明。然而，除了这样做，别无它法。价格和数量数据仅允许我们对一个很有限的福利集合进行比较。另外，当把各种兴趣的改变，或者把很多消费者的分配关系考虑进去时，问题将变得更复杂。

例7.3　在这个例子中，我们将使用类似于例7.1中消费理论所使用的方法来对生产理论的几个方面进行讨论。

一个生产者的成本函数在习题3.2中已经被定义为给定生产因素价格和目标输出指标时的最小生产成本。很明显，该函数应该和支出函数具有相同的性质。因此，它应该是其所有自变量的增函数，并且对于每个给定的输出指标，它应该对于生产因素价格是零次齐次的，而且还是这些价格的凹函数。最后这个性质是生产中替换的反射：没有替换，成本函数将是因素价格的线性函数，并且替换的可能性越大，该函

数的曲线就越凹。最后还要指出的是，该函数的偏导数就是最小成本输入需求量，即按习题3.2的记号，有

$$x = C_w(w, y) \tag{7,9}$$

还需记住：根据第一章的约定，如果变量本身是一个列矢量，那么偏导数将是一个行矢量。

这样就无法确定输出，在该例中，我们将略述一种可能性。假定是比例固定收益，这样就可把成本函数写成$yC(w)$，其中$C(w)$这时是生产单位输出的最小成本。当是比例固定收益时，商行的规模是不定的，于是我们可把上述函数取为具有工业输出y的工业成本函数，对应的工业因素需求量为

$$x = yC_w(w) \tag{7,10}$$

考虑一个有竞争的平衡问题。如果P是输出价格，每个商行的利润最大决策将使边际成本等于价格。当为比例固定收益时，就是平均成本等于价格，即

$$P = C(w) \tag{7,11}$$

最后，对于市场交换，我们必须有

$$y = D(p) \tag{7,12}$$

式中D是工业需求函数。从这些表达式到式（7,10）的连续代换将能把所推导的因素需求量化为仅是因素价格的函数。

作为对该模型的一个说明，假设我们要知道当w_k改变，其余的因素价格不变时，各种因素的需求量是怎样改变的。通过微分，可得

$$\frac{\partial x_i}{\partial w_k} = yC_{jk} + Di(p)C_kC_j$$

式中，为简单起见，省略了C的求偏导数的自变量。把这个

式子写成一种弹性系数形式将会更有意义。在做了一些化简之后，我们可得到

$$(w_k/x_j)\ \partial x_j/\partial w_k=\theta_k(\sigma_{jk}-\eta) \quad (7,13)$$

式中η是工业需求曲线的弹性系数，而

$$\theta_k=(w_k x_k)/(yC)$$

是因素k在总的因素成本中所占的股份，并且

$$\sigma_{jk}=(CC_{jk})/(C_jC_k)$$

这样，w_k改变的影响有两部分：第一部分是替换效应：当因素的相对价格改变时，最小成本因素之间的比例改变。象在消费理论中一样，这时的自身替换效应是明确的，因为C是一个凹函数，因此，$C_{kk}<0$。然而，对于$j\neq k$，效应依赖于因素j和k是否是可替换的还是可补充的。第二部分是输出效应。w_k的增加引起全部边际成本增加，这样降低了最大利润输出，因此，也就降低了所有因素的需求量。当然，比例固定收益意味着这种效应对于所有的因素是等比例的。一般情况，甚至还可能有次档的因素，对于这些因素，当输出下降时，需求量还要增加。

应该把生产理论中输出效应同消费理论中的输入效应区分开来。前者是由于当成本增加时，需要降低生产而引起的；即粗略地说是从目的函数这一方出现的。后者是由于当成本增加时，需要减少消费而引起的，即根据的是约束。

在式（7,13）中的替换效应和输出效应都包括因素θ_k。粗略地讲，这是因为，如果一个因素仅占有一小部分成本，那么其价格的给定百分比的改变仅需要对各个因素的份数做一小的调整。

表达式σ_{jk}称为生产过程中的任意一对$j\neq k$的替换的部

分弹性系数。当$j=k$时，把式（7,13）写成另外一种形式比较好。由于C是一次齐次的，那么它的每个偏导数C_k应是零次齐次的，并且由欧拉定理，我们得到

$$\sum_{j-1}^{n} w_j C_{kj}=0$$

这个式子也可写成如下的等同形式

$$\sum_{j-1}^{n} \theta_j \sigma_{jk}=0$$

这时，式（7,13）变成

$$-(w_k/x_k)\frac{\partial x_k}{\partial w_k}=\theta_k\eta+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\theta_j\sigma_{jk} \quad (7,14)$$

$$V^h(q, I_h) = \log I_h - \Sigma_g \alpha_{hg} \log p_g \quad (7,15)$$

式中，对于每个h，$\Sigma_g \alpha_{hg} = 1$。容易看到，家庭h对于货物g的需求为

$$x^{hg}(p, I_h) = \alpha_{hg} I_h / p_g \quad (7,16)$$

这时，总的需求量为

$$x^g(p, I_1, I_2, \cdots I_H) = \Sigma_h \alpha_{hg} I_h / p_g \quad (7,17)$$

一个单位货物g的生产需要C_g单位的劳动。因此，如果下式能满足，生产计划（x_1，x_2，$\cdots x_G$）就是可行的

$$\Sigma_g C_g x_g \leqslant \Sigma_h I_h \quad (7,18)$$

政府可以确定货物的价格。为了使家庭效用的和为最大，希望能通过确定货物的价格来制定一个可行的生产计划。由于I_h是常数，因此从式（7,15）可看到该计划的取最大值函数为

$$F(p) = -\Sigma_g(\Sigma_h \alpha_{hg}) \log p_g \quad (7,19)$$

使用式（7,17）和式（7,18），约束方程变为

$$\Sigma_g C_g(\Sigma_h \alpha_{hg} I_h) / p_g \leqslant \Sigma_h I_h \quad (7,20)$$

上述问题也可用一种直接的方法进行说明。前面的目的函数不是凹的。我们知道，一般它是准凹的；在上述情况下，事实上是凸的。约束函数是凸的，因为相对凸性，或者更精确地说，拉氏表达式的凹性，才是我们真正感兴趣的，因此，我们还希望能够证明充分性。幸运的是，在这些函数的特殊情况下，变量的简单改变就能把该问题化成标准形式。记$q_g = 1/p_g$，并引入缩写

$$A_g = \Sigma_h \alpha_{hg}, \quad B_g = \Sigma_h \alpha_{hg} I_h, \quad I = \Sigma_h I_h \quad (7,21)$$

该问题变为

求 $\Sigma_g A_g \log q_g$ （7,19′）

在约束$\Sigma_g C_g B_g q_g \leqslant 1$　　　　　　　　（7,20′）

下的最大值。这时，取最大值的函数是凹的，约束函数是凸的，于是拉氏条件是充分的。引入乘子π，我们有

$$A_g / q_g = \pi C_g B_g \qquad (7,22)$$

把这个式子代入到约束方程中，我们看到，不能使$\pi = 0$。这样约束方程必须是等式，并且

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{\Sigma_g A_g} = \frac{1}{\sum\limits_g \Sigma_h \alpha_{hg}} = \frac{1}{\sum\limits_h 1} = \frac{1}{H}$$

最后，把这个关系式代入到式（7.22），得到解

$$p_g / C_g = H B_g / (I A_g) \qquad (7,23)$$

我们主要感兴趣的问题是对货物进行分类，分成p_g大于生产成本C_g的部分，即要收税的部分和$p_g < C_g$的部分，即需要补助资金的部分。经过代数运算，我们发现，对于具有在I_h和α_{hg}之间关于h有正的协方差的货物需要收税。由于I_h是家庭收入，α_{hg}是它们对于货物g的预算股份，因此，我们看到：如果根据平均值，货物g在富人的预算中显得更为重要，那么就要对其征税，如果根据平均值，它对于穷人的预算显得更为重要，那么就要对它进行补贴。这样我们得到了一种模型，该模型表明日用品的纳税能够对重新分配起到某种杠杆作用。

习　　题

7.1 对于例7.1的消费需求模型，证明（a）替换效应是对称的，即

$$C_k^j(p, u) = C_j^k(p, u)$$

（b）吉芬（Giffen）货物，即一种具有正斜率非补偿需求曲线的货物，必须是一种低档货物，即一种具有负的需求收入导数的货物，或者用记号表示为

$$\text{如果} D^i_j(p, m) \quad 0 \qquad D^i_m(p, m) \quad 0$$

反过来是否成立？

7.2　以弹性系数形式表示Slutsky—Hicks方程(7.8)

7.3　考虑例7.3的生产问题，令$n=2$。让w_1增加，但是假设w_2是可变的，来调整它的值使得对于第二个因素的供求相等。证明：对于因素1所推导的需求弹性系数可表示成

$$[\sigma_{12}(\eta+\varepsilon_2)+\theta_1\varepsilon_2(\eta-\sigma_{12})]/[\eta+\varepsilon_2-\theta(\eta-\sigma_{12})] \qquad (7.24)$$

式中ε_2是因素2的供给弹性系数，其它的记号同前。能把式（7,14）作为式（7,24）的一种特殊情况来考虑吗？

参 考 文 献

1. COOK, P. J. 'A One-line Proof of the Slutsky Equation', American Economic Review, LXII (2), March1972, p. 139.
2. HOUTHAKKER, H. 'Revealed Preference and the Utility Function', Economica, N. S. 17(2), May1950, pp. 159-74.
3. FISHER,R. M. and SHELL, K. The Eco-

omic Theory of Price Indices, Academic Press, New York, 1972.

4. DIEWERT, W. E. 'A Note on the Elasticity of Derived Demand in the N-factor Case', Economica, N. S. 38(2), May 1971, pp. 192-8.

5. HALL, R. E. 'The Specification of technology with several kinds of output', Journal of Political Economy, 81(4), July/August, 1973, pp. 878-92.

6. HENDERSON, J. M. and QUANDT, R. E. Microeconmic Theory, second edition, MrGraw-Hill, New York, 1971, Chs. 2, 3.

八 二阶条件

本章我们将讨论比较静态经济学中的一些更进一步的结果以及这些结果和最优化的二阶条件之间的关系。象在上章末尾所说，本章的处理方法依赖于一阶条件和约束的微分，因此，仅限于等式约束问题。然而，该方法也可用到具有不等式约束的问题中，只要我们把变化域限制到一个和等式约束相同的约束集合域内，在该域内其中之一不等式约束变为等式约束，其余（不起作用）的约束可以忽略。

一般的理论是相当复杂的。因此，我们将首先简要说明比较静态经济学和二阶条件之间的关系，然后对于一个很简单的约束最优化问题推导出二阶条件，最后给出一般的结果和一些应用。

首先，我们来考虑具有一个选择变量的无约束最大值问题。对于使$F(x)$取最大值的$\bar{x}$，一阶必要条件为

$$F_x(\bar{x})=0 \tag{8.1}$$

取$F(x)$的泰勒展开式

$$F(x)=F(\bar{x})+F_x(\bar{x})(x-\bar{x})+\frac{1}{2}F_{xx}(\bar{x})(x-\bar{x})^2+\cdots\cdots$$

使用式(8.1)，可得到

$$F(x)-F(\bar{x})=\frac{1}{2}F_{xx}(\bar{x})(x-\bar{x})^2+\cdots\cdots \tag{8.2}$$

对于足够接近$\bar{x}$的x，二阶项将支配着高阶项。因此，如果$F_{xx}(\bar{x})$为正，我们将能够寻找到一个足够接近$\bar{x}$的x，使

得$F(x)>F(\bar{x})$。这时$\bar{x}$将不能使$F(x)$在$\bar{x}$的任意一小邻域内取最大值，在x的整个变化域内更不能取最大值。前者情况的最大值称为局部最大值，后者的称为总体最大值。这样，我们找到对于这两种类型的最大值的必要条件

$$F_{xx}(\bar{x})\leqslant 0 \qquad (8.3)$$

另一方面，如果这个二阶导数为负，那么式(8.2)中的二次项为负，因此，在围绕$\bar{x}$的足够小范围内，$F(x)-F(\bar{x})$为负，更高阶项的正负号不起作用。这样，当式(8.1)成立时，

$$F_{xx}(\bar{x})<0 \qquad (8.4)$$

是$\bar{x}$使$F(x)$取局部最大值的充分二阶条件。也能够通过使用二阶导数找到总体最大值的充分条件，但是该过程是相当复杂的。

注意到式(8.3)和(8.4)的差别：除了一个是弱一个是强不等式差别外，前者可用到局部和总体最大值，而后者仅能用到局部最大值。相似的结论也可用到更一般问题的二阶条件中，在那里我们将集中考虑局部充分条件，而把必要条件留给读者去考虑。满足二阶充分条件的局部最大值时常称为规则最大值。对于一个不规则最大值，当$F_{xx}(\bar{x})$为零时，我们得考虑最高阶的导数。如果函数F不是解析的，即如果泰勒定理对它不适当，就连二阶导数也求不到。对这种情况我们不进行讨论。

现在假定所考虑的问题包括一个参数b。一阶条件为$F_x(\bar{x}, b)=0$，对此微分，可有

$$F_{xx}(\bar{x}, b)d\bar{x}+F_{xb}(\bar{x}, b)db=0$$

7

即 $$\frac{d\bar{x}}{db} = -F_{xb}(\bar{x}, b)/F_{xx}(\bar{x}, b) \quad (8.5)$$

对于一个规则最大值，式子右边的分母为负，这时$d\bar{x}/db$的正负号与$F_{xb}(\bar{x},b)$一致，我们会立即看到：二阶条件是怎样帮助我们评价参数改变对于最优选择的定性影响的。

作为对该结果的一个简单说明，考虑一个最大利润的商行，它的需求曲线和收入曲线有变动。如果$R(x,b)$是收入曲线，式中x是输出，b是一个对于向右移动的需求曲线而增加的参数（即$R_b(x,b)$总是正的），这样根据式(8,5)，只有仅有$R_{xb}(\bar{x},b)$是正的时，移动才能使最优输出指标增高。这就要求参数的移动能够引起边际收入$R_x(x,b)$在$\bar{x}$是增加的。这也就是引出微观经济学中那些迷人的疑题的根源，在那里，需求函数向外移动引起了输出的下降，因为可容易地按排一个移动，使得平均收入增加，而在所讨论点的边际收入减少。

对于多个变量无约束的问题，以泰勒级数表达的二阶条件为

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} F_{jk}(\bar{x})(x_j-\bar{x}_j)(x_k-x_k) = \frac{1}{2}(x-\bar{x})^T F_{xx}(\bar{x})(x-\bar{x}) \quad (8.6)$$

式中，$F_{xx}(\bar{x})$是二阶偏导数$F_{jk}(\bar{x})$的对称方阵，上标T代表矩阵的转置。由于$(x-x)$是一个行矢量，因此它的转置是一个列矢量，这样式(8.6)就是一个二次型。二阶充分条件这时就等于该二次型对$x \neq \bar{x}$，总有负号。即充分条件对该二次型，或它的对应矩阵，是负定的。对应的必要条件要求

二次型是负半定的。众所周知，如果一个矩阵的$m \times m$维主子式的符号为$(-1)^m$，那么这个矩阵就是负定的。这样的条件在用比较静态经济学求解问题时也是有用的，因为对于多个选择变量的情形，对应于式(8.5)，可有

$$d\bar{x}/db = -F_{xx}(\bar{x},b)^{-1}F_{xb}(\bar{x},b) \qquad (8.7)$$

一个负定的矩阵的逆也是负定的，并且如果知道了矩阵主子式的正负号和特定问题的F_{xb}值，就能够得到一些有关参数改变对于选择变量影响的结果。这方面的应用在下面的例中进行讨论。

现在我们回到有约束的最优化问题的二阶条件。这里，必要条件是和二阶项的非正性有关的，局部充分条件也是和二阶项的负数有关的。然而，这时这些条件都和拉氏表达式相关，而且仅需要对于离$\bar{x}$较近且满足约束的x成立。为此，我们得考虑在(局部)线性约束下的二次型的确定性理论。一般的理论需要较深的数学知识，因此，在这里我们将仅用很简单的几何理论来对所包括的原理进行说明，然后把结果推广到一般情况。考虑两个变量一个约束的情况，按通常的记号，F和G都是两个变量的增函数。这时有三种可能性，象图1.4(或图4.1)和图4.2所表示的。沿着每一条约束线和通过$\bar{x}$的等目的函数线，x_2是x_1的函数。上两条曲线在$\bar{x}$的斜率相等，并且如果前条曲线比后条曲线更凹或者后者比前者更凸，即如果$\frac{dx_2{}^2}{dx_1{}^2}$沿着约束曲线(代数上)比沿着等目的线小，也能保证局部最大值存在。下面的问题就是用基本函数来表示上述二导阶数。这只需要对前面一阶隐函数求导数就能得到。这样，对于等目的线，我们有

$$\frac{d^2x_2}{dx_1^2}=d(-F_1/F_2)/dx_1=\frac{-F_2(F_{11}+F_{12}\,dx_2/dx_1)-}{F_2^2}$$

$$\frac{F_1(F_{21}+F_{22}\,dx_2/dx_1)}{}=-(F_2^2F_{11}-2F_1F_2F_{12}$$

$$+F_1^2F_{22})/F_2^3$$

式中自变量$\bar{x}$，在该点计算所有导数值，为简单起见，已经省略。对于约束曲线也可得到类似的结果。最后，使用一阶条件$F_1=\pi G_1$和$F_2=\pi G_2$，并记住这时F_j和G_j都是正的，这样可把局部最大值的二阶充分条件写为

$$-G_2^2(F_{11}-\pi G_{11})+2G_1G_2(F_{12}-\pi G_{12})-G_1^2(F_{22}-\pi G_{22})>0$$

对应的必要条件可通过加弱不等式得到(加上等号)。

用行列式可把上述充分条件写成更紧凑的形式

$$\det\begin{vmatrix} F_{11}-\pi G_{11} & F_{12}-\pi G_{12} & -G_1 \\ F_{21}-\pi G_{21} & F_{22}-\pi G_{22} & -G_2 \\ -G_1 & -G_2 & 0 \end{vmatrix}>0 \tag{8,8}$$

对于n个选择变量m个约束的一般问题的条件可通过把上述结果直接推广而得到。根据已建立的矩阵记号，我们可形成分块矩阵

$$\begin{pmatrix} F_{xx}-\pi G_{xx} & -G_x^T \\ -G_x & 0 \end{pmatrix}$$

该矩阵的值，当然是在点$\bar{x}$计算的。现在我们来考虑上述矩阵的对角子矩阵，该子矩阵由最后的j列和j行构成。j的变

化是从1到$(m+n)$。当$j=m+n$时子矩阵就变成了原矩阵。对于较小的j值，根据原矩阵右下角大量的零元素，这时的子矩阵将是奇异的。但是，最后$(n-m)$个子矩阵，即当j大于或者等于$(2m+1)$时，将是不奇异的。这时，对应于局部最大值的充分条件就对行列式的正负号有了限制。正负号需要改变，第一个行列式(即由最后$(2m+1)$列和行构成)的正负号为$(-1)^{m+1}$。容易看到式(8.8)是这种情况的特例。当$n=2$，$m=1$时，仅有一个子矩阵，也就是原矩阵，因为$2m+1-n+m=3$。该矩阵的行列式的正负号这里需为$(-1)^{1+1}$，即为正。

注意到序列子矩阵是从右下角开始的，而不是从左上角开始的。这样是不包括$F_{xx}-\pi G_{xx}$的，于是$F-\pi G$无需是凹的。对于与约束相容的约束变化dx，没有$F-\pi G$的凹性，也可使$dx^T(F_{xx}-\pi G_{xx})dx$为负。这个结论就是我们所需要的。这样，我们看到：第六章中使用了凹性的充分条件可能是太强了，尽管这些条件对于用来得到总体最大值有时更为方便。如果$\bar{x}$是一个最大选择，但是$(F_{xx}-\pi G_{xx})$在该点是不定的或者甚至不是半定的，那么将可能出现这样的情况，就是$\bar{x}$不能使该问题的拉氏表达式取最大值，而仅仅是它的某种类型的滞止点。这就是在第六章中所说的一种可能性，现在我们看到了这种可能性的起因。

象往常一样，二阶条件是和比较静态经济学问题密切相关的。考虑具有等式约束，但在取最大值的函数和约束方程中都包括参数的标准最大值问题，即求$F(x,b)$在约束$G(x,b)=0$下的最大值。通过求解下述方程，就可解得解

$$F_x(\bar{x},b)-\pi G_x(\bar{x},b)=0 \qquad (8.9)$$

$$G(\bar{x}, b) = 0 \qquad (8.10)$$

当参数b有改变db时，最优选择$\bar{x}$和乘子π都可能要改变。在建立一般的理论时，假设所有的改变同时出现，处理比较简单，因此，可通过求上述方程的全微分来求解这些改变。对于方程（8.9）的第j个方程，我们得到

$$\sum_{k=1}^{n}(\partial^2 F/\partial x_j \partial x_k)d\bar{x}_k + \sum_{r=1}^{s}(\partial^2 F/\partial x_j \partial b_r)db$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\pi_i\left\{\sum_{k=1}^{n}(\partial^2 G^i/\partial x_j \partial x_k)d\bar{x}_k + \sum_{r=1}^{s}(\partial^2 G^i/\partial x_j \partial b_r)\right.$$

$$\left.db_r\right\} - \sum_{i=1}^{m} d\pi_i \,\partial G^i/\partial x_j = 0$$

可把这个复杂的式子与式（8.10）用矢量和矩阵写成一种很紧凑的形式。按照一般的记号，我们得到

$$\begin{pmatrix} F_{xx} - \pi G_{xx} & -G_x^T \\ -G_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d\bar{x} \\ d\pi^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F_{xb} + \pi G_{xb} \\ G_b \end{pmatrix} db \qquad (8.11)$$

当然，该式中的所有导数都是在点（x, b）计算的。

可以看到：上式左边的分块矩阵和二阶条件中的分块矩阵是一样的，对此我们不应该感到惊奇。这些条件为我们再一次提供了有关解的信息。这些求件的应用不易从理论上进行说明，但是对于特定问题的一些应用将在下面的例子中给出。

最后，我们来检查一下当把二阶项考虑上时，对最大值函数的包络性质有什么影响。回想起第三章的讨论，在那

组我们比较了两种不同选择度的情况。当所有的变量都自由时，最优选择$\bar{y}=Y(b)$，$\bar{z}=Z(b)$都是参数b的函数，且最大值为

$$V(b)=F(Y(b),\ Z(b),\ b) \tag{3.8}$$

当变量y的集合为固定时，最优选择为$Z(y,b)$并且最大值为

$$V(b)=F(y,\ Z(y,\ b),\ b) \tag{3.9}$$

特别是，如果y固定在$\bar{y}$，那么$Z(\bar{y},\ b)=\bar{z}$，并且

$$\left.\begin{array}{l} V(\bar{y},b)=V(b) \\ V(\bar{y},b+\delta b)\leqslant V(b+\delta b) \end{array}\right\} \tag{3.12}$$

最后假定可微性存在，我们得到一阶结果

$$V_b(\bar{y},b)=V_b(b) \tag{3.14}$$

为了说明二阶结果，考虑仅有一个标量参数的情况，并且这个参数仅对目的函数有影响。这时，从式(3.2)我们得到

$$\left.\begin{array}{l} V_b(\bar{y},\ b)=F_b(\bar{y},Z(\bar{y},b),b) \\ V_b(b)=F_b(Y(b),Z(b),b) \end{array}\right\} \tag{8.12}$$

取式(3.12)中的不等式的泰勒展开式，则有

$$V(\bar{y},b)+V_b(\bar{y},b)db+\frac{1}{2}V_{bb}(\bar{y},b)db^2+\frac{1}{6}V_{bbb}(\bar{y},b)$$

$$db^3+\cdots\cdots\leqslant V(b)+V_b(b)db+\frac{1}{2}V_{bb}(b)db^2+\frac{1}{6}$$

$$V_{bbb}(b)db^3+\cdots\cdots$$

使用式(3.12)和(3.14)并消去db^2项，则有

$$V_{bb}(\bar{y},b)+\frac{1}{3}V_{bbb}(\bar{y},\ b)db+\cdots\cdots\leqslant V_{bb}(b)+\frac{1}{3}$$

$$V_{bbb}(b)db+\cdots\cdots$$

如果该式对于所有足够小的db都成立，那么必有

$$V_{bb}(\bar{y},b)\leqslant V_{bb}(b) \tag{8.13}$$

以上就是基本的二阶包络结果。它的几何意义可从图3.1看得清楚。如果有几个参数存在，我们可每次考虑它们中的一个，来建立象式(8.13)的二阶偏导数不等式。如果我们同时考虑所有的参数，我们将得到一个负半定矩阵$[V_{bb}(\bar{y},b)-V_{bb}(b)]$。然而，这个矩阵对于特定的二阶交叉导数一般将不能给出任何有用的条件。对于适当的规则最大值，我们可找到类似于(8.13)的严格不等式；对此，我们不进行深入讨论。

我们可根据基本函数用式(8.12)来表示式(8.13)。通过求导可得

$$F_{bz}(\bar{y},\bar{z},b)Z_b(\bar{y},b)\leqslant F_{by}(\bar{y},\bar{z},b)Y_b(b)+F_{bz}(\bar{y},\bar{z},b)Z_b(b) \tag{8.14}$$

该结果的重要性在于它给出了在两种情况下的实际最优选择对于参数改变的响应之间的一种简单比较。特别是，如果我们把所有的自变量$x=(y,z)$都是自由的情况与所有变量都固定在初始最优值时的情况进行比较，上述结果可写成

$$F_{bx}(\bar{x},b)X_b(b)\geqslant 0 \tag{8.15}$$

这些不等式有一些有用的应用。

在这里和第三章讨论的包络性质可容易地推广到一般的情况。要做的基本比较是在一个最优问题与另一个具有附加约束的最优问题之间的比较，这个附加约束碰巧是在对应于某个参数值的第一个问题的最优点满足的。很明显，当约束比较多时可达到的最大值绝不可能超过约束少时可达到的最大值。但是，在特定的初始点，两者会刚好相等。这就是式

(3.12)以及该式以下的一些结果。固定了变量的子集合的约束就是这方面的一个特例。从不同程度的约束的最大值问题的比较中得到的许多结果都称之为勒·查特利(L.Chatelie)原理的实例；在下面的例子中我们会碰到一个这方面的在经济学中很重要的结果。

例　　题

例8.1　考虑一个商行，它的买进输入矢量为x，对应输入的价格为列矢量w，来生产输出$q=Q(x)$，并卖出输出以得到收入$R(q)$。其利润为$F(x)=R(Q(x))-wx$。假定存在规则最大值，即对于选择$\bar{x}$有一个满足二阶充分条件的最大值存在。因这时的参数b的矢量为行矢量w^T，因此，通过对分量进行运算，我们可得到$F_{xb}=-I$，式中I是一个$n\times n$维单位矩阵。这时，式(8.7)变为

$$d\bar{x}=F_{xx}(\bar{x},w)^{-1}dw^T \tag{8.16}$$

对于规则最大值，$F_{xx}(\bar{x},w)$以及它的逆都是对称的和负定的。从这可得到如下两种结果。

首先，我们看到

$$dw\,d\bar{x}=dw\quad F_{xx}(\bar{x},w)^{-1}dw^T<0$$

特别是，对于每个j，$\partial\bar{x}_j/\partial w_j<0$。这样，每条因素需求曲线向下倾斜。

其次，对于任意j和k，$\partial\bar{x}_j/\partial w_k=\partial\bar{x}_k/\partial w_j$，即因素需求量的交叉影响是对称的。

在定义了一个利润函数并检验它的特性之后，第七章的方法也能给出上述结果；事实上，在那里考虑的是比例固定收益的竞争工业的一个稍有不同的情况。不同之处就是

本章的规则最大值新假定能使我们对自身的替换效应得到严格的不等式。

例8.2. 考虑一个消费者使其为达到目标效用指标所需的支出为最低。使用式(8.11)可很容易地证明交叉替换效应的对称性，并且也不难证明自身替换效应的负性。可从二阶包络性质，特别是从式(8.14)，得到一个新奇的结果。取任意一个价格，比如说p_1，作为参数b。这时，取最大值的函数为$-px$，并且矢量F_{bx}对应于第一种货物的分量为-1，其余的分量为零。这就是式(8.14)的一种特别简单的情况。比较下述两个问题，在这两个问题中x_i是在选择变量z中，但在第二个问题中，某种货物，比如说x_2，是固定在对应于一个特定价格p_1的最优指标值。现在来考虑p_1的一个小的变化，我们可有

$$-\partial x_1/\partial p_1\Big|_{x_2\text{自由}} \geqslant -\partial x_1/\partial p_1\Big|_{x_2\text{固定}} \tag{8.17}$$

更进一步，通过使用式(8.15)，来比较上述每个问题与所有的x_j都固定的问题。我们可以看到：上述每个表达式都是非负的。这样，我们得出结论：任何补充需求对于那种货物价格的响应的绝对值，当剩余的货物自由地变到新的最优值时，要比当它们中的一种(或更多)保持固定时的值大。这就是勒·查特利原理的一个应用实例。这样我们就会得出推测：当某些货物定量供应时，对于其余货物需求量的变化将会限制得更死。

不幸的是，一般的勒·查特利原理好象是一个非常难理解的概念，以至于无法清楚地叙述出来。

习　题

8.1　叙述对于一个规则最小值的充分条件？

8.2　考虑一个消费者的补充需求，取货物1的价格作为唯一的有关参数。推导(8.11)式的对应形式，并用克兰姆原理求解该式。使用二阶充分条件来证明：货物1的自身替换效应是负的。怎样把该方法用来对剩余的货物求得同样的结论呢？

8.3　用例8.1来对勒·查特利原理进行说明。

参 考 文 献

1. SAMUELSON, P.A. Foundations of Economic Analysis, Harvard University Press, Cambridge, Mass, 1947.

2. SAMUELSON, P.A. 'Maximum Principles in Analytical Economics', American Economic Review, LXII(3), June 1972, pp.249-62.

3. SILBERBERG, E. 'The Le Chatelier Principle as a Corollary to a Generalized Envelope Theorem', Journal of Economic Theory, 3(2), June 1971, pp.146-55.

九、时间最优化

从形式上看，包含时间的最优选择的一般理论不需要任何新的原理，原因是，这种问题仅是一种选择变量属于不同的时期的决策问题。但是，我们总可把所有的选择变量用一个矢量x来表示，这样问题就变成了一个求函数 $F(x)$ 在约束 $G(x) \leqslant C$ 下的最大值问题。当决策已决定时，对于未来的兴趣和技术可能知道得不完全，对于一些事件也可能存在一定的不定性。但是，所有这些问题都不会改变问题的结构。我们必须对上述问题有所考虑，同时，也要考虑到在大胆地建立函数F和G时我们所持的态度。至于事件的不定性，实际上也就是该种计划问题的一个固有特点。但是，一旦函数建立起来，就可进行公式化。初始的决策随着时间的推移必须进行修改，经验可能会给我们提供更多的有关该问题的东西，而且最终的决策可能看起来不同于在开始时我们所期望的。然而，这些结果都超出了我们目前的有限知识范围，即根据当时的某个标准和当时所考虑到的可能性，选择一种在当时认为是最优的决策方法是我们在前面所没有碰到的。

因此，把包括时间的最优化问题的研究作为一个单独的标题来提出来的原因并不是这种问题需要新的基本理论，而是这种问题常常具有一种特殊的结构：从这个结构我们可得到很多有关解的东西。该结构的最重要的一点是在约束之间

存在库存——流量（stock—flow）关系。一些给定时期的变量（我们以后将用在y上的适当时期下标或时间变量来表示），具有库存的量纲，其它的量用z来表示，它的量纲和流量的量纲相同。回想起常用的生产解释，在一个时期的经济活动决定了从那个时期到下一个时期库存的改变。可行的活动指标取决于当时的库存和流量。这样，就可得到如下形式的约束

$$y_{t+1}-y_t\leqslant Q(y_t,\ z_t,\ t) \qquad (9,1)$$

最简单的说明例子是y_t代表时间t的库存存货量。如果每年从库存中分出的量为δ份，那么$Q(y_t,\ z_t,\ t)$就等于当时剩余库存$(1-\delta)y_t$，加上新的库存增加z_t。可以允许时间t对Q有单独影响。例如，当存放的方法的改进使得δ为t的减函数时，就会出现这种情况。另外一个例子是y_t代表基本货物库存矢量，该库存产生净的输出$\widehat{Q}(y_t,\ t)$，于是$Q(y_t,\ z_t,\ t)=\widehat{Q}(y_t,\ t)-z_t$，这里$z_t$是一个消费流矢量。t也可对Q有单独影响，如表示技术的改进等。

除了限制库存改变的约束外，还可能有限制某一时刻的所有变量的约束，如

$$G(y_t,\ z_t,\ t)\leqslant 0 \qquad (9,2)$$

限制消费不能超过总的输出的约束就是这方面的一个例子。对于库存和流量的非负性约束也包括在式（9,2）中。

这种问题的另外一个特点是：标准函数常常是一些函数的和式，每个函数仅依赖于一个时期的选择变量。这样，标准函数可写为

$$\sum_{t=0}^{T} F(y_t, z_t, t) \tag{9,3}$$

例如，一个使其利润流的贴现现值最大的商行就会有这种标准函数，并且时间将会以贴现因子$(1+r)^{-t}$显式包括在标准函数中，其中r为利息率(rate of interest)。另一方面，如果式(9,3)是对于一个消费者的决策而论，那么它将是一个有争辩的要求，因为它意味着这样的一种限制，这种限制可生动地表示为：午餐和晚餐之间的替换边际率和早餐无关，这称之为沃—布伦兹(Wan——Brezski)实例。然而，标准函数的离散形式对于理论分析提供了很大方便，因为它意味着决策过程也是离散的。在本书中，我们采用离散形式，对于非离散形式有兴趣的读者，可以参看有关的文章。

到目前为止，我们把时间看成是一个离散的流逝过程。对于大部分问题，把时间看成是一个连续变量对于处理问题显得更为方便。理论上没有理由说明哪一种处理方法好。对于连续的时间变量我们需要对(9.1)式至(9,3)式进行一些修正。例如，式(9,3)是一个有限项的和。把时间看成是连续的就等于把时间间隔[0,T]划分成越来越多且越来越小的小区间，然后，取极限。取极限后，无限多项的和，其中每一项都是无穷小，就是在区间[0,T]上的积分。不熟悉积分学的读者这时应该参阅一下有关的积分学基本定义和运算规则；这方面的参考文献已在本章后面的参考文献中列出。在大部分问题中，只要把积分想象为仅以一种不同记号所表示的和就足够了。当时间连续变化时，习惯上用y(t)代替y_t。这样，标准函数可写成

$$\int_0^T F(y(t),\ z(t),\ t)\,dt \qquad (9,4)$$

当时间连续变化时，需要引入库存改变率来对库存——流量约束进行修改。改变率可用导数来表示。然而，习惯上用在函数上加一点来表示对时间的导数，而不用在其后加一短竖来表示，即用 $\dot{y}(t)$ 而不用 $y'(t)$，后者常用在 t 不是时间的场合。这样可有

$$\dot{y}(t) \leqslant Q(y(t),\ z(t),\ t) \qquad (9,5)$$

最后，式(9.2)仅需重新写为

$$G(y(t),\ z(t),\ t) \leqslant 0 \qquad (9,6)$$

当把时间看成连续变量时，将会有更深入的数学问题存在。前面所有的理论都是根据有限个选择变量建立的。当把时间看成连续时，对于区间 $0 \leqslant t \leqslant T$ 中的所有 t，选择变量 y(t)和z(t)变成了无穷多个。这时，我们得使用无穷大维空间的分离定理，要保证被分离的集合之一有非空内点，数学上是很困难的。对此要进行严格的论证需要一些强有力的数学工具。但是，最后的结果是很简单的，并且对于从第四章到第六章的理论，无需做大的调整就可使用。这里我们将继续使用上述理论，对于有兴趣的读者，我们在书后列出了一些更进一步的文献。

在静态经济学中的大部分最优化讨论中，我们经常选用生产例子来作为说明例子。对于由式(9,4)至(9,6)所确定的问题，我们也有一个类似的标准解释，这里取y(t)为基本货物库存，z(t)为现行经济活动指标(包括消费流量)。这样，F可能与库存和流量都有关。但是象欧文·菲谢尔(Irving

Fisher)所说，通常强调的是：消费流量是经济活动的主要目的，因此，后面我们将仅考虑F和库存无关的情况。这时称F的值为效用流量，标准函数式(9,4)称为效用积分。

对于有限约束，我们对每个约束引入了一个拉氏乘子，并以标准形式建立了拉氏表达式。在这里也可完全进行同样的工作，除了用积分代替求合之外。记式(9,5)的乘子为$\pi(t)$，式(9,6)的乘子为$\rho(t)$，则有

$$\int_0^T \{F(y(t),z(t),t)-\pi(t)[\dot{y}(t)-Q(y(t),z(t),t)]-\rho(t)G(y(t),z(t),t)\}dt \qquad (9,7)$$

对于端点，也可能有其它的约束。目前，对于这些约束，我们将假定为一种很简单的形式。假定T是固定的，并有初始库存矢量b_0和最终目标库存矢量b_T。这样，附加约束为

$$y(0)\leqslant b_0, \qquad y(T)\leqslant b_T \qquad (9,8)$$

把这些式子写成标准形式，并用φ_0和φ_T表示上述两个约束的乘子，这样，为了得到该问题的拉氏表达式，我们必须把

$$-\varphi_0[y(0)-b_0]+\varphi_T[y(T)-b_T]$$

加到式(9,7)中。令拉氏表达式对于每个选择变量的偏导数为零就可得到一阶条件。当然，这样的条件将有无穷多个。

由于式(9,7)中包括了$\dot{y}(t)$，使得问题更难处理。这和式(9,1)的离散情况有点类似，在那里每个y_t出现在对应于两个相邻时期的两个约束中。这种相似性也表明了对于目前的问题我们可做些什么，因为我们可重新按排和式使得每个y_t仅出现在拉氏表达式的一项中。这样，我们可有

$$\pi_0(y_1-y_0)+\pi_1(y_2-y_1)+\cdots+\pi_{T-1}(y_T-y_{T-1})$$

$$= -\pi_0 y_0 - (\pi_1 - \pi_0) y_1 - \cdots - (\pi_{T-1} - y_{T-2}) y_{T-1} + \pi_{T-1} y_T$$

或者写成

$$\sum_{t=0}^{T-1} \pi_t (y_{t+1} - y_t)$$

$$= \pi_{T-1} y_T - \pi_0 y_0 - \sum_{t=1}^{T-1} (\pi_t - \pi_{t-1}) y_t$$

当时间间隔变得更小时，我们得到该式的极限

$$\int_0^T \pi(t) \dot{y}(t) dt = \pi(T) y(T) - \pi(0) y(0) - \int_0^T y(t) \dot{\pi}(t) dt \qquad (9,9)$$

注意：取极限时，时间间隔不是1，而是无穷小，这时$\pi_{T-1} y_T$可用$\pi(T)y(T)$代替。

方程(9,9) 称为分部积分公式。注意，当使用该式时，我们得假定拉氏乘子$\pi(t)$作为时间的函数应该是可微的。如果不做这个假定，也可进行上述推导，但是推导过程是很复杂的，而且这种扩充对于我们目前的目的没有多大用处。

令最优选择为$y(t), z(t)$。假设约束限定是满足的，那么一阶条件将也是满足的。而且，如果F是一个凹函数，Q是一个凹矢量函数，G是凸矢量函数，那么一阶条件也将是充分的。

通过分部积分，拉氏表达式变成

$$\int_0^T \Big\{ F(y(t).z(t), t) + \dot{\pi}(t) y(t) + \pi(t) Q(y(t),$$

$$z(t),\ t)-\rho(t)G(y(t),z(t),t)\Big\}\,dt-\pi(T)y(T)$$

$$+\pi(0)y(0)-\varphi_0\,[y(0)-b_0]$$

$$+\varphi_T\,[y(T)-b_T] \qquad (9,10)$$

当对这个式子求微分时，对于端点我们必须仔细处理。$y(0)$和$y(T)$对于导数在积分内外都有贡献。积分内的贡献为无穷小，因此可以忽略不计。这样，对于$y(0)$和$y(T)$的导数可给出条件

$$-\pi(T)+\varphi_T=0 \quad , \quad \pi(0)-\varphi_0=0$$

或者

$$\pi(T)=\varphi_T \quad , \quad \pi(0)=\varphi_0 \qquad (9.11)$$

使用上述关系，对于约束(9.8)的补充松驰条件可写成

$$\pi(0)\,[b_0-y(0)]=0,$$

$$\pi(T)\,[y(T)-b_T]=0 \qquad (9.12)$$

这时，对于$\pi(0)$和$\pi(T)$都有现成的解释。象往常一样，把b_0和b_T看成是问题的参数，并且考虑最大效用积分都是它们的函数，比如说$V(b_0,\ b_T)$，那么

$$\partial V/\partial b_0=\varphi_0=\pi(0),$$

$$-\partial V/\partial b_T=\varphi_T=\pi(T) \qquad (9,13)$$

换言之，$\pi(0)$是附加一单位初始库存所得到的额外利润，$\pi(T)$是为了满足由一单位所提出的更严格的最终要求所经受的损失。后面我们将会看到这种解释可推广到对所有的$\pi(t)$的说明中。上述补充松驰条件的意义也是明显的。

剩余的一阶条件可通过对积分中的其它项求导得到

$$F_y(\bar{y}(t),\bar{z}(t),t)+\dot{\pi}(t)+\pi(t)Q_y(\bar{y}(t),\bar{z}(t),t)$$
$$-\rho(t)G_y(\bar{y}(t),\bar{z}(t),t)=0 \qquad (9,14)$$
$$F_z(\bar{y}(t),\bar{z}(t),t)+\pi(t)Q_z(\bar{y}(t),\bar{z}(t),t)$$
$$-\rho(t)G_z(\bar{y}(t),\bar{z}(t),t)=0 \qquad (9,15)$$

然而，这些条件也可看成是对于每个 t，$\bar{y}(t)$，$\bar{z}(t)$使得$F(y, z, t)+\dot{\pi}(t)y+\pi(t)Q(y, z, t)$在约束$G(y, z, t)\leqslant 0$下取最大值的一阶条件。现在我们来看一看是否是这样的。很清楚，为了使效用积分为最大，我们不想要对于每个t，$F(y, z, t)$在约束$G(y, z, t)$下取最大值；要不我们的目光就太短浅了。某时刻的选择将通过式(9.5)影响到该时刻以后的所有选择。例如，今天的大量消费挥霍将会使明天的资本库存变得更少，于是带来了随后一段时间的较低效用流量。这样，就可能使效用积分减少，因此，我们必须要以一定的差额对目前和将来的利润进行权衡，以达到平均最优值（intertemporal optimum）

到目前为止，我们都是通过用适当的影子值对目的函数进行修正，来考虑由于约束所引起的收益或损失。例如，在式(9,15)中，$\rho(t)G_z(\bar{y}(t), \bar{z}(t), t)$表示的是当约束方程（9.6）中的时间为$t$时，$z$的边际成本。这也就是说，另一项$\pi(t)Q_z(\bar{y}(t),\bar{z}(t),t)$表示的是从约束方程(9.5)得到的边际影子收益。事实的确如此。不久我们会看到，在一般意义下，$\pi(t)$是在时间t时的库存影子价格。这样，目前的单位额外z在单位时间后将会带来Q_z单位的额外库存，因此，通过加入边际影子值πQ_z，就可把z的将来影响考虑

进去。

对于选择变量y的解释，除了项$\dot{\pi}(t)$之外，和上面的解释相类似。通常人们好象更愿意把$\dot{\pi}(t)$想象为从另一单位库存所得到的额外资本的自然增长率(rate of accrual)。然而，这种解释不是很完全的。要使不等式(9.5)严格满足，几乎不可能达到最优值；在我们将要碰到的所有问题中，都需要对库存有一个附加量。这时，对于我们来说，根本没有实际的库存指标可选择。如此说来，任何时刻的选择z(t)，只要让式(9,5)保持为等式，就固定了下一时刻的库存。可用如下的术语对此加以强调；称y(t)为状态变量，称z(t)为控制变量。这样，状态变量是由初始条件和控制变量的选择决定的。因此，比较好的办法是把库存看成是被动的，而影子价格是主动的，即π(t)取适当的值就能使(9,5)式满足。这时，上述条件可解释为：在最优时间轨迹上，影子价格的改变使得从某一时刻占有的额外单位的库存所得到的边际利润（这不仅包括效用流，而且也包括现有的和将来的影子缺乏成本以及资本收益）为零。换言之，在这种离散经济中，承担影子成本和得到影子利润的生产者，当保持在过去的最优流量决策所生产的库存时，将处于平衡状态。这就是离散经济中价格的意义对于平均经济问题的推广。

为了方便起见，引入一个新记号，定义一个新函数H（称为哈密尔顿表达式）为

$$H(y,z,\pi,t)=F(y,z,t)+\pi Q(y,z,t) \qquad (9,16)$$

这时，式(9.5)就是z(t)使$H(\bar{y}(t), z, \pi(t), t)$在约束$G(\bar{y}(t),z,t)\leq 0$下取最大值的一阶条件。该静态经济学最大值问题的拉氏表达式为

$L(\bar{y}(t),\ z(t),\ \pi(t),\ \rho(t),\ t)$

$= H(\bar{y}(t), z, \pi(t), t) - \rho(t) G(y(t), z, t)$

最优选择z(t)自然也是$\bar{y}(t)$，$\pi(t)$和t的函数，称其为策略函数。把这个关系式代入到哈氏表达式中，就得到了最大值函数，或最大的哈氏表达式，记为$H^*(y(t),\ \pi(t),\ t)$。

这时，式(9.14)可写成

$$\dot{\pi}(t) = -L_y(\bar{y}(t),\ \bar{z}(t),\ \pi(t), \rho(t), t) \qquad (9.17)$$

在这个静态经济学最大值问题中，$\bar{y}(t)$和$\pi(t)$都是对标准函数和约束方程有影响的参数。因数，我们可用式(3.3)来得到

$$\dot{\pi}(t) = -H_y^*(\bar{y}(t),\ \pi(t),\ t) \qquad (9,18)$$

更进一步讲，使用同样的定理，我们可得到$H_\pi^* = L_\pi = Q$，这些值都是在最优点计算的。这样我们就能把式(9,5)(现在假定是一个等式)以一种更为对称于(9,18)式的形式写出来

$$\dot{\bar{y}}(t) = H_\pi^*(\bar{y}(t),\ \pi(t), t) \qquad (9,19)$$

根据式(9,18)和(9,19)以及端点的条件，我们可求得$\bar{y}(t)$和$\pi(t)$。假定y(0)和π(0)已知，那么原则上讲求解上两个方程是比较简单的。尽管有解的存在定理和解析方法存在，但是这些我们都不需要；最坏的情况是，我们还可从上述方程给出小离散区间t上的近似改变率，并且通过叠代来计算近似解。事实是我们不知道$\bar{y}$(0)和π(0)，但是补充松驰条件(9,12)常常可以提供足够的条件，以使得我们求得解。例如，我们可对不同的$\bar{y}$(0)和π(0)进行偿试，在各种偿试结果中，仅有一对能够求得的y(T)和π(T)满足式(9,12)。而且，在实际中，将有更多的直接方法可采用，不

需要这种烦锁的偿试法。最后，求得了$\bar{y}(t)$和$\pi(t)$，我们就可容易地找到最优轨迹$z(t)$。

当F和Q是凹函数，G是凸函数时，一阶必要条件对于效用积分的最大值也是充分的。证明过程有点烦锁，而且也没有引入任何超出静态经济学范围的新概念，因此，我们省去证明过程，仅以一种概括的形式写出目前为止所得到的结果作为参考——

如果$\bar{y}(t)$和$z(t)$使得式(9,4)在约束(9,5)，(9,6)和(9,8)下取最大值，并且约束限定是满足的，那么将存在一个非负函数$\pi(t)$，使得

〈i〉 $z(t)$使$H(\bar{y}(t), z, \pi(t), t)$，在约束$G(\bar{y}(t), z, t) \leqslant 0$下取最大值；

〈ii〉 $\bar{y}(t)$和$\pi(t)$满足微分方程(9,18)和(9,19)；

〈iii〉 补充松驰条件(9,12)满足。

如果F是凹的，Q(矢量)是凹的，G(矢量)是凸的，那么〈i〉—〈iii〉同时也是充分的。

这个结果通常称为最大值原理，是由庞特雷亚吉恩(Pontryagin)和他的同事们总结成这种形式的。由于该结果对于附随的影子价格的上述突出作用，因此它对求解许多经济问题是很有用的和很有启发性的。在第十一章中，我们将要讨论一些这方面的应用。

对于最大值原理还有一种特殊情况值得分开来说明，这不仅是由于对于这种情况有简单的解存在，而且也是由于该情况是较早地用到包括时间的最优化问题中的。这种情况就是$Q(y, z, t) = z$，即库存的改变率本身就是控制变量。假设没有其他的类似于(9,6)式的约束，那么只要用$\dot{y}$代替z，

使哈氏表达式最大的条件为

$$F_{\dot{y}}(\bar{y}(t),\ \dot{\bar{y}}(t),\ t)+\pi(t)=0$$

这时，式(9,17)可写成仅包括$\bar{y}(t)$的微分方程

$$\frac{d}{dt}[F_{\dot{y}}(\bar{y}(t),\ \dot{\bar{y}}(t),\ t)]=F_{y}(\bar{y}(t),\ \dot{\bar{y}}(t),\ t) \tag{9,20}$$

这个方程称为欧拉—拉格朗日方程。利用复合函数求导，左边的总导数将包括$y(t)$的关于时间的二阶导数，这样，该方程是一个二阶微分方程。这个方程总可根据两个参数求解，而且，除了一些复杂的周期情况之外，一般我们可调整两个参数的值来使端点条件得到满足。

当式(9,20)能积分时，该方法将更有用，因为这样就能把问题降为求解一个一阶微分方程和从初始条件确定一个常数的问题。当三个变量y，$\dot{y}$和t中有一个不包含在F中时，就可这样做。如果$\dot{y}$对F没有影响，那么$F_{y}(\bar{y}(t),\ t)=0$。然而，这种情况根本反映不出该问题的时间平均特性；该问题变成了一个每一时刻的离散最优化问题。另外两种情况是我们感兴趣的。如果y对F没有影响，那么可对式(9,20)直接进行积分，得到

$$F_{\dot{y}}(\bar{y}(t),\ \dot{\bar{y}}(t),\ t)=\text{常数} \tag{9,21}$$

常数的值用端点的条件确定。最后，如果t对F没有直接影响，可从式(9,20)得到

$$\frac{d}{dt}\left\{F(\bar{y}(t),\ \dot{\bar{y}}(t))-\dot{\bar{y}}(t)F_{\dot{y}}(\bar{y}(t),\ \dot{\bar{y}}(t))\right\}$$

$$=F_{y}\dot{y}F+F_{\dot{y}}\ddot{y}-\ddot{y}F_{\dot{y}}-\dot{y}\frac{dF_{\dot{y}}}{dt}=0$$

式中导数的值都是在最优点计算的。因此，可得

$$F(\bar{y}(t),\ \dot{\bar{y}}(t)) - \dot{\bar{y}}(t)F_{\dot{y}}(\bar{y}(t),\ \dot{\bar{y}}(t)) = 常数 \tag{9,22}$$

一旦常数确定之后，这也是一个一阶微分方程。

最后这种情况和前面的一般情况有些类似。假定我们有这样的一个问题，该问题中，不存在各种技术改进因素，贴现等，这样时间变量对各个函数没有直接影响。这时，最大值哈氏表达式H^*也不显含时间变量t。这样，使用式(9,18)和(9,19)，我们得到

$$dH^*(\bar{y}(t),\ \pi(t))/dt = H^*_y(\bar{y}(t),\ \pi(t))\dot{y}(t) + H^*_\pi(y(t),\ \pi(t))\dot{\pi}(t) = 0$$

因此，最大哈氏表达式沿着最优轨迹是常数。如果我们知道了H^*的函数形式，那么就可在(y,π)空间中画出它的图形。这些图形中有一条将是y和π的最优轨迹，利用端点条件就能确定出最优轨迹。这种图形称之为相位图形(Phase Diagram)，在第十一章中我们要给出这方面的例子。

例　　题

例9.1 这个例子将被用来说明怎样用最大值原理处理一个人一生的节余决策。考虑一个生命期为T的工人，在他的一生中以常率w挣工资，并且以常率r进行节余积累，或者以同样的r对其累积债务付还。这样，当其资本为k时，他的收入为(w＋rk)。如果他的消费为c，那么资本积累为

$$\dot{k} = w + rk - c \qquad (9,23)$$

这样，k是一个状态变量，c是控制变量。假定没有遗产（继承的）或遗赠，这样端点条件为

$$k(0) = 0 = k(T) \qquad (9,24)$$

假定对于选择没有其它的约束，并且取最大值的函数为

$$\int_0^T \log c e^{-\alpha t} dt \qquad (9,25)$$

为了说明最大值原理，我们写出哈氏表达式

$$H = \log c e^{-\alpha t} + \pi(w + rk - c) \qquad (9,26)$$

选择c使H最大的条件为

$$c^{-1} e^{-\alpha t} - \pi = 0 \qquad (9,27)$$

把这个关系代入到式（9.26），最大哈氏表达式变为

$$H^* = -(\log \pi + \alpha t) e^{-\alpha t} + \pi(w + rk) - e^{-\alpha t} \qquad (9,28)$$

k和π的微分方程为

$$\dot{k} = \partial H^* / \partial \pi = w + rk - \pi^{-1} e^{-\alpha t} \qquad (9,29)$$

$$\dot{\pi} = -\partial H^* / \partial k = -r\pi \qquad (9,30)$$

可容易地对式（9,30）求解，得到

$$\pi(t) = \pi_0 e^{-rt} \qquad (9,31)$$

式中π_0是一个待定常数。把π代入（9,29）式，对该式进行积分，并注意到

$$d(ke^{-rt})/dt = (\dot{k} - rk)e^{-rt} = we^{-rt} - \pi_0^{-1} e^{-\alpha t}$$

这时，π_0的值可用式（9.24）求得，这样就完成了求解过程。然而，不用这样做，也能发现一些经济上很重要的事实。从（9.27）式，我们得到

$$c(t) = \pi_0^{-1} e^{(r-\alpha)t} \qquad (9,32)$$

这样，沿着最优计划，如果r α，该工人的一生中的消费

是逐渐增加的。由于消费和工资，在具有相等的贴现现值的意义下，在他的一生中必须平衡，这就意味着，在一生中的前期$c<w$，在后期$c>w$，即前期积累，后期花掉其积累。如果$r<\alpha$，情况和上面所说的相反。当然，一些直观的约束可能会防止消费者由他的人生前期的不节余所引起的负的资产，并且对于所有想这样做的消费者经济上也不可能处于平衡，结果是r要改变。然而，这些都是离散结果。在特殊情况$r=\alpha$下，工资流本身就构成了最优消费流，因此节余正好为零。

用欧拉——拉格朗日方法求解上述问题将更简单。记取最大值的函数为

$$\int_0^T \log\left(w+rk-\dot{k}\right)e^{-\alpha t}dt$$

这时，方程（9.20）变为

$$\left\{\frac{d}{dt}\frac{-e^{-\alpha t}}{w+rk-\dot{k}}\right\}=\frac{re^{-\alpha t}}{w+rk-\dot{k}}$$

根据c，上式变为

$$c^{-2}\dot{c}e^{-\alpha t}+c^{-1}\alpha e^{-\alpha t}=c^{-1}re^{-\alpha t}$$

或者为

$$\dot{c}/c=r-\alpha$$

对这个式子进行积分，就得到了式（9.32），剩下来的问题就是根据端点条件确定常数。

例9.2 这个例子没有任何经济意义，但它的优点是答案事先知道，这样能会使我们对前述的方法有一个更好的了解。而且，该例也说明：尽管在上面的理论中是把t自然地解释为时间，但是任何其他的变量，如用来作为相同形式的空间，也是适合上述理论的。

我们将要找到平面上点（0，0）到点（1，0）之间的最短距离轨迹。选择t为水平坐标，y为垂直坐标。显然，任何形成几个回路或卷曲的轨迹不可能具有最短距离，因为可通过省去回路或s形卷曲来缩短距离。因此，我们仅把讨论限制在y是t的单值函数的情况。邻近点（t，y）和点（t + dt，y + dy）之间的距离为$[(dt)^2+(dy)^2]^{1/2}$，这样问题就变成了取$\int_1^0 -(1+\dot{y}^2)^{1/2}dt$在$y(0)=0=y(1)$下的最大值。

首先，使用欧拉—拉格朗日方法。由于被积函数F是不依赖于y的，因此可得到式（9.21），从这个式子得到 $\dot{y}$ = 常数，或者$\bar{y}(t)=c_1+c_2t$，c_1，c_2是两个特定常数。使用端点条件，可得到$c_1=0=c_2$，或者对于所有的t，$\bar{y}(t)=0$，这就是连接上两点的直线。

为了使用最大值原理，记$\dot{y}=z$，定义哈氏表达式为

$$H=-(1+z)^{1/2}+\pi z$$

取z的值，使这个式子取最大值，令$H_z=0$，求解该方程，得到

$$z=\pi/(1-\pi^2)^{1/2},\quad H^*=-(1-\pi^2)^{1/2} \qquad (9,33)$$

y和π的微分方程分别为

$$\dot{y}=\pi/(1-\pi^2)^{1/2},\quad \dot{\pi}=0 \qquad (9,34)$$

注意到H不显含时间t，因此，H^*必须是常数，这样从式（9,33）可知π为常数。从式（9,34），可知$\dot{y}$是常数，对该式积分并利用端点条件确定积分常数，得到的结果和利用欧拉—拉格朗日方法得到的结果相同。

习 题

9.1 求解例9.1的节余问题，把取最大值的函数定义为

$$\int_0^T U(c)e^{-\delta t}dt$$

式中$U(c)=c^{1-\varepsilon}/(1-\varepsilon)$　　　　$\varepsilon>0$

9.2 对于一个没有工资收入，但在他的生活开始时有继承资本k_0并且他还计划留下k_T的遗赠的人，求解习题9.1。要使求解可能，k_T的值最大能取多少？

参 考 文 献

1. PONTRYAGIN, L. S., BOLTYANSKII, V. G., GAMKRELIDZE, R. V. and MISCHENKO, E. F. The Mathematical Theory of Optimal Processes, Trans. Wileg/Interscience, New York, 1962.

2. GEL'FAND, I. M. and FOMIN, S. V. Calculus of Variations, Trans. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1963.

3. ARROW, K. J. 'Applications of Control Theory to Economic Growth', in Mathematics of the Decision Sciences Part 2, American Mathematica Society, Providence, R. I., 1968, pp. 85—119.

4. SHELL, K. 'Applications of Pontryagin's Maximum Principle to Economics', in Mathematical

Sytems Theory and Economics, Vol. I, eds. H. W. Kuhn and G. P. Szego, Springer-Verlag, Berlin, 1969.
5. DORFMAN, R. 'An Economic Interpretation of Optimal Control Theory', American Economic Review, LIX(5), December 1969, pp. 817-31.
6. BIRKHOFF, G. and ROTA, G-C, Ordinary Differential Equations, Second Edition, Blaisdell, Waltham, Mass., 1969, chs. 1, 2, 4 and 5.

十　动态规划

前章我们已说明了$\pi(0)$的值可被解释为初始库存的影子价格矢量。同时也说明了$\pi(t)$可被解释为时间t的库存的影子价格。要搞清楚$\pi(t)$的这种解释，最简单的方法是使用对$\pi(0)$的解释，并且通过建立一个以$\pi(t)$为初始库存的影子价格问题来说明。为此，我们必须取t为最优问题的起始点。考虑时间t的任意一个特定值t'，并且也来考虑完全和式(9,4)一样的积分式的最大值，但是这里的区间为$[t', T]$，该区间比原来的小，约束为在该小区间上所满足的(9,5)式和(9,6)式。保持终点约束$y(T)\geq b_T$不变，假定初始条件为更一般的条件$y'(t)\leq y'$，这里y'是某个参数矢量。该问题的最大值将依赖于t'和y'（这两个参数和其他的参数有关），把这个最大值记为$V(t', y')$。

现在假定第九章关于整个区间$[0,T]$的问题已经解出，并且已求得最优轨迹$\bar{y}(t)$，$\bar{z}(t)$和$\pi(t)$。令$y'=\bar{y}(t')$。很容易看到仅在区间$[t', T]$上所考虑的最优轨迹满足在该区间内的最大值原理的所有一阶条件。在凹性假设下，这些条件是能够充分保证截断轨迹的最优性的。

同样，我们也可选一个比T小的终点t''，并且施加一个终点库存要求$y''=\bar{y}(t'')$，这样全部问题最优的和该子问题相重合的那部分对于子问题也是最优的。换言之，如果我们把最优轨迹取某一段，那么我们将得到一个在所截区间上

的截断最优化问题的最优轨迹，该问题的端点条件由所截点的状态变量的值确定。这也就是取最大值的函数和约束的可分特性征之一。

现在，我们可使用前述的结果来把$\pi(t')=V_y(t', \bar{y}(t'))$解释为该子问题的初始库存的影子价格。$\pi(t')$的每个分量都对区间$[t', T]$上的效用积分有贡献，这是由初始库存$y'=\bar{y}(t')$的单位增加所引起的。这个贡献和区间$[0, T]$上效用积分的贡献不同，后者是由在时间$t'$的库存的增加所引起的，因为在后者情况下，我们可预计该贡献量，并且可适当地调整$[0, t']$上的效用流量。但是，根据包络定理，我们不需直接做重复计算。把时间t'时库存的贡献（附加量）看成参数，开始时就把效用流调整为最优就能使我们得到：近似到一阶，重新调整是无差别的。由于特定值t'可任意选择，这样就完成了对区间$[0, T]$中的每个t，把$\pi(t)$看成是时间t时的库存影子价格的说明。

函数V除了用来做上述说明外，还有其他的用处。事实上，我们可根据这个函数建立起时间平均最优化的全部理论和依赖于该函数的求解方法。这种方法称为动态规划（Dynamic Programming）。我们将使用已建立的最大值原理来推导动态规划的一些基本结果，但是两种方法（最大值原理和动态规划）是等同的，因此，也可用动态规划直接来推导。

象往常一样，$\bar{y}(t)$、$z(t)$和$\pi(t)$将代表区间$[0, T]$上有关变量的最优轨迹。取该区间内的任意一个t，来考虑$V(t, \bar{y}(t))$。取一个很短的时间间隔dt，对于一阶近似，有

$$\bar{y}(t+dt) = \bar{y}(t) + Q(\bar{y}(t), \bar{z}(t), t)dt$$

在区间 [t, t+dt] 中对效用积分的贡献为 $F(\bar{y}(t), \bar{z}(t), t)dt$。此区间之后的轨迹是由区间 [t+dt, T] 所截的最优问题的轨迹接续，因此，当初始库存为$\bar{y}(t+dt)$时，该截断区间上的轨迹也是最优的。这样剩余的效用积分等于 $V(t+dt, \bar{y}(t+dt))$。因此，对于一阶近似，可有

$$V(t,\bar{y}(t)) = F(\bar{y}(t),\bar{z}(t),t)dt + V(t+dt, \bar{y}(t+dt)) \tag{10.1}$$

现在考虑满足$G(\bar{y}(t),z,t) \leqslant 0$的任意一个z。如果这个z值是在时间t选取的，那么对于一阶近似，则有

$$y(t+dt) = \bar{y}(t) + Q(\bar{y}(t),z,t)dt$$

根据这个值，我们得到区间 [t,t+dt] 中的贡献为$F(\bar{y}(t), z,t)dt$，因此，此后的效用积分至多为$V(t+dt,y(t+dt))$。进一步讲，这两项的合决不能超过$V(t,\bar{y}(t))$，因为如果超过的话，我们将能够找到一种可行的政策，使得比我们开始时作为最优选择的政策更好。因此，我们必须有

$$V(t,\bar{y}(t)) \geqslant F(\bar{y}(t),z,t)dt + V(t+dt, y(t+dt)) \tag{10.2}$$

结合式(10.1)和(10.2)，我们得到

$$V(t,\bar{y}(t)) = \max_{z}\left\{F(\bar{y}(t),z,t)dt + V(t+dt, y(t+dt)\right\} \tag{10.3}$$

最大值是在约束$G(\bar{y}(t),z,t) \leqslant 0$下取的。

我们可对式(10.3)右边的V值取线性近似来对该式进行简化。对于一阶近似，可有

$$V(t+dt, \bar{y}(t)+Q(\bar{y}(t),z,t)dt) = V(t, \bar{y}(t)) + V_t(t, \bar{y}(t))dt + V_y(t, \bar{y}(t)) Q(\bar{y}(t),z,t)dt$$

把这个关系式代入式（10.3），可以看到$V(t, \bar{y}(t))$相消。这时，可用dt除于该式，最后注意到项$V_t(t, \bar{y}(t))$不包含z，因此，可把它从最大值算子中提出来。这样就可得到

$$0 = V_t(t, \bar{y}(t)) + \max_z \{ F(\bar{y}(t),z,t) + V_y(t, \bar{y}(t)) Q(\bar{y}(t),z,t) \} \tag{10.4}$$

注意到这个取最大值的函数看起来很象式（9.16）的哈密尔顿表达式，除了用$V_y(t, \bar{y}(t))$代替$\pi(t)$。并且再也没有比这更自然的替换，因为从$\pi(t)$作为影子价格的解释我们知道它们是相同的。最大值的约束条件同前，这样就给出了最大值哈氏表达式H^*。因此，可得到

$$V_t(t, \bar{y}(t)) + H^*(\bar{y}(t), V_y(t, \bar{y}(t)), t) = 0 \tag{10.5}$$

这就是动态规则的基本方程。

上述方程为我们提供了求解时间平均最优化问题的另外一种方法。开始时我们当然不知道V。但是通过求解纯静态经济学最优化问题，就能求得H^*。这时，V必须满足的微分方程为$V_t + H^*(y, V_y, t) = 0$。我们可根据各种待定常数来解这个方程，然后利用端点条件确定这些待定常数。实际上，上述求解过程是不容易的，因为H^*的函数形式一般是十分复杂的。在任何情况下，偏微分方程的求解都不是一件平常的事。因此，一般仅能对一些很简单的情况才能找到解析

解，而且要得到数值解，还需要有良好的计算设施。结果是动态规划没有最大值原理在求解经济问题中应用得多，特别是经常要寻找闭合形式的解的经济理论中。然而，动态规划的确也能很快地给出一些影子价格的结果，而且它在包括不定性的问题中用得更多。

到此为止的讨论是保持终点时间T和终点库存要求b_T不变，而允许初始库存和时间变化。反过来也是可行的，而且也能得到一个和式（10.5）类同的方程。记$W(t,y)$为区间$[0,t]$上的，初始库存捐款为b_0，时间t的要求为$y(t)$时最大效用积分。这时，影子价格的解释变为$\pi(t)=-W_y(t,\bar{y}(t))$。负号的出现是很自然的，因为要满足一个较大的要求降低了可能的效用流量。而且，我们这时必须把$W(t,y(t))$分成一个在区间$(t-dt,t)$上的效用流和$W(t-dt,\bar{y}(t+dt))$。这样会使正负号再一次变号。结果为

$$W_t(t,\bar{y}(t))-H^*(\bar{y}(t),-W_y(t,\bar{y}(t),t)=0 \tag{10.6}$$

这种处理方法能使我们把有关时间最优化的讨论应用到更一般的端点条件。选取固定时间和可用库存的初始条件当然是一种很自然的条件，但是，终点条件的形式，除了固定的时间和库存要求外，都是能想到的。这样我们可能选取一个固定的库存目标，然后希望能在较短的时间内实现这个目标。这时T本身就是选择变量，取最大值的函数可被写成$\int_0^T(-1)dt$。而且，对终点时间和库存还可能有某种灵活性，如为了满足更严格的要求，就得花费更长的时间。这种约束的一般形式可写成

$$J(T,y(T))\leqslant 0 \tag{10.7}$$

我们可分两步来解这个问题。首先，固定T和y(T)，来求解对应于这个终点条件的上述问题。通过求解，可得到标准值为$W(T,y(T))$。在满足(10.7)式的所有$(T,y(T))$对中，我们可选取一对使该式取最大值的$(T,y(T))$。其次，求解一个静态经济学问题，对于这个问题，有一个拉氏乘子ζ使得最优选择$(\bar{T},y(\bar{T}))$满足一阶条件

$$W_t(\bar{T},y(\bar{T}))=\zeta J_t(\bar{T},y(\bar{T})),$$
$$W_y(\bar{T},y(\bar{T}))=\zeta J_y(\bar{T},y(\bar{T}))$$

使用式(10.6)以及影子价格的解释，上式变为

$$\left.\begin{aligned}&-\pi(T)=\zeta J_y(\bar{T},y(\bar{T}))\\&H^*(\bar{y}(\bar{T}),\pi(\bar{T}),\bar{T})=\zeta J_t(\bar{T},y(\bar{T}))\end{aligned}\right\}\quad(10.8)$$

只要ζ为正，这就意味着，在最优点，矢量$(H^*,-\pi)$应该和矢量(J_t, J_y)平行。由于后者是垂直于由$J(t,y)=0$确定的曲面的，那么前者也应该垂直于这个曲面。由于这个原因，式(10.8)称为横截条件(transversality conditions)。作为一个例子，考虑前面所说的最小时间问题。在该问题中，T不显含在由(10.7)式确定的终点条件中。这样J_t恒等于零，最优点的横截条件变为$H^*=0$。另一方面，如果T是固定的，但终点库存是完全无约束的，那么J_y恒等于零，横截条件变为$\pi(T)=0$。

动态规划，最大值原理以及特殊情况下的欧拉——拉格朗日方法给我们提供了求解包括时间的最优化问题的三种不同的等价方法。它们都有不同的优缺点，在某些经济问题中，三种方法都是有用的。顺便提一句，物理学家长期以来都是把运动定理用一种形式上和时间经济最优化很相似的方法来公式化的。上述三种方法都起源于物理学。例如，从

物理学我们知道：式（9.18）和（9.19）就是运动的哈密尔顿典型方程，式（10.5）为哈密尔顿一雅可比方程。变量y和π在物理学中经常解释为位置和动量。阅读和比较物理学中和经济学中对这些问题的处理方法是很有启发意义的。

时间平均最优化问题还有一种延伸，这种延伸在许多经济问题中是很重要的。经常是根本不能自然地指定决策的最终日期。事实上，我们很少能事先指定一个时期并要求对超过这个日期的事项完全不加考虑。这个问题对于一个人来说可能是不重要的，但当我们考虑的决策范围越来越大时，就显得越来越重要了。看起来在一个有限时间的问题中的最终库存要求好象是把无限的将来考虑进去了，因为这些库存本身就隐含着提供了超过最终时间的效用流量，但是，很明显，这是很不充分的。目标库存要求指标将需用一种完全任意的方法来定，而不用对最终的效用流量进行显式分析来定。这种显式分析意味着要对一个，除了时间比较长外，和原来的问题很象的问题求解。当然，对于这种问题，根本没有合乎逻辑的停止点。这样就使得我们允许有无限大的时间域。

当我们考虑无限大时间范围内的决策时，将会遇到一些技术问题。首先，这时效用积分可能不总是有限的。如果两个或更多的可行计划各自都有无限大的效用积分，那么就不能直接说哪一个计划较好。这样原来把最优定义为一个提供最大效用积分的计划的说法变得无用了。对于两个无限大的积分，仅能做部分地和间接地比例。最简单的方法是比较相同的有限范围内的积分，然后取当这个公共范围趋于无限大时的极限。这样，对于无限将来的两个计划（$y(t), z(t)$）和（$y'(t), z'(t)$）以及每个T，计算式

$$\int_0^T F(y(t), z(t), t)\,dt - \int_0^T F(y'(t), z'(t), t)\,dt \tag{10.9}$$

的值并取当T趋于无限大时，该式的极限。如果极限是非负的，那么就说计划（y(t),z(t)）超过（overtake）计划（y′(t),z′(t)）。如果一个可行计划超过其它所有的可行计划，称其为最优计划。

当效用积分收敛时，就能使用原来的最优定义，因为这时差的极限等于极限的差。这样超过标准仍然是一般的。但是使用这个概念的实际优点仅是局部的。我们不可能用它来比较所有的无穷效用积分，因为完全可能会出现这样的情况，这时式（10.9）的差值可能在正负之间重复摆动。使用超过概念根本不能说明这些计划的相对优点。尽管如此，在一些情况下，上述方法还是很有帮助的，而且这种方法或者该方法的一些稍微变型形式都变得很常用了。

最优可能不存在，还有另外一个原因。不连续性就能使得没有任何轨迹可超过其他所有的轨迹；这样，我们可能能找到一个轨迹序列，该轨迹序列的每一个轨迹都超过它前面的轨迹，但是该序列的极限轨迹，不仅不是最优，而且也是完全不需要的。下面就是一个典型例子。令消费和投资在生产中是完全可替换的。假定投资的边际生产率是常数b，并且假定希望使以贴现率r（$<b$）贴现到时间为零的消费积分取最大值。如果在时间$t=0$，我们把消费中的单位输出转移到投资中，并且一直持续到时间T，这样可采用的附加消费量为exp（bT），其贴现现值为exp（b－r）T。这就超过了投资的最优成本，即1。这样任何投资都会使效用积分增加，并且我们也可找到一个更大的投资序列，要求该序列具

有更长的使用期，并能给出逐渐增高的标准值。这个序列的极限是全投费无消费，当然这是最坏的政策。

还有其它的更为复杂的不连续性，最好是把这些内容放到更进一步的说明中去。

现在来考虑对于最优的条件。很明显，下述原理还是成立的，即一条最优轨迹的某部分对于该部分所截的子问题还是最优的。而且，对于有限的子问题，还可使用前面的最优定义和象对于最大值原理或动态规划的条件。例如，使用最大值原理，我们可以看到：控制变量应该使哈密尔顿表达式在每一时刻取最大值，而状态变量和影子价格应该满足微分方程（9.18）和（9.19）。但是横截条件带来了一个问题。对于具有适当的端点库存的任意有限区间，将有标准的补充松驰条件，这样对应于初始点$t=0$的条件将是满足的。然而，在$t=\infty$将没有终点库存要求。我们可能会想从每时刻的库存必须为非负的约束中得到一些东西。这样我们可建立一个有限时间范围的问题，在该问题中目标库存必须至少为零即$b_T=0$。这时横截条件为$\pi(T)\bar{y}(T)=0$。这样，对于无限时间范围的问题，终点条件可假设为

$$\lim_{t\to\infty}\pi(t)\bar{y}(t)=0 \qquad (10,\ 10)$$

然而，一般情况下，这个条件是不需要的。它仅对于一个稍有限制的区域内的问题才是必要的。当我们把标准凹性要求，哈氏表达式最大的其它两个条件以及微分方程放在一起考虑时，作为一个充分条件，上述条件将是更重要的和更加一般的。对此结果的证明仅是把前所用的技术和超过定义加以应用，但是该过程几乎没有什么经济意义，因此，我们

把它放到本章下面的一个例题中。

例　　题

例10.1 作为对动态规划和横截条件的说明，考虑例9.2的最短距离问题。对该问题进行修改使得终点在线$t=1$上变化。正如前面所述，这个问题可分两步来求解。首先，求点（0.0）到点（$1,y(1)$）的最小距离轨迹。这样就得到了方程式（9.33）和（9.34），剩下来的问题就是从下述方程求得π值

$$\pi/(1-\pi^2)^{1/2}=y(1) \qquad (10.11)$$

最后，为了确定选择$y(1)$，就得使用横截条件。从式（10.8）和终点约束不依赖于y的事实，可得到$\pi(1)=0$，然后从式（10.11）可得到$y(1)=0$。这样，可以以这样的一种方法选择终点和轨迹，使得在终点的轨迹垂直于该点的约束曲线。

事实上，这个问题可用最大值原理求解，从而把两个求解步骤合并成一个。定义$V(t,y)$为点(t,y)到线$t=1$的最短距离。对于这个问题，可用前面的论证，得到完全类似于（10.5）的式子，这里H^*按（9.33）式确定。这样，我们可得到

$$V_t-(1-V_y^2)^{1/2}=0 \qquad (10.12)$$

约束为，对于所有的y，$V(1,y)=0$。

虽然求解编微分方程的一般方法是相当难的，但是在这个例子中，可很容易地验证，当适当地选定了平方根的正负号之后，$V(t,y)=1-t$是所需的解。当然，这个距离是

由从点（t,y）到线$t=1$的垂线达到。

例10.2 这个例子概略地给出了在无限大时间范围内，在超过标准的意义下，充分性的证明。假定对于每个t，（y、z）是一个矢量变量，F是一个凹函数，Q是一个凹矢量函数，G是一个凸矢量函数。并且还假设存在非负的乘子$\pi(t)$和$\rho(t)$（在不至于引起含糊的情况下，为简单起见，省略时间变量）使得对于每个t，我们可有

$$F_y(\bar{y},\bar{z},t)+\dot{\pi}+\pi Q_y(\bar{y},\bar{z},t)-\rho G_y(\bar{y},\bar{z},t)=0 \tag{9.14}$$

$$F_z(\bar{y},\bar{z},t)+\pi Q_z(\bar{y},\bar{z},t)-\rho G_z(\bar{y},\bar{z},t)=0 \tag{9.15}$$

以及

$$\lim_{T\to\infty}\pi(T)y(T)=0 \tag{10.10}$$

这时，$\bar{y}(t)$，$\bar{z}(t)$使$\int_0^\infty F(y(t),\ z(t),\ t)dt$在约束$y(0)$给定以及

$$\dot{y}=Q(y,z,t) \tag{9.5}$$

$$G(y,z,t)\leq 0 \tag{9.6}$$

下具有超过最优。注意到，在这里我们已经把微分方程（9.18）和（9.19）归并到式（9.5）和（9.14）中，把式（9.6）归并到非负性条件中。

为了证明这个结果，首先看到：对于每个t，$F+\dot{\pi}y+\pi Q$是(y,z)的凹函数。这样，从第六章的充分性结果，可以看到式（9.14）和（9.15）就是$(\bar{y},\bar{z})$使得上式在约束（9.6）式下（包括G是凸函数）取最大值的必要和充分条件。因此，对于任何满足上述条件的（y,z），我们可得到

$$F(\bar{y},\bar{z},t)+\dot{\pi}\bar{y}+\pi Q(\bar{y},\bar{z},t)\geqslant F(y,z,t)+\dot{\pi}y+\pi Q(y,z,t)$$

现在假定$(y(t),z(t))$还满足（9.5）式，那么

$$F(\bar{y},\bar{z},t)+\dot{\pi}\bar{y}+\pi\dot{\bar{y}}\geqslant F(y,z,t)+\dot{\pi}y+\pi\dot{y}$$

这个式子对于每个t都成立，并可从0到T积分。因为$d(\pi y)/dt=\dot{\pi}y+\pi\dot{y}$等等，那么积分式为

$$\int_0^T F(\bar{y},\bar{z},t)dt+\pi(T)\bar{y}(T)-\pi(0)\bar{y}(0)\geqq\int_0^T F(y,z,t)dt+\pi(T)y(T)-\pi(0)y(0)$$

使 用条件$\bar{y}(0)=y(0)$以及π和y的非负性，最后再 使用横截条 件(10、10)，然后取极限，我们得到

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T F(\bar{y}(t),\bar{z}(t),t)dt-\int_0^T F(y(t),z(t),t)dt\geqslant 0$$

因为$(y(t),z(t)$是任意一个可行政策，这样就证明 上 述结果。

习　　　题

10.1　考虑习题9.2有固定收入的人的问题，这时计 划时间为无穷大，在时间t，有初始库存资本k。证明

$$V(t,k)=\left(\frac{\alpha-r(1-\varepsilon)}{\varepsilon}\right)^{-\varepsilon}\frac{k^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon}e^{-\alpha t}$$

就是该最优问题的动态规划的基本方程的解。推导其最优政策为一直要节余其收入的恒定份额。要使横截条件满足，对参数的限制条件是什么？

10.2　求解例10.1，把$W(t,y)$定 义 为 从 点 (0.0) 到 (t,y)的最短距离并用式(10.6)。

参 考 文 献

1. DREYFUS, S. Dynamic Programming and the Calculus of Variations, Academic Press, New York, 1966.

2. BELLMAN, R. and KALABA, R. Dynamic Programming and Modern Control Theory, Academic Press, New York, 1965.

3. BELLMAN, R. Dynamic Programming, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957.

4. WEITZMAN, M. L. 'Duality Theory for Infinite Horizon Convex Models', Management Science, 19(7), March 1973, pp.783—9.

5. SYNGE, J.L. and GRIFFITHS, B. A. Principles of Mechanics, Third Edition, McGraw—Hill, New York, 1959.

十一 应用实例

本章主要根据前面所建立的技术对两个经济模型实例进行说明，然后给出了习题和进一步的参考文献。

例 题

例11.1 在这个例子中，我们将以类似于习题9.1的方法，但从整个社会的观点来考虑最优节约问题。该问题有两个新的特点：一个是对于计划根本没有合乎逻辑的终点；另一个是节余的利润率（rate of return to saving）不可能由外部市场力量保持不变，而是取决于所累积的资本的。

这种问题的最简单情况是一种货物模型，在这种模型中，自然资本（physical capital）库存k由所积累的节余构成。这时的输出流为F（k），这里F是一个增函数并且是严格凹的，而且F（0）=0，F′（0）=∞。资本的贬值率为δ。如果消费流率为c，那么资本积累就由下式给定

$$k' = F(k) - \delta k - c \qquad (11.1)$$

初始资本库存k（0）给定。假设没有其它的约束并且假定该计划的目的就是使式

$$\int_0^{\infty} U(c)e^{-\alpha t}dt \qquad (11.2)$$

在超过意义下取最大值，式中U是一个严格增凹函数。对于

这些假设的详细说明可参见后面的参考文献。

对于上述问题，可直接应用最大值原理求解。定义时间乘子为$\pi(t)$，哈氏表达式为

$$H=U(c)e^{-\alpha t}+\pi(t)(F(k)-\delta k-c) \tag{11.3}$$

因为所有的凹性条件都是满足的，因此一阶条件是必要的，并且和横截条件一起也构成了充分条件。从现在起，考虑所有的变量都取最优值，并且为了简单起见，省去代表最优的一杠号。

从哈氏表达式对于每个t取的最大值，就可得到

$$U'(c)e^{-\alpha t}=\pi \tag{11.4}$$

π所满足的微分方程为

$$\dot{\pi}=-\pi(F'(k)-\delta) \tag{11.5}$$

我们可用式（11.4）来消去式（11.1）中的c得到一对k和π的微分方程。然而，在这种情况下，反过来做更容易，即消去式（11.5）中的$\dot{\pi}$得到一对k和c的微分方程。这样可得到

$$U''(c)\dot{c}e^{-\alpha t}-U'(c)\alpha e^{-\alpha t}=-U'(c)e^{-\alpha t}(F'(k)-\delta)$$

为了化简上式，定义

$$\epsilon(c)=-cU''(c)/U'(c) \tag{11.6}$$

这样前面的式子变为

$$\dot{c}/c=[F'(k)-(\alpha+\delta)]/\epsilon(c) \tag{11.7}$$

可以观察到：例9.1和习题9.1 形式上是相同的，并且F'（k）为常数r，e（c）也为常数（在例9.1中，其值为1，在习题9.1中，其值等于e）。这就是为什么它们都沿着最优轨迹的消费增长率为常数的原因。

方程（11.1）和（11.7）还有一个方便的性质，就是t不显含在方程的右边。这样，一旦知道了（k、c），就能从这些方程求得改变率（$\dot{k}$，$\dot{c}$）。在（k，c）平面上，这些速度可由附着在点（k、c）上的矢量箭头来表示。如果我们对所有的点都这样做，我们可把连续的箭头连接起来找到所有的轨迹（k（t），c（t）），这些（k（t），c(t)）满足方程(11.1)和（11.7），而且这两个方程都是最优的必要条件。上述轨迹中的任意两条都不可能相交，因为当起始点给定时，运动的方向是唯一的。如果从所有这些轨迹中，对于一个给定的k（0），我们能够找到一个c（0）使得从这点开始的轨迹满足横截条件，那么这条轨迹就是最优的。

图11.1表示了这样的一个图形。要搞清楚该图的最简单方法是把平面想象为可分成一些区域，在这些区域中变量的改变方向是一样的。由于变量k和c中的每一个可增加或可减少，因此，可有四种可能的组合，而且在这种情况下，的确有四个区域。从式（11.1）我们看到：如果$c<F(k)-\delta k$，那么k增加，这就是在曲线$c=F(k)-\delta k$下面的区域。这条曲线的峰值在$F(k)-\delta k$取最大值时的点达到，即对于$k=k'$，由$F'(k')=\delta$确定。从式（11.7）我们看到：如果$F'(k)>\alpha+\delta$，那么c增加，因为当U''（c）为负时，e为（c）正。现在由$F'(k^*)=\alpha+\delta$确定垂线

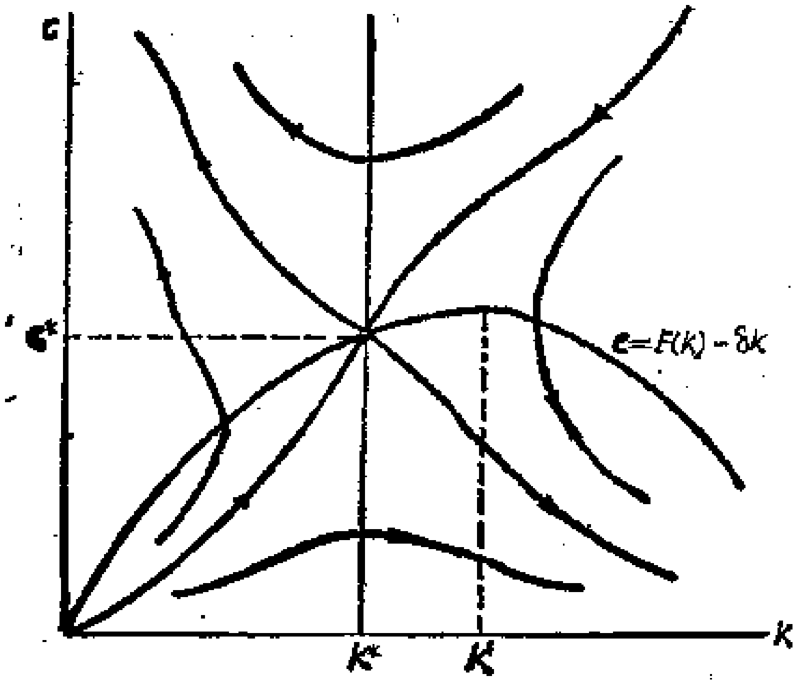

图11.1

$k=k^*$，这样c在这条垂线的左边增加，右边减少。由于F是一个凹函数，因此，当$\alpha>0$，$k^*<k'$。这时容易验证满足上述两个微分方程的所有可能轨迹都变成图中用箭头所示的图形。

记$c^*=F(k^*)-\delta k^*$，可从上图中看到恰好有两条轨迹收敛到(k^*, c^*)，并且对于每个$k(0)$，也恰好有一个$c(0)$使得该初始点在上两条轨迹之一上。假如我们做这样的选择，那么取极限后，$k(t)$趋于k'，$\pi(t)$趋于$U'(c^*)e^{-\alpha t}$。只要α是正的，那么横截条件是满足的，并且选择也是最优的。

如果采用变量k和π，那么所得的图形将是一个在第九章解释意义下的正常相位图形。事实上，经济学家常把一个

包括一对不显含时间的微分方程的解的图形称为相位图形，即使当方程中的两个变量不代表变量和其影子价格的关系时，也叫相位图形。然而，在现在的情况下，k和π的方程通过贴现因子显含时间。在指数贴现的情况下，只要对变量做简单的变换，就能排除上述困难。由下式定义$\psi(t)$

$$\pi(t)=\psi(t)e^{-\alpha t}$$

把这个式子与式（11.4）相比较，可以看到：$\psi(t)$是$k(t)$的非贴现影子价格。这时，通过微分，可以证明

$$\dot{\psi}=-\psi[F'(k)-(\alpha+\delta)] \qquad (11.8)$$

$$k'=F(k)-\delta k-V(\psi) \qquad (11.9)$$

这里，V是U'的反函数，因为U'是减函数。这时可很容易地根据k和ψ画相位图。由于c和ψ是互反关系，所以该图形也应该和图11.1很相似。但是上下要颠倒一下。这部分工作留作一个习题。

很明显，最优节余政策的研究是增长理论的一个重要组成部分。在这里我们仅对最简单的模型做了简要的讨论，但是对于有兴趣的读者，可以看到对这方面进行深入研究的许多文献。本章末尾列出了这方面的一些文献。

例11.2，这里我们将对在一个圆形城市的居民地带内道路和住宅的最优按排的一个很简单的模型进行简要说明。该例给出了第九章和第十章的一些技术对于独立变量不是时间时的在经济方面的应用。

该城市的中心商业区在以半径为a的圆内。居民区从这个圆扩散到一个半径为b的大圆。已知居民数为N，每个居民的居住空间为$2\pi h$。因子2π是为了以后化简记号而采用

的，π不是影子价格，而是圆周率，其值为 3.14159……。只要$2\pi hN < \pi(b^2 - a^2)$，那么就一定有地面可用来做道路。

道路用来输送居住者来往于中心商业区，问题是以怎样的方式按排道路和住宅，以能使得交通拥塞成本最低。假设有很多等宽的径向道路，这样需要达到最近点的行程可以忽略不计，而把注意力主要集中在径向来往于中心商业区的行程。

假设在半径r和b的区城内有N(r)个居民。那么有$-N'(r)dr$个居民住在半径r和(r+dr)之间的小园环中，如图11.2所示。这些人占有$-2\pi hN'(r)dr$的土地，园环的总面积$2\pi rdr$的剩余部分用做道路。这样，沿着这个环的周界，道路将占去的宽度为$2\pi[r + hN'(r)]$。由于这些路面是由居住较远的N(r)个居民作为交通使用的，因此，这些路面的交通密度是和$N(r)/[r+hN'(r)]$成正比的。在这个密度运行时，每个方向有$N(r)dr$人—码的运行。取正比系数为1，并假设这些人所

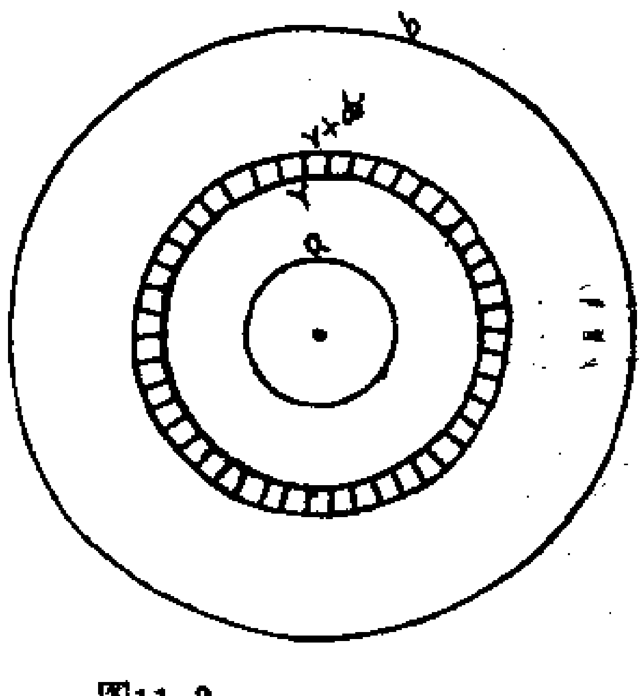

图11.2

引起的拥塞成本为

$$N(r)/[r+hN'(r)]^{k}N(r)dr$$
$$=N(r)^{k+1}dr/[r+hN'(r)]^{k}$$

式中k是一个正常数。实际中，我们发现k大于2。这样问题就变成选择函数N（r）在端点约束N（a）=N，N（b）=0下使

$$\int_{0}^{b}N(r)^{k+1}/[r+hN'(r)]^{k}dr \quad (11.10)$$

取最小值的问题。

这个问题可用欧拉——拉格朗日方法很容易地求解。通过简单的微分，可得到

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{-khN(r)^{k-1}}{[r+hN'(r)]^{k+1}}\right]=\frac{(k+1)N(r)^{k}}{[r+hN'(r)]^{k}}$$

（11.11）

这个式子看起来很难处理，但是通过一个简单的代换就变得容易处理了。定义D（r）=N（r）/［r+hN′(r)］，这是半径为r时的交通密度，除了一个比例常数处。这样式（11.11）变成

$$-khdD^{k+1}/dr=(k+1)D^{k}$$

或者$\frac{dD}{dr}=-1/(kh)$ （11.12）

从这个式子可以立即看出：在最优按排时，交通密度随距离线性降低。根据待定常数c_1，我们可得到

$$D(r)=(c_1-r)/(kh) \quad (11.13)$$

根据D（r）的定义，上式就是N（r）的一阶微分方程。对此方程可引入另一个常数c_2来求解。通过计算，可得到

$$N(r)=(c_1-r)^{-k}\left\{c_2-\frac{1}{h}\int_a^r r(c_1-r)^k dr\right\} \tag{11.14}$$

端点条件可用来确定c_1和c_2，这可通过数值计算来完成。

通过考查路面的宽度，可以发现一些有趣的定性结果。当比例因子为常数时，定义$W(r)=r+hN'(r)$。很明显，我们必须有$W(r)\leqslant r$。$W(r)$的微分方程为

$$W'(r)=[(k+1)W(r)-kr]/(c_1-r) \tag{11.15}$$

这个解可以从几何上进检验，如图11.3所示。很明显$W(b)=0$，因为没有必要对零交通量提供道路。这时$W'(r)$和$[W(r)-kr/(k+1)]$的正负号一致，因此，我们可从b点开始追随着这个解回去。我们得到了三种

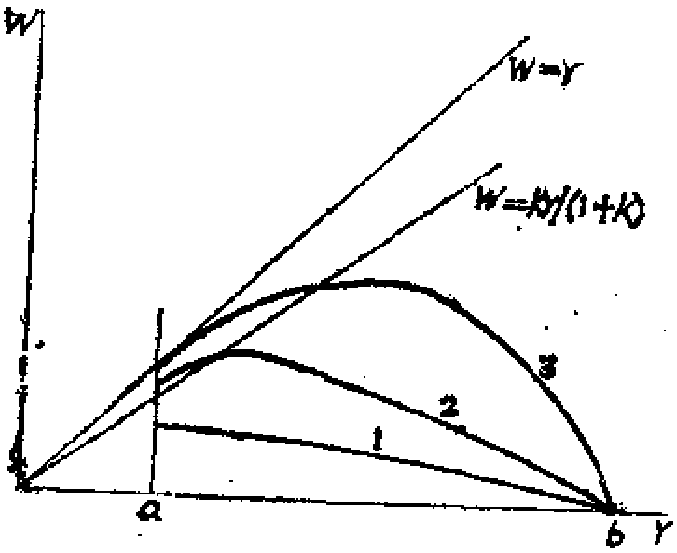

图11.3

可能性。第一种$W(r)$从a到b一直是减少的。这种情况当N是小于它所允许达到的最大值时，即在人口稀疏的城市发

生。对于比较拥挤的城市，我们得到第二种情况，这时W（r）开始增加然后减少。对于十分拥挤的城市，返回的解将和线$W=r$相通，这表明离a比较近有一个区域，在那里，全部的土地得用做道路。为了适当地解决这种问题，我们得需要对不等式约束问题进行讨论。当然，这就更困难了，但是解的特性是清楚的。然而，如果a是一个选择变量，我们将不允许第三种情况发生，因为这时为了占据花费在a之外道路上的面积，将需要扩大中心商业区。

最后这一点说明，上述模型的确可以推广到一般的情形。在这里我们还是把详细的问题留给有兴趣的读者进一步去研究。然而，上述几种情况已给出了居住域不变时，对于道路许可面积的基本的定性特征。

习　　题

11.1　考虑一个商行，它在时刻t面临的需求曲线为

$$q(t)=a-x(t)-bp(t)$$

式中a、b是正的常数，p（t）和q（t）分别是时刻t时的价格和需求量，x（t）等于这个商行的竞争者在时刻t的销售量。它由下式决定

$$x'(t)=k[p(t)-p^*]$$

式中k和p^*是正的常数。该式说明：竞争者如果看到该商行的价格超过极限价格p^*，就来参加竞争或者扩大生产。生产的平均成本为常数，且一直为c，而且兴趣率为常数r。该商行希望使

$$\int_0^{\infty}[p(t)-c]\,q(t)\,e^{-rt}dt$$

在x（0）给定时取最大值。

应用最大值原理来求解这个问题，取x为状态变量，p为控制变量。在（x、p）空间构造图形来表明微分方程的可能解轨迹。从这些轨迹中找出该商行关于时间的最优价格政策。假定$p^*\geqslant c$，如果竟争的商行在极限时还保持为正的销售量，找到该问题中的参数必须要满足的条件？

11.2一个经济问题在时间为0时开始计划，这时的库存为S_0的可耗尽资源。选择以耗尽率R（t）的耗尽计划，该计划是时间t的函数，约束为

$$\int_0^{\infty}R(t)dt\leqslant S_0$$

该计划的目的是取

$$\int_0^{\infty}U(R(t))e^{-\alpha t}dt$$

的最大值，式中

$$U(R)=R^{1-\varepsilon}/(1-\varepsilon)$$

α，ε都是正的常数。

取S（t），即时刻t时的资源库存，为状态变量，$R(t)=-S'(t)$为控制变量，证明从最大值原理得到的乘子π（t）对于时间来说是常数。然后从此推导最优耗尽计划是由下式给定

$$R(t)=(\alpha S_0/\varepsilon)e^{-(\alpha/\varepsilon)t}$$

用欧拉——拉格朗日方法求解这个问题。建立动态规划方程，并象习题10.1一样，猜测该方程的一个解。

如果α等于零，将会出现什么问题？

参考文献

1. SOLOW, R. M. Growth Theory: An Expositio, Clarendon Press, Oxford, 1970, Chapter 5.

2. DIXIT, A. K. The Theory of Equilibrium Growth, Oxford University Press, 1975, chs. 5, 7.

3. WAN, H. Y. Jr. Economic Growth, Harcourt Brace Jovanovich, New York, 1971, chs. 9—11.

4. MILLS, E. S. and DEFERANTI, D. M. 'Market Choices and Optimum City Size', American Economic Review, LXI (2), May 1971, pp. 340—5.

5. DIXIT, A. K. 'The Optimum Factory Town', The Bell Journal of Economics and Management Science, 4(2), Autumn 1973, pp. 637—51.

6. GASKINS, D. W. Jr., 'Dynamic Limit Pricing: Optimal Pricing under Threat of Entry', Journal of Economic Theory, 3(3), September 1971, pp. 306—22, and Comment by N. J. IRELAND, Journal of Economic Theory,

5(2), October 1972, pp. 303—5.
7. RYDER, H. E. Jr. and HEAL, G. M., 'Optimum growth with intertemporally dependent preferences', Review of Economic Studies, XL(1), January 1973, pp. 1—31.
8. WAN, H. Y. Jr., 'Optimal saving programs under intertemporally dependent preferences', International Economic Review, 11(2), October 1970, pp. 521—47.

结　语

我希望在本书中已经给出了足够的理论和应用，以能使一般的经济理论家对于最优化方法有了较完整的了解。然而，对于需要更深入研究的读者，还有很多现成的阅读文献。例如在本书各章中经常引用的由 Malinvaud, Heal, Intriligator 以及 Luenberger 等人的著作可作为进一步的读物。在这里主要是按各书的数学知识多少来排列书的次序的（即由少到多）。

在本书中我们完全没有考虑的有关最优化的一个比较重大的领域是在不定情况下的决策问题。象时间最优化一样，不定情况下的最优问题也不需引入新的基本理论，但是，当各种函数按某种可能分布取值时，结果将会是更加丰富多彩。对于最简单情况的讨论就能使本书篇幅大大增加，以至于无论放在本书中讨论。因此，在这里我们仅列出一些文献供参考：

1. ARROW, K. J. Essays in the Theory of Risk—bearing, North—Holland, Amsterdam, 1970, especially chs. 1 and 3.
2. DEGROOT, M. H. Optimal Statistical Decisions, McGraw—Hill, New York, 1970.
以及由 P. A. DIAMOND 和 M. ROTHSCHILD 主编的即将出版的论文集。

索　　引