El Cubo de Rubik como Grupo de Permutaciones

Asignatura: Álgebra Abstracta (MT1025)

Autores: Ferran Martinavarro, Alejandro Navarro

Fecha: 12/01/2026

Índice

1. Introducción: El cubo de Rubik

El cubo de Rubik clásico es un cubo de dimensiones $3 \times 3 \times 3$ con cara cada de un color formado por 26 piezas:

- Centros (6): son aquellas piezas de un solo color. Determinan el color de la cara en la que se encuentran.
- Aristas (12): piezas con dos colores. Se pueden encontrar con dos orientaciones distintas.
- Esquinas (8): piezas con tres colores. En este caso, cada una puede tener 3 orientaciones distintas.

A cada color de una pieza lo llamaremos pegatina, por lo que hay en total $8 \text{ esquinas} \cdot 3 \text{ colores} + 2 \text{ aristas} \cdot 2 \text{ colores} = 48$ pegatinas que pueden cambiar de posición, por lo que determinan una configuración del cubo de Rubik.

Esta estructura permite una serie de movimientos, que se detallan en la Sección 1.1. Estos movimientos son las rotaciones de una de las caras, lo que permite realizar una serie de permutaciones.

El objetivo de este trabajo es el estudio de estas permutaciones como un subgrupo de S_Ω donde Ω es el conjunto de estados del cubo. Para ello, se repasará inicialmente los conceptos de teoría de grupos necesarios, dando así una notación clara en la Sección 2.

A continuación, se definirá formalmente el grupo de permutaciones del cubo de Rubik clásico en la Sección 3 y se estudiarán algunos de sus subgrupos y acciones en la Sección 4.

Cabe destacar que no cualquier elemento de Ω, no constituye un estado válido del cubo de Rubik, como por ejemplo, la rotación de una sola esquina. A estos estados se les denomina estados imposibles o ilegales y se detallarán en la Sección 5.

Aplicando los resultados obtenidos, podremos calcular el cardinal de todas las posibles combinaciones del cubo de Rubik en la Sección 6.

1.1. Notación

A lo largo de esta sección, se explicarán los distintos movimientos que se puede hacer con el cubo de Rubik y la notación que se empleará para referirse a ellos.

En los diagramas que se emplean en esta sección se considerará que la posición inicial del cubo es con la cara amarilla arriba y la verde delante (hacia la izquierda). Estos diagramas se han generado utilizando la página web Rubik's Cube SVG Generator [1].

Movimientos Principales

Cada uno de estos movimientos consiste en una rotación de 90° en sentido horario de una de las caras del cubo. El sentido horario, se determina desde la perspectiva en la que dicha cara es la frontal. Cada uno de estos movimientos se representa con una letra mayúscula.

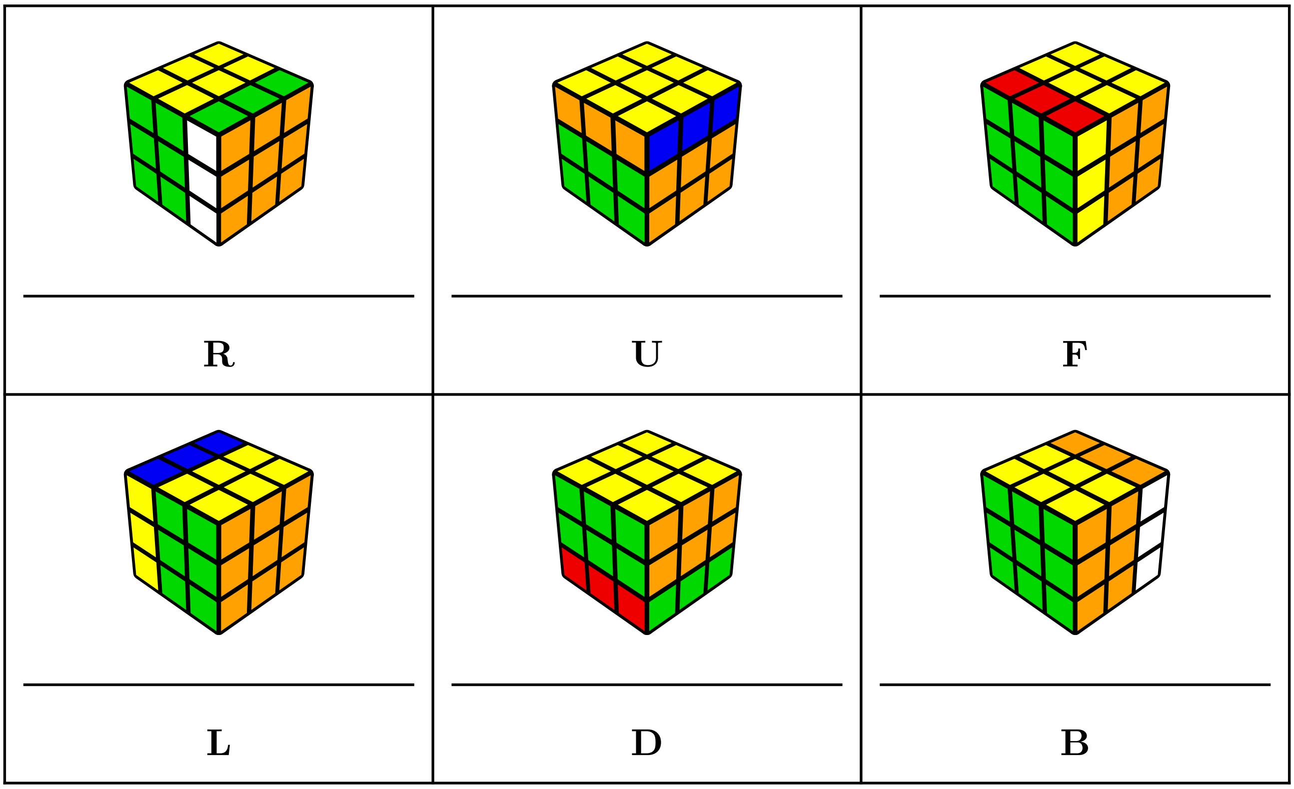


Figura 1: Movimientos Principales

Mediante la composición de estos movimientos se puede reproducir todas las permutaciones posibles del cubo de Rubik.

Para cada uno de los movimientos, podemos considerar sus potencias. En particular, dado el movimiento X,

- $X^2 = X2$ representa la repetición del movimiento dos veces.
- $X^3 = X^{-1} = X'$ es la repetición del movimiento X tres veces, o equivalentemente, un giro de 90° en sentido antihorario.

Por ejemplo, si repetimos R dos veces obtenemos un movimiento al que llamamos R2, y si lo hacemos 3 veces (o hacer R pero en sentido contrario), entonces se llama R'.

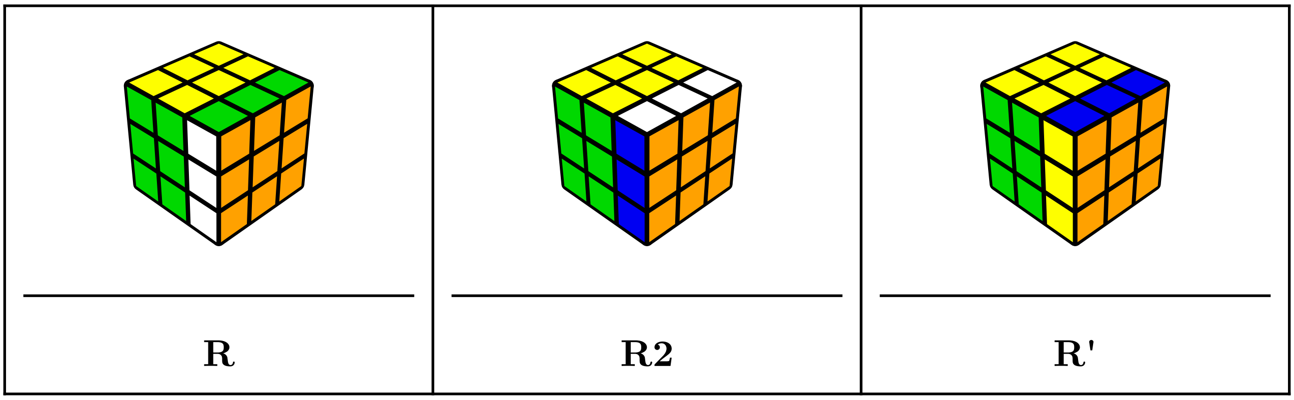


Figura 2: Ejemplo R2 y R'

A la hora de contar el número de movimientos empleados para una resolución del cubo, todos estos cuentan como solo uno.

Nota: Se usará indistintamente la notación X' y X3 por su simplicidad para los subgrupos cíclicos.

Aunque hay nombre para más movimientos, estos son solo una composición de los básicos y por tanto, se prescindirá de ellos.

2. Preliminares teoría de grupos

En esta sección se explica brevemente la teoría de grupos que se empleará a lo largo de las siguientes secciones. Para ello, se ha consultado G. Navarro Ortega [2].

Definición 2.0.1. (Grupo)

Sea G un conjunto no vacío y $\cdot : G \times G \to G$ una operación binaria interna cuya imagen de (x, y) denotamos por $x \cdot y$. Decimos que $(G, \cdot)$ es un grupo si se cumple:

1. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \quad \forall x, y, z \in G$ *(asociatividad)*
2. $\exists 1 \in G \quad / \quad 1 \cdot x = x \cdot 1 = x \quad \forall x \in G$ *(elemento neutro)*
3. $\forall x \in G, \quad \exists y \in G \quad / \quad x \cdot y = y \cdot x = 1$ *(elemento inverso)*

Definición 2.0.2. (Subgrupo)

Sea G un grupo y $H \subset G$ un conjunto no vacío. Decimos que H es un subgrupo de G, denotado como ($H \leq G$), si $\forall x, y \in H$:
- $x^{-1} \in H$
- $x \cdot y \in H$

Definición 2.0.3. (Grupo Cíclico)

Dado un grupo G, decimos que es cíclico si $\exists x \in G$ tal que $G = \{x^n : n \in \mathbb{Z}\} = \langle x \rangle$. Se dice que G está generado por x.

Para cualquier grupo G, podemos obtener subgrupos abelianos $\langle g \rangle$ con $g \in G$.

En caso de que se trate de un grupo (o subgrupo) generado por más elementos, usamos la notación:

$$\langle x_1, x_2, ..., x_k \rangle = \left\{ x_{i_1}^{n_1} \cdot x_{i_2}^{n_2} \quad \cdots \quad x_{i_m}^{n_m} \quad \mid \quad m \in \mathbb{N}, i_j \in \{1, ..., k\}, n_j \in \mathbb{Z} \right\}$$

Este es el grupo más pequeño que contiene los elementos $x_1, ..., x_k$.

Definición 2.0.4. (Permutación)

Sea Ω un conjunto, llamamos permutación a un aplicación biyectiva $f : \Omega \to \Omega$. Al conjunto de permutaciones de Ω lo denotamos por S_Ω y forma un grupo con la operación $f \cdot g = g \circ f$.

Definición 2.0.5. (Acción)

Sea Ω un conjunto no vacío y G un grupo. Llamamos acción a una operación

$$\begin{aligned} \cdot : \Omega \times G &\to \Omega \\ (\alpha, g) &\mapsto \alpha \cdot g \end{aligned}$$

De manera que dado $\alpha \in \Omega, \quad \forall g \in G, \quad \exists! \alpha \cdot g \in \Omega$ y además cumple las siguientes propiedades:
- $(\alpha \cdot g) \cdot h = \alpha \cdot (gh) \quad \forall \alpha \in \Omega, \quad \forall g, h \in G$
- $\alpha \cdot 1 = \alpha \quad \forall \alpha \in \Omega$

Esto define una relación de equivalencia: dados $\alpha, \beta \in \Omega$, $\alpha \sim \beta \iff \exists g \in G$ tal que $\alpha \cdot g = \beta$.

Definición 2.0.6. (Órbita y Estabilizador)

Dada una acción $\cdot : \Omega \times G \to \Omega$ y $\alpha \in \Omega$. Llamamos órbita de α a su clase de equivalencia:

$$\mathcal{O}(\alpha) = \{\alpha \cdot g \mid g \in G\}$$

El estabilizador de α en G se define como

$$\mathrm{Stab}_G(\alpha) = G_\alpha = \{g \in G \mid \alpha \cdot g = \alpha\}$$

3. El grupo del cubo de Rubik

3.1. Intuición

Como se ha comentado en la Sección 1.1 (notación), todas las permutaciones del cubo de Rubik se pueden generar concatenando los movimientos principales al estado inicial o resuelto.

LLamamos Ω al conjunto de todos los estados del cubo de Rubik, y entonces el grupo de permutaciones viene dado por:

$$\mathcal{R} = \langle \mathrm{U}, \mathrm{D}, \mathrm{L}, \mathrm{R}, \mathrm{F}, \mathrm{B} \rangle \leq S_\Omega$$

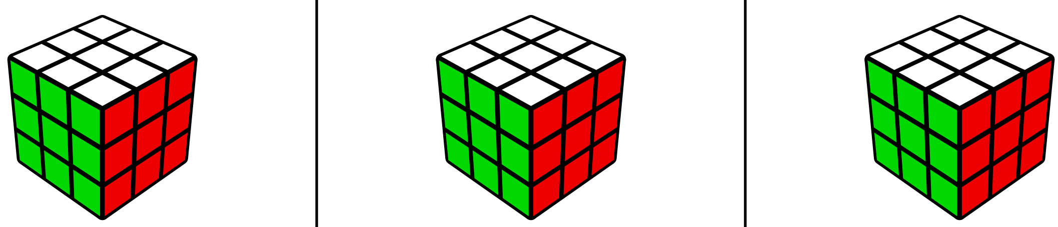
Esto es un grupo con la operación $f \cdot g = g \circ f$ para $f, g \in \mathcal{R}$. Sin embargo utilizaremos una notación distinta:

$$f \cdot g = f \quad g$$

Por ejemplo, $\mathrm{U} \cdot \mathrm{R} = \mathrm{U} \ \mathrm{R}$ y quiere decir que primero hacemos el movimiento U y después R. Por tanto, todo elemento de $\mathcal{R}$ se representa como una secuencia de los movimientos principales.

- La asociatividad se cumple trivialmente.
- El elemento neutro es la identidad o «secuencia vacía», es decir, ausencia de movimientos
- El elemento inverso se obtiene invirtiendo el orden de la secuencia y cambiando cada movimiento por su inverso.

El inverso de cada movimiento es el mismo pero en sentido contrario. X y X' son inversos y X2 es su propio inverso.



1 o id	**R R'**	**R2 R2**

Figura 3: Elementos Neutros e Inversos de las variantes de **R**

3.2. Formalización Completa

En la sección anterior, de ha descrito intuitivamente el grupo de permutaciones del cubo del cubo de Rubik. Sin embargo, no se ha definido con rigor matemático, lo cual es necesario para poder seguir trabajando con la teoría de grupos.

Para ello, nos basaremos en la formalización descrita en [3] con alguna ligera modificación. Hay 48 posibles pegatinas que pueden cambiar de sitio, 3 por cada esquina y 2 por cada arista. Como los centros no se mueven, determinan la cara, y los nombramos por la letra que identifica sus giros definidas en la Sección 1.1.

Se numeran de la siguiente forma:

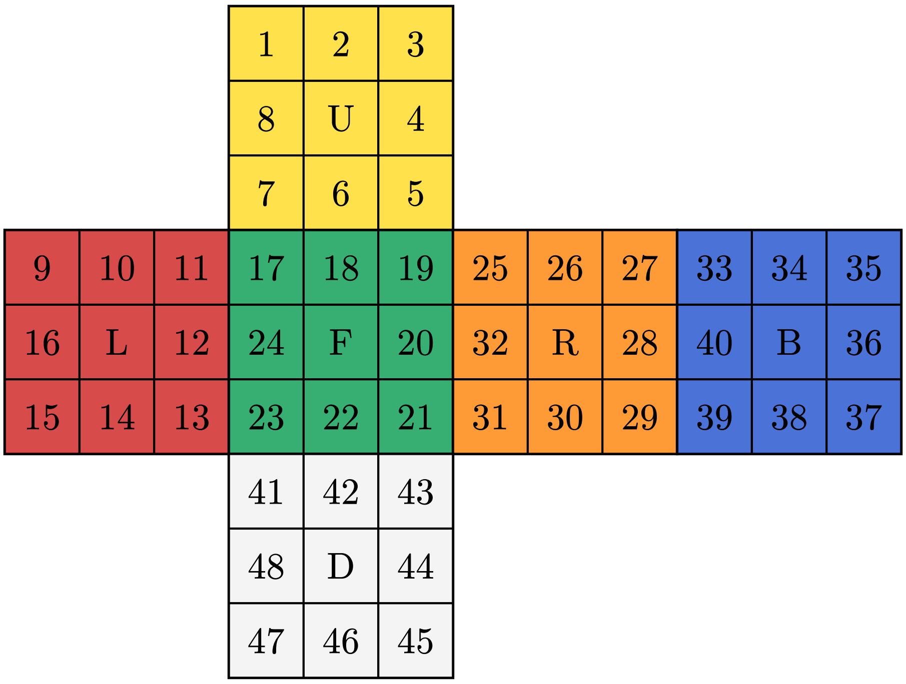


Figura 4: Numeración de las pegatinas del cubo

Cada número se usara para identificar unan posición (o la pegatina en dicha posición) o una pegatina. El cubo resuelto será aquel que en la posición i tenga la pegatina i.

Esta elección de numeración permite identificar fácilmente si una pegatina pertenece a una esquina o una arista, ya que las primeras siempre son número impares y las segundas pares.

Con está notación, podemos ahora definir el grupo de Rubik como un subgrupo $\mathcal{R}$ de S_{48} generado por los movimientos básicos.

Para ello definimos cada movimiento como producto de ciclos disjuntos de manera que si M es un movimiento, $M(i)$ representa la posición en la que termina la pegatina que estaba en la posición i. En la Figura 5 se puede observar el resultado de aplicar U en el cubo resuelto.

Definición 3.2.1. (Movimientos Básicos como ciclos disjuntos)

- $\mathrm{U} = (1, 3, 5, 7)(2, 4, 6, 8)(9, 33, 25, 17)(34, 26, 18, 10)(35, 27, 19, 11)$
- $\mathrm{D} = (41, 43, 45, 47)(42, 44, 46, 48)(15, 23, 31, 39)(14, 22, 30, 38)(13, 21, 29, 37)$
- $\mathrm{R} = (25, 27, 29, 31)(26, 28, 30, 32)(3, 39, 43, 19)(4, 40, 44, 20)(5, 33, 45, 21)$
- $\mathrm{L} = (9, 11, 13, 15)(10, 12, 14, 16)(1, 17, 41, 35)(8, 24, 48, 36)(7, 23, 47, 37)$
- $\mathrm{F} = (17, 19, 21, 23)(18, 20, 22, 24)(7, 25, 43, 13)(6, 32, 42, 12)(5, 31, 41, 11)$
- $\mathrm{B} = (33, 35, 37, 39)(34, 36, 38, 40)(1, 15, 45, 27)(2, 16, 46, 28)(3, 9, 47, 29)$

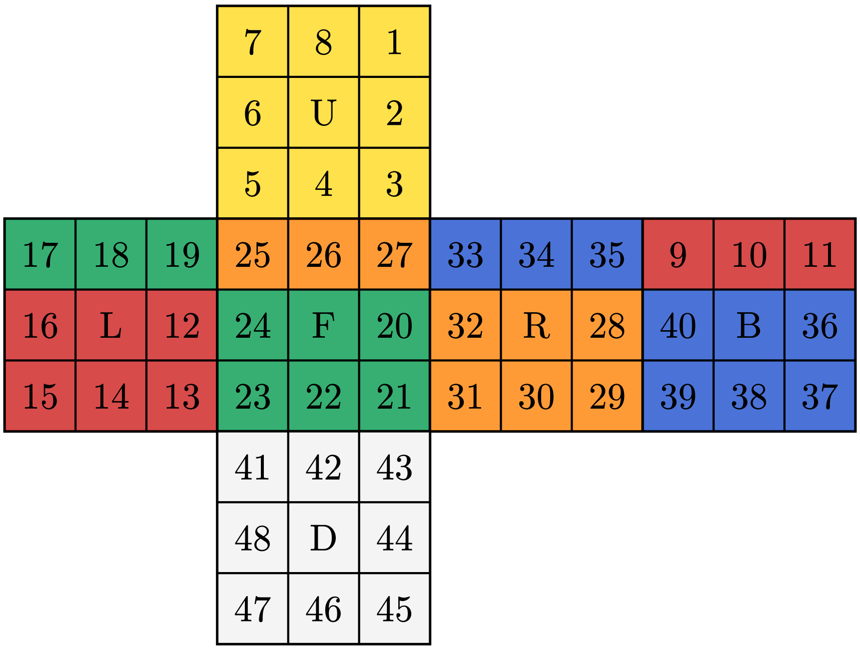


FIGURA 5: Aplicación de U sobre el cubo resuelto

Definición 3.2.2. (Grupo de Rubik) De acuerdo con las convenciones y definiciones anteriores, se define el grupo de permutaciones del cubo de Rubik como

$$\mathcal{R} = \langle \mathrm{U}, \mathrm{D}, \mathrm{R}, \mathrm{L}, \mathrm{F}, \mathrm{B} \rangle \leq S_{48}$$

4. Subgrupos y Acciones

Sea $\Omega = \{1, ..., 48\}$ el conjunto de posiciones del cubo siguiendo el esquema de la FIGURA 4, consideraremos las acciones de subgrupos de $\mathcal{R}$ sobre Ω por aplicación.

También consideraremos el conjunto $\Omega_C = \left\{ (v_i)_{i=1}^{48} \in \Omega^{48} : v_i \neq v_j \forall i \neq j \in \Omega \right\}$ que representa una configuración de las pegatinas del cubo de manera que $\mathcal{R}$ actúa por aplicación a cada componente del vector: Sean $\vec{v} = (v_i)_{i=1}^{48} \in \Omega_C$ y $h \in \mathcal{R}$

$$\vec{v} \cdot h = (h(v_i))_{i=1}^{48}$$

Esta acción es interesante desde un punto de vista didáctico, ya que permite ver la acción sobre el cubo completo, como normalmente estamos acostumbrados.

4.1. Subgrupos Cíclicos Principales

Se trata de los subgrupos $\langle \mathrm{U} \rangle$, $\langle \mathrm{D} \rangle$, $\langle \mathrm{R} \rangle$, $\langle \mathrm{L} \rangle$, $\langle \mathrm{F} \rangle$, $\langle \mathrm{B} \rangle$ de orden 4. Por ejemplo,

$$\langle \mathrm{U} \rangle = \{1, \mathrm{U}, \mathrm{U2}, \mathrm{U3}\}$$

Por la acción sobre Ω, este subgrupo tiene 5 órbitas de cardinal 4, los cinco 4-ciclos con los que se define U:

$$\begin{aligned} &\mathcal{O}(1) = \{1, 3, 5, 7\} && \mathcal{O}(2) = \{2, 4, 6, 8\} \\ &\mathcal{O}(9) = \{9, 33, 25, 17\} && \mathcal{O}(34) = \{34, 26, 18, 10\} \\ &\mathcal{O}(35) = \{35, 27, 19, 11\} \end{aligned}$$

El resto de órbitas son de cardinal 1 puesto que las pegatinas no se mueven al aplicar U.

Si tomamos ahora la acción sobre Ω_C para verlo sobre el cubo completo, tenemos que la órbita del cubo resuelto (el vector $(i)_{i=1}^{48}$) es:

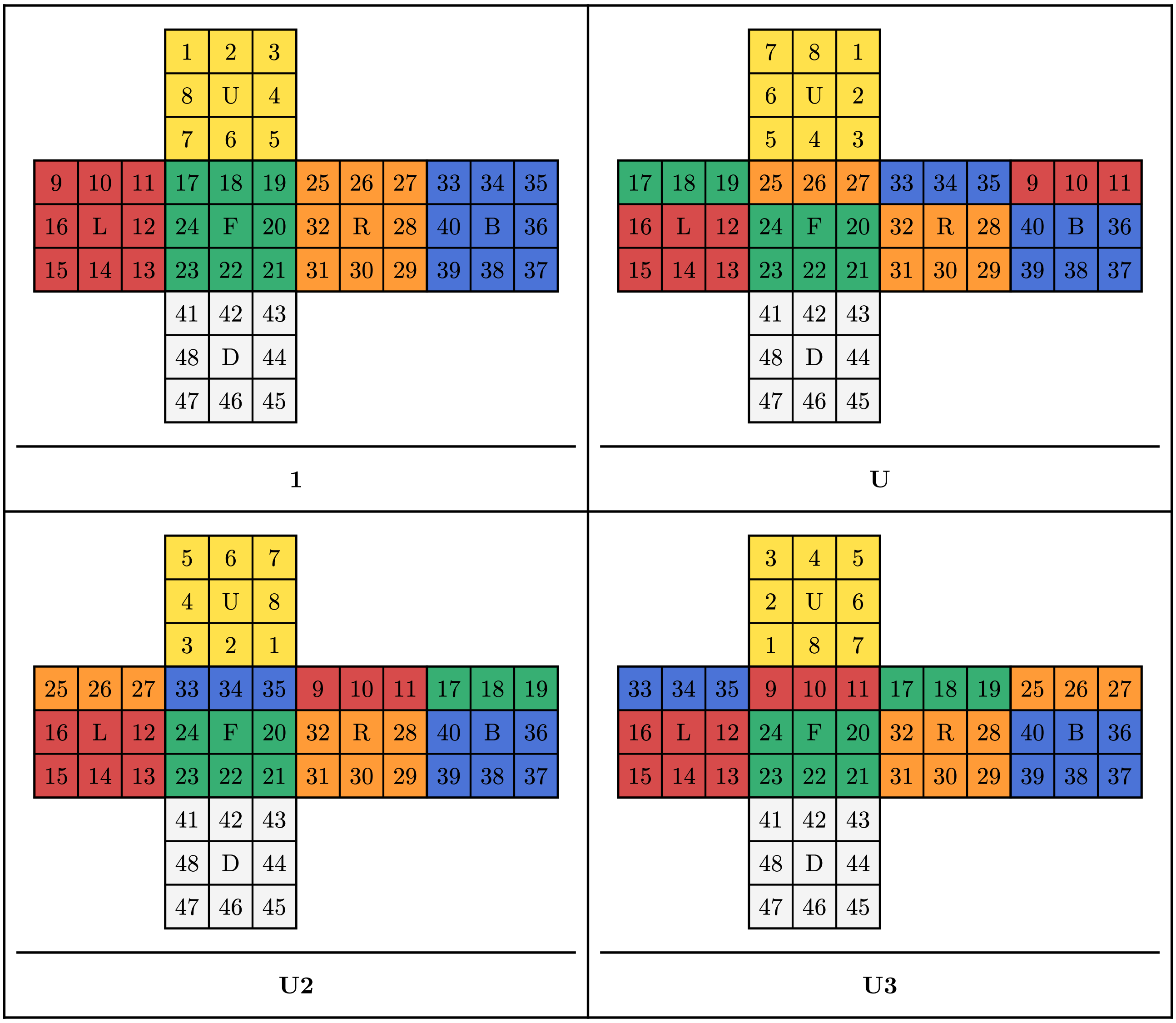


FIGURA 6: Órbita de $\langle \mathrm{U} \rangle$ sobre el cubo resuelto

4.2. Subgrupo que fija la orientación

Definición 4.2.1. (orientación) Decimos que una pieza está orientada si
- Tiene una pegatina blanca o amarilla en alguna de estas cara, o
- Si dicha pieza no posee pegatinas blancas o amarillas pero tiene una pegatina verde o azul en alguna de estas dos últimas caras.

Los movimientos que no modifican la orientación son los cuadrados de los movimientos básicos, por lo que estamos hablando del grupo $G = \langle \mathrm{U2}, \mathrm{D2}, \mathrm{R2}, \mathrm{L2}, \mathrm{F2}, \mathrm{B2} \rangle$.

Es muy sencillo ver las órbitas de este grupo. Una de las características que tiene es que no se puede deshacer un cubo con caras opuestas del mismo color:

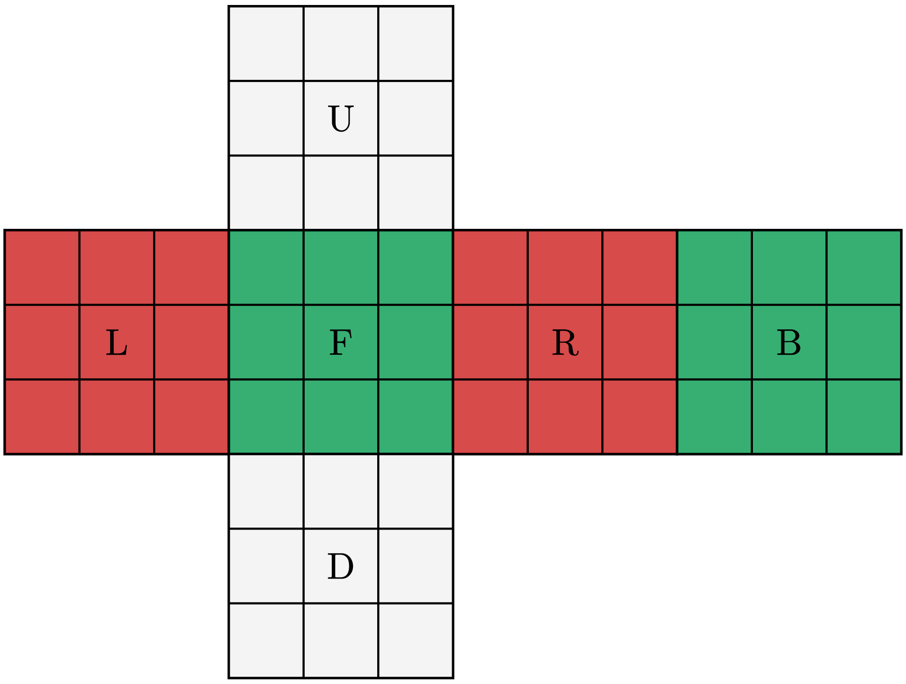


Figura 7: Cubo de Rubik invariante bajo G

Aquí, la acción sobre Ω_C «vendría» dada por $\alpha \cdot g = \alpha \quad \forall \alpha \in \Omega_C, g \in G$. Se ha entrecomillado *vendría* puesto que no tenemos bien definido Ω_C para este cubo ya que hay piezas iguales con nombres diferentes. Por ejemplo las dos esquinas que poseen las pegatinas $(7, 11, 17)$ y $(3, 27, 33)$ son iguales con estos colores.

Un subgrupo similar, ligeramente mayor se obtiene al permitir cualquier giro de las caras superiores e inferiores, es decir $H = \langle \mathrm{U}, \mathrm{D}, \mathrm{R2}, \mathrm{L2}, \mathrm{F2}, \mathrm{B2} \rangle$.

Este subgrupo juega un papel fundamental en el estudio estructural del grupo del cubo de Rubik y, en particular, en la demostración de que toda configuración del cubo se puede resolver en 20 movimientos o menos, resultado conocido como *God's number*. Se puede ver brevemente el procedimiento empleado en la demostración en [4].

Todo cubo resuelto al que se le aplique una permutación de H tendrá la forma que se muestra en la Figura 8 tras aplicar el siguiente cambio de pegatinas: cambiar amarillo por blanco, naranja por rojo, azul por verde y quitar las pegatinas de las esquinas que no sean blancas.

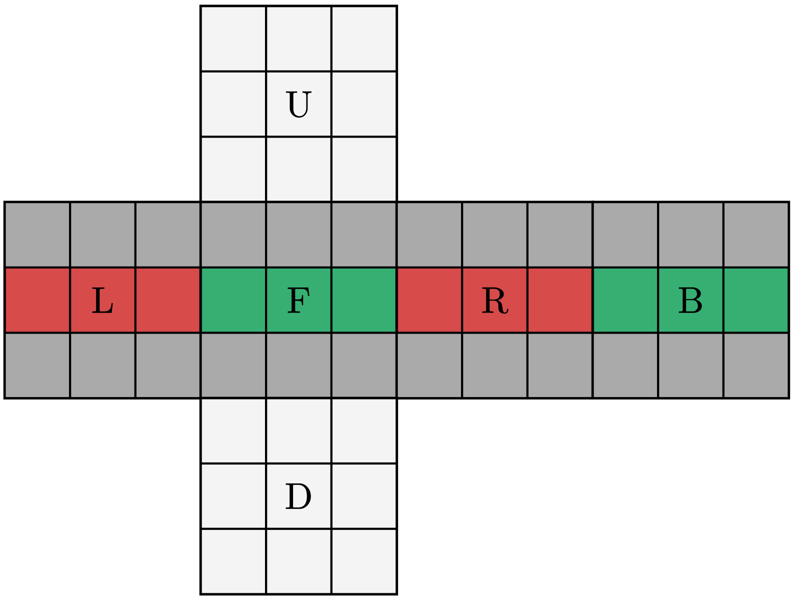


Figura 8: Cubo de Rubik invariante bajo H

La justificación para el cálculo de posiciones del cubo de Rubik se abordará en la Sección 6, de momento afirmamos sin justificación que el cubo invariante por H tiene $8!8!4!/2 = 19.508.428.800$. De este modo, en vez de comprobar cada configuración del cubo y encontrar la solución óptima, se estudia el conjunto de clases a derecha

$$\mathcal{R}/_{H} = \{H \cdot f \mid f \in \mathcal{R}\}$$

que particiona $\mathcal{R}$ en $|\mathcal{R}|/|H| = 2.217.093.120$ clases de equivalencia donde hay que comprobar un solo representante, reduciendo drásticamente el coste computacional.

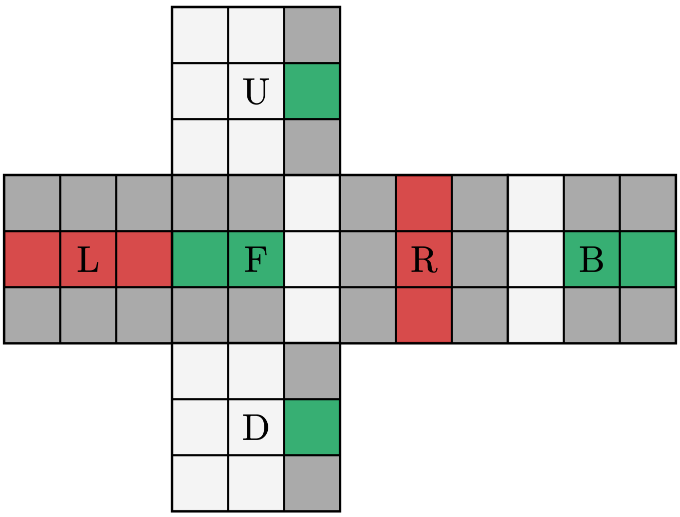


Figura 9: Clase lateral $HR = \{h \cdot R \mid h \in H\}$

Acción de $\mathcal{R}$ sobre $\mathcal{R}/H$ por multiplicación a derecha

$$\begin{aligned} \circledast : {}^{\mathcal{R}}\!\big/_{H} \times \mathcal{R} &\longrightarrow {}^{\mathcal{R}}\!\big/_{H} \\ (Hx, g) &\mapsto Hx \circledast g = H(xg) \end{aligned}$$

Veamos que está bien definida. Sean $Hx = Hy \in {}^{\mathcal{R}}\!\big/_{H}$, entonces existe $h \in H$ tal que $y = hx$ y por tanto, $Hx \circledast g = H(xg) = H(hxg) = H(yg) = Hy \circledast g$.

Desde el punto de vista del cubo de Rubik, cada clase lateral Hg representa un tipo de configuración caracterizado por el cubo invariante asociado a H. Aplicar un movimiento $g \in \mathcal{R}$ no altera la estructura interna de la clase, sino que transporta la configuración a otra clase lateral.

Se trata de una acción transitiva, pues solo tiene una órbita. Dados $Hg_1, Hg_2 \in {}^{\mathcal{R}}\!\big/_{H}$, se tiene que $Hg_2 = H(g_1(g_1^{-1}g_2)) = Hg_1 \circledast g_1^{-1}g_2$

El estabilizador de la clase $H1 = H$ bajo esta acción es precisamente el subgrupo

$$\mathrm{Stab}_{\mathcal{R}}(H) = \{g \in \mathcal{R} \mid H \circledast g = H\} = H$$

Podría poner el desarrollo para encontrar un subgrupo normal si me lo permite

5. Restricciones estructurales

Hemos visto como se podía expresar el grupo de Rubik, $\mathcal{R}$, como un subgrupo de S_{48}, sin embargo, a la hora de estudiar la estructura del cubo y las restricciones bajo el grupo $\mathcal{R}$, conviene formalizarlo de otra manera.

Como se ha visto en Sección 4.1, la órbita de una posición de una esquina siempre es otra esquina, por tanto, considerando la acción de $\mathcal{R}$ sobre el cubo, las esquinas forman una órbita y las aristas otras, por lo que podemos considerarlas por separado.

Cada movimiento actúa permutando las piezas del cubo y modificando, en algunos casos, su orientación. Para describir algebraicamente una configuración del cubo, se consideran por separado las esquinas (vértices) y las aristas, ya que nunca pueden intercambiar sus posiciones entre sí.

Me gustaría que explicaras como se llega al grupo

$$S_{12} \times S_8 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$$

un poquito y demostrar las proposiciones. Lo que tu veas, si no quieres hacer algo y me das permiso, lo hago yo encantado

Además, cada pieza posee una orientación interna:

- Las 8 esquinas admiten 3 orientaciones posibles.
- Las 12 aristas admiten 2 orientaciones posibles.
- Los centros permanecen fijos.

Una configuración del cubo puede representarse entonces mediante un cuádruple, donde:

- π es la permutación de las esquinas
- ρ es la permutación de las aristas
- v describe las orientaciones de las esquinas
- w describe las orientaciones de las aristas

No toda configuración teórica es alcanzable mediante movimientos legales del cubo. Existen tres restricciones fundamentales que caracterizan las configuraciones resolubles.

Proposición 5.0.1. (Restricción de orientación de vértices) La suma de las orientaciones de las esquinas, considerada módulo 3, debe ser nula. Esto implica que no es posible girar una única esquina de forma aislada.

$$\sum_{i=1}^{8} v_i \equiv 0 \bmod 3$$

Proposición 5.0.2. (Restricción de orientación de aristas) La suma de las orientaciones de las aristas, considerada módulo 2, también debe ser cero, lo que impide invertir una única arista sin afectar a otra.

$$\sum_{j=1}^{12} w_j \equiv 0 \bmod 2$$

Proposición 5.0.3. (Restricción de paridad) Las permutaciones inducidas sobre las esquinas y las aristas deben tener la misma paridad. Esta condición se debe a que cada movimiento básico del cubo actúa como un 4-ciclo impar en ambos conjuntos.

$$\operatorname{sgn}(\pi) = \operatorname{sgn}(\rho)$$

En conjunto, estas tres restricciones caracterizan completamente el espacio de configuraciones resolubles del cubo de Rubik. Toda configuración que las satisface puede alcanzarse desde la posición resuelta mediante una sucesión de movimientos, mientras que cualquier configuración que viole alguna de ellas es inalcanzable sin desmontar el cubo. Esta caracterización resulta fundamental para el cálculo exacto del orden de su grupo asociado.

6. Cálculo de todas las posibles configuraciones de un cubo de Rubik

Una vez establecidas las restricciones estructurales, se puede calcular el número total de configuraciones distintas alcanzables del cubo de Rubik.

Vértices.

- Existen $8!$ permutaciones posibles de las 8 esquinas.
- Cada esquina tiene 3 orientaciones posibles, lo que supone 3^8 combinaciones. Sin embargo, por la Proposición 5.0.1, solo una de cada tres combinaciones de orientaciones es válida.

Por tanto, el número de configuraciones posibles de las esquinas es $8! \cdot 3^7$

Aristas.

- Existen $12!$ permutaciones posibles de las 12 aristas.
- Cada arista tiene 2 orientaciones posibles, lo que da 2^{12} combinaciones. Por la Proposición 5.0.2, reduce este número a la mitad.

Así, el número de configuraciones válidas de las aristas es $12! \cdot 2^{11}$

Paridad conjunta.

Solo la mitad de las parejas de permutaciones de esquinas y aristas cumplen la condición de tener la misma paridad, por lo que es necesario dividir entre 2. Combinando todos los factores, el número de combinaciones válidas del cubo de Rubik es:

$$\frac{8! \cdot 3^7 \cdot 12! \cdot 2^{11}}{2} = 43.252.003.274.489.856.000 \approx 4.3 \cdot 10^{19}$$

7. Conclusiones

Quiero dormir, he caído en la locura.

8. Bibliografía

[1] R. Ingelbrecht, «Puzzle Generator: Rubik's Cube SVG Generator». [En línea]. Disponible en: https://puzzle-generator.robiningelbrecht.be/cube

[2] G. Navarro Ortega, *Un curso de álgebra*, 2ª edición corregida y aumentada. València: Publicacions de la Universitat de València, 2016, p. 184.

[3] K. Conrad, «The 15-Puzzle (and Rubik's Cube)». [En línea]. Disponible en: https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/grouptheory/15puzzle.pdf

[4] T. Rokicki, H. Kociemba, M. Davidson, y J. Dethridge, «The Diameter of the Rubik's Cube Group is Twenty», *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, vol. 27, n.º 2, pp. 1082-1105, 2013, doi: 10.1137/120867366.