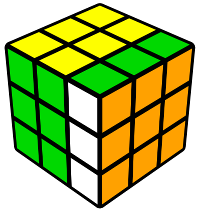
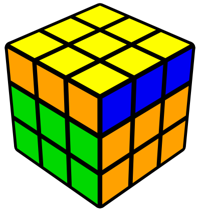
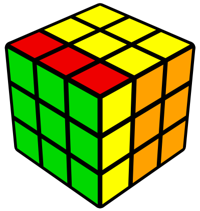
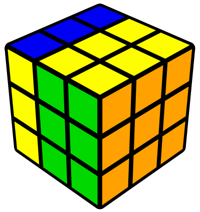
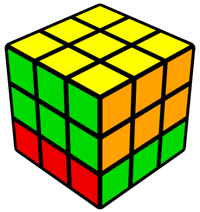
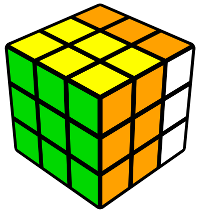
1. El Grupo de Rubik

Ferran Martinavarro

14/01/2026

Índice

2. Introducción: Notación

 R	 U	 F
 L	 D	 B

3. Preliminares

Definición 3.1. (Grupo Generado)

Dados los elementos $x_1, ..., x_k$, el grupo más pequeño que contiene estos elementos, al que llamamos grupo generado por $x_1, ..., x_k$ viene dado por:

$$\langle x_1, ..., x_k \rangle = \left\{ x_{i_1}^{n_1} \quad \cdots \quad x_{i_m}^{n_m} \quad \middle| \quad m \in \mathbb{N}, i_j \in \{1, ..., k\}, n_j \in \mathbb{Z} \right\}$$

Definición 3.2. (Permutación)

Sea Ω un conjunto. Decimos que una permutación de Ω es una aplicación biyectiva $f : \Omega \to \Omega$.

Al conjunto de permutaciones de Ω lo denotamos por S_Ω y forma un grupo con la operación $f \cdot g = g \circ f$.

Definición 3.3. (Acción)

Sea Ω un conjunto no vacío y G un grupo. Llamamos acción a una operación

$$\begin{aligned} \cdot : \Omega \times G &\to \Omega \\ (\alpha, g) &\mapsto \alpha \cdot g \end{aligned}$$

De manera que dado $\alpha \in \Omega, \quad \forall g \in G, \quad \exists! \alpha \cdot g \in \Omega$ y además cumple las siguientes propiedades:

- $(\alpha \cdot g) \cdot h = \alpha \cdot (gh) \quad \forall \alpha \in \Omega, \quad \forall g, h \in G$
- $\alpha \cdot 1 = \alpha \quad \forall \alpha \in \Omega$

Esto define una relación de equivalencia: dados $\alpha, \beta \in \Omega$, $\alpha \sim \beta \iff \exists g \in G$ tal que $\alpha \cdot g = \beta$.

Definición 3.4. (Órbita y Estabilizador)

Dada una acción $\cdot : \Omega \times G \to \Omega$ y $\alpha \in \Omega$. Llamamos órbita de α a su clase de equivalencia:

$$\mathcal{O}(\alpha) = \{\alpha \cdot g \mid g \in G\}$$

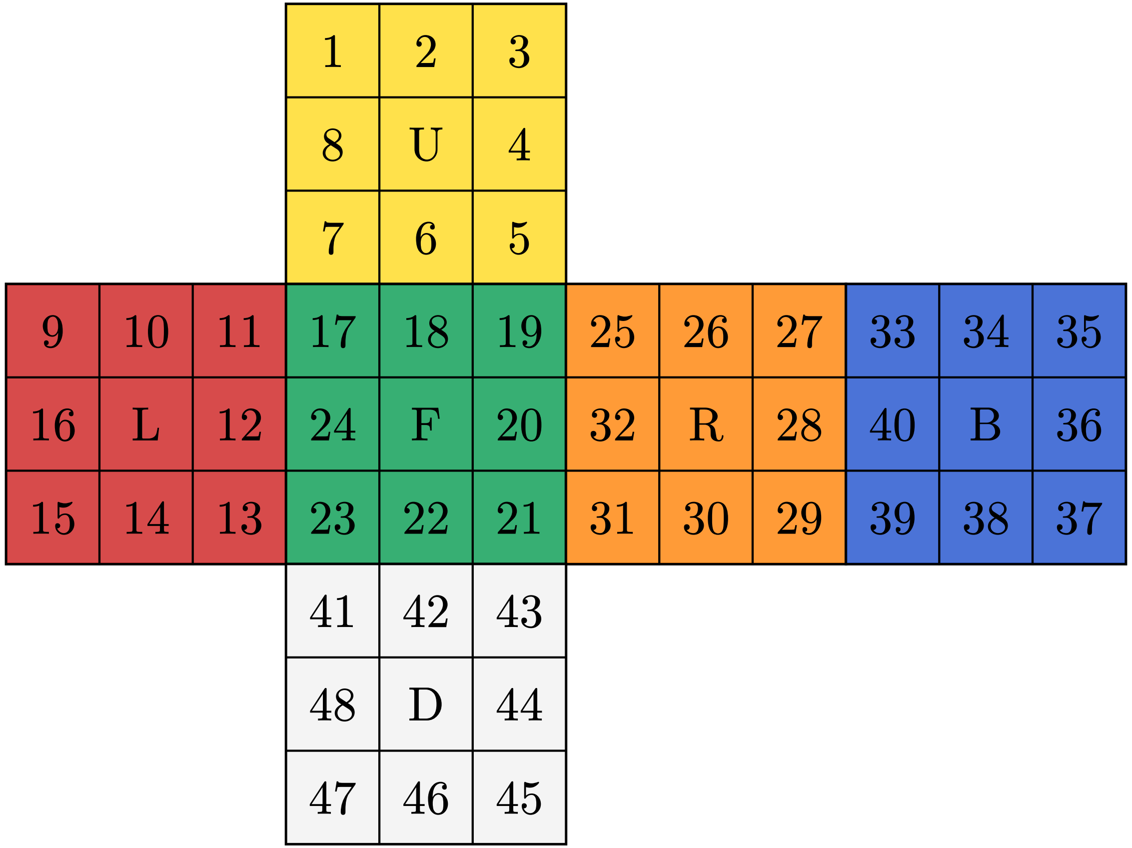
El estabilizador de α en G se define como

$$\mathrm{Stab}_G(\alpha) = G_\alpha = \{g \in G \mid \alpha \cdot g = \alpha\}$$

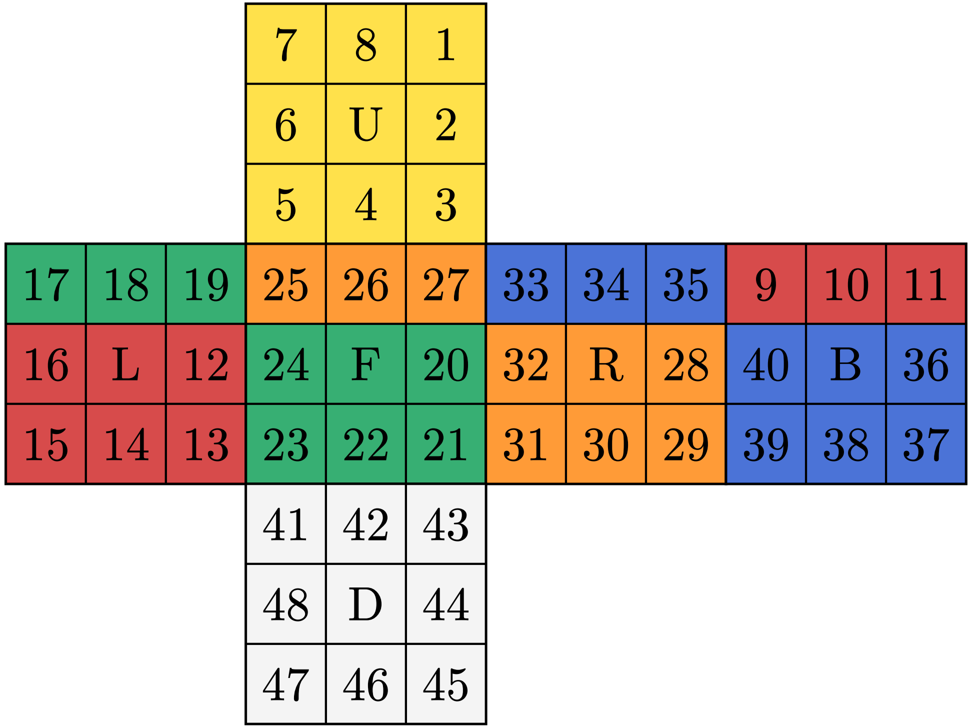
4. El Grupo de Rubik

$$\mathcal{R} = \langle \mathrm{U}, \mathrm{D}, \mathrm{L}, \mathrm{R}, \mathrm{F}, \mathrm{B} \rangle \leq S_\Omega$$

4.1. Formalización

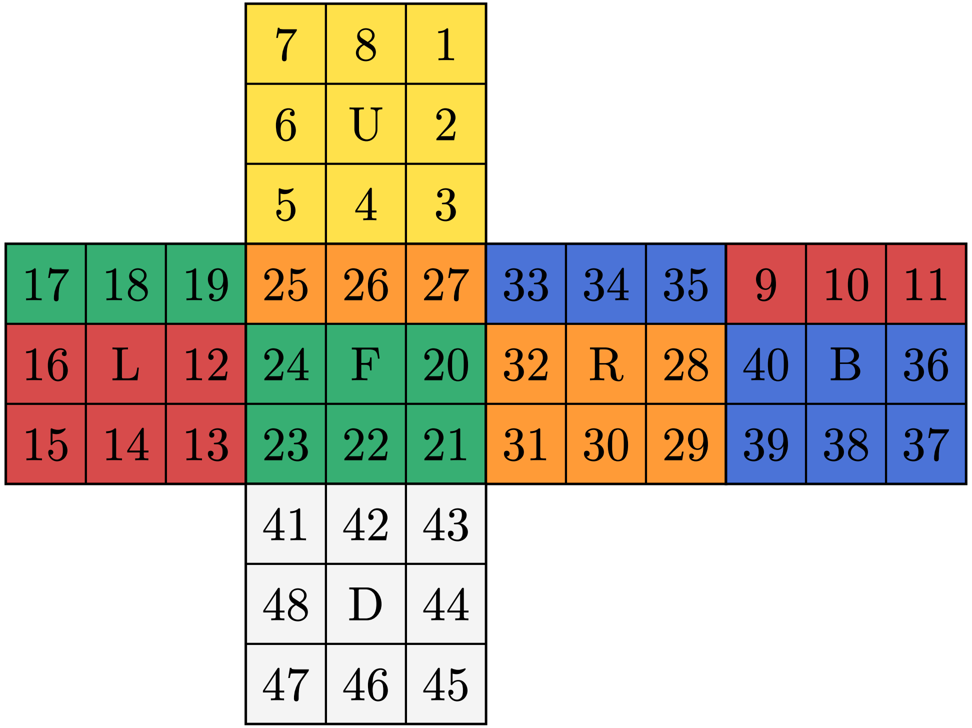


4.1. Formalización



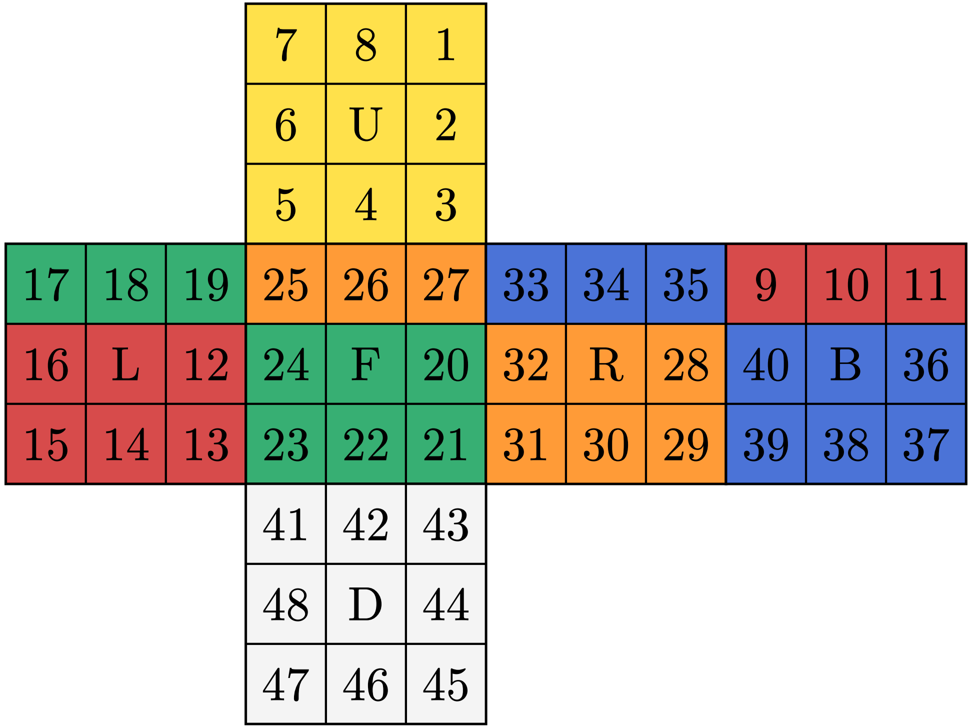
$$U = (1, 3, 5, 7)$$

4.1. Formalización



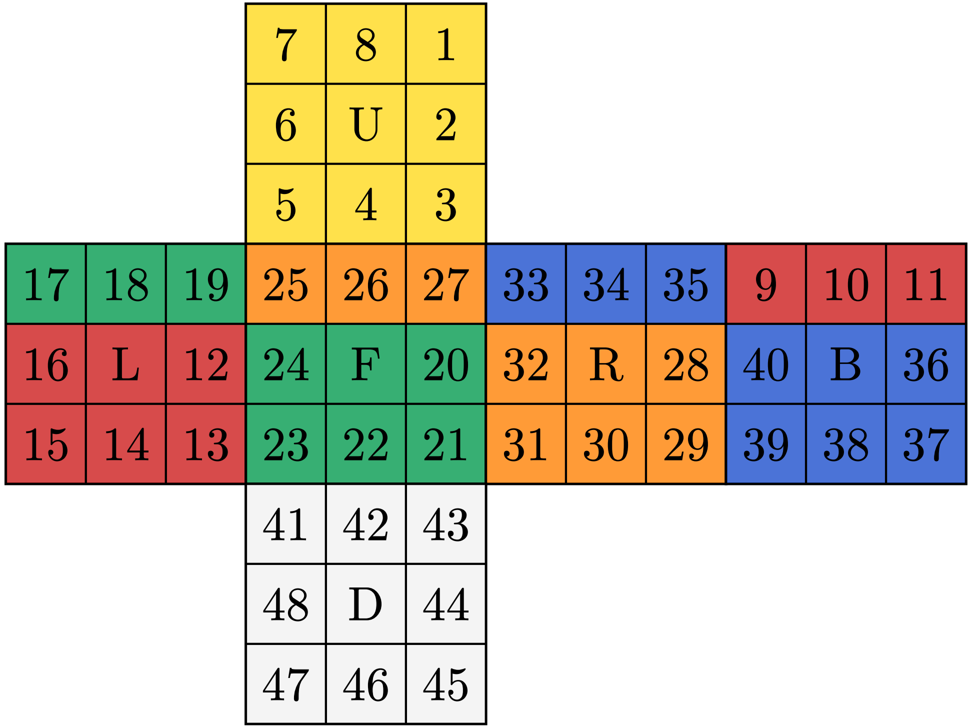
$$U = (1, 3, 5, 7)(2, 4, 6, 8)$$

4.1. Formalización



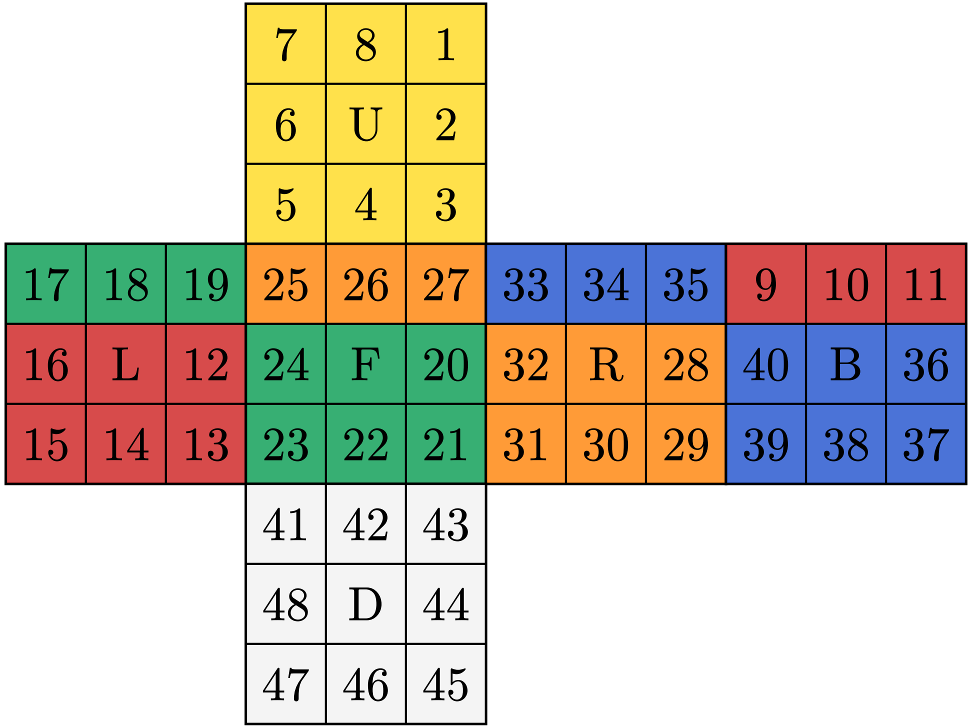
$$
\begin{aligned}
U = {} & (1, 3, 5, 7) \\
& (2, 4, 6, 8) \\
& (9, 33, 25, 17)
\end{aligned}
$$

4.1. Formalización



$$
\begin{aligned}
U = {} & (1, 3, 5, 7) \\
& (2, 4, 6, 8) \\
& (9, 33, 25, 17) \\
& (34, 26, 18, 10)
\end{aligned}
$$

4.1. Formalización



$$
\begin{aligned}
U = {} & (1, 3, 5, 7) \\
& (2, 4, 6, 8) \\
& (9, 33, 25, 17) \\
& (34, 26, 18, 10) \\
& (35, 27, 19, 11)
\end{aligned}
$$

4.1. Formalización

Definición 4.1. (Movimientos Básicos como ciclos disjuntos)

- $\mathrm{U} = (1, 3, 5, 7)(2, 4, 6, 8)(9, 33, 25, 17)(34, 26, 18, 10)(35, 27, 19, 11)$
- $\mathrm{D} = (41, 43, 45, 47)(42, 44, 46, 48)(15, 23, 31, 39)(14, 22, 30, 38)(13, 21, 29, 37)$
- $\mathrm{R} = (25, 27, 29, 31)(26, 28, 30, 32)(3, 39, 43, 19)(4, 40, 44, 20)(5, 33, 45, 21)$
- $\mathrm{L} = (9, 11, 13, 15)(10, 12, 14, 16)(1, 17, 41, 35)(8, 24, 48, 36)(7, 23, 47, 37)$
- $\mathrm{F} = (17, 19, 21, 23)(18, 20, 22, 24)(7, 25, 43, 13)(6, 32, 42, 12)(5, 31, 41, 11)$
- $\mathrm{B} = (33, 35, 37, 39)(34, 36, 38, 40)(1, 15, 45, 27)(2, 16, 46, 28)(3, 9, 47, 29)$

$$\mathcal{R} = \langle \mathrm{U}, \mathrm{D}, \mathrm{L}, \mathrm{R}, \mathrm{F}, \mathrm{B} \rangle \leq S_{48}$$

5. Subgrupos y Acciones

5.1. Conjuntos sobre los que veremos acciones

1. $\Omega = \{1, \ldots, 48\}$ el conjunto de posiciones del cubo.
2. $\Omega_C = \left\{(v_i)_{i=1}^{48} \in \Omega^{48} : v_i \neq v_j \forall i \neq j \in \Omega\right\}$ que representa una configuración de las pegatinas del cubo de manera que $\mathcal{R}$ actúa por aplicación a cada componente del vector: Sean $\vec{v} = (v_i)_{i=1}^{48} \in \Omega_C$ y $h \in \mathcal{R}$

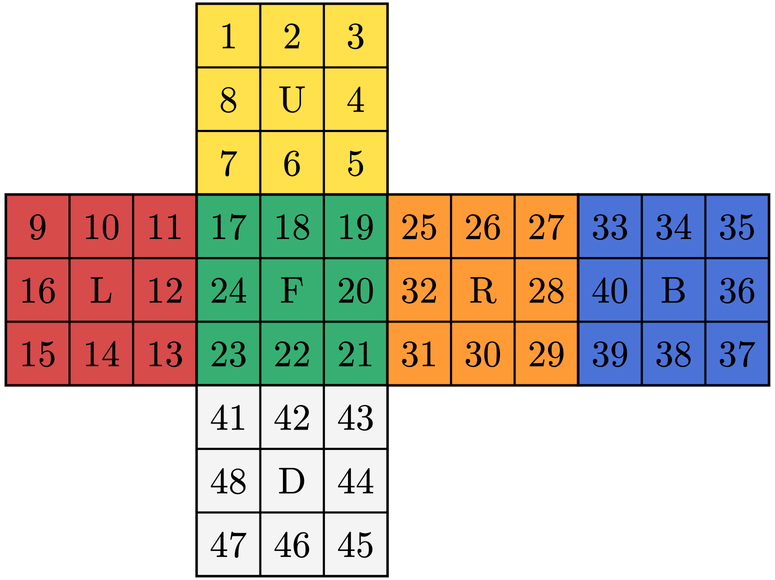
$$\vec{v} \cdot h = (h(v_i))_{i=1}^{48}$$

Lo veremos gráficamente con los diagramas.

5.2. Subgrupos Cíclicos Básicos

Subgrupos $\langle \mathrm{U} \rangle$, $\langle \mathrm{D} \rangle$, $\langle \mathrm{R} \rangle$, $\langle \mathrm{L} \rangle$, $\langle \mathrm{F} \rangle$, $\langle \mathrm{B} \rangle$ de orden 4. Por ejemplo,

$$\langle \mathrm{U} \rangle = \{1, \mathrm{U}, \mathrm{U2}, \mathrm{U3}\}$$

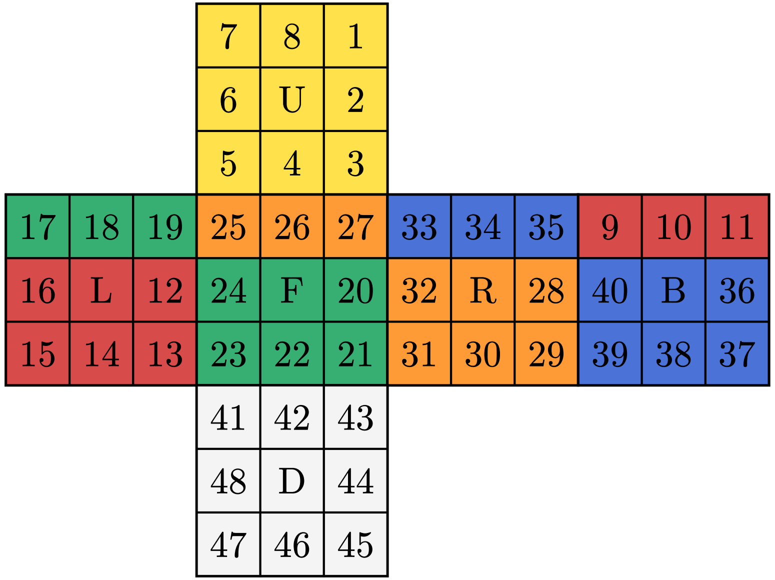


5.2. Subgrupos Cíclicos Básicos

Subgrupos $\langle \mathrm{U} \rangle, \langle \mathrm{D} \rangle, \langle \mathrm{R} \rangle, \langle \mathrm{L} \rangle, \langle \mathrm{F} \rangle, \langle \mathrm{B} \rangle$ de orden 4. Por ejemplo,

$$\langle \mathrm{U} \rangle = \{1, \mathrm{U}, \mathrm{U2}, \mathrm{U3}\}$$

U

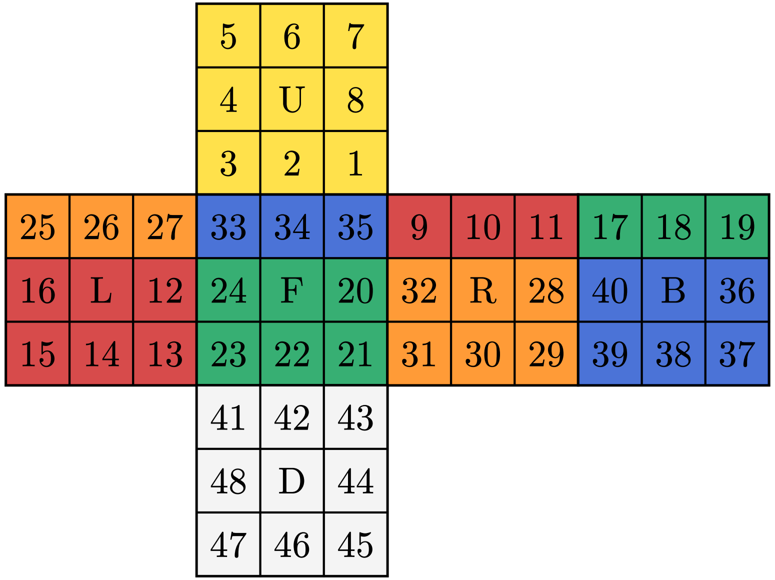


5.2. Subgrupos Cíclicos Básicos

Subgrupos $\langle \mathrm{U} \rangle, \langle \mathrm{D} \rangle, \langle \mathrm{R} \rangle, \langle \mathrm{L} \rangle, \langle \mathrm{F} \rangle, \langle \mathrm{B} \rangle$ de orden 4. Por ejemplo,

$$\langle \mathrm{U} \rangle = \{1, \mathrm{U}, \mathrm{U2}, \mathrm{U3}\}$$

U2

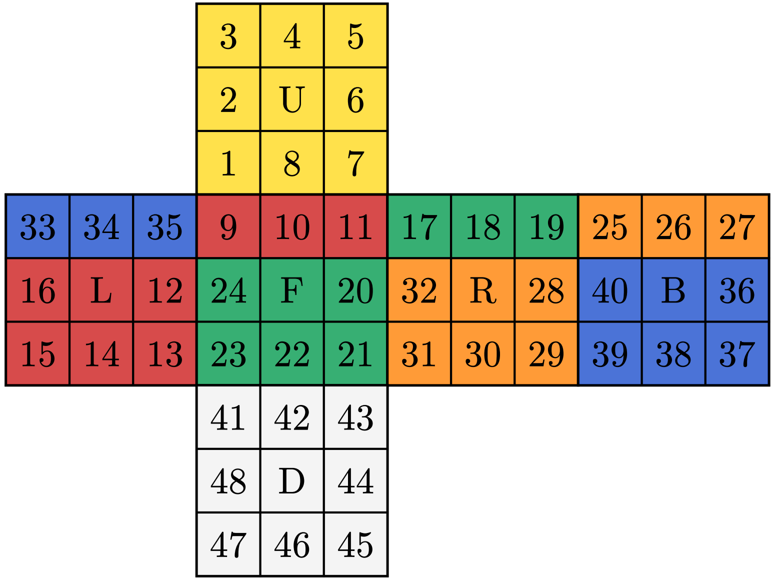


5.2. Subgrupos Cíclicos Básicos

Subgrupos $\langle \mathrm{U} \rangle, \langle \mathrm{D} \rangle, \langle \mathrm{R} \rangle, \langle \mathrm{L} \rangle, \langle \mathrm{F} \rangle, \langle \mathrm{B} \rangle$ de orden 4. Por ejemplo,

$$\langle \mathrm{U} \rangle = \{1, \mathrm{U}, \mathrm{U2}, \mathrm{U3}\}$$

U3

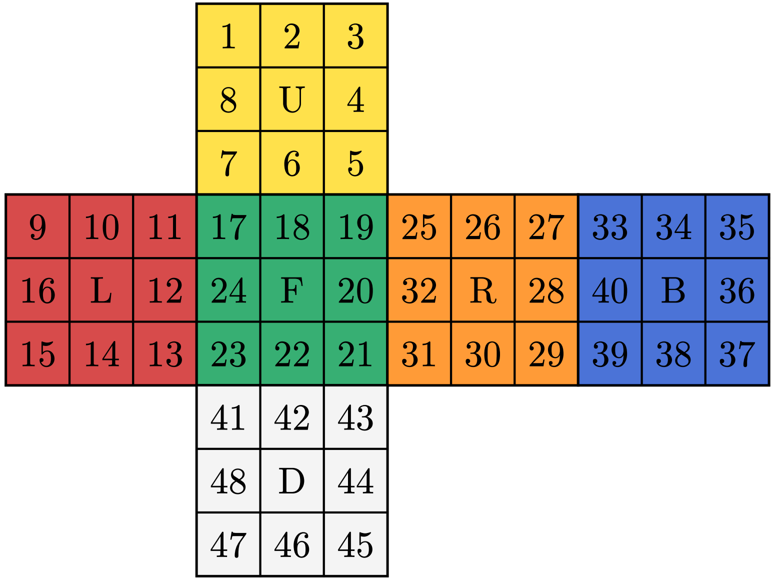


5.2. Subgrupos Cíclicos Básicos

Subgrupos $\langle \mathrm{U} \rangle, \langle \mathrm{D} \rangle, \langle \mathrm{R} \rangle, \langle \mathrm{L} \rangle, \langle \mathrm{F} \rangle, \langle \mathrm{B} \rangle$ de orden 4. Por ejemplo,

$$\langle \mathrm{U} \rangle = \{1, \mathrm{U}, \mathrm{U2}, \mathrm{U3}\}$$

$$\mathbf{1 = \mathit{U}4}$$



5.2. Subgrupos Cíclicos Básicos

Por la acción sobre Ω, este subgrupo tiene 5 órbitas de cardinal 4, los cinco 4-ciclos con los que se define U:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(1) &= \{1,3,5,7\} & \mathcal{O}(2) &= \{2,4,6,8\} \\ \mathcal{O}(9) &= \{9,33,25,17\} & \mathcal{O}(34) &= \{34,26,18,10\} \\ \mathcal{O}(35) &= \{35,27,19,11\} \end{aligned}$$

El resto de órbitas son de cardinal 1 puesto que las pegatinas no se mueven al aplicar U.

Nótese que los números con una paridad van a números con la misma

5.3. Subgrupo que fija la orientación

Definición 5.1. (orientación) Decimos que una pieza está orientada si

- Tiene una pegatina blanca o amarilla en alguna de estas cara, o
- Si dicha pieza no posee pegatinas blancas o amarillas pero tiene una pegatina verde o azul en alguna de estas dos últimas caras.

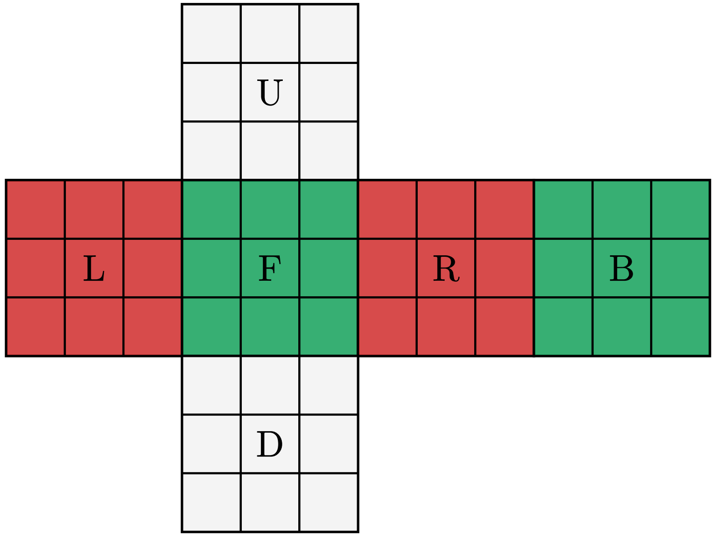
Los cuadrados de los movimientos básicos[1] no modifican la orientación

$$G = \langle \mathrm{U2}, \mathrm{D2}, \mathrm{R2}, \mathrm{L2}, \mathrm{F2}, \mathrm{B2} \rangle$$

[1]Cualquier giro de U o D tampoco modifica la orientación, lo veremos…

5.3. Subgrupo que fija la orientación

Es muy sencillo ver las órbitas de este grupo. Una de las características que tiene es que no se puede deshacer un cubo con caras opuestas del mismo color:



5.3. Subgrupo que fija la orientación

Un subgrupo similar, ligeramente mayor es $H = \langle \mathrm{U}, \mathrm{D}, \mathrm{R2}, \mathrm{L2}, \mathrm{F2}, \mathrm{B2} \rangle$.

Se emplea en la demostración de que toda configuración del cubo se puede resolver en 20 movimientos o menos, resultado conocido como ***God's number*** [1].

Se trata de una prueba computacional que verifica que las $4.3 \cdot 10^{19}$ cumple la condición.

5.4. Problema de Algoritmia

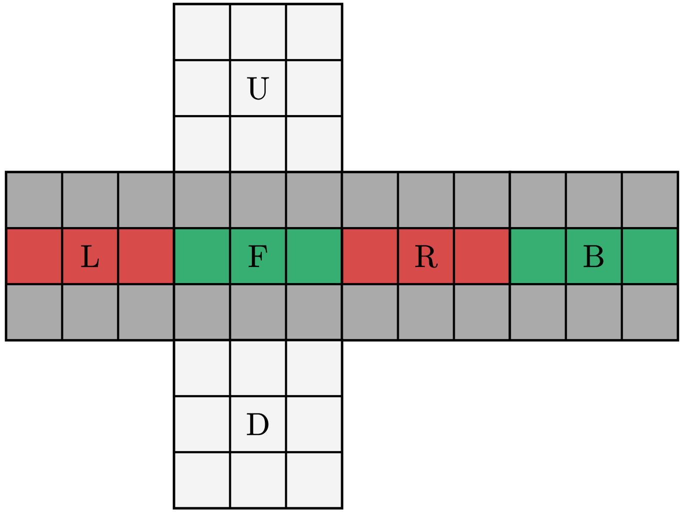
Para resolver una configuración del cubo, se usa back-tracking con ramificación y acotación de ramas: **coste exponencial**.

Además, se necesita control de visitados, almacenar en un conjunto todas las configuraciones que ya se han comprobado: **falta RAM** para todas la posibilidades

5.5. Solución Algebraica

Explorar un representante de cada clase de equivalencia que viene dada por las órbitas de un subgrupo.

Bajo la acción de H un cubo invariante tiene la siguiente forma:



5.5. Solución Algebraica

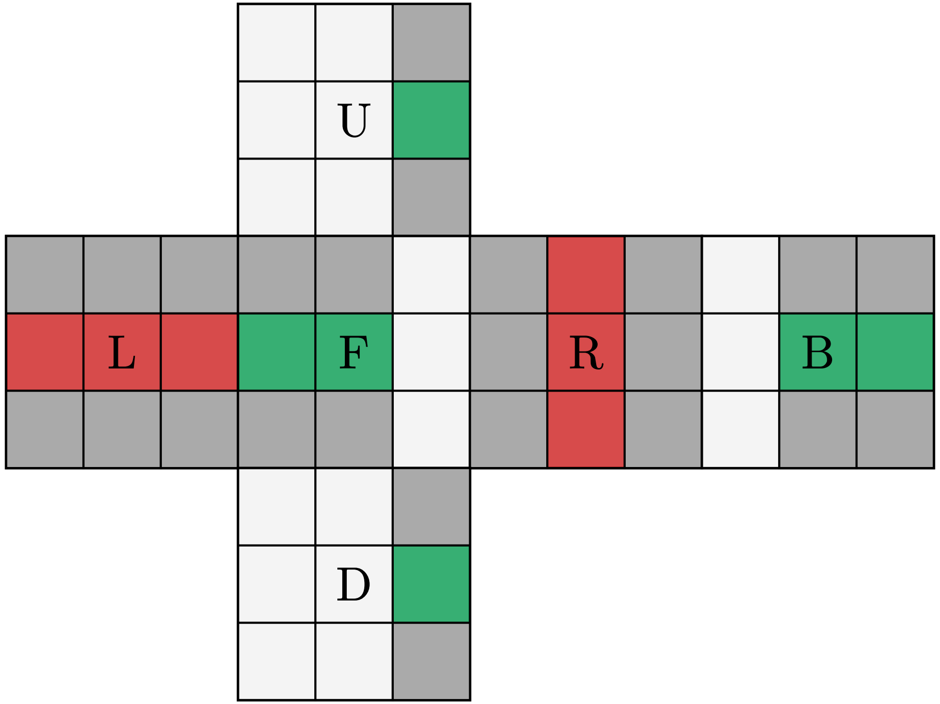
El cubo invariante por H tiene $8!8!4!/2 = 19.508.428.800$ posiciones. Se estudia el conjunto de clases a derecha

$$ {}^{\mathcal{R}}\!\big/_{H} = \{H \cdot f \mid f \in \mathcal{R}\} $$

que particiona $\mathcal{R}$ en $|\mathcal{R}|/|H| = 2.217.093.120$ clases de equivalencia donde hay que comprobar un solo representante, reduciendo drásticamente el coste computacional.

5.5. Solución Algebraica

Clase lateral $HR = \{h \cdot R \mid h \in H\}$



5.6. Acción de $\mathcal{R}$ sobre $\mathcal{R}/H$ por multiplicación a derecha

$$\circledast : {}^{\mathcal{R}}\!\big/_{H} \times \mathcal{R} \longrightarrow {}^{\mathcal{R}}\!\big/_{H}$$
$$(Hx, g) \mapsto Hx \circledast g = H(xg)$$

Está bien definida. Sean $Hx = Hy \in {}^{\mathcal{R}}\!\big/_{H}$, entonces existe $h \in H$ tal que $y = hx$ y por tanto, $Hx \circledast g = H(xg) = H(hxg) = H(yg) = Hy \circledast g$.

5.6. Acción de $\mathcal{R}$ sobre $\mathcal{R}/H$ por multiplicación a derecha

Desde el punto de vista del cubo de Rubik, cada clase lateral Hg representa un tipo de configuración caracterizado por el cubo invariante asociado a H.

Aplicar un movimiento $g \in \mathcal{R}$ no altera la estructura interna de la clase, sino que transporta la configuración a otra clase lateral.

5.6. Acción de $\mathcal{R}$ sobre $\mathcal{R}/H$ por multiplicación a derecha

Se trata de una **acción transitiva**, pues solo tiene una órbita. Dados $Hg_1, Hg_2 \in {}^{\mathcal{R}}\!/_{H}$, se tiene que

$$Hg_2 = H(g_1(g_1^{-1}g_2)) = Hg_1 \circledast g_1^{-1}g_2$$

El **estabilizador** de la clase $H1 = H$ bajo esta acción es precisamente el subgrupo

$$\mathrm{Stab}_{\mathcal{R}}(H) = \{g \in \mathcal{R} \mid H \circledast g = Hg = H\} = H$$

6. Restricciones Estructurales

Vamos a ver ahora $\mathcal{R}$ (bajo algunas restricciones) como

$$S_{12} \times S_8 \times (\mathbb{Z}_3)^8 \times (\mathbb{Z}_2)^{12}$$

- S_{12} es una permutación de las esquinas
- S_8 es una permutación de las aristas
- $\mathbb{Z}_3$ es la orientaciones de las esquinas
- $\mathbb{Z}_2$ es la orientación de las aristas

6.1. Paridad conjunta

Cada movimiento induce un 4-ciclo en las esquinas que mueve y un 4--ciclo en las aristas.

La signatura de un 4-ciclo es $-1 \Longrightarrow$ permutación impar. Cada permutación $\pi \in S_{12}$ y $\rho \in S_8$ inducida por los mismos movimientos cumple

$$\operatorname{sig}(\pi) = \operatorname{sig}(\rho)$$

6.2. Restricción de Orientación

Comprobando cada movimiento básico se ve que dados

$$\vec{v} = (v_i)_{i=1}^{8} \in (\mathbb{Z}_3)^8, \qquad \vec{w} = (w_i)_{i=1}^{12} \in (\mathbb{Z}_2)^{12}$$

Se cumple

$$\sum_{i=1}^{8} v_i \equiv 0 \bmod 3 \qquad \sum_{i=1}^{12} w_i \equiv 0 \bmod 2$$

7. Cálculo del Orden

$$X = \left\{ (\pi, \rho, \vec{v}, \vec{w}) \in S_{12} \times S_8 \times (\mathbb{Z}_3)^8 \times (\mathbb{Z}_2)^{12} : \begin{array}{l} \mathrm{sig}(\pi) = \mathrm{sig}(\rho) \\ \sum_{i=1}^{8} v_i \equiv 0 \bmod 3 \\ \sum_{i=1}^{12} w_i \equiv 0 \bmod 2 \end{array} \right\}$$

7.1. Biyección

Dado Ω el conjunto de todas las configuraciones del cubo de Rubik:

- Es trivial que todas la combinaciones alcanzables se encuentran en una 4-tupla de X
- Existe un algoritmo que dada una 4-tupla de X, resuelve el cubo asociado.

Como existe $f : \Omega \to X$ inyectiva y $g : X \to \Omega$ inyectiva, existe una biyección ente Ω y X, por lo que el cardinal es el mismo.

7.2. Cálculo $|X| = |\Omega|$

1. $|S_{12}| \cdot |S_8| = 12! \cdot 8!$ pero solo una de cada dos $(\pi, \rho) \in S_{12} \times S_8$ cumple $\operatorname{sig}(\pi) = \operatorname{sig}(\rho) \implies \frac{12! \cdot 8!}{2}$
2. $\left|(\mathbb{Z}_3)^8\right| = 3^8$ pero solo un tercio de los $\vec{v} \in (\mathbb{Z}_3)^8$ cumple $\sum_{i=1}^{8} v_i \equiv 0 \bmod 3 \implies 3^7$
3. $\left|(\mathbb{Z}_2)^{12}\right| = 2^{12}$ pero solo un medio de los $\vec{w} \in (\mathbb{Z}_2)^{12}$ cumple $\sum_{i=1}^{8} w_i \equiv 0 \bmod 2 \implies 2^{11}$

$$|X| = \frac{8! \cdot 3^7 \cdot 12! \cdot 2^{11}}{2} = 43.252.003.274.489.856.000 \approx 4.3 \cdot 10^{19}$$

8. Bibliografía

[1] T. Rokicki, H. Kociemba, M. Davidson, y J. Dethridge, «The Diameter of the Rubik's Cube Group is Twenty», *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, vol. 27, n.º 2, pp. 1082-1105, 2013, doi: 10.1137/120867366.

[2] K. Conrad, «The 15-Puzzle (and Rubik's Cube)». [En línea]. Disponible en: https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/grouptheory/15puzzle.pdf

[3] G. Navarro Ortega, *Un curso de álgebra*, 2ª edición corregida y aumentada. València: Publicacions de la Universitat de València, 2016, p. 184.

[4] R. Ingelbrecht, «Puzzle Generator: Rubik's Cube SVG Generator». [En línea]. Disponible en: https://puzzle-generator.robiningelbrecht.be/cube