Построение вейвлета $\widetilde{\mathrm{up}}_m(x)$

Будем решать задачу для $m = 3$. Дискретизация по x и ω: 0,001. Вычислим $\mathrm{up}_3(x)$ по формуле $\mathrm{up}_m(x) = \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{50} \prod\limits_{l=1}^{5} \frac{\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi m k}{(2m)^l}\right)}{\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi k}{(2m)^l}\right)} \cos(\pi k x)$. График $\mathrm{up}_3(x)$ представлен на рис. 1.

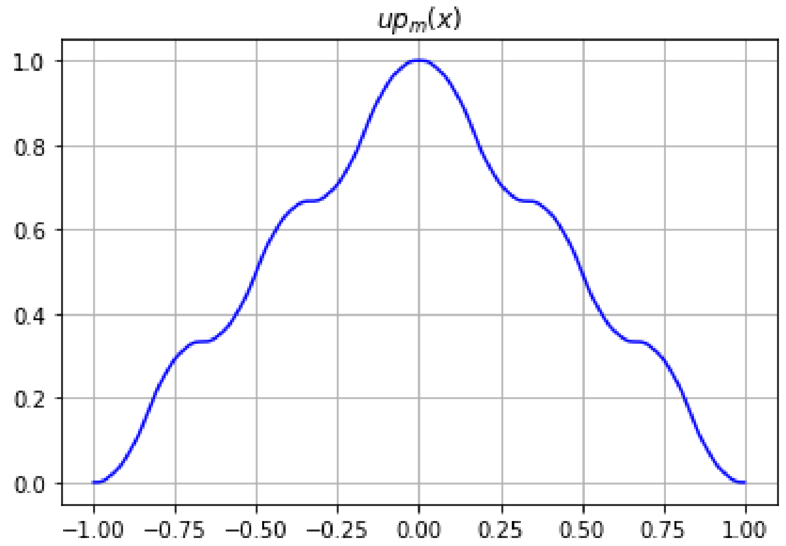

Рис. 1. График функции $\mathrm{up}_3(x)$

Найдём $\hat{\varphi}(\omega) = \widetilde{\mathrm{up}}_m(x) = \sqrt{\sum\limits_{n=-1}^{1} \mathrm{up}_m\left(\frac{3}{2\pi}\omega + n\right)}$ (рис. 2):

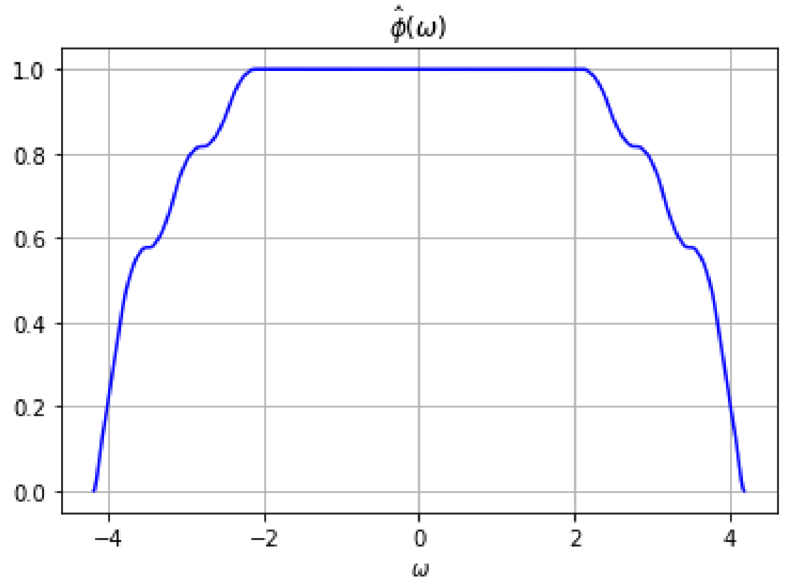

Рис. 2. График функции $\hat{\varphi}(\omega)$

Проверим равенство $|\hat{\varphi}(\omega)|^2 + |\hat{\varphi}(\omega - 2\pi)|^2 = 1$ на промежутке $\left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$. На рис. 3 синим показаны графики $|\hat{\varphi}(\omega)|^2$ и $|\hat{\varphi}(\omega - 2\pi)|^2$, зелёным — их сумма.

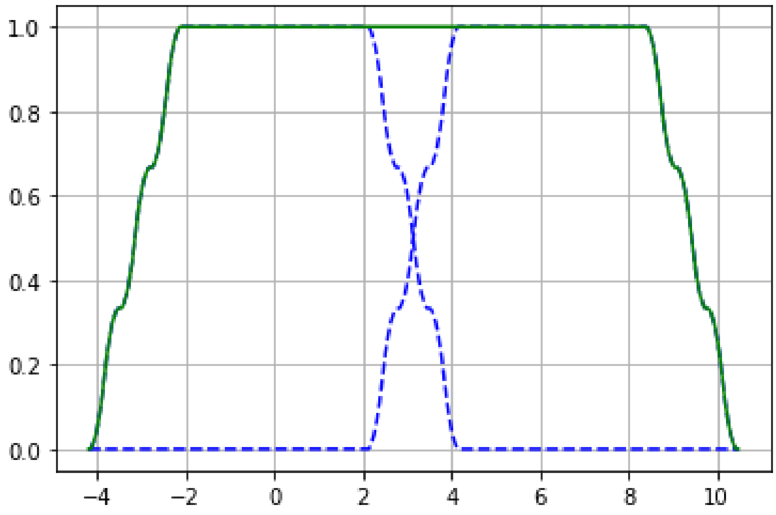

Рис. 3. График функции $|\hat{\varphi}(\omega)|^2 + |\hat{\varphi}(\omega - 2\pi)|^2$

Построим частотную функцию $H_0(\omega) = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(2(\omega + 2\pi n))$ (рис. 4):

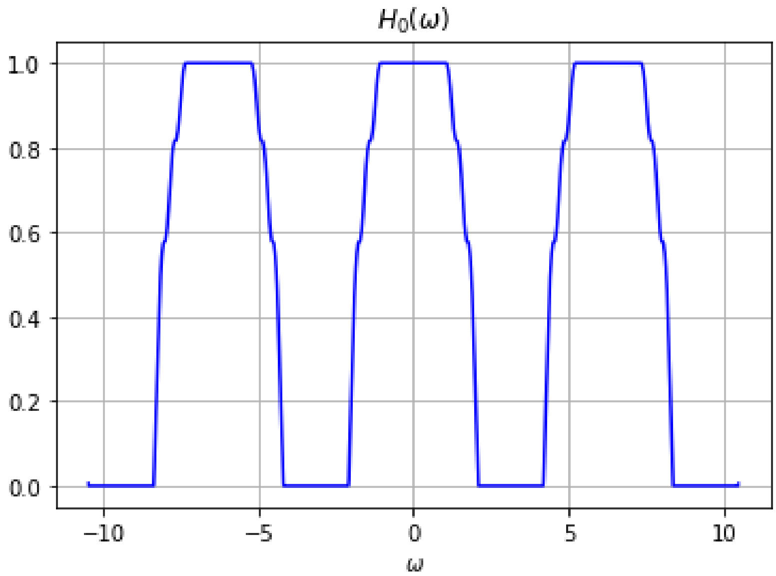

Рис. 4. График функции $H_0(\omega)$

ФН–1

Выполним проверку масштабирующего уравнения $\hat{\varphi}(\omega) = H_0(\omega/2)\hat{\varphi}(\omega/2)$. На рис. 5 жёлтым показана левая часть уравнения, зелёным — правая, синим и красным — компоненты правой части $H_0(\omega/2)$ и $\hat{\varphi}(\omega/2)$.

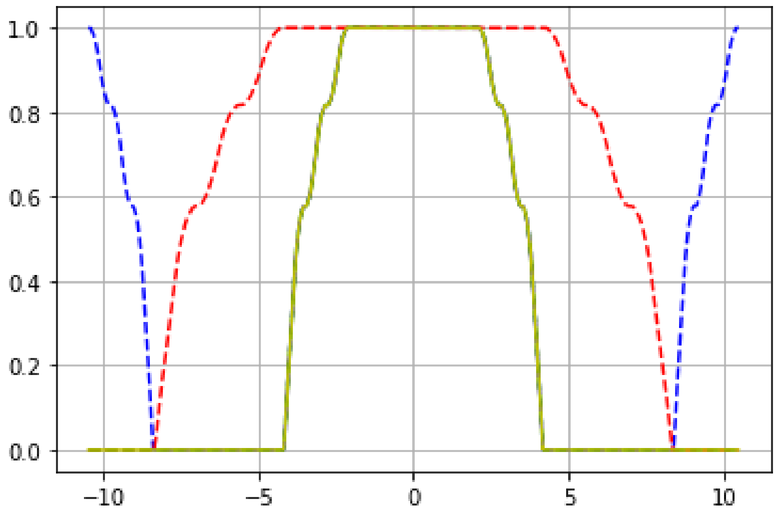

Рис. 5. Проверка масштабирующего уравнения

ФН–1

Проверим условие $|H_0(\omega)|^2 + |H_0(\omega + \pi)|^2 = 1$. На рис. 6 синим показан график $|H_0(\omega)|^2$, зелёным — $|H_0(\omega + \pi)|^2$, красным — их сумма.

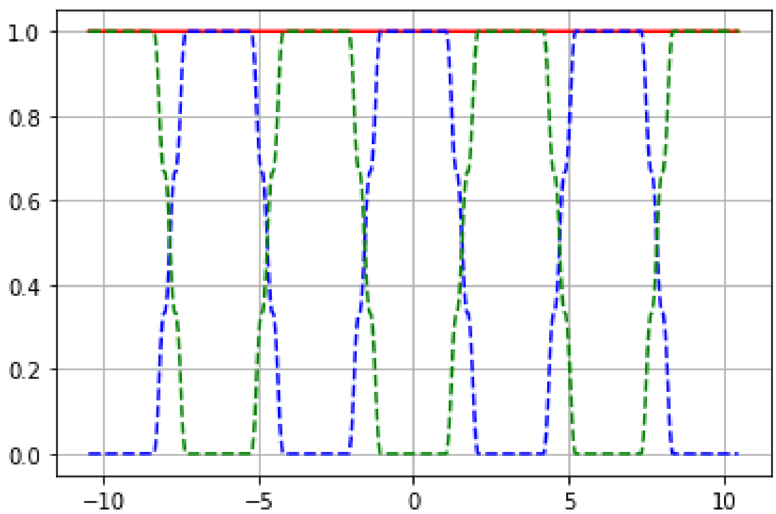

Рис. 6. График функции $|H_0(\omega)|^2 + |H_0(\omega + \pi)|^2$

Найдём функцию $\hat{\psi}(\omega) = e^{-i\omega/2}\left(\hat{\varphi}(\omega - \pi) + \hat{\varphi}(\omega + \pi)\right)\hat{\varphi}(\omega/2)$. На рис. 7 синим показан график $\hat{\varphi}(\omega)$, красным — $\hat{\psi}(\omega)$.

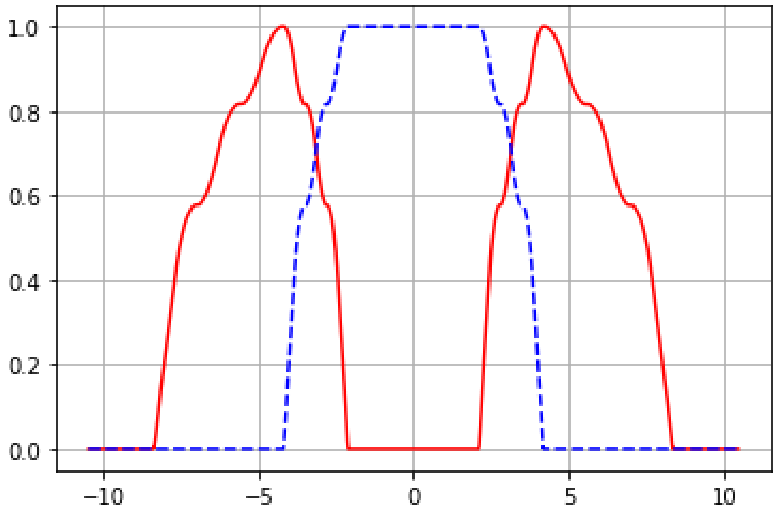

Рис. 7. Графики функций $\hat{\varphi}(\omega)$ и $\hat{\psi}(\omega)$

Проверим выполнение равенства $\hat{\psi}(\omega)^2 + \hat{\varphi}(\omega)^2 = \hat{\varphi}(\omega/2)^2$. На рис. 8 жёлтым показана правая часть уравнения, синим — левая, зелёным и красным — компоненты левой части $\hat{\varphi}(\omega)^2$ и $\hat{\psi}(\omega)^2$.

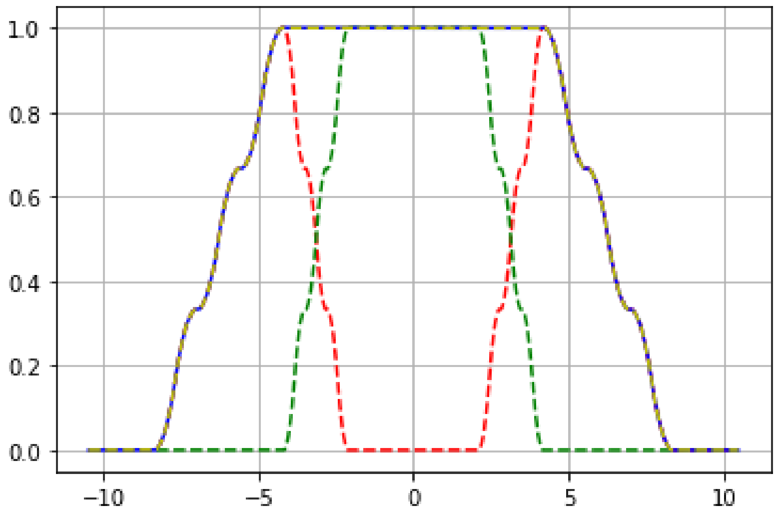

Рис. 8. Проверка равенства $\hat{\psi}(\omega)^2 + \hat{\varphi}(\omega)^2 = \hat{\varphi}(\omega/2)^2$

Вычислим масштабирующую функцию $\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{4\pi/3} \hat{\varphi}(\omega) \cos(\omega x) d\omega$. Интегрируем методом прямоугольников с разбиением промежутка на 200 частей.

Рис. 9. График функции $\varphi(x)$

Вычислим вейвлет $\psi(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{2\pi/3}^{8\pi/3} \hat{\varphi}(\omega/2)\hat{\varphi}(\omega - 2\pi) \cos(\omega(x + 0.5)) d\omega$.

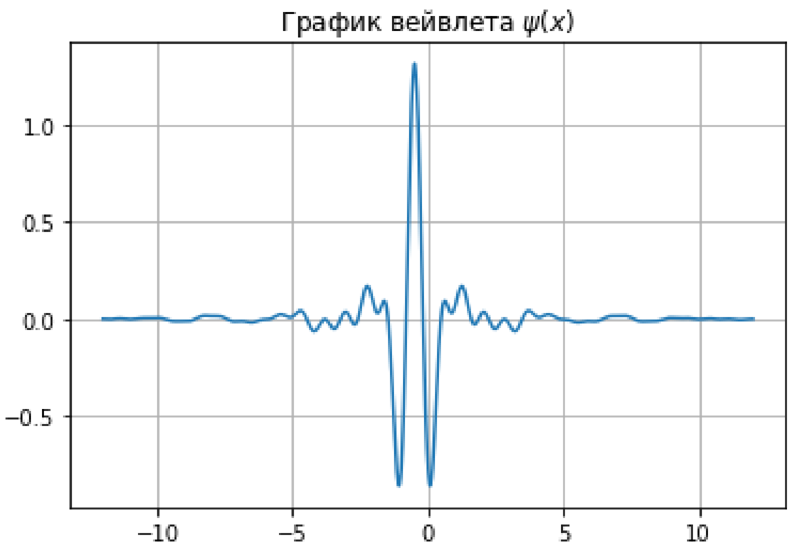

Рис. 10. График функции $\psi(x)$

Эффективный носитель для $\phi(x)$ и $\psi(x)$: $x \in [-10, 10]$.

ФН–1

Вычислим частотные фильтры $h_n = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} H_0(\omega) e^{in\omega} d\omega$, $g_n = (-1)^{n+1} \overline{h}_{-n-1}$, $\tilde{h}_n = \overline{h}_{-n}$, $\tilde{g}_n = (-1)^{n-1} h_{n-1}$.

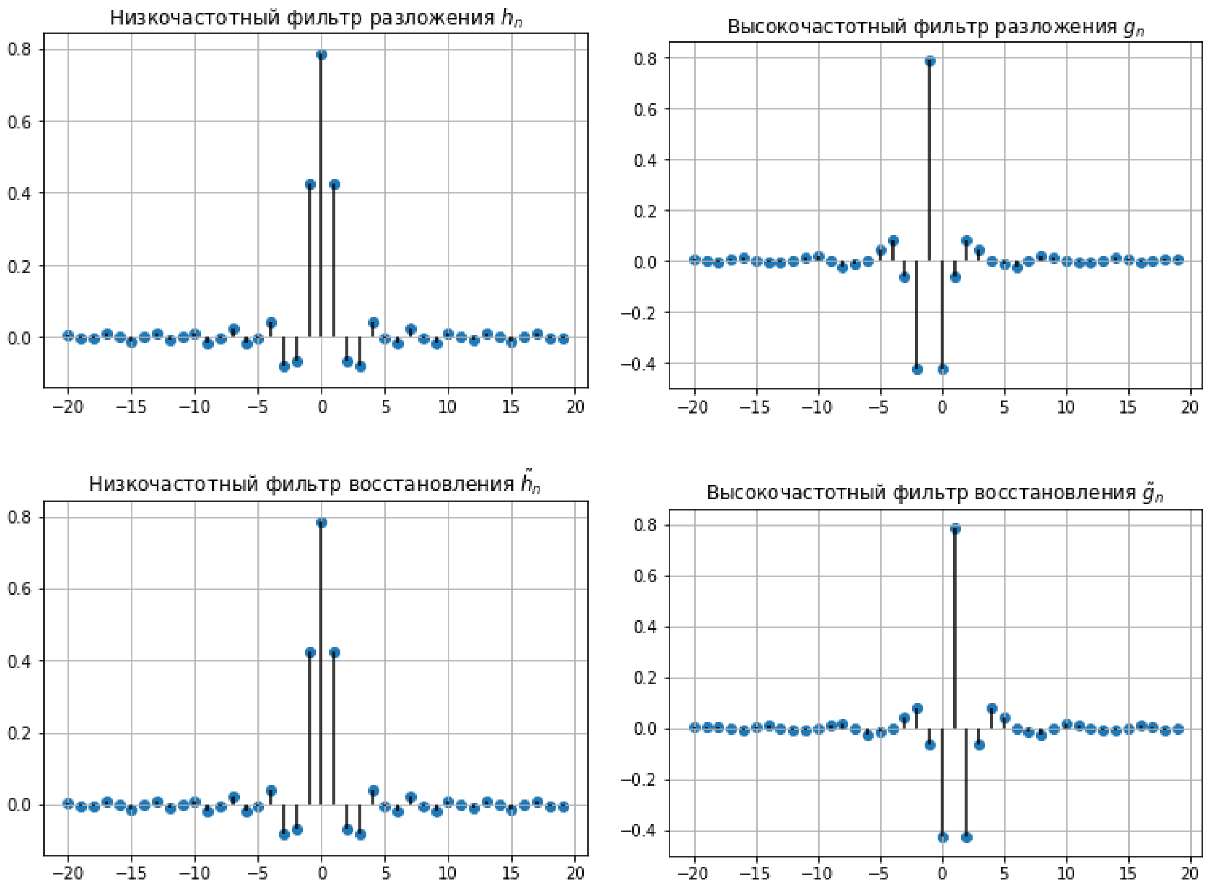

Рис. 11. Графики частотных фильтров

Проверим равенство $\frac{1}{\sqrt{2}} \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} h_n = H(0) = 1$. Вычисленная сумма равна 1,000013.

Функции неопределённости $\Delta_\varphi \Delta_{\hat{\varphi}} = 0{,}92765$, $\Delta_\psi \Delta_{\hat{\psi}} = 2{,}20280$, что не превышает значений таких функций для вейвлетов Майера (1,01148 и 3,27802 соответственно).