В. Д. Будаев

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ И БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ БАЗИСЫ

В современной математике решение многих задач (в том числе носящих прикладной характер) сводится к вопросу о том, можно ли некоторую функцию разложить в ряд по имеющейся системе (как правило, по системе собственных функций некоторого оператора). Или, в иной постановке: образует ли рассматриваемая система функций базис в данном пространстве? До недавнего времени в задачах такого сорта возникали в основном ортогональные системы функций. Интенсивно развивалась теория ортогональных рядов (частным случаем которых являются тригонометрические ряды Фурье) и ортогональных базисов. Однако в последние десятилетия все чаще приходится сталкиваться с физическими задачами, приводящими к рассмотрению неортогональных рядов (и, соответственно, неортогональных базисов). Теория таких рядов до сих пор развита весьма слабо из-за ряда трудностей принципиального характера. В статье сделана попытка популярно очертить основные отличия между теориями ортогональных и биортогональных базисов, изложены простейшие сведения из той и другой теории.

1. Основные понятия

Рассмотрим евклидово пространство E (линейное пространство со скалярным произведением) бесконечной размерности и некоторую систему элементов $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ этого пространства.

Определение 1. Система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется ***базисом*** пространства E, если любой элемент $f \in E$ можно разложить, причем единственным образом, в ряд по системе $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, сходящийся к f по норме этого пространства.

Иными словами, система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется базисом пространства E, если $\forall f \in E$ существует, и притом единственная, числовая последовательность $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty}\left\| f-\sum_{n=1}^{n} c_k f_k \right\| = 0 . \qquad (1)$$

Определение 2. Система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется ***замкнутой*** в пространстве E, если любой элемент $f\in E$ можно как угодно точно приблизить (по норме пространства) конечными линейными комбинациями элементов системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\forall f\in E \quad \forall\varepsilon>0 \quad \exists n\in N \quad \exists c_1,c_2,...,c_n : \left\| f-\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k \right\| < \varepsilon . \qquad (2)$$

Очевидно, если система является базисом пространства E, то она замкнута в E: в самом деле, если ряд сходится к f, то его частичные суммы как раз дают приближение к f с любой наперед заданной точностью.

Естественно, встает вопрос: не следует ли из замкнутости системы ее базисность (иными словами, не эквивалентны ли друг другу понятия базисности и замкнутости)? К сожалению, ответ на этот вопрос в общем случае отрицателен, что показывает следующий пример.

Пример. Рассмотрим пространство $C_2[a,b]$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций со среднеквадратичной нормой $\|f\|_2=\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}$ (напомним, что такая норма порождается скалярным произведением $(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)\,dx$). Рассмотрим также систему степенных функций $\{\varphi_n\}=\{1,x,x^2,...,x^n,...\}$ в этом пространстве. Любая конечная линейная комбинация таких функций есть полином (и, наоборот, любой полином есть конечная линейная комбинация функций нашей системы). По теореме Вейерштрасса, любую непрерывную на отрезке функцию можно равномерно приблизить полиномом с любой заданной точностью. Поскольку

$$\left\| f-\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k \right\|_2^2 = \int_a^b\left(f(x)-\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x)\right)^2 dx \le (b-a)\cdot\max_{[a,b]}\left| f(x)-\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x)\right|^2 ,$$

ясно, что и в среднеквадратичной норме любую непрерывную на отрезке функцию также можно приблизить полиномами с любой заданной точностью. Таким образом, система степенных функций замкнута в $C_2[a,b]$.

С другой стороны, если бы данная система образовывала базис в $C_2[a,b]$, то любая функция из этого пространства могла бы быть разложена на отрезке $[a,b]$ в степенной ряд (ряд Тейлора). Однако известно, что даже не любая бесконечно дифференцируемая функция раскладывается в ряд Тейлора. Например, функция, равная $\exp\left(-x^{-2}\right)$ при $x\ne 0$ и равная 0 при $x=0$, бесконечно дифференцируема на всей числовой прямой, но ее ряд Тейлора есть ряд из нулей, сходящийся не к этой функции, а к нулю (в любой норме, в том числе и в среднеквадратичной).

Итак, система степенных функций, хотя и замкнута в $C_2[a,b]$, но не образует базиса.

Однако существует важный класс систем, для которых понятия замкнутости и базисности все же оказываются равносильными. Это так называемые ортогональные системы функций.

2. Ортогональные системы. Ряд Фурье

Рассмотрим снова бесконечномерное евклидово пространство E и систему функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в этом пространстве.

Определение 3. Система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется ***ортогональной***, если $(\varphi_n, \varphi_k) = 0$ при $n \neq k$.

Определение 4. Система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется ***нормированной***, если $\forall n \ \ \|\varphi_n\| = 1$.

Определение 5. Система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется ***ортонормированной***, если она ортогональна и нормирована.

Кратко можно записать, что система называется ортонормированной, если $(\varphi_n, \varphi_k) = \delta_n^k$, где $\delta_n^k = \begin{cases} 1 & при \quad n = k \\ 0 & при \quad n \neq k \end{cases}$ — символ Кронекера.

Очевидно, любая ортонормированная система является ортогональной. С другой стороны, любую ортогональную систему $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ (не содержащую нулевых элементов) можно ортонормировать, поделив каждую функцию на ее норму, т. е. рассмотрев систему $\psi_n = \varphi_n \|\varphi_n\|^{-1}$.

Ортонормированные системы обладают замечательным свойством: если функция f может быть разложена в ряд по ортонормированной системе $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, то это разложение единственно. В самом деле, умножая скалярно равенство $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$ на любую из функций φ_n (законность этого легко обосновать), получим $(f, \varphi_n) = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k, \varphi_n \right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \left(\varphi_k, \varphi_n \right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \delta_k^n = c_n$ в силу ортогональности системы. Таким образом, коэффициенты разложения находятся однозначно: $c_n = (f, \varphi_n)$. Если функция f может быть разложена в ряд по ортонормированной системе $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, то этот ряд обязан иметь вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n)\, \varphi_n \,. \tag{3}$$

Ряд вида (3) называется ***рядом Фурье*** функции f по системе $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Попутно отметим следующую тонкость: в определении базиса мы требовали, чтобы разложение любой функции в ряд было единственным. Для ортонормированных систем, как мы убедились, единственность разложения имеет место всегда. Таким образом, ортонормированная система образует базис в евклидовом пространстве, если любую функцию из этого пространства можно разложить в ряд Фурье по этой системе.

Примером ортонормированной системы функций может служить классическая тригонометрическая система $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cup \left\{ \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \right\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $C_2[-\pi,\pi]$ или в $L_2(-\pi,\pi)$. Ортонормированность этой системы легко проверяется. Тригонометрический ряд Фурье для произвольной функции $f \in L_2(-\pi,\pi)$ записывается в виде $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right)$, где

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx, \; a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx .$$

Обозначим коэффициенты ряда Фурье (3) через $f_n = (f, \varphi_n)$. Эти коэффициенты обладают замечательным «минимальным» свойством, имеющим многочисленные важнейшие следствия.

Поставим перед собой следующую задачу. Пусть дана функция f и ортонормированная система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в евклидовом пространстве. Требуется приблизить данную функцию конечными линейными комбинациями первых N функций системы, т. е. комбинациями вида $\sum\limits_{n=1}^{N} c_n \varphi_n$. Как подобрать коэффициенты c_n, чтобы получить наилучшее приближение функции f по норме нашего пространства?

Т е о р е м а 1 (минимальное свойство коэффициентов Фурье). Наилучшее приближение данной функции f линейными комбинациями вида $\sum\limits_{n=1}^{N} c_n \varphi_n$ по норме данного пространства достигается тогда и только тогда, когда $c_n = f_n$ для всех $n = 1, \ldots, N$.

Иными словами, именно коэффициенты Фурье доставляют минимум выражению $\left\| f - \sum\limits_{n=1}^{N} c_n \varphi_n \right\|$. Этот же факт можно выразить и иначе: среди всех линейных комбинаций первых N функций ортонормированной системы наилучшее приближение для данной функции f дает N-я частичная сумма ее ряда Фурье.

Доказательство. Преобразуем квадрат «отклонения» линейной комбинации от функции f:

$$\left\| f-\sum_{n=1}^{N} c_n\varphi_n \right\|^2 = \left(f-\sum_{n=1}^{N} c_n\varphi_n ,\, f-\sum_{k=1}^{N} c_k\varphi_k \right) = (f,f) - 2\sum_{n=1}^{N} c_n (f,\varphi_n) +$$

$$+\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} c_n c_k (\varphi_n,\varphi_k) = (f,f) - 2\sum_{n=1}^{N} c_n (f,\varphi_n) + \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} c_n c_k \delta_n^k =$$

$$= (f,f) - 2\sum_{n=1}^{N} c_n (f,\varphi_n) + \sum_{n=1}^{N} c_n^2 + \sum_{n=1}^{N} (f,\varphi_n)^2 - \sum_{n=1}^{N} (f,\varphi_n)^2 =$$

$$= \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{N} (f,\varphi_n)^2 + \sum_{n=1}^{N} \big(c_n - (f,\varphi_n)\big)^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{N} f_n^2 + \sum_{n=1}^{N} (c_n - f_n)^2 . \qquad (4)$$

Первые два слагаемых в правой части (4) не зависят от выбора коэффициентов c_n, последняя же группа слагаемых представляет собой сумму квадратов, которая достигает минимального значения тогда и только тогда, когда $c_n = f_n \ \ (n = 1,...,N)$, что и завершает доказательство.

Доказательство мы провели для пространства над полем вещественных чисел. В комплексном случае теорема также справедлива с незначительными изменениями в доказательстве.

Как уже отмечалось, доказанная теорема имеет многочисленные важнейшие следствия.

Следствие 1. Для любой ортонормированной системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в произвольном евклидовом пространстве и любой функции f из этого пространства справедливо тождество Бесселя:

$$\left\| f-\sum_{n=1}^{N} f_n\varphi_n \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{N} f_n^2 . \qquad (5)$$

Для доказательства достаточно в левой и правой частях равенства (4) положить $c_n = f_n$. Тождество Бесселя позволяет оценить отклонение N-й частичной суммы ряда Фурье функции f от самой функции f по норме пространства.

Следствие 2. Для любой ортонормированной системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в произвольном евклидовом пространстве и любой функции f из этого пространства справедливо неравенство Бесселя

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 \le \|f\|^2 . \qquad (6)$$

Для доказательства заметим, что левая (а значит, и правая) часть в выражении (5) неотрицательна, поэтому все частичные суммы числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^2$ ограничены константой $\|f\|^2$. Поскольку этот ряд знакопостоянный, ограниченность частичных сумм влечет его сходимость. Остается перейти в неравенстве $\sum_{n=1}^{N} f_n^2 \le \|f\|^2$ к пределу при $N \to \infty$.

Следствие 3. Ортонормированная система в евклидовом пространстве образует базис тогда и только тогда, когда она замкнута.

Напомним, что любой базис является замкнутой системой, поэтому доказательства требует лишь тот факт, что из замкнутости следует базисность. Пусть ортонормированная система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ замкнута. Тогда любую функцию f из нашего пространства можно приблизить с любой точностью конечными линейными комбинациями элементов данной системы, т.е.

$$\forall f \in E \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \ \ \exists c_1, ..., c_N : \ \left\| f - \sum_{k=1}^{N} c_k \varphi_k \right\| < \varepsilon .$$

Однако, согласно теореме 1, среди всех линейных комбинаций заданной длины наилучшее приближение к данной функции дают частичные суммы ее ряда Фурье, поэтому $\forall f \in E \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N : \ \left\| f - \sum_{k=1}^{N} f_k \varphi_k \right\| < \varepsilon$. Заметим теперь, что с увеличением номера частичной суммы ряда Фурье отклонение частичной суммы от f может только уменьшиться [это следует, например, из тождества Бесселя (5)]. Следовательно,

$$\forall f \in E \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N : \ \ \forall n \ge N \ \ \left\| f - \sum_{k=1}^{n} f_k \varphi_k \right\| < \varepsilon ,$$

что означает сходимость ряда Фурье функции f к этой функции по норме пространства. Итак, окончательно, любую функцию из нашего пространства можно разложить в ряд Фурье по данной ортонормированной системе, что как раз и означает базисность этой системы.

Как мы видим, ортонормированные системы имеют принципиальное отличие от систем неортогональных: для них понятия замкнутости и базисности эквивалентны. Если вдуматься, то сам факт эквивалентности этих понятий выглядит ошеломляюще: ведь замкнутость связана с рассмотрением *конечных* линейных комбинаций элементов данной системы, а базисность — с разложением в ряд, т. е. с представлением в виде *бесконечной* суммы. Пожалуй, крайне редко в математике возникает ситуация, когда изучение бесконечных по своей природе объектов так или иначе сводится к изучению объектов конечных. В этом смысле ортогональные системы и ортогональные ряды (ряды Фурье) следует признать явлением совершенно уникальным.

Следствие 4. Ортонормированная система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в евклидовом пространстве образует базис тогда и только тогда, когда для любой функции f из этого пространства выполнено равенство Парсеваля:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 = \|f\|^2 . \tag{7}$$

Для доказательства следует рассмотреть тождество Бесселя (5) и устремить N к бесконечности. Если система образует базис, то левая часть устремится к нулю, откуда следует стремление к нулю правой части, т. е. выполнение равенства Парсеваля. Наоборот, выполнение равенства Парсеваля означает стремление к нулю правой, а следовательно, и левой части, т. е. возможность разложения в ряд Фурье любой функции из данного пространства.

Напомним еще раз, что теорема 1, а значит, и все следствия из нее, справедливы также и в комплексном случае. Однако тогда в равенствах (5)–(7) коэффициенты Фурье следует брать по модулю. Так, равенство Парсеваля принимает вид $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|^2 = \|f\|^2$.

Равенство Парсеваля можно рассматривать как бесконечномерный аналог теоремы Пифагора. В самом деле, любой вектор f на плоскости можно разложить по паре ортов (т. е. единичных ортогональных друг другу векторов) φ_1, φ_2: $f = f_1\varphi_1 + f_2\varphi_2$, причем, очевидно, $f_1 = (f, \varphi_1)$, $f_2 = (f, \varphi_2)$. По теореме Пифагора $\|f\|^2 = f_1^2 + f_2^2$, что является аналогом равенства Парсеваля (норма в данном случае означает длину вектора). Заметим, что пара ортов на плоскости как раз образует ортонормированный базис. В трехмерном пространстве следует взять базис из трех ортов (в равенстве Парсеваля возникнет три слагаемых), в N-мерном пространстве — базис из N ортов, в бесконечномерном же пространстве у нас возникает необходимость в рассмотрении бесконечного ортонормированного базиса, а в равенстве Парсеваля вместо конечной суммы появляется сумма ряда. Отметим также следующий момент. Если, например, в трехмерном пространстве мы ограничимся рассмотрением лишь двух ортов φ_1, φ_2, то они не будут образовывать базис. Вместо равенства Парсеваля мы получим, вообще говоря, неравенство $(f, \varphi_1)^2 + (f, \varphi_2)^2 \le \|f\|^2$, которое есть не что иное, как неравенство Бесселя. Для получения равенства Парсеваля, естественно, следует пополнить систему третьим ортом φ_3; тогда, соответственно, сумма квадратов всех трех координат вектора даст в точности квадрат его нормы: $(f, \varphi_1)^2 + (f, \varphi_2)^2 + (f, \varphi_3)^2 = \|f\|^2$. Итак, для замкнутой ортонормированной системы (т. е. для ортонормированного базиса) справедливо равенство Парсеваля, для произвольной же (вообще говоря, незамкнутой) ортонормированной системы справедливо лишь неравенство Бесселя.

Введем еще несколько важных понятий.

Определение 6. Система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в евклидовом пространстве называется *полной,* если в пространстве не существует ненулевой функции, ортогональной ко всем элементам системы.

Иными словами, система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ полна, если $(\forall n \in N \ (f, \varphi_n) = 0) \Rightarrow (f = 0)$.

Замкнутая ортонормированная система заведомо является полной. В самом деле, если $(f, \varphi_n) = 0$ для всех номеров n, то, по равенству Парсеваля, $\|f\| = 0$, и, следовательно, $f = 0$.

Полная система, вообще говоря, не обязана быть замкнутой (соответствующий пример можно найти в работе [1]). Однако, как мы увидим в дальнейшем, если рассматриваемое пространство является полным, то понятия полноты и замкнутости эквивалентны. В частности, для ортонормированных систем в полных евклидовых пространствах все три понятия (базисность, замкнутость, полнота) оказываются равносильными. (Это дает повод для терминологической путаницы. В некоторых книгах вместо термина «замкнутость» используется «полнота», вместо «полноты» — «тотальность», а термин «полная ортонормированная система» понимается как «ортонормированный базис»).

Определение 7. ***Линейной оболочкой*** системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется совокупность всех конечных линейных комбинаций элементов этой системы. ***Замыканием линейной оболочки*** системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется совокупность всех элементов пространства, которые могут быть как угодно точно приближены конечными линейными комбинациями элементов этой системы.

Так, определение замкнутой системы можно сформулировать теперь иначе: система называется замкнутой в евклидовом пространстве, если замыкание ее линейной оболочки совпадает со всем пространством.

Определение 8. Система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется ***минимальной***, если ни один элемент системы не принадлежит замыканию линейной оболочки остальных элементов.

Например, система функций $\{e^x, 1, x, x^2, ..., x^n, ...\}$ не минимальна в $C_2[0,1]$: экспоненту (как и любую непрерывную функцию) можно равномерно приблизить многочленами с любой точностью (экспонента принадлежит замыканию линейной оболочки остальных элементов).

Любой ортонормированный базис заведомо является минимальной системой. В самом деле, пусть ортонормированный базис $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ не минимален. Тогда некоторую функцию φ_k из этой системы можно как угодно точно приблизить конечными линейными комбинациями остальных элементов, т. е. $\forall \varepsilon > 0$ найдется линейная комбинация такая, что $\left\| \varphi_k - \sum\limits_{n=1, n\neq k}^{N} c_n \varphi_n \right\| < \varepsilon$. По неравенству Коши — Буняковского $\left| \left(\varphi_k - \sum\limits_{n=1, n\neq k}^{N} c_n \varphi_n, \varphi_k \right) \right| \le \|\varphi_k\| \cdot \left\| \varphi_k - \sum\limits_{n=1, n\neq k}^{N} c_n \varphi_n \right\| \le \varepsilon$. С другой же стороны, $\left(\varphi_k - \sum\limits_{n=1, n\neq k}^{N} c_n \varphi_n, \varphi_k \right) = (\varphi_k, \varphi_k) - \sum\limits_{n=1, n\neq k}^{N} c_n \cdot (\varphi_n, \varphi_k) = 1$ в силу ортонормированности системы. Таким образом, $1 \le \varepsilon$, что заведомо неверно в силу произвольности ε.

В заключение этого пункта зададимся вопросом: существуют ли ортонормированные базисы? К счастью, ответ на этот вопрос положителен. Примером ортонормированного базиса может служить тригонометрическая система в пространстве $C_2[-\pi, \pi]$ или в $L_2(-\pi, \pi)$. По классической теореме Вейерштрасса, любую непрерывную на отрезке $[-\pi, \pi]$ функцию (принимающую на концах отрезка равные значения) можно с любой заданной точностью равномерно приблизить тригонометрическими многочленами. Тогда любую непрерывную на $[-\pi,\pi]$ функцию можно («слегка» изменив ее значения вблизи одного из концов отрезка так, чтобы значения на концах совпали) как угодно точно приблизить тригонометрическими полиномами в среднеквадратичной норме. Таким образом, тригонометрическая система оказывается замкнутой в $C_2[-\pi,\pi]$ (а значит, и в $L_2(-\pi,\pi)$). Поскольку система ортонормирована, то она образует базис в каждом из этих пространств.

Заметим попутно, что, в силу базисности, тригонометрическая система минимальна.

Наконец, отметим следующее: тригонометрические ряды Фурье во многих отношениях удобнее степенных рядов (рядов Тейлора). Как уже отмечалось, даже не любую бесконечно дифференцируемую функцию можно разложить в ряд Тейлора. Для разложимости же в тригонометрический ряд Фурье (в среднеквадратичной метрике) не требуется даже непрерывности, достаточно лишь интегрируемости квадрата функции по Лебегу! Более того, даже для равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье к данной функции достаточно потребовать «чуть-чуть больше», чем непрерывность (но даже меньше, чем дифференцируемость).

3. Процесс ортогонализации

Изучение неортогональных систем естественно начать с вопроса: нельзя ли систему неортогональную как-либо преобразовать в ортогональную? Ответ на этот вопрос дает *процесс ортогонализации.*

Рассмотрим произвольную линейно независимую систему $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в евклидовом пространстве E (линейная независимость бесконечной системы понимается как линейная независимость любого ее конечного подмножества).

Т е о р е м а 2. Существует система $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве E такая, что

1) система $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормирована,

2) каждый элемент системы $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ представляется в виде линейной комбинации $\psi_n = \alpha_{n,n}\varphi_n + \alpha_{n,n-1}\varphi_{n-1} + \ldots + \alpha_{n,1}\varphi_1$,

3) каждый элемент системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ представляется в виде линейной комбинации $\varphi_n = \beta_{n,n}\psi_n + \beta_{n,n-1}\psi_{n-1} + \ldots + \beta_{n,1}\psi_1$.

При этом каждый элемент системы $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ строится однозначно (с точностью до знака).

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. При $n=1$, согласно пункту 2, должно быть $\psi_1 = \alpha_{1,1}\varphi_1$. Поскольку элемент ψ_n должен быть нормирован, то $\|\alpha_{1,1}\varphi_1\| = |\alpha_{1,1}|\cdot\|\varphi_1\| = 1$, откуда $\alpha_{1,1} = \pm\dfrac{1}{\|\varphi_1\|}$. Таким образом, коэффициент $\alpha_{1,1}$, а значит, и элемент ψ_1, существует и строится однозначно с точностью до знака. При этом $\varphi_1 = \alpha_{1,1}^{-1}\psi_1$, т. е. условие 3 также выполнено.

Предположим теперь, что элементы $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n$ уже построены (однозначно с точностью до знака). Согласно условию 2, будем искать ψ_{n+1} в виде $\psi_{n+1} = \alpha_{n+1,n+1}\varphi_{n+1} + \alpha_{n+1,n}\varphi_n + ... + \alpha_{n+1,1}\varphi_1$. Поскольку каждая из функций $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$, по индуктивному предположению, есть линейная комбинация уже построенных функций (с индексами, не превышающими n), то ψ_{n+1} можно представить в виде

$$\psi_{n+1} = \alpha_{n+1,n+1}\varphi_{n+1} + \gamma_{n+1,n}\psi_n + ... + \gamma_{n+1,1}\psi_1. \tag{8}$$

Согласно условию 1, ψ_{n+1} должна: а) иметь единичную норму, б) быть ортогональной ко всем уже построенным элементам $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n$. Таким образом,

$$\left(\alpha_{n+1,n+1}\varphi_{n+1} + \gamma_{n+1,n}\psi_n + ... + \gamma_{n+1,1}\psi_1, \psi_k\right) = \alpha_{n+1,n+1}\left(\varphi_{n+1}, \psi_k\right) + \gamma_k = 0, \ \left(k = 1, ..., n\right);$$

$$\left(\alpha_{n+1,n+1}\varphi_{n+1} + \gamma_{n+1,n}\psi_n + ... + \gamma_{n+1,1}\psi_1, \alpha_{n+1,n+1}\varphi_{n+1} + \gamma_{n+1,n}\psi_n + ... + \gamma_{n+1,1}\psi_1\right) = 1.$$

Выражая (однозначно!) из первых n равенств коэффициенты γ_k $\left(k = 1, ..., n\right)$ через $\alpha_{n+1,n+1}$ и подставляя их в последнее равенство, убеждаемся, что $\alpha_{n+1,n+1}$ находится однозначно с точностью до знака (причем отлично от нуля). Таким образом, ψ_{n+1} строится однозначно с точностью до знака, с выполнением условий 1, 2. Что касается условия 3, достаточно из выражения (8) выразить φ_{n+1}.

Тем самым теорема доказана.

Процесс ортогонализации дает простой способ построения ортогональных систем: достаточно взять любую линейно независимую систему и применить к ней процесс ортогонализации. Попутно заметим, что любая минимальная система заведомо линейно независима (в противном случае один из элементов системы выражался бы как линейная комбинация остальных, что противоречит минимальности), а следовательно, может быть ортогонализована.

Процесс ортогонализации сохраняет основные свойства системы:

Лемма 1. Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная линейно независимая система в E, а $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — система, построенная в процессе ортогонализации. Тогда

1) система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ замкнута в E тогда и только тогда, когда замкнута $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$,

2) система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ полна в E тогда и только тогда, когда полна $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$,

3) система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ минимальна в E тогда и только тогда, когда минимальна $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$,

4) если система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис в E, то система $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует ортонормированный базис в E.

Доказательство. Пусть система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ замкнута в E. Тогда любую функцию из E можно как угодно точно приблизить конечными линейными комбинациями элементов этой системы. Но каждый элемент φ_k представляется как линейная комбинация $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_k$. Поэтому упомянутая линейная комбинация элементов исходной системы может быть представлена как конечная линейная комбинация элементов ортонормированной системы $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Таким образом, любую функцию из E можно как угодно точно приблизить конечными линейными комбинациями элементов системы $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Итак, из замкнутости исходной системы следует замкнутость системы $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$. В обратную сторону рассуждения аналогичны.

Утверждения о полноте и минимальности доказываются по тому же принципу: линейные комбинации одной системы заменяются линейными комбинациями другой системы (подробное доказательство опустим).

Пусть система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — базис. Тогда она замкнута. По только что доказанному система $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ также замкнута. Но для ортонормированных систем замкнутость влечет базисность. (Заметим: фактически использовалась не базисность, а лишь замкнутость исходной системы!)

Подчеркнем, что из базисности $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ не следует базисность исходной системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$. В качестве контрпримера достаточно рассмотреть любую замкнутую систему, не образующую базиса (например, систему степенных функций из — см. «Основные понятия»).

Итак, процесс ортогонализации позволяет преобразовать неортогональную систему в ортонормированную с сохранением (и даже улучшением) ее свойств. Казалось бы, это решает все проблемы. Увы, это не так. Если в какой-либо прикладной задаче нас интересуют свойства системы собственных функций некоторого оператора, то после ортогонализации мы получим систему, уже не являющуюся системой собственных функций (каждое слагаемое в выражении (8) отвечает своему собственному значению, а вся линейная комбинация не обязана быть собственной функцией)! Хотя в результате ортогонализации мы и получим ортонормированную систему с «улучшенными» свойствами, это будет не та система, которая интересует нас в данной задаче.

Таким образом, мы все же вынуждены изучать неортогональные системы «сами по себе», не прибегая к процессу ортогонализации.

4. Полные пространства. Гильбертово пространство

Напомним некоторые определения. Пусть E — евклидово пространство.

Определение 9. Последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов пространства E называется ***фундаментальной***, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \ \forall n,m > N \ \|\varphi_n - \varphi_m\| < \varepsilon .$$

Если последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к некоторому элементу φ нашего пространства, то она фундаментальна (это следует из неравенства треугольника: $\|\varphi_n - \varphi_m\| = \|(\varphi_n - \varphi) + (\varphi - \varphi_m)\| \le \|\varphi_n - \varphi\| + \|\varphi - \varphi_m\|$). Обратное, вообще говоря, неверно. Например, в пространстве действительных чисел R, согласно критерию Коши, любая фундаментальная последовательность сходится, а в пространстве рациональных чисел Q фундаментальная последовательность может не иметь предела: так, последовательность $x_1 = 2,7$; $x_2 = 2,71$; $x_3 = 2,718,...$ десятичных приближений числа e состоит из рациональных чисел, она фундаментальна (например, потому, что в R она сходится), но предела в Q она не имеет (поскольку сходится к иррациональному числу e, а предел единственен).

Итак, сходимость (расходимость) фундаментальной последовательности связана не только со свойствами самой последовательности, но и со свойствами пространства.

Определение 10. Пространство называется ***полным,*** если в нем любая фундаментальная последовательность сходится к элементу этого пространства.

Из сказанного ясно, что R — полное пространство, а Q — неполное.

Пространство $C[a,b]$ с равномерной нормой — полное, а $C_2[a,b]$ — неполное. Известно, что любое неполное пространство можно пополнить, добавив в него новые элементы так, что пространство станет полным. Пополнение пространства Q есть R, пополнение пространства $C_2[a,b]$ есть пространство $L_2(a,b)$.

Определение 11. Полное бесконечномерное евклидово пространство называется ***гильбертовым*** пространством.

Часто в определении гильбертова пространства требуют выполнения еще одного свойства — сепарабельности, т. е. существования счетной всюду плотной системы элементов (попросту говоря, сепарабельность означает, что пространство не просто бесконечномерно, но имеет именно счетную размерность). Пространство $L_2(a,b)$ — сепарабельное гильбертово пространство.

Для данной статьи нам важно следующее свойство гильбертовых пространств:

Т е о р е м а 3. В гильбертовом пространстве любая полная система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ замкнута.

Доказательство. Поскольку процесс ортогонализации сохраняет (причем, в обе стороны) полноту и замкнутость, достаточно доказать теорему для ортонормированной системы. Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормирована в гильбертовом пространстве H. Возьмем произвольную функцию $f \in H$ и составим ее ряд Фурье: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(f,\varphi_n)\varphi_n$. Рассмотрим последовательность частичных сумм этого ряда: $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(f,\varphi_k)\varphi_k$. Докажем, что она фундаментальна в H. Для этого найдем

$$\|S_n - S_m\|^2 = \left(\sum_{k=m}^{n}(f,\varphi_k)\varphi_k, \sum_{l=m}^{n}(f,\varphi_l)\varphi_l\right) = \sum_{k,l=m}^{n}(f,\varphi_k)(f,\varphi_l)(\varphi_k,\varphi_l) = \sum_{k=m}^{n}(f,\varphi_k)^2 \quad (9)$$

в силу ортонормированности (для определенности мы считали, что $n > m$).

По равенству Парсеваля ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(f,\varphi_n)^2$ сходится. Значит, последовательность его частичных сумм $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(f,\varphi_k)^2$ сходится, а значит, и фундаментальна, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \quad \forall n,m > N \quad A_n - A_m < \varepsilon$ (снова считаем, что $n > m$). Однако правая часть в выражении (9) как раз равна $A_n - A_m$, поэтому получаем, что $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в H. Поскольку пространство — полное, то $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, т. е. сходится ряд Фурье для функции f. Если докажем, что его сумма равна именно f, это будет означать, что любая функция из H раскладывается в ряд Фурье по системе $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, а значит, система образует базис (и, следовательно, замкнута).

Пусть сумма ряда есть $g = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(f,\varphi_n)\varphi_n$. Рассмотрим скалярное произведение

$$(f-g,\varphi_n) = (f,\varphi_n) - \left(\sum_{k=1}^{\infty}(f,\varphi_k)\varphi_k,\varphi_n\right) =$$

$$= (f,\varphi_n) - \sum_{k=1}^{\infty}(f,\varphi_k)(\varphi_k,\varphi_n) = (f,\varphi_n) - (f,\varphi_n) = 0.$$

Таким образом, функция $f-g$ ортогональна всем функциям системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ и, следовательно, в силу ее полноты, $f-g=0$. Следовательно, $f=g$, т. е. сумма ряда Фурье функции f равна f, что завершает доказательство теоремы.

Итак, в гильбертовом пространстве понятия полноты и замкнутости равносильны.

5. Биортогональные системы

Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — некоторая (вообще говоря, неортогональная) система в евклидовом пространстве E. Как должно быть устроено разложение функции f в ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n$ по этой системе? Напомним, что в случае ортогональной системы мы нашли коэффициенты, умножая ряд скалярно на один из элементов системы. Теперь, чтобы осуществить подобную идею, будем домножать ряд не на элементы этой же системы, а на некие иные функции, каждая из которых ортогональна всем функциям системы, кроме одной.

Определение 12. Система $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется ***биортогонально сопряженной*** (или просто ***биортогональной***) к системе $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, если $(\varphi_n, \psi_n) = \delta_n^k$.

Очевидно, если система $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ биортогональна к $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, то и $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ биортогональна к $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Поэтому можно говорить просто о паре биортогональных систем. Очевидно также, что ортонормированная система биортогональна сама себе.

Если справедливо разложение $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k$, то мы теперь легко найдем коэффициенты, домножив скалярно обе части равенства на ψ_n:

$$(f, \psi_n) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k, \psi_n\right) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\left(\varphi_k, \psi_n\right) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\delta_n^k = c_n.$$

Итак, коэффициенты разложения (а значит, и само разложение) строятся однозначно. Составленный для функции f ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty}(f, \psi_n)\varphi_n$ называется ***биортогональным рядом*** для этой функции. Базисность системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ означает, что для любой функции из данного пространства ее биортогональный ряд сходится, причем именно к этой функции.

Если мы имеем пару биортогональных систем $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$, то, очевидно, можно составить два биортогональных ряда для каждой функции f: $\sum_{n=1}^{\infty}(f, \psi_n)\varphi_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}(f, \varphi_n)\psi_n$. Естественно поставить вопрос: как связаны между собой свойства этих рядов, и, вообще, свойства пары биортогональных систем? Отметим без доказательства, что если мы имеем пару биортогональных систем, то базисность одной из систем влечет базисность другой системы.

Интересно, что другие свойства, вообще говоря, не переносятся с одной системы на другую. В частности, полнота одной из систем не влечет за собой полноту другой системы, что показывает следующий пример.

Пример. Рассмотрим ортонормированный базис $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ и построим по нему систему $\{\varphi_2+\varphi_1, \varphi_3+\varphi_1, ..., \varphi_n+\varphi_1, ...\}$. Нетрудно проверить, что биортогональной к ней является система $\{\varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n, ...\}$, полученная из ортонормированного базиса «выбрасыванием» одного элемента, а значит, заведомо неполная. Вместе с тем, сама рассматриваемая система полна. В самом деле, если f ортогональна ко всем функциям этой системы, то $(f, \varphi_k+\varphi_1)=0$ $(k=2,3,...)$, т. е. $(f,\varphi_k)=-(f,\varphi_1)$. Тогда равенство Парсеваля для $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ примет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(f,\varphi_1)^2=\|f\|^2$. Отсюда ясно, что $(f,\varphi_1)=0$ (в противном случае ряд расходится) и $f=0$. Итак, если f ортогональна ко всем функциям рассматриваемой системы, то $f=0$, т. е. система полна.

Поставим вопрос о существовании и единственности системы, биортогональной к данной.

Теорема 4. Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — некоторая система в гильбертовом пространстве H. Ее минимальность необходима и достаточна для существования биортогональной к ней системы. Для единственности биортогональной системы необходима и достаточна полнота системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Доказательство. 1) Пусть для системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ существует биортогональная система $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Докажем минимальность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Допустим, от противного, что она не минимальна. Тогда некоторое φ_n можно как угодно точно приблизить линейными комбинациями других элементов: $\exists n\ \forall\varepsilon>0\ \ \exists N\ \ \exists c_k\ (k=1,\dots,N; k\neq n)$: $\left\|\varphi_n-\sum\limits_{k=1,k\neq n}^{N}c_k\varphi_k\right\|<\varepsilon$. Рассмотрим скалярное произведение: $\left(\varphi_n-\sum\limits_{k=1,k\neq n}^{N}c_k\varphi_k,\psi_n\right)= \ (\varphi_n,\psi_n)-\sum\limits_{k=1,k\neq n}^{N}c_k(\varphi_k,\psi_n)=1$. С другой стороны, по неравенству Коши—Буняковского,

$$\left|\left(\varphi_n-\sum_{k=1,k\neq n}^{N}c_k\varphi_k,\psi_n\right)\right|\le\left\|\varphi_n-\sum_{k=1,k\neq n}^{N}c_k\varphi_k\right\|\cdot\|\psi_n\|\le\varepsilon\|\psi_n\|.$$

Итак, $1\le\varepsilon\|\psi_n\|$. Но это неверно в силу произвольности $\varepsilon>0$. Следовательно, $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ минимальна.

2) Пусть система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ минимальна. Докажем существование биортогональной системы. Временно предположим дополнительно полноту системы. «Выбросим» из нее первый элемент. Оставшаяся система $\{\varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n, ...\}$ заведомо неполная (если бы она была полной, а следовательно, замкнутой, то любой элемент пространства, в том числе и φ_1, можно было бы приблизить как

угодно точно линейными комбинациями элементов этой системы, что противоречит минимальности исходной системы). Тогда существует ненулевой элемент, ортогональный ко всем φ_k $(k \geq 2)$. Обозначим его ψ_1. Заметим, что $(\varphi_1, \psi_1) \neq 0$ (в противном случае ψ_1 был бы ортогонален всем элементам исходной системы, а значит, в силу ее полноты, был бы равен нулю). Тогда можно нормировать этот элемент так, чтобы $(\varphi_1, \psi_1) = 1$.

Далее, удалим из исходной системы элемент φ_2. Для оставшейся системы $\{\varphi_1, \varphi_3, ..., \varphi_n, ...\}$ построим элемент ψ_2 такой, что $(\varphi_2, \psi_2) = 1$, $(\varphi_n, \psi_2) =$ $= 0\,(n \neq 2)$. Продолжая этот процесс, построим систему $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что $(\varphi_n, \psi_k) = \delta_n^k$, т. е. систему, биортогональную к $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Откажемся теперь от дополнительного предположения о полноте системы. Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ минимальна. Рассмотрим произвольную систему $\{\gamma_n\}$, полную в пространстве H. Объединение $\{\varphi_n\} \cup \{\gamma_n\}$ тем более будет полным. Просматривая по очереди все элементы $\gamma_1, \gamma_2, ...$ и удаляя те из них, которые принадлежат линейной оболочке остальных элементов объединения, оставим в итоге полную и минимальную систему, содержащую исходную. Для полученной полной и минимальной системы, как уже доказано, существует биортогональная. В частности, мы получим биортогональную систему и для исходной системы.

3) Пусть система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ полна. Докажем, что биортогональная система (если она существует) является единственной. Предположим, что имеются две биортогональных системы $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\psi_n^*\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда, по определению, $(\varphi_n, \psi_k) = \delta_n^k$ и $(\varphi_n, \psi_k^*) = \delta_n^k$. Следовательно, $(\varphi_n, \psi_k - \psi_k^*) = \delta_n^k - \delta_n^k = 0$, т. е. каждая из функций $\psi_k - \psi_k^*$ ортогональна ко всем функциям системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$. В силу полноты последней системы, $\psi_k - \psi_k^* = 0$ для всех k, т. е. биортогональная система является единственной.

4) Пусть теперь биортогональная к $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ система $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ является единственной. Докажем полноту $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Если, от противного, она неполная, то в пространстве существует ненулевая функция f, ортогональная ко всем функциям φ_n. Тогда $(\varphi_n, \psi_k + f) = \delta_n^k + 0 = \delta_n^k$, т. е. система $\{\psi_n + f\}_{n=1}^{\infty}$, также биортогональна к $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, что противоречит единственности биортогональной системы.

Таким образом, теорема доказана.

К сожалению, реальное построение системы, биортогональной к данной, — задача весьма непростая. Например, если $\varphi_n = \exp(i\lambda_n x)$, где $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — некоторая заданная последовательность действительных или комплексных чисел, то в общем случае неизвестно, как построить систему, биортогональную к $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в $L_2(0,1)$.

Для наглядности приведем простой пример пары биортогональных систем. Рассмотрим «слегка испорченную» тригонометрическую систему функций: $1\bigcup\left\{\cos nx, \sin nx + a_n \cos nx\right\}_{n=1}^{\infty}$, где $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ — некоторая числовая последовательность. Нетрудно проверить, что биортогональной к ней в $L_2(0,2\pi)$ является система $\frac{1}{2\pi}\bigcup\left\{\frac{1}{\pi}\cos nx - \frac{a_n}{\pi}\sin nx, \frac{1}{\pi}\sin nx\right\}_{n=1}^{\infty}$.

6. Базисы Рисса и безусловные базисы. Теорема Бари

Начиная с данного пункта, большинство утверждений будем приводить без доказательств, поскольку они порой достаточно сложны и объемны, а размер статьи ограничен.

Подойдем к изучению неортогональных базисов следующим образом: выделим класс систем, которые можно преобразовать в ортонормированный базис «хорошим» преобразованием (ожидая, что такие системы «наследуют» некоторые свойства ортонормированных систем).

Определение 13. Система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется ***базисом Рисса*** в гильбертовом пространстве H, если существует линейный ограниченный обратимый оператор $L: H \to H$ такой, что $\left\{L\varphi_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис.

Известна теорема Банаха о том, что если линейный ограниченный оператор обратим, то обратный оператор также линеен и ограничен. Поэтому определение базиса Рисса можно сформулировать и иначе: система называется базисом Рисса, если ее можно получить из ортонормированной системы линейным ограниченным обратимым оператором.

Система, образующая базис Рисса, действительно является базисом. Чтобы убедиться в этом, напомним некоторые определения.

Определение 14. Оператор L^* называется ***сопряженным*** к оператору L в гильбертовом пространстве H, если $\forall x, y \in H \ \left(Lx, y\right) = \left(x, L^* y\right)$.

Согласно нашему определению, как сам оператор L, так и сопряженный к нему L^* определены на всем пространстве. Для любого линейного ограниченного оператора, действующего из H в H, сопряженный оператор существует и единственен. Очевидно также, что оператор, сопряженный к сопряженному, есть исходный оператор: $\left(L^*\right)^* = L$.

<u>Лемма 2.</u> Если система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис Рисса в H, то она является базисом в H.

Доказательство. Поскольку $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — базис Рисса, то существует линейный ограниченный обратимый оператор L такой, что $\left\{L\varphi_n\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{e_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис. Возьмем произвольную функцию $f \in H$ и разложим функцию Lf по базису $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$: $Lf = \sum_{n=1}^{\infty}(Lf, e_n)\cdot e_n$. Поскольку $e_n = L\varphi_n$, получим $Lf = \sum_{n=1}^{\infty}(Lf, L\varphi_n)L\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty}(f, L^*L\varphi_n)L\varphi_n$. Подействовав на обе части равенства оператором L^{-1}, будем иметь $f = \sum_{n=1}^{\infty}(f, L^*L\varphi_n)\varphi_n$. Таким образом, произвольная функция $f \in H$ оказалась разложенной в ряд по системе $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, что как раз и означает базисность этой системы. (в силу установленной ранее единственности разложения в биортогональный ряд). Более того, система $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$, биортогональная к $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, имеет вид $\psi_n = L^*L\varphi_n$.

Обратим внимание на некоторые отличия неортогональных базисов от ортогональных.

Любую ортогональную систему можно нормировать, поделив каждый элемент на его норму. Если же $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — биортогональная пара систем, то нормировать обе системы, вообще говоря, нельзя: они связаны условием биортогональности: $(\varphi_n, \psi_k) = \delta_n^k$. Нормировав одну из систем, следует однозначно изменить другую: $\left\{\varphi_n \|\varphi_n\|^{-1}\right\}$, $\left\{\psi_n \|\varphi_n\|\right\}$. В связи с этим, наряду с нормированностью, вводится не столь «жесткое» понятие: почти нормированность.

Определение 15. Система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется ***почти нормированной,*** если существуют положительные константы α, β такие, что $\alpha \le \|\varphi_n\| \le \beta$ $(\forall n)$.

Можно доказать, что если $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует почти нормированный базис, то биортогональная к ней система также образует почти нормированный базис. В частности, следствием этого факта является необходимое условие базисности:

<u>Лемма 3.</u> (Необходимое условие базисности). Если $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — базис в гильбертовом пространстве, а $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — биортогональная к нему система, то

$$\exists C > 0 \quad \forall n \in N \quad \|\varphi_n\|\cdot\|\psi_n\| \le C. \tag{10}$$

Еще одна особенность биортогональных базисов связана со следующим термином:

Определение 16. Базис называется ***безусловным*** (или ***перестановочным***), если он остается базисом при любой перестановке его элементов.

Любой ортонормированный базис является безусловным. В самом деле, для ортонормированной системы базисность равносильна выполнению равенства Парсеваля (7). Однако ряд в левой части (7) — положительный, а для таких рядов выполнено свойство коммутативности (при любой перестановке слагаемых сходящийся ряд остается сходящимся, и его сумма не меняется). Следовательно, при перестановке элементов базиса равенство Парсеваля не нарушится, а значит, система останется базисом.

Неортогональные базисы, вообще говоря, не обязаны быть безусловными. Примеры условных базисов построить непросто, однако они существуют. Первым построил такой пример К. И. Бабенко [5]: системы $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}|x|^{\alpha} e^{inx}\right\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ и $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}|x|^{-\alpha} e^{inx}\right\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ (где $0<\alpha<1/2$) биортогональны друг другу и являются базисами в $L_2(-\pi,\pi)$, но эти базисы условны.

Теорема 5 (теорема Лорча). Для того чтобы система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ являлась базисом Рисса в гильбертовом пространстве H, необходимо и достаточно, чтобы она была, во-первых, безусловным базисом, во-вторых, почти нормированной системой.

Теорема была доказана канадским математиком Е. Р. Лорчем (E. R. Lorch) в 1939 году, но независимо от него более сильное утверждение было доказано несколько ранее И. М. Гельфандом.

Таким образом, исследование той или иной системы на предмет ее базисности Рисса и на предмет безусловной базисности фактически сводятся друг к другу (поскольку проверка почти нормированности не представляется серьезной проблемой).

Базисность Рисса (а значит, и безусловная базисность) системы оказывается тесно связанной с выполнением так называемых неравенств Бесселя и Гильберта (или, проще говоря, с бесселевостью и гильбертовостью системы).

Определение 17. Система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***бесселева*** в гильбертовом пространстве H, если

$$\exists\beta>0 \quad \forall f\in H \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(f,\varphi_n\right)\right|^2 \le \beta\cdot\|f\|^2. \tag{11}$$

Константа β называется при этом константой Бесселя, а само неравенство (11) — неравенством Бесселя.

Определение 18. Система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***гильбертова*** в гильбертовом пространстве H, если

$$\exists\gamma>0 \quad \forall f\in H \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(f,\varphi_n\right)\right|^2 \ge \gamma\cdot\|f\|^2. \tag{12}$$

Константа γ называется при этом константой Гильберта, а само неравенство (12) — неравенством Гильберта.

Знак модуля в неравенствах (11), (12) присутствует, поскольку пространство, вообще говоря, может рассматриваться над полем комплексных чисел.

Если система гильбертова, она автоматически полна. В самом деле, если функция ортогональна всем элементам системы, то ряд в левой части неравства (12) — ряд из нулей, а тогда норма в правой части (а следовательно, и сама функция) — нулевая.

Приведем без доказательства фундаментальную теорему Н. К. Бари (см. [3, 4]).

Т е о р е м а 6 (теорема Н. К. Бари). Следующие три утверждения равносильны:

1) система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис Рисса в гильбертовом пространстве H;

2) система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ минимальна и полна в H, системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ и биортогональная к ней $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ бесселевы в H;

3) система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно минимальна, бесселева и гильбертова в H.

Теорема Бари дает два пути исследования базисности Рисса: 1) установление бесселевости исходной системы и биортогональной к ней системы, 2) установление бесселевости и гильбертовости исходной системы. Каждый из подходов имеет свои преимущества и недостатки. С одной стороны, исследование бесселевости существенно проще, чем гильбертовости (в самом деле, в неравенстве Бесселя фактически речь идет о сходимости ряда, а его сумма оценивается сверху, в неравенстве же Гильберта сумму ряда надо оценить снизу, что принципиально сложнее; более того, добавление, изменение или отбрасывание любого конечного числа элементов системы не влияет на ее бесселевость, однако отбрасывание или изменение даже одного элемента может нарушить ее гильбертовость). В этом смысле первый из обозначенных подходов предпочтительнее. Однако при этом подходе требуется знать в явном виде систему, биортогональную к исходной, что, как уже говорилось, порой весьма проблематично. В этом смысле предпочтительнее второй подход, предполагающий изучение одной лишь исходной системы.

На данный момент установлены условия бесселевости для широкого класса систем (в том числе для систем корневых функций обыкновенных дифференциальных операторов). Условия же гильбертовости остаются изученными весьма слабо.

Рассмотрим простейший пример применения теоремы Бари.

Проверим, образует ли базис Рисса в $L_2[0,2\pi]$ уже упоминавшаяся система $1\bigcup\left\{\cos nx, \sin nx + c_n\cos nx\right\}_{n=1}^{\infty}$. Используя неравенство $|a\pm b|^2 \le 2\left(|a|^2+|b|^2\right)$, справедливое для любых комплексных a,b, получим:

$$\left|\left(f,\sin nx + c_n\cos nx\right)\right|^2 \le 2\left|\left(f,\sin nx\right)\right|^2 + 2|c_n|^2\left|\left(f,\cos nx\right)\right|^2.$$

Если последовательность $\{c_n\}$ ограничена, т. е. $\exists M>0\ \forall n\ |c_n|\le M$, то

$$\left|\left(f,1\right)\right|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|\left(f,\cos nx\right)\right|^2 + \left|\left(f,\sin nx + c_n\cos nx\right)\right|^2\right) \le \left|\left(f,1\right)\right|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(f,\sin nx\right)\right|^2 +$$

$$+\left(1+2|c_n|^2\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(f,\cos nx\right)\right|^2 \le \max\left\{2,1+2M^2\right\}\cdot\pi\cdot\left(\left|\frac{a_0}{2}\right|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2+|b_n|^2\right)\right) \le const\|f\|^2,$$

где a_0, a_n, b_n $(n \in N)$ — коэффициенты тригонометрического ряда Фурье функции f, т. е. рассматриваемая система бесселева. Аналогично можно убедиться в бесселевости биортогональной системы, которая уже была указана в явном виде. Итак, в случае ограниченности $\{c_n\}$ система образует базис Рисса (ее полнота и минимальность очевидны, так как, например, при ортогонализации она переходит в классический тригонометрический ортонормированный базис).

Если же последовательность $\{c_n\}$ неограниченна, то, как можно показать, нарушается бесселевость системы, а следовательно, она не будет базисом Рисса.

7. Базисность систем корневых функций дифференциальных операторов

Особый интерес представляет проблема базисности систем корневых функций обыкновенных дифференциальных операторов. В частности, именно к этой проблеме сводится обоснование метода разделения переменных для решения широкого класса краевых задач математической физики.

Для простоты и краткости изложения ограничимся операторами второго порядка.

На произвольном конечном интервале $(a,b) \subset R$ рассмотрим дифференциальный оператор

$$Lu = u'' + p(x)u' + q(x)u \qquad (13)$$

с парой локальных краевых условий вида

$$\alpha_{1k}u'(a) + \alpha_{2k}u'(b) + \beta_{1k}u(a) + \beta_{2k}u(b) = 0 \quad (k = 1,2). \qquad (14)$$

Собственной функцией оператора L, отвечающей собственному значению $\lambda = \mu^2$, назовем любую комплекснозначную не равную тождественно нулю функцию $u(x)$, удовлетворяющую на (a, b) уравнению

$$Lu + \mu^2 u = 0 \qquad (15)$$

и удовлетворяющую краевым условиям (14).

Основной вопрос заключается в следующем: при каких условиях система собственных функций образует базис (базис Рисса, безусловный базис) в $L_2(a,b)$?

Важную роль играет при этом сопряженный оператор, для построения которого следует рассмотреть скалярное произведение (Lu, v) и проинтегрировать дважды по частям:

$$\left(Lu,v\right)=\int_a^b Lu(x)\overline{v(x)}\,dx=\int_a^b\left(u''+p(x)u'+q(x)u\right)\overline{v(x)}\,dx=$$

$$=\left(u'(x)\overline{v(x)}-u(x)\overline{v'(x)}+p(x)u(x)\overline{v(x)}\right)\Big|_a^b+$$

$$+\int_a^b u(x)\overline{\left(v''(x)-\left(\overline{p(x)}v(x)\right)'+\overline{q(x)}v(x)\right)}\,dx=\int_a^b u(x)\,\overline{L^*v(x)}\,dx=(u,L^*v)\,,$$

где $L^*v=v''(x)-\left(\overline{p(x)}v(x)\right)'+\overline{q(x)}v(x)$, а краевые условия для оператора L^* подбираются так, чтобы внеинтегральные слагаемые обнулились.

Определение 19. Оператор L называется самосопряженным, если $L=L^*$.

Пример 1. Рассмотрим оператор $Lu=u''+q(x)u$ с краевыми условиями $u(0)=0,\ u(1)=0$. Построим сопряженный оператор:

$$\left(Lu,v\right)=\int_0^1\left(u''+qu\right)\overline{v}\,dx=\left(u'\overline{v}-u\overline{v}'\right)\Big|_0^1+\int_0^1 u\overline{\left(v''+\overline{q}\cdot v\right)}\,dx=$$

$$=u'(1)\overline{v(1)}-u'(0)\overline{v(0)}+\int_0^1 u\overline{\left(v''+\overline{q}\cdot v\right)}\,dx=\left(u,L^*v\right),$$

где $L^*v=v''+\overline{q}\cdot v$ с краевыми условиями $v(0)=0,\ v(1)=0$. Если функция $q(x)$ вещественнозначная, то оператор L — самосопряженный.

Положим теперь для простоты $q(x)\equiv 0$ и найдем собственные функции. Общее решение уравнения $Lu+\mu^2u=0$, т. е. $u''+\mu^2u=0$ имеет вид $u(x)=A\cos\mu x+B\sin\mu x$. С учетом краевых условий ясно, что $A=0$ и $B\sin\mu=0$. Поскольку при $B=0$ получим $u(x)\equiv 0$, что противоречит определению собственной функции, то обязательно $\sin\mu=0$. Отсюда получаем набор собственных значений $\lambda_n=\mu_n^2=\left(\pi n\right)^2$ $\left(n\in N\right)$ и, соответственно, систему собственных функций $u_n(x)=\sin\pi nx$. Как известно, эта система синусов образует ортогональный базис в $L_2(0,1)$.

Пример 2. Рассмотрим теперь оператор $Lu=u''+q(x)u$ с краевыми условиями $u(0)=0,\ u'(1)=u'(0)$. Такая краевая задача возникла в 1970-х годах при исследовании устойчивости турбулентной плазмы и получила название задачи Самарского — Ионкина. Аналогично примеру 1 построим сопряженный оператор:

$$\left(Lu,v\right)=\int_0^1\left(u''+qu\right)\overline{v}\,dx=u'(1)\overline{v(1)}+u(1)\overline{v'(1)}-u'(0)\overline{v(0)}-u(0)\overline{v'(0)}+$$

$$+\int_0^1 u\overline{\left(v''+\overline{q}\cdot v\right)}\,dx=u(1)\overline{v'(0)}+u'(0)\left(\overline{v(1)}-\overline{v(0)}\right)+\int_0^1 u\overline{\left(v''+\overline{q}\cdot v\right)}\,dx=\left(u,L^*v\right),$$

где $L^* v = v'' + \overline{q} \cdot v$ с краевыми условиями $v(0) = v(1),\ v'(0) = 0$. Ясно, что оператор — несамосопряженный.

Положим снова $q(x) \equiv 0$ и подставим общее решение $u(x) = A\cos \mu x + B\sin \mu x$ уравнения $u'' + \mu^2 u = 0$ в краевые условия. Получим $A = 0$ и $\mu \cos \mu = \mu$. Отсюда ясен набор собственных значений $\lambda_0 = 0,\ \lambda_n = \mu_n^2 = (2\pi n)^2\ (n \in N)$ и система собственных функций $u_0 = x$, $u_n(x) = \sin(2\pi nx)$. Как видим, собственные значения расположены «реже», чем в примере 1, а система собственных функций заведомо не полна (и, тем более, не образует базиса) в $L_2(0,1)$.

Неполнота системы собственных функций наводит на мысль о попытке пополнения этой системы. Принято пополнять в случае необходимости систему собственных функций так называемыми присоединенными функциями (мы не имеем здесь возможности обсудить вопрос о том, почему присоединенные функции определяются именно так, а не как-либо иначе, скажем лишь, что такая трактовка идет от физических задач).

Определение 20. Присоединенной функцией первого порядка, отвечающей собственному значению $\lambda_n = \mu_n^2$ и собственной функции $u_{n,0}$, назовем любую комплекснозначную, не равную тождественно нулю функцию $u_{n,1}(x)$, удовлетворяющую на (a, b) уравнению

$$Lu_{n,1} + \mu_n^2 u_{n,1} = u_{n,0} \tag{16}$$

и удовлетворяющую краевым условиям (14). Далее, индуктивно определяются присоединенные функции порядка k: уравнение при этом имеет вид

$$Lu_{n,k} + \mu_n^2 u_{n,k} = u_{n,k-1}. \tag{17}$$

Отметим, что среди решений уравнений (16), (17) не обязаны существовать функции, удовлетворяющие краевым условиям. Поэтому для каждой собственной функции $u_{n,0}$ ситуация может быть различной: она может вообще не иметь присоединенных, но может иметь цепочку присоединенных функций $u_{n,1}, u_{n,2}, \ldots, u_{n,k_n}$. Систему всех собственных и присоединенных функций данного оператора принято также называть системой ***корневых*** функций этого оператора.

Отметим следующий немаловажный факт: каждая присоединенная функция является решением линейного неоднородного дифференциального уравнения, собственная же функция — решением соответствующего однородного уравнения. Их линейная комбинация снова будет давать решение неоднородного уравнения, т. е. снова будет являться присоединенной функцией. Таким образом, присоединенные функции строятся неоднозначно, а лишь с точностью до линейных комбинаций, содержащих собственные функции.

Замечание. Не следует путать термин «присоединенные функции» с встречающимися в приложениях, например, присоединенными функциями Лежандра.

В примере 2 каждая собственная функция, кроме u_0, имеет одну присоединенную, которая строится неоднозначно и имеет вид $u_{n,1} = -\frac{1}{4\pi n} x\left(\cos(2\pi nx) + A_n \sin(2\pi nx)\right)$, где A_n — произвольные постоянные. Таким образом, система корневых функций в примере 2 выглядит следующим образом: $\{u_n\} = x \bigcup \left\{\sin(2\pi nx), -\frac{1}{4\pi n}\left(x\cos(2\pi nx) + A_n \sin(2\pi nx)\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$. Забегая вперед, скажем, что в случае ограниченной последовательности $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ указанная система корневых функций образует безусловный базис в $L_2(0,1)$, в противном же случае не является базисом.

Система, биортогональная к указанной системе корневых функций, имеет вид $\{v_n\} = 2 \bigcup \{4(1-x)\sin(2\pi nx) + 16\pi n A_n \cos(2\pi nx), -16\pi n \cos(2\pi nx)\}_{n=1}^{\infty}$. Нетрудно убедиться, что она является системой корневых функций сопряженного оператора (причем сначала указаны присоединенные, а затем — собственные функции). Такая ситуация не случайна. Справедлива

Лемма 4. Пусть $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ — полная и минимальная система корневых функций некоторого оператора L вида (13) — (14), тогда биортогональная к ней система $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ состоит из корневых функций сопряженного оператора L^*.

Доказательство. Пусть $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ — полная и минимальная система корневых функций оператора L, а $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ — биортогональная к ней система. Запишем уравнение для собственных и присоединенных функций в единой форме:

$$Lu_n + \mu_n^2 u_n = \theta_n u_{n-1}, \tag{18}$$

где числа θ_n равны нулю, если u_n — собственная функция, и единице, если u_n — присоединенная функция (в этом случае требуем, чтобы $\mu_n = \mu_{n-1}$).
Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned}
&\left(u_n, L^* v_k + \overline{\mu}_k^2 v_k - \theta_{k+1} v_{k+1}\right) = \left(Lu_n, v_k\right) + \mu_k^2\left(u_n, v_k\right) - \theta_{k+1}\left(u_n, v_{k+1}\right) = \\
&= \left(Lu_n + \mu_k^2 u_n, v_k\right) - \theta_{k+1}\left(u_{n-1}, v_k\right) = \left(Lu_n + \mu_k^2 u_n - \theta_{k+1} u_{n-1}, v_k\right) = \\
&= \left(Lu_n + \mu_n^2 u_n - \theta_n u_{n-1}, v_k\right) + \left(\mu_k^2 - \mu_n^2\right)\left(u_n, v_k\right) + \left(\theta_n - \theta_{k+1}\right)\left(u_{n-1}, v_k\right) = \\
&= \left(\mu_k^2 - \mu_n^2\right)\left(u_n, v_k\right) + \left(\theta_n - \theta_{k+1}\right)\left(u_{n-1}, v_k\right).
\end{aligned}$$

[По ходу преобразований мы воспользовались тем, что $\left(u_n, v_{k+1}\right) = \delta_n^{k+1} = \delta_{n-1}^k = \left(u_{n-1}, v_k\right)$]. Далее, если $n \neq k$ и $n \neq k+1$, то оба скалярных произведения в правой части полученного соотношения равны нулю. Если $n = k$, то равны нулю первая скобка и второе из скалярных произведений. Если, наконец,

$n = k + 1$, то в ноль обращаются первое из скалярных произведений и выражение $\theta_n - \theta_{k+1}$. Итак, в любом случае $\left(u_n, L^* v_k + \overline{\mu}_k^2 v_k - \theta_{k+1} v_{k+1}\right) = 0$. В силу полноты системы $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ это означает, что $L^* v_k + \overline{\mu}_k^2 v_k = \theta_{k+1} v_{k+1}$. Пусть теперь $u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+l}$ — цепочка из собственной и присоединенных к ней функций, отвечающих значению μ_n. Тогда $\theta_n = 0, \theta_{n+1} = \ldots = \theta_{n+l} = 1, \theta_{n+l+1} = 0$. Из уравнения для функций v_k видим, что v_{n+l} — собственная функция оператора L^*, отвечающая значению $\overline{\mu}_n$, а $v_{n+l-1}, \ldots, v_n$ — цепочка присоединенных к ней функций. (В отличие от исходной системы, нумерация внутри цепочки идет не по возрастанию, а по убыванию индекса). Лемма доказана.

Вернемся к примерам 1, 2. Принципиальное отличие свойств корневых функций в одном и другом примерах вызвано тем, что оператор в примере 1 — самосопряженный, в примере 2 — несамосопряженный. Перечислим основные различия между этими двумя классами операторов.

1. Собственные значения любого самосопряженного оператора — действительны. Собственные значения несамосопряженного оператора, вообще говоря, комплексны (хотя в примере 2 нам повезло, — они все же оказались действительными).

2. Самосопряженный оператор обладает системой собственных функций, образующих ортонормированный базис в L_2 (что следует из знаменитой теоремы Гильберта — Шмидта). Система собственных функций несамосопряженного оператора, вообще говоря, не обязана быть ортогональной (а значит, к ней нельзя применить классическую теорию ортогональных рядов).

3. Система собственных функций несамосопряженного оператора не обязана даже быть полной в L_2, поэтому ее приходится пополнять присоединенными функциями (как в примере 2).

4. Полнота неортогональной системы не равносильна ее базисности. Существуют примеры полных и минимальных систем функций, не образующих базиса.

5. Присоединенные функции строятся неоднозначно. При одном способе построения полученная в итоге система корневых функций может образовывать базис (и даже базис Рисса), а при другом — может не образовывать. Такая ситуация выглядит странно с физической точки зрения: реальная задача, решение которой свелось к вопросу о базисности системы корневых функций, объективно должна либо иметь решение, либо не иметь; наличие или отсутствие решения не должно зависеть от нашего субъективного произвола в выборе присоединенных функций.

6. Ортонормированный базис из собственных функций самосопряженного оператора автоматически является безусловным. Система же корневых функций несамосопряженного оператора может образовывать условный базис, т. е. ее базисные свойства зависят от нашего произвола в нумерации собственных значений и корневых функций (что опять-таки неестественно с физической точки зрения).

Такие особенности несамосопряженных операторов делают весьма непростой задачу построения спектральной теории (т. е. теории, изучающей свойства собственных значений и корневых функций, вопросы разложения по системам корневых функций, вопросы их базисности).

В конце 40-х — начале 50-х годов XX века М. В. Келдыш (а затем и многочисленные его последователи) выделили класс краевых условий (так называемые регулярные краевые условия), обеспечивающих полноту системы корневых функций. (Соответствующую библиографию можно найти, например, в работе [6]). Однако М. В. Келдышем, по-видимому, не было еще в полной мере осознано различие между полнотой и базисностью неортогональных систем функций.

Следующий важный шаг был сделан в начале 60-х годов Г. М. Кесельманом и В. П. Михайловым. Им удалось выделить более узкий по сравнению с регулярными класс краевых условий (усиленно регулярные), обеспечивающих базисность Рисса систем корневых функций. Однако, к сожалению, все попытки расширить этот класс оканчивались неудачей. Между тем, начали появляться физические задачи (подобные рассмотренной в примере 2 задаче Самарского—Ионкина), попадавшие как раз в «зазор» между регулярными и усиленно регулярными краевыми условиями (т. е. можно было гарантировать полноту, но не базисность системы корневых функций). Более того, выяснилось, что собственные значения операторов с усиленно регулярными условиями, начиная с некоторого момента, становятся простыми (однократными), а значит, им отвечают только собственные функции (без присоединенных!), т. е. оператор ведет себя «почти» как самосопряженный. Никаких результатов о базисности систем корневых функций «существенно» несамосопряженных операторов долгое время получить не удавалось.

Новый этап в спектральной теории несамосопряженных дифференциальных операторов связан с именем В.А. Ильина. Ему, по-видимому, впервые удалось осознать, что условия базисности систем корневых функций несамосопряженных дифференциальных операторов в принципе невозможно выражать в терминах краевых условий. В самом деле, как уже было сказано, присоединенные функции строятся неоднозначно, причем при одном их выборе мы можем получить систему, образующую базис, а при другом — нет. Таким образом, один и тот же оператор с одними и теми же краевыми условиями обладает различными системами корневых функций, одни из которых образуют базис, а другие — нет.

Более того, В. А. Ильину удалось построить следующий любопытный пример.

Пример 3. Рассмотрим оператор $Lu = u'' + p(x)u' + q(x)u$ с краевыми условиями $u(0) = 0,\ u'(0) = u'(1)$. При $p(x) = q(x) \equiv 0$ оператор обладает в $L_2(0,1)$ безусловным базисом из собственных и присоединенных функций $x \cup \left\{ \sin(2\pi nx), -\frac{x}{4\pi n}\cos(2\pi nx) \right\}_{n=1}^{\infty}$ (см. пример 2). При $p(x) = \varepsilon\left(x - \frac{1}{2}\right)$,

$q(x)=\frac{\varepsilon^2}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{\varepsilon}{2}$ (где ε — произвольное сколь угодно малое положительное число) система собственных функций (в данном случае присоединенных функций нет) не образует базиса (даже условного) в $L_2(0,1)$ ни при каком ε. Таким образом, два оператора с одними и теми же краевыми условиями и сколь угодно близкими (в любой метрике) бесконечно дифференцируемыми коэффициентами имеют принципиально различные свойства: у одного имеется базис (и даже безусловный) из корневых функций, у другого — нет. Этот пример наглядно показывает, что изучение базисности систем корневых функций несамосопряженных операторов в терминах краевых условий и гладкости коэффициентов в принципе невозможно.

В. А. Ильин предложил изучать условия базисности в терминах структуры спектра (т. е. множества собственных значений), а также соотношений между нормами корневых функций в тех или иных пространствах. Такой подход представляется вполне естественным. В самом деле, при решении прикладных краевых задач мы сначала находим собственные значения и корневые функции (либо их асимптотику), а затем уже рассматриваем их свойства. Фактически В. А. Ильин предложил отделить друг от друга эти два этапа и сосредоточиться на втором этапе (тем более, что асимптотика собственных значений и корневых функций достаточно хорошо изучена), изучая базисность не в терминах исходной краевой задачи, а в терминах уже построенной системы собственных значений и корневых функций. Соответственно, он предложил новую трактовку корневых функций, отказавшись от выполнения тех или иных краевых условий.

В. А. Ильиным были предложены также оригинальные методы исследования базисности, безусловной базисности и базисности Рисса систем корневых функций, основанные на применении формул среднего значения и их односторонних аналогов. Не имея возможности останавливаться подробно на этих формулах, отметим, что для оператора второго порядка формула среднего значения впервые была предложена английским математиком Ч. Титчмаршем [7], для операторов высокого порядка — Е. И. Моисеевым [8] (учеником В. А. Ильина).

Приведем без доказательства один из результатов В. А. Ильина.

Рассмотрим на произвольном конечном интервале G формальный дифференциальный оператор (13) с коэффициентами $p(x)\in W_1^1(G),\ q(x)\in L_1(G)$. Систему корневых функций этого оператора будем понимать как систему произвольных комплекснозначных, отличных от тождественного нуля функций $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющих почти всюду в G уравнению (18).

Т е о р е м а 7 (В. А. Ильин [9]). Пусть $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная полная минимальная в $L_2(G)$ система корневых функций оператора (13), а биортогональная к ней система $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ состоит из корневых функций оператора L^*.

Пусть также выполнено условие Карлемана:

$$\exists M_1 : \forall n \ \ \left|\operatorname{Im} \mu_n\right| \le M_1 . \tag{19}$$

Тогда для безусловной базисности в $L_2(G)$ каждой из систем $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:

$$\exists M_2 : \forall \tau \ge 0 \quad \sum_{\tau \le \operatorname{Re}\mu_n < \tau+1} 1 \le M_2 ; \tag{20}$$

$$\exists M_3 : \forall n \ \ \|u_n\|_2 \cdot \|v_n\|_2 \le M_3 , \tag{21}$$

где через $\| \cdot \|_2$ обозначена норма в $L_2(G)$.

Позднее Н. Б. Керимовым [10, 11] было доказано, что при дополнительном предположении о равномерной ограниченности длин цепочек корневых функций условие Карлемана (19) необходимо для безусловной базисности систем корневых функций.

Условие «сумма единиц» (20) выражает вполне естественное требование равномерности распределения собственных значений (точнее, спектральных параметров μ_n): в каждой вертикальной полосе ширины 1 количество чисел μ_n ограничено одной и той же константой.

Проиллюстрируем эту теорему, применив ее к примеру 2. Пара биортогонально сопряженных систем $\{u_n\},\{v_n\}$ представляет собой системы корневых функций исходного и сопряженного к нему операторов. Поскольку $\mu_0 = 0, \mu_{2n-1} = \mu_{2n} \ (n \in N)$ (мы здесь занумеровали значения спектрального параметра с учетом кратности), то выполнены как условие Карлемана (19), так и условие «сумма единиц» (20). Следует проверить лишь выполнение (21). После несложных, но достаточно громоздких вычислений увидим, что

$$\|u_{2n-1}\| = \|\sin 2\pi nx\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\|u_{2n}\| = \left\| -\frac{1}{4\pi n}\left(x\cos\left(2\pi nx\right) + A_n \sin\left(2\pi nx\right)\right) \right\|_2^2 \sim \frac{1}{96\pi^2 n^2}\left(1 + 48A_n^2\right),$$

$$\|v_{2n}\| = \|16\pi n \cos 2\pi nx\|_2 = 8\sqrt{2}\pi n ,$$

$$\|v_{2n-1}\| = \|4(1-x)\sin(2\pi nx) + 16A_n \cos(2\pi nx)\|_2^2 \sim \frac{8}{3} + 128A_n^2 ,$$

где под символом «$\sim$« понимается асимптотическое поведение при больших значениях n. Очевидно, что условие (21) окажется выполненным в случае ограниченной последовательности $\{A_n\}$ и невыполненным, когда эта последовательность не ограничена. Согласно теореме 7, в первом случае каждая из систем $\{u_n\},\{v_n\}$ образует безусловный базис в $L_2(0,1)$, во втором случае безусловного (а на самом деле, вообще никакого) базиса эти системы не образуют.

Для операторов высокого порядка критерий безусловной базисности был получен автором настоящей статьи [12]. Позднее эти результаты уточнялись как автором, так и Н. Б. Керимовым, В. М. Курбановым и др. Приведем формулировку теоремы из работы [12].

Рассмотрим на произвольном конечном интервале G формальный дифференциальный оператор

$$Lu = u^{(2m)} + p_2(x)u^{(2m-2)} + \ldots + p_{2m-1}(x)u' + p_{2m}(x)u, \quad (m = 2,3,\ldots) \tag{22}$$

с коэффициентами $p_k(x) \in W_1^{2m-k}(G)$ $(k = 2,3,\ldots 2m)$. (Хорошо известно, что коэффициент при $(2m-1)$-й производной можно обнулить стандартной экспоненциальной заменой). Систему корневых функций этого оператора будем вновь понимать безотносительно к виду краевых условий, а именно — как систему произвольных комплекснозначных, отличных от тождественного нуля функций $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющих почти всюду в G уравнению (18).

Т е о р е м а 8 (В.Д. Будаев [12]). Пусть $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная полная минимальная в $L_2(G)$ система корневых функций оператора (22), а биортогональная к ней система $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ состоит из корневых функций оператора L^*. Пусть также выполнено условие (19), и для каждой из систем справедлива оценка антиаприорного типа

$$\exists M_4, M_5 : \forall n \quad \|\theta_n u_{n-1}\|_2 \le M_4\left(1+|\mu_n|\right)\|u_n\|_2, \quad \|\theta_{n+1} v_{n+1}\|_2 \le M_5\left(1+|\mu_n|\right)\|v_n\|_2. \tag{23}$$

Тогда для безусловной базисности в $L_2(G)$ каждой из систем $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) условия «сумма единиц» (20),

2) условия (21),

3) условия
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\|u_n\|_\infty^2}{\|u_n\|_2^2} = O(N), \quad \sum_{n=1}^{N} \frac{\|v_n\|_\infty^2}{\|v_n\|_2^2} = O(N) \quad \left(\forall N\right). \tag{24}$$

(Под нормой с индексом ∞ понимается норма в пространстве L_∞, т. е. существенный супремум модуля функции).

Заметим, что для оператора второго порядка требования (23), (24) заведомо выполнены.

8. Об условиях бесселевости и гильбертовости

Как уже отмечалось, исследование той или иной системы на базисность Рисса сводится к исследованию либо двух систем (исходной и биортогональной к ней) на бесселевость, либо одной исходной системы на бесселевость и гильбертовость. Аналогично обстоит дело с исследованием на безусловную базисность. С помощью теорем Бари и Лорча нетрудно доказать следующую лемму (впервые в явном виде она была сформулирована в работе [12]):

Лемма 5. Для того чтобы пара биортогонально сопряженных в гильбертовом пространстве H систем $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ образовывала пару безусловных базисов, необходимо и достаточно, чтобы: 1) хотя бы одна из систем была полна в H, 2) системы $\left\{u_n\cdot\|u_n\|^{-1}\right\}$, $\left\{v_n\cdot\|v_n\|^{-1}\right\}$ были бесселевыми в H, 3) выполнялось условие (21).

В связи с этим встает вопрос: каковы критерии бесселевости (а также гильбертовости) систем функций (в частности, систем корневых функций дифференциальных операторов).

Что касается бесселевости, ситуация уже достаточно хорошо изучена. В работе [9] при установлении критерия безусловной базисности был фактически получен (хотя и не сформулирован в явном виде) критерий бесселевости систем корневых функций оператора второго порядка, а в работе [12] и в ряде других работ получены критерии бесселевости систем корневых функций оператора высокого порядка. Ограничимся формулировкой для оператора второго порядка.

Теорема 9 (В. А. Ильин). Пусть $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная система корневых функций оператора второго порядка. Пусть 1) длина всех цепочек корневых функций равномерно ограничена, 2) выполнено карлемановское условие. Тогда для бесселевости системы $\left\{u_n\cdot\|u_n\|^{-1}\right\}$ в $L_2(G)$ необходимо и достаточно выполнение условия «сумма единиц» (20).

Теорема 9 легко применима на практике. Например, для систем вида $\left\{e^{i\mu_n x}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\cos\mu_n x\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\sin\mu_n x\}_{n=1}^{\infty}$ при выполнении для последовательности $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ карлемановского условия необходимым и достаточным для бесселевости в $L_2(G)$ является условие «сумма единиц». В частности, встречающиеся на практике системы типа $\{\sin(an+b)x\}$, $\{\cos(an+b)x\}$, $\left\{e^{i(an+b)x}\right\}$ бесселевы в L_2 на любом конечном промежутке при любых действительных a,b $(a\neq 0)$. (Поясним, что указанные системы почти нормированы, поэтому безразлично, исследуем мы бесселевость самих этих систем, или же предварительно нормируем их, как в теореме 9).

К сожалению, условия гильбертовости на данный момент изучены весьма слабо. Некоторые результаты в этом направлении были получены А. Маловым [13], однако они вряд ли могут быть применены на практике.

Автором настоящей статьи было показано (см., например, работу [14]), что свойства гильбертовости и бесселевости устойчивы по отношению к малому возмущению спектрального параметра. (Ранее подобные результаты были известны лишь для стандартной системы экспонент $\left\{e^{inx}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$, см. работы [15, 16]). Не приводя здесь точных формулировок (в силу их громоздкости), укажем лишь простейший пример. Система $\left\{\cos\left(n+\delta_n\right)x\right\}_{n=1}^{\infty}$ при любых $\left|\delta_n\right| \le \frac{1}{\sqrt{6}}$ является гильбертовой и бесселевой в $L_2(0,\pi)$, причем константы Бесселя и Гильберта выписываются в явном виде.

Изучение условий гильбертовости продолжает оставаться одной из наиболее актуальных проблем спектральной теории.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. Ч. 2. М., 1973.
2. *Колмогоров А. Н., Фомин С. М.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1968.
3. *Качмаж С., Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов. М., 1958.
4. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М., 1965.
5. *Бабенко К. И.* О сопряженных функциях. ДАН. Т. 62 (1948). № 2. С. 157–160.
6. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.
7. *Титчмарш Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. 2. М., 1961.
8. *Моисеев Е. И.* Асимптотическая формула среднего значения для регулярного решения дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16. № 5. С. 827–844.
9. *Ильин В. А.* О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций дифференциального оператора второго порядка // ДАН СССР. 1983. Т. 273. № 5. С. 1048–1053.
10. *Керимов Н. Б.* Необходимые условия базисности в L_2 системы собственных и присоединенных функций дифференциального оператора второго порядка // ДАН СССР. 1988. Т. 299. № 4. С. 809–811.
11. *Керимов Н. Б.* К вопросу о необходимых условиях базисности // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26. № 6. С. 943–953.
12. *Будаев В. Д.* Безусловная базисность систем корневых функций обыкновенных дифференциальных операторов: Дис. … д-ра физ-мат. наук. М., 1993.
13. *Малов А. А.* Достаточные условия выполнения неравенства типа Гильберта по системе корневых функций обыкновенного дифференциального оператора второго порядка // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30. № 2. С. 197–203.
14. *Будаев В. Д.* О неравенствах Гильберта и Бесселя для некоторых систем синусов, косинусов и экспонент // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33. № 1. С. 19–24.
15. *Paley R. E. A. C., Wiener N.* Fourier Transforms in the Complex Domain. N. Y., 1934.
16. *Кадец М. И.* Точное значение постоянной Палея—Винера // Докл. АН СССР. 1964. Т.155. № 6. С.1253–1254.

V. Budaev

ORTHOGONAL AND BIORTHOGONAL BASES

Many modern mathematical problems (including applied ones) reduce to the question as to whether some function admits expansion in a series relative to a given system of functions (usually, this system consists of eigenfunctions of a given operator). Or, in other setting: does or does not a given system of functions form a basis

of the space under consideration? Until recently, problems of this kind arose in the study of orthogonal systems, thus leading to intensive development of the theory of orthogonal series and orthogonal bases (in particular, of trigonometric Fourier series). However, many physical problems investigated in the past decades required dealing with nonorthogonal series (and, accordingly, nonorthogonal bases). The fact that so far the theory of such series is only poorly developed is explained by numerous difficulties of principal nature. In this paper, an attempt is made to give a simple account of the main distinctions between the theories of orthogonal and biorthogonal bases and to present the fundamentals of both theories.