Prof. Javier Esparza
Philipp Czerner, Martin Helfrich

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

# Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2022 – Übungsblatt 12

**Individualaufgabe Ü12.1.** (*Wichtige Begriffe*)

Überprüfen Sie, dass Sie die folgenden Begriffe oder Notationen korrekt definieren können.

- $time_M(w)$ und $ntime_M(w)$
- $TIME(f(n))$ und $NTIME(f(n))$
- Landau-Notation (oder auch $\mathcal{O}$-Notation): $\mathcal{O}(n), \mathcal{O}(2^n), \ldots$
- P und NP
- P $\stackrel{?}{=}$ NP
- NP-hart (oder auch auch: “NP-schwer”)
- NP-vollständig
- Zertifikat und polynomiell beschränkter Verifikator
- polynomielle Reduktion
- $A \leq_p B$ (sprich: *"A ist polynomiell reduzierbar auf B"*)
- Die Probleme[1]: HAMILTON, RUCKSACK, SAT, 3KNF-SAT, FÄRBBARKEIT (COL), 3COL, MENGENÜBERDECKUNG (MÜ), CLIQUE, PARTITION, BIN PACKING, TRAVELLING SALESMAN (TSP)

A ist NP-Complete:

- $A \in NP$
- $\forall B \in NP. \quad B \leq_p A$

[1] Wir lernen viele dieser Probleme erst in den kommenden Vorlesungen kennen. Sie müssen nicht schon zum jetzigen Zeitpunkt alle Probleme kennen / verstehen.

$3SAT \leq_p A$

**Individualaufgabe Ü12.2.** (*TSP ist NP-vollständig*)

Sie kennen bereits das Problem HAMILTON $:= \{G \mid G$ enthält einen Hamiltonkreis$\}$. Dieses Problem ist **NP**-vollständig. Zeigen Sie nun, dass das Travelling-Salesman-Problem (TSP) ebenfalls **NP**-vollständig ist.

TSP:

- Eingabe: $n \times n$ Matrix $M$ mit $M_{i,j} \in \mathbb{N}$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.
- Frage: Gibt es eine "Rundreise" der Länge $\leq k$.

Eine Rundreise ist eine Permutation $\pi$ von $[1; n]$, also ein einfacher Kreis, der jede Insel einmal enthält. Die Länge der Rundreise ist die Summe der Kosten der einzelnen Reisen, also $\Sigma_{i=1}^{n} M_{\pi_i, \pi_j}$ (dabei ist $\pi_i$ der $i$-te Eintrag der Permutation, beginnend bei 0, und $\pi_j$ ist der Eintrag für die nächste Insel, also $j = (i+1)\%n$).

a) for each $s \in S$:
for each $(v_1, v_2) \in V \times V$:
if $(s, v_1) \in R \land (s, v_2) \in R \land v_1 \neq v_2$:
if $f(v_1) = f(v_2)$:
return false

return true

$O(|S| \times (|V|^2 \times |S| \times |V|))$

$= O(|S|^2 \cdot |V|^3)$

**Übungsaufgabe Ü12.3.** (*Stundenplan*)

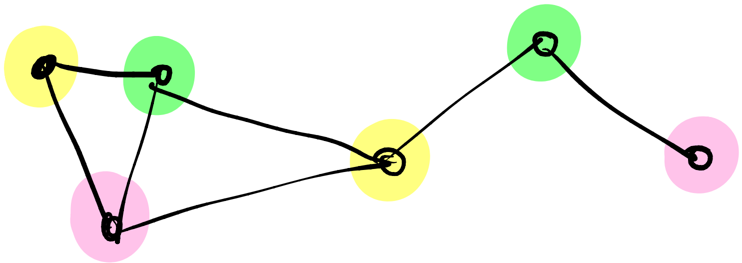
In dieser Aufgabe betrachten wir das STUNDENPLAN-Problem:

- **Eingabe**: Endliche Mengen $S$ (Studierende), $V$ (Vorlesungen) und $T$ (Termine) und eine Relation $R \subseteq S \times V$. Dabei bedeutet $(s, v) \in R$, dass $s$ die Vorlesung $v$ besuchen möchte.
- **Frage**: Gibt es eine Abbildung $f : V \to T$, so dass alle Studierenden einen überschneidungsfreien Stundenplan haben, also

$$(s, v_1) \in R \land (s, v_2) \in R \land v_1 \neq v_2 \implies f(v_1) \neq f(v_2) \, .$$

(a) Zeigen Sie, dass STUNDENPLAN in NP liegt.

(b) Zeigen Sie, dass STUNDENPLAN NP-schwer ist, indem sie eine polynomielle Reduktion von 3COL auf STUNDENPLAN angeben. (Wir werden in der Vorlesung noch lernen, dass 3COL NP-schwer ist.)



**Übungsaufgabe Ü12.3.** (*Stundenplan*)

In dieser Aufgabe betrachten wir das STUNDENPLAN-Problem:

- **Eingabe**: Endliche Mengen $S$ (Studierende), $V$ (Vorlesungen) und $T$ (Termine) und eine Relation $R \subseteq S \times V$. Dabei bedeutet $(s, v) \in R$, dass $s$ die Vorlesung $v$ besuchen möchte.
- **Frage**: Gibt es eine Abbildung $f : V \to T$, so dass alle Studierenden einen überschneidungsfreien Stundenplan haben, also

$$(s, v_1) \in R \wedge (s, v_2) \in R \wedge v_1 \neq v_2 \implies f(v_1) \neq f(v_2) .$$

(a) Zeigen Sie, dass STUNDENPLAN in NP liegt.

(b) Zeigen Sie, dass STUNDENPLAN NP-schwer ist, indem sie eine polynomielle Reduktion von 3COL auf STUNDENPLAN angeben. (Wir werden in der Vorlesung noch lernen, dass 3COL NP-schwer ist.)

b) $\underset{G}{3COL} \le_p \underbrace{SP}_{(S, V', T, R)}$

Sei $r$ eine Reduktion

( $G$ auf $r(G)$ reduzieren:

$G \in 3COL$

$\Leftrightarrow r(G) \in SP$

Wir bekommen $G = (V, E)$

wir konstruieren

$S$

$V'$

$T$

$R$

$$(s, v_1) \in R \wedge (s, v_2) \in R \wedge v_1 \neq v_2 \implies f(v_1) \neq f(v_2)\,.$$

$$f : V' \longrightarrow T$$

$$\{v_1, v_2\} \in E \;\wedge\; v_1 \neq v_2 \implies c(v_1) \neq c(v_2)$$

$$c : V \longrightarrow \{1, 2, 3\}$$

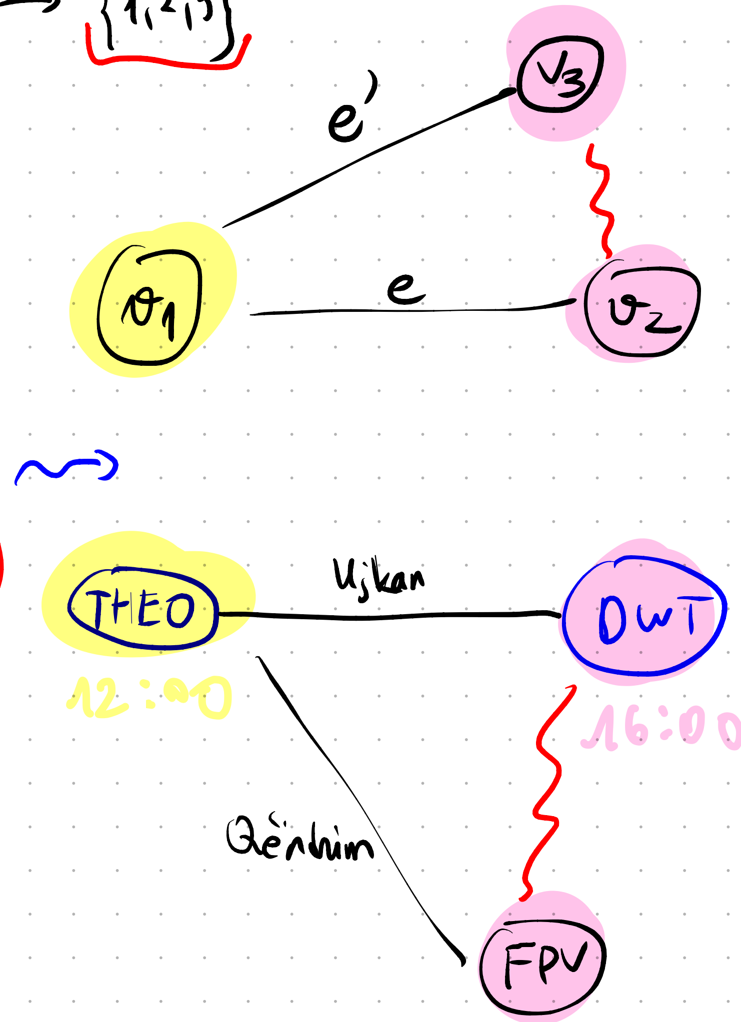
$$V' := V$$

$$T := \{1, 2, 3\}$$

$$S := E$$

$$R := \{(\{v_1, v_2\}, v) \in S \times V \mid v \in \{v_1, v_2\}\}$$

$$\subseteq S \times V$$



## Korrektheitsbeweis:

"$\Longrightarrow$" Angenommen, $G=(V,E) \in 3COL$ mit 3-Färbung $c: V \to \{1,2,3\}$

(⊛) $\hookrightarrow \left( \{v_1, v_2\} \in E \wedge v_1 \neq v_2 \Longrightarrow c(v_1) \neq c(v_2) \right)$

**Ziel:** Einen Stundenplan $f: V' \to T$, sodass:

$V' = V$, $T = \{1,2,3\}$

$$(s, v_1) \in R \wedge (s, v_2) \in R \wedge v_1 \neq v_2 \implies f(v_1) \neq f(v_2)\,.$$

**Beh:** $f := c$ ist ein solcher SP.

**Bew:** Seien $(s, v_1) \in R$, $(s, v_2) \in R$ mit $v_1 \neq v_2$ beliebig.

Aus den Def. von R gilt:

$v_1 \in s$, $v_2 \in s$

(Da $s \in S = E$, $v_1, v_2 \in V' = V$)

Weiterhin: da $v_1 \neq v_2$, gilt $s = \{v_1, v_2\}$.

Aus (⊛) folgt: $c(v_1) \neq c(v_2)$

Das bedeutet: $f(v_1) \neq f(v_2)$

"<=" Sei $\underline{r(G)} = (S, V', T, R) \in SP$ mit üb.sch. freiem Stundenplan $f: V' \longrightarrow T$, d.h.

$v' := V$
$T := \{1,2,3\}$
$S := E$
$R := \{(\{v_1, v_2\}, v) \in S \times V \mid v \in \{v_1, v_2\}\} \subseteq S \times V$

(*) $(s, v_1) \in R \wedge (s, v_2) \in R \wedge v_1 \neq v_2 \implies f(v_1) \neq f(v_2)$ .

**Ziel** Eine 3-Färbung $c: V \to \{1,2,3\}$ konstr., sodass

$\{v_1, v_2\} \in E \quad \wedge \quad v_1 \neq v_2 \quad \Longrightarrow \quad c(v_1) \neq c(v_2)$

**Beh:** $c := f$ ist eine solche 3-Färbung:

**Bew:** Seien $v_1, v_2 \in V$ mit $\{v_1, v_2\} \in E$ und $v_1 \neq v_2$.
Per Def. von $R$ gilt $(\{v_1, v_2\}, v_1) \in R$ und
$(\{v_1, v_2\}, v_2) \in R$.

Aus (*) folgt $f(v_1) \neq f(v_2)$

Das bedeutet $c(v_1) \neq c(v_2)$

(Außerdem: $c$ ist 3-Färbung weil $T = \{1,2,3\}$)

**Übungsaufgabe Ü12.3.** (*Stundenplan*)

In dieser Aufgabe betrachten wir das STUNDENPLAN-Problem:

- **Eingabe**: Endliche Mengen $S$ (Studierende), $V$ (Vorlesungen) und $T$ (Termine) und eine Relation $R \subseteq S \times V$. Dabei bedeutet $(s, v) \in R$, dass $s$ die Vorlesung $v$ besuchen möchte.
- **Frage**: Gibt es eine Abbildung $f : V \to T$, so dass alle Studierenden einen überschneidungsfreien Stundenplan haben, also

$$(s, v_1) \in R \land (s, v_2) \in R \land v_1 \neq v_2 \implies f(v_1) \neq f(v_2) .$$

(a) Zeigen Sie, dass STUNDENPLAN in NP liegt.

(b) Zeigen Sie, dass STUNDENPLAN NP-schwer ist, indem sie eine polynomielle Reduktion von 3COL auf STUNDENPLAN angeben. (Wir werden in der Vorlesung noch lernen, dass 3COL NP-schwer ist.)

$(a \to b) \wedge (\neg a \vee \neg c) \to (b \to (a \wedge b))$

**Übungsaufgabe Ü12.4.** (*SAT-Varianten*)

Wir betrachten verschiedene Varianten von SAT, die auch NP-vollständig sind.

In der Vorlesung werden wir das NP-vollständige Problem 3KNF-SAT kennen lernen. Dies führen wir hier vorab schon einmal ein, da es als Einschränkung von SAT die Reduktion leichter macht.
Sei $X$ eine Menge an Variablen. Die Menge der *Literale* ist $L := X \cup \{\neg x : x \in X\}$, enthält also alle Variablen und Negationen von Variablen. Eine *$k$-Klausel* ist eine Formel der Form $l_1 \vee l_2 \vee ... \vee l_k$ mit $l_1, ..., l_k \in L$, und eine Formel $F$ ist in *$k$-konjunktiver Normalform ($k$-KNF)*, wenn $F = F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_n$, wobei $F_1, ..., F_n$ jeweils $k$-Klauseln sind. Das Problem 3KNF-SAT ist nun

- **Eingabe**: Aussagenlogische Formel $F$ in 3-KNF
- **Frage**: Ist $F$ erfüllbar?

Ein Beispiel für eine Instanz wäre also $(\neg x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \neg z)$ .

Wir betrachten zusätzlich zu 3KNF-SAT noch weitere Varianten von SAT, die auch NP-vollständig sind. Zeigen Sie diese NP-Vollständigkeit, indem Sie für jede Variante $X$ eine Reduktion 3KNF-SAT $\leq_p X$ angeben und $X \in \mathrm{NP}$ zeigen.

(a) 3-OCC-KNF-SAT:

- **Eingabe**: Eine Formel $F$ in KNF, bei der jede Variable höchstens dreimal auftritt.

$a \wedge b$

$a \vee b$

$a \wedge \neg a$

$$(x \lor y \lor \neg z) \land (\neg x \lor \_\_\_) \land (\neg x \lor \_\_) \land (x \lor \_\_) \land (\_\_$$

$$(x_1 \lor y \lor \neg z) \land (\neg x_2 \quad \_\_\_) \land (\neg x_3 \quad \_\_) \land (x_4 \quad \_\_) \land (\_\_$$

$$\land \big( x_1 \leftrightarrow x_2 \land x_2 \leftrightarrow x_3 \land x_3 \leftrightarrow x_4$$
$$\land\ x_1 \cancel{\leftrightarrow} x_3 \land x_2 \cancel{\leftrightarrow} x_4$$
$$\land\ x_1 \cancel{\leftrightarrow} x_4 \big)$$

Fast da...

$$a \leftrightarrow b \equiv (\neg a \lor b) \land (\neg b \lor a)$$


| | | | |
|---|---|---|---|
| | $x_1 \rightarrow x_2$ | | $\neg x_1 \lor x_2$ |
| $\land$ | $x_2 \rightarrow x_3$ | | $\neg x_2 \lor x_3$ |
| $\land$ | $x_3 \rightarrow x_4$ | | $\neg x_3 \lor x_4$ |
| $\land$ | $\neg x_4 \rightarrow x_1$ | | $\neg x_4 \lor x_1$ |

- **Frage**: Ist $F$ erfüllbar?

$$F \lor G \xrightarrow{\varphi} \mathrm{ITE}(\varphi(F), \text{true}, \varphi(G))$$

(b) Wir betrachten den ITE-Operator mit der Semantik $\mathrm{ITE}(x, y, z) := (x \to y) \land (\neg x \to z)$. Eine ITE-Formel genügt der folgenden Grammatik:

$$\boxed{F \to \mathrm{ITE}(F, F, F) \mid x \mid \text{true} \mid \text{false}} \quad \text{für Variablen } x \in \mathcal{V}$$

ITE-SAT:

- **Eingabe**: Eine ITE-Formel $F$.
- **Frage**: Ist $F$ erfüllbar?

$\neg a \longrightarrow \mathrm{ITE}(a, \text{false}, \text{true})$

$a \lor b \longrightarrow \mathrm{ITE}(a, \text{true}, b)$

$a \land b \longrightarrow \mathrm{ITE}(a, b, \text{false})$

$$\begin{aligned}
\mathrm{ITE}(a, \text{false}, \text{true}) &\equiv (a \to \text{false}) \land (\neg a \to \text{true}) \\
&\equiv (\neg a \lor \text{false}) \land (\neg(\neg a) \lor \text{true}) \\
&\equiv \neg a \land \text{true} \\
&\equiv \neg a \checkmark
\end{aligned}$$

$$\mathrm{ITE}(a, \mathrm{true}, b) \equiv (a \to \mathrm{true}) \wedge (\neg a \to b)$$
$$\equiv \mathrm{true} \wedge (a \vee b)$$
$$\equiv a \vee b \checkmark$$

Die Übersetzung $F \longmapsto \varphi(F)$ ist in polynomieller Zeit berechenbar, da die Formeln sich um konstanten Faktor vergrößert.

Die Red. ist korrekt, da

$$F \equiv \varphi(F)$$

**Übungsaufgabe Ü12.5.** (*ZOLP*)

Das *Zero-One-Linear-Program* (ZOLP) Problem sei wie folgt definiert:

- **Eingabe**: Ein System von linearen Ungleichungen

$$
\begin{aligned}
b_1 &\leq a_{1,1}y_1 + \ldots + a_{1,n}y_n \\
b_2 &\leq a_{2,1}y_1 + \ldots + a_{2,n}y_n \\
&\vdots \\
b_m &\leq a_{m,1}y_1 + \ldots + a_{m,n}y_n
\end{aligned}
$$

  mit $a_{i,j}, b_i \in \mathbb{Z}$ und $m, n > 0$.

- **Frage**: Gibt es für die Variablen $y_1, \ldots, y_n$ Werte aus $\{0, 1\}$, sodass alle Ungleichungen gleichzeitig erfüllt sind?

Zeigen Sie, dass das Entscheidungsproblem ZOLP NP-schwer ist. Geben Sie hierzu eine geeignete Reduktion von 3KNF-SAT auf ZOLP an und beschreiben Sie **zusätzlich** das Vorgehen anhand folgender Formel:

$$(\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$$

Den Korrektheitsbeweis müssen Sie nicht ausformulieren.

$F \in 3SAT$

mit $\sigma : Vars(F) \to \{0,1\}$

$\hat{\sigma}(F) = 1$

$F' \in 3OCC-$ ___

$Vars(F) = \{x_1, \ldots, x_n\}$

$\sigma'(x_{k,i}) := \sigma(x_k)$

$\sigma'(\neg x_{k,i}) := \sigma(\neg x_k)$

$\sigma'(F') = \sigma(F)$