

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2022 – Übungsblatt 5

- Das Übungsblatt ist in zwei Teile gegliedert: den Vorbereitungsteil, den Sie vor der Übung selbstständig bearbeiten sollen, und den Übungs-/Nachbereitungsteil, der Aufgaben enthält, die in der Übung besprochen werden und von Ihnen anschließend zur Nachbereitung verwendet werden können.
- Das ist nicht das Hausaufgabenblatt! Die Hausaufgaben finden Sie auf einem separaten Blatt.

Vorbereitung (\rightarrow vor der Übung selbstständig zu bearbeiten)

Individualaufgabe Ü5.1. (Wichtige Begriffe)

Überprüfen Sie, dass Sie die folgenden Begriffe oder Notationen korrekt definieren können.

- | | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none">• Kontextfreie Sprache (<i>CFL</i>)• rechts-lineare / links-lineare CFG• Syntaxbaum | <ul style="list-style-type: none">• Kontextfreie Grammatik (<i>CFG</i>)• (Links-/Rechts-)Ableitung• mehrdeutige CFG |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Individualaufgabe Ü5.2. (Automata Tutor: “Contextfree Languages”)

Lösen Sie die Aufgaben Ü5.2 (a–d) auf Automata Tutor.¹

Individualaufgabe Ü5.3. (Anwendungsbeispiel kontextfreie Grammatiken)

Betrachten Sie die folgende Grammatik $G = (V, \Sigma, P, J)$ mit

$$V = \{J, D, T, N, N', Z, A, S, E, U, B, C, V, U', B'\}$$
$$\Sigma = \{;, \{, \}, (,), =, \text{a}, \text{b}, \dots, \text{y}, \text{z}, 0, 1, \dots, 8, 9, +, -, ., /, \%, !, <, >, \&\&, ||\}$$

¹Wenn Sie Automata Tutor noch nicht verwendet haben, folgen Sie erst den Schritten in Ü1.2, um sich richtig zu registrieren.

mit den Produktionen $P :=$

$$\begin{aligned}
 J &\rightarrow DS \mid S \\
 D &\rightarrow TN; D \mid TN; \\
 T &\rightarrow \text{int} \\
 N &\rightarrow AN' \\
 N' &\rightarrow AN' \mid ZN' \mid A \mid Z \\
 A &\rightarrow a \mid b \mid c \mid \dots \mid y \mid z \\
 Z &\rightarrow 0 \mid 1 \mid \dots \mid 8 \mid 9 \\
 S &\rightarrow SS \mid ; \mid \{S\} \mid N = E; \mid N = \text{read}(); \mid \text{write}(E); \mid \text{if}(C) \ S \ \text{else} \ S \mid \text{while}(C) \ S \\
 E &\rightarrow Z \mid N \mid (E) \mid UE \mid EBE \\
 U &\rightarrow - \\
 B &\rightarrow - \mid + \mid \cdot \mid / \mid \% \\
 C &\rightarrow \text{true} \mid \text{false} \mid (C) \mid EVE \mid U'(C) \mid CB'C \\
 V &\rightarrow == \mid != \mid <= \mid < \mid >= \mid > \\
 U' &\rightarrow ! \\
 B' &\rightarrow \&& \mid ||
 \end{aligned}$$

- (a) Was für eine Sprache erzeugt diese Grammatik?
- (b) Beurteilen Sie die folgende Aussagen: Alle Worte in $L(G)$ können zu einem funktionierenden Programm kompiliert werden.
- (c) Geben Sie ein gültiges Wort in der Sprache an, das alle Nichtterminale mindestens einmal verwendet.
- (d) Zeichnen Sie den Syntaxbaum für das in Teilaufgabe (c) gefundene Wort.

Übung und Nachbereitung

Übungsaufgabe Ü5.4. (Ableitung und Syntaxbaum)

Sei $G = (\{S, E, O, A, B, X\}, \{a, b\}, P, S)$ die CFG mit folgenden Produktionen P :

$$\begin{aligned}
 S &\rightarrow E \mid O \\
 E &\rightarrow AB \mid BA \\
 A &\rightarrow XAX \mid a \\
 B &\rightarrow XBX \mid b \\
 O &\rightarrow XXO \mid X \\
 X &\rightarrow a \mid b
 \end{aligned}$$

- (a) Geben Sie für jedes der folgenden Wörter jeweils eine Linksableitung und eine Rechtsableitung zzgl. des entsprechenden Syntaxbaums an:
 - (i) $abaaaa$ (ii) $babab$ (iii) $aabbaaba$
- (b) Entscheiden Sie, ob die Grammatik G mehrdeutig ist oder nicht. Wenn sie mehrdeutig ist, geben Sie ein Wort $w \in L(G)$ mit zwei Syntaxbäumen an. Sonst beweisen Sie, dass G nicht mehrdeutig ist.

abaaaa

$S \rightarrow E \rightarrow BA$

$\rightarrow XBXA$

$\rightarrow aBXA$

$\rightarrow abXA$

$\rightarrow abaA$

$\rightarrow abaXAX$

$\rightarrow abaaxAX$

$\rightarrow abaaaax$

$\rightarrow abaaaa$

$S \rightarrow E \rightarrow BA$

$\rightarrow BXAX$

$\rightarrow BXAx$

$\rightarrow BXaa$

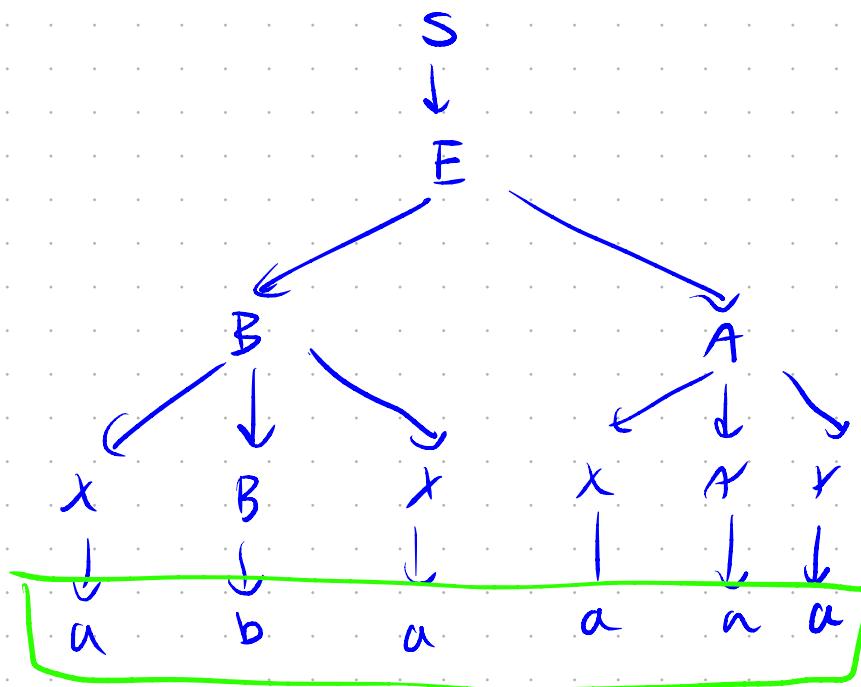
$\rightarrow Baax$

.

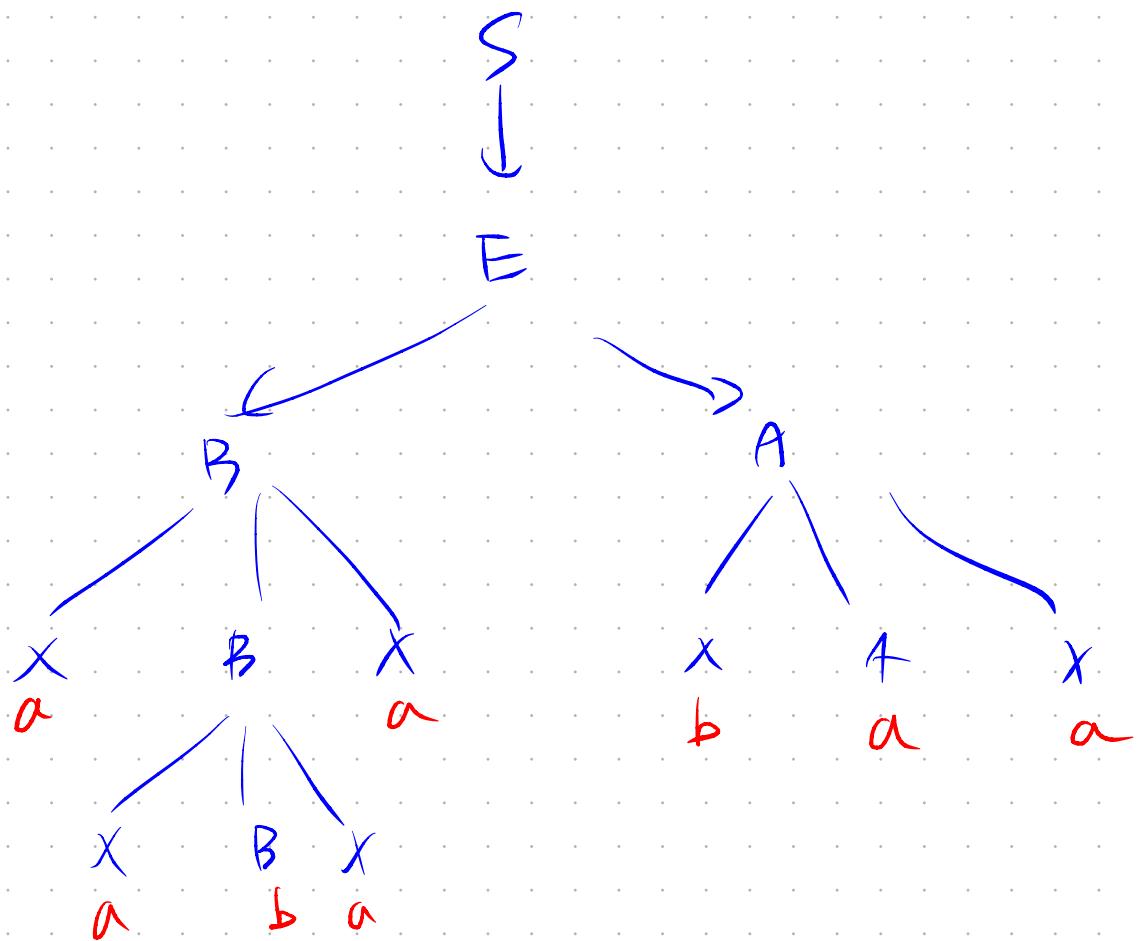
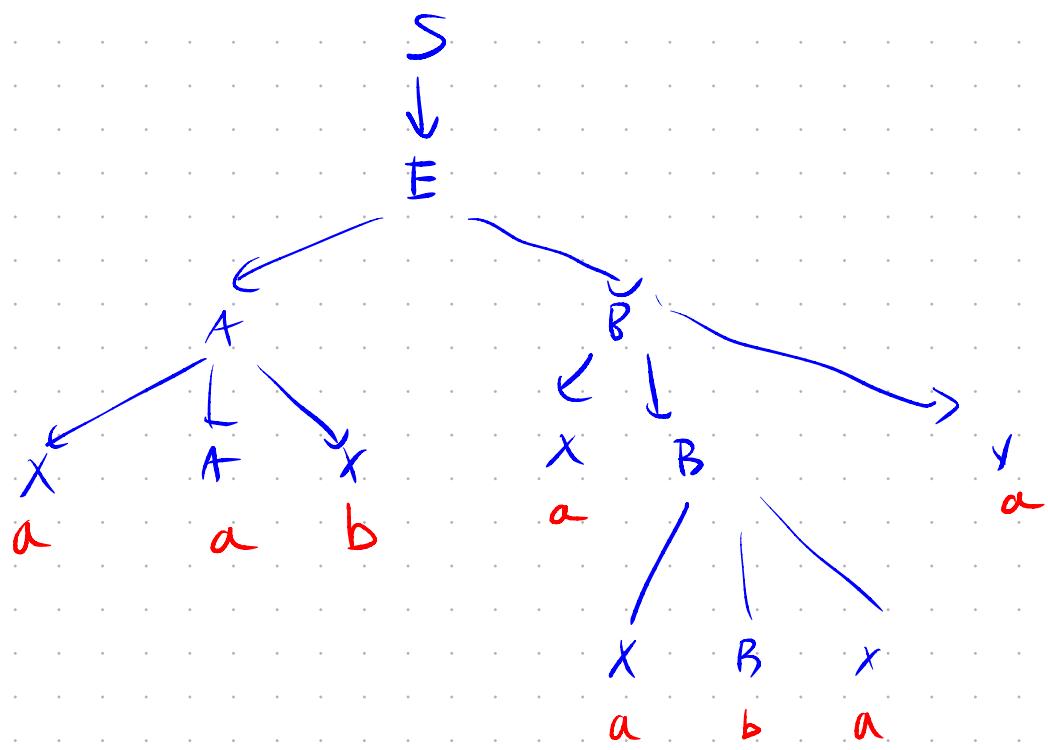
.

$$\begin{aligned}
 S &\rightarrow E \mid O \\
 E &\rightarrow AB \mid BA \\
 A &\rightarrow XAX \mid a \\
 B &\rightarrow XBX \mid b \\
 O &\rightarrow XXO \mid X \\
 X &\rightarrow a \mid b
 \end{aligned}$$

$L_G(1) = \{a^n\}$
 $L_G(2) = \{w \mid w \text{ has } n \text{ 'a's and } m \text{ 'b's}\}$



b) aabaabaa



Übungsaufgabe Ü5.5. (*Sprache einer kontextfreien Grammatik*)

Gegeben sei die folgende Grammatik G :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aSa \mid bSb \mid aTb \mid bTa \\ T &\rightarrow aT \mid bT \mid \epsilon \end{aligned}$$

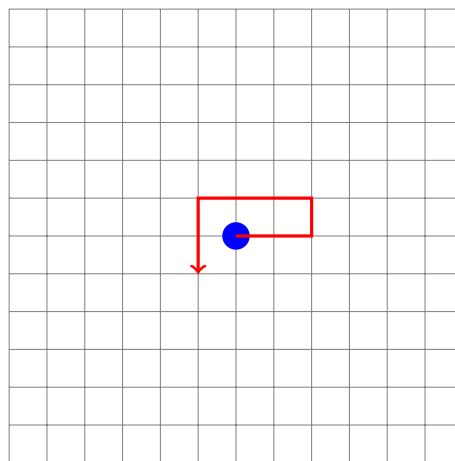
- (a) Welche Sprache beschreibt G ? Geben Sie eine intensionale Mengendarstellung² L für $L(G)$ an.
- (b) Zeigen oder widerlegen Sie: L ist regulär.
- (c) Zeigen Sie $L(G) = L$ formal. Beweisen Sie dabei auch induktiv, welche Sprache von T erzeugt wird.

Übungsaufgabe Ü5.6. (*Residualsprachen*)

Konstruieren Sie den kanonischen Minimalautomaten zu dem regulären Ausdruck $r := ab \mid ba^*$ und benennen Sie jeden Zustand mit einem regulären Ausdruck für die entsprechende Residualsprache.

Übungsaufgabe Ü5.7. (*Pfeilsprachen*)

In dieser Aufgabe betrachten wir Sprachen, deren Worte Linienzüge in einem unendlichen zweidimensionalen Gitter von einem fixen Startpunkt aus beschreiben. Die folgende Grafik zeigt einen Ausschnitt aus dem Gitter:



Wir haben Startpunkt blau markiert. Linienzüge beschreiben wir im Folgenden als eine Sequenz von Pfeilen, d.h. als Worte über dem Alphabet $\Sigma = \{\rightarrow, \leftarrow, \uparrow, \downarrow\}$. Die Pfeile beschreiben dabei (vom Startpunkt aus gesehen) einen ein Kästchen langen Schritt entlang des Gitters. Wir stellen daher den im Bild rot eingezeichnete Linienzug durch das Wort $w = \rightarrow \rightarrow \uparrow \leftarrow \leftarrow \downarrow \downarrow$ dar.

²Das heißt, eine Beschreibung der Form $L := \{w \in A \mid P(w)\}$ für eine geeignete Menge A und Prädikat P .

Übungsaufgabe Ü5.5. (Sprache einer kontextfreien Grammatik)

Gegeben sei die folgende Grammatik G :

$$\begin{array}{l} S \rightarrow aSa \mid bSb \mid Tb \mid bTa \\ T \rightarrow aT \mid bT \mid \epsilon \end{array}$$

$$\{a\} L_G(S) \{a\} \subseteq L_G(S)$$

- (a) Welche Sprache beschreibt G ? Geben Sie eine intensionale Mengendarstellung² L für $L(G)$ an.
 (b) Zeigen oder widerlegen Sie: L ist regulär.
 (c) Zeigen Sie $L(G) = L$ formal. Beweisen Sie dabei auch induktiv, welche Sprache von T erzeugt wird.

$$L = \{ w \in \Sigma^* \mid P(w) \}$$

$$w = w^R$$

$$\underset{2}{\textcircled{w} \textcircled{a}} \quad w \underset{\textcircled{b} \textcircled{w^R}}{\textcircled{v}}$$

$$wbwaw^R$$

$$z^R = a v^R \neq b v^R$$

$$L = \{ w \in \Sigma^* \mid w \neq w^R \}$$

$$\underline{L = \{ }$$

$$\textcircled{b}) \quad \underline{L = \{ w \in \Sigma^* \mid w = w^R \}} \quad \text{ist nicht regulär, somit auch } L \overset{\text{nicht}}{\sim} \text{regulär}$$

$$\textcircled{c})$$

c) $L(G) = L$ ist zu zeigen.

II $L(G) \subseteq L''$ d.h. $w \in L(G) \Rightarrow w \in L$

Beweis per Induktion über die Ableitung von w .

Fall:

- $S \rightarrow aTb \xrightarrow{*} avb = w$ mit $T \xrightarrow{*} v$.
zu zeigen: $avb \neq (avb)^e = bv^ea$

Das ist aber offensichtlich. (Annahme: $v \in \Sigma^*$)
(D.h. $w \in L$).

Fall:

- $S \rightarrow bTa \xrightarrow{*} bva = w$ folgt analog.

- $S \rightarrow aSa \xrightarrow{*} ava = w$ mit $S \xrightarrow{*} v$.

IH: $v \neq v^e$.

Jetzt betrachten wir $w^R = (ava)^R = av^Ra$. Aus
IH folgt dann $w^R \neq w$.

- $S \rightarrow bSb \xrightarrow{*} ava = w$ folgt analog.

Schließlich gilt $w \in L(G) \Rightarrow w \in L$.

" $L \subseteq L(G)$ " Es ist zu zeigen, für alle $w \in L$ gilt $w \in L(G)$.

Beweis per Induktion über die Länge n von w .

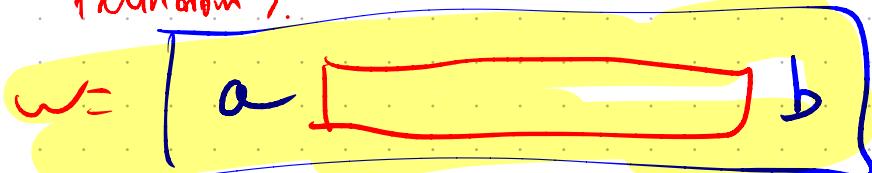
D.h. $w = w_1 \dots w_n \neq w_n \dots w_1 = w^R$.

Für $n \in \{0, 1\}$ gilt trivialerweise $w = w^R$, also die Fälle treten gar nicht auf, da die Annahme $w \in L$ ist.

Daraus folgt $n \geq 2$.

Es gibt ein $1 \leq i \leq n$, s.d. $w_i \neq w_{n-i+1}$ (sonst wäre w ein Palindrom).

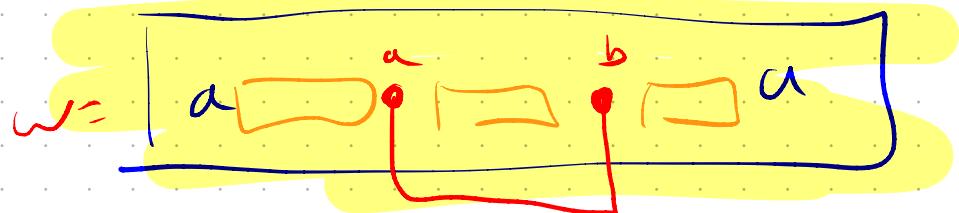
Fall: $i=1$.



Dann gilt o.B.d.A. $w = a v b$, mit $v \in \Sigma^{n-2}$.

Es gilt ja $v \in \Sigma^*$, also gibt es eine Ableitung $T \xrightarrow{*} v$ (da $L_G(T) = \Sigma^*$). Somit gibt es die Ableitung $S \xrightarrow{*} a T b \xrightarrow{*} a v b = w$. Schlussendlich gilt $w \in L(G)$.

Fall $i > 1$



Dann gibt es ein $x \in \Sigma$, $v \in \Sigma^{n-3}$, sodass $w = x v x$.

Wir wissen auch, $w = x v x \neq x v^R x = w^R$. D.h. $v \neq v^R$, also $v \in L$ mit $|v| = n-2 < n$. Wir setzen die IH ein und erhalten eine Ableitung $S \xrightarrow{*} v$.

Folglich gilt:

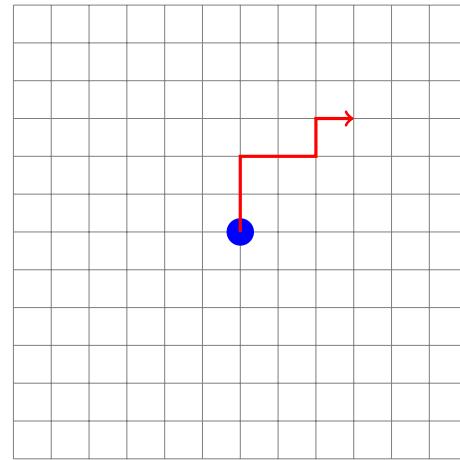
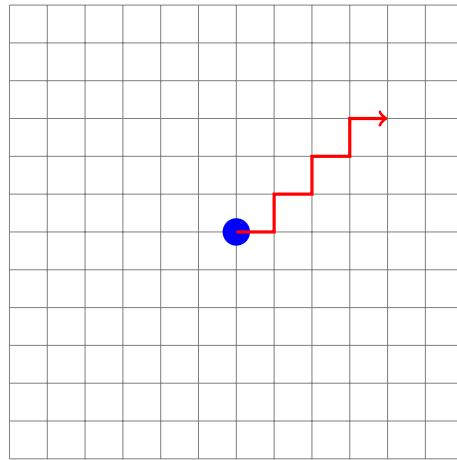
$$S \rightarrow x S x \xrightarrow{*} x \vartheta x = w.$$

Also ist $w \in L(G)$.

- (a) Betrachten Sie die folgenden natürlich sprachlichen Beschreibungen zusammen mit jeweils einem Beispiel, welches in der Sprache liegt (auf der linken Seite), und einem Beispiel, das kein Element der Sprache ist (auf der rechten Seite). *Geben Sie für jede der Sprachen eine formale Definition der Form $\{w \in \Sigma^* \mid \dots\}$ an.*³

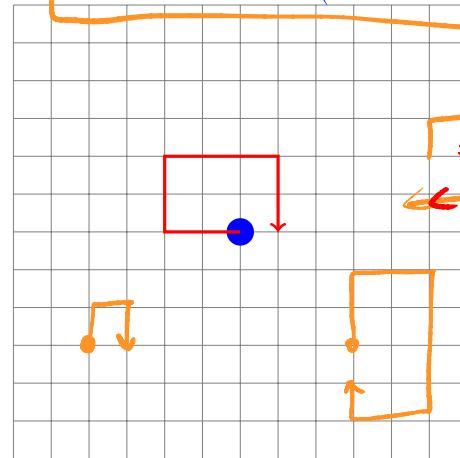
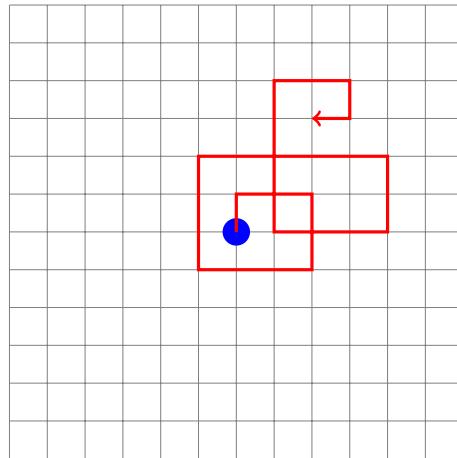
- (1) die Sprache aller Treppen über dem Alphabet $\Sigma' = \{\rightarrow, \uparrow\}$

$(\rightarrow \uparrow)^+ \{ \varepsilon, \rightarrow \}$



- (2) die Sprache aller im Uhrzeigersinn laufenden Spiralen über dem Alphabet Σ , die vom Startpunkt aus zuerst nach oben laufen

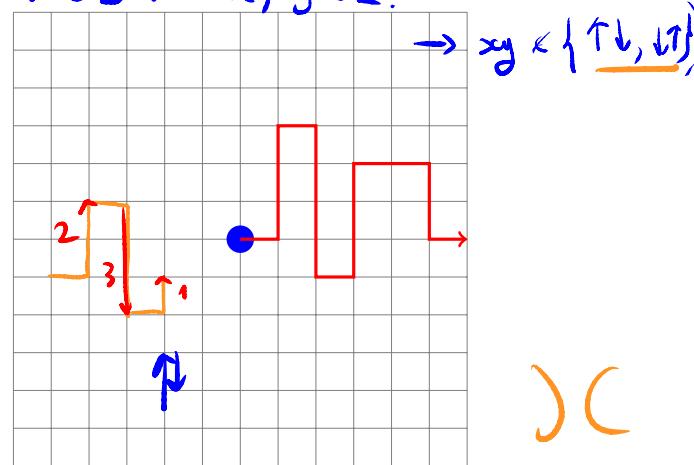
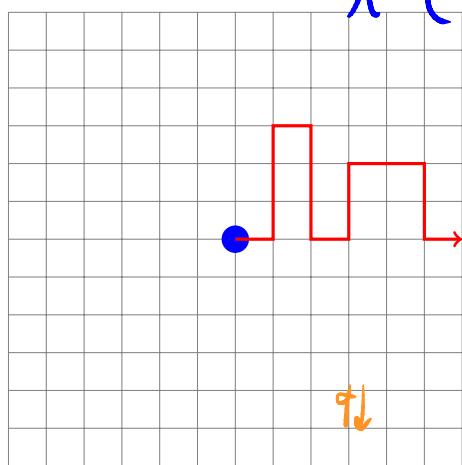
$u, \exists v. uv \in (q^+ \rightarrow^+ \downarrow^+ <^+)^*$



- (3) die Sprache aller “Skylines” über dem Alphabet $\Sigma'' = \{\rightarrow, \uparrow, \downarrow\}$

³Das heißt insbesondere, dass Sie in diesem Aufgabenteil keinen Automaten, keinen regulären Ausdruck, keine Grammatik oder ähnliches angeben sollen, die die Sprache beschreiben.

$$L = \{ w \in \Sigma^* \mid (\forall u, v \in \Sigma^*. w=uv \rightarrow |u|_T \geq |v|_T) \wedge (\forall u, v \in \Sigma^*. \forall x, y \in \Sigma. w=uxyv \rightarrow xy \in \{\uparrow\downarrow, \uparrow\}) \}$$



Hinweis: Die Sprachen sind mithilfe der Beispiele nicht eindeutig bestimmt! Ziel der Aufgabe ist es, die intuitive Beschreibung (z.B. "Sprache aller Skylines") zusammen mit den Beispielen in eine möglichst allgemeine Sprachdefinition zu bringen.

- (b) Stellen Sie Vermutungen auf, ob die obigen Sprachen regulär oder kontextfrei sind. Begründen Sie Ihre Antwort möglichst anschaulich anhand des Beispiels.
- (c) Geben Sie zu jeder der Sprachen L aus Aufgabenteil (a) eine Grammatik G an.

$$S \mapsto T_? \mid T_? \rightarrow S$$

$$T_? \mapsto \epsilon \mid T$$

$$T \mapsto \uparrow\downarrow \mid T_? \rightarrow T_?$$

$$\overset{\sim}{\uparrow} \rightarrow \downarrow^{\sim}$$