Prof. Javier Esparza
Philipp Czerner, Martin Helfrich

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2022 – Übungsblatt 12

Individualaufgabe Ü12.1. (*Wichtige Begriffe*)

Überprüfen Sie, dass Sie die folgenden Begriffe oder Notationen korrekt definieren können.

- $time_M(w)$ und $ntime_M(w)$
- $TIME(f(n))$ und $NTIME(f(n))$
- Landau-Notation (oder auch $\mathcal{O}$-Notation): $\mathcal{O}(n), \mathcal{O}(2^n), ...$
- P und NP
- P $\stackrel{?}{=}$ NP
- NP-hart (oder auch auch: “NP-schwer”)
- NP-vollständig
- Zertifikat und polynomiell beschränkter Verifikator
- polynomielle Reduktion
- $A \leq_p B$ (sprich: *"A ist polynomiell reduzierbar auf B"*)
- Die Probleme[1]: HAMILTON, RUCKSACK, SAT, 3KNF-SAT, FÄRBBARKEIT (COL), 3COL, MENGENÜBERDECKUNG (MÜ), CLIQUE, PARTITION, BIN PACKING, TRAVELLING SALESMAN (TSP)

[1] Wir lernen viele dieser Probleme erst in den kommenden Vorlesungen kennen. Sie müssen nicht schon zum jetzigen Zeitpunkt alle Probleme kennen / verstehen.

Individualaufgabe Ü12.2. (*TSP ist NP-vollständig*)

Sie kennen bereits das Problem HAMILTON $:= \{G \mid G$ enthält einen Hamiltonkreis$\}$. Dieses Problem ist **NP**-vollständig. Zeigen Sie nun, dass das Travelling-Salesman-Problem (TSP) ebenfalls **NP**-vollständig ist.

TSP:

- Eingabe: $n \times n$ Matrix M mit $M_{i,j} \in \mathbb{N}$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.
- Frage: Gibt es eine "Rundreise" der Länge $\leq k$.

Eine Rundreise ist eine Permutation π von $[1; n]$, also ein einfacher Kreis, der jede Insel einmal enthält. Die Länge der Rundreise ist die Summe der Kosten der einzelnen Reisen, also $\Sigma_{i=1}^{n} M_{\pi_i,\pi_j}$ (dabei ist π_i der i-te Eintrag der Permutation, beginnend bei 0, und π_j ist der Eintrag für die nächste Insel, also $j = (i+1)\%n$).

Übungsaufgabe Ü12.3. (*Stundenplan*)

In dieser Aufgabe betrachten wir das STUNDENPLAN-Problem:

- **Eingabe**: Endliche Mengen S (Studierende), V (Vorlesungen) und T (Termine) und eine Relation $R \subseteq S \times V$. Dabei bedeutet $(s, v) \in R$, dass s die Vorlesung v besuchen möchte.
- **Frage**: Gibt es eine Abbildung $f : V \to T$, so dass alle Studierenden einen überschneidungsfreien Stundenplan haben, also

$$(s, v_1) \in R \land (s, v_2) \in R \land v_1 \neq v_2 \implies f(v_1) \neq f(v_2) .$$

(a) Zeigen Sie, dass STUNDENPLAN in NP liegt.

(b) Zeigen Sie, dass STUNDENPLAN NP-schwer ist, indem sie eine polynomielle Reduktion von 3COL auf STUNDENPLAN angeben. (Wir werden in der Vorlesung noch lernen, dass 3COL NP-schwer ist.)

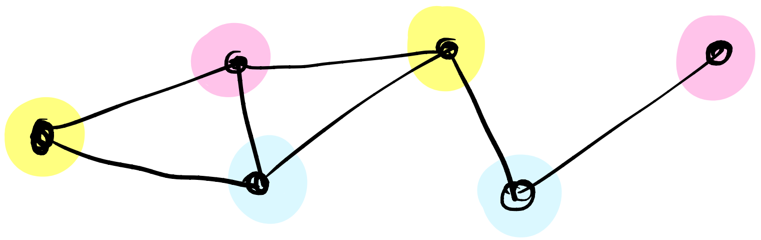
a) Sei f ein überschneidungsfreien SP. Der folgende Algorithmus verifiziert die Richtigkeit:

for each $s \in S$:
  for each $(v_1, v_2) \in V \times V$:
    if $((s, v_1) \in R \land (s, v_2) \in R \land v_1 \neq v_2)$:
      if $\underbrace{f(v_1)}_{\text{Termin von } v_1} = f(v_2)$:
        return false

return true

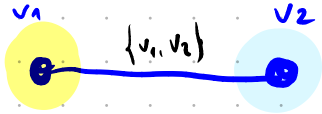
Offenbar ist das polynomiell: Laufzeit

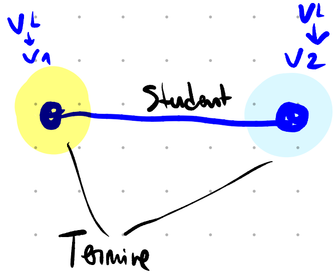
$$O(|S| \times |V|^3)$$



3COL $\leq_p$ SP mit Reduktion $\underline{\underline{r}}$

Korrektheit von r: $G = (V, E) \in$ 3COL $\longleftrightarrow$ $r(G) \in$ SP



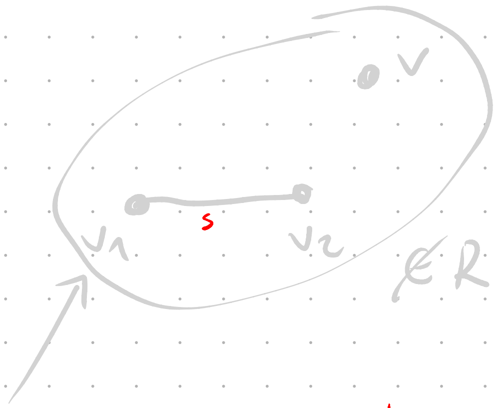


SP $\quad (s,v_1)\in R \wedge (s,v_2)\in R \wedge v_1\neq v_2 \implies f(v_1)\neq f(v_2)\,.$

3COL $\quad \exists c: \underline{V} \longrightarrow \{1,2,3\}.\ \forall \{v_1, v_2\}\in E.\ v_1 \neq v_2 \implies c(v_1)\neq c(v_2)$

$G=(V,E) \quad \underset{r}{\rightsquigarrow} \quad (S,\ V',\ T,\ R)$

$$\left.\begin{aligned} V' &:= V \\ S &:= E \\ T &:= \{1,2,3\} \\ R &:= \{(\{v_1,v_2\},\ v)\in S\times V \mid v\in\{v_1,v_2\}\} \\ &\subseteq S\times V \end{aligned}\right\} \ \text{I Angabe von } r$$



II $\quad \underbrace{r \text{ in Polynomiellen Zeit berechenbar}}$

III Correktheit von r $G=(V,E) \in 3COL \longleftrightarrow r(G) \in SP$

$= (S, V', T, R)$

"$\Rightarrow$" Angenommen, $G=(V,E) \in 3COL$. D.h. es gibt eine Färbung

$c: V \to \{1,2,3\}$, sodass (*) $\forall \{v_1, v_2\} \in E.\ v_1 \neq v_2 \longrightarrow c(v_1) \neq c(v_2)$.

Unser Ziel: ein üb.sch.freien SP $f: V' \to T$

$V \to \{1,2,3\}$

Ich behaupte, $f := c$ ist ein solcher SP.

Beweis: (Ziel: $(s, v_1) \in R \wedge (s, v_2) \in R \wedge v_1 \neq v_2 \implies f(v_1) \neq f(v_2)$.)

Angenommen, $(s, v_1) \in R \wedge (s, v_2) \in R \wedge v_1 \neq v_2$ beliebig.

Wegen Def. von S und R gilt

$= E$

$s = \{v, v'\}$ und $v_1 \in s$, $v_2 \in s$.

Daraus folgt $s = \{v_1, v_2\}$ (weil $v_1 \neq v_2$)

Aus (*) folgern wir, dass

$c(v_1) \neq c(v_2)$

gdw. $f(v_1) \neq f(v_2)$.

"$\Leftarrow$" Angenommen $f: V' \to T$ ist ein üb.sch. freien SP. Wir konstruieren eine 3-Färbung $c := f$ für den Graphen G.

$V' = V$, $T = \{1,2,3\}$

Beweis, dass c eine passende 3-Färbung:

(Ziel: $\forall \{v_1, v_2\} \in E.\ v_1 \neq v_2 \longrightarrow c(v_1) \neq c(v_2)$)

(*) (Ann: $(s, v_1) \in R$, $(s, v_2) \in R$, $v_1 \neq v_2 \Longrightarrow f(v_1) \neq f(v_2)$)

Seien $v_1 \neq v_2$ beliebig mit $\{v_1, v_2\} \in E$.

(Def. R) Daraus folgt: $(\{v_1, v_2\}, v_1) \in R \ \wedge\ (\{v_1, v_2\}, v_2) \in R$.

Somit folgt aus (*)

$$f(v_1) \neq f(v_2)$$

was gdw. gilt

$$c(v_1) \neq c(v_2)$$

$\square$

Übungsaufgabe Ü12.4. (*SAT-Varianten*)

Wir betrachten verschiedene Varianten von SAT, die auch NP-vollständig sind.

In der Vorlesung werden wir das NP-vollständige Problem 3KNF-SAT kennen lernen. Dies führen wir hier vorab schon einmal ein, da es als Einschränkung von SAT die Reduktion leichter macht.
Sei X eine Menge an Variablen. Die Menge der *Literale* ist $L := X \cup \{\neg x : x \in X\}$, enthält also alle Variablen und Negationen von Variablen. Eine *k-Klausel* ist eine Formel der Form $l_1 \vee l_2 \vee ... \vee l_k$ mit $l_1, ..., l_k \in L$, und eine Formel F ist in *k-konjunktiver Normalform (k-KNF)*, wenn $F = F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_n$, wobei $F_1, ..., F_n$ jeweils k-Klauseln sind. Das Problem 3KNF-SAT ist nun

- **Eingabe**: Aussagenlogische Formel F in 3-KNF
- **Frage**: Ist F erfüllbar?

Ein Beispiel für eine Instanz wäre also $(\neg x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \neg z)$.

$$\left.\begin{array}{l} (a \vee b \vee c) \\ \wedge\ (\neg a \vee x \vee \neg c) \\ \wedge\ (a \vee y \vee b) \end{array}\right\} \text{Klauseln}$$

Wir betrachten zusätzlich zu 3KNF-SAT noch weitere Varianten von SAT, die auch NP-vollständig sind. Zeigen Sie diese NP-Vollständigkeit, indem Sie für jede Variante X eine Reduktion 3KNF-SAT $\leq_p X$ angeben und $X \in$ NP zeigen.

(a) 3-OCC-KNF-SAT:

- **Eingabe**: Eine Formel F in KNF, bei der jede Variable höchstens dreimal auftritt.

- **Frage**: Ist F erfüllbar?

3CNF-SAT $\le_p$ ITE-SAT

(b) Wir betrachten den ITE-Operator mit der Semantik ITE$(x, y, z) := (x \to y) \land (\neg x \to z)$. Eine ITE-Formel genügt der folgenden Grammatik:

$$F \to \mathsf{ITE}(F, F, F) \mid x \mid \mathsf{true} \mid \mathsf{false} \qquad \text{für Variablen } x \in \mathcal{V}$$

ITE-SAT:

- **Eingabe**: Eine ITE-Formel F.
- **Frage**: Ist F erfüllbar?

x : bool

$\neg x \leadsto$ ITE(x, false, true)

$x \lor y \leadsto$ ITE(x, true, y)

$x \land y \leadsto$ ITE(x, y, false)

$\underbrace{\neg x \lor (\neg y \lor \neg z)}$ $\leadsto$ ITE(ITE(x, F, T), true, ITE(ITE(y, F, T), true, ITE(z, F, T)))

Formeln vergrößert um konstanten Faktor

Korrektheit:

zeige $\neg x$ erfüllbar gdw $ITE(x, true, false)$ erfüllbar

$x \vee y$ " —— " —— "

$x \wedge y$ " —— " —— "

$$ITE(x, false, true) \equiv (x \to false) \wedge (\neg x \to true)$$
$$\equiv (\neg x \vee false) \wedge (\neg(\neg x) \vee true)$$
$$\equiv \neg x \wedge true$$
$$\equiv \neg x$$

$$\underline{ITE(x, y, false)} \equiv (x \to y) \wedge (\neg x \to false)$$
$$\equiv (\neg x \vee y) \wedge (x \vee false)$$
$$\equiv (\neg x \vee y) \wedge x = x \wedge y$$

Übungsaufgabe Ü12.5. (*ZOLP*)

Das *Zero-One-Linear-Program* (ZOLP) Problem sei wie folgt definiert:

- **Eingabe**: Ein System von linearen Ungleichungen

$$\begin{aligned} b_1 &\leq a_{1,1}y_1 + \ldots + a_{1,n}y_n \\ b_2 &\leq a_{2,1}y_1 + \ldots + a_{2,n}y_n \\ &\vdots \\ b_m &\leq a_{m,1}y_1 + \ldots + a_{m,n}y_n \end{aligned}$$

  mit $a_{i,j}, b_i \in \mathbb{Z}$ und $m, n > 0$.

- **Frage**: Gibt es für die Variablen $y_1, \ldots, y_n$ Werte aus $\{0, 1\}$, sodass alle Ungleichungen gleichzeitig erfüllt sind?

$3y_1 + y_2 \geq -1$

$2y_1 + 4y_2 \geq 0$

Zeigen Sie, dass das Entscheidungsproblem ZOLP NP-schwer ist. Geben Sie hierzu eine geeignete Reduktion von 3KNF-SAT auf ZOLP an und beschreiben Sie **zusätzlich** das Vorgehen anhand folgender Formel:

$$(\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4) \longrightarrow \begin{aligned} &(1 - y_1) + y_2 + y_3 \geq 1 \\ &y_1 + (1 - x_3) + y_4 \geq 1 \end{aligned}$$

Den Korrektheitsbeweis müssen Sie nicht ausformulieren.

$(x_1 \vee x_2) \rightsquigarrow y_1 + y_2 \geq 1$

$1 \; (\neg x_1 \vee x_2) \longrightarrow (1 - y_1) + y_2 \geq 1$