Prof. Javier Esparza
Philipp Czerner, Martin Helfrich

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2022 – Übungsblatt 3

- Das Übungsblatt ist in zwei Teile gegliedert: den Vorbereitungsteil, den Sie vor der Übung selbstständig bearbeiten sollen, und den Übungs-/Nachbereitungsteil, der Aufgaben enthält, die in der Übung besprochen werden und von Ihnen anschließend zur Nachbereitung verwendet werden können.
- Das ist nicht das Hausaufgabenblatt! Die Hausaufgaben finden Sie auf einem separaten Blatt.

Vorbereitung (→ vor der Übung selbständig zu bearbeiten)

Individualaufgabe Ü3.1. (*Wichtige Begriffe*)

Überprüfen Sie, dass Sie die folgenden Begriffe oder Notationen korrekt definieren können.

- Wortproblem
- Leerheitsproblem
- Endlichkeitsproblem
- Äquivalenzproblem
- Ardens Lemma
- Pumping Lemma

Individualaufgabe Ü3.2. (*Kahoot*)

Falls Sie eines der Kahoots aus der Vorlesung verpasst haben: Spielen Sie es jetzt! Link. Um ein Kahoot zu starten, gehen Sie auf „Play as guest“, dann „Continue as guest“ und „Classic mode“.

Individualaufgabe Ü3.3. (*Automata Tutor: Pumping Lemma Game*)

~~Lösen Sie die Aufgaben Ü3.3 (a–b) auf Automata Tutor.~~ [1]

Update: Aktuell hat AT anscheinend Probleme mit diesem Aufgabentyp. Bis wir das beheben können, haben wir die Aufgaben deaktiviert.

Individualaufgabe Ü3.4. (*Strukturelle Induktion*)

Geben Sie eine rekursive Prozedur $empty(r)$ an, die für einen gegebenen regulären Ausdruck r entscheidet, ob $L(r) = \emptyset$. Für Ihre Definition sollten Sie das folgende Gerüst verwenden:

- $empty(\emptyset) =$ true
- $empty(a) =$ false
- $empty(\epsilon) =$ false
- $empty(\alpha\beta) =$ empty(α) ∨ empty(β)
- $empty(\alpha \mid \beta) =$ empty(α) ∧ empty(β)
- $empty(\alpha^*) =$ false

Beweisen Sie mittels struktureller Induktion, dass Ihre Definition korrekt ist.

Zu dieser Aufgabe gibt es eine Video-Lösung: rekursive Prozedur, strukturelle Induktion.

[1] Wenn Sie Automata Tutor noch nicht verwendet haben, folgen Sie erst den Schritten in Ü1.2, um sich richtig zu registrieren.

Übung und Nachbereitung

Übungsaufgabe Ü3.5. (*Pumping Lemma*)

Beweisen Sie für jede der folgenden Sprachen mithilfe des Pumping Lemmas, dass sie *nicht* regulär sind.

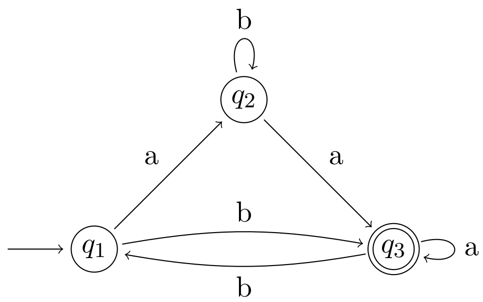
(a) $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = w^R\}$

(b) $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w|_0 \geq |w|_1\}$ $|w|_0$ = "Anzahl von 0 in w"

(c) $L_5 = \{a^{2^i} \mid i \geq 0\}$

Übungsaufgabe Ü3.6. (*Ardens Lemma*)

Gegeben sei folgender Automat $M = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta, q_1, \{q_3\})$:



Berechnen Sie mit dem Gauß-Verfahren und Ardens Lemma einen regulären Ausdruck α mit $L(\alpha) = L(M)$.

Übungsaufgabe Ü3.7. (*Strukturelle Induktion: Klausuraufgabe von 2020*)

(a) Sei Σ ein Alphabet. Geben Sie die Rekursionsgleichungen für eine rekursive Prozedur contains(a, r) an, die für einen Buchstaben $a \in \Sigma$ und regulären Ausdruck r berechnet, ob a in jedem Wort aus $L(r)$ vorkommt.
Es soll also für alle $w \in L(r)$ gelten, dass $(\exists u, v \in \Sigma^* \,.\, w = uav) =: P(w)$.

(b) Beweisen Sie mit Hilfe von struktureller Induktion, dass ihre Prozedur korrekt ist. Sie dürfen dabei den Konkatenationsfall (d.h. $r = r_1 r_2$) weglassen. Kennzeichnen Sie dabei die Induktionshypothesen und deren Anwendungen deutlich.

L regulär $\Longrightarrow$ PL gilt

Sei L regulär. Dann gibt es eine Zahl n, sodass

$$\forall z \in L.\ |z| \geq n$$

$$\Rightarrow \big(\exists u, v, w \in \Sigma^*.\ \text{(1)}\ z = uvw$$
$$\land\ \text{(2)}\ |uv| \leq n$$
$$\land\ \text{(3)}\ v \neq \varepsilon$$
$$\land\ \text{(4)}\ (\forall i \in \mathbb{N}_0.\ uv^iw \in L)\big)$$

Finde $z \in L$ mit $|z| \geq n$, sodass für alle Zerleg. $z = uvw$, es gilt zwar:

$$|uv| \leq n$$

und $v \neq \varepsilon$

aber nicht $(\forall i \in \mathbb{N}_0.\ uv^iw \in L)$

$$\Longleftrightarrow \exists i \in \mathbb{N}_0.\ uv^iw \notin L$$

$L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = w^R\}$

Angenommen, L_1 wäre regulär mit PL-Zahl n.

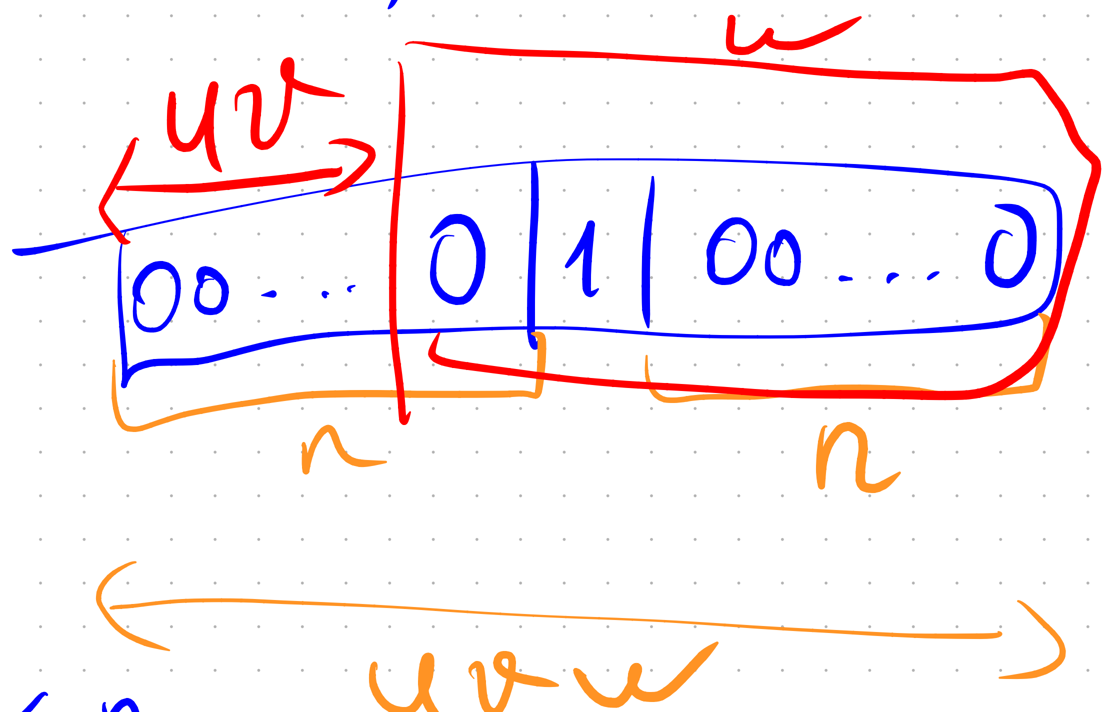
Sei $z := 0^n 1 0^n$. Offensichtlich gilt $z = z^R$, d.h. $z \in L$.

Nun seien $u, v, w \in \{0,1\}^*$ beliebig mit:

$z = uvw$,

$|uv| \le n$

und $v \ne \varepsilon$.



Daraus folgt: $uv = 0^k$ für ein $k \le n$.

Somit folgt auch, dass $v = 0^i$ mit $0 < i \le k$.

w ist also gleich $\underbrace{0^{n-k} 1 0^n}$.

Es muss laut dem PL gelten:

$$L_1 \ni uv^0w = \underbrace{0^{k-i}}_{u}\underbrace{(0^i)^0}_{v^0}\underbrace{0^{n-k} 1 0^n}_{w}$$

$$= 0^{k-i} 0^{n-k} 1 0^n = 0^{n-i} 1 0^n.$$

Offensichtlich gilt $(0^{n-i}10^n)^R = 0^n10^{n-i} \neq 0^{n-i}10^n$.

Somit ist $uv^0w \notin L_1$. $\lightning$

D.h. L_1 ist nicht regulär

$L_2 = \{ w \in \{0,1\}^* \mid |w|_0 \geq |w|_1 \}$

Ang. L_2 wäre regulär mit PL-Zahl n.

Sei $z = 1^n 0^n$ und $|z| \geq n$. Seien $u, v, w \in \Sigma^*$ beliebig mit $z = uvw$.

Es muss gelten: $|uv| \leq n$ und $v \neq \varepsilon$. D.h.

$u = 1^i$, $v = 1^j$ mit $i + j \leq n$ und $\boxed{j > 0}$.

Wir betrachten uv^2w. Es gilt also

$$|uv^2w|_1 = \underbrace{|\overset{z}{uvw}|_1}_{n} + \underbrace{|v|_1}_{>0}$$

$$= n + i$$

$$> n$$

aber $|uv^2w|_0 = |\overset{z}{uvw}|_0 + \underline{|v|_0}$

$$= n + 0$$

$$= n$$

Also gilt $uv^2w \notin L_2$. Das ist ein $\lightning$

Schlußendlich ist L_2 nicht regulär

Strukturelle Induktion

- 0 ist eine nat. Zahl.
- Wenn $n \in \mathbb{N}$, dann auch $s(n) \in \mathbb{N}$.

- $\underline{\emptyset} \in RE$
- $\underline{\epsilon} \in RE$
- $\underline{a} \in RE$ (für alle $a \in \Sigma$)
- Wenn $r_1, r_2 \in RE$, dann $r_1 r_2 \in RE$
- Wenn $r_1, r_2 \in RE$, dann $r_1 | r_2 \in RE$
- Wenn $r \in RE$, dann $r^* \in RE$

$\text{contains}(a, \underline{\emptyset}) = \text{true}$

$\text{contains}(a, \underline{\varepsilon}) = \text{false}$

$\text{contains}(a, \underline{x}) = (x = a)$

$\text{contains}(a, r_1 r_2) = \text{contains}(a, r_1) \lor \text{contains}(a, r_2)$

$\text{contains}(a, r_1 | r_2) = \text{contains}(a, r_1) \land \text{contains}(a, r_2)$

$\text{contains}(a, r^*) = \text{false}$

---

z.Z.: Sei r ein RE. Zeige: $P(w) := (\exists u, v \in \Sigma^*.\ w = uav)$

$$\text{contains}(a, r) \iff (\forall w \in L(r).\ \overline{P}(w))$$

Induktionsbasis:

Fall $r = \underline{\emptyset}$: Es gilt

$$(\forall w \in L(\underline{\emptyset}).\ \overline{P}(w))$$
$$\iff (\forall w \in \{\}.\ \overline{P}(w))$$
$$\iff \text{true}$$
$$\overset{(\text{Def.})}{\iff} \text{contains}(a, r)$$

Fall $r = \underline{\varepsilon}$:

$$(\forall w \in L(\underline{\varepsilon}).\ \overline{P}(w))$$
$$\iff (\forall w \in \{\varepsilon\}.\ \overline{P}(w))$$
$$\iff \overline{P}(\varepsilon)$$
$$\iff \text{false}$$
$$\iff \text{contains}(a, \underline{\varepsilon})$$

Fall $r = \underline{x}$: Es gilt

$$(\forall w \in L(\underline{x}).\ P(w))$$
$$\Leftrightarrow (\forall w \in \{x\}.\ P(w))$$
$$\Leftrightarrow P(x)$$
$$\Leftrightarrow (x = a)$$
$$\Leftrightarrow contains(a, \underline{x})$$

Induktionsschritt:

IH: 1) $contains(a, r_1) \Leftrightarrow (\forall w \in L(r_1).\ P(w))$

2) $contains(a, r_2) \Leftrightarrow (\forall w \in L(r_2).\ P(w))$

Jetzt ist $contains(a, r_1 | r_2) \Leftrightarrow (\forall w \in L(r_1 | r_2).\ P(w))$ zu zeigen.

$$(\forall w \in L(r_1 | r_2).\ P(w))$$
$$\Leftrightarrow (\forall w \in L(r_1) \cup L(r_2).\ P(w))$$
$$\Leftrightarrow (\forall w \in L(r_1).\ P(w)) \wedge (\forall w \in L(r_2).\ P(w))$$
$$\overset{(IH)}{\Leftrightarrow} contains(a, r_1) \wedge contains(a, r_2)$$
$$\overset{Def.}{\Leftrightarrow} contains(a, r_1 | r_2)$$

Es ist zu zeigen: $contains(a, r^*) \iff (\forall w \in L(r^*).\ P(w))$

angenommen dass: $contains(a, r) \iff (\underline{\qquad\qquad})$

(IH):

$$(\forall w \in L(r^*).\ P(w))$$

$$\iff (\forall w \in (L(r))^*.\ P(w))$$

$$\iff (\forall w \in L(r)^+.\ P(w))$$

$$\land (\forall w \in \{\varepsilon\}.\ P(w))$$

$$\iff (\underline{\qquad\qquad}) \land (P(\varepsilon))$$

$$\iff (\underline{\qquad\qquad}) \land false$$

$$\iff false$$

$$\overset{(def)}{\iff} contains(a, r^*)$$

$L^* = \{\varepsilon\} \cup L^+$

bzw. $\{\varepsilon\} \subseteq L^*$

$L_1 = \{ w \in \{0,1\}^* \mid w = w^R \}$

Nehme an: L_1 regulär.

Sei n eine PL-Zahl und sei $z := 0^n 1 0^n \in L$. Es gilt $|z| \geq n$. Seien u, v, w beliebig s.d. $z = uvw$ und s.d. $|uv| \leq n$ und $v \neq \varepsilon$. Es muss ja gelten:

$$uv = 0^i$$

und $w = 0^{n-i} 1 0^n$

für $i \leq n$.

Da $v \neq \varepsilon$, gilt $v = 0^k$ für $0 < k \leq i$. Also gilt nach PL

$$uv^0w = 0^{i-k} 1 0^n \in L.$$

Aber: das ist ein Widerspruch, denn

$$0^{i-k} 1 0^n \neq (0^{i-k} 1 0^n)^R$$
$$= 0^n 1 0^{i-k}$$

wegen $i-k \neq n$.

$n=3$ $\qquad |uv| \leq ?$

$\underbrace{0\cancel{00}}_{v}1000$

$\rightsquigarrow$ $01000 \notin L$.