Prof. Javier Esparza
Philipp Czerner, Martin Helfrich

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2022 – Übungsblatt 12

Individualaufgabe Ü12.1. (*Wichtige Begriffe*)

Überprüfen Sie, dass Sie die folgenden Begriffe oder Notationen korrekt definieren können.

- $time_M(w)$ und $ntime_M(w)$
- $TIME(f(n))$ und $NTIME(f(n))$
- Landau-Notation (oder auch $\mathcal{O}$-Notation): $\mathcal{O}(n), \mathcal{O}(2^n), ...$
- P und NP
- P $\stackrel{?}{=}$ NP
- NP-hart (oder auch auch: “NP-schwer”)
- NP-vollständig
- Zertifikat und polynomiell beschränkter Verifikator
- polynomielle Reduktion
- $A \leq_p B$ (sprich: *"A ist polynomiell reduzierbar auf B"*)
- Die Probleme[1]: HAMILTON, RUCKSACK, SAT, 3KNF-SAT, FÄRBBARKEIT (COL), 3COL, MENGENÜBERDECKUNG (MÜ), CLIQUE, PARTITION, BIN PACKING, TRAVELLING SALESMAN (TSP)

[1] Wir lernen viele dieser Probleme erst in den kommenden Vorlesungen kennen. Sie müssen nicht schon zum jetzigen Zeitpunkt alle Probleme kennen / verstehen.

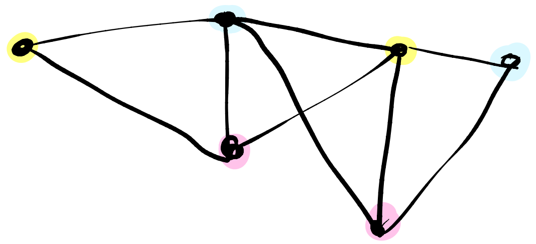
Individualaufgabe Ü12.2. (*TSP ist NP-vollständig*)

Sie kennen bereits das Problem HAMILTON $:= \{G \mid G$ enthält einen Hamiltonkreis$\}$. Dieses Problem ist **NP**-vollständig. Zeigen Sie nun, dass das Travelling-Salesman-Problem (TSP) ebenfalls **NP**-vollständig ist.

TSP:

- Eingabe: $n \times n$ Matrix M mit $M_{i,j} \in \mathbb{N}$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.
- Frage: Gibt es eine "Rundreise" der Länge $\leq k$.

Eine Rundreise ist eine Permutation π von $[1; n]$, also ein einfacher Kreis, der jede Insel einmal enthält. Die Länge der Rundreise ist die Summe der Kosten der einzelnen Reisen, also $\Sigma_{i=1}^{n} M_{\pi_i, \pi_j}$ (dabei ist π_i der i-te Eintrag der Permutation, beginnend bei 0, und π_j ist der Eintrag für die nächste Insel, also $j = (i + 1)\%n$).



Übungsaufgabe Ü12.3. (*Stundenplan*)

In dieser Aufgabe betrachten wir das STUNDENPLAN-Problem:

- **Eingabe**: Endliche Mengen S (Studierende), V (Vorlesungen) und T (Termine) und eine Relation $R \subseteq S \times V$. Dabei bedeutet $(s, v) \in R$, dass s die Vorlesung v besuchen möchte.
- **Frage**: Gibt es eine Abbildung $f : V \to T$, so dass alle Studierenden einen überschneidungsfreien Stundenplan haben, also

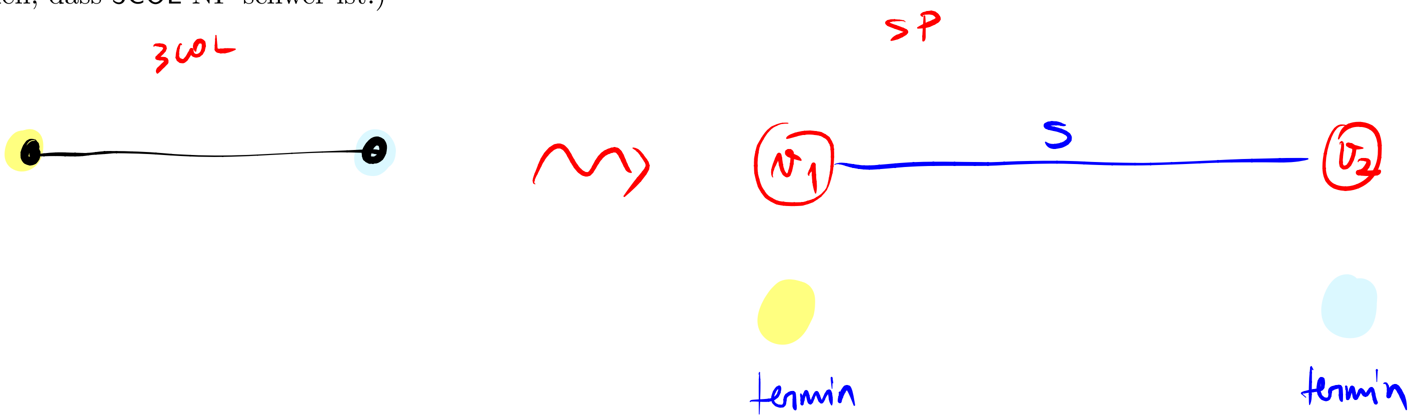
$$(s, v_1) \in R \wedge (s, v_2) \in R \wedge v_1 \neq v_2 \implies f(v_1) \neq f(v_2) \; .$$

(a) Zeigen Sie, dass STUNDENPLAN in NP liegt.

(b) Zeigen Sie, dass STUNDENPLAN NP-schwer ist, indem sie eine polynomielle Reduktion von 3COL auf STUNDENPLAN angeben. (Wir werden in der Vorlesung noch lernen, dass 3COL NP-schwer ist.)

a) Given a schedule f (say, as a list of length $|V|$ of appointments), check for every student and every lecture taken by that student, that no two lectures have the same appointment. Doable in

$O(|S| \times |V|^2)$ fine.

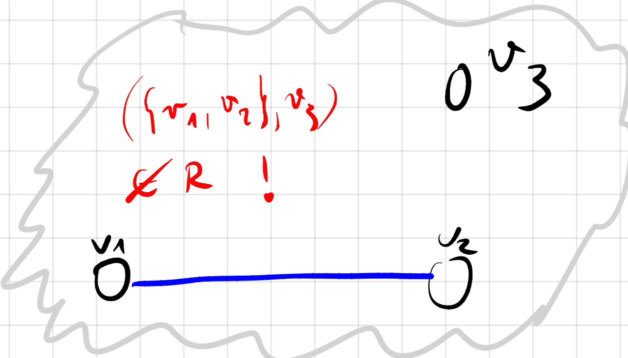


b) To show: 3COL $\leq_p$ STUNDENPLAN

// Given instance $G = (V, E)$, reduce to STUNDENPLAN instance (S, V', T, R)

such that

G is 3-col **iff** a (S, V', T, R) has conflict-free schedule



$S := E$

$V' := V$

$T := \{1, 2, 3\}$

$R := \{(\{v_1, v_2\}, v) \in S \times V \mid v \in \{v_1, v_2\}\}$

$\subseteq S \times V$

Certainly, constructing the instance takes polynomial time $(\mathcal{O}(|V| \times |E|))$.

Now we show the iff.

"$\Rightarrow$" G is 3-col, with $c: V \to \{1,2,3\}$. (i.e. $\forall \{v_1, v_2\} \in E.\ c(v) \neq c(v'))$

$(c: V' \to T)$

To show: c is a conflict-free schedule.

$(s, v_1) \in R \wedge (s, v_2) \in R \wedge v_1 \neq v_2 \implies f(v_1) \neq f(v_2)$.

Let ① $(\{v_1, v_2\}, v) \in R$ and ② $(\{v_1, v_2\}, v') \in R$ arbitrary with $v \neq v'$. We claim: $c(v) \neq c(v')$. [From ① & ② we have $v \in \{v_1, v_2\}$ and $v' \in \{v_1, v_2\}$. Since $V \neq V'$, it must be (WLOG) $v = v_1$, $v' = v_2$.] Since $\{v, v'\} \in E$ $c(v) \neq c(v')$.

$\square$

"$\Leftarrow$" Let $f: V' \to T$ be the conflict-free schedule for the (S, V', T, R) instance with the graph $G = (V, E)$. We need to show:

i) $\forall (v_1, v_2) \in E.\ v_1 \neq v_2 \implies f(v_1) \neq f(v_2)$

ii) $|\text{range}(f)| = 3$

Let $v_1 \neq v_2 \in V$ arbitrary with $\{v_1, v_2\} \in E$. By definition of V' and R, it holds $(\{v_1, v_2\}, v_1) \in R$ and $(\{v_1, v_2\}, v_2) \in R$. By definition of f we have $f(v_1) \neq f(v_2)$. So we're done with i)

Obviously, since $T = \{1,2,3\}$, $|\text{range}(f)| = 3$. So ii) ✓

$\square$

Übungsaufgabe Ü12.4. (*SAT-Varianten*)

Wir betrachten verschiedene Varianten von SAT, die auch NP-vollständig sind.

In der Vorlesung werden wir das NP-vollständige Problem 3KNF-SAT kennen lernen. Dies führen wir hier vorab schon einmal ein, da es als Einschränkung von SAT die Reduktion leichter macht.
Sei X eine Menge an Variablen. Die Menge der *Literale* ist $L := X \cup \{\neg x : x \in X\}$, enthält also alle Variablen und Negationen von Variablen. Eine *k-Klausel* ist eine Formel der Form $l_1 \vee l_2 \vee ... \vee l_k$ mit $l_1, ..., l_k \in L$, und eine Formel F ist in *k-konjunktiver Normalform (k-KNF)*, wenn $F = F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_n$, wobei $F_1, ..., F_n$ jeweils k-Klauseln sind. Das Problem 3KNF-SAT ist nun

- **Eingabe**: Aussagenlogische Formel F in 3-KNF
- **Frage**: Ist F erfüllbar?

Ein Beispiel für eine Instanz wäre also $(\neg x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \neg z)$.

Wir betrachten zusätzlich zu 3KNF-SAT noch weitere Varianten von SAT, die auch NP-vollständig sind. Zeigen Sie diese NP-Vollständigkeit, indem Sie für jede Variante X eine Reduktion 3KNF-SAT $\leq_p X$ angeben und $X \in$ NP zeigen.

(a) 3-OCC-KNF-SAT:

- **Eingabe**: Eine Formel F in KNF, bei der jede Variable höchstens dreimal auftritt.

3-KNF $(a \vee b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee d \vee c)$

3-OCC-KNF $(a \vee b \vee c \vee d) \wedge (\neg d \vee c)$

$(\neg x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \neg z)$.

$(\neg x_1 \vee y_1 \vee z_1) \wedge (x_2 \vee \neg y_2 \vee z_2) \wedge (x_3 \vee y_3 \vee \neg z_3) \wedge$

I want to force

$x_1 \leftrightarrow x_2$

$x_2 \leftrightarrow x_3$

$x_1 \leftrightarrow x_3$

$\Rightarrow$ $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3$

$(\neg x_1 \vee x_2)$

$\wedge (\neg x_2 \vee x_3)$

$\wedge (\neg x_3 \vee x_1)$

Formally: assume vars $\{x_1, ..., x_n\}$

$K_1, ..., K_n$ $(F = K_1 \wedge ... \wedge K_n)$

$K_i = \{L_{i1}, L_{i2}, L_{i3}\}$

$\neg x \quad y \quad z$

$\underset{\text{reduction}}{f}(L_{i,j}) = \begin{cases} x_{k,i} & \text{if } L_{i,j} = x_k \\ \neg x_{k,i} & \text{if } L_{i,j} = \neg x_k \end{cases}$

- **Frage**: Ist F erfüllbar?

$$f(K_i) = \bigvee_{j=1}^{3} f(L_{i,j})$$

$$f(F) = \bigwedge_{i=1}^{n} f(K_i)$$

$$\wedge \bigwedge_{k=1}^{v} \bigwedge_{i=1}^{n} \underbrace{(\neg x_{k,i} \vee x_{k,\underbrace{i+1}_{\text{mod addition}}})}_{x_{k,i} \rightarrow x_{k,i+1}}$$

To be shown:

$$\boxed{\begin{array}{l} F \text{ is sat.} \\ \Leftrightarrow f(F) \text{ is sat.} \end{array}}$$

"$\Rightarrow$" Let σ be Belegung with $\sigma(F) = 1$.

Convert it to Belegung σ' s.t. $\sigma'(f(F)) = 1$

(b) Wir betrachten den ITE-Operator mit der Semantik $\mathsf{ITE}(x, y, z) := (x \to y) \wedge (\neg x \to z)$. Eine ITE-Formel genügt der folgenden Grammatik:

$$F \to \mathsf{ITE}(F, F, F) \mid x \mid \mathsf{true} \mid \mathsf{false} \qquad \text{für Variablen } x \in \mathcal{V}$$

ITE-SAT:

- **Eingabe**: Eine ITE-Formel F.
- **Frage**: Ist F erfüllbar?

$(\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

$1 \leq (1-y_1) + y_2 + y_3$

$1 \leq y_1 + (1-y_3) + y_4$

Übungsaufgabe Ü12.5. (*ZOLP*)

Das *Zero-One-Linear-Program* (ZOLP) Problem sei wie folgt definiert:

- **Eingabe**: Ein System von linearen Ungleichungen

$$\begin{aligned} b_1 &\leq a_{1,1}y_1 + \ldots + a_{1,n}y_n \\ b_2 &\leq a_{2,1}y_1 + \ldots + a_{2,n}y_n \\ &\vdots \\ b_m &\leq a_{m,1}y_1 + \ldots + a_{m,n}y_n \end{aligned}$$

$3 \leq 2\underbrace{y_1}_{=0} + 4\underbrace{y_2}_{=1} - 3\underbrace{y_3}_{=0}$

mit $a_{i,j}, b_i \in \mathbb{Z}$ und $m, n > 0$.

- **Frage**: Gibt es für die Variablen $y_1, \ldots, y_n$ Werte aus $\{0, 1\}$, sodass alle Ungleichungen gleichzeitig erfüllt sind?

If σ is your Belegung, then

y_i "$=$" $\sigma(x_i)$

Zeigen Sie, dass das Entscheidungsproblem ZOLP NP-schwer ist. Geben Sie hierzu eine geeignete Reduktion von 3KNF-SAT auf ZOLP an und beschreiben Sie **zusätzlich** das Vorgehen anhand folgender Formel:

$$(\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$$

Den Korrektheitsbeweis müssen Sie nicht ausformulieren.

$a \vee b$

$\sigma(a) + \sigma(b) \geq 1$

$a \wedge b$

$\sigma(a) + \sigma(b) \geq 2$

a

$\sigma(a) \geq 1$

$\neg a$

$(1 - \sigma(a)) \geq 1$