Prof. Javier Esparza
Philipp Czerner, Martin Helfrich

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2022 – Übungsblatt 11

$\mathcal{H}_{NEQ} = \{ w_1 \# w_2 : w_1, w_2 \in \{0,1\}^* \wedge \forall x \in \Sigma^* : M_{w_1}[x]\downarrow \Leftrightarrow \neg M_{w_2}[x]\downarrow \}$

Übungsaufgabe Ü11.4. (*Überblick: Entscheidbarkeit*)

Vervollständigen Sie das folgende Diagramm.

(a) Fügen Sie die Begriffe „entscheidbar“, „unentscheidbar“, „semi-entscheidbar“, „rekursiv aufzählbar“, „co-semi-entscheidbar“[1] und „nulli-entscheidbar“[2] sinnvoll zum Diagramm hinzu.

(b) Sei $\mathcal{V}_f = \{w \mid \varphi_w = f\}$ für eine totale berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
Ordnen Sie diese Beispiel-Probleme richtig zu: $\{x \in \mathbb{N} \mid x = f(1)\}$, $\mathcal{H}$, $\overline{\mathcal{H}}$, $\mathcal{H}_0$, $\overline{\mathcal{H}_0}$, $\mathcal{H}_{\Sigma^*}$, $\overline{\mathcal{H}_{\Sigma^*}}$, $\mathcal{K}$, $\overline{\mathcal{K}}$, $\mathcal{H}_{NEQ}$, $\overline{\mathcal{H}_{NEQ}}$, PCP, $\overline{\text{PCP}}$, CFG Äquivalenz, $\mathcal{V}_f$, $\overline{\mathcal{V}_f}$ und „alle Sprachen $L \in P$“

Wenn $x \notin A$ / Wenn $x \in A$	terminiert (0)	terminiert nicht ($\perp$)
terminiert (1)	Beispiele: - - - entscheidbar	Beispiele: - - - semi-entscheidbar rekursiv aufzählbar
terminiert nicht ($\perp$)	co-semi-entscheidbar - - - Beispiele:	unentscheidbar nulli-entscheidbar - - - Beispiele:

[1] Eine Sprache L ist *co-semi-entscheidbar*, wenn es eine TM gibt, die 0 ausgibt wenn die Eingabe nicht in L ist und nicht terminiert wenn die Eingabe in L ist.

[2] Problem ist *nulli-entscheidbar*, wenn es nicht semi-entscheidbar ist und nicht co-semientscheidbar Problem ist.

$\mathcal{H}_{\Sigma^*} = \{ w : w \in \{0,1\}^* \wedge \forall x \in \Sigma^* : M_w[x]\downarrow \}$

$$\overline{H_{\Sigma^*}} = \{ w : w \in \{0,1\}^* \land \exists x \in \Sigma^* : M_w(x) \uparrow \}$$

Übungsaufgabe Ü11.3. (*Unentscheidbare Typ-2 Probleme*)

In der Vorlesung haben wir folgende Probleme für kontextfreie Grammatiken G_1, G_2 über einem Alphabet Σ kennengelernt:

$\langle 1 \rangle$ Ist $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?

$\langle 2 \rangle$ Ist $|L(G_1) \cap L(G_2)| < \infty$?

$\langle 3 \rangle$ Ist $L(G_1) \cap L(G_2)$ kontextfrei?

$\langle 4 \rangle$ Ist $L(G_1) \subseteq L(G_2)$?

$\langle 5 \rangle$ Ist $L(G_1) = L(G_2)$?

Von $\langle 1 \rangle$ wurde in der Vorlesung gezeigt, dass es unentscheidbar ist. In der Übung und den Hausaufgaben dieser Woche wollen wir auch die anderen Probleme behandeln. Zeigen Sie:

(a) $\langle 1 \rangle \leq \langle 2 \rangle$

(b) $\langle 4 \rangle \leq \langle 5 \rangle$

(c) $\langle 1 \rangle \leq \langle 3 \rangle$

(d) $\langle 1 \rangle \leq \langle 4 \rangle$

Hinweise: Zur Vereinfachung dürfen Sie $\Sigma = \{a, b\}$ jeweils für das zu reduzierenden Problem annehmen (ohne das Problem, auf das Sie reduzieren, einzuschränken).

$f(G_1, G_2) = (G_1', G_2')$ $\qquad$ $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset \Leftrightarrow L(G_1') \cap L(G_2')$ kontextfrei

$L(a^*)\{a^i b^i c^i : i \in \mathbb{N}\} = \{a^j b^i c^i : i,j \in \mathbb{N}\}$

$L = (L(G_1) \cap L(G_2))\{c^i d^i e^i : i \in \mathbb{N}^+\}$

$= L(G_1)\{c^j d^i e^i : i,j \in \mathbb{N}^+\} \cap L(G_2)\{c^i d^i e^j : i,j \in \mathbb{N}^+\} = L(G_1') \cap L(G_2')$

$w \in L(G_1) \cap L(G_2)$ $\qquad$ $L^{wc} = \{c^i d^i e^i : i \in \mathbb{N}^+\}$

Übungsaufgabe Ü11.5. (*Reductio ad absurdum*)

Sei $A := \{w \in \Sigma^* \mid \exists i \in \mathbb{N}_0.\ |w| = 5i + 3\}$ mit $\Sigma = \{a, b\}$. Erklären Sie, warum die angegebenen Funktionen keine Reduktionen gemäß Vorlesungsdefinition sind.

(a) Behauptung: $\mathcal{H}_0 \leq A$

Reduktion: Definiere $f : \mathcal{H}_0 \to A$ mit $f(w) := aaa$.

(b) Behauptung: $\mathcal{H}_0 \leq A$

Reduktion:

$$f(w) = \begin{cases} aaa & \text{falls } w \in \mathcal{H}_0 \\ b & \text{sonst} \end{cases}$$

(c) Behauptung: $A \leq \mathcal{H}_0$

Reduktion: f bildet jedes Element $x \in \Sigma^*$ auf die Kodierung einer TM M_x ab, die wie folgt definiert ist: Die TM M_x löscht die Eingabe und schreibt x aufs Band, bestimmt dann die Länge von x, zieht 3 ab und prüft anschließend, ob das Ergebnis durch 5 teilbar ist. Dementsprechend gibt die Maschine „Ja“(1) oder „Nein“(0) aus. →

(d) Behauptung: $\overline{\mathcal{H}_0} \leq \mathcal{H}_0$

Reduktion: f bildet jedes $w \in \{0,1\}^*$ auf die Kodierung $f(w)$ einer TM $M_{f(w)}$ ab, die $M_w[\epsilon]$ simuliert. Falls $M_w[\epsilon]$ hält, geht $M_{f(w)}$ in eine Endlosschleife. Falls $M_w[\epsilon]$ nicht hält, hält $M_{f(w)}$.

$w \in A \Leftrightarrow f(w) \in \mathcal{H}_0$

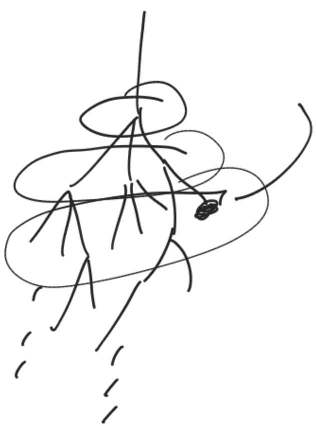
b $f(b) \in \mathcal{H}_0$

$\mathcal{H}_0 = \{w \in \{0,1\}^* : M_w[\varepsilon]\downarrow\}$

$\overline{\mathcal{H}_0} = \{w \in \{0,1\}^* : M_w[\varepsilon]\uparrow\}$

(e) Behauptung: $\mathcal{H}_{\Sigma^*} \leq \mathcal{H}_0$ mit $\mathcal{H}_{\Sigma^*} := \{w \in \{0,1\}^* \mid \forall x \in \Sigma^*.\ M_w[x]\downarrow\}$.

Reduktion: f bildet jedes $w \in \{0,1\}^*$ auf die Kodierung $f(w)$ einer TM $M_{f(w)}$ ab, die erst die Eingabe löscht, dann nichtdeterministisch $x \in \Sigma^*$ erzeugt und dann $M_w[x]$ simuliert.



$M_\omega[\varepsilon]\downarrow \wedge \forall x \in \Sigma^+ ; M_\omega[x]\uparrow$

$\omega \notin \mathcal{H}_{\Sigma^*}$ $\quad f(\omega) \in \mathcal{H}_0$