

## Einführung in die Theoretische Informatik

### Sommersemester 2022 – Übungsblatt 6

- Das Übungsblatt ist in zwei Teile gegliedert: den Vorbereitungsteil, den Sie vor der Übung selbstständig bearbeiten sollen, und den Übungs-/Nachbereitungsteil, der Aufgaben enthält, die in der Übung besprochen werden und von Ihnen anschließend zur Nachbereitung verwendet werden können.
- Das ist nicht das Hausaufgabenblatt! Die Hausaufgaben finden Sie auf einem separaten Blatt.

#### Vorbereitung ( $\rightarrow$ vor der Übung selbstständig zu bearbeiten)

##### Individualaufgabe Ü6.1. (Wichtige Begriffe)

Überprüfen Sie, dass Sie die folgenden Begriffe oder Notationen korrekt definieren können.

- nützlich, erzeugend, erreichbar (Symbole)
- Chomsky-Normalform
- Greibach-Normalform
- Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen
- Abschlusseigenschaften für kontextfreie Sprachen

##### Individualaufgabe Ü6.2. (Automata Tutor: “Contextfree Languages”)

Lösen Sie die Aufgaben **Ü6.2** (a–b) auf Automata Tutor.<sup>1</sup> **Tipp:** Für die Aufgabentypen diese Woche können Sie sich zum Üben weitere Aufgaben von AT generieren lassen. Klicken Sie dafür auf Home > My Autogenerated Problems und wählen Sie den Aufgabentyp und gewünschten Schwierigkeitsgrad.

##### Individualaufgabe Ü6.3. (Pumping-Lemma für Kontextfreie Sprachen)

Wir betrachten Pfeil-Sprachen über dem Alphabet  $\Sigma = \{\uparrow, \downarrow, \leftarrow, \rightarrow\}$ . Wir interpretieren dabei ein Wort  $w \in \Sigma^*$  als einen Pfad in einem 2D-Gitter.

- (a) Geben Sie eine formale Definition für die folgenden beiden Sprachen an:
  - Pfade, die in den Ursprung zurückkehren.
  - Pfade, die „in großer Kurve umkehren“ — beliebig weit nach rechts fahren, dann noch weiter entweder nach oben oder unten gehen und letztlich wieder umkehren und noch weiter nach links fahren. Diese Pfade enden dann links vom Ursprung.
- (b) Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen, dass diese Sprachen nicht kontextfrei sind

---

<sup>1</sup>Wenn Sie Automata Tutor noch nicht verwendet haben, folgen Sie erst den Schritten in Ü1.2, um sich richtig zu registrieren.

Induktion eng verbunden mit rekursiven Strukturen

(Liste, nat. Zahlen, Bäume, usw.)

Induktionsbasis: Fälle, die nicht aus kleineren Teilen bestehen. bzw. sie brauchen Infos über kleinere —> nicht

Induktions Schritt: IH wird eingesetzt

---

Wie sieht Induktion in  $L = L(G)$  aus?

$$L \subseteq L(G)$$

Ind. über  $|w| = \text{Länge} \Leftrightarrow$   
Wörter

$$L(G) \subseteq L$$

jedes  $w \in L(G)$  hat folgende

Ableitung

$$S \xrightarrow{*} w$$

$$S \xrightarrow{*} aA \mid bS \mid \epsilon$$

$$A \xrightarrow{*} a$$

bbaa

Fall 1:  $S \xrightarrow{*} aA \xrightarrow{*} w$

Fall 2: Annahme:  $S \xrightarrow{*} bS \xrightarrow{*} w = bv$   
Aha! Ich darf annehmen  $v \in L$

*Lösungsskizze.* Für diese Aufgabe gibt es eine Video-Lösung.

(a) (1)

$$L_a = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_{\uparrow} = |w|_{\downarrow} \wedge |w|_{\leftarrow} = |w|_{\rightarrow}\}$$

(2)

$$L_b = \bigcup_{i < j < k} L(\rightarrow^i (\uparrow^j \mid \downarrow^j) \leftarrow^k)$$

- (b) (1) • Wir nehmen an, dass  $L_a$  kontextfrei ist und führen diese Annahme zum Widerspruch.
- Sei  $n \geq 1$  eine Pumping-Lemma-Zahl für die kontextfreie Sprache  $L_a$ .
  - Sei zusätzlich  $z = \rightarrow^n \uparrow^n \leftarrow^n \downarrow^n$ , d.h.,  $z \in L_a$  und  $|z| \geq n$ .
  - Gemäß Pumping-Lemma gibt es dann also eine Zerlegung  $z = uvwxy$  mit Wörtern  $u, v, w, x, y \in \Sigma^*$  und den folgenden Eigenschaften:

$$(1) \quad vx \neq \epsilon \quad (2) \quad |vwx| \leq n \quad (3) \quad \forall i \in N_0. \quad uv^i wx^i y \in L_a$$

- Aufgrund von (1) unterscheiden wir die folgenden Fälle:

–  $|vx|_{\rightarrow} > 0$ : Wegen (2) gilt  $|vx|_{\leftarrow} = 0$ . Allerdings gilt auch:

$$|uv^2wx^2y|_{\rightarrow} = n + |vx|_{\rightarrow} > n = |uv^2wx^2y|_{\leftarrow}$$

Dies ist ein Widerspruch zu (3).

–  $|vx|_{\uparrow} > 0$ : Wegen (2) gilt  $|vx|_{\downarrow} = 0$ . Allerdings gilt auch:

$$|uv^2wx^2y|_{\uparrow} = n + |vx|_{\uparrow} > n = |uv^2wx^2y|_{\downarrow}$$

Dies ist ein Widerspruch zu (3).

–  $|vx|_{\leftarrow} > 0$ : Wegen (2) gilt  $|vx|_{\rightarrow} = 0$ . Allerdings gilt auch:

$$|uv^2wx^2y|_{\rightarrow} = n < n + |vx|_{\leftarrow} = |uv^2wx^2y|_{\leftarrow}$$

Dies ist ein Widerspruch zu (3).

–  $|vx|_{\downarrow} > 0$ : Wegen (2) gilt  $|vx|_{\uparrow} = 0$ . Allerdings gilt auch:

$$|uv^2wx^2y|_{\uparrow} = n < n + |vx|_{\downarrow} = |uv^2wx^2y|_{\downarrow}$$

Dies ist ein Widerspruch zu (3).

- Da jeder Fall zu einem Widerspruch führt und die obigen Fälle alle möglichen Zerlegungen abdecken, kann die ursprüngliche Annahme nicht gelten. Also ist  $L_a$  nicht kontextfrei.

- (2) • Wir nehmen an, dass  $L_b$  kontextfrei ist und führen diese Annahme zum Widerspruch.
- Sei  $n \geq 1$  eine Pumping-Lemma-Zahl für die kontextfreie Sprache  $L_b$ .

- Dann ist  $z = \rightarrow^n \uparrow^{n+1} \leftarrow^{n+2}$ , d.h.,  $z \in L_b$  und  $|z| \geq n$ .
- Gemäß Pumping-Lemma gibt es dann also eine Zerlegung  $z = uvwxy$  mit Wörtern  $u, v, w, x, y \in \Sigma^*$  und den folgenden Eigenschaften:

$$(1) \quad vx \neq \epsilon \quad (2) \quad |vwx| \leq n \quad (3) \quad \forall i \in N_0. \quad uv^i wx^i y \in L_b$$

- Zuerst informell: Da  $|vwx| \leq n$ , kann  $vwx$  nur von der Form  $\rightarrow^* \uparrow^*$  oder  $\uparrow^* \leftarrow^*$  sein. Wegen  $|vx| > 0$  muss mindestens ein Pfeil gepumpt werden. Gilt  $|vx|_{\rightarrow} > 0$ , dann können wir die Anzahl der  $\rightarrow$  über die Anzahl der  $\leftarrow$  pumpen, enthält  $vx$  keinen  $\rightarrow$  aber mindestens ein  $\uparrow$ , so kann man die Anzahl der  $\rightarrow$  auf höchstens  $n$  reduzieren, indem man  $vx$  entfernt. Andernfalls besteht  $vx$  nur aus  $\leftarrow$ , dann aus mindestens einem, so dass man durch Entfernen von  $vx$  die Anzahl der  $\leftarrow$  auf  $n + 1$  oder weniger reduziert wird, man also höchstens so viele  $\leftarrow$  wie  $\uparrow$  hat.
- Formal: Aufgrund von (1) unterscheiden wir die folgenden Fälle:

–  $|vx|_{\rightarrow} > 0$ : Wegen (2) gilt  $|vx|_{\leftarrow} = 0$ . Allerdings gilt auch:

$$|uv^3wx^3y|_{\rightarrow} = n + 2|vx|_{\rightarrow} \geq n + 2 = |uv^3wx^3y|_{\leftarrow}$$

Dies ist ein Widerspruch zu (3).

–  $|vx|_{\rightarrow} = 0$  und  $|vx|_{\uparrow} > 0$ : Dann gilt:

$$|uv^0wx^0y|_{\uparrow} = n + 1 - |vx|_{\uparrow} \leq n = |uv^0wx^0y|_{\rightarrow}$$

Daher ist  $uv^0wx^0y \notin L_b$ , ein Widerspruch zu (3).

–  $|vx|_{\rightarrow} = 0$  und  $|vx|_{\uparrow} = 0$ : Dann muss  $|vx|_{\leftarrow} > 0$  gelten, und es folgt:

$$|uv^0wx^0y|_{\leftarrow} = n + 2 - |vx|_{\leftarrow} < n + 1 = |uv^0wx^0y|_{\uparrow}$$

Daher ist  $uv^0wx^0y \notin L_b$ , ein Widerspruch zu (3).

Da jeder Fall zu einem Widerspruch führt und die obigen Fälle alle möglichen Zerlegungen abdecken, kann die ursprüngliche Annahme nicht gelten. Also ist  $L_b$  nicht kontextfrei.

## Übung und Nachbereitung

### Übungsaufgabe Ü6.4. (Abschlusseigenschaften)

Gegeben seien die kontextfreien Grammatiken  $G_1 = (V_1, \Sigma_1, P_1, S_1)$  und  $G_2 = (V_2, \Sigma_2, P_2, S_2)$ . Konstruieren Sie aus diesen neue Grammatiken für die Sprachen:

- $L(G_1) \cup L(G_2)$
- $L(G_1)L(G_2)$
- $L^*(G_1)$

$L(G_1)$

Ü6.4. a)  $G_1, G_2$  kontextfrei  $\Rightarrow L(G_1) \cup L(G_2)$   
kontextfreie Sprachen

Sei  $G_1 = (V_1, \Sigma_1, P_1, S_1)$

$G_2 = (V_2, \Sigma_2, P_2, S_2)$

Definieren

$G := (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \underline{P_1 \cup P_2} \cup \{(S, S_1), (S, S_2)\}, S)$

$S \rightarrow S_1 \quad | \quad S_2$

b) verlangt: eine Grammatik für  $L(G_1) \cup L(G_2)$ ;

$S_1 \rightarrow aS_1 \mid \epsilon$

$S_2 \rightarrow bS_2 \mid \epsilon$

$L(G_1) = \{a\}^\omega$

$L(G_2) = \{b\}^\omega$

$L(G) = \{a\}^\omega \{b\}^\omega$

$S \longrightarrow S_1 S_2$

Formal  $G = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, P_1 \cup P_2 \cup \{S \rightarrow S_1 S_2\}, S)$

c) Grammatik für  $L(G_1)^*$ , gegeben  $G_1$ .

$$S \rightarrow S_1 S \mid \epsilon$$

$$G = (V_1 \cup \{S\}, \Sigma_1, P_1 \cup \{S \rightarrow S_1 S \mid \epsilon\}, S)$$

**Übungsaufgabe Ü6.5.** (*Pumping-Lemma für Kontextfreie Sprachen*)

Entscheiden Sie ob die folgenden Sprachen kontextfrei sind. Wenn ja, geben Sie eine Grammatik an und zeigen Sie, dass Ihre Grammatik die Sprache akzeptiert. Wenn nein, beweisen Sie dies durch einen Widerspruchsbeweis unter Verwendung des Pumping Lemmas für kontextfreie Sprachen.

- (a)  $L_1 = \{a^n b^m c^l \mid n, m, l \in \mathbb{N} \wedge n > m \wedge n > l\}$
- (b)  $L_2 = \{ww \mid w \in \{a, b, c\}^* \wedge w = w^R\}$

**Übungsaufgabe Ü6.6.** (*Chomsky-Normalform*)

Die CFG  $G$  bestehe aus folgenden Produktionen über dem Alphabet  $\Sigma = \{a, b\}$ :

$$S \rightarrow ASA \mid aB \quad A \rightarrow B \mid S \quad B \rightarrow b \mid \varepsilon$$

- (a) Überführen Sie die Grammatik in Chomsky-Normalform.
- (b) Erklären Sie in eigenen Worten, wie Sie nach Überführen einer Grammatik in CNF überprüfen können, dass Sie keine Fehler gemacht haben.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>Hier geht es nicht um einen formalen Beweis, dass die beiden Sprachen gleich sind, sondern um eine Strategie, wie Sie bei Aufgaben wie im vorherigen Aufgabenteil Fehler vermeiden.

CNF:

- i)  $A \rightarrow BC$
- ii)  $A \rightarrow a$
- iii)  $S \rightarrow \epsilon$

$S \rightarrow ASA \mid aB$

$A \rightarrow B \mid S$

$B \rightarrow b \mid \epsilon$

Algorithmus:

① Wenn:  $X \rightarrow A_1A_2 \dots bA_{i+1} \dots A_k$

Dann:  $X \rightarrow A_1A_2 \dots BA_{i+1} \dots A_k$

$B \rightarrow b$

$S \rightarrow ASA \mid XaB$

$Xa \rightarrow a$

$A \rightarrow B \mid S$

$B \rightarrow b \mid \epsilon$

②  $S \rightarrow A_1 A_2 \dots A_4$

↳  $S \rightarrow A_1 D_1$

$D_1 \rightarrow A_2 D_2$

$D_2 \rightarrow A_3 A_4$

$s \rightarrow ASA \mid X_a B$

$X_a \rightarrow a$

$A \rightarrow B \mid S$

$B \rightarrow b \mid \epsilon$

$s \rightarrow AX_{SA} \mid X_a B \quad B \rightarrow b \mid \epsilon$

$A \rightarrow B \mid S$

$X_{SA} \rightarrow SA$

$X_a \rightarrow a$

③ Wenn  $A \rightarrow \epsilon$ ,

↳ überall wo  $B \rightarrow \alpha A \beta$

füge hinzu:

$B \rightarrow \alpha \beta$

$s \rightarrow AX_{SA} \mid X_a B \quad B \rightarrow b \mid \epsilon$

$A \rightarrow B \mid S$

$X_{SA} \rightarrow SA$

$X_a \rightarrow a$

und löse  $A \rightarrow \epsilon$

1. te Iteration:

$s \rightarrow AX_{SA} \mid X_a B \mid X_a$

$B \rightarrow b$

$X_{SA} \rightarrow SA$

$A \rightarrow \epsilon \mid S \mid b$

$X_a \rightarrow a$

## 2. te Iteration

$s \rightarrow Axs_A \mid xs_A \mid XaB \mid Xa$

$Xs_A \rightarrow SA \mid S$

$Xa \rightarrow a$

$B \rightarrow b$

$A \rightarrow S \mid b$



④

Wenn  $A \rightarrow B$

dann bilde Menge von

$A \rightarrow C$  falls  $A \rightarrow B$

wiederholt bis nix Neues und  $B \rightarrow C$

1<sup>te</sup> Iter.: Lösche am Ende alle  $\boxed{A \rightarrow B}$

$s \rightarrow Axs_A \mid XaB \mid a \mid SA \mid S$

$Xs_A \rightarrow SA \mid AXs_A \mid XaB \mid a \mid SA \mid S$

$Xa \rightarrow a$

$B \rightarrow b$

$A \rightarrow Axs_A \mid XaB \mid a \mid SA \mid S \mid b$

2<sup>te</sup> Iter:

bringt nütz. Never

wur löschen:

$S \rightarrow A X_{SA} \mid X_a B \mid a \mid SA$

$X_{SA} \rightarrow SA \mid AX_{SA} \mid X_a B \mid a \mid SA$

$X_a \rightarrow a$

$B \rightarrow b$

$A \rightarrow AX_{SA} \mid X_a B \mid a \mid SA \mid b$

# PL für kontextfreie Sprachen L

Es gibt eine Zahl  $n \in \mathbb{N}$ , sodass es für alle Wörter  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$  eine Zerlegung  $z = uvwxy$  gibt, s.d.

①  $|vx| \geq 1$  (Läng. zu  $vx \neq \epsilon$ )

②  $|vwx| \leq n$

③  $\forall i \geq 0. \quad u v^i w^i x^i y \in L$

PL

gilt:

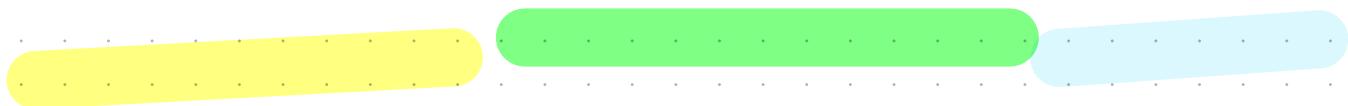
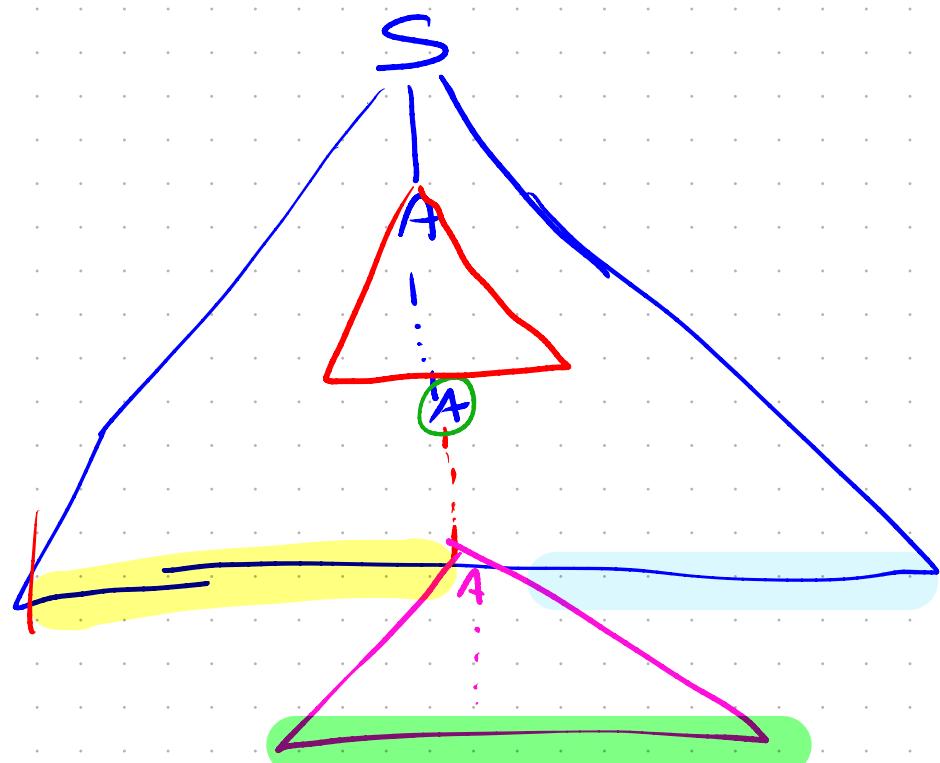
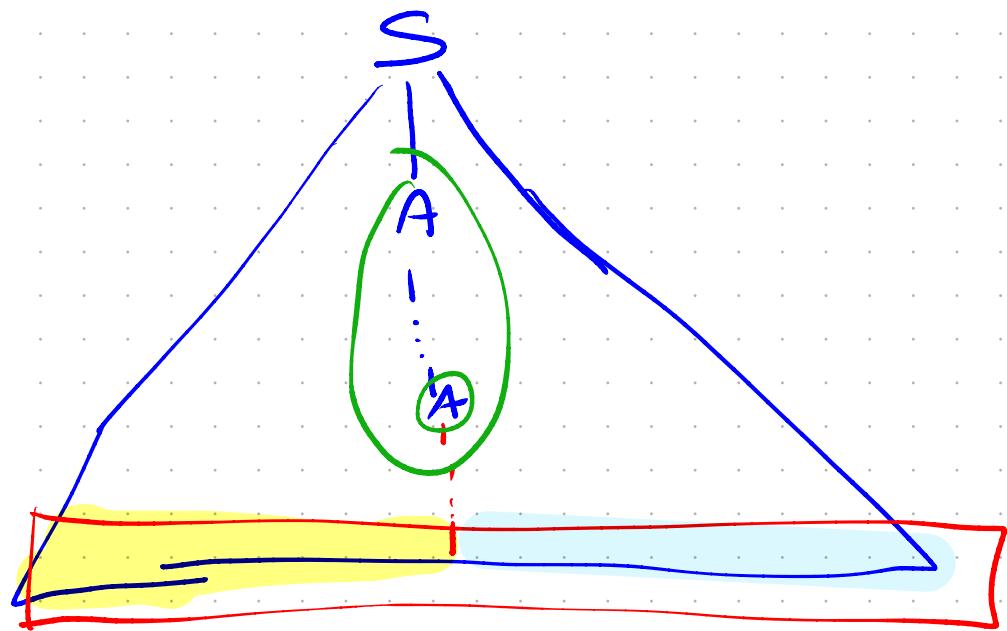
- lege  $n$  fest
- sei  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$  beliebig
- finde eine Zerlegung, gebe sie an  
 $z = uvwxy$
- dann zeige:
  - ①  $vwx \neq \epsilon$
  - ②  $|vwx| \leq n$
  - ③  $\forall i \geq 0. uv^iwx^i \in L.$

PL

widerlegt

(betrifft Zeigen, dass eine Sprach  
reg. bzw. kf ist)

- sei  $n$  eine PL-Zahl
- sei  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$  beliebig
- sei  $z = uvwxy$  eine beliebige  
Zerlegung, sodass
  - ①  $vwx \neq \epsilon$
  - ②  $|vwx| \leq n$und
- nun gebe ein  $i \geq 0$  an, s.d.  
 $uv^iwx^i \notin L$



$$L_1 = \{ a^n b^m c^l \mid n, m, l \in \mathbb{N} \wedge n > m \wedge n > l \}$$

Nehme an:  $L_1$  wäre kf.

Sei  $n$  eine PL-Zahl.

Definiere  $z := a^{n+1} b^n c^n$

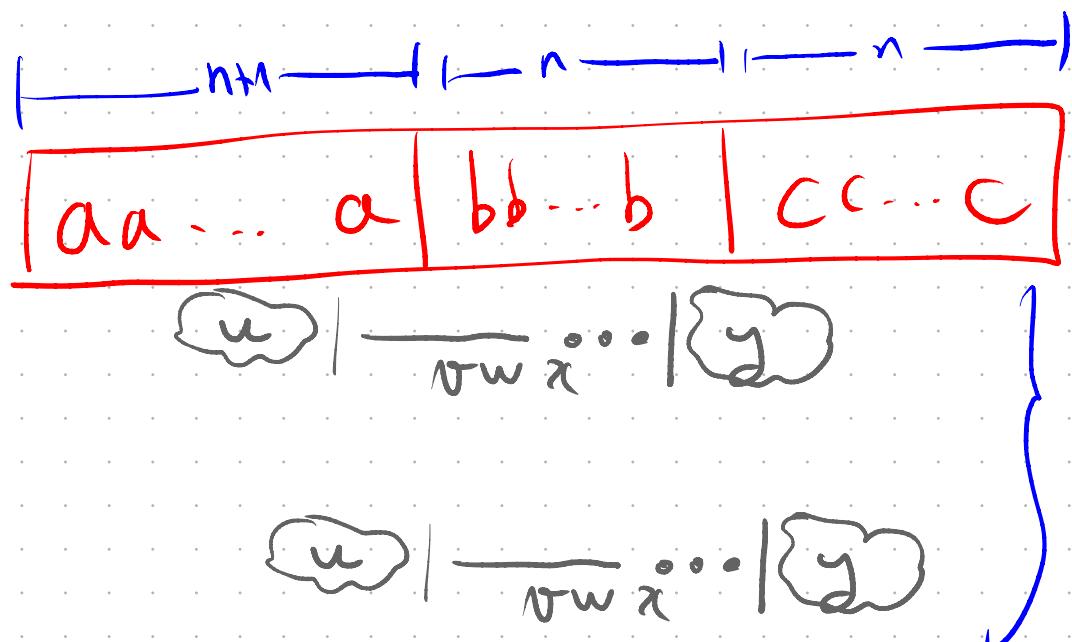
Sei  $z = u v w x y$  eine beliebige Zerlegung, d.h.

$$\textcircled{1} \quad v x \neq \epsilon$$

$$\textcircled{2} \quad (v w x) \leq n$$

$$\textcircled{3} \quad \forall i \geq 0. \quad u v^i w x^i y \in L_1.$$

(NB: weil  $u v w x y$  beliebig, brauchen wir eine Fallunterscheidung)



## Falluntersch.:

i)  $|\vartheta z|_a = 0$ : Es folgt daraus  $|\vartheta z|_b > 0$  oder  $|\vartheta w|_c > 0$ . Definiere  $z' := uv^2wz^2y$ . Dann gilt

$$|z'|_a = |uv^2wz^2y|_a = |z|_a = n+1$$

Sei oBdA  $|\vartheta z|_b > 0$ .

$$\begin{aligned} |z'|_b &= |uv^2wz^2y|_b = |z|_b + |\vartheta z|_b \\ &> |z|_b = n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |z'|_b \geq n+1$$

$$\text{D.h. } |z'|_a = n+1 \leq |z'|_b$$

$$\Rightarrow z' \notin L_1.$$

Das ist ein Widerspruch.

ii)  $|\vartheta z|_a = j > 0$ . Es folgt  $|\vartheta wz|_c = 0$ , da  $|\vartheta wz| \leq n$ . Also, für  $z' := u\vartheta^0wz^0y$  gilt es:

$$|z'|_a = |u\vartheta^0wz^0y|_a < |z|_a = n+1$$

$$\text{und } |z'|_c = |z|_c = n$$

Da, heißt

$$|z'|_a \leq |z'|_c = n < n+1$$

Das ist  $\not\in$ .

---

Schließlich gilt:  $L_n$  nicht kontinuierlich  
(NB: die Fallunt. deckt alle Zerlegungen ab).