Prof. Javier Esparza
Philipp Czerner, Martin Helfrich

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2022 – Übungsblatt 12

Individualaufgabe Ü12.1. (*Wichtige Begriffe*)

Überprüfen Sie, dass Sie die folgenden Begriffe oder Notationen korrekt definieren können.

- $time_M(w)$ und $ntime_M(w)$
- $TIME(f(n))$ und $NTIME(f(n))$
- Landau-Notation (oder auch $\mathcal{O}$-Notation): $\mathcal{O}(n), \mathcal{O}(2^n), \ldots$ Polynomiale in
- P und NP $P \subseteq NP$
- $P \stackrel{?}{=} NP$ A NP-Complete :
- NP-hart (oder auch auch: "NP-schwer") $A \in NP \wedge \forall B \in NP.\ B \leq_p A$
- NP-vollständig
- Zertifikat und polynomiell beschränkter Verifikator
- polynomielle Reduktion
- $A \leq_p B$ (sprich: *"A ist polynomiell reduzierbar auf B"*)
- Die Probleme[1]: HAMILTON, RUCKSACK, SAT, 3KNF-SAT, FÄRBBARKEIT (COL), 3COL, MENGENÜBERDECKUNG (MÜ), CLIQUE, PARTITION, BIN PACKING, TRAVELLING SALESMAN (TSP)

[1] Wir lernen viele dieser Probleme erst in den kommenden Vorlesungen kennen. Sie müssen nicht schon zum jetzigen Zeitpunkt alle Probleme kennen / verstehen.

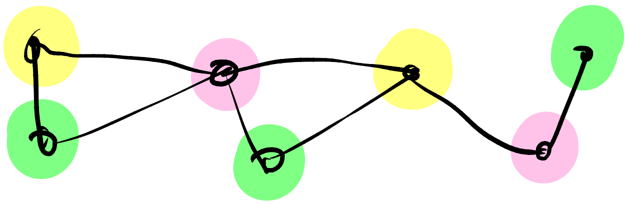
Individualaufgabe Ü12.2. (*TSP ist NP-vollständig*)

Sie kennen bereits das Problem HAMILTON $:= \{G \mid G$ enthält einen Hamiltonkreis$\}$. Dieses Problem ist **NP**-vollständig. Zeigen Sie nun, dass das Travelling-Salesman-Problem (TSP) ebenfalls **NP**-vollständig ist.

TSP:

- Eingabe: $n \times n$ Matrix M mit $M_{i,j} \in \mathbb{N}$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.
- Frage: Gibt es eine "Rundreise" der Länge $\leq k$.

Eine Rundreise ist eine Permutation π von $[1; n]$, also ein einfacher Kreis, der jede Insel einmal enthält. Die Länge der Rundreise ist die Summe der Kosten der einzelnen Reisen, also $\Sigma_{i=1}^{n} M_{\pi_i,\pi_j}$ (dabei ist π_i der i-te Eintrag der Permutation, beginnend bei 0, und π_j ist der Eintrag für die nächste Insel, also $j = (i+1)\%n$).



$|S| + |V| + |T|$

$+ |S| \times |V|$

Übungsaufgabe Ü12.3. (*Stundenplan*)

In dieser Aufgabe betrachten wir das STUNDENPLAN-Problem:

- **Eingabe**: Endliche Mengen S (Studierende), V (Vorlesungen) und T (Termine) und eine Relation $R \subseteq S \times V$. Dabei bedeutet $(s, v) \in R$, dass s die Vorlesung v besuchen möchte.
- **Frage**: Gibt es eine Abbildung $f : V \to T$, so dass alle Studierenden einen überschneidungsfreien Stundenplan haben, also

$$(s, v_1) \in R \wedge (s, v_2) \in R \wedge v_1 \neq v_2 \implies f(v_1) \neq f(v_2)\ .$$

(a) Zeigen Sie, dass STUNDENPLAN in NP liegt.

(b) Zeigen Sie, dass STUNDENPLAN NP-schwer ist, indem sie eine polynomielle Reduktion von 3COL auf STUNDENPLAN angeben. (Wir werden in der Vorlesung noch lernen, dass 3COL NP-schwer ist.)

a) for each $s \in S$:
  for each $(v_1, v_2) \in V \times V$:
    if $(s, v_1) \in R \wedge (s, v_2) \in R$
      $\wedge\ v_1 \neq v_2 \in R$:
  überschn. > if $f(v_1) = f(v_2)$:
          return false

return true

in polynomieller Zeit berechenbar

$|S| \times (|V| \times |V|) + |S| \times |V|)$

$= O(|S|^2 \cdot |V|^2)$

Übungsaufgabe Ü12.3. (*Stundenplan*)

In dieser Aufgabe betrachten wir das STUNDENPLAN-Problem:

- **Eingabe**: Endliche Mengen S (Studierende), V (Vorlesungen) und T (Termine) und eine Relation $R \subseteq S \times V$. Dabei bedeutet $(s, v) \in R$, dass s die Vorlesung v besuchen möchte.
- **Frage**: Gibt es eine Abbildung $f : V \to T$, so dass alle Studierenden einen überschneidungsfreien Stundenplan haben, also
  - $(s, v_1) \in R \wedge (s, v_2) \in R \wedge v_1 \neq v_2 \implies f(v_1) \neq f(v_2)$.

$\{v_1, v_2\} \in E \;\wedge\; v_1 \neq v_2 \implies c(v_1) \neq c(v_2)$

(a) Zeigen Sie, dass STUNDENPLAN in NP liegt.

(b) Zeigen Sie, dass STUNDENPLAN NP-schwer ist, indem sie eine polynomielle Reduktion von 3COL auf STUNDENPLAN angeben. (Wir werden in der Vorlesung noch lernen, dass 3COL NP-schwer ist.)

- Sei $c : V \to \{1, 2, 3\}$.

b) Reduktion $3COL \leq_p SP$

Idee: Aus $G = (V, E)$ Instanz (S, V', T, R) konstruieren

Korrektheit: $G \in 3COL$

Reduktion

$\iff (S, V', T, R) = r(G) \in SP$

- $(s, v_1) \in R \wedge (s, v_2) \in R \wedge v_1 \neq v_2 \implies f(v_1) \neq f(v_2)$.

$\{v_1, v_2\} \in E \quad \wedge \quad v_1 \neq v_2 \implies c(v_1) \neq c(v_2)$

(S, V', T, R)

$R \subseteq S \times V$

Knoten $\longrightarrow$ VL Färbung $\longrightarrow$ SP

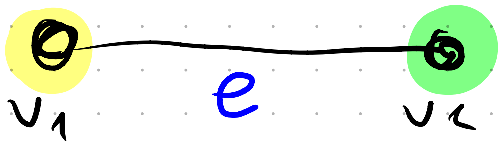
$f: V' \longrightarrow T$

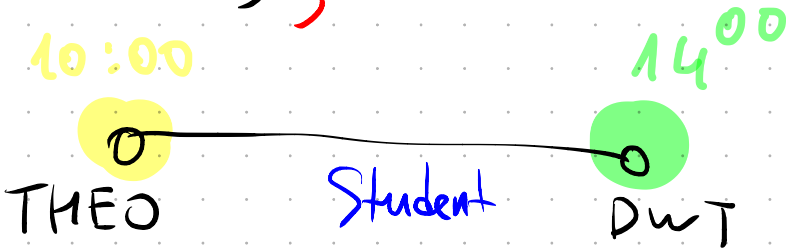
$c: V' \longrightarrow \{1,2,3\}$

$S := E$ $\underline{V' := V}$ $T := \{1,2,3\}$

$R := \{(\{v_1, v_2\}, v) \in S \times V \mid v \in \{v_1, v_2\}\}$

$\subseteq S \times V$





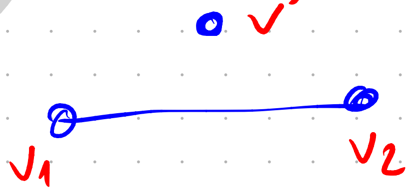
Zusammenfassung: $\underline{\text{Reduktion } r}$

$S := E$

$R := \{(\{v_1, v_2\}, v) \in S \times V \mid v \in \{v_1, v_2\}\}$

$V' := V$

$T := \{1,2,3\}$



$(\{v_1, v_2\}, v_1) \in R$

$(\{v_1, v_2\}, v_2) \in R$

$(\{v_1, v_2\}, v) \notin R$

Die Reduktion r ist in polynomieller Zeit berechenbar.

Korrektheit: $G \in 3COL \iff r(G) = (S, V', T, R) \in SP$

"$\Rightarrow$" Angenommen $G \in 3COL$ mit Färbung c.

$(*)$ $(\{v_1, v_2\} \in E \wedge v_1 \neq v_2 \Rightarrow c(v_1) \neq c(v_2))$

Ziel: Aus c einen SP $f: V' \to \{1,2,3\}$ konstruieren, sodass

- $(s, v_1) \in R \wedge (s, v_2) \in R \wedge v_1 \neq v_2 \implies f(v_1) \neq f(v_2)$.

Behauptung: $f := c$ ist ein solcher SP.

Beweis: Seien $(s, v_1) \in R$, $(s, v_2) \in R$ mit $v_1 \neq v_2$ beliebig.
Aus der Def. von R folgt: $v_1 \in s$, $v_2 \in s$. Da aber $v_1 \neq v_2$, gilt $s = \{v_1, v_2\}$.

Aus $(*)$ folgt für $s = \{v_1, v_2\} \in S = E$:

$$c(v_1) \neq c(v_2)$$

$$\iff f(v_1) \neq f(v_2)$$

"$\Leftarrow$" Angenommen $r(G) = (S, V', T, R) \in SP$ mit SP $f: V' \to T$

(*) $((s, v_1) \in R \land (s, v_2) \in R \land v_1 \neq v_2 \Longrightarrow f(v_1) \neq f(v_2))$

Ziel: eine 3-Färbung c konstruieren, sodass gilt:

$$\{v_1, v_2\} \in E \land v_1 \neq v_2 \Longrightarrow c(v_1) \neq c(v_2).$$

Beh: Für $c := f$ gilt das.

Bew: Seien $v_1 \neq v_2$ beliebig mit $\{v_1, v_2\} \in E$.

Es gilt $(\{v_1, v_2\}, v_1) \in R$ und $(\{v_1, v_2\}, v_2) \in R$.

Aus (*) folgt:

$$f(v_1) \neq f(v_2)$$
$$\Longleftrightarrow c(v_1) \neq c(v_2)$$

QED

Übungsaufgabe Ü12.4. (*SAT-Varianten*)

Wir betrachten verschiedene Varianten von SAT, die auch NP-vollständig sind.

In der Vorlesung werden wir das NP-vollständige Problem 3KNF-SAT kennen lernen. Dies führen wir hier vorab schon einmal ein, da es als Einschränkung von SAT die Reduktion leichter macht.
Sei X eine Menge an Variablen. Die Menge der *Literale* ist $L := X \cup \{\neg x : x \in X\}$, enthält also alle Variablen und Negationen von Variablen. Eine *k-Klausel* ist eine Formel der Form $l_1 \vee l_2 \vee \ldots \vee l_k$ mit $l_1, \ldots, l_k \in L$, und eine Formel F ist in *k-konjunktiver Normalform (k-KNF)*, wenn $F = F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n$, wobei $F_1, \ldots, F_n$ jeweils k-Klauseln sind. Das Problem 3KNF-SAT ist nun

- **Eingabe**: Aussagenlogische Formel F in 3-KNF
- **Frage**: Ist F erfüllbar?

Ein Beispiel für eine Instanz wäre also $(\neg x \vee y \vee z) \wedge \overbrace{(x \vee \neg y \vee z)}^{\text{Klausel}} \wedge (x \vee y \vee \boxed{\neg z})$

Wir betrachten zusätzlich zu 3KNF-SAT noch weitere Varianten von SAT, die auch NP-vollständig sind. Zeigen Sie diese NP-Vollständigkeit, indem Sie für jede Variante X eine Reduktion 3KNF-SAT $\leq_p X$ angeben und $X \in \text{NP}$ zeigen.

(a) 3-OCC-KNF-SAT:

- **Eingabe**: Eine Formel F in KNF, bei der jede Variable höchstens dreimal auftritt.

klar in NP

$(x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \_\_) \wedge (\neg x \vee \_\_) \wedge (x \vee \_\_) \wedge \_\_\_$

$(x_1 \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x_2 \vee \_\_) \wedge (\neg x_3 \; \_\_) \wedge (x_4 \; \_\_) \wedge \_\_\_$

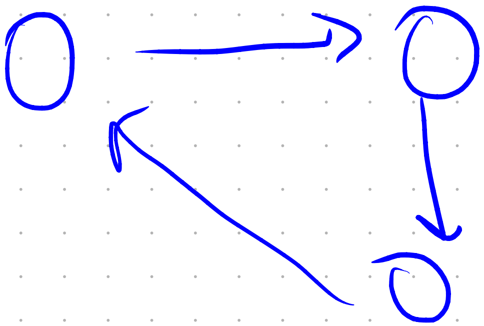
$\wedge \; (x_1 \leftrightarrow x_2 \;,\; x_2 \leftrightarrow x_3 \;,\; x_3 \leftrightarrow x_4$

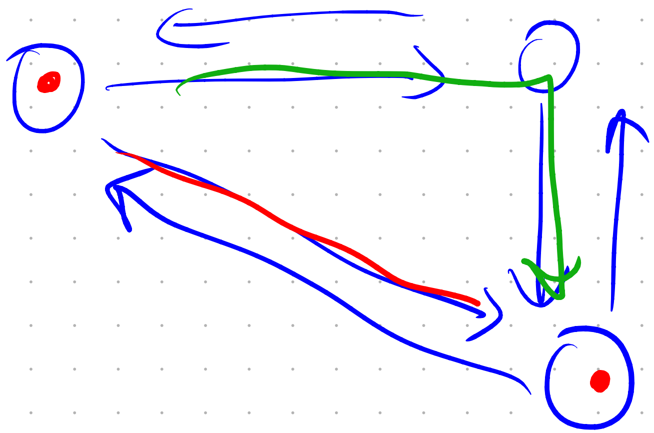
$x_1 \cancel{\leftrightarrow} x_3 \;,\; x_2 \cancel{\leftrightarrow} x_4$

$x_1 \cancel{\leftrightarrow} x_4 \;)$

$x_1 \leftrightarrow x_2 \equiv (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee x_1)$

fait da





$$\begin{tikzcd} x_1 \arrow[r] & x_2 \arrow[r] & x_3 \arrow[r] & x_4 \arrow[lll, bend left] \end{tikzcd}$$

$$\wedge \; (x_1 \to x_2 \; , \; x_2 \to x_3 \; , \; x_3 \to x_4 \; , \; x_4 \to x_1)$$

$x_1 : 2$

$x_2 : 2$

$x_3 : 2$

$x_4 : 2$

ursprünglich

$$\wedge \; (\quad)$$

$$(\neg x_1 \vee x_2)$$
$$\wedge \; (\neg x_2 \vee x_3)$$
$$\wedge \; (\neg x_3 \vee x_4)$$
$$\wedge \; (\neg x_4 \vee x_1)$$

- **Frage**: Ist F erfüllbar?

3SAT $\leq_p$ ITE-SAT

(b)(i) ITE-SAT $\in$ NP weil eine erfüllende Belegung σ in polynomieller Zeit verifiziert werden können.

(b) Wir betrachten den ITE-Operator mit der Semantik $\mathsf{ITE}(x, y, z) := (x \to y) \land (\neg x \to z)$. Eine ITE-Formel genügt der folgenden Grammatik:

$$F \to \mathsf{ITE}(F, F, F) \mid x \mid \mathsf{true} \mid \mathsf{false} \qquad \text{für Variablen } x \in \mathcal{V}$$

ITE-SAT:

- **Eingabe**: Eine ITE-Formel F.
- **Frage**: Ist F erfüllbar?

$\neg a \rightsquigarrow \mathsf{ITE}(a, \mathsf{false}, \mathsf{true})$

$a \lor b \rightsquigarrow \mathsf{ITE}(a, \mathsf{true}, b)$

$a \land b \rightsquigarrow \mathsf{ITE}(a, b, \mathsf{false})$

Beweis von semantischen Äquivalenz:

i) $ITE(a, 0, 1) \equiv (a \to 0) \wedge (\neg a \to 1)$

$\equiv (\neg a \vee 0) \wedge (a \vee 1)$

$\equiv \neg a \wedge 1$

$\equiv \neg a \quad \square$

ii) $ITE(a, 1, b) \equiv (a \to 1) \wedge (\neg a \to b)$

$\equiv 1 \wedge (a \vee b)$

$\equiv a \vee b \quad //$

iii) $ITE(a, b, 0) \equiv (a \to b) \wedge (\neg a \to 0)$

$\equiv (\neg a \vee b) \wedge (a \vee 0)$

$\equiv (\neg a \vee b) \wedge a$

$\equiv (a \wedge \neg a) \vee (a \wedge b)$

$\equiv \text{false} \vee (a \wedge b) \equiv a \wedge b \quad //$

$\neg x \lor (\neg y \lor \neg z) \rightsquigarrow$ ITE (

ITE (
x,
false,
true,
),

true,

ITE
(
ITE (y, false, true),
true,
ITE (z, false, true)
)

)

$\neg x$

$\neg x$

$\neg y \lor \neg z$

Die neue ITE-Formel ist nur um einen konstanten Faktor größer.

Außerdem gilt $F \in 3SAT \longleftrightarrow r(F) \in ITE\text{-}SAT$ wegen der semantischen Äquivalenz

Übungsaufgabe Ü12.5. (*ZOLP*)

Das *Zero-One-Linear-Program* (ZOLP) Problem sei wie folgt definiert:

- **Eingabe**: Ein System von linearen Ungleichungen

$$\begin{aligned} b_1 &\leq a_{1,1}y_1 + \ldots + a_{1,n}y_n \\ b_2 &\leq a_{2,1}y_1 + \ldots + a_{2,n}y_n \\ &\vdots \\ b_m &\leq a_{m,1}y_1 + \ldots + a_{m,n}y_n \end{aligned}$$

  mit $a_{i,j}, b_i \in \mathbb{Z}$ und $m, n > 0$.

- **Frage**: Gibt es für die Variablen $y_1, \ldots, y_n$ Werte aus $\{0, 1\}$, sodass alle Ungleichungen gleichzeitig erfüllt sind?

Zeigen Sie, dass das Entscheidungsproblem ZOLP NP-schwer ist. Geben Sie hierzu eine geeignete Reduktion von 3KNF-SAT auf ZOLP an und beschreiben Sie **zusätzlich** das Vorgehen anhand folgender Formel:

$$(\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$$

Den Korrektheitsbeweis müssen Sie nicht ausformulieren.

$(x \vee y \vee z)$

$y_1 + y_2 + y_3 \geq 1$

$(\neg x \vee y \vee z)$

$(1 - y_1) + y_2 + y_3 \geq 1$

$-y_1 + y_2 + y_3 \geq 0$

$(1 - y_1) + y_2 + y_3 \geq 1 \rightarrow -y_1 + y_2 + y_3 \geq 0$

$y_1 + (1 - y_3) + y_4 \geq 1 \qquad y_1 - y_3 + y_4 \geq 0$