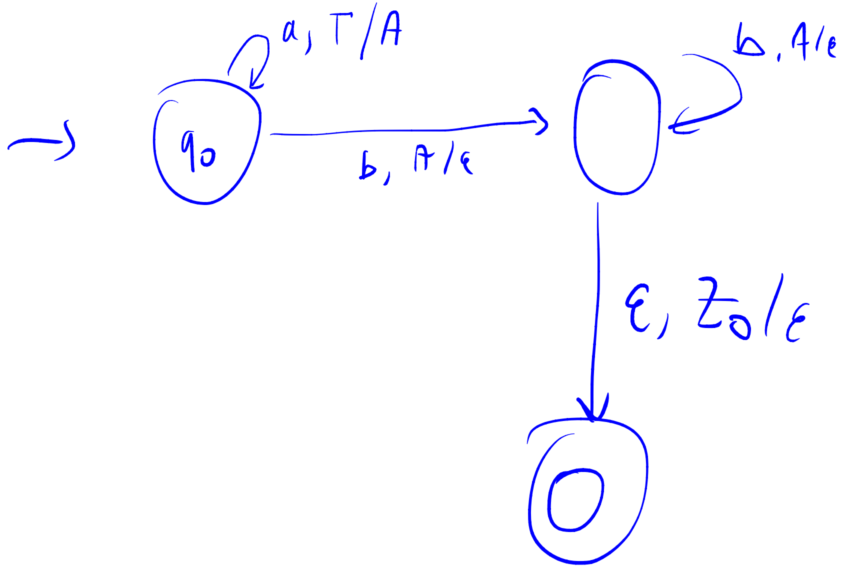
Prof. Javier Esparza
Philipp Czerner, Martin Helfrich

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

# Einführung in die Theoretische Informatik

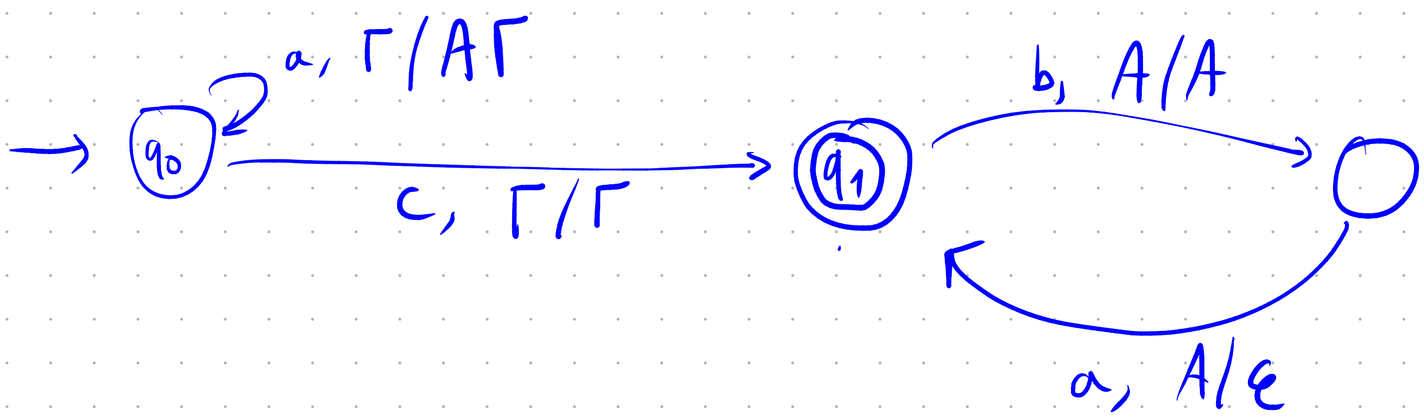
Sommersemester 2022 – Übungsblatt 13

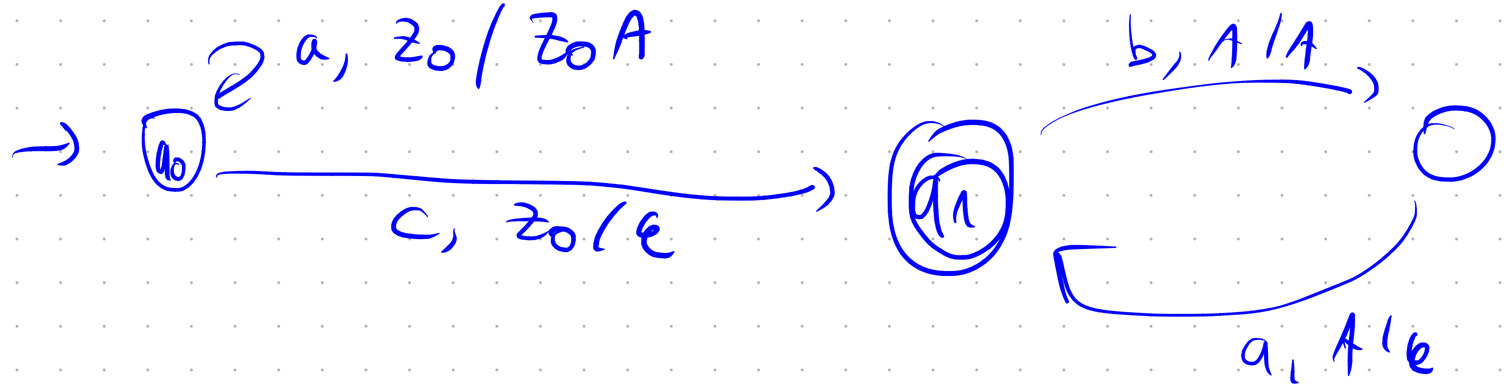


$S \to aSba \mid aS \mid c$

$aSba \to aaSba \to aaaSbaba \to aaacbaba$

$L(G) = \{ a^m c (ba)^n \mid m \geq n \geq 0 \}$



Lege $n$ fest.

$\hookrightarrow$ ein $z \in \Sigma^*$, $|z| \geq n$

Finde Zerlegung $z = uvw$, $v \neq \varepsilon$, $|uv| \leq n$

$\hookrightarrow$ eine Zahl $i \geq 0$

Es soll gelten: $uv^iw \in L$

$\exists n > 0.$
$(\forall z \in \Sigma^*. |z| \geq n$
$\Rightarrow (\exists u, v, w. z = uvw$
$\wedge v \neq \varepsilon \wedge |uv| \leq n$

$\Rightarrow \forall i \geq 0.$
$uv^iw \in L$
$)$

$)$

$$L = L(a^*b^*)$$

$n = 1$ Sei $z = a^p b^q$, $p, q \geq 0$ mit $|z| \geq 1$

Zerlegung: $u = \varepsilon$, $v = z_1$ (erstes Zeichen), $w = z_2 \ldots z_n$

$$uv^iw = z_1^i z_2 \ldots z_n$$

Fallunt. $= a^i z_2 \ldots z_n = a^i a^{p-1} b^q$

$= b^i z_2 \ldots z_n = b^i b^{q-1} \in L(a^*$

**Individualaufgabe Ü13.1.** (*letzte Übung* $\Rightarrow$ *(letzte) Chance für Fragen*)

Diese Woche findet die letzte Übung statt. Bitte lassen Sie deshalb Ihrem Tutor rechtzeitig (also so früh wie möglich) Fragen auf Zulip zukommen, die sie noch haben. Z.B. könnten das allgemeine Fragen zu Konzepten wie *Reduktion* oder Techniken wie *Pumping Lemma* sein oder aber auch Fragen zu Übungsaufgaben oder Hausaufgaben, die Sie gerne besprechen würden. Bitte geben Sie in solchen Fällen immer das Kürzel der Aufgabe UND die konkrete Frage an.

Bitte geben Sie Ihrem Tutor genügen Zeit, sich auf die Fragen vorzubereiten. Falls Ihr Tutor es nicht mehr schaffen sollte, sich vorzubereiten, oder Sie nach dem letzten Tutorium noch Fragen haben, finden Sie natürlich auf Zulip noch Unterstützung.

**Individualaufgabe Ü13.2.** (*Automata Tutor*)

Wenn Sie Automata Tutor noch nicht verwendet haben, folgen Sie erst den Schritten in Ü1.2, um sich richtig zu registrieren.

Wir haben zusätzlich zu den Übungsaufgaben der letzten Wochen auch die Hausaufgaben, die auf AT bearbeitet wurden, frei zugänglich gemacht. Somit haben sie ab jetzt die Möglichkeit alle AT-Aufgaben zu üben, ohne das die Anzahl der Versuche eingeschränkt ist. Somit können Sie AT auch sehr gut zur Klausurvorbereitung verwenden.

Außerdem wollen wir nochmal auf die Möglichkeit hinweisen, dass sie unter `Home > My Autogenerated Problems` für einige der Aufgabentypen selbständig neue Aufgaben generieren können.

Minimal states = 3

Ich prüfe ob,

$n=1$ PL-Zahl

$n=2$ PL-Zahl

**Übungsaufgabe Ü13.3.** (*Endliche Automaten*)

Sei $r = (a|b)^*ab(a|b)^*$ ein regulärer Ausdruck über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

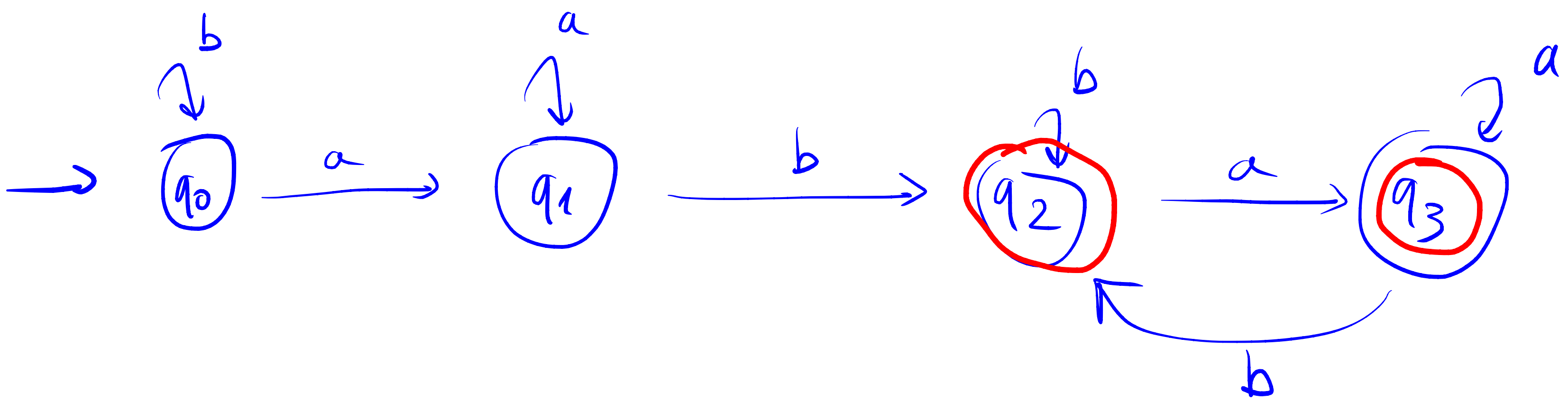
(a) Konstruieren Sie einen NFA $A$ mit $L(A) = L(r)$.

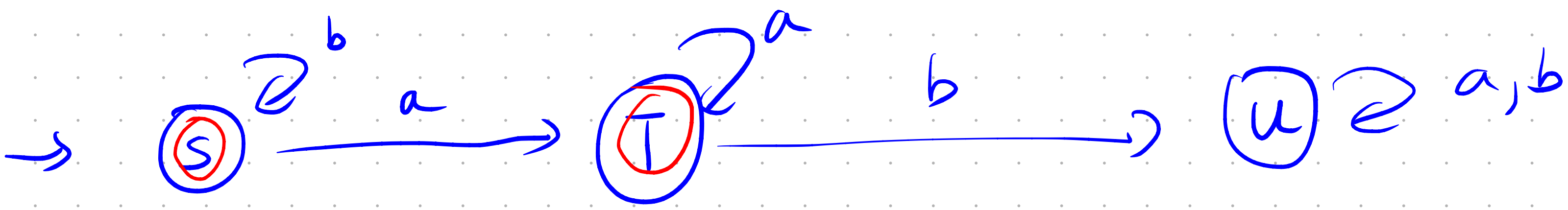
(b) Konstruieren Sie einen DFA $B$ mit $L(B) = L(A)$.

(c) Konstruieren Sie den minimalen DFA $C$ mit $L(C) = L(B)$.

(d) Konstruieren Sie den minimalen DFA $D$ mit $L(D) = \Sigma^* \setminus L(C)$.

(e) Konstruieren Sie einen regulären Ausdruck $r'$ mit $L(r') = L(D)$. Verwenden Sie hierzu Ardens Lemma.






$$S = bS \mid aT \mid \varepsilon$$

$$T = aT \mid bU \mid \varepsilon$$

$$U = aU \mid bU$$

$$U = (\{a\} \cup \{b\})\, U \cup \emptyset$$

$$U = (a|b)^* \emptyset = \emptyset$$

$S \to aS \mid bS$

$S \to (a|b)S$

$X = aX \cup bX$

**Übungsaufgabe Ü13.4.** (*Kontextfreie Sprachen (1)*)

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$.

(a) Geben Sie für die Sprache $L = \{(aba)^n b^m (ba)^n b\}$ eine kontextfreie Grammatik $G$ an, sodass $L(G) = L$ gilt.

(b) Sei $G = (\{S\}, \Sigma, \{S \to \varepsilon \mid aSc \mid aSbSc\}, S)$ eine kontextfreie Grammatik. Zeigen Sie, dass für alle in $G$ ableitbaren Wörter $w$ die Eigenschaft $|w|_a = |w|_c$ gilt.

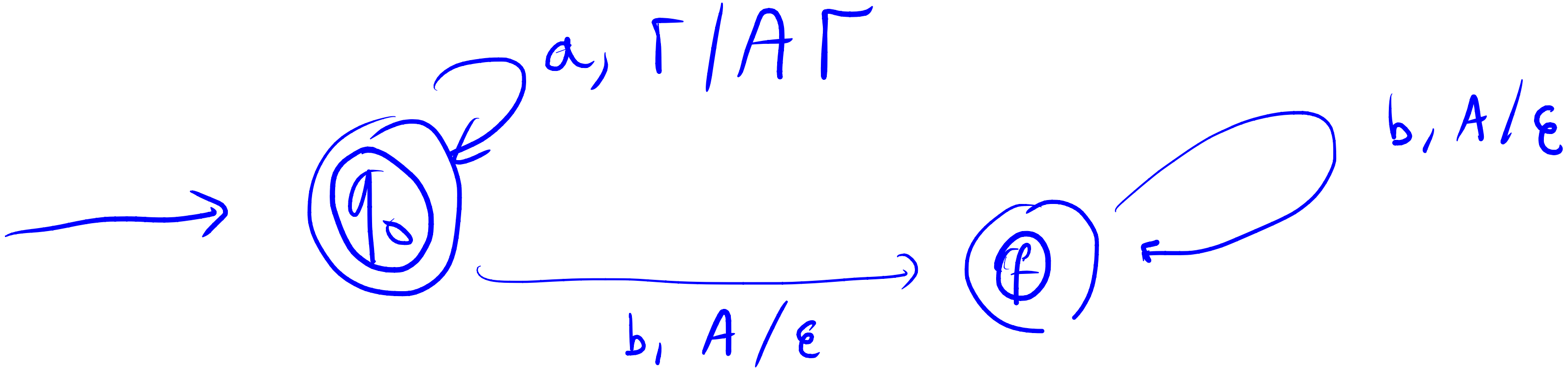
$X = aX \cup b$

$X = a^* b$

aaabb

**Übungsaufgabe Ü13.5.** (*Kontextfreie Sprachen (2)*)

Zeigen Sie, dass folgende Sprache $L = \{a^m b^n \mid m \geq n \geq 0\}$ **deterministisch** kontextfrei ist, indem Sie einen deterministischen Kellerautomaten (DPDA) angeben, der $L$ auf Endzustand akzeptiert. Ihr DPDA darf maximal vier Zustände besitzen.




$q_0\, Z_0 \xrightarrow{a} q_0\, A Z_0$

$q_0\, A \xrightarrow{a} q_0\, A A$

$q_0\, A \xrightarrow{b} f\, \varepsilon$

$f\, A \xrightarrow{b} f\, \varepsilon$

**Übungsaufgabe Ü13.6.** (*Pumping Lemma*)

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$. Zeigen Sie, dass die Sprache $L = \{wc^n w^R \mid w \in \{a, b\}^n \wedge n \in \mathbb{N}_0\}$ nicht kontextfrei ist. Führen Sie einen Widerspruchsbeweis unter Verwendung des Pumping Lemmas für kontextfreie Sprachen.

$G: S \to aSb \mid \varepsilon$

$$L(G) = L =: \{ a^n b^n \mid n \geq 0 \}$$

"$\subseteq$" wir zeigen $L(G) \subseteq L$.

Sei $w \in L(G)$.
(Ind. über Erzeugung):

$S \xrightarrow{*} w$

$S \to aSb \xrightarrow{*} w$ $\qquad$ $S \to \varepsilon = w$

* Fall: $S \to \varepsilon = w$.
  $w = \varepsilon = a^0 b^0 \in L$ ✓

* Fall: $S \to aSb \xrightarrow{*} avb = w$
  IH: $v \in L$, das bedeutet $v = a^k b^k$
  D.h. $w = a(a^k b^k)b = a^{k+1} b^{k+1} \in L$ // ✓

**Übungsaufgabe Ü13.7.** (*Entscheidbarkeit*)

Betrachten Sie die Menge $A = \{w \in \{0,1\}^* \mid |L(M_w)| \leq 42\}$.

(a) Beweisen Sie, dass die Menge nicht semi-entscheidbar ist, indem Sie $\overline{H_0} \leq A$ zeigen.

(b) Geben Sie einen Semientscheidungsalgorithmus für $\overline{A}$ an.

Gegeben $w$, finde $v$, sodass

$M_w$ hält nicht auf $\varepsilon$ $\Longrightarrow$ $|L(M_v)| \leq 42$

$M_w$ hält auf $\varepsilon$ $\Longrightarrow$ $|L(M_v)| > 42$

Sei $v$ die Kodierung einer TM, die Folgendes macht:

- lösche Eingabe $x$
- simuliere $M_w[\varepsilon]$
- halte und akzeptiere

**Fall 1:** $M_w[\varepsilon]\uparrow$, d.h. $\forall x.\ M_v[x]\uparrow$ $\Rightarrow$ $L(M_v) = \emptyset$

$\Rightarrow$ $|L(M_v)| = 0 \leq 4$

**Fall 2:** $M_w[\varepsilon]\downarrow$ d.h. alle Wörter $x \in \Sigma^*$ werden von $M_v$ akzeptiert,

d.h. $L(M_v) = \Sigma^*$

$|L(M_v)| > 42$ !

$S \to aS \mid b$ $\qquad a^*b$

Fall: $\quad S \to b = w$

$b \in L(a^*b)$

Fall: $\quad S \to aS \xrightarrow{*} av = b$

IH: $\quad v \in L(a^*b)$, d.h. $v = a^k b$

$w = aa^k b = a^{k+1} b \in L(a^*b)$

**Übungsaufgabe Ü13.8.** (*polynomielle Reduktion*)

Mit SUBSET bezeichnen wir das Problem:

- **Gegeben:** Ein $\epsilon$-NFA $N$ mit $n$ Zuständen über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ und eine Zahl $m \leq n$.
- **Frage:** Gibt es ein Wort $w$ der Länge $m$, sodass $N$ dieses Wort nicht akzeptiert?

In Mengenschreibweise:

$$\mathsf{SUBSET} := \{(N, m) \mid N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \text{ ist } \epsilon\text{-NFA} \wedge m \leq |Q| \wedge \Sigma^m \setminus L(N) \neq \emptyset\}$$

(a) Zeigen Sie, dass SUBSET NP-vollständig ist. Verwenden Sie hierbei eine geeignete Reduktion von 3-KNF-SAT auf SUBSET.

(b) Wenden Sie Ihre Reduktion auf $(x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3)$ an. Geben Sie den konstruierten $\epsilon$-NFA graphisch an.

**Hinweis:** Betrachten Sie die Menge aller nichterfüllenden Belegungen für die Formel $F$, die genau $m$ Variablen hat, als Wörter der Länge $m$.