Prof. Javier Esparza
Philipp Czerner, Martin Helfrich

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

# Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2022 – Übungsblatt 10

- Das Übungsblatt ist in zwei Teile gegliedert: den Vorbereitungsteil, den Sie vor der Übung selbstständig bearbeiten sollen, und den Übungs-/Nachbereitungsteil, der Aufgaben enthält, die in der Übung besprochen werden und von Ihnen anschließend zur Nachbereitung verwendet werden können.
- Das ist nicht das Hausaufgabenblatt! Die Hausaufgaben finden Sie auf einem separaten Blatt.

## Vorbereitung (→ vor der Übung selbständig zu bearbeiten)

**Individualaufgabe Ü10.1.** (*Wichtige Begriffe & Kahoot*)

Überprüfen Sie, dass Sie die folgenden Begriffe oder Notationen korrekt definieren können.

- abzählbar / überabzählbar
- berechenbar / unberechenbar
- rekursiv aufzählbar
- entscheidbar
- semi-entscheidbar
- Reduktion (Beispiel: $A \leq B$, sprich: *"A ist reduzierbar auf B"*)
- Satz von Rice
- terminierend

**Individualaufgabe Ü10.2.** (*Entscheidbarkeit vs. Berechenbarkeit*)

Ordnen Sie die folgenden Satzanfänge den Satzenden so zu, dass richtige Aussagen entstehen. Sei dazu $A, B \subseteq \{0,1\}^*$:

(a) Die Funktion $\chi_A$ ist berechenbar,
(b) $A$ ist entscheidbar,
(c) $B$ ist nicht entscheidbar,

(i) wenn $A \leq B$ gilt und $B$ entscheidbar ist.
(ii) wenn $A$ entscheidbar ist.
(iii) wenn $A \leq B$ gilt und $A$ nicht entscheidbar ist.

*Lösungsskizze.* (a) → (i)/(ii), (b) → (i)/(ii), (c) → (iii).

**Individualaufgabe Ü10.3.** (*Entscheidbarkeit*)

Überprüfen Sie, ob die folgenden Behauptungen korrekt oder inkorrekt sind. Begründen Sie dann Ihre Antworten wie folgt: Wenn $L$ entscheidbar ist, beschreiben Sie einen Algorithmus, der die charakteristische Funktion $\chi_L$ berechnet. Wenn $L$ unentscheidbar ist, leiten Sie einen Widerspruch zu einem Ergebnis der Vorlesung ab.

(a) Wenn $A$ und $B$ entscheidbare Sprachen sind, dann ist $A \cap B$ entscheidbar.
(b) Wenn $A$ und $A \cup B$ entscheidbar sind, dann ist $B$ entscheidbar.

*Lösungsskizze.* Für diese Aufgabe gibt es eine Videolösung: Link

(a) Korrekt. Wenn $A$ und $B$ entscheidbar sind, dann sind die charakteristischen Funktionen $\chi_A$ und $\chi_B$ berechenbar. Wir definieren

$$\chi_{A\cap B} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \chi_A = 1 \land \chi_B = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Funktion ist intuitiv berechenbar und eine charakteristische Funktion von $A \cap B$, da

$$\chi_{A\cap B}(w) = 1 \Leftrightarrow \chi_A(w) = 1 \land \chi_B(w) = 1 \Leftrightarrow w \in A \land w \in B \Leftrightarrow w \in A \cap B.$$

Folglich ist die Menge $A \cap B$ entscheidbar.

Alternativ mit Turingmaschinen:
Sei $T_A$ DTM, die $A$ entscheidet, $T_B$ DTM, die $B$ entscheidet. DTM zu $A \cap B$: Gegeben $x$, berechne $T_A[x]$. Falls $T_A[x]$ mit 0 auf dem Band hält, lehne $x$ ab, ansonsten berechne $T_B[x]$. Hält $T_B[x]$ mit 0 auf dem Band, lehne $x$ ab, sonst akzeptiere $x$. Da $T_A$, $T_B$ die jeweiligen Mengen entscheiden, terminieren beide DTM, womit auch die DTM zu $A \cap B$ stets mit dem korrekten Ergebnis terminiert. Damit ist $A \cap B$ entscheidbar.

(b) Inkorrekt. Sei $B = \mathcal{H}_0 = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w[\epsilon]\downarrow\} \subsetneq \{0,1\}^*$ das Halteproblem auf leerem Band und $A = \{0,1\}^*$. Dann sind $A$ und $A \cup B = \{0,1\}^*$ entscheidbar, aber $B$ nicht.

$w \# x$ Hält $M_w$ [

## Übung und Nachbereitung

**Übungsaufgabe Ü10.4.** (*Reduktion*)

**Erinnerung:** $\mathcal{H} := \{w\#x : w, x \in \{0,1\}^*, M_w[x]\downarrow\}$ (*Allgemeines Halteproblem*) und $\mathcal{H}_0 := \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w[\epsilon]\downarrow\}$ (*Halteproblem auf leerem Band*)

(a) Sei $\mathcal{H}_{uvu} := \{w\#u\#v : w, u, v \in \{0,1\}^*, M_w[uvu]\downarrow\}$.
Zeigen Sie: $\mathcal{H}_{uvu}$ ist unentscheidbar, da $\mathcal{H} \le \mathcal{H}_{uvu}$.

(b) Sei $\mathcal{H}_{\Sigma^*} := \{w \in \{0,1\}^* \mid \forall x \in \Sigma^* : \ M_w[x]\downarrow\}$.
Zeigen Sie: $\mathcal{H}_{\Sigma^*}$ ist unentscheidbar, da $\mathcal{H}_0 \le \mathcal{H}_{\Sigma^*}$.

$f : \Sigma^* \to \Sigma^*$
reduziert $A$ auf $B$ gdw.
① $f$ total
② $f$ berechenbar

**Übungsaufgabe Ü10.5.** (*Allgemeine Reduktion*)

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen korrekt oder inkorrekt sind, und begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie einen Beweis bzw. ein passendes Gegenbeispiel angeben. Sei $\Sigma := \{0,1\}$.

(a) $\forall A \subseteq \Sigma^* : A \le \Sigma^*$ $\quad A \xrightarrow{f} B, \quad B \xrightarrow{g} C$

(b) $\forall A, B \subseteq \Sigma^* : A \le B \iff \overline{A} \le \overline{B}$ $\quad A \xrightarrow{g \circ f} C$ $\quad w \in A \iff f(w) \in B$

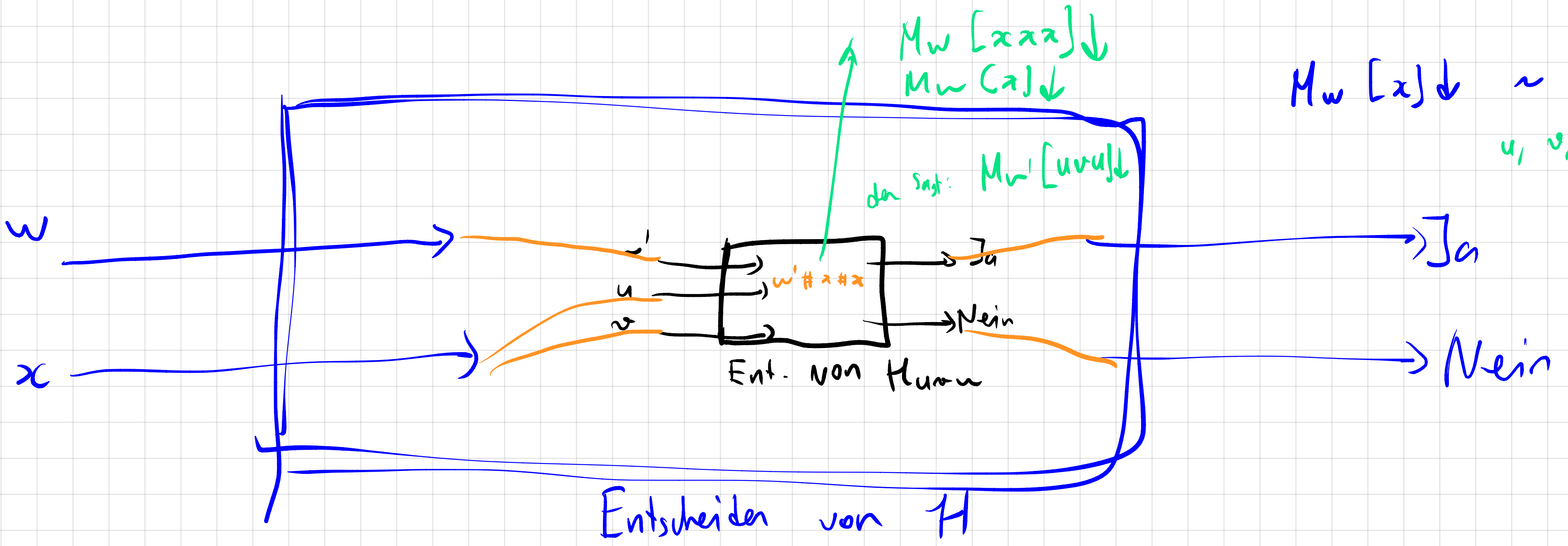
(c) $\forall A, B, C \subseteq \Sigma^* : \underline{A \le B \land B \le C \implies A \le C}$

$f(A) = B$

$w \in A \iff f(w) \in B$

das bedeutet

$w \notin A \iff f(w) \notin B$




$M_w[x]\downarrow \sim M_{w'}[uvu]\downarrow$

u, v, w' von uns zu best.

$u := \varepsilon$, $v := x$, $w' := w$ $\quad M_w[\varepsilon x \varepsilon]\downarrow \Leftrightarrow M_w[x]\downarrow$

Entscheiden bei Red.aufgaben wie diese heute haben als Eingabe:

① "Source code" ⇔ Kodierungen von TMs

(eventuell) ② u, v, ... die Eingaben der TM oben sind dec_B dec_A

"aus einem Entscheider für B einen Entscheider für A konstruieren"

dec_A(w) {

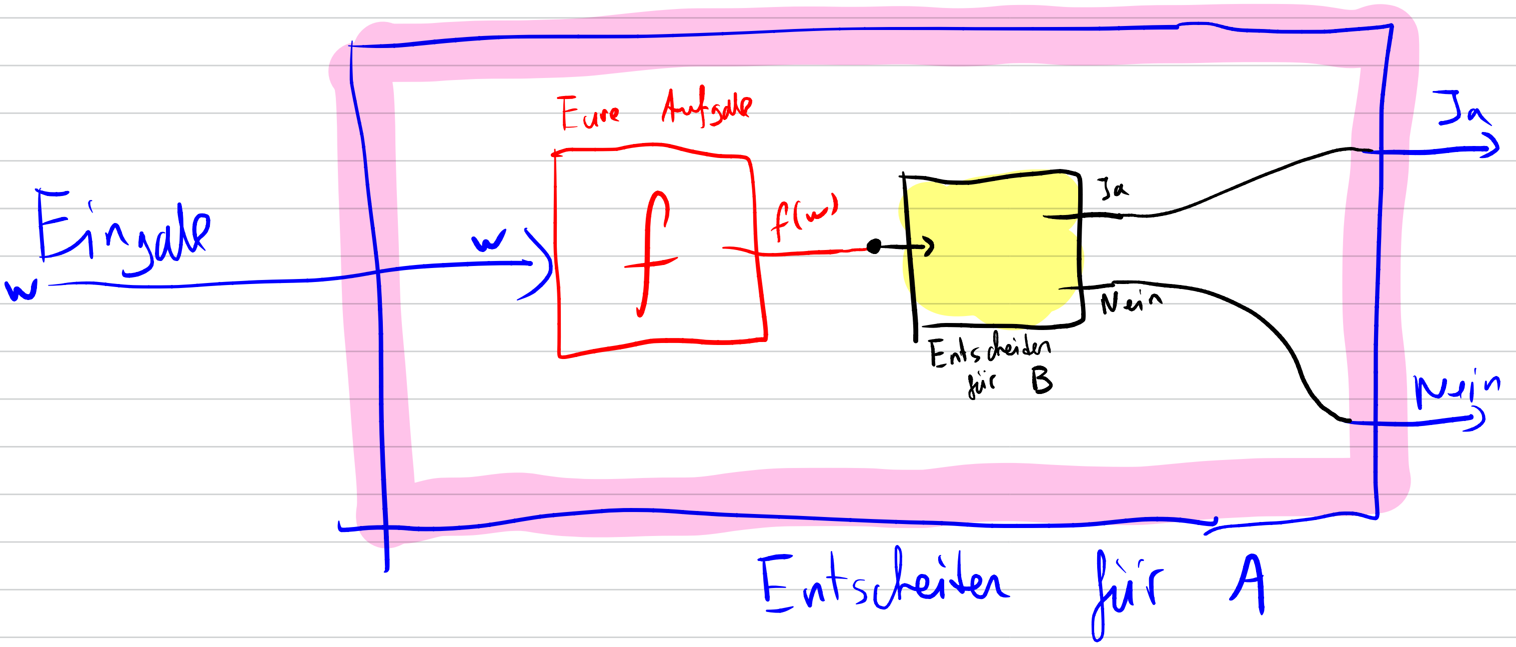
① Modifiziere Eingabe $w \longmapsto f(w)$

② Rufe dec_B(f(w)) auf

↳ Ergebnis: Ja oder Nein

③ Verwende Ergebnis um Ja/Nein für A zu antworten

}



$w \# x \quad \rightsquigarrow \quad w' \# u \# v$

$M_w[x]\downarrow$ ? $\qquad M_{w'}[uvu]\downarrow$ !

Formale Reduktion:

* Reduktion von $H$ auf $H_{uvu}$:

Wir ändern $w \# x$ auf $w \# \# x$.

$$f(\underline{w \# x}) = w \# \# x$$

Für Eingaben $w \in \Sigma^* \setminus H$, $\underline{f(w) = \epsilon}$

* Die Reduktion ist total:

Ja, per Definition für alle $w \in \Sigma^*$ definiert.

* Die Reduktion ist berechenbar!

Es gibt eine TM, die ein Trennzeichen hinzufügt.

* Die Reduktion ist korrekt:

z.Z. $z \in H \iff f(z) \in H_{uvu}$

$$\begin{aligned} w \# x \in H &\iff M_w[x]\downarrow \\ &\iff M_w[\varepsilon x \varepsilon]\downarrow \\ &\iff w \# \# x \in H_{uvu} \\ &\iff f(w \# x) \in H_{uvu} \ // \end{aligned}$$

Muster:

① Reduktion $f$ beschreiben

dann zeigen

"$A \leq B$"

i) Red. $f$ total

ii) $f$ berechenbar

iii) $f$ korrekt, d.h.

$w \in A$ gdw. $f(w) \in B$

zu beweisen

$$M_w[\varepsilon]\downarrow \iff \forall x \in \Sigma^*.\ M_{w'}[x]\downarrow$$

finde $w'$ (nicht direkt, sondern mit Worten beschreiben)

P = Hello World

P' = ignoriert Eingabe
simuliert P

Hält P' für alle Eingaben?
gdw. P hält für ε

Muster:

① Reduktion $f$ beschreiben

"Gegeben $w$, lösche die Eingabe, simuliere $M_w$ auf $\epsilon$."

② Red $f$ total:

Ja, per Def. $\forall w \in \Sigma^*$ definiert.

③ $f$ berechenbar:

"Ja, TMs können Eingaben löschen & andere TMs simulieren"

④ $w \in H$ $\iff M_w[\epsilon]\downarrow$

$\iff \forall x \in \Sigma^*.\ M_{f(w)}[x]\downarrow$

(weil $M_{f(w)}$ simuliert $M_w$ auf $x$)

$\iff f(w) \in H_{\Sigma^*}$

a) $\forall A \subseteq \Sigma^*.\quad A \leq \Sigma^*$

$\forall A \subseteq \Sigma^*.\quad \exists f$ berechen. total. $\quad w \in A \iff f(w) \in \Sigma^*$

$A = \emptyset$

Ang. es gilt $f$ total, berechenbar s.d.

$w \cancel{\notin} \emptyset \iff f(w) \cancel{\notin} \Sigma^*$

glw.

$w \in \Sigma^* \iff f(w) \notin \Sigma^*$

$f : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$

per Def. von $f$ gilt $\quad w \in \Sigma^* \implies f(w) \in \Sigma^*$

$\lightning$

b) $\forall A, B \subseteq \Sigma^*$. $A \leq B \iff \overline{A} \leq \overline{B}$

Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$ beliebig.

z.Z. $A \leq B \iff \overline{A} \leq \overline{B}$

"$\Rightarrow$" z.Z: $A \leq B \implies \overline{A} \leq \overline{B}$

Nehme an, $A \leq B$.

Daraus folgt, $\exists f: \Sigma^* \to \Sigma^*$ berechenbar & total.

$$x \in A \iff f(x) \in B$$

Es gilt natürlich

$$x \in \overline{A} \iff f(x) \in \overline{B}.$$

Somit

$$\overline{A} \leq \overline{B}.$$

**Übungsaufgabe Ü10.6.** (*Satz von Rice*)

Sei $\Sigma$ ein beliebiges Alphabet. Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen unentscheidbar sind und begründen Sie Ihre Antworten mit dem Satz von Rice (falls anwendbar). Geben Sie dabei die Menge $\mathcal{F}$ genau an und argumentieren Sie, warum die Menge nicht trivial ist (d.h. weder alle berechenbare Funktionen enthält noch leer ist).

(a) $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \{u \in \Sigma^* \mid \varphi_w(u) = 1\} \text{ ist regulär}\}$

(b) $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \forall n \in \mathbb{N}_0 : \ \varphi_w(n) = n \cdot (n + 23) + 42\}$

(c) $L_3 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \forall x \in \Sigma^* : \ \varphi_w(x) \neq |w|\}$

(d) $L_4 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \forall p \in \mathbb{N}_0. \ (|w| > p \wedge p \text{ ist prim}) \implies w_p = 0\}$

Bei (d) bezeichnet $w_p \in \Sigma$ den Buchstaben an der $p$-ten Stelle im Wort $w$ .

$\{ P \mid P$ printet "Hello World" aus$\}$

Nicht entscheidbar ob

$\varphi \in \mathcal{F} = \{ f \mid f$ berechenbar $\}$

gdw. $\mathcal{F} \neq \emptyset$ und

$\mathcal{F} \neq$ "alle Funkt."

$$L_1 = \{ w \in \{0,1\}^* \mid \overbrace{\{ u \in \Sigma^* \mid f_w(u) = 1\}}^{f_w^{-1}(1)} \text{ ist regulär} \}$$

Alle Eingaben $u$, s.d. die TM $M_w$ gibt $1$ bei $u$ aus

$$F = \{ f \mid f \text{ berechenbar} \land f^{-1}(1) \text{ ist regulär} \}$$

$g$ mit $g \in F$

d.h. $g : \Sigma^* \to \Sigma^*$ berechenbar, sodass

$g^{-1}(1)$ regulär

$$\Sigma^* = \{ u \in \Sigma^* \mid g(u) = 1 \}$$

Definiere

$$g(w) := 1$$

Dann gilt $g^{-1}(1) = \Sigma^*$ regulär.

Also $g \in F$.

Gewünscht, $h$ mit $\{ u \in \Sigma^* \mid h(u) = 1 \}$ nicht regulär

$$h^{-1}(1) = \{ 0^i 1^i \mid i \geq 0 \}$$

$$h(w) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \exists i \geq 0.\ w = 0^i 1^i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

($h$ klar berechenbar)

Es gilt $h^{-1}(1)$ nicht reg.
Das heißt $h \notin F$.

$F \neq \emptyset$ da $g \in F$
$F \neq$ "alle Funkt." da $h \notin F$

Somit ist $\varphi \in F$ unentscheidbar.
Aber daraus folgt $H_1$ unentscheidbar.