Prof. Javier Esparza
Philipp Czerner, Martin Helfrich

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

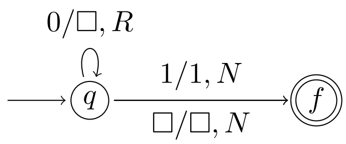
Sommersemester 2022 – Übungsblatt 9

- Das Übungsblatt ist in zwei Teile gegliedert: den Vorbereitungsteil, den Sie vor der Übung selbstständig bearbeiten sollen, und den Übungs-/Nachbereitungsteil, der Aufgaben enthält, die in der Übung besprochen werden und von Ihnen anschließend zur Nachbereitung verwendet werden können.
- Das ist nicht das Hausaufgabenblatt! Die Hausaufgaben finden Sie auf einem separaten Blatt.

Notation von TMs: Bei Turing Maschinen verwendet man eine zu PDAs ähnliche graphische Notation: Sei $M = (\{q, f\}, \{0, 1\}, \{0, 1, \Box\}, \delta, q, \Box, \{f\})$ eine TM mit δ:

$$\begin{aligned} \delta(q, \Box) &= (f, \Box, N) \\ \delta(q, 0) &= (q, \Box, R) \\ \delta(q, 1) &= (f, 1, N) \end{aligned}$$

Diese Maschine entfernt führende Nullen. Nun schreibt man auf die Transitionen $\alpha/\beta, D$ mit $\alpha, \beta \in \Gamma$ und $D \in \{L, N, R\}$. Dies bedeutet, dass der Bandbuchstabe α an der Kopf Position steht und durch β ersetzt wird. Danach bewegt sich der Kopf nach links (L), rechts (R) oder gar nicht (N). Graphisch ist dies:



Vorbereitung (→ vor der Übung selbständig zu bearbeiten)

Individualaufgabe Ü9.1. (*Wichtige Begriffe*)

Überprüfen Sie, dass Sie die folgenden Begriffe oder Notationen korrekt definieren können.

- abzählbar / überabzählbar
- berechenbar / unberechenbar
- Church-Turing These
- nichtdeterministische / deterministische Turing-Maschine (TM)
- Konfiguration einer TM
- akzeptierte Sprache einer TM
- Turing-berechenbar

- k-Band Turing-Maschine
- WHILE-Programm
- GOTO-Programm
- Konvertierung: WHILE $\to$ TM $\to$ GOTO $\to$ WHILE

Individualaufgabe Ü9.2. (*Meine erste TM*)

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geben Sie TM M an, so dass:

$$L(M) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

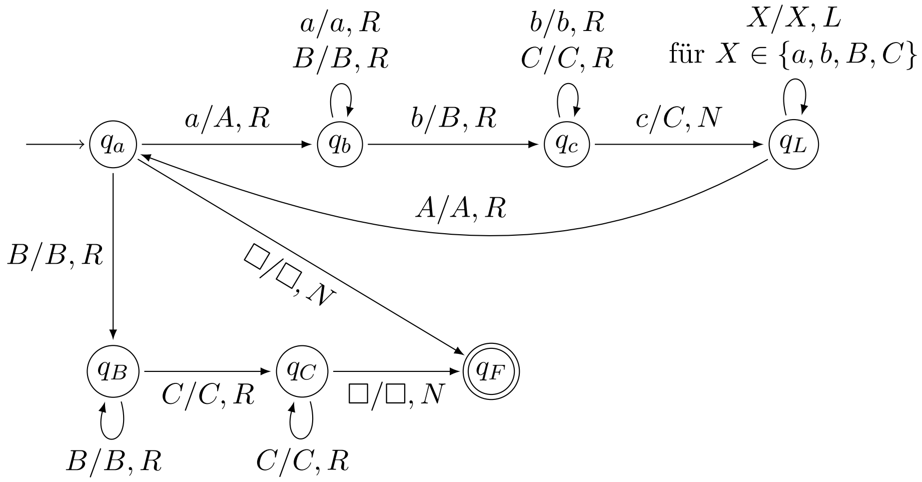
Tipp: Es gibt verschiedene Webseiten auf denen Turing Maschinen interaktiv konstruiert und simuliert werden können, z.B. `https://wimmers.github.io/turing-machine-viz/`. Beachten Sie dass diese Seite Endzustände nicht visualisiert.

Lösungsskizze. Für diese Aufgabe gibt es eine Videolösung: Link

Idee: Ersetze für jedes a je ein a, b und c durch x, wobei nach dem Ersetzen die restlichen Buchstaben der gleichen Art unverändert gelassen werden. Wenn am Ende nur noch x auf dem Band stehen, terminiere. Sonst bleibt die Berechnung in einem Nichtendzustand stecken.

Wir schreiben $\Box$ für eine leere Bandzelle.

Sei TM $M = (\{q_a, q_b, q_c, q_L, q_B, q_C, q_F\}, \{a, b, c\}, \Sigma \cup \{A, B, C, \Box\}, \delta, q_a, \Box, \{q_F\})$.



Übung und Nachbereitung

Übungsaufgabe Ü9.3. (*Zweierpotenz: TM & WHILE*)

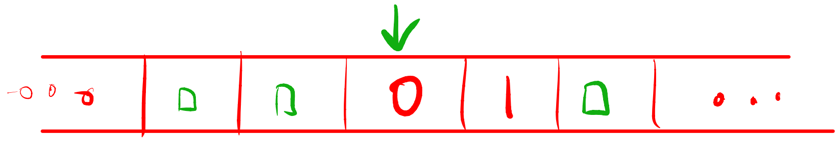
(a) Sei $f : \{0, 1\}^* \to \{0, 1\}$ die Funktion, die berechnet, ob ein Wort die Binärdarstellung einer Zweierpotenz ist[1]:

$$f(w) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } (w)_2 = 2^n \text{ für ein } n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$0^* 1 0^*$

[1]Führende Nullen sind erlaubt: $(0100)_2 = (100)_2 = 4$

github.com / ujkan



Geben Sie (graphisch) eine TM an, die $f(w)$ berechnet.
Erinnerung: Damit eine TM eine Funktion berechnet, muss das Band nach der Berechnung nur noch die Ausgabe enthalten und der Kopf der TM muss auf das erste Zeichen der Ausgabe zeigen.

(b) Geben Sie ein WHILE-Programm an, das berechnet, ob x_1 (die Eingabe) eine Zweierpotenz ist.
Erinnerung: Den Syntax von WHILE-Programmen findet man auf Folien 243 bis 246. Es gibt bei WHILE-Programmen (und GOTO-Programmen) kein Band und keinen direkten Zugriff auf die Binärrepräsentation der Eingabe. Nach dem Terminieren des Programms muss die Ausgabe in x_0 stehen.

$f: \mathbb{N} \to \{0,1\}$

$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{wenn Zweierpot.} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Die Eingabe: x_1
Die Ausgabe: x_0

Übungsaufgabe Ü9.4. (*GOTO → WHILE*)

(a) Welche Ausgabe (in x_0) produziert das folgende GOTO-Programm für die Eingaben $16, 3$ und 42 in x_1? Was macht das Programm im Allgemeinen für die Eingabe $x_1 > 0$? Terminiert es immer?

M_1: $x_0 := x_0 + 1$
M_2: **if** $x_1 = 1$ **goto** M_{16}
M_3: $x_2 := x_1$
M_4: $x_3 := 0$
M_5: $x_4 := 4$
M_6: **if** $x_2 = 1$ **goto** M_{12}
M_7: **if** $x_2 = 0$ **goto** M_{14}
M_8: $x_2 := x_2 - 2$
M_9: $x_3 := x_3 + 1$
M_{10}: $x_4 := x_4 + 6$
M_{11}: **goto** M_6
M_{12}: $x_1 := x_4$
M_{13}: **goto** M_1
M_{14}: $x_1 := x_3$
M_{15}: **goto** M_1
M_{16}: HALT

x_0	0	1			
x_1	16	16			
x_2	0	16	14	..	0
x_3	0	0	1	...	8
x_4	0	4	10	...	52

5

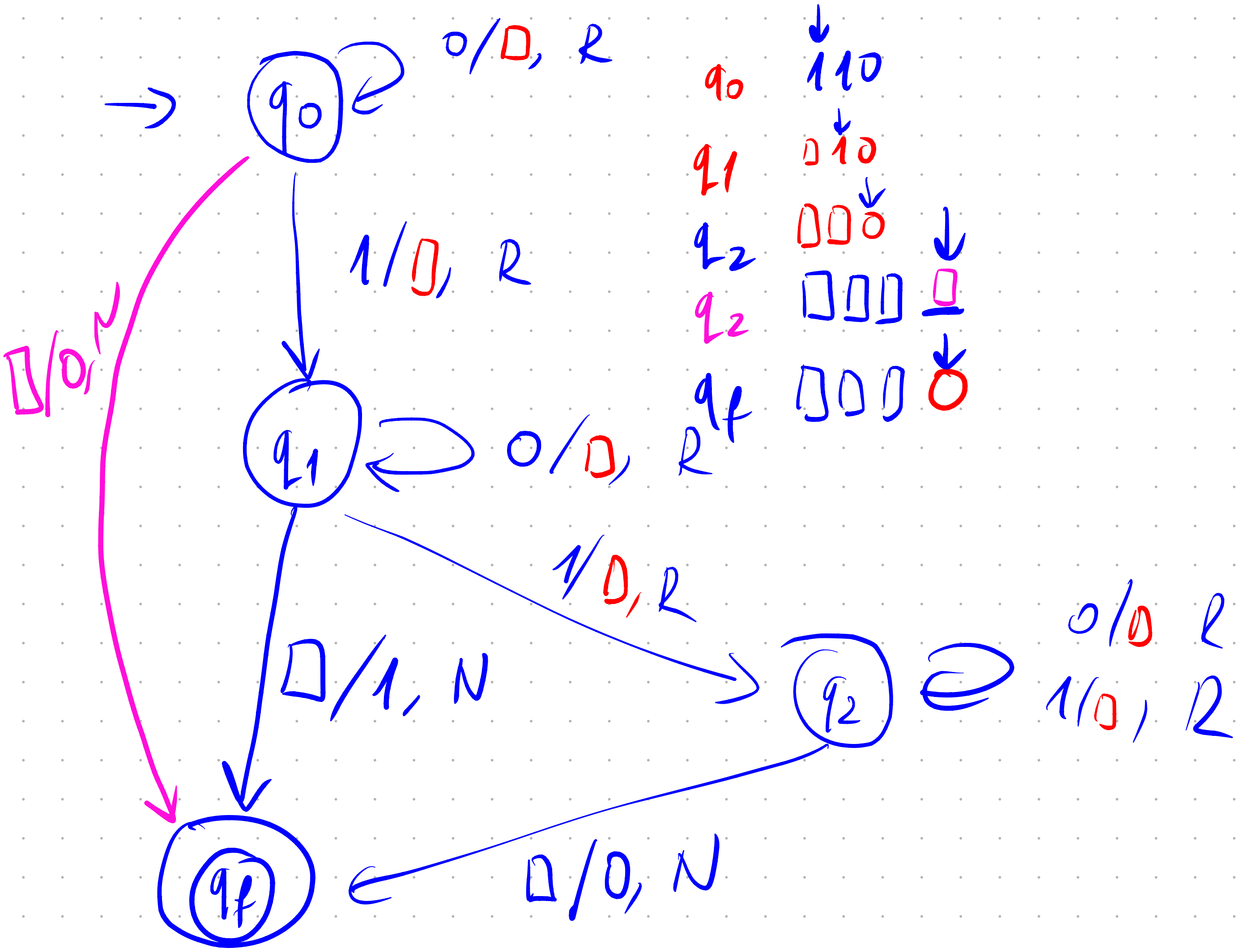
8 ... 1

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{falls } x \text{ gerade} \\ 3x+1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$1 \to 4 \to 2$

(b) Übersetzen Sie das GOTO-Programm mit Hilfe der Konstruktion aus der Vorlesung (Satz 5.24, Folie 253f) in ein WHILE-Programm. Nutzen Sie diese Vorlage:

pc :=
while **do**
  if $pc = 1$ **then** **end**
  if $pc = 2$ **then** **end**
  if $pc = 3$ **then** **end**
  if $pc = 4$ **then** **end**
  if $pc = 5$ **then** **end**
  if $pc = 6$ **then** **end**
  if $pc = 7$ **then** **end**
  if $pc = 8$ **then** **end**



q0
0/□, R
1/□, R
□/0, N
q1
0/□, R
1/□, R
□/1, N
q2
0/□ R
1/□, R
□/0, N
qf
q0 110
q1 □10
q2 □□0
q2 □□□□
qf □□□0

Eingabe: x_1

Ausgabe: $x_0 = \begin{cases} 1 & \text{falls } x_1 \text{ Zweierpot.} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$36 \xrightarrow{0} 18 \xrightarrow{0} 9 \xrightarrow{1} 4$

```
WHILE x1 ≠ 0 DO
    x2 := x1 MOD 2
    x1 := x1 DIV 2
    IF x1 = 0 THEN
        x0 := 1
    ELSE IF x2 = 0 THEN    // bisher OK
        x0 := x0
    ELSE    // keine 2er Potenz
        x0 := 0
        x1 := 0
    END
  END
END
```

x_1	5	2	0
x_2	0	1	
x_0			0

if $pc = 9$ **then** **end**
if $pc = 10$ **then** **end**
if $pc = 11$ **then** **end**
if $pc = 12$ **then** **end**
if $pc = 13$ **then** **end**
if $pc = 14$ **then** **end**
if $pc = 15$ **then** **end**
if $pc = 16$ **then** **end**
end

M_1: $x_0 := x_0 + 1$
M_2: **if** $x_1 = 1$ **goto** M_{16}
M_3: $x_2 := x_1$
M_4: $x_3 := 0$
M_5: $x_4 := 4$
M_6: **if** $x_2 = 1$ **goto** M_{12}
M_7: **if** $x_2 = 0$ **goto** M_{14}
M_8: $x_2 := x_2 - 2$
M_9: $x_3 := x_3 + 1$
M_{10}: $x_4 := x_4 + 6$
M_{11}: **goto** M_6
M_{12}: $x_1 := x_4$
M_{13}: **goto** M_1
M_{14}: $x_1 := x_3$
M_{15}: **goto** M_1
M_{16}: HALT

PC := 1
WHILE PC ≠ 0 DO
IF PC = 1 THEN $x_0 := x_0 + 1$; PC++ END
IF PC = 2 THEN IF $x_1 = 1$ THEN PC := 16 ELSE PC++ END END
IF PC = 3 THEN $x_2 := x_1$; PC++ END
IF PC = 4 THEN

IF PC = 11 THEN PC := 6 END

IF $x = n$ THEN P

$\Leftrightarrow$ IF $x = n$ THEN P ELSE $x_0 := x_0$