Prof. Javier Esparza
Philipp Czerner, Martin Helfrich

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2022 – Übungsblatt 8

- Das Übungsblatt ist in zwei Teile gegliedert: den Vorbereitungsteil, den Sie vor der Übung selbstständig bearbeiten sollen, und den Übungs-/Nachbereitungsteil, der Aufgaben enthält, die in der Übung besprochen werden und von Ihnen anschließend zur Nachbereitung verwendet werden können.
- Das ist nicht das Hausaufgabenblatt! Die Hausaufgaben finden Sie auf einem separaten Blatt.

Notation von PDA-Regeln 2: Auf Übungsblatt 7 wurde eine graphische Notation für PDAs eingeführt. Für einige häufige Fälle führen wir nun weitere Kurzschreibweisen ein. Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$ ein PDA mit $\Gamma = \{X_1, X_2, ..., X_k\}$ und $a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$. Wir schreiben

- $a, \Gamma/\varepsilon$ statt $a, X_1/\varepsilon, ..., a, X_k/\varepsilon$,
- $a, \Gamma/\alpha\Gamma$ statt $a, X_1/\alpha X_1, ..., a, X_k/\alpha X_k$, mit $\alpha \in \Gamma^*$, und
- a statt $a, \Gamma/\Gamma$.

Vorbereitung (→ vor der Übung selbständig zu bearbeiten)

Individualaufgabe Ü8.1. (*Wichtige Begriffe*)

Überprüfen Sie, dass Sie die folgenden Begriffe oder Notationen korrekt definieren können.

- deterministischer Kellerautomat (DPDA)
- deterministische kontextfreie Sprache (DCFL)
- Abschlusseigenschaften von DCFL
- Abschlusseigenschaften von CFL
- Konversion CFG ↔ PDA

Individualaufgabe Ü8.2. (*Automata Tutor: "DPDAs"*)

Lösen Sie die Aufgaben Ü8.2 (a–b) auf Automata Tutor.[1] **Achtung:** Für die Übungsaufgaben haben Sie beliebig viele Versuche. Für die Aufgaben in Hausaufgabenblatt 8 nicht! Ihr konstruierter Automat darf nicht zu viele Zustände haben (siehe Aufgabenstellung). Wenn Sie einen ε-Übergang angeben wollen, geben Sie statt ε bitte `E` ein (siehe Hinweisbox über Canvas) und beim Entfernen eines Kellersymbols, lassen Sie den Teil hinter "/" bitte leer (Beispiel: "`a`, $X/$"). Wir haben diese Woche die Simulation aktiviert. Nutzen Sie die Simulation, um Ihren Automaten zu testen.

[1] Wenn Sie Automata Tutor noch nicht verwendet haben, folgen Sie erst den Schritten in Ü1.2, um sich richtig zu registrieren.

Übung und Nachbereitung

Übungsaufgabe Ü8.3. (*CFG $\leftrightarrow$ PDA*)

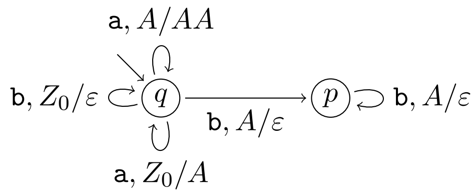
Wie Sie in der Vorlesung gesehen haben (Folie 198ff), können kontextfreie Grammatiken und Pushdown-Automaten sich gegenseitig simulieren. Wir üben nun diese Übersetzungen zwischen CFG und PDA.

(a) Überführen Sie die folgende CFG $G = (\{S\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mithilfe von Satz 4.54 in einen PDA M mit $L_\varepsilon(M) = L(G)$:

$$S \to SS \mid aSb \mid bSa \mid c$$

(b) Übersetzen Sie den folgenden PDA $M = (\{q, p\}, \{a, b\}, \{Z_0, A, B\}, q, Z_0, \delta)$ in eine CFG G mit $L_\varepsilon(M) = L(G)$, wobei δ definiert ist durch:

$$\delta(q, a, A) = \{(q, AA)\} \qquad \delta(q, b, A) = \{(p, \epsilon)\} \qquad \delta(p, b, A) = \{(p, \epsilon)\}$$
$$\delta(q, a, Z_0) = \{(q, A)\} \qquad \delta(q, b, Z_0) = \{(q, \epsilon)\}$$



Übungsaufgabe Ü8.4. (*Zählerautomaten*)

Wir beschränken in dieser Aufgabe das Kelleralphabet von PDAs auf nur ein einziges Symbol und untersuchen die Ausdrucksmächtigkeit dieser Automaten etwas genauer.

(a) Geben Sie eine äquivalente Formulierung als Automaten, die statt des Kellers einen Zähler verwenden, an.

(b) Geben Sie einen solchen Automaten an, der eine nicht reguläre Sprache akzeptiert.

(c) Nun betrachten wir eine Variante, die zusätzlich noch ein Kellersymbol erlaubt, um den Anfang des Kellers zu markieren. Geben Sie wieder eine Charakterisierung mit Zählern an und einen Automaten, der eine kontextfreie Sprache akzeptiert, die von keinem Automaten im vorherigen Modell akzeptiert wird.

(d) Geben Sie eine kontextfreie Sprache an, die von keiner der betrachteten Automatenklassen akzeptiert wird.

Knobelaufgaben: Die folgenden Aufgaben können alle unabhängig voneinander gelöst werden:

(a) Geben Sie einen solchen Automaten an, der die Sprache $\overline{L}$ für $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^R\}$ akzeptiert.

(b) Nun betrachten wir deterministische Varianten dieser Automaten. Zeigen Sie zunächst, dass die Klasse dieser deterministischen Automaten unter dem Sprachkomplement abgeschlossen ist.

(c) Zeigen Sie, dass kein deterministischer Zählerautomat die Sprache L akzeptiert. *Hinweis:* Wie viele verschiedene Zustände kann ein Automat beim Lesen von Worten der Länge n erreichen?

(d) Zeigen Sie aus den vorherigen Aussagen, dass nichtdeterministische Automaten mit einem Zähler strikt mächtiger sind als deterministische Automaten mit beliebig vielen Zählern.

(a) Überführen Sie die folgende CFG $G = (\{S\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mithilfe von Satz 4.54 in einen PDA M mit $L_\varepsilon(M) = L(G)$:

$$S \to SS \mid aSb \mid bSa \mid c$$

$S \to SS \mid aSB \mid bSA \mid c$

$B \to b$

$A \to a$

$ab \; c \; ab$

$\delta(q, a, S) = \{(q, SB)\}$

$\delta(q, b, S) = \{(q, SA)\}$

$\delta(q, \epsilon, S) = \{(q, SS)\}$

$\delta(q, c, S) = \{(q, \epsilon)\}$

$\delta(q, b, B) = \{(q, \epsilon)\}$

$\delta(q, a, A) = \{(q, \epsilon)\}$

$$\delta(q, a, S) = \{(q, SB)\}$$
$$\delta(q, b, S) = \{(q, SA)\}$$
$$\delta(q, \epsilon, S) = \{(q, SS)\}$$
$$\delta(q, c, S) = \{(q, \epsilon)\}$$
$$\delta(q, b, B) = \{(q, \epsilon)\}$$
$$\delta(q, a, A) = \{(q, \epsilon)\}$$

$$a\,b\,c\,a\,b$$

$$(q, abcab, S)$$
$$\rightarrow (q, bcab, SB)$$
$$\rightarrow (q, cab, SAB)$$
$$\rightarrow (q, ab, AB)$$
$$\rightarrow (q, b, B)$$
$$\rightarrow (q, \epsilon, \epsilon)$$

bei CFG $\longrightarrow$ PDA sahen die Prods so aus:

$$A \to a\, B_1 \ldots B_k$$

Wdh

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$

$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to P_e(Q \times \Gamma^*)$

$(p, \alpha) \in \delta(q, a, Z)$

means: when reading a in state q with Z on top of stack go to p and replace Z with α.

POP : $\alpha = \varepsilon$

PUSH : $\alpha = Z'Z$

Config: $(q, w, \alpha) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$

PDA in state q, waiting to read w, with stack α.

Start config for any $w \in \Sigma^*$: (q_0, w, Z_0)

$\boxed{\to_M}$ transitions $\quad (q, aw, Z\alpha) \longrightarrow_M \begin{cases} (p, w, \beta\alpha) & (p,\beta) \in \delta(q,a,Z) \\ (p, aw, \beta\alpha) & (p,\beta) \in \delta(q,\varepsilon,Z) \end{cases}$

2 ways of acceptance:

① Final state

$$L_F(M) := \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists f \in F, \alpha \in \Gamma^*: \\ (q_0, w, Z_0) \xrightarrow{*}_M (f, \varepsilon, \alpha) \end{array} \right\}$$

② Empty stack

$$L_\varepsilon(M) := \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; \exists q \in Q \, (q_0, w, Z_0) \xrightarrow{*}_M (q, \varepsilon, \varepsilon) \right\}$$

CFG $\longrightarrow$ PDA

Let all prods be: $A \to b B_1 \dots B_k$ with $b \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$

then: $M := (\{q\}, \Sigma, V, q, S, \delta)$

$$(A \to b\alpha) \in P \implies \delta(q, b, A) \ni (q, \alpha)$$

e.g. $S \to aSa \mid bSb \mid \varepsilon \;\to\; S \to aSA \mid bSB \mid \varepsilon$

$A \to a$

$B \to b$

$$\delta(q, a, S) = \{(q, SA)\}$$

$$\delta(q, b, S) = \{(q, SB)\}$$

$$\delta(q, \varepsilon, S) = \{(q, \varepsilon)\}$$

$$\delta(q, a, A) = \{(q, \varepsilon)\}, \quad \delta(q, b, B) = \{(q, q)\}$$

$$\underline{A \to b\, B_1 B_2}$$

$$B_1 \to a\, C_1$$

$$\delta(q, b, A) \ni (q, B_1 B_2)$$

$$\longrightarrow (q, ba, A)$$

$$\longrightarrow (q, a, B_1 B_2)$$

$$\longrightarrow (q, \varepsilon, C_1 B_2)$$

PDA $\rightarrow$ CFG $\qquad G = (V, \Sigma, P, S)$

$V := (Q \times \Gamma \times Q) \cup \{S\}$

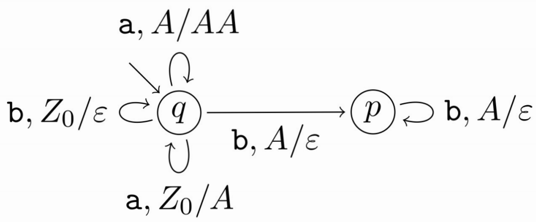
$S \rightarrow [q_0, Z_0, q] \quad \underline{\forall q \in Q.}$

$\delta(q, b, Z) \ni (p, Z_1 \ldots Z_k), \quad \forall r_1, \ldots, r_k \in Q$

$[q, Z, r_k] \rightarrow b\, [p, Z_1, r_1][r_1, Z_2, r_2] \ldots [r_{k-1}, Z_k, r_k]$

mit $L_\varepsilon(M) = L(G)$, wobei δ definiert ist durch:

$$\delta(q,a,A) = \{(q,AA)\} \qquad \delta(q,b,A) = \{(p,\epsilon)\} \qquad \delta(p,b,A) = \{(p,\epsilon)\}$$
$$\delta(q,a,Z_0) = \{(q,A)\} \qquad \delta(q,b,Z_0) = \{(q,\epsilon)\}$$



$S \rightarrow [q, Z_0, q] \mid [q, Z_0, p]$

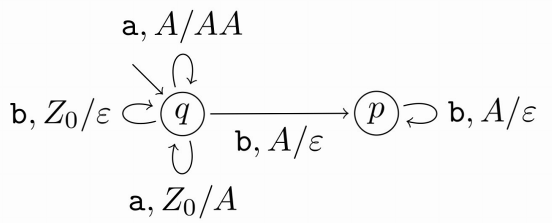
$\delta(q, b, Z) \ni (p, Z_1 \dots Z_k), \quad \forall r_1, \dots, r_k \in Q$

$[q, Z, r_k] \to b\,[p, Z_1, r_1][r_1, Z_2, r_2] \dots [r_{k-1}, Z_k, r_k]$

G mit $L_\varepsilon(M) = L(G)$, wobei δ definiert ist durch:

$\delta(q, a, A) = \{(q, AA)\}$ $\quad \delta(q, b, A) = \{(p, \epsilon)\}$ $\quad \delta(p, b, A) = \{(p, \epsilon)\}$

$\delta(q, a, Z_0) = \{(q, A)\}$ $\quad \delta(q, b, Z_0) = \{(q, \epsilon)\}$



$\delta(q, a, Z_0) = \{(q, A)\}$

$[q, Z_0, p] \to a\,[q, A, p]$

$[q, Z_0, q] \to a\,[q, A, q]$

$\delta(q, b, A) = \{(p, \epsilon)\}$

$[q, A, p] \to b$

$[q, Z_0, p] \to a\,[q, A, p] \to ab$

$\delta(q, a, A) = \{(q, AA)\}$

$[q, A, p] \to a\,[q, A, q][q, A, p]$

$\quad | \; a\,[q, A, p][p, A, p]$

$[q, A, q] \to a\,[q, A, \overset{?}{q}][\overset{p}{q}, A, q]$

$\delta(p, b, A) = \{(p, \epsilon)\}$

$[p, A, p] \to b$

$\delta(q, b, Z_0) = \{(q, \epsilon)\}$

$[q, Z_0, q] \to b$

$\delta(q, a, Z_0) = \{(p, AAZ_0)\}$

$[q, Z_0, f] \to a\,[p, A, q]$

$[\circ\ A\ \circ]$

$[\circ\ Z_0\ \circ]$

Liest Wörter w, hat Zähler $\underline{c}$.

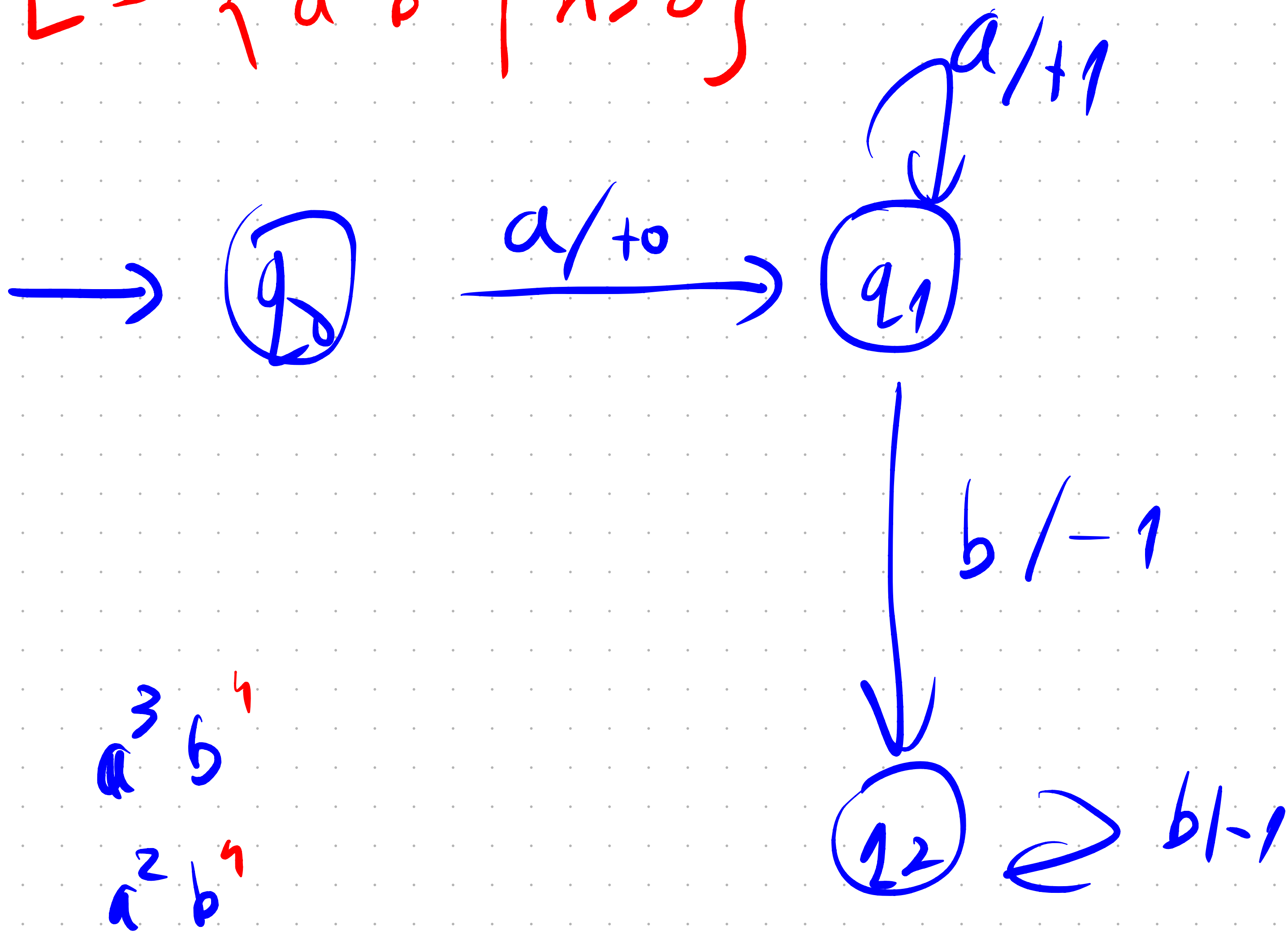
Anfang: $c = 1$

Operationen: $(q, a, c) \longrightarrow \begin{cases} (p, c+1) \\ (p, c-1) \end{cases}$

Wenn $c=0$, steckt Automat "fest"

Akzeptanz: $c = 0$

$L = \{ a^n b^n \mid n > 0 \}$

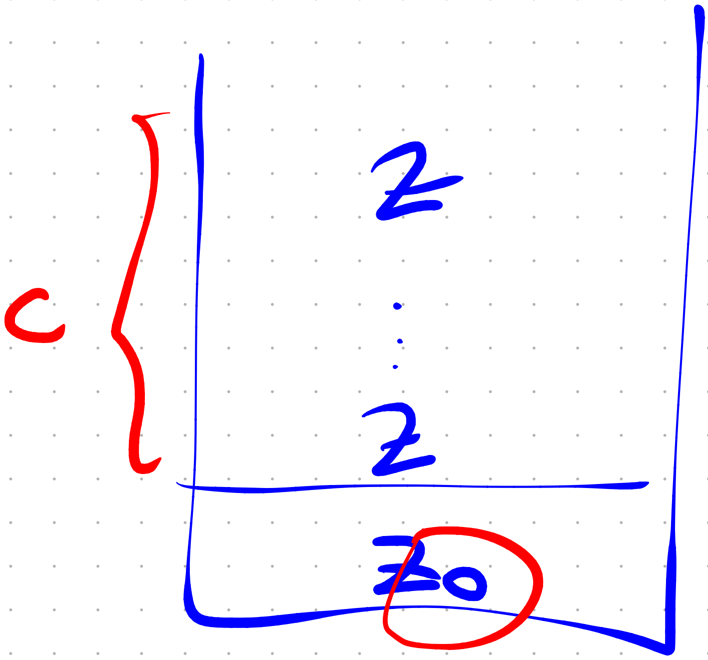


1 $a^3 b^4$

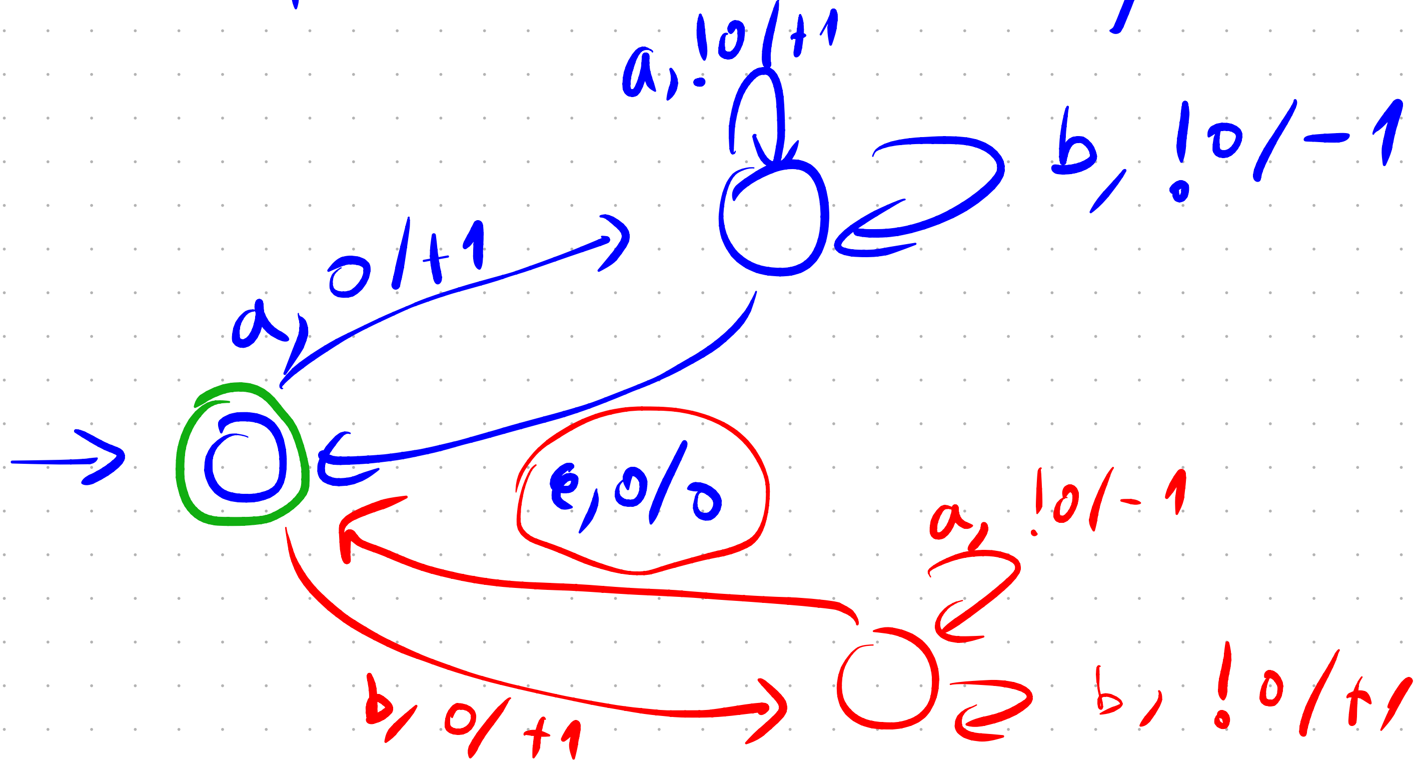
1 $a^2 b^4$

2 $a b^4$

3 b^4


c
z
z
z0

$L = \{ w \mid |w|_a = |w|_b \}$



aaabbbab