Prof. Javier Esparza
Philipp Czerner, Martin Helfrich

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2022 – Übungsblatt 12

Individualaufgabe Ü12.1. (*Wichtige Begriffe*)

Überprüfen Sie, dass Sie die folgenden Begriffe oder Notationen korrekt definieren können.

- $time_M(w)$ und $ntime_M(w)$
- $TIME(f(n))$ und $NTIME(f(n))$
- Landau-Notation (oder auch $\mathcal{O}$-Notation): $\mathcal{O}(n), \mathcal{O}(2^n), \ldots$
- P und NP
- P $\stackrel{?}{=}$ NP
- NP-hart (oder auch auch: "NP-schwer") $A \leq B$ für   B NP-complete
- NP-vollständig   gilt $\forall A \in NP.\ A \leq_p B$
- Zertifikat und polynomiell beschränkter Verifikator
- polynomielle Reduktion
- $A \leq_p B$ (sprich: *"A ist polynomiell reduzierbar auf B"*)
- Die Probleme[1]: HAMILTON, RUCKSACK, SAT, 3KNF-SAT, FÄRBBARKEIT (COL), 3COL, MENGENÜBERDECKUNG (MÜ), CLIQUE, PARTITION, BIN PACKING, TRAVELLING SALESMAN (TSP)

[1] Wir lernen viele dieser Probleme erst in den kommenden Vorlesungen kennen. Sie müssen nicht schon zum jetzigen Zeitpunkt alle Probleme kennen / verstehen.

Individualaufgabe Ü12.2. (*TSP ist NP-vollständig*)

Sie kennen bereits das Problem HAMILTON $:= \{G \mid G$ enthält einen Hamiltonkreis$\}$. Dieses Problem ist **NP**-vollständig. Zeigen Sie nun, dass das Travelling-Salesman-Problem (TSP) ebenfalls **NP**-vollständig ist.

TSP:

- Eingabe: $n \times n$ Matrix M mit $M_{i,j} \in \mathbb{N}$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.
- Frage: Gibt es eine "Rundreise" der Länge $\leq k$.

Eine Rundreise ist eine Permutation π von $[1; n]$, also ein einfacher Kreis, der jede Insel einmal enthält. Die Länge der Rundreise ist die Summe der Kosten der einzelnen Reisen, also $\Sigma_{i=1}^{n} M_{\pi_i,\pi_j}$ (dabei ist π_i der i-te Eintrag der Permutation, beginnend bei 0, und π_j ist der Eintrag für die nächste Insel, also $j = (i+1)\%n$).

Übungsaufgabe Ü12.3. (*Stundenplan*)

In dieser Aufgabe betrachten wir das STUNDENPLAN-Problem:

- **Eingabe**: Endliche Mengen S (Studierende), V (Vorlesungen) und T (Termine) und eine Relation $R \subseteq S \times V$. Dabei bedeutet $(s, v) \in R$, dass s die Vorlesung v besuchen möchte.
- **Frage**: Gibt es eine Abbildung $f : V \to T$, so dass alle Studierenden einen überschneidungsfreien Stundenplan haben, also

VL ⟷ Knoten

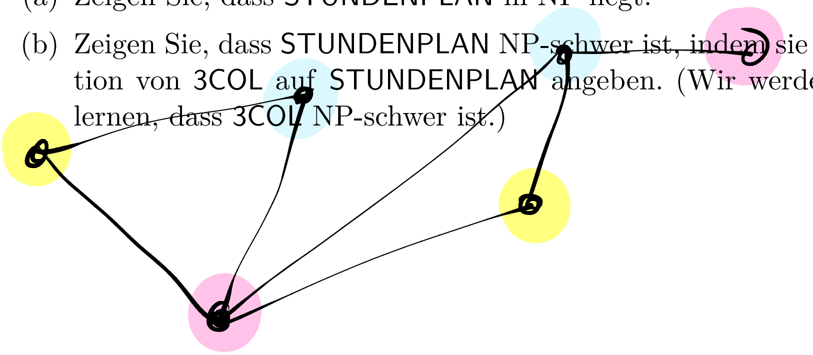
$$(s, v_1) \in R \wedge (s, v_2) \in R \wedge v_1 \neq v_2 \implies f(v_1) \neq \underline{f(v_2)},$$

Farben ⟷ Termine

$$\{v_1, v_2\} \in E \wedge v_1 \neq v_2 \Rightarrow c(v_1) \neq c(v_2)$$

(a) Zeigen Sie, dass STUNDENPLAN in NP liegt.

(b) Zeigen Sie, dass STUNDENPLAN NP-schwer ist, indem sie eine polynomielle Reduktion von 3COL auf STUNDENPLAN angeben. (Wir werden in der Vorlesung noch lernen, dass 3COL NP-schwer ist.)



a) Gegeben einen Stundenplan f, prüfe

for each $s \in S$:
  for each $(v_1, v_2) \in V \times V$:
    if $(s, v_1) \in R$ and $(s, v_2) \in R$ and $v_1 \neq v_2$:
      if $f(v_1) = f(v_2)$:
        return false

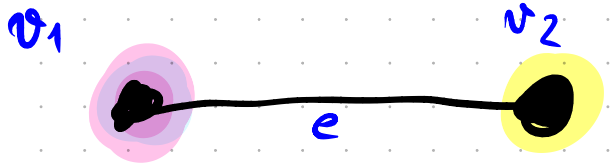
return true

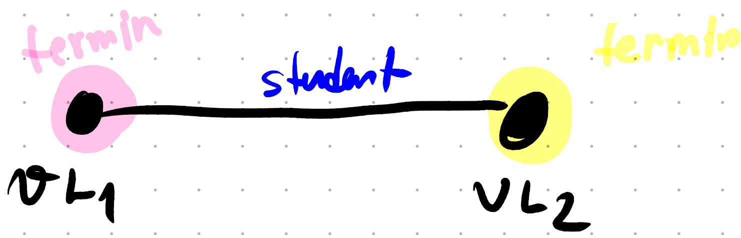
Laufzeit $O(|S| \times |V|^2)$

Gegeben $G = (V, E)$, konstruiere (S, V', T, R), <u>sodass</u>

G ist 3-färbbar <u>gdw</u> (S, V', T, R) einen überschneidungsfreien Stundenplan hat

$G \in 3COL \iff (S, V', T, R) \in STUNDENPLAN$





Konstruktion der SP-Instanz vom 3COL-Instanz.

$V' := V$

$T := \{1, 2, 3\}$

$S := E$

$R := \{(\{v_1, v_2\}, v) \in S \times V \mid v \in \{v_1, v_2\}\}$

$\hookrightarrow$ in polynomieller Zeit machbar

Nun bleibt zu zeigen:

Eine 3-Färbung $c: V \to \{1,2,3\} \longleftrightarrow f: \underbrace{V'}_{V} \to \underbrace{T}_{\{1,2,3\}}$

"$\Rightarrow$" Sei $G=(V,E)$ mit $c: V \to \{1,2,3\}$ gefärbt.
Weiterhin sei (S, V', T, R) die entsprechende Konstruktion (wie oben gezeigt)

$V' := V$
$T := \{1,2,3\}$
$S := E$
$R := \{(\{v_1, v_2\}, v) \in S \times V \mid v \in \{v_1, v_2\}\}$

Setze $f := c$.

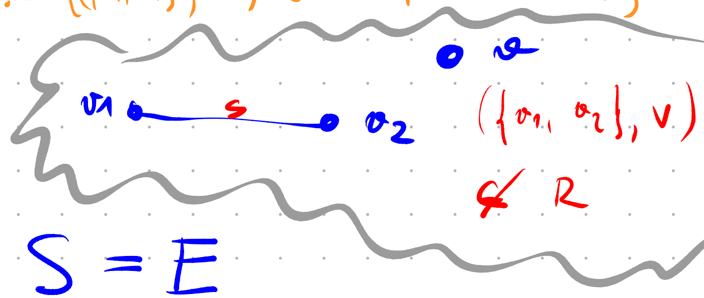
Beh: f ist überschn.-freien SP.

...ldungsfreien Stundenplan haben, also

zz $(s, v_1) \in R \wedge (s, v_2) \in R \wedge v_1 \neq v_2 \implies f(v_1) \neq f(v_2)$,

VL $\longleftrightarrow$ Knoten

Farben $\longleftrightarrow$ Termine



Seien $(s, v_1) \in R \wedge (s, v_2) \in R$ mit $v_1 \neq v_2$.
Aus den Def. von R wissen wir: $s = \{v_1, v_2\} \in S = E$.
Da $v_1 \neq v_2$ und $\{v_1, v_2\} \in E$ gilt

$$c(v_1) \neq c(v_2)$$

Somit $f(v_1) = f(v_2)$ $\square$

"$\Leftarrow$" Sei $f: V' \longrightarrow T$ ein üschfreier SP für die Instanz $(S, V', T, R) \in$ STUNDEN, die zu einem Graphen $G = (V, E)$ entspricht (wie oben konstruiert: $V = V'$, $E = S$),

wir behaupten, G hat 3-Färbung $f: V' \to \underset{\{1,2,3\}}{T}$

i) $|\operatorname{im}(f)| = 3$ folgt unmittelbar aus $T = \{1,2,3\}$

ii) $\forall \{v_1, v_2\} \in E.\ v_1 \neq v_2 \implies f(v_1) \neq f(v_2)$

Wir zeigen nun (ii)

Seien $\{v_1, v_2\} \in E$ mit $v_1 \neq v_2$ beliebig.

Es gilt per Def. von R:

$$(\{v_1, v_2\}, v_1) \in R \quad \wedge \quad (\{v_1, v_2\}, v_2) \in R$$

Somit gilt

$$f(v_1) \neq f(v_2)$$

(da $v_1 \neq v_2$, und $(S, V', T, R) \in$ STUND...)

...tungsfreien Stundenplan haben, also

VL $\longleftrightarrow$ Knoten

$$(s, v_1) \in R \wedge (s, v_2) \in R \wedge v_1 \neq v_2 \implies f(v_1) \neq f(v_2),$$

Farben $\longleftrightarrow$ Termine

$a \lor b$ $\quad a \land b$ $\quad a \land \neg a$

Übungsaufgabe Ü12.4. (*SAT-Varianten*)

Wir betrachten verschiedene Varianten von SAT, die auch NP-vollständig sind.

In der Vorlesung werden wir das NP-vollständige Problem 3KNF-SAT kennen lernen. Dies führen wir hier vorab schon einmal ein, da es als Einschränkung von SAT die Reduktion leichter macht.
Sei X eine Menge an Variablen. Die Menge der *Literale* ist $L := X \cup \{\neg x : x \in X\}$, enthält also alle Variablen und Negationen von Variablen. Eine *k-Klausel* ist eine Formel der Form $l_1 \lor l_2 \lor \ldots \lor l_k$ mit $l_1, \ldots, l_k \in L$, und eine Formel F ist in *k-konjunktiver Normalform (k-KNF)*, wenn $F = F_1 \land F_2 \land \ldots \land F_n$, wobei $F_1, \ldots, F_n$ jeweils k-Klauseln sind. Das Problem 3KNF-SAT ist nun

- **Eingabe**: Aussagenlogische Formel F in 3-KNF
- **Frage**: Ist F erfüllbar?

Ein Beispiel für eine Instanz wäre also $(\neg x \lor y \lor z) \land (x \lor \neg y \lor z) \land (x \lor y \lor \neg z)$.

Wir betrachten zusätzlich zu 3KNF-SAT noch weitere Varianten von SAT, die auch NP-vollständig sind. Zeigen Sie diese NP-Vollständigkeit, indem Sie für jede Variante X eine Reduktion 3KNF-SAT $\leq_p X$ angeben und $X \in \mathrm{NP}$ zeigen.

(a) 3-OCC-KNF-SAT:

- **Eingabe**: Eine Formel F in KNF, bei der jede Variable höchstens dreimal auftritt.

$(a_1 \lor a_2 \lor a_3)$
$\land (b_1 \lor b_2 \lor \neg b_3)$
$\land (a_1 \lor \neg a_2 \lor \neg b_1)$

Ziel: $F \in$ 3SAT

$\longleftrightarrow F' \in$ 3-OCC-KNF-SAT

$\underbrace{a \land (\neg a \lor b) \land (b \lor \neg a \lor a)}_{\text{ungültige Eingabe}}$

$$(x \ \_\_ \ ) \land (\neg x \ \_\_ \ ) \land (x \ \_\_ \ ) \land (\neg x \ \_\_ \ )$$

$$(x_1 \ \_\_ \ ) \land (\neg x_2 \ \_\_ \ ) \land (x_3 \ \_\_ \ ) \land (\neg x_4 \ \_\_ \ )$$

$$\land \ (x_1 \leftrightarrow x_2, \quad x_2 \leftrightarrow x_3, \quad x_3 \leftrightarrow x_4,$$
$$\cancel{x_1 \leftrightarrow x_3}, \quad \cancel{x_2 \leftrightarrow x_4},$$
$$\cancel{x_1 \leftrightarrow x_4} \ )$$

$$a \leftrightarrow b \rightsquigarrow (\neg a \lor b) \land (a \lor \neg b)$$

$$a \to b$$

$$\begin{tikzcd} x_1 \arrow[r] & x_2 \arrow[r] & x_3 \arrow[r] & x_4 \arrow[lll, bend left] \end{tikzcd} \equiv (\neg a \lor b)$$

Construktion: gegeben:

$$F = K_1 \wedge \ldots \wedge K_n \qquad \text{vars } \{x_1, \ldots, x_v\}$$

$$K_i = (L_{i,1} \vee L_{i,2} \vee L_{i,3})$$

Reduktion f:

$$L_{i,j} \overset{f}{\longmapsto} \begin{cases} x_{k,i} & \text{falls } L_{i,j} = x_k \\ \neg x_{k,i} & \text{falls } L_{i,j} = \neg x_k \end{cases}$$

$$K_i \overset{f}{\longmapsto} \bigvee_{j=1}^{3} f(L_{i,j})$$

$$x_{k,i} \longrightarrow x_{k,i+1}$$

$$F \longmapsto \bigwedge_{i=1}^{n} f(K_i) \wedge \bigwedge_{k=1}^{v} \bigwedge_{i=1}^{3} (\neg x_{k,i} \vee x_{k,i+1})$$

[i+1 mod # Literale]

Sei $F \in 3\text{-KNF-SAT}$ mit Belegung $\sigma(F) = 1$ erfüllbar.

Konstruiere $F' := f(F)$.

$\sigma : \{x_1, \ldots, x_v\} \rightarrow \{0,1\}$

Konstruiere

$\sigma' : \{x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, \ldots x_{2,1}, \ldots, x_{v,1}, \ldots\} \rightarrow \{0,1\}$

$$\sigma'(x_{k,i}) = \sigma(x_k)$$

zZ: $\sigma'(F') = 1$

① $\sigma'(f(L_{i,j})) = \sigma(L_{i,j}) = \begin{cases} \sigma(x_k) & L_{i,j} = x_k \\ 1 - \sigma(x_k) & L_{i,j} = \neg x_k \end{cases}$

② $\sigma'(f(C_i))$

③ $\sigma'\left(\bigwedge \bigwedge (\neg x_{k,i} \vee x_{k,i+1})\right) = 1$

- **Frage**: Ist F erfüllbar?

(b) Wir betrachten den ITE-Operator mit der Semantik $\mathsf{ITE}(x, y, z) := (x \to y) \land (\neg x \to z)$. Eine ITE-Formel genügt der folgenden Grammatik:

$$F \to \mathsf{ITE}(F, F, F) \mid x \mid \mathsf{true} \mid \mathsf{false} \qquad \text{für Variablen } x \in \mathcal{V}$$

ITE-SAT:

Drücke $\neg a$ als $\sim$ ITE(a, false, true)

- **Eingabe**: Eine ITE-Formel F.
- **Frage**: Ist F erfüllbar?

Übungsaufgabe Ü12.5. (*ZOLP*)

Das *Zero-One-Linear-Program* (ZOLP) Problem sei wie folgt definiert:

- **Eingabe**: Ein System von linearen Ungleichungen

$$\begin{aligned} b_1 &\leq a_{1,1}y_1 + \ldots + a_{1,n}y_n \\ b_2 &\leq a_{2,1}y_1 + \ldots + a_{2,n}y_n \\ &\vdots \\ b_m &\leq a_{m,1}y_1 + \ldots + a_{m,n}y_n \end{aligned}$$

  mit $a_{i,j}, b_i \in \mathbb{Z}$ und $m, n > 0$.

- **Frage**: Gibt es für die Variablen $y_1, \ldots, y_n$ Werte aus $\{0, 1\}$, sodass alle Ungleichungen gleichzeitig erfüllt sind?

Zeigen Sie, dass das Entscheidungsproblem ZOLP NP-schwer ist. Geben Sie hierzu eine geeignete Reduktion von 3KNF-SAT auf ZOLP an und beschreiben Sie **zusätzlich** das Vorgehen anhand folgender Formel:

$$(\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$$

Den Korrektheitsbeweis müssen Sie nicht ausformulieren.

$3y_1 + 2y_2 - y_3 \geq 1$

$(1 - y_1) + y_2 + y_3 \geq 1$

$y_1 + (1 - y_3) + y_4 \geq 1$

Gegeben Belegung $\sigma : x_i \longmapsto \{0,1\}$

erhalte ich Lösung

$y_i = \sigma(x_i)$

$(a \vee b)$ true iff $y_a + y_b \geq 1$

$\neg a$ $(1 - y_a)$