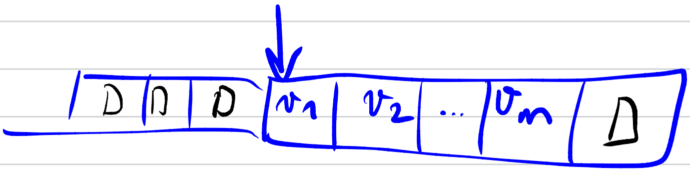
$f : \Sigma^* \rightharpoonup \Sigma^*$ berechenbar:

Es gibt TM M sodass bei Eingaben w (mit $f(w)$ definiert):

1. TM hält bei w ($M[w]\downarrow$)
2. Auf dem Band steht nach Termination



$$f(w) = v_1 \dots v_m$$

Sprachen aufeinander reduzieren

$A \leq B \quad , \quad A, B \subseteq \Sigma^*$

i.A. darf sein $A \subseteq \Sigma_1^*$, $B \subseteq \Sigma_2^*$ mit $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$

"Wenn B entscheiden, kann ich A entscheiden"

Das ist keine Definition, sondern eine Konsequenz der Definition

$:\Longleftrightarrow \quad \exists f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ sodass

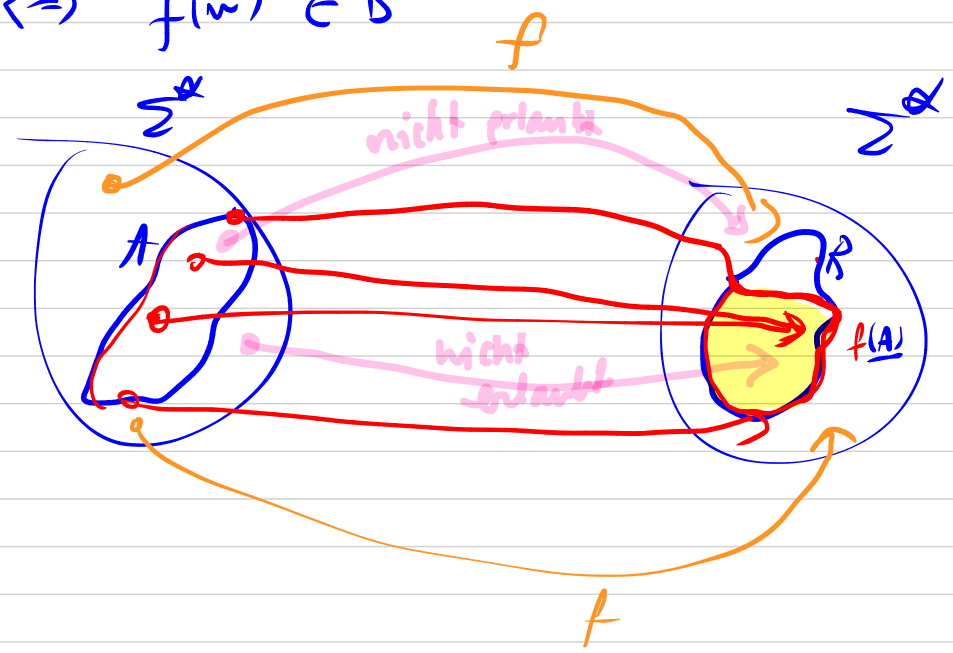
f muss weder injektiv (1-1) sein, noch surjektiv

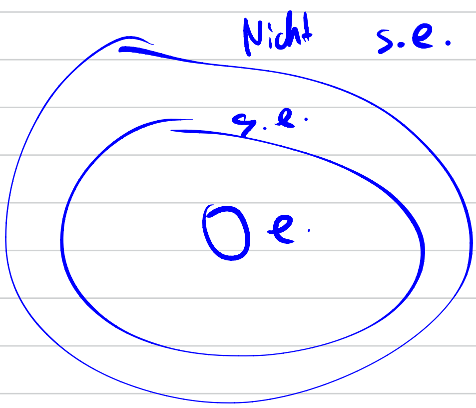
① f total

② f berechenbar

③ $w \in A$
$\Leftrightarrow f(w) \in B$

$f(A) \subseteq B$



$$H = \{ w \# x \mid M_w[x]\downarrow \}$$

$$M_w[x]\downarrow$$

$w \# x \in H$ gdw. $M_w[x]\downarrow$

Es gibt keinen Entscheider, der gegeben $z$ sagen kann:

Ja, $z \in H$

Nein $z \notin H$

Prof. Javier Esparza
Philipp Czerner, Martin Helfrich

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

# Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2022 – Übungsblatt 10

- Das Übungsblatt ist in zwei Teile gegliedert: den Vorbereitungsteil, den Sie vor der Übung selbstständig bearbeiten sollen, und den Übungs-/Nachbereitungsteil, der Aufgaben enthält, die in der Übung besprochen werden und von Ihnen anschließend zur Nachbereitung verwendet werden können.
- Das ist nicht das Hausaufgabenblatt! Die Hausaufgaben finden Sie auf einem separaten Blatt.

## Vorbereitung (→ vor der Übung selbständig zu bearbeiten)

**Individualaufgabe Ü10.1.** (*Wichtige Begriffe & Kahoot*)

Überprüfen Sie, dass Sie die folgenden Begriffe oder Notationen korrekt definieren können.

- abzählbar / überabzählbar
- berechenbar / unberechenbar
- rekursiv aufzählbar
- entscheidbar
- semi-entscheidbar
- Reduktion (Beispiel: $A \leq B$, sprich: *"$A$ ist reduzierbar auf $B$"*)
- Satz von Rice
- terminierend

**Individualaufgabe Ü10.2.** (*Entscheidbarkeit vs. Berechenbarkeit*)

Ordnen Sie die folgenden Satzanfänge den Satzenden so zu, dass richtige Aussagen entstehen. Sei dazu $A, B \subseteq \{0,1\}^*$:

(a) Die Funktion $\chi_A$ ist berechenbar,

(b) $A$ ist entscheidbar,

(c) $B$ ist nicht entscheidbar,

(i) wenn $A \leq B$ gilt und $B$ entscheidbar ist.

(ii) wenn $A$ entscheidbar ist.

(iii) wenn $A \leq B$ gilt und $A$ nicht entscheidbar ist.

*Lösungsskizze.* (a) → (i)/(ii), (b) → (i)/(ii), (c) → (iii).

**Individualaufgabe Ü10.3.** (*Entscheidbarkeit*)

Überprüfen Sie, ob die folgenden Behauptungen korrekt oder inkorrekt sind. Begründen Sie dann Ihre Antworten wie folgt: Wenn $L$ entscheidbar ist, beschreiben Sie einen Algorithmus, der die charakteristische Funktion $\chi_L$ berechnet. Wenn $L$ unentscheidbar ist, leiten Sie einen Widerspruch zu einem Ergebnis der Vorlesung ab.

(a) Wenn $A$ und $B$ entscheidbare Sprachen sind, dann ist $A \cap B$ entscheidbar.

(b) Wenn $A$ und $A \cup B$ entscheidbar sind, dann ist $B$ entscheidbar.

*Lösungsskizze.* Für diese Aufgabe gibt es eine Videolösung: Link

(a) Korrekt. Wenn $A$ und $B$ entscheidbar sind, dann sind die charakteristischen Funktionen $\chi_A$ und $\chi_B$ berechenbar. Wir definieren

$$\chi_{A\cap B} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \chi_A = 1 \wedge \chi_B = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Funktion ist intuitiv berechenbar und eine charakteristische Funktion von $A \cap B$, da

$$\chi_{A\cap B}(w) = 1 \Leftrightarrow \chi_A(w) = 1 \wedge \chi_B(w) = 1 \Leftrightarrow w \in A \wedge w \in B \Leftrightarrow w \in A \cap B.$$

Folglich ist die Menge $A \cap B$ entscheidbar.

Alternativ mit Turingmaschinen:
Sei $T_A$ DTM, die $A$ entscheidet, $T_B$ DTM, die $B$ entscheidet. DTM zu $A \cap B$: Gegeben $x$, berechne $T_A[x]$. Falls $T_A[x]$ mit 0 auf dem Band hält, lehne $x$ ab, ansonsten berechne $T_B[x]$. Hält $T_B[x]$ mit 0 auf dem Band, lehne $x$ ab, sonst akzeptiere $x$. Da $T_A$, $T_B$ die jeweiligen Mengen entscheiden, terminieren beide DTM, womit auch die DTM zu $A \cap B$ stets mit dem korrekten Ergebnis terminiert. Damit ist $A \cap B$ entscheidbar.

(b) Inkorrekt. Sei $B = \mathcal{H}_0 = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w[\epsilon]\downarrow\} \subsetneq \{0,1\}^*$ das Halteproblem auf leerem Band und $A = \{0,1\}^*$. Dann sind $A$ und $A \cup B = \{0,1\}^*$ entscheidbar, aber $B$ nicht.

## Übung und Nachbereitung

**Übungsaufgabe Ü10.4.** (*Reduktion*)

**Erinnerung:** $\mathcal{H} := \{w\#x : w, x \in \{0,1\}^*, M_w[x]\downarrow\}$ (*Allgemeines Halteproblem*) und $\mathcal{H}_0 := \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w[\epsilon]\downarrow\}$ (*Halteproblem auf leerem Band*)

(a) Sei $\mathcal{H}_{uvu} := \{w\#u\#v : w, u, v \in \{0,1\}^*, M_w[uvu]\downarrow\}$.
Zeigen Sie: $\mathcal{H}_{uvu}$ ist unentscheidbar, da $\mathcal{H} \leq \mathcal{H}_{uvu}$.

(b) Sei $\mathcal{H}_{\Sigma^*} := \{w \in \{0,1\}^* \mid \forall x \in \Sigma^* : \ M_w[x]\downarrow\}$.
Zeigen Sie: $\mathcal{H}_{\Sigma^*}$ ist unentscheidbar, da $\mathcal{H}_0 \leq \mathcal{H}_{\Sigma^*}$.

**Übungsaufgabe Ü10.5.** (*Allgemeine Reduktion*)

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen korrekt oder inkorrekt sind, und begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie einen Beweis bzw. ein passendes Gegenbeispiel angeben. Sei $\Sigma := \{0,1\}$.

(a) $\forall A \subseteq \Sigma^* : A \leq \Sigma^*$

(b) $\forall A, B \subseteq \Sigma^* : A \leq B \iff \overline{A} \leq \overline{B}$ : "$\Rightarrow$" Ann: $A \leq B$ mit $f$ Reduktion

$w \in A \iff f(w) \in B$

gdw. $w \in \overline{A} \iff f(w) \in \overline{B}$ ✓

$\Rightarrow \overline{A} \leq \overline{B}$

(c) $\forall A, B, C \subseteq \Sigma^* : A \leq B \wedge B \leq C \implies A \leq C$

Seien $A, B, C \subseteq \Sigma^*$.

Sei $\underline{f}$ die Reduktion für $A \leq B$

Sei $\underline{g}$ die Reduktion für $\underline{B} \leq C$

$$w \in A \iff f(w) \in B$$

$$\iff g(f(w)) \in C$$

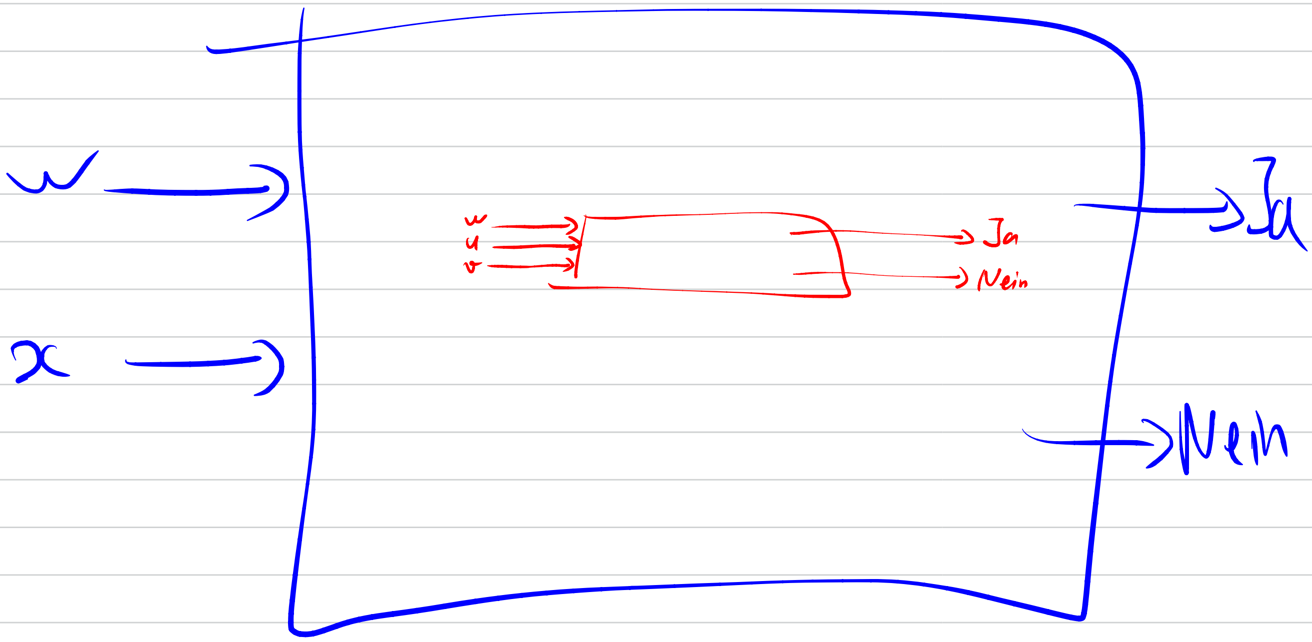
$$\iff \boxed{(g \circ f)}(w) \in C$$

Somit ist $A \leq C$ mit $g \circ f$ Reduktion.


$( M_w[uvu]\downarrow )$

$( M_w[uvu]\uparrow )$

Entsch.
für $H_{uvu}$




$M_w[x]\downarrow$

$M_w[x]\uparrow$

dec_B                      dec_A

"aus einem Entscheider für B einen Entscheider für A konstruieren"

dec_A(w) {

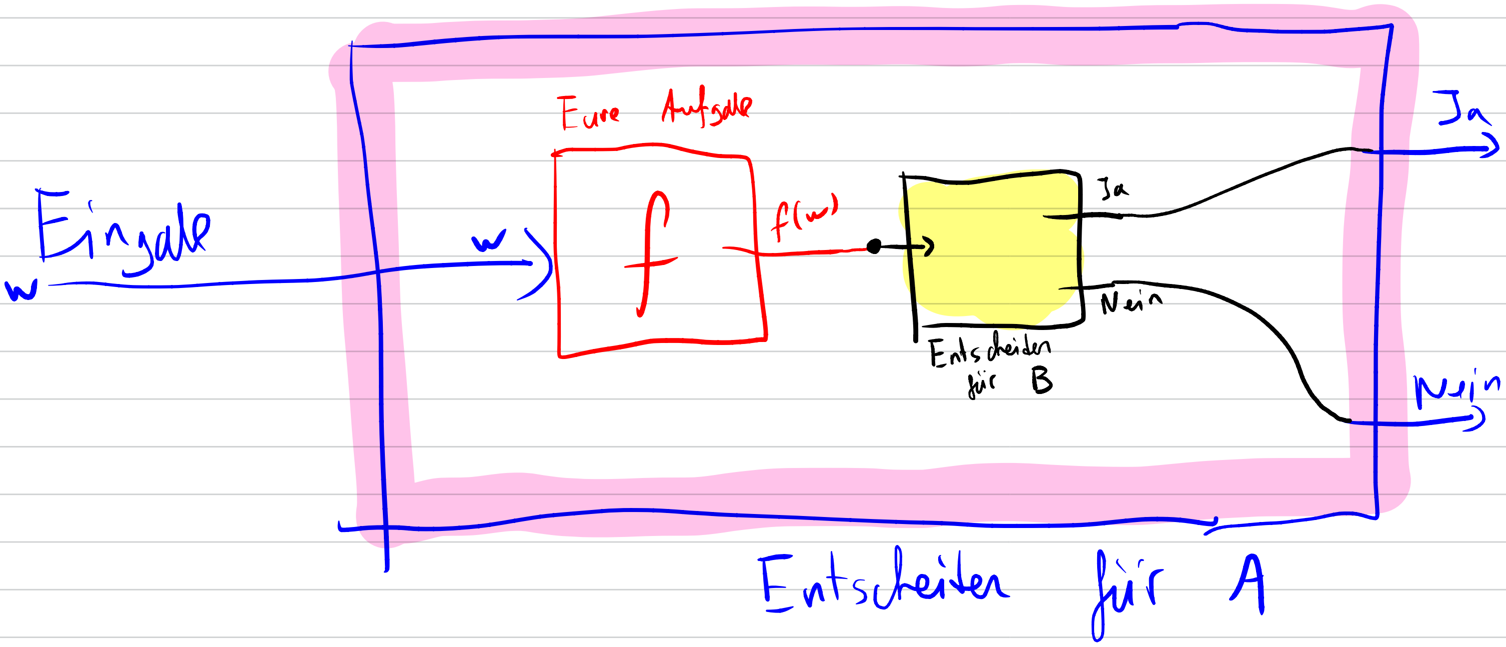
① Modifiziere Eingabe $w \longmapsto f(w)$

② Rufe dec_B(f(w)) auf

↳ Ergebnis: Ja oder Nein

③ Verwende Ergebnis um Ja / Nein für A zu antworten

}



$M_w[u v u] \downarrow \iff w \# u \# v \in H_{uvu}$

Setze $u := \varepsilon$

$v := x$

$w := w$

Dann haben wir

$w \# \# x \in H_{uvu} \iff M_w[x] \downarrow$

$\iff \underline{w \# x} \in H$

aus $\underline{w \# x} \xmapsto{f} \underline{w \# \# x}$

Reduktion von $H$ auf $H_{uvu}$:

$$f(x) = \begin{cases} w \# \# x & \text{falls } x = w \# x \\ \varepsilon & \text{sonst} \end{cases}$$

z.z.

① $f$ ist berechenbar:

Ja, es gibt natürlich TMs

die ein # hinzufügen können

(und somit die Eingabe löschen)

② $f$ ist total:

Ja, per Def. $f(x)$ definiert $\forall x \in \Sigma^*$.

③ Die Reduktion ist korrekt:

$$w \# x \in H \iff M_w[x]\downarrow$$

$$\iff M_w[\varepsilon x \varepsilon]\downarrow$$

$$\iff w \# \# x \in H_{unan}$$

$$\iff w \# \# x = \boxed{f(w \# x) \in H_{unan}}$$

Reduktion:

gegeben $w$, konstruiere $w'$, das sich wie folgt verhält:

$w'$:
- lösche Eingabe;
- simuliere $M_w$;

Korrektheit: $w \in H_0 \iff M_w[\varepsilon]\downarrow$

$\iff \forall x \in \Sigma^*. \; M_{w'}[x]\downarrow$

$\iff w' \in H_{\Sigma^*}$

$$\boxed{f(w) = w'}$$

$\emptyset \notin \Sigma^{\circlearrowleft}$

Ang. $\exists f$ total, bere. s.d.

$$w \in \emptyset \iff f(w) \in \Sigma^{\circlearrowleft}$$

$$\underbrace{w \not\in \emptyset} \iff f(w) \not\in \Sigma^{\circlearrowleft}$$

$$w \in \Sigma^{\circlearrowleft} \iff f(w) \not\in \Sigma^{\circlearrowleft}$$

$$f : \Sigma^{\circlearrowleft} \longrightarrow \Sigma^{\circlearrowleft}$$

"total: $\forall w \in \Sigma^{\circlearrowleft}.\ f(w) \in \Sigma^{*}$"

Aber dann wäre $f$ nicht total.

$\lightning$

"TM" Assoz. berech. Funktion

w $\longleftrightarrow$ f

unent. L aus TMs glw. eine Menge von (assoz.) f unentscheidb.

**Übungsaufgabe Ü10.6.** (*Satz von Rice*)

Sei $\Sigma$ ein beliebiges Alphabet. Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen unentscheidbar sind und begründen Sie Ihre Antworten mit dem Satz von Rice (falls anwendbar). Geben Sie dabei die Menge $\mathcal{F}$ genau an und argumentieren Sie, warum die Menge nicht trivial ist (d.h. weder alle berechenbare Funktionen enthält noch leer ist).

(a) $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \{u \in \Sigma^* \mid \varphi_w(u) = 1\} \text{ ist regulär}\}$

(b) $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \forall n \in \mathbb{N}_0 : \ \varphi_w(n) = n \cdot (n+23) + 42\}$

(c) $L_3 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \forall x \in \Sigma^* : \ \varphi_w(x) \neq |w|\}$

(d) $L_4 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \forall p \in \mathbb{N}_0. \ (|w| > p \land p \text{ ist prim}) \implies w_p = 0\}$

Bei (d) bezeichnet $w_p \in \Sigma$ den Buchstaben an der $p$-ten Stelle im Wort $w$ .

$$F = \{ f \mid f \text{ berechenbar} \land P(f) \}$$

F ist entscheidbar

nur wenn $F = \emptyset$

$F =$ "alle ber. Funktionen"

Entscheidungsfrage für F:

gegeben $\varphi$ berechenbar:

ist $\varphi \in F$ ?

$\varphi_w$ ist die von $M_w$ berechnete Funktion

$$L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \underbrace{\{u \in \Sigma^* \mid \varphi_w(u) = 1\} \text{ ist regulär}}\}$$

Die Sprache aller Eingaben $u$, sodass die TM $M_w$ auf diesen Eingabe 1 ausgibt.

$$F = \left\{ f \;\middle|\; f: \{0,1\}^* \to \{0,1\}^* \text{ berechenbar} \wedge \left\{ u \in \Sigma^* \mid f(u) = 1 \right\} \text{ regulär} \right\}$$

$\boxed{\text{Ziel:}}$

1) finde $g$ mit $g \in F$
2) finde $h$ mit $h \in F$
3) Dann gilt $F \neq \emptyset$ und $F \neq$ "alle berech. Funktionen"

Beobachtung: $\Sigma^*$ ist regulär.

Ziel: $g$ mit $\{u \in \Sigma^* \mid g(u) = 1\}$

$g(x) = 1$ erfüllt $\Sigma^* = \{u \in \Sigma^* \mid g(u) = 1\}$

$g$ offenbar berechenbar.

$\Rightarrow g \in F$.

---

Beobachtung: $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ nicht regulär

Ziel: $h$ mit $\{u \in \Sigma^* \mid g(u) = 1\} = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

$$h(u) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \exists i \geq 0.\ u = 0^i 1^i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $h$ berechenbar.

Und $h \notin F$ weil $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ nicht reg.

Somit: $F \neq \emptyset$

und $F \neq$ "alle be Funktionen"

$\Rightarrow$ $F$ ist unentscheidbar

$\Rightarrow$ $L_1$ ist un - - - -