

Домашнее задание №1 по дисциплине
"Фрактальная геометрия"

Головатских Марк
БПМ-16-1
Вариант 5

1

Докажем, что $\rho_1(x, y) = \sqrt{4(x_1 - y_1)^2 + 3(x_2 - y_2)^2}$ метрика. Выполнение первых двух аксиом очевидно, докажем неравенство треугольника:

доказательство

Данная метрика эквивалентна евклидовой:

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\rho(x, y) &= \sqrt{3(x_1 - y_1)^2 + 3(x_2 - y_2)^2} \leq \sqrt{4(x_1 - y_1)^2 + 3(x_2 - y_2)^2} \\ &\leq \sqrt{4(x_1 - y_1)^2 + 4(x_2 - y_2)^2} = 2\rho(x, y)\end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned}\rho(A, B) &= \max(r_a, r_b) \\ r_a &= \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \rho(a, b) \\ r_b &= \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \rho(a, b)\end{aligned}$$

paint

$$\begin{aligned}r_a &= \sqrt{35} \\ r_b &= \sqrt{35} \\ \rho(A, B) &= \sqrt{35}\end{aligned}$$

3

Найдем преобразование вида:

$$f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Преобразование изменяет точки: $A(0, 0) \rightarrow P(3, 6)$, $B(1, 0) \rightarrow Q(1, -4)$, $C(1, 1) \rightarrow R(-3, -3)$, $D(0, 1) \rightarrow S(-1, 7)$. То есть:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} A + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} &= P \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} B + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} &= Q \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} C + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} &= R\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} D + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = S$$

Получим две системы уравнений:

$$\begin{cases} aA_1 + bA_2 + e = P_1 \\ aB_1 + bB_2 + e = Q_1 \\ aC_1 + bC_2 + e = R_1 \\ aD_1 + bD_2 + e = S_1 \end{cases} \quad \begin{cases} cA_1 + dA_2 + f = P_2 \\ cB_1 + dB_2 + f = Q_2 \\ cC_1 + dC_2 + f = R_2 \\ cD_1 + dD_2 + f = S_2 \end{cases}$$

Решив систему, получим: $e = 3$, $f = 64$, $a = -2$, $b = -4$, $c = -10$, $d = 1$.

Искомое преобразование:

$$f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -10 & 1 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

4

$$f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \left(\bar{x} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\phi = -\frac{2\pi}{3}$$

$$A = (-3, 4)$$

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \left(\bar{x} - \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

5

graph

$$x_2 = 2x_1 + 5$$

$$f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \cos 2\Theta & \sin 2\Theta \\ \sin 2\Theta & -\cos 2\Theta \end{pmatrix} \left(\bar{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$$

$$\tan \Theta = 2 \quad c = 5$$

$$\sin 2\Theta = \frac{2 \tan \Theta}{1 + \tan^2 \Theta} = \frac{4}{5}$$

$$\cos 2\Theta = \frac{1 - \tan^2 \Theta}{1 + \tan^2 \Theta} = -\frac{3}{5}$$

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \left(\bar{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$