Домашние задание №1 по дисциплине "Фрактальная геометрия"

Головатских Марк
БПМ-16-1
Вариант 5

1

Докажем, что $\rho_1(x,y) = \sqrt{4(x_1-y_1)^2+3(x_2-y_2)^2}$ метрика. Выполнение первых двух аксиом очевидно, докажем неравенство треугольника: $\forall x,y,z \in \mathbb{R}^2$:

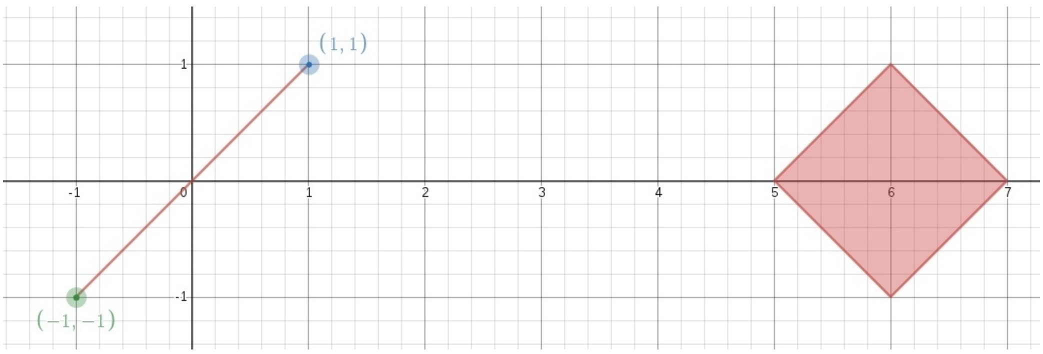
$$\sqrt{4(x_1-z_1)^2+3(x_2-z_2)^2} + \sqrt{4(z_1-y_1)^2+3(z_2-y_2)^2} \geq$$
$$\geq \sqrt{4(x_1-z_1)^2+3(x_2-z_2)^2+4(z_1-y_1)^2+3(z_2-y_2)^2} =$$
$$= \sqrt{4((x_1-z_1)^2-(z_1-y_1)^2)+3((x_2-z_2)^2+(z_2-y_2)^2)} \geq$$
$$\geq \sqrt{4(x_1-y_1)^2+3(x_2-y_2)^2}$$

Данная метрика эквивалентна евклидовой:

$$\sqrt{3}\rho(x,y) = \sqrt{3(x_1-y_1)^2+3(x_2-y_2)^2} \leq \sqrt{4(x_1-y_1)^2+3(x_2-y_2)^2} \leq$$
$$\leq \sqrt{4(x_1-y_1)^2+4(x_2-y_2)^2} = 2\rho(x,y)$$

2

$$\rho(A,B) = \max(r_a, r_b)$$
$$r_a = \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}\rho(a,b)$$
$$r_b = \sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\rho(a,b)$$



$$r_a = \sqrt{35}$$
$$r_b = \sqrt{35}$$
$$\rho(A,B) = \sqrt{35}$$

3

Найдем преобразование вида:

$$f(\overline{x}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \overline{x} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Преобразование изменяет точки: $A(0,0) \to P(3,6)$, $B(1,0) \to Q(1,-4)$, $C(1,1) \to R(-3,-3)$, $D(0,1) \to S(-1,7)$. То есть:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} A + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = P$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} B + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = Q$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} C + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = R$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} D + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = S$$

Получим две системы уравнений:

$$\begin{cases} aA_1 + bA_2 + e = P_1 \\ aB_1 + bB_2 + e = Q_1 \\ aC_1 + bC_2 + e = R_1 \\ aD_1 + bD_2 + e = S_1 \end{cases} \quad \begin{cases} cA_1 + dA_2 + f = P_2 \\ cB_1 + dB_2 + f = Q_2 \\ cC_1 + dC_2 + f = R_2 \\ cD_1 + dD_2 + f = S_2 \end{cases}$$

Решение: $e = 3$, $f = 64$, $a = -2$, $b = -4$, $c = -10$, $d = 1$.
Искомое преобразование:

$$f(\overline{x}) = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -10 & 1 \end{pmatrix} \overline{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

4

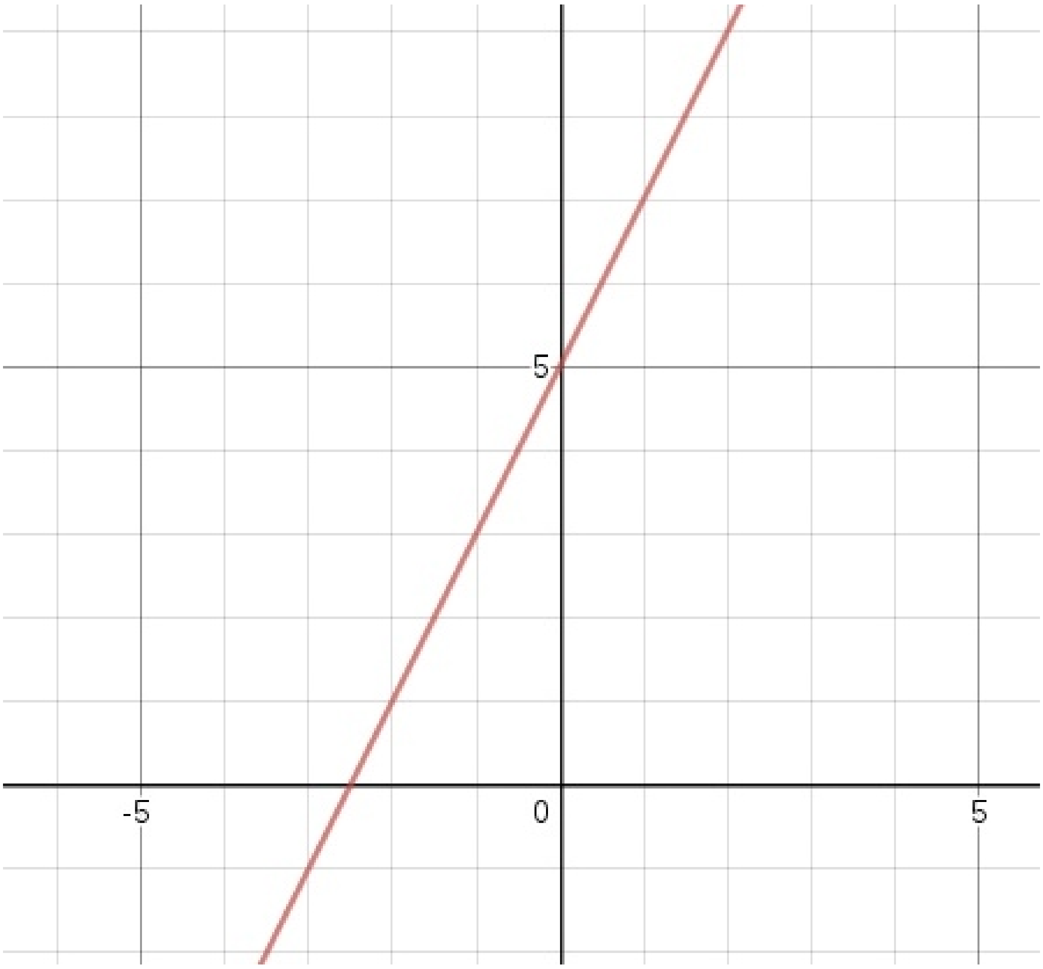
$$f(\overline{x}) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \left(\overline{x} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$\varphi = -\frac{2\pi}{3}$
$A = (\,-3, 4)$

$$f(\overline{x}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \left(\overline{x} - \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$f(\overline{x}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\overline{x} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -9-4\sqrt{3} \\ 12-3\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

5



$$x_2 = 2x_1 + 5$$

$$f(\overline{x}) = \begin{pmatrix} \cos 2\Theta & \sin 2\Theta \\ \sin 2\Theta & -\cos 2\Theta \end{pmatrix}\left(\overline{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$$

$\tan\Theta = 2$
$c = 5$
$\sin 2\Theta = \frac{2\tan\Theta}{1+\tan^2\Theta} = \frac{4}{5}$

$\cos 2\Theta = \frac{1-\tan^2\Theta}{1+\tan^2\Theta} = -\frac{3}{5}$

$$f(\overline{x}) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 4 & 3\end{pmatrix}\left(\overline{x} - \begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$$

$$f(\overline{x}) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 4 & 3\end{pmatrix}\overline{x} + \begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$$