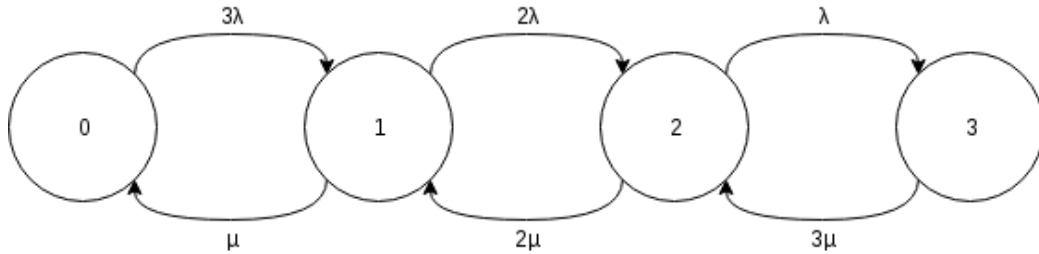


Домашнее задание №3 по дисциплине
"Теория случайных процессов"

Головатских Марк
БПМ-16-1
Вариант 6

Построим граф состояний, где каждое состояние процесса - число сломанных приборов.



Составим уравнения Колмогорова:

$$\begin{cases} P'_0(t) = -3\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \\ P'_1(t) = 3\lambda P_0(t) + 2\mu P_2(t) - (\mu + 2\lambda)P_1(t) \\ P'_2(t) = 2\lambda P_1(t) + 3\mu P_3(t) - (2\mu + \lambda)P_2(t) \\ P'_3(t) = -3\mu P_2(t) + \lambda P_3(t) \end{cases}$$

Из записи этой системы в матричной форме получим инфинитезимальную матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} -3\lambda & 3\lambda & 0 & 0 \\ \mu & -(\mu + 2\lambda) & 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\mu & -(2\mu + \lambda) & \lambda \\ 0 & 0 & 3\mu & -3\mu \end{pmatrix}$$

Из условий $\mu = \lambda = 3$. Составим систему для нахождения финальных вероятностей:

$$\begin{cases} 0 = 3p_1 - 9p_0 \\ 0 = 6p_2 + 9p_0 - 9p_1 \\ 0 = 6p_1 + 9p_3 - 9p_2 \\ 0 = 3p_2 - 9p_3 \end{cases}$$

Учитывая соотношение $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$, заменим на него одно из уравнений:

$$\begin{cases} 0 = 3p_1 - 9p_0 \\ 0 = 9p_2 + 6p_0 - 9p_1 \\ 0 = 6p_1 + 9p_3 - 9p_2 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} p_0 = \frac{1}{8} \\ p_1 = \frac{3}{8} \\ p_2 = \frac{3}{8} \\ p_3 = \frac{1}{8} \end{cases}$$

Для нахождения зависимости среднего состояния от времени найдем математическое ожидание числа сломанных приборов.

$\lambda_i = (n - i)\lambda$, $\mu_i = i\mu$. С учетом начальных условий получим:

$$\begin{cases} MX'(t) = -(\lambda + \mu)MX(t) + \lambda N \\ MX(0) = 3 \end{cases}$$

Решением является $MX(t) = \frac{3}{2}e^{-6t} + \frac{3}{2}$.