Köbös spline interpoláció downsampling alkalmazásával

A `CubicSplineFilter` egy olyan jelinterpoláló algoritmust valósít meg, amely a bemeneti mintasorozatot először ritkítja/alulmintavételezi (downsampling), majd a ritkított minták között **köbös spline** görbékkel újramintavételezi a jelet.

A **downsampling** során a bemeneti jelsorozatból csak minden *d*-edik mintát tartjuk meg. Ez csökkenti a számítási igényt, és lehetővé teszi, hogy az interpoláció kevesebb, de reprezentatív csomópont alapján történjen. A downsampling során figyelni kell arra, hogy a kiválasztott csomópontok elegendő információt hordozzanak a jel főbb trendjeinek megőrzéséhez. A `CubicSplineFilter` implementációja automatikusan korrigálja a downsampling értéket, ha az túl nagy lenne az adott jelhosszhoz képest, mivel legalább három csomópontnak biztosítottnak kell lennie az interpolációhoz.

A cél egy simább, zajmentesebb szakasz előállítása, miközben megőrizzük a jel főbb trendjeit.

Downsampling

A bemeneti jelsorozat:

$$y_i\}_{i=0}^{n-1}$$

Az `effectiveDownsampling` értékkel minden d-edik mintát megtartjuk:

$$x_k = k \cdot d, \quad y_k = y_{x_k}, \quad k = 0, 1, \ldots, m$$

ahol $d \geq 2, m = \left\lfloor \frac{n-1}{d} \right\rfloor$. A szakasz végén biztosított, hogy a n-1-edik mintát is csomópontként megtarthassuk.

Spline interpoláció

Spline interpoláció és folytonossági feltételek

A **spline görbék** olyan darabonkénti polinomfüggvények, amelyeket úgy illesztünk a csomópontok közé, hogy a teljes görbe egy bizonyos fokú **folytonossági** feltételt is teljesítsen. A köbös spline interpoláció esetén az illesztett görbe:

- **Szakaszonként harmadfokú polinomokból** áll, amelyek minden két szomszédos csomópont (x_i, x_{i+1}) között vannak definiálva.
  Két pont közötti köbös polinom akkor határozható meg egyértelműen, ha a végpontokhoz tartozó függvényértékek mellett az első vagy második deriváltak

értékei is adottak. Ezek a kiegészítő feltételek biztosítják, hogy a polinom ne csak áthaladjon a megadott pontokon, hanem megfelelő folytonossággal illeszkedjen. Ilyen körülmények között a négy szükséges feltétel révén a polinom egyértelműen meghatározható.

- C^2**-folytonos**, azaz:
  - A spline értéke folytonos (C^0-folytonosság),
  - Az első deriváltja is folytonos (C^1-folytonosság),
  - A második deriváltja is folytonos (C^2-folytonosság).

A `CubicSplineFilter` a **természetes (natural) köbös spline** változatot alkalmazza, amelynek végpontjain zérus második deriváltat írunk elő:

$$S''(x_0) = 0, \quad S''(x_n) = 0$$

Ez a feltétel biztosítja, hogy a spline az érintkező szakaszokon is folytonos legyen, elkerülve a mesterséges ívek vagy szögletes kilengések kialakulását.

Az i-edik szakaszon az interpolált érték:

$$S_i(x) = A_i(x_i - x)^3 + B_i(x - x_{i-1})^3 + C_i(x_i - x) + D_i(x - x_{i-1})$$

Második deriváltak meghatározása (z értékek)

A második derivált értékek meghatározásához egy **tridiagonális lineáris egyenletrendszert** kell megoldani, amely a következő mátrix-alakot veszi fel:

$$\begin{bmatrix} \beta_0 & \gamma_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \alpha_{n-3} & \beta_{n-3} & \gamma_{n-3} \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{n-2} & \beta_{n-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-3} \\ z_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_{n-3} \\ \delta_{n-2} \end{bmatrix}$$

ahol:

- $\alpha_i = \dfrac{h_i}{6}$
- $\beta_i = \dfrac{h_i + h_{i+1}}{3}$

- $\gamma_i = \frac{h_{i+1}}{6}$
- $\delta_i = \frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}$

A megoldást a **Thomas-algoritmus** adja, ami hatékony módszer tridiagonális rendszerek esetén.

Interpolációs képlet

Miután megvannak a másodrendű deriváltak (z_i), minden $x \in [x_i, x_{i+1}]$ szakaszon az interpolált érték:

$$S_i(x) = \frac{z_i}{6h_i}(x_{i+1}-x)^3 + \frac{z_{i+1}}{6h_i}(x-x_i)^3 + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{z_i h_i}{6}\right)(x_{i+1}-x) + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{z_{i+1} h_i}{6}\right)(x-x_i)$$

Ez garantálja a folytonosságot az érték, az első és második derivált tekintetében is.

Öszefoglalva:

Az interpoláció alkalmazásának általános megközelítése:

Ha n darab csomópontot használunk köbös spline interpolációhoz, akkor n−1 szakaszon kell harmadfokú polinomot illesztenünk. Mivel egy köbös polinom négy együtthatóval írható le, a teljes rendszer meghatározásához összesen 4(n−1) ismeretlen szükséges. Ezek meghatározásához pontosan ugyanennyi feltételre van szükség.

A feltételek a következő részekből állnak:

- Az interpolációs feltételek biztosítják, hogy a spline minden csomóponton átmenjen.
- Az első és második deriváltak folytonosságára vonatkozó feltételek a belső csomópontokban garantálják a görbe megfelelő folytonosságát.
- A peremfeltételek (pl. természetes spline esetén a másodrendű deriváltak nullának választása a szélső pontokban) zárják le a rendszert.

A spline interpoláció során a csomópontokhoz tartozó másodrendű derivált értékek meghatározása kulcsfontosságú. Ezek kiszámítása egy speciális, úgynevezett **tridiagonális lineáris egyenletrendszer** megoldásával történik, amelyben csak a főátlón és a vele szomszédos alsó és felső átlón szerepelnek nem nulla elemek. Ennek a szerkezetnek köszönhetően a rendszer hatékonyan megoldható, és ez adja meg az interpolációhoz szükséges másodrendű derivált értékeket minden csomópontban.

Miután a másodrendű deriváltakat meghatároztuk, az interpolációs szakaszok minden pontjára ki tudjuk számítani az illesztett spline görbe értékét. Ez a számítás a csomópontok értékei, valamint a hozzájuk tartozó másodrendű deriváltak alapján történik olyan módon, hogy a másodrendű folytonosság is biztosított minden szakaszban. Az így létrejövő görbe ideálisan alkalmas zajmentes, sima közelítésre mérési adatok esetén is.