1 Reelle Zahlen

Es gibt eine Menge $\mathbb{R}$, genannt MMenge der reellen Zahlen“, welche die folgenden 15 Eigenschaften besitzt.

1.1 Körperaxiome

In $\mathbb{R}$ sind zunächst 2 Verknüpfungen + und * gegeben, die jedem Paar
a, b $\in \mathbb{R}$ genau ein a + b $\in \mathbb{R}$ und genau ein a * b $\in \mathbb{R}$ zuordnen. Dabei gilt:
(A1) $\forall$ a, b, c $\in \mathbb{R}$: a+(b+c) = (a+b)+c

$\forall$: All-Quantor.	$\exists$ Existenz-Quantor
„für alle“, „für jeden“	„Es existiert“, „es gibt“

(A5) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a(bc) = (ab)c$
(A2) $\exists 0 \in \mathbb{R} \forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = a$ (Null)
(A6) $\exists 1 \in \mathbb{R} \forall a \in \mathbb{R} : a * 1 = a$ und $1 \neq 0$
(A3) $\forall a \in \mathbb{R} \exists - a \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0$
(A7) $\forall a \in \mathbb{R} \setminus 0 \exists a^{-1} \in \mathbb{R} : a * a^{-1} = 1$ (A4) $\forall a, b \in \mathbb{R} : a + b = b + a$
(A8) $\forall a, b, \in \mathbb{R} : a * b = b * a$
(A9) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a * (b + c) = a * b + a * c$ Distributivgesetz Schreibweisen:
Für $a, b \in \mathbb{R} : a - b = a + (-b)$
Für $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \diagdown 0 : \frac{a}{b} := ab^{-1}$
Alle bekannten Regeln der Grundrechenarten lassen sich aus (A1)-(A9) herleiten. Diese Regeln seien von nun an bekannt.

Bsp.: Behauptung: $\forall a \in \mathbb{R} : a * 0 = 0$
Beweis: Sei $a \in \mathbb{R}$ und $b = a - 0$
Dann gilt: $b = a(0 + 0) = a * 0 + a * 0 = b + b$
folgt: $0 = b + (-b) = (b + b) + (-b) = b + (b + (-b)) = b + 0 = b$
(2) Beh.: $\exists_1 \tilde{0} \in \mathbb{R}\ a \in \mathbb{R} : a + 0 = a$
Mit $a = 0$ folgt $0 + \tilde{0} = a(a \in \mathbb{R})$
Mit $a = \tilde{0}$ in (A2) folgt: $\tilde{0} + a = \tilde{0}$
Darauf $0 + \tilde{0} = \tilde{0} + 0 = \tilde{0}$

1.2 Anordnungsaxiome

Relation „ $\leq$“ gegeben. Für diese gilt: Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$
(A10) $a \leq b$ oder $b \leq a$
(A11) aus $a \leq b$ und $b \leq a$ folgt: $a = b$
(A12) aus $a \leq b$ und $b \leq c$ folgt $a \leq c$
(A13) aus $a \leq b$ folgt $a + c \leq b + c$
(A14) aus $a \leq b$ und $0 \leq c$ folgt $a * c \leq b * c$
Schreibweise: $b \geq a :\Longleftrightarrow a \leq b$
$a < b :\Longleftrightarrow a \leq b$ und $a \neq b$
$b > a :\Longleftrightarrow a < b$
Aus (A1)-(A14) lassen sich alle Regeln für Ungleichungen herleiten. Diese Regeln seien von nun an bekannt.
Bsp. (ohne Beweis)
(1) aus $a < b$ und $0 < c$ folgt $ac < bc$
(2) aus $a \leq b$ und $c \leq 0$ folgt $ac \geq bc$
(3) aus $a \leq b$ und $c \leq d$ folgt $a + c \leq b + d$

1.3 Intervalle

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$
$[a, b] = x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b$
(abgeschlossenes Intervall)
$(a, b) = x \in \mathbb{R} : a < x < b$
(offenes Intervall)
$(a, b] = x \in \mathbb{R} : a < x \leq b$
$[a, b) = x \in \mathbb{R} : a \leq x < b$
halboffenes Intervall
$[a, \infty) := x \in \mathbb{R} : x \geq a, (a, \infty) = x \in \mathbb{R} : x > a$
Analog def. man$(-\infty, a], (-\infty, a), (-\infty, \infty) := \mathbb{R}$

1.4 Der Betrag

Für $a \in \mathbb{R}$ heißt $|a| = \begin{cases} a, \text{falls } a \geq 0 \\ -a, \text{falls } a < 0 \end{cases}$ der Betrag von a
Bsp.: $|1| = 1; |-7| = -(-7) = 7$
Anschaulich:$|a|$ist der Abstand von a und 0

$\xrightarrow{\hspace{8cm}} \mathbb{R}$ $(a - b)$ ist der Abstand von a und b. Es gilt: $|-a| = |a|$ und $|a - b| = |b - a|$//

1.5 Rechenregeln

für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:
(1) $|a| \geq 0$ (2) $|a| = 0 \Longleftrightarrow a = 0$
(3)$(a * b) = |a| * |b|$ (4)$a \leq |a|$ und $-a \leq |a|$ (kurz: $\pm a \leq |a|$)
(5) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecks Ungleichung)
(6) $(|a| - |b|) \leq |a - b|$ Beweis: (1) - (4) leichte Übung

(5) Fall1: $a + b \geq 0$Dann$(a + b) = a + b \leq |a| + |b|$
Fall2: $a + b < 0$Dann$(a + b) = -(a + b) = (-a) + (-b) \leq |a| + |b|$

(6)$c = |a| - |b| \quad |c| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b| \Longrightarrow c = |a| - |b| \leq |a - b|$
Analog: $-c = |b| - |a| \leq |a - b|$ Also: $\pm c \leq |a - b|$