При формировании программ раскроя плоских полос может быть полезна следующая задача (задача минимизации холостого хода режущего инструмента). На плоскости имеются замкнутые контуры. Нужно найти порядок резки контуров и точек врезки на них, чтобы длина траектории движения инструмента была минимальна, т.е. длина ломаной с вершинами на контурах должна иметь минимальную длину. Имеется технологическое требование: если контур лежит внутри другого, то внутренний контур должен вырезаться раньше внешнего.

**Задача**. На плоскости имеются контуры ,…, (контур – замкнутая ломаная). Нужно найти перестановку чисел ( 1,…,n ) и точки ,…, (   ) такие, что длина ломаной будет наименьшей. Требование: для i < j контур  не должен содержать внутри себя контур 

**Замечание 1.** Оставим для рассмотрения только контуры, не содержащие внутри себя другие. Построив ломаную только для этих контуров, затем можно добавить вершины ломаной для остальных контуров, не изменяя длину ломаной. Действительно:

1. Пусть  – минимальная длина ломаной в исходной задаче ( в задаче для части контуров). Пусть M и N две вершины ломаной для исходной задачи такие, что они находятся на оставшихся контурах, а между ними вершины, которые находятся на убираемых контурах. Соединив отрезком точки M и N, и убрав промежуточные звенья, получим ломаную с не большей длиной. Итак, .
2. Пусть имеется ломаная без вершины на контуре С. Возьмем **последнее** из звеньев ломаной со свойством, что начало звена внутри С, а конец снаружи. Такое звено есть, т.к. внутри С есть контур и на нем вершина текущей ломаной. Вставим в ломаную точку пересечения этого звена и контура С. Получится ломаная прежней длины и с вершиной на С. Так перебирая контуры, которые содержат внутри себя другие, получим ломаную – решение ( длина не изменилась и выполнено технологическое требование ).

При выбранном порядке резки контуров нужно решать вспомогательную задачу нахождения ломаной с наименьшей длиной.

**Задача.** На плоскости имеются контуры С, …, С. Рассматриваются ломаные { A, M,…,M,B}, где вершина Mломаной находится на контуре С (i=1,…,n), а A и B – фиксированные точки снаружи от всех контуров. Нужно найти ломаную с минимальной длиной.

Приближенное решение этой «непрерывной» задачи можно получить, заменив ее на «дискретную». При фиксированном числе  контуры разбиваются точками (узлы) на промежутки длины не больше  и решается задача для ломаных с вершинами в узлах. Ясно, что 

где  - минимальная длина ломаной в непрерывной (дискретной) задаче. Таким образом, чтобы гарантировать, что длина  отличается от истинной минимальной длины  не более чем на , нужно брать число  = /n. При большом n число  мало и значит, число узлов велико. Дискретную задачу можно решить методом динамического программирования. Количество операций при этом оценивается числом . Здесь  - число узлов на контуре С. Эта задача должна решаться многократно (при перестановках порядка контуров). Таким образом, при большом n и малом  число операций велико. Ниже предлагается другой подход.

Берем произвольную начальную ломаную L. Выполняя итерации, получим последовательность ломаных Lk. Итерация: последовательно перебирая контуры i=1,…,n решается следующая задача. Сдвинуть вершину M текущей ломаной, при неподвижных остальных вершинах, в такую точку контура С, чтобы длина ломаной стала наименьшей. А это перебором звеньев контура сводится к решению элементарных задач: на отрезке найти точку, для которой сумма расстояний до двух заданных точек минимальна. Получаем последовательность ломаных { Lk} . Последовательность длин этих ломаных монотонно убывает. Пусть m – минимум этих длин, а L\* – ломаная с длиной m, т.е. предельная точка последовательности { Lk}. ( За метрику в пространстве ломаных можно взять сумму расстояний между вершинами с одинаковыми индексами. )

**Замечание** 2. При проверке на реальных задачах за небольшое число итераций ( не больше 10 ) наступала стабилизация, т.е. получалась ломаная L\*.

В силу построения, длину ломаной L\* нельзя уменьшить, сдвигая ее вершины по одиночке или сдвигая несколько вершин, среди которых нет соседних.

**Утверждение 1.** Если сдвинуть несколько соседних вершин ломаной L\* так, что они остались на тех же звеньях контуров, то длина полученной ломаной не уменьшится.

**Доказательство**. Рассмотрим сдвиг двух соседних вершин. Пусть четыре последовательные вершины ломаной L\* находятся в точках P, ,S. Пусть

точка  принадлежит отрезку  и точка  принадлежит отрезку , соответствующих контуров. Покажем, что для любой точки Q и любой точки R длина ломаной P,Q,R,S не меньше длины ломаной P,,,S.

Для любой точки Q длина ломаной P,Q,,S наименьшая, когда Q= и для любой точки R длина ломаной P,,R,S наименьшая, когда R=. Нужно доказать, что для любых Q и R длина ломаной P,Q,R,S будет наименьшей, когда Q= и R=. Предположим противное, есть точки  и  такие, что длина ломаной P, ,,S меньше длины ломаной P,,,S. Ясно, что  и . Обозначим v – вектор из точки  в точку  и w - вектор из точки  в . Пусть Q(s) =  + sv, R(t) = +tw и функция f(s,t) есть длина ломаной P,Q(s),R(t),S ( s,t  ). В силу положения точек ,  имеем  Если , т.е. производная функции g= - длина ломаной P, Q(s),,S – обращается в 0 при s=0, то сумма длин отрезков [P, Q(s)] и [Q(s),] при движении точки Q(s) вдоль прямой, содержащей отрезок , минимальна при s=0. Значит, точки P,, лежат на одной прямой (считаю, что точки P и  по разные стороны от прямой отрезка ; в противном случае можно заменить точку P на симметричную относительно прямой) и если , то можно считать, что точки ,,S лежат на одной прямой. Поэтому, если  и , то точки P,,,S лежат на одной прямой и поэтому ломаная кратчайшая. Пусть хотя бы одна из этих производных не равна 0. Рассмотрим функцию  Имеем  Поэтому существует , что . По предположению , т.е. имеем  Функция  - это сумма трех слагаемых вида . Поэтому функция  на отрезке [0,1] выпуклая. Во внутренней точке отрезка  она принимает значение больше, чем на концах . Это невозможно для выпуклой функции.

Рассмотрен сдвиг двух соседних вершин. Для большего количества вершин аналогично.

Итак, ломаная L\* доставляет локальный минимум.

Приведем условие, достаточное, чтобы ломаная L\* доставляла глобальный минимум.

Пусть M - вершина ломаной L\* и находится на контуре C. Пусть N и T coседние с M вершины L\*. (В силу замечания 1, точки N, T cнаружи от контура.) По построению L\* для  Q  C сумма длин отрезков [Q,N] и [Q,T] не меньше суммы длин [M,N] и [M,T].

**Условие.** Пусть выполнено одно из следующих требований.

1. Отрезок [N,T] пересекает контур C (тогда точка M принадлежит отрезку [N,T] ).
2. Касательная в точке M к эллипсу с фокусами N и T и проходящему через M, разделяет эллипс и контур C.

**Замечание 3.** Пустьотрезок [N,T] не пересекает контур C.

1. Если вершина M – внутренняя точка отрезка-звена ломаной контура, то касательной из условия 2 является прямая вдоль этого отрезка. (Иначе, на этом отрезке существует точка, для которой сумма расстояний до N и T меньше, чем для M.) Значит, условие 2 выполняется, если весь контур находится по одну сторону от прямой звена.
2. Если вершина M концевая (принадлежит двум звеньям контура), то для выполнения условия 2 достаточно, чтобы весь контур находился внутри угла с лучами из точки M вдоль этих звеньев.
3. Из замечаний a),b) следует: еслиобласть, ограниченнаяконтуром, выпуклая, то условие 2 выполняется.

**Утверждение 2.** Пусть для L\* выполняется **Условие.** Если сдвинуть несколько соседних вершин ломаной L\* так, что они остались на контурах, то длина полученной ломаной не уменьшится, т.е. ломаная L\* доставляет глобальный минимум.

**Доказательство**. Рассмотрим сдвиг двух соседних вершин ломаной L\*, находящихся в точке  на контуре и точке  на контуре . Точки , , соответственно вершины ломаной перед  и после . Нужно показать, что если сдвинуть  в любую точку  и  в любую точку , то длина ломаной ,,, будет не меньше длины ломаной ,,,.

Для  длина ломаной ,,, наименьшая, когда  и для  длина ломаной ,,, наименьшая, когда =. Предположим, что есть точки  и  такие, что длина ломаной ,,, меньше длины ломаной ,,,. Ясно, что  и . Обозначим v – вектор из точки  в точку  и w - вектор из точки  в . Пусть Q(s) =  + sv, R(t) = +tw и функция  = длина ломаной ,Q(s),R(t),. Пусть , т.е. длина ломаной , Q(s),, . В силу условия 2  и значит, , т.е. . Аналогично,  Если  и , то либо точки ,,, лежат на одной прямой, либо это будет после симметрий точек  и/или  относительно прямой, проходящей через точки  и поэтому ломаная ,,, кратчайшая. Пусть хотя бы одна из этих производных не равна 0. Тогда существует , что . Функция на отрезке [0,1] выпуклая и во внутренней точке отрезка принимает значение больше, чем на концах, что невозможно для выпуклой функции. Доказано, что сдвиг точек , не приведет к более короткой траектории.

Рассмотрен сдвиг двух соседних вершин. Для большего количества вершин доказательство аналогично.

**Замечание 4.** Пустькроме траектории L\* из утверждения 2**,** естьдругая траектория, доставляющая глобальный минимум. Тогда из доказательства следует, что как линии они совпадают, т.е. отличие может быть только в точках пересечения контура (см. рис. )

