При решении задачи минимизации холостого хода при составлении программ раскроя плоских полос нужно решать следующую задачу.

**Задача.** На плоскости имеются контуры С, …, С (контур – замкнутая ломаная). Рассматриваются ломаные { A, M,…,M,B}, где вершина Mломаной находится на контуре С (i=1,…,n), а A и B – фиксированные точки снаружи от всех контуров. Нужно найти ломаную с минимальной длиной.

**Замечание 1.** Оставим для рассмотрения только контуры, не содержащие внутри себя другие. Построив ломаную-траекторию только для этих контуров, затем можно добавить вершины траектории для остальных контуров, не изменяя длины траектории.

Приближенное решение этой «непрерывной» задачи можно получить, заменив ее на «дискретную». При фиксированном числе  контуры разбиваются точками (узлы) на промежутки длины не больше  и решается задача для ломаных с вершинами в узлах. Ясно, что



где () - минимальная длина ломаной в непрерывной (дискретной) задаче. Таким образом, чтобы гарантировать, что длина  отличается от истинной минимальной длины  не более чем на , нужно брать число  = 2/n. При большом n число  мало и значит, число узлов

велико. Дискретную задачу можно решить методом динамического программирования. Количество операций при этом оценивается числом . Здесь  - число узлов на контуре С. Эта задача должна решаться многократно (при перестановках порядка контуров). Таким образом, при большом n и малом  число операций велико. Ниже предлагается другой подход.

Берем произвольную начальную ломаную L. Выполняя итерации, получим последовательность ломаных Lk. Итерация: последовательно перебирая i=1,…,n решается следующая задача. Сдвинуть вершину M текущей ломаной, при неподвижных остальных вершинах, в такую точку контура С, чтобы длина ломаной стала наименьшей. А это перебором звеньев контура сводится к решению элементарных задач: на отрезке найти точку, для которой сумма расстояний до двух заданных точек минимальна. Получаем последовательность ломаных { Lk} . Последовательность длин этих ломаных монотонно убывает. Пусть m – минимум этих длин, а L\* – ломаная с длиной m, т.е. предельная точка последовательности { Lk}. ( За метрику в пространстве ломаных можно взять сумму расстояний между вершинами с одинаковыми индексами. )

**Замечание** 2. При проверке на реальных задачах за небольшое число итераций ( не больше 10 ) наступала стабилизация, т.е. получалась ломаная L\*.

В силу построения, длину ломаной L\* нельзя уменьшить, сдвигая ее вершины по одиночке или несколько вершин, среди которых нет соседних.

**Утверждение 1.** Если сдвинуть несколько соседних вершин ломаной L\* так, что они остались на тех же звеньях контуров, то длина полученной ломаной не уменьшится.

**Доказательство**. Рассмотрим сдвиг двух соседних вершин. Пусть четыре последовательные вершины ломаной L\* находятся в точках P, ,S. Пусть

точка  принадлежит отрезку  и точка  принадлежит отрезку , соответствующих контуров. Покажем, что для любой точки Q и любой точки R длина ломаной P,Q,R,S не меньше длины ломаной P,,,S.

Для любой точки Q длина ломаной P,Q,,S наименьшая, когда Q= и для любой точки R длина ломаной P,,R,S наименьшая, когда R=. Нужно доказать, что для любых Q и R длина ломаной P,Q,R,S будет наименьшей, когда Q= и R=. Предположим противное, есть точки  и  такие, что длина ломаной P, ,,S меньше длины ломаной P,,,S. Ясно, что  и . Обозначим v – вектор из точки  в точку  и w - вектор из точки  в . Пусть Q(s) =  + sv, R(t) = +tw и функция f(s,t) = длина ломаной P,Q(s),R(t),S ( s,t  ). В силу положения точек ,  имеем  Если , т.е. производная функции g= - длина ломаной P, Q(s),,S – обращается в 0 при s=0, то сумма длин отрезков [P, Q(s)] и [Q(s),] при движении точки Q(s) вдоль прямой, содержащей отрезок , минимальна при s=0. Значит, точки P,, лежат на одной прямой (считаю, что точки P и  по разные стороны от прямой отрезка ; в противном случае можно заменить точку P на симметричную относительно прямой) и если , то можно считать, что точки ,,S лежат на одной прямой. Поэтому, если  и , то точки P,,,S лежат на одной прямой и поэтому ломаная кратчайшая. Пусть хотя бы одна из этих производных не равна 0. Рассмотрим функцию  Имеем  Поэтому существует , что . По предположению , т.е. имеем  Функция  - это сумма трех слагаемых вида . Поэтому функция  на отрезке [0,1] выпуклая. Во внутренней точке отрезка  она принимает значение больше, чем на концах . Это невозможно для выпуклой функции.

Рассмотрен сдвиг двух соседних вершин. Для большего количества вершин аналогично.

Итак, ломаная L\* доставляет локальный минимум.

Приведем условие, достаточное, чтобы ломаная L\* доставляла глобальный минимум.

Пусть M - вершина ломаной L\* и находится на контуре C. Пусть N и T coседние с M вершины L\*. (В силу замечания 1, точки N, T cнаружи от контура.)

**Условие.** Для всякой точки QC выполнено следующее требование.

Пусть L[M,Q] - прямая, проходящая через точки M и Q.

1. Если точки N и T находятся по разные стороны от прямой L[M,Q]: пусть X – точка пересечения отрезка [N,T] с прямой L[M,Q]. Если X(M,Q), то в треугольнике с вершинами N,M,T есть точка контура C, отличная от Q.
2. Если точки N и T находятся по одну сторону от прямой L[M,Q]: пусть X – точка на прямой L[M,Q] такая, что отрезки [X,N] и [X,T] образуют с прямой L[M,Q] равные углы. Если X(M,Q), то в четырехугольнике с вершинами N,M,T,X есть точка контура C, отличная от Q.

**Замечание** 3. Если условие выполняется, то на контуре есть такая точка Q, что сумма длин отрезков [Q,N] и [Q,T] меньше, чем сумма длин отрезков [M,N] и [M,T].

**Замечание 4.** Условие 1 эквивалентно условию, что на (M,N] или на (M,T] или на [N,T] есть точка контура C. Условие 2 эквивалентно условию, что на (M,X] или на (M,N] или на [N,T] или на [X,N] или на [X,T] есть точка контура C.

**Замечание** **5**. Отметим, случаи, когда У**словие** заведомо выполняется для вершины M, не зависимо от положения соседних вершин N и T.

1. Если для всякой точки Q  C отрезок [M,Q] принадлежит области, ограниченной контуром C. Это имеет место, в частности, если область выпуклая.
2. Если точка M является внутренней точкой отрезка – звена ломаной L\*.
3. Если точка M – конец двух звеньев ломаной L\* и вся область, ограниченная контуром C, содержится внутри угла, задаваемого лучами с вершиной M и направленных вдоль этих звеньев.

Если для всех вершин ломаной L\* выполнено **Условие**, то справедливо

**Утверждение 2.** Если сдвинуть несколько соседних вершин ломаной L\* так, что они остались на контурах, то длина полученной ломаной не уменьшится, т.е. ломаная L\* доставляет глобальный минимум.

**Доказательство**. Рассмотрим сдвиг двух соседних вершин ломаной L\*, находящихся в точке  на контуре и точке  на контуре . Точки , , соответственно вершины ломаной перед  и после . Нужно показать, что если сдвинуть  в любую точку  и  в любую точку , то длина ломаной ,,, будет не меньше длины ломаной ,,,.

Для  длина ломаной ,,, наименьшая, когда  и для  длина ломаной ,,, наименьшая, когда =. Предположим, что есть точки  и  такие, что длина ломаной ,,, меньше длины ломаной ,,,. Ясно, что  и . Обозначим v – вектор из точки  в точку  и w - вектор из точки  в . Пусть Q(s) =  + sv, R(t) = +tw и функция  = длина ломаной ,Q(s),R(t),. Отметим, чтоПроверим, что  Пусть , т.е. длина ломаной , Q(s),,. Имеем = длина ломаной ,,, и  = длина ломаной , ,, и значит, . Предположим, что  т.е. производная . Пусть  точка минимума функции . Тогда  - точка пересечения  и L, если точки  и  находятся по разные стороны от прямой L и  – точка на  такая, что отрезки , и  образуют с L равные углы, если по одну сторону. Отметим, что на промежутке  функция  убывает . Если , то в силу убывания функции  на отрезке [0,1] , получаем противоречие с  Если , то  и есть три возможности.

1. Точки  и  находятся по разные стороны от прямой L. Тогда точка  есть пересечение  и . По п.1 **Условия** есть точка такая, что длина ломаной ,,, меньше длины ,,,, что невозможно.
2. Точки  и  находятся по одну сторону от прямой L. Тогда  – точка на  такая, что отрезки  и  образуют с прямой L равные углы. По п.2 **Условия** есть точка такая, что длина ломаной ,,, меньше длины ,,, , что невозможно.
3. Точки  и  находятся на прямой L. Тогда функция  на отрезке [0,1] постоянна, что противоречит предположению .

Рис.1 Рис.2

*’*

Итак, доказано, что . Аналогично, 

Если  и , то либо точки ,,, лежат на одной прямой, либо это будет после симметрий точек  и/или  относительно прямой L и поэтому ломаная ,,, кратчайшая. Пусть хотя бы одна из этих производных не равна 0. Тогда существует , что . Функция на отрезке [0,1] выпуклая и во внутренней точке отрезка принимает значение больше, чем на концах, что невозможно для выпуклой функции. Доказано, что сдвиг точек , не приведет к более короткой траектории.

Рассмотрен сдвиг двух соседних вершин. Для большего количества вершин доказательство аналогично.