При решении задачи минимизации холостого хода при составлении программ раскроя плоских полос нужно решать следующую задачу.

**Задача.** На плоскости имеются контуры С, …, С (контур –замкнутая ломаная). Рассматриваются ломаные { A, M,…,M,B}, где вершина Mломаной находится на контуре С (i=1,…,n), а A и B – фиксированные точки снаружи от всех контуров. Нужно найти ломаную с минимальной длиной.

**Замечание 1.** Оставим для рассмотрения только контуры, не содержащие внутри себя другие. Построив ломаную-траекторию только для этих контуров, затем можно добавить вершины траектории для остальных контуров, не изменяя длину траектории.

Приближенное решение этой «непрерывной» задачи можно получить, заменив ее на «дискретную». При фиксированном числе  контуры разбиваются точками (узлы) на промежутки длины не больше  и решается задача для ломаных с вершинами в узлах. Ясно, что



где () - минимальная длина ломаной в непрерывной (дискретной) задаче. Таким образом, чтобы гарантировать, что длина  отличается от истинной минимальной длины  не более чем на , нужно брать число  = 2/n. При большом n число  мало и значит, число узлов велико. Дискретную задачу можно решить методом динамического программирования. Количество операций при этом оценивается числом . Здесь  - число узлов на контуре С. Эта задача должна решаться многократно (при перестановках порядка контуров). Таким образом, при большом n и малом  число операций велико. Ниже предлагается другой подход.

Берем произвольную начальную ломаную L. Выполняя итерации, получим последовательность ломаных Lk. Итерация: последовательно перебирая i=1,…,n решается следующая задача. Сдвинуть вершину M текущей ломаной, при неподвижных остальных вершинах, в такую точку контура С, чтобы длина ломаной стала наименьшей. А это перебором звеньев контура сводится к решению элементарных задач: на отрезке найти точку, для которой сумма расстояний до двух заданных точек минимальна. Получаем последовательность ломаных {Lk}. Последовательность длин этих ломаных монотонно убывает. Пусть m – минимум этих длин, а L\* – ломаная с длиной m, т. е. предельная точка последовательности {Lk}. (За метрику в пространстве ломаных можно взять сумму расстояний между вершинами с одинаковыми индексами)

**Замечание** 2. При проверке на реальных задачах за небольшое число итераций (не больше 10) наступала стабилизация, т. е. получалась ломаная L\*.

В силу построения, длину ломаной L\* нельзя уменьшить, сдвигая ее вершины по одиночке или несколько вершин, среди которых нет соседних.

**Утверждение 1.** Если сдвинуть несколько соседних вершин ломаной L\* так, что они остались на тех же звеньях контуров, то длина полученной ломаной не уменьшится.

**Доказательство**. Рассмотрим сдвиг двух соседних вершин. Пусть четыре последовательные вершины ломаной L\* находятся в точках P, ,S. Пусть

точка  принадлежит отрезку  и точка  принадлежит отрезку , соответствующих контуров. Покажем, что для любой точки Q и любой точки R длина ломаной P,Q,R,S не меньше длины ломаной P,,,S.

Для любой точки Q длина ломаной P,Q,,S наименьшая, когда Q= и для любой точки R длина ломаной P,,R,S наименьшая, когда R=. Нужно доказать, что для любых Q и R длина ломаной P,Q,R,S будет наименьшей, когда Q= и R=. Предположим противное, есть точки  и  такие, что длина ломаной P, ,,S меньше длины ломаной P,,,S. Ясно, что  и . Обозначим v – вектор из точки  в точку  и w - вектор из точки  в . Пусть Q(s) =  + sv, R(t) = +tw и функция f(s, t) = длина ломаной P,Q(s),R(t),S (s, t ). В силу положения точек ,  имеем  Если , т.е. производная функции g= - длина ломаной P, Q(s),,S – обращается в 0 при s=0, то сумма длин отрезков [P, Q(s)] и [Q(s),] при движении точки Q(s) вдоль прямой, содержащей отрезок , минимальна при s=0. Значит, точки P,, лежат на одной прямой (считаю, что точки P и  по разные стороны от прямой отрезка ; в противном случае можно заменить точку P на симметричную относительно прямой) и если , то можно считать, что точки ,,S лежат на одной прямой. Поэтому, если  и , то точки P,,,S лежат на одной прямой и поэтому ломаная кратчайшая. Пусть хотя бы одна из этих производных не равна 0. Рассмотрим функцию  Имеем  Поэтому существует , что . По предположению , т.е. имеем  Функция  - это сумма трех слагаемых вида . Поэтому функция  на отрезке [0,1] выпуклая. Во внутренней точке отрезка  она принимает значение больше, чем на концах. Это невозможно для выпуклой функции.

Рассмотрен сдвиг двух соседних вершин. Для большего количества вершин аналогично.

Итак, ломаная L\* доставляет локальный минимум.

Пусть для каждой вершины M ломаной L\* и ее контура C выполнено условие: для всякой точки Q  C выполнено хотя бы одно из требований

1. Отрезок, соединяющий точки M и Q, полностью принадлежит фигуре, ограниченной контуром C;
2. отрезок, соединяющий предыдущую к M и следующую за M вершины L\*, пересекает контур C, если эти вершины находятся по разные стороны от прямой, проходящей через точки M и Q.

Тогда справедливо

**Утверждение 2.** Если сдвинуть несколько соседних вершин ломаной L\* так, что они остались на контурах, то длина полученной ломаной не уменьшится, т. е. ломаная L\* доставляет глобальный минимум.

**Доказательство**. Рассмотрим сдвиг двух соседних вершин ломаной L\*, находящихся в точках  на контуре и точке  на контуре . Точки P, S, соответственно вершины ломаной перед  и после . Нужно показать, что если сдвинуть  в любую точку  и точку  в , то длина ломаной P, , , S будет не меньше длины ломаной P,  ,  , S.

Для Q длина ломаной P,Q,,S наименьшая, когда Q= и для R длина ломаной P,,R,S наименьшая, когда R=. Предположим, что есть точки  и  такие, что длина ломаной P, ,,S меньше длины ломаной P,,,S. Ясно, что  и . Обозначим v – вектор из точки  в точку  и w - вектор из точки  в . Пусть Q(s) =  + sv, R(t) = +tw и функция f(s,t) = длина ломаной P,Q(s),R(t),S (s, t ). Проверим, что  Функция  при  равна длине ломаной P,,,S и при  равна длине ломаной P, ,,S и значит, . Пусть т.е. производная в нуле функции  меньше 0. Тогда  на отрезке [0,1] имеет минимум во внутренней точке \* отрезка и значит, либо точки P, , находятся на одной прямой, либо на одной прямой точки P, ,, где точка P симметрична точке P относительно прямой отрезка .

Рис. 1

1. пусть для отрезка  выполнено условие 1), т.е. отрезок принадлежит фигуре внутри контура C. Тогда точка  внутри контура C, а точка снаружи от C (замечание 1) и поэтому есть точка Q на пересечении отрезка  и контура C. Для нее длина ломаной P,Q,,S равна (рис.1) или меньше (рис.2) длины P,,,S т.е. равна или меньше  и значит, меньше длины P,,,S , что невозможно.

*’*

Рис. 2

1. пусть для отрезка  выполнено условие 2). Возьмем Q – точку пересечения отрезка [P, ] и контура C. Точки P, Q, , на одной прямой. Поэтому длина ломаной P,Q,,S равна длине P, ,,S т.е. равна , что невозможно.

Рис. 3

Итак,  и аналогично, 

Если  и , то либо точки P,,,S лежат на одной прямой и поэтому ломаная кратчайшая, либо это будет после симметрий точек P и/или S. Пусть хотя бы одна из этих производных не равна 0. Тогда существует , что . Функция на отрезке [0,1] выпуклая и во внутренней точке отрезка принимает значение больше, чем на концах, что невозможно для выпуклой функции.

Рассмотрен сдвиг двух соседних вершин. Для большего количества вершин аналогично.

**Замечание 3**. Если все контуры ограничивают выпуклые фигуры, то условие утверждения 2 выполняется и алгоритм приводит к траектории с минимальной длиной.