

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНДУСТРИАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВПО «МГИУ»)  
КАФЕДРА «ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ И ТЕХНОЛОГИИ»

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА**  
по специальности 010503 «Математическое обеспечение и  
администрирование информационных систем»

на тему «Разработка программы для моделирования ползучести и  
разрушения мембранны внутри криволинейной матрицы»

Студент-дипломник

А.В. Уколова

Руководитель работы,  
должность, звание

д.ф.-м.н., проф.  
А.М. Локощенко

ДОПУСКАЕТСЯ К ЗАЩИТЕ  
Зав. кафедрой 36  
к.ф.-м.н., доцент

Е.А Роганов

Москва 2013

## Аннотация

Работа посвящена разработке и численной реализации модели деформирования длинной узкой прямоугольной мембранны внутри криволинейной матрицы и матрицы с вертикальными стенками и плоским днищем при двух типах граничных условий: идеальное скольжение и прилипание. При моделировании процесса ползучести использовалась дробно-сингулярная модель ползучести, для численных расчетов применялись методы Симпсона и Гаусса.

В работе впервые решается задача о деформировании длинной узкой прямоугольной мембранны внутри криволинейной матрицы и матрицы с вертикальными стенками и плоским днищем при двух граничных условиях: идеальное скольжение и прилипание. Особенностью представленного решения является использование дробно-сингулярной модели установившейся ползучести, позволяющей учитывать возможное разрушение мембранны. Для задачи с П-образной матрицей (с вертикальными стенками и плоским днищем) характерной чертой является возникновение «полостей» при деформировании: при касании днища матрицы происходит возникновение второй точки соприкосновения матрицы и мембранны, то есть образуется полость. До настоящего времени задача в данной постановке не рассматривалась.

Работа содержит 10 страниц, 22 иллюстрации, 3 приложения.

Ключевые слова: ползучесть, деформирование, мембрана, разработка программного обеспечивания, численное интегрирование.

# **Оглавление**

1.	Деформирование внутри матрицы с вертикальными стенками и плоским днищем (П-образной матрицы) . . . . .	1
2.	Анализ численного эксперимента . . . . .	4
	<b>Список использованных источников</b>	<b>10</b>

# Введение

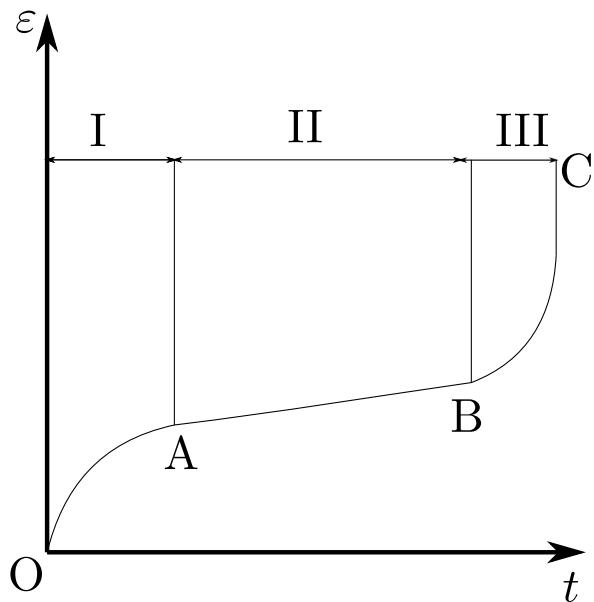
В механике деформируемого тела принято различать исследуемые материалы по их реакции на нагрузку. Когда при произвольном процессе нагружения материал сразу же после снятия нагрузки возвращается в исходное состояние, то говорят, что имеют дело с чисто упругой средой. Если после разгрузки появляются остаточные деформации, которые зависят только от величин нагрузок и порядка их приложения, но не зависят от скоростей нагружения и времени выдержки, то такая среда носит название упругопластической. В случае же, когда эти деформации существенно зависят от времени нагружения, про такие среды говорят, что они обладают свойствами ползучести или в более общем виде - реологическими свойствами.

Фактически все существующие материалы при различных температурах в той или иной мере обладают свойствами ползучести. Однако при определенных условиях работы материалов деформациями ползучести по сравнению с упругими или мгновенными пластическими деформациями можно пренебречь. При этом существенно упрощаются определяющие соотношения. Поэтому свойства ползучести учитываются только тогда, когда пренебрежение ими может привести к существенным ошибкам в оценке деформируемости и работоспособности исследуемых объектов.

Из сказанного следует, что для максимального использования потенциальных ресурсов материала необходимо более полно изучать его свойства, переходя от чистой упругости к учету пластичности и далее ползучести. Но при этом более широкий учет свойств материалов приводит к существенному усложнению соотношений, связывающих напряжения и деформации, что в свою очередь ведет к резкому росту трудностей при решении конкретных задач. Вопросы ползучести металлов и расчета элементов конструкций с учетом ползучести рассматриваются в специальных монографиях [1, 2, 3, 4, 5].

Процесс ползучести можно разделить на три стадии. В первой стадии (участок ОА, рис.??) скорость деформации ползучести постепенно уменьшается. Бейли в 1929 (Beiley R. W.) объяснял характер кривой ползучести при разных значениях времени  $t$  как результат взаимодействия механического упрочнения и термического разупрочнения. В первой стадии преобладает механическое упрочнение, связанное с ростом деформации ползучести.

Во второй стадии (участок АВ, рис.??) устанавливается равновесие между механическим упрочнением и термическим разупрочнением, и процесс ползучести протекает с минимальной постоянной во времени скоростью, которая зависит от напряжения и температуры. Длительность второго участка уменьшается с увеличением напряжения, при больших напряжениях она может вообще отсутствовать.



В третьей стадии ползучести (участок BC) скорость деформации непрерывно возрастает, пока не наступает разрушение образца (точка C). Увеличение скорости деформации в третьей стадии объясняется или увеличением  $\sigma$  вследствие уменьшения площади поперечного сечения образца, или образованием трещин внутри образца, которые развиваются в материале в течение времени под влиянием напряжений и температуры и ослабляют образец.

Рис. 1: Кривая ползучести

Из испытаний следует, что увеличение напряжения и температуры интенсифицирует процесс ползучести, скорости деформаций ползучести при этом возрастают, продолжительность второй стадии и время, необходимое для разрушения, уменьшаются. При этом I стадия вообще может отсутствовать.

# Глава 1

## Литературный обзор

### 1. Базовые модели ползучести

#### Установившаяся ползучесть

Рассмотрим ползучесть образца при растяжении, при котором продолжительность I и III участков кривой ползучести относительно общего времени работы образца невелика, т.е. образец большую часть времени находится в состоянии установившейся ползучести. В этом случае для описания поведения материала естественно использовать соотношение нелинейно-вязкого течения, называющееся теорией установившейся ползучести, в котором фигурирует зависимость скорости деформаций от напряжений  $\sigma$  и температуры  $T$ :

$$\dot{p} = f(\sigma, T) \quad (1.1)$$

Для функции  $f$  можно рассмотреть различные конкретные формы. Чаще других используются экспоненциальная зависимость:

$$\dot{p} = B_1 e^{\frac{\sigma}{\gamma}}, \quad (1.2)$$

предложенная Людвиком в 1908 г., и степенная зависимость

$$\dot{p} = B\sigma^n, \quad (1.3)$$

предложенная Бейли в 1929 г. Недостаток выражения, приводящего к ненулевой скорости ползучести  $\dot{p}$  при нулевом напряжении  $\sigma$  и вообще плохо описывающего свойства металлов при малых напряжениях, исправляет зависимость, предложенная А. Надай в 1937 г.:

$$\dot{p} = B \operatorname{sh}\left(\frac{\sigma}{\sigma_b}\right). \quad (1.4)$$

В последнее время для описания ползучести при растяжении широкое применение находит зависимость  $\dot{p}$ , предложенная С.А.Шестериковым и М.А.Юмашевой [6]:

$$\dot{p} = B \left( \frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_b - \sigma} \right)^n, \quad (1.5)$$

где  $n$  и  $B$  – параметры материала,  $\sigma_0$  – минимальный уровень напряжения при котором проявляется ползучесть,  $\sigma_b$  – предел кратковременной прочности. Полученное дробно-линейное соотношение при  $\sigma_0 = 0$  одновременно описывает линейную ползучесть при  $\sigma \ll \sigma_b$  и высокую степень нелинейности при  $\sigma \rightarrow \sigma_b$ .

## 2. Обзор решений

При рассмотрении задачи о стесненном деформировании мембранны выделяются два этапа деформирования: свободное деформирование (происходит вплоть до касания мембраной стенок матрицы) и стесненное деформирование (от касания мембраной стенок матрицы до заполнения или разрушения мембранны). До настоящего момента существует не так много решений задач о деформировании мембранны.

### Задача свободного деформирования, при учете упрочнения материала

Решение задачи о свободном деформировании мембранны шириной  $2l$  и начальной толщиной  $h_0$ , закрепленной с двух длинных сторон и нагруженной равномерным давлением  $q$ , приведено в монографии Н.Н. Малинина [2], где используется модель упрочнения материала:

$$\sigma_e = A\xi_e^{m_1}P^{m_2}, \quad (1.6)$$

где  $\sigma_e$  – интенсивность напряжений,  $\alpha$  – половина угла раствора,  $\xi_e$  деформации ползучести,  $A$ ,  $m_1$   $m_2$  – параметры материала, являющиеся справочной информацией[7, 8],  $P$  – параметр Удквиста.

Как результат решения задачи приводится зависимость угла раствора мембранны от безразмерного времени:

$$\begin{aligned} \int_0^t q^{1/m_1} dt &= b \int_0^\alpha \Phi d\alpha; \\ \Phi &= \left( \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha} \right)^{1/m_1} \left[ \ln \left( \frac{\alpha}{\sin \alpha} \right) \right]^{m_2/m_1} \left( \frac{1}{a} - \operatorname{ctg} \alpha \right); \\ b &= \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{(m_1+m_2+1)/m_1} (aH_0/l)^{1/m_1} \end{aligned}$$

### Задача стесненного деформирования, при условии упрочнения материала

Рассмотрим решение задачи, в случае идеального скольжения мембранны вдоль стенок матрицы, приведенное в монографии Н.Н. Малинина [2]:

$$\begin{aligned} \int_t^{t_1} q^{1/m_1} dt &= b \int_0^x \Phi_1 d\alpha; \\ \Phi_1 &= \frac{\chi_1}{\chi_2 + \chi_1 x} [\ln(\chi_2 + \chi_1 x)]^{m_2/m_1} \left\{ \frac{\alpha}{[\chi_2 - (1 - \chi_1)x](\chi_2 + \chi_1 x)} \right\}^{1/m_1}; \\ b &= \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{(m_1+m_2+1)/m_1} (aH_0/l)^{1/m_1}; \end{aligned}$$

$$\chi_1 = 1 - \alpha \operatorname{ctg} \alpha; \quad \chi_2 = \alpha \sin \alpha.$$

Из этого уравнения численно определяется зависимость безразмерной длины контакта от времени  $x(t)$  для заданного закона изменения давления во времени. Зная длину участка контакта, можно определить толщину мембраны и напряжения. Решения для случая прилипания также приведено в [2].

## Задача стесненного деформирования внутри криволинейной матрицы

В статье [9] приводится решение задачи деформирования мембранны шириной  $2a$  и начальной толщиной  $H_0$  внутри криволинейной матрицы. Мембрана нагружена односторонним равномерным давлением  $q = q(t)$ , которое может изменяться во времени по определенному закону. Для решения задачи была взята теория упрочнения:

$$p_e^\gamma \frac{dp_e}{dt} = A\sigma_e^n, \quad (1.7)$$

где  $\sigma_e$  и  $p_e$  – интенсивности напряжений и деформаций,  $n, \gamma, A$  – параметры материала при заданной температуре. Для этапа стесненного деформирования было получено соотношение (для случая идеального скольжения мембранны о стенки матрицы):

$$t^{n+1} = t_1^{n+1} + \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{n+1} (n+1)(q)^{-n} \int_1^{x_0} \frac{(\bar{\rho}d\alpha + \alpha d\bar{\rho} + d\bar{s})}{(\bar{\rho}\alpha + \bar{s})} \left( \frac{H}{\rho} \right)^n dx_0 \quad (1.8)$$

В данной статье накладывается ограничение на профиль матрицы: кривизна кривой, описывающей профиль матрицы должна монотонно увеличиваться от точки  $a$  к 0. В качестве примера рассматривается профиль матрицы заданный параболой:  $y = b(1 - x^k)$ ,  $1 < k \leq 2$ .

## Задача стесненного деформирования при условии установившейся ползучести

Рассматривается деформирование мембранны шириной  $2a$  и начально толщиной  $H_0$ , закрепленной вдоль длинных сторон и нагруженной равномерным поперечным давлением  $q$ . В работах [10, 11] рассматривается решение, основанное на дробно-сингулярной модели установившейся ползучести [6]:

$$\dot{p}_u = C \left( \frac{\sigma_u}{\sigma_b - \sigma_u} \right)^n, \quad (1.9)$$

в которой  $\sigma_u$  и  $\dot{p}_u$  – интенсивности напряжений и скоростей деформации ползучести,  $\sigma_b$  – предел кратковременной прочности материала,  $C$  и  $n$  – постоянные.

Известные работы [2, 9], описанные выше, допускают появление нефизических бесконечных напряжений ( $\sigma_u \rightarrow \infty$ ) в начальный момент времени. Для их исключения в данной работе и [10, 11] дополнительно учитывается мгновенное деформирование в качестве отдельного этапа.

Основное соотношение стадии свободного деформирования, выраженное в безразмерных переменных:

$$\bar{q} = \frac{q}{\sigma_b}, \bar{H} = \frac{H}{H_0}, \bar{H}_0 = \frac{H_0}{a}, \bar{t} = \frac{\sqrt{3}}{2} Ct, \quad (1.10)$$

принимает вид:

$$t = \int_{\alpha_1}^{\alpha} \left( \frac{1}{\alpha} - \operatorname{ctg} \alpha \right) \left( \frac{2H_0 \sin^2 \alpha}{\sqrt{3}q \cdot \alpha} - 1 \right)^n d\alpha \quad (1.11)$$

В работах [10, 11] стадия деформирования решена с помощью конечно разностных схем, при условии трения мембранны о стенки матрицы. Идеальное скольжение получается из этого решения путем обнуления коэффициента трения. Основные формулы в кратком обзоре опустим.

## Глава 2

# Математические модели

Решение рассматриваемой задачи, основанное на степенной связи интенсивности напряжений и скоростей деформации ползучести при напряжениях, не превосходящих предела текучести материала, представлено в монографии Л.М. Качанова [3]. Решение задачи о деформировании мембраны в стесненных условиях при учете упрочнения материала приведены в монографиях Н.Н. Малинина [2] и К.И. Романова [4]. Известные работы [2, 9] допускают появление нефизичных бесконечных напряжений ( $\sigma_u \rightarrow \infty$ ) в начальный момент времени, для их исключения в данной работе дополнительно учитывается мгновенное деформирование. В [10, 11] приведено решение рассматриваемой задачи при различных граничных условиях, однако только для клиновидной матрицы. В данной работе приводится обобщение результатов, полученных в [10, 11], на случай криволинейной матрицы. Напряженное состояние мембраны можно считать безмоментным. Поскольку длина мембраны значительно превосходит её ширину, можно считать, что реализуется случай плоской деформации.

### 1. Постановка задачи

Исследуется стесненное деформирование длинной узкой прямоугольной мембраны шириной  $2a$  и начальной толщиной  $H_0$  внутри жесткой матрицы под действием равномерного поперечного давления  $q$ . При этом предполагаются закрепление мембраны вдоль ее длинных сторон и идеальное скольжение её поверхности относительно поверхности матрицы. Рассматриваются два вида матриц: криволинейная парабола вида  $y = b(1 - x)^k$  с показателем степени  $1 < k \leq 2$ , и матрица с вертикальными стенками и плоским днищем, глубиной  $b$ . Численное решение получен-

ных уравнений должно проводиться двумя методами: методом Симпсона и методом Гаусса. Интерпретация численных расчетов должны быть представлена в двух графических формах: видео деформирования мембраны внутри матрицы (для матрицы с вертикальными стенками и плоским днищем) и в виде графиков, отражающих зависимости основных параметров деформации от времени.

## 2. Деформирование внутри криволинейной матрицы

### Первая стадия

Первая стадия — стадия мгновенного упругого деформирования — позволяет моделировать процесс деформации в начальный момент времени для исключения бесконечных напряжений при  $t \sim 0$ . Упругое деформирование мембранны описывается с помощью закона Гука при сложном напряженном состоянии при учете несжимаемости материала мембранны.

Вводим безразмерные переменные:

$$\bar{q} = \frac{q}{\sigma_b}, \quad \bar{H} = \frac{H}{H_0}, \quad \bar{H}_0 = \frac{H_0}{a}, \quad \bar{t} = \frac{\sqrt{3}}{2} C t, \quad k = \frac{E}{\sigma_b}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{H_0}, \quad (2.1)$$

где  $H$  — толщина мембранны в произвольный момент времени,  $H_0$  — толщина мембранны при  $t = -0$ ,  $q$  — давление,  $2a$  — ширина,  $E$  — модуль Юнга,  $\rho$  — радиус кривизны мембранны. При дальнейшем анализе черточки над безразмерными величинами в этом пункте опустим. Так как вывод формул описан в работах [10, 11] и совпадает с нашим решением, приведем только итоговый результат, описывающий связь давления  $q$  и мгновенно появляющегося угла  $\alpha_1$ , также приведены характеристики, описывающие состояние мембранны ( $H_1$  — толщины и  $\sigma_{\theta 1}$ ):

$$\begin{aligned} q &= \frac{4}{3} H_0 k \sin(\alpha_1) \left( 1 - \frac{\sin(\alpha_1)}{\alpha_1} \right), \\ H_1 &= \frac{\sin(\alpha_1)}{\alpha_1}, \\ \sigma_{\theta 1} &= \frac{q}{H_1 H_0 \sin(\alpha_1)}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

Следует отметить, что соотношения (0.2) позволяют исключить бесконечные напряжения в начальный момент времени. Также следует отметить, что в работе расчеты этих значений для материала были произведены с помощью программного средства Maxima.

### Вторая стадия

Вторая стадия — стадия свободного деформирования(рис. ??) — позволяет моделировать деформацию мембранны вплоть до её касания стенок матрицы, что соответствует углу раствора  $2\alpha_2$ . Подробный вывод соотношений описан в работах [10, 11], поэтому приведем то соотношение, которое было рассмотрено и реализовано в работе:

$$t = \int_{\alpha_1}^{\alpha} \left( \frac{1}{\alpha} - \operatorname{ctg} \alpha \right) \left( \frac{2H_0 \sin^2 \alpha}{\sqrt{3} q \alpha} \right)^n d\alpha \quad (2.3)$$

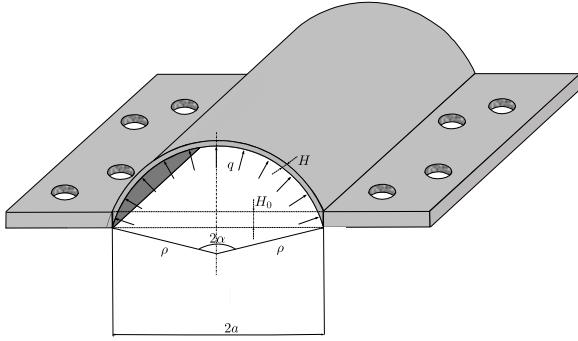


Рис. 2: Свободное деформирование

### Третья стадия

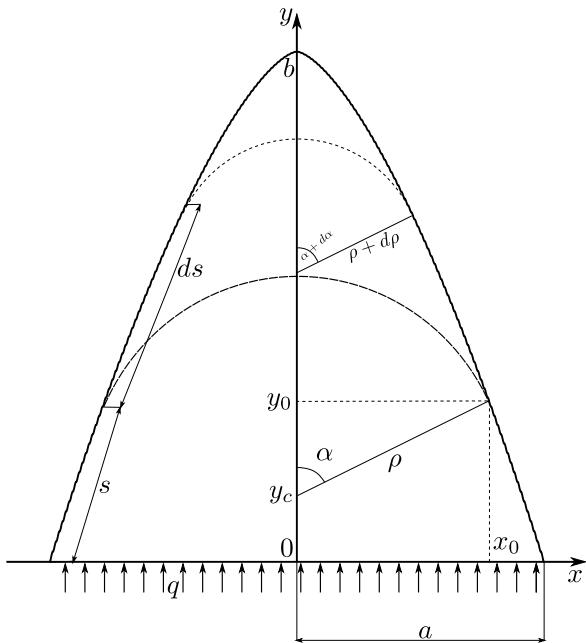


Рис. 3: Стесненное деформирование

Рассмотрим аналогично [9] два близких деформированных состояния: одно с радиусом  $\rho$  и длиной участка контакта  $s$  и второе  $\rho + d\rho$  и длиной участка контакта  $s+ds$ . Основываясь на геометрических соображениях (рис. 2), получим соотношения, характеризующие два близких состояния в данных координатных осях:

$$\left. \begin{aligned} \rho(x_0) &= \sqrt{(y_0 - y_c)^2 + x_0^2}; \quad d\rho = \rho'_{x_0} dx_0 \\ s(x_0) &= \int_{x_0}^1 \sqrt{1 + f_x'^2} dx; \quad ds = s'_{x_0} dx_0 \\ \alpha(x_0) &= \frac{\pi}{2} - \arctg(g'_{x_0}); \quad d\alpha = \alpha'_{x_0} dx_0 \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Для анимированного моделирования деформации мембраны требовались промежуточные расчеты по формуле (0.3), которые были произведены методами, описанными в пункте 3.

Началом стесненного деформирования (третья стадия) считается момент времени, при котором мембрана впервые касается матрицы. При исследовании этой стадии рассматривается идеальное скольжение и прилипание мембраны относительно стенок матрицы, поверхность которой задана уравнением  $\bar{y} = f(\bar{x}) = \bar{b}(1 - (\bar{x})^k)$  (рис. ??),  $\bar{x} = \frac{x}{a}$ ,  $\bar{y} = \frac{y}{a}$ ,  $b$  — глубина матрицы (рис. ??)  $\bar{b} = \frac{b}{a}$ . При этом на матрицу будет наложено ограничение, аналогичное [9]: кривизна кривой должна монотонно увеличиваться от точки  $a$  до 0, для того, чтобы зона стесненного деформирования оставалась одиночной и непрерывной.

Введем обозначения:  $H$  — толщина мембраны,  $q$  — давление,  $H_0$  — начальная толщина,  $C$  — константа материала,  $a$  — ширина,  $x_0$  — крайняя точка касания мембранных стенок матрицы,  $\rho = \rho(x_0)$ ,  $\alpha = \alpha(x_0)$  — радиус кривизны и угол раствора свободной части мембранны,  $s = s(x_0)$  — длина участка контакта,  $g(x_0)$  — нормаль к функции профиля матрицы,  $y_c$  — центр окружности, дуга которой описывает свободную часть мембранны. Учитывая идеальное скольжение мембранны вдоль стенок матрицы, её геометрических характеристиках, получим соотношение для окружной деформации ползучести:

$$p_\theta = \frac{\rho d\alpha + \alpha d\rho + ds}{\rho\alpha + s} \quad (2.5)$$

Каждое из слагаемых числителя (??) содержит  $dx_0$ , следовательно, можно сгруппировать и ввести обозначения:

$$\rho d\alpha + \alpha d\rho + ds = B_1(x_0)dx_0; \quad \rho\alpha + s = B_2(x_0). \quad (2.6)$$

Тогда

$$dp_\theta = \frac{B_1(x_0)dx_0}{B_2(x_0)} \quad (2.7)$$

С помощью (??) вычисляем характеристики деформированного состояния:

$$\dot{p}_\theta = \frac{B_1}{B_2} \frac{dx_0}{dt}; \quad \dot{p}_u = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{B_1}{B_2} \frac{dx_0}{dt} \quad (2.8)$$

Аналогично выводам [9], из условия несжимаемости получаем:

$$H = H_1 \exp \left( \int_1^{x_0} \frac{B_1}{B_2} dx_0 \right) \quad (2.9)$$

Интенсивность напряжений будет:

$$\sigma_u = \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{q\rho}{H} \quad (2.10)$$

Подставляя (??), (??) в (0.1) получим выражение, характеризующее зависимость  $x_0(t)$ :

$$t = t_1 + \int_1^{x_0} \left[ \frac{2H}{\sqrt{3}q\rho} - 1 \right]^n \frac{B_1}{B_2} dx_0, \quad (2.11)$$

где  $t_1$  — время окончания стадии свободного деформирования. Выражение подлежит численному исследованию, результаты которого приведены в главе 2.

В случае постепенного прилипания контактная часть мембранны (с переменной толщиной) является жесткой, недеформированной, а свободная часть мембранны (с постоянной толщиной) представляет собой часть дуги окружности. Окружная деформация примет вид:

$$p_\theta = \frac{\rho d\alpha + \alpha d\rho + ds}{\rho\alpha} \quad (2.12)$$

Проведя обозначения, аналогичные случаю скольжения, получим:

$$\rho d\alpha + \alpha d\rho + ds = B_1(x_0)dx_0; \quad \rho\alpha = B_3(x_0). \quad (2.13)$$

Тогда

$$dp_\theta = \frac{B_1(x_0)dx_0}{B_3(x_0)} \quad (2.14)$$

Основные характеристики процесса формирования определяются аналогично случаю скольжения при замене (??) на (??). Обозначим только основную зависимость крайней точки касания матрицы от времени:

$$t = t_1 + \int_1^{x_0} \left[ \frac{2H}{\sqrt{3}q\rho} - 1 \right]^n \frac{B_1}{B_3} dx_0, \quad (2.15)$$

### 3. Деформирование внутри матрицы с вертикальными стенками и плоским днищем (Π-образной матрицы)

#### Первая и вторая стадия

Первая и вторая стадия не имеют отличительных особенностей по сравнению с моделированием деформирования внутри криволинейной матрицы. Поэтому при вычислениях были взяты формулы (0.2) и (0.3).

#### Третья и четвертая стадия

При рассмотрении матрицы с вертикальными стенками и плоским днищем учитывалось, что стесненное деформирование проходит как две последовательные стадии: третья стадия — когда мембрана касается только стенок матрицы и четвертая стадия — когда мембрана касается днища матрицы и свободных дуг становится две.

Дана матрица шириной  $2a$  и высотой  $L$ . Рассмотрим два близких состояния в третьей стадии: одно с радиусом  $\rho$  и длиной участка контакта  $s$  и с длиной участка контакта  $s + ds$ . При касании только вертикальных стенок радиус свободной дуги матрицы изменяться не будет, поэтому:

$$dp = \frac{ds}{s + \frac{\pi}{2}\rho} \quad (2.16)$$

Введем безразмерные величины:

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\alpha}, \quad \bar{s} = \frac{s}{a}, \quad (2.17)$$

Подставляя (0.5) в (0.4) и учитывая, что из геометрического смысла на этом этапе  $\rho = a$ , получим (черточки над безразмерными переменными опустим):

$$dp_\theta = \frac{ds}{s + \frac{\pi}{2}} \quad (2.18)$$

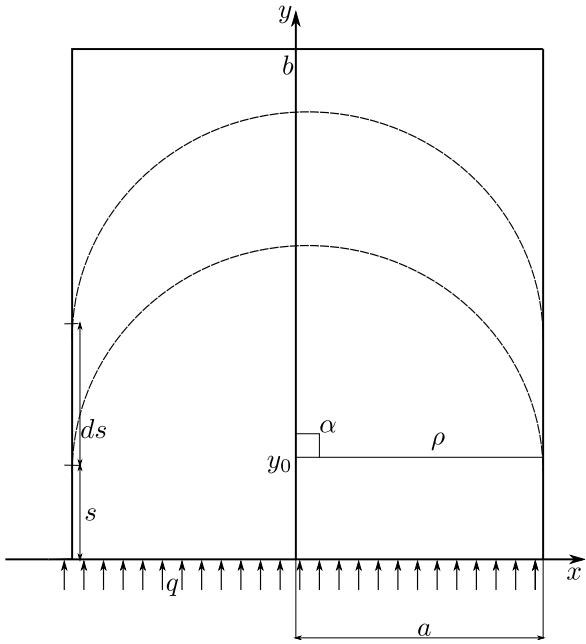


Рис. 4: Третья стадия

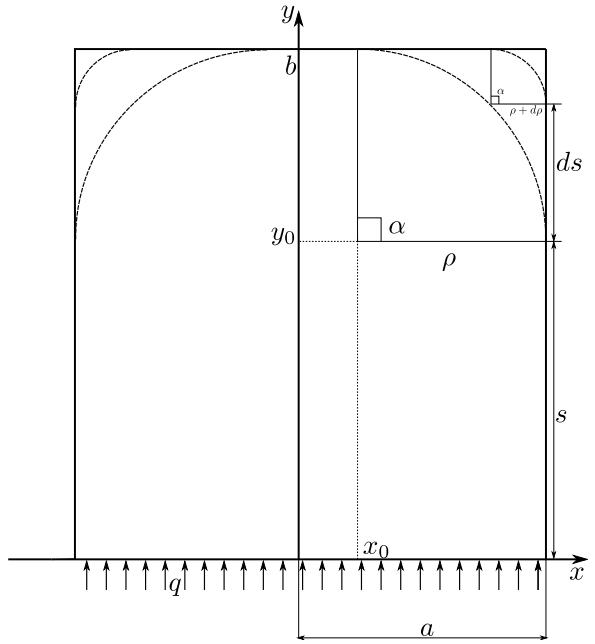


Рис. 5: Четвертая стадия

Перейдем к координатам аналогично пункту ?? этой главы, введя тривиальную зависимость точки прилипания от крайней координаты касания:  $s = y_0$ ,  $ds = dy_0$ . Проведя замену переменных и учитывая условие несжимаемости, получаем:

$$H = \frac{H_1(y + \frac{\pi}{2})}{\frac{\pi}{2}} \quad (2.19)$$

Подставляя (0.6), (??) в (0.1) и используя замену переменных, получим:

$$t = t_1 + \int_0^{y_0} \left[ \frac{2H}{\sqrt{3}q\rho} - 1 \right]^n \left( \frac{dy_0}{y_0 + \frac{\pi}{2}} \right) \quad (2.20)$$

где  $t_1$  – время окончания стадии свободного деформирования. Выражение подлежит численному исследованию, результаты которого приведены в главе ??.

Рассмотрим два близких состояния при касании мембраны днища матрицы: одно с радиусом  $\rho$  и длиной участка контакта  $s$  и другое с радиусом  $\rho + d\rho$  с длиной участка контакта  $s + ds$  (рис. 2).

Выражение окружной деформации примет вид:

$$p_\theta = \frac{2ds + \frac{\pi}{2}d\rho}{b - a + 2s + \frac{\pi}{2}}, \quad (2.21)$$

из рис. 2 видно, что  $2a$  и  $b$  – ширина и глубина матрицы,  $s$  – как и в предыдущих обозначениях – длина участка касания. Для удобства введем обозначения:

$$\bar{b} = \frac{b}{a} + \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right), \quad \bar{x} = \frac{s}{a} \quad (2.22)$$

Подставляя (0.10) в (0.9), дифференцируя по  $t$  и используя соотношение

$$p_u = \frac{2}{\sqrt{3}} p_\theta, \quad (2.23)$$

получаем выражение (черточки над безразмерными величинами опущены):

$$\dot{p}_u = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\left(2 + \frac{\pi}{2}\right)}{b + \left(2 - \frac{\pi}{2}x_0\right)}, \quad (2.24)$$

$x_0 \in [0, 1]$  – так же как и в предыдущих обозначениях – крайняя точка касания днища.

Подставляя (0.12) в (0.1), получаем зависимость времени от точки касания:

$$t = t_2 + \int_0^{y_0} \left[ \frac{2H}{\sqrt{3}q\rho} - 1 \right]^n \left( \frac{\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) dx_0}{b + \left(2 - \frac{\pi}{2}x_0\right)} \right), \quad (2.25)$$

где  $t_2$  – время окончания третьей стадии деформирования,  $H_2$  – толщина мембраны, соответствующей  $t_2$ , а  $H$  вычисляется по формуле:

$$H = H_2 / \left(1 + \left(\frac{4}{\pi} - 1\right)x\right) \quad (2.26)$$

Выражение подлежит численному исследованию, результаты которого приведены в главе 2.

Разбивая процесс стесненного деформирования на две стадии аналогично случаю скольжения, получим соотношения для третьей стадии при условии прилипания:

$$p_\theta = \frac{ds}{\frac{\pi}{2}\rho} \quad (2.27)$$

Проведя обозначения, аналогичные случаю скольжения, получим:

$$y_0 = \frac{s}{a}; \quad \rho = a \quad (2.28)$$

Тогда, аналогично выводам в случае идеального скольжения получим:

$$dp_\theta = \frac{2dy_0}{\pi}; \quad \dot{p}_u = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{2dy_0}{\pi}, \quad (2.29)$$

Зависимость толщины мембраны от крайней точки касания на протяжении третьей стадии, в случае прилипания мембраны к стенке матрицы, будет иметь вид:

$$H = H_1 e^{-\frac{2}{\pi}y_0} \quad (2.30)$$

Проведя подстановку (0.17) в (0.1):

$$t = t_1 + \int_1^{y_0} \left[ \frac{2H}{\sqrt{3}q\rho} - 1 \right]^n \frac{2}{\pi} dy_0, \quad (2.31)$$

Рассуждая аналогично четвертой стадии идеального скольжения и третьей стадии в условиях прилипания, для четвертой стадии стесненного деформирования в условии прилипания получим основные соотношения:

$$p_\theta = \frac{(2ds + \frac{\pi}{2}d\rho)}{\frac{\pi}{2}\rho} \quad (2.32)$$

Переходя к координатам и безразмерным величинам по формулам:

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{a} = 1 - x_0, \quad \bar{s} = \frac{s}{a}, \quad d\bar{s} = dx_0, \quad d\bar{\rho}, \quad (2.33)$$

где  $x_0$  — крайняя координата точки касания днища матрицы. Получим соотношения, характеризующие деформированное состояние мембраны:

$$p_u = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{(2 - \frac{\pi}{2})dx_0}{\frac{\pi}{2}(1 - x_0)} \quad (2.34)$$

$$H = H_2 \frac{(\pi - x_0)^{4-\pi}}{\pi^{1-\pi}} \quad (2.35)$$

Проведя подстановку (0.22) в (0.1):

$$t = t_2 + \int_1^{y_0} \left[ \frac{2H}{\sqrt{3}q\rho} - 1 \right]^n \frac{(2 - \frac{\pi}{2})dx_0}{\frac{\pi}{2}(1 - x_0)} dx_0, \quad (2.36)$$

Для обоих граничных условий (скольжение и прилипание) внутри матрицы с вертикальными стенками и плоским днищем были проведены расчеты, представленные в главе 2.

## 4. Численное интегрирование

В работе рассматриваются два метода приближенного вычисления интегралов: метод Симпсона и метод Гаусса.

Все приемы численного интегрирования [12] основаны на замене определенного интеграла

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (2.37)$$

конечной суммой

$$I_n = \sum_{k=0}^n c_k f(x_k), \quad (2.38)$$

где  $c_k$  — числовые коэффициенты и  $x_k$  — точки отрезка  $[a, b]$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ . При этом интеграл по переменному верхнему пределу берется так: выбирается разбиение возможных значений верхнего предела с определенным шагом. Внутри этого отрезка оба предела интеграла являются определенными и выбирается одна из нижеописанных формул.

## Метод Симпсона

При аппроксимации интеграла заменим подынтегральную функцию  $f(x)$  параболой, проходящей через точки  $(x_j, f(x_j))$ ,  $j = i-1, i-0.5, i$ . Подробный вывод формул представлен в [12]. Приведем окончательную формулу:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6N} [f_0 + f_{2N} + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{2N-2}) + 4(f_1 + f_3 + \dots + f(2N-1))], \quad (2.39)$$

где  $2N$  — количество узлов одномерной сетки с шагом  $h$ ,  $f_i$  — значение функции  $f$  в точке  $x_i$ .  $x_i = a + kh$ .

## Метод Гаусса

Повысить точность вычисления численного интеграла можно не только с помощью уменьшения шага интегрирования, но и за счет выбора определенных точек интегрирования. Уменьшение шага ведет к пропорциональному увеличению времени работы программы, что не приемлемо по времени работы при сильно увеличивающейся точности.

Метод Гаусса описывает способ нахождения специальных точек интегрирования, при этом в разложении интеграла используются квадратурные формулы наивысшей алгебраической точности. Изначально при методе Гаусса рассматривается канонический интеграл:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (2.40)$$

Для перехода к произвольному интервалу можно воспользоваться следующей заменой:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}z + \frac{a+b}{2}\right) dz \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n w_i f\left(\frac{b-a}{2}z_i + \frac{a+b}{2}\right). \quad (2.41)$$

В работах [12, 13, 14] подробно описан вывод и доказательство корректности формул, поэтому просто приведем таблицу ключевых значений для 1,2,3,4,5-ти точечного метода.

Кол-во точек	$x_i$	$w_i$
1	0	2
2	$\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$	1
3	0	$\frac{8}{9}$
	$\pm \sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$
4	$\pm \sqrt{(3 - 2\sqrt{\frac{6}{5}})/7}$	$\frac{18 + \sqrt{30}}{36}$
	$\pm \sqrt{(3 + 2\sqrt{\frac{6}{5}})/7}$	$\frac{18 - \sqrt{30}}{36}$
5	0	$\frac{128}{225}$
	$\pm \frac{1}{3} \sqrt{5 - 2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{322 + 13\sqrt{70}}{900}$
	$\pm \frac{1}{3} \sqrt{5 + 2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{322 - 13\sqrt{70}}{900}$

В работе использовался пятиточечный метод и окончательная формула принимает вид:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x) dx = & 128/255 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{322 + 13\sqrt{70}}{900} \cdot f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{1}{3} \cdot \sqrt{5 - 2\sqrt{\frac{10}{7}}} \cdot \frac{b-a}{2}\right) + \\
& \frac{322 + 13\sqrt{70}}{900} \cdot f\left(\frac{a+b}{2} - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{5 - 2\sqrt{\frac{10}{7}}} \cdot \frac{b-a}{2}\right) + \\
& \frac{322 - 13\sqrt{70}}{900} \cdot f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{1}{3} \cdot \sqrt{5 + 2\sqrt{\frac{10}{7}}} \cdot \frac{b-a}{2}\right) + \\
& \frac{322 - 13\sqrt{70}}{900} \cdot f\left(\frac{a+b}{2} - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{5 + 2\sqrt{\frac{10}{7}}} \cdot \frac{b-a}{2}\right);
\end{aligned} \tag{2.42}$$

## Погрешности

Оценим погрешность, получаемую по двум рассмотренным методам интегрирования. При вычислении интеграла

$$\int_a^b f(x) dx \quad (2.43)$$

методом Гаусса погрешность оценивается по формуле:

$$R_g(n) = \frac{2^{2n+3}(n+1)!}{((2n+2)!)^3(2n+3)} f^{(2n+2)}(\xi), \quad \xi \in [-1, 1] \quad (2.44)$$

методом Симпсона погрешность оценивается по формуле:

$$R_c = \frac{(b-a)h^4}{2880} f^{(4)}(\xi) \quad (2.45)$$

Вычисление производной 12 порядка в рассматриваемых подынтегральных функциях представляет определенные сложности, поэтому оценка погрешности метода Гаусса производится по методу Ругге-Ромберга. При этом получается, что метод Гаусса обеспечивает двенадцатый порядок точности, а для метода Симпсона широко распространена [12] оценка  $O(h^4)$ .

Так как метод Симпсона брался с шагом, примерно равным  $\approx 10^{-5}$  на протяжении всего участка интегрирования, то оценка математической погрешности получается  $\approx 10^{-20}$ , что значительно меньше по порядку, по сравнению с машинным  $\epsilon = 2^{-52} \approx 2 \cdot 10^{-16}$  поэтому на погрешность вычислений влияют погрешности машинных вычислений. Для улучшения получаемой машинной погрешности при сложении вычисляемых величин использовался метод суммирования Кахана [18]. Сам алгоритм имеет вид:

```

1 S = X[1]
2 C = 0
3 for j = 2 to N
4     Y = X[j] - C
5     T = S + Y
6     C = (T - S) - Y
7     S = T
8 end

```

где  $S$  — получаемая сумма,  $C$  — погрешность,  $N$  — количество суммируемых элементов. В работе [18] приводится оценка погрешности метода:

$$R_\epsilon = \sum |x_j| \cdot 2\epsilon + O(N\epsilon^2) \sum |x_j| \quad (2.46)$$

Заметим, что погрешность при обычном суммировании оценивается как:

$$R'_\epsilon = N\epsilon \sum |x_j|. \quad (2.47)$$

С учетом того что применялись числа с двойной точностью (стандарт IEEE854), итоговая оценка относительной погрешности будет:

$$R_i + R_\epsilon \quad (2.48)$$

где  $R_i = R_c, R_g$  – погрешность математического метода,  $R_\epsilon$  – погрешность машинных вычислений. Таким образом погрешность приблизительно равна  $10^{-8}$ , при обычном методе суммирования она составляла  $10^{-3}$ . Метод Симпсона при увеличении количества точек имеет довольно простой вид, который просто распараллелить на несколько вычислительных ядер, представление метода Гаусса усложняется при увеличении количества узлов.

# Глава 3

## Анализ результатов

### 1. Особенности реализации

При реализации методов, описанных в предыдущем пункте использовался язык C++, стандарт 2011 года. Структура проекта была разбита на несколько составных частей:

1. Описание численного метода Симпсона.
2. Описание численного метода Гаусса.
3. Описание граничных условий.
4. Описание самого процесса деформирования.

В первых двух пунктах была применена технология шаблонов, так как к функциям интегрирования обращаются объекты разных классов. Шаблон(template) — средство языка C++, предназначенное для кодирования обобщённых алгоритмов без привязки к некоторым параметрам (например, типам данных, размерам буферов, значениям по умолчанию). В C++ возможно создание шаблонов функций и классов.

В частности, были написаны обобщенные функции интегрирования методом Гаусса и методом Симпсона, которые на вход принимали объект, у которого присутствовал оператор, вычисляющий значение подынтегральной функции, а тип объекта определен не был, так как в эти функции передавались объекты различных классов.

В стандарте C++11 появилась встроенная поддержка многопоточности, что также было использовано в работе. Потоком в программировании называют легковесный процесс, имеющий с процессом-родителем общие ресурсы, такие как память, тогда как процессы не разделяют этих ресурсов. В частности, потоки разделяют инструкции процесса (его код) и его контекст (значения переменных, которые они имеют в любой момент времени).

Задача о деформировании мембранны внутри криволинейной матрицы связана с большим количеством вычислений интегралов. Алгоритм вычисления интеграла с неопределенным верхним пределом выглядит так:

- разбиваем область верхнего предела на отдельные участки;
- вычисляем по каждому участку значение;
- суммируем полученный результат, получая непрерывные значения.

Как видно из алгоритма, второй пункт можно вычислять независимо для каждого интеграла. В результате разбиения задач по потокам для свободного и стесненного деформирования внутри криволинейной матрицы было получено ускорение,

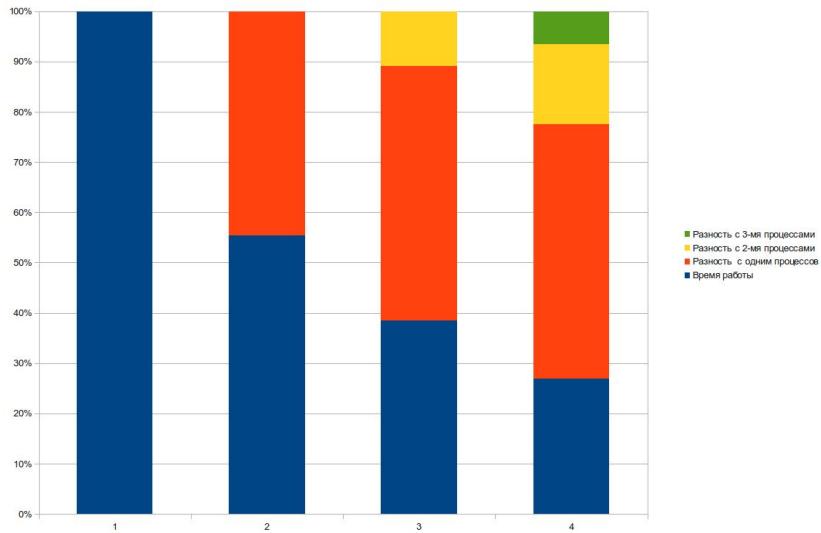


Рис. 6: Время работы программы

отображаемое на рис.???. Отметим, что во второй задаче, где фигурирует матрица с вертикальными стенками и плоским днищем, результаты распараллеливания не приведены, так как там слишком малое время вычисления из-за упрощенных формул для расчета толщины мембранны на каждом шаге в силу вида матрицы.

Для представления двух типов графических данных требуется разный формат вывода основного вычислительного ядра системы. Рассмотрим общую схему программного комплекса, разработанного в рамках данной работы (рис.??).

Для получения графических представлений зависимостей использовался пакет TikZ[15] — расширение системы L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X[??] — позволяющий получать качественное векторное представление расчетных данных. Вычислительное ядро может работать в двух режимах: на ввод данных для анимирования, о которых будет рассказано в пункте 3 этой главы, и на вывод данных для построения графиков. Эти данные конвертируются подпрограммой в представление зависимостей основных характеристик деформирования от времени, а затем полученные данные поступают на вход скрипту TikZ, строящему по этим данных графики, представленные в пункте 2 текущей главы (рис.?? - 10).

## 2. Анализ численного эксперимента

### Деформирование внутри криволинейной матрицы

В качестве примера рассмотрим деформирование мембранны из алюминиевого сплава Д16Т при 400°C [11]. Константы материала:  $C = 9.37 \cdot 10^5 \text{ МПа}^{-n} \text{ сек}^{-1}$ ,  $n = 3.4$ ,  $\sigma_b = 88.3 \text{ МПа}$ . Геометрические размеры мембранны: ширина  $2a = 200 \text{ мм}$ , толщина  $H_0 = 2 \text{ мм}$ ,  $k=1.5$ ,  $\bar{b}=4.5$  давление  $q = 2.65 \text{ кПа}$  [11].

Вычисления показали, что мембрана в условиях идеального скольжения полностью заполняет криволинейную матрицу  $y = 4.5(1 - x^{1.5})$  за бесконечное время. Стадия мгновенного деформирования характеризуется параметром  $\bar{H}_1 = 0.97$ , стадия

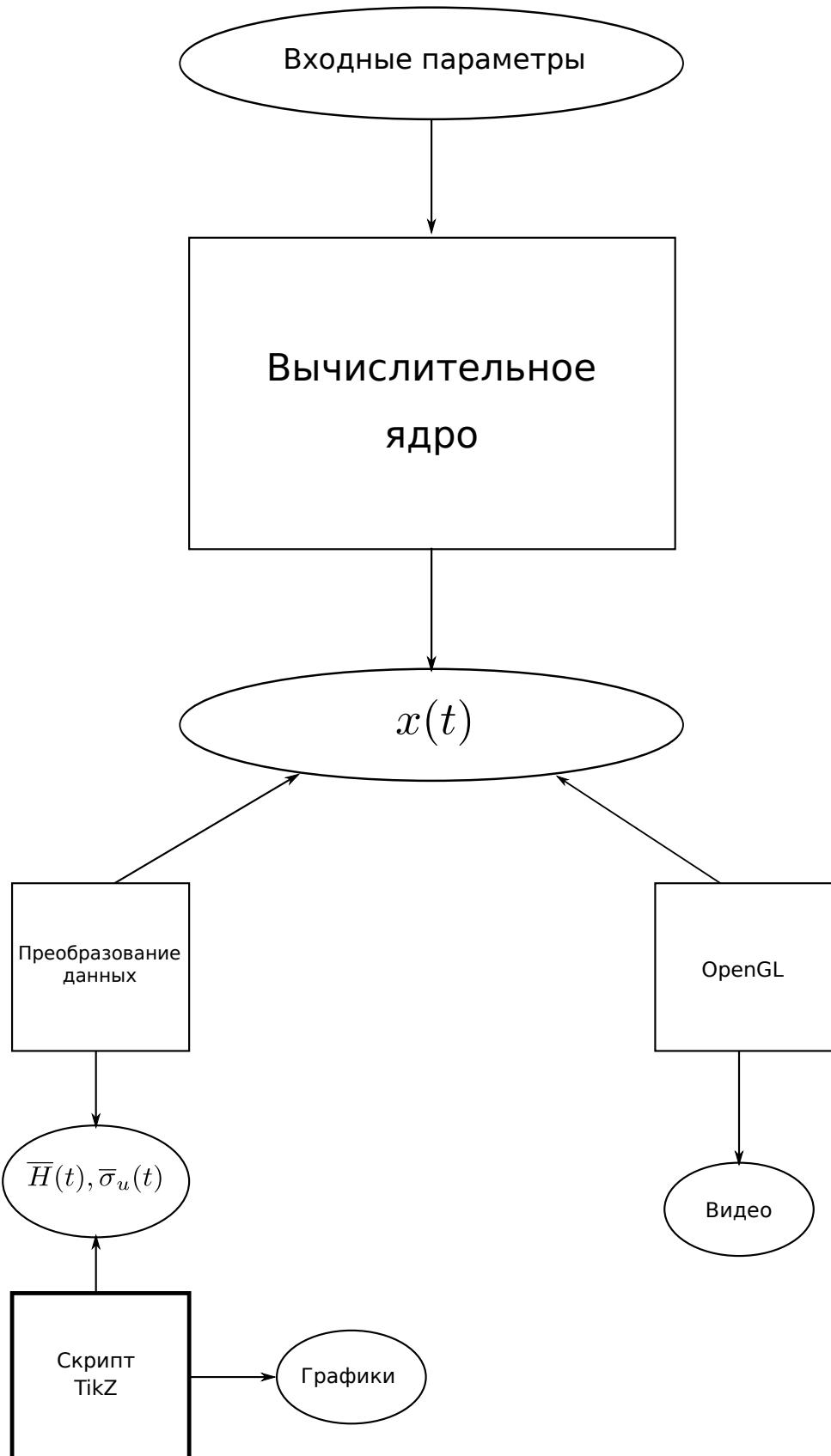


Рис. 7: Программный комплекс

свободного деформирования характеризуется параметрами  $\bar{H}_2 = 0.69$ ,  $\bar{t}_2 = 5.36 \cdot 10^8$ . На рис.?? представлен график зависимости толщины мембраны и интенсивности напряжения от времени (кривые 1 и 2 соответственно).

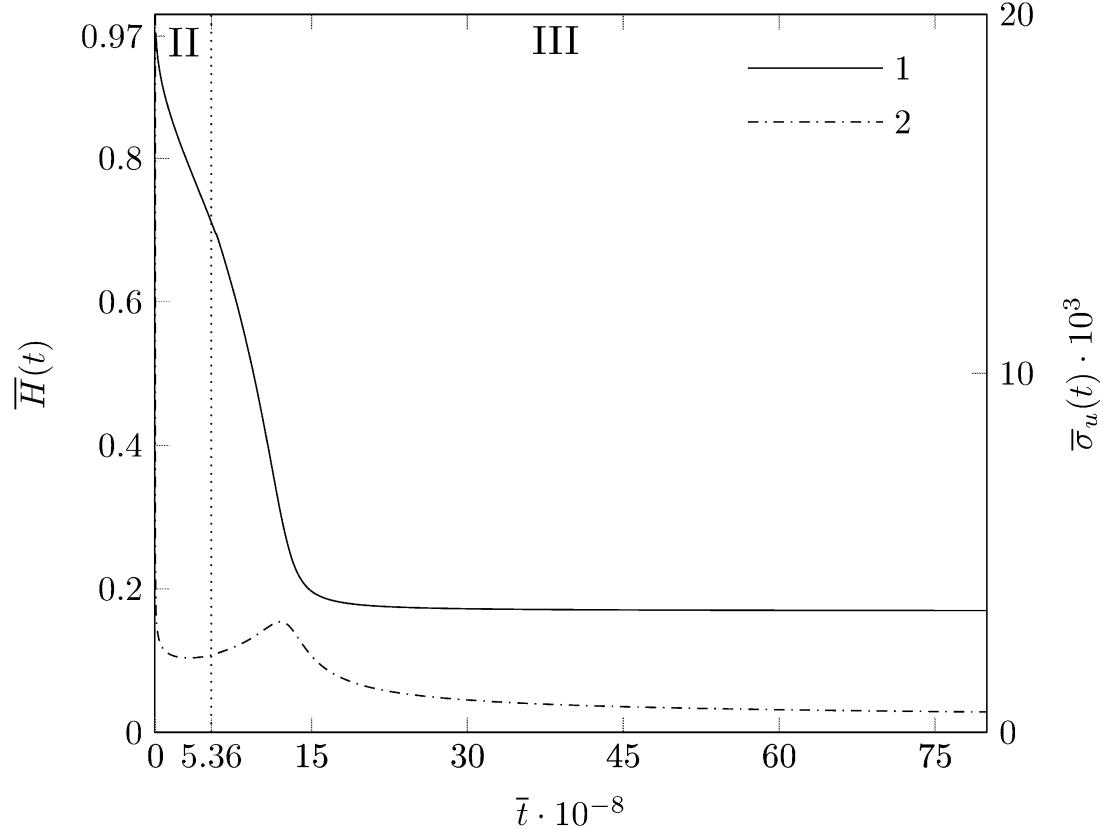


Рис. 8: Зависимости толщины(1) и интенсивности напряжений(2) от времени при условии идеального скольжения внутри криволинейной матрицы.

Расчет для прилипания, как граничного условия, показал, что для начальных данных, идентичных случаю скольжения мембрана разрушается при толщине  $\bar{H} = 0.015$  за время  $\bar{t} = 12.15 \cdot 10^8$ , достигая предельно допустимого напряжения  $\sigma_b$ . На рис.?? представлен график зависимости толщины мембраны и интенсивности напряжения от времени (кривые 1 и 2 соответственно).

## Деформирование внутри матрицы с вертикальными стенками и плоским днищем

Расчет для мембранны внутри матрицы с вертикальными стенками и плоским днищем проводился для матриц с различной высотой:  $b = a$  (рис.3),  $b = 4.5a$  (рис.4),  $b = 7a$  (рис.5),  $b = 10.8a$  (рис.6). Из рисунков видно, что при увеличении высоты мембраны увеличивается максимально достижимая интенсивность напряжения, которая при достижении значения  $\sigma_b$  приведет к разрушению мембраны. Занесём результаты вычислений в таблицу 1.

Для другого граничного условия — прилипания мембраны к стенке матрицы — был проведен численный расчет и получены следующие результаты: для

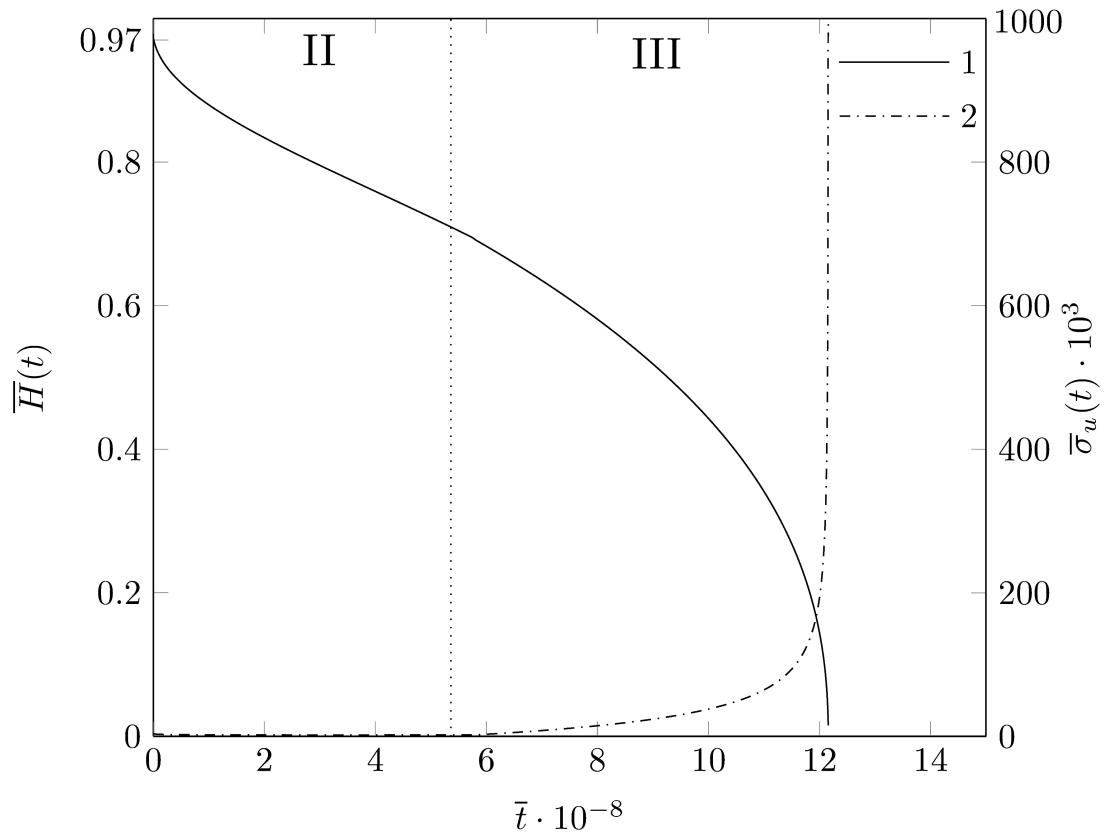


Рис. 9: Зависимости толщины(1) и интенсивности напряжений(2) от времени при условии прилипания внутри криволинейной матрицы.

$b/a$	$\bar{t}_2/\bar{H}_2$	$\bar{t}_3/\bar{H}_3$
1	$7.14 \cdot 10^8 / 0.636$	$7.14 \cdot 10^8 / 0.636$
4.5	$7.14 \cdot 10^8 / 0.636$	$13.67 \cdot 10^8 / 0.186$
7	$7.14 \cdot 10^8 / 0.636$	$13.96 \cdot 10^8 / 0.125$
10.8	$7.14 \cdot 10^8 / 0.636$	$13.98 \cdot 10^8 / 0.089$

Таблица 1

$b < 10.8 \cdot a$  происходит заполнение мембранны за бесконечное время. Для матриц, у которых отношение высоты к ширине превосходит 10.8 раз, наступает разрушение на третьем этапе деформации. Графики построены для случаев  $b = a$ ,  $b = 4.5a$ ,  $b = 7a$ ,  $b = 10.8a$ .

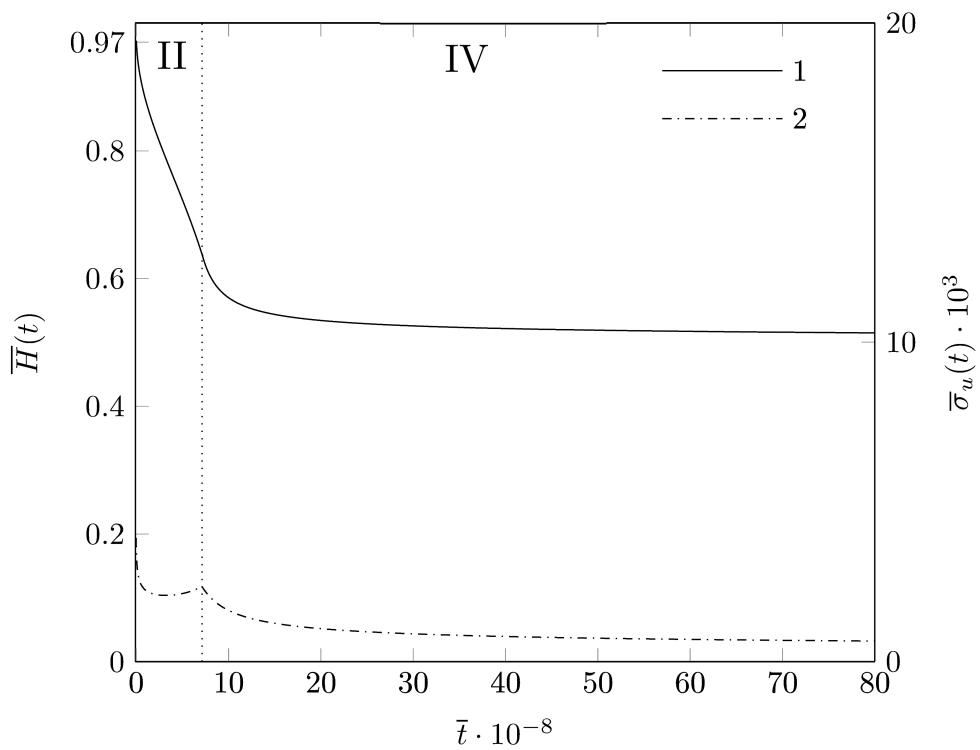


Рис. 10: Зависимости толщины(1) и интенсивности напряжений(2) от времени при условии идеального скольжения внутри П-образной матрицы. Отношение  $b/a = 1$

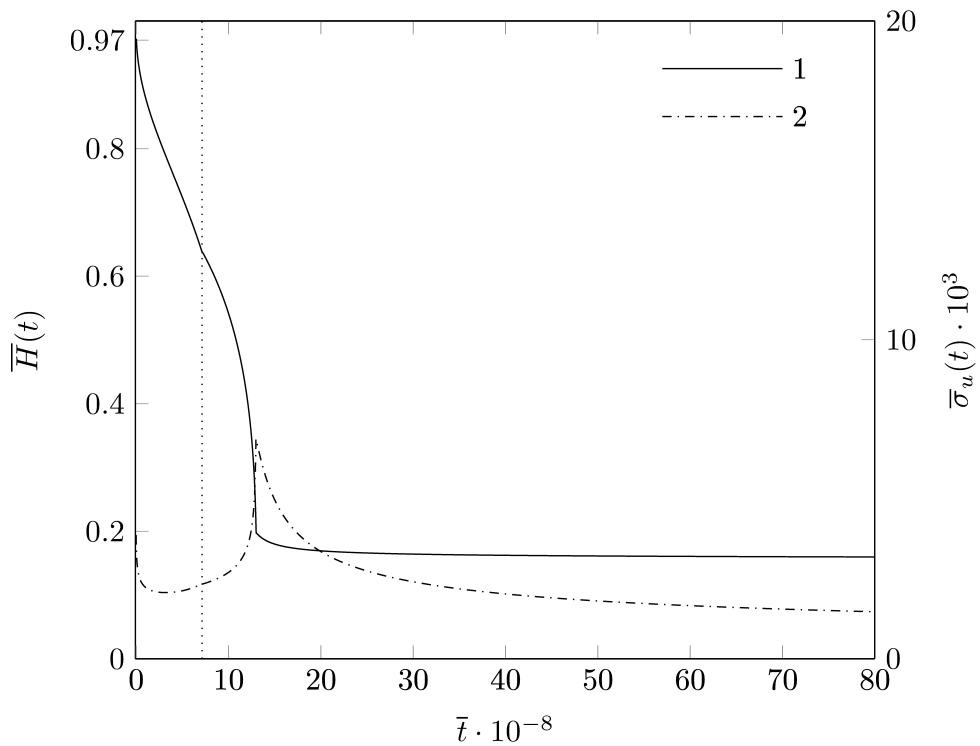


Рис. 11: Зависимости толщины(1) и интенсивности напряжений(2) от времени при условии идеального скольжения внутри П-образной матрицы. Отношение  $b/a = 4.5$

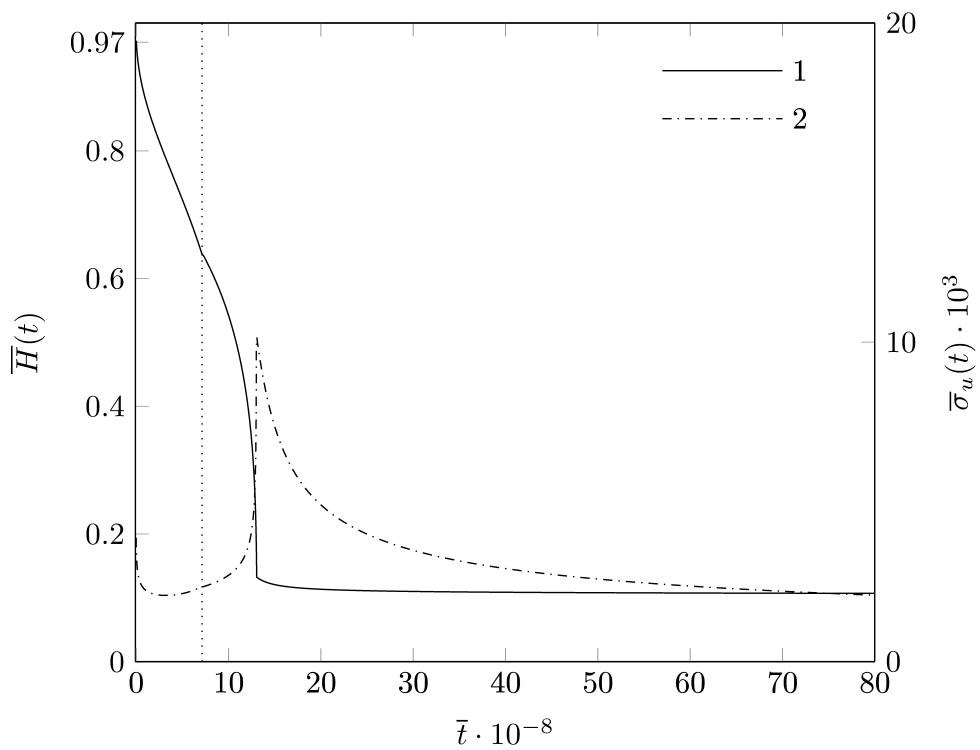


Рис. 12: Зависимости толщины(1) и интенсивности напряжений(2) от времени при условии идеального скольжения внутри П-образной матрицы. Отношение  $b/a = 7$

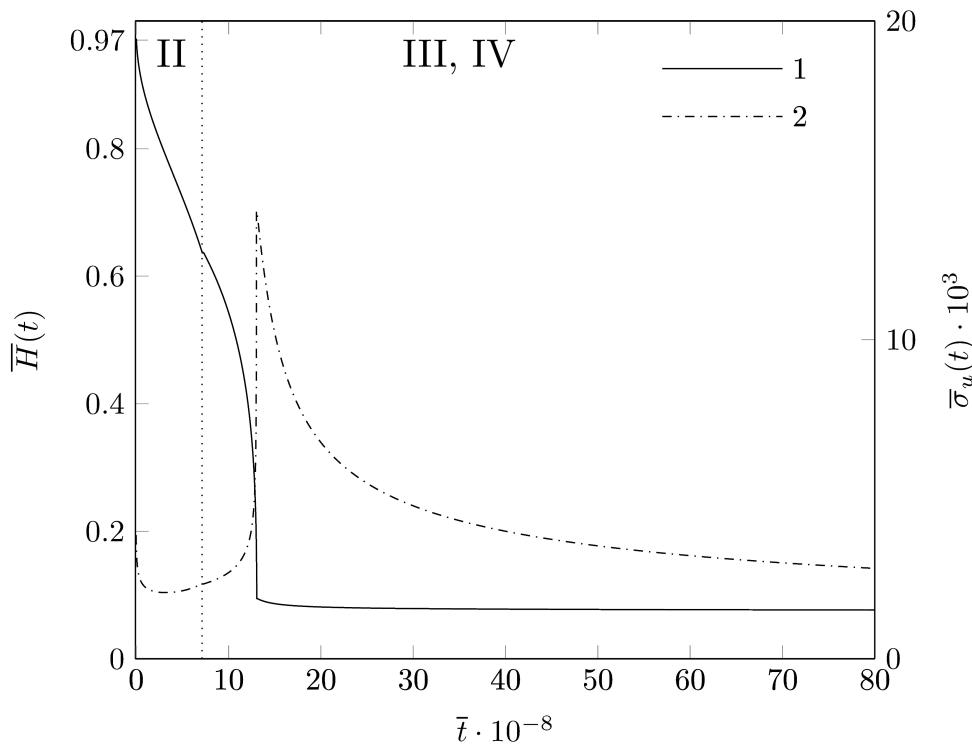


Рис. 13: Зависимости толщины(1) и интенсивности напряжений(2) от времени при условии идеального скольжения внутри П-образной матрицы. Отношение  $b/a = 10.8$

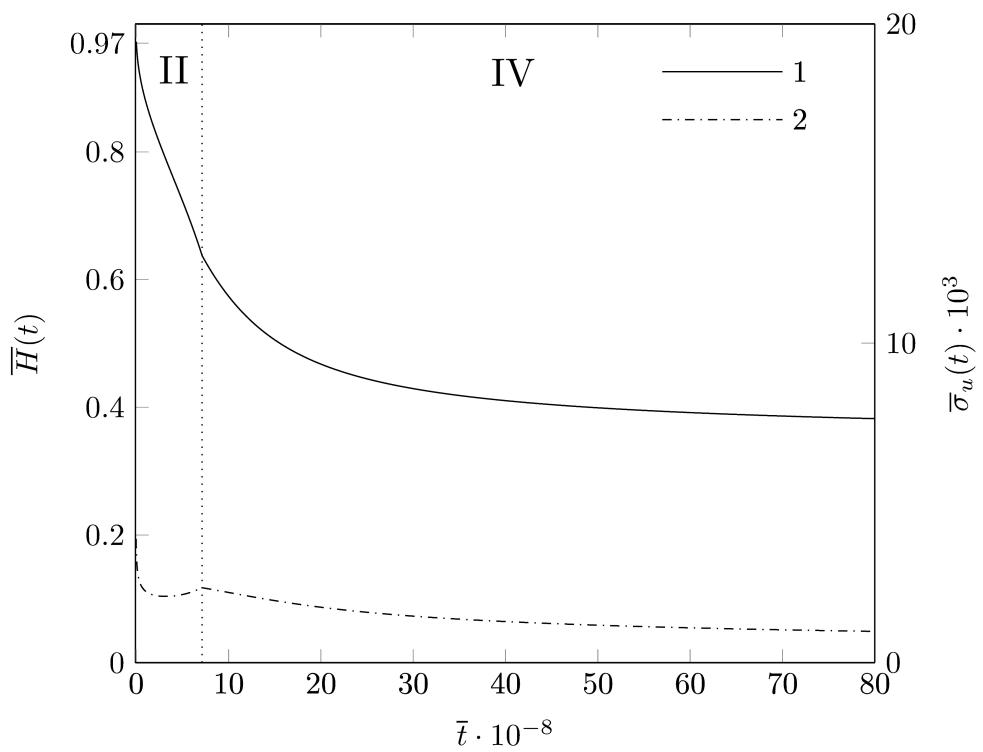


Рис. 14: Зависимости толщины(1) и интенсивности напряжений(2) от времени при условии прилипания внутри П-образной матрицы. Отношение  $b/a = 1$

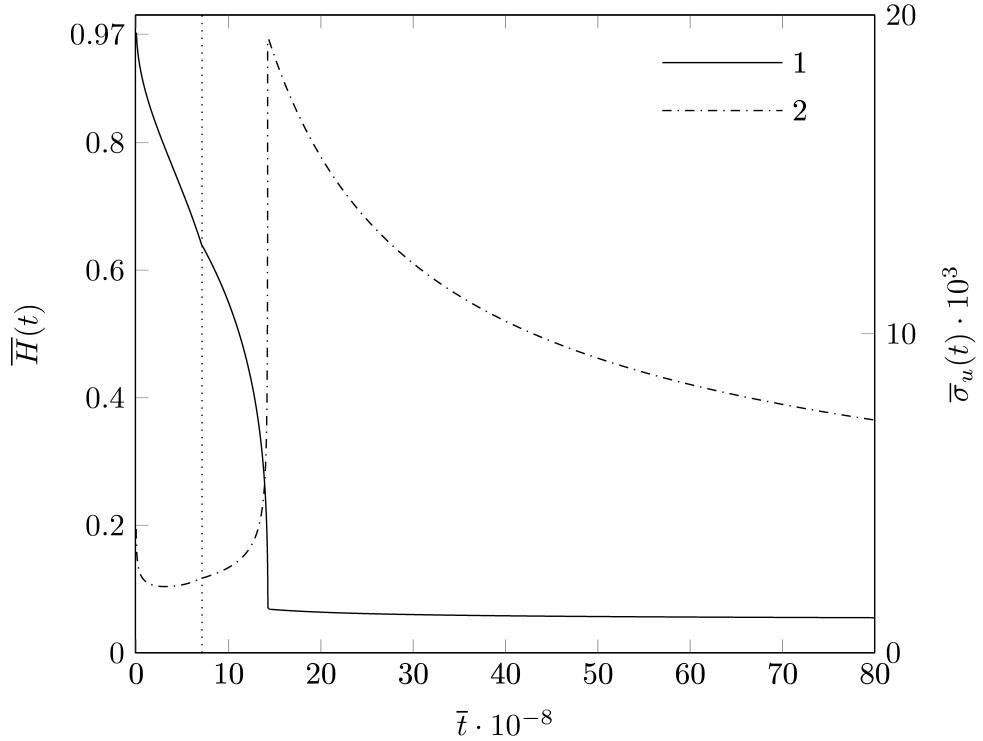


Рис. 15: Зависимости толщины(1) и интенсивности напряжений(2) от времени при условии прилипания внутри П-образной матрицы. Отношение  $b/a = 4.5$

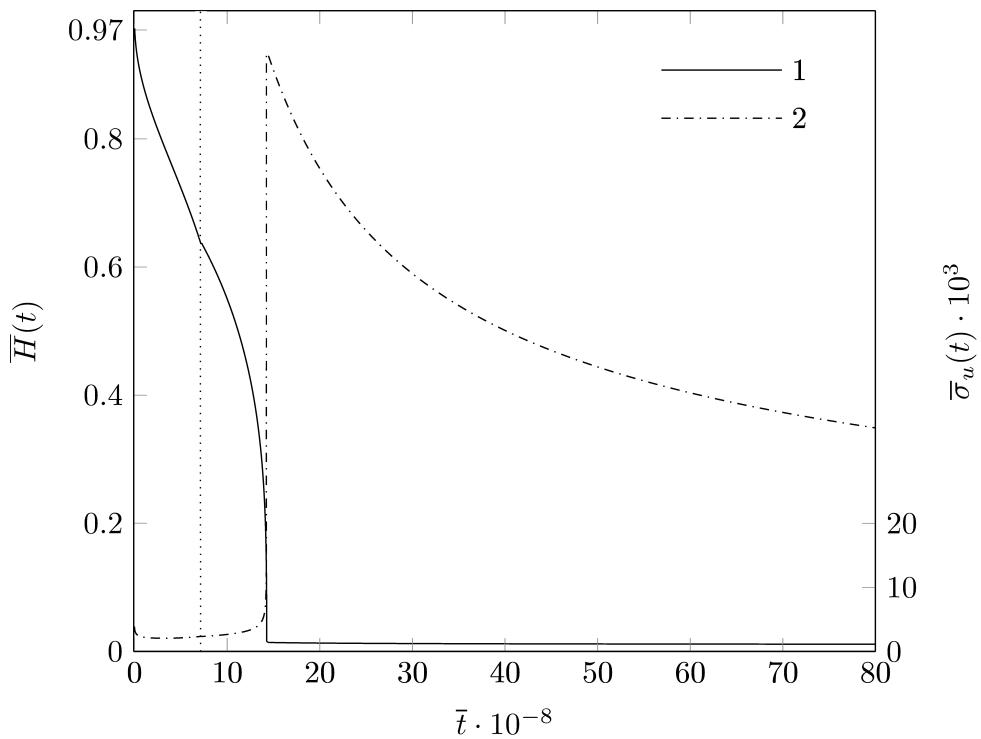


Рис. 16: Зависимости толщины(1) и интенсивности напряжений(2) от времени при условии прилипания внутри П-образной матрицы. Отношение  $b/a = 7$

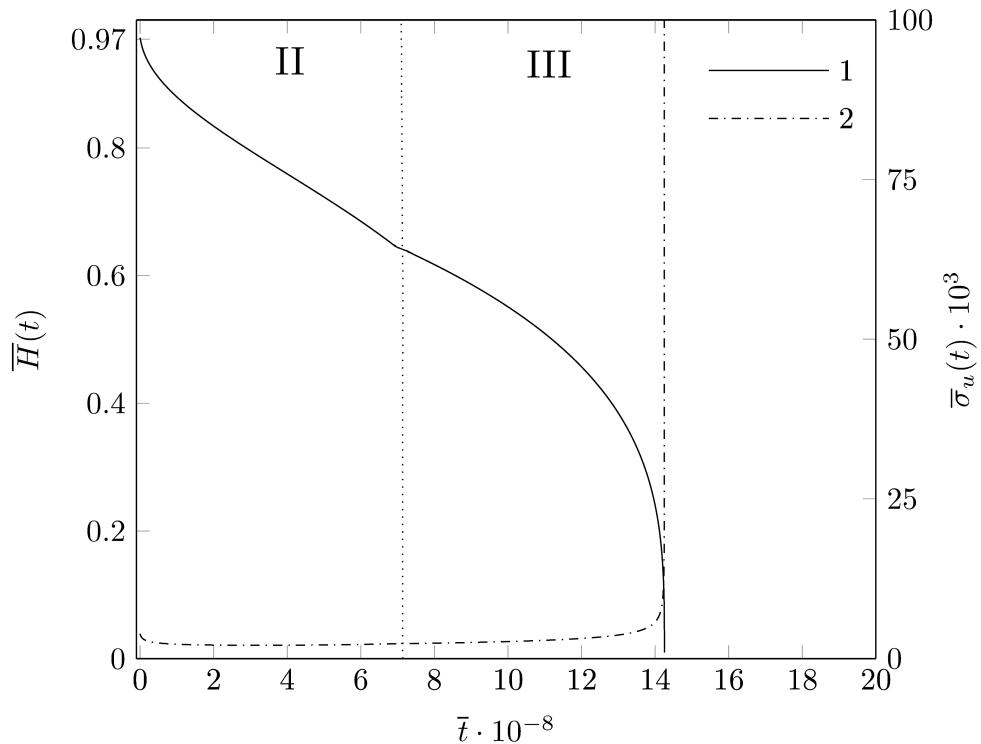


Рис. 17: Зависимости толщины(1) и интенсивности напряжений(2) от времени при условии прилипания внутри П-образной матрицы. Отношение  $b/a = 10.8$

### 3. Анимирование

#### Используемые инструменты

Существуют различные способы графического отображения данных. Одним из наиболее наглядных, но и наиболее трудоёмких способов является построение трёхмерного динамического изображения. Возможность построить такую анимацию представляют несколько средств.

Так как основной комплекс программ написан на языке C++ под операционной системой Ubuntu, то в качестве средства построения трехмерного динамического изображения было выбрано средство OpenGL. Оно представляет собой свободное программное обеспечение, состоящее из большого набора библиотек и имеющее простой процедурный интерфейс [17]. Несмотря на это, с помощью OpenGL можно создавать сложные и мощные программные комплексы, затрачивая при этом минимальное время по сравнению с другими графическими библиотеками. При этом с помощью OpenGL обеспечивается высокая эффективность работы с графическими объектами.

#### Подготовка выходных данных

Изначально полученная зависимость имеет равномерный шаг по переменной  $x$  и переменный по искомой  $t$ . Чтобы видео отражало реальную временную зависимость, требуется перейти к равномерному шагу по  $x$  и неравномерному по  $t$ . Так же нужно расширить выходные параметры значениями толщины. Для перехода к равномерному шагу по  $t$  использовалась линеаризация значений, по следующему алгоритму:

1. Найти среднее значение  $\Delta t$ .
2. Пересчитать зависимость  $x(t)$  с шагом  $\Delta t$ :
  - 2.1 Если очередной отрезок  $(x_k; x_{k+1})$  имеет шаг по  $t$  больше, чем  $\Delta t$ , берем линейное приближение для вычисления  $x_{k+1}(t_k + \Delta t)$ , операция выполняется кратно отношению  $\frac{t_{k+1} - t_k}{\Delta t}$ ,
  - 2.2 Иначе выкидываем точку  $x_{k+1}$  из новых выходных данных.

Таким образом, получаем усредненную и равномерную зависимость по времени, которую уже на вход получает модуль графической интерпретации данных. Ниже представлены различные кадры из видео деформирующейся мембранны.

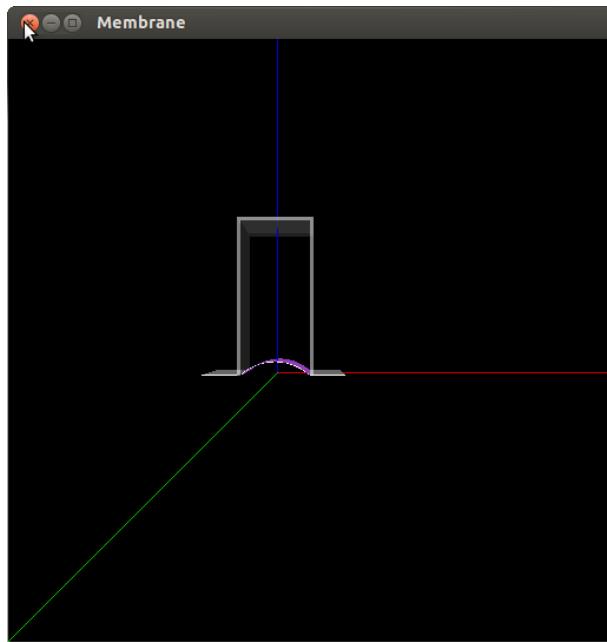


Рис. 18: Стадия свободного деформирования

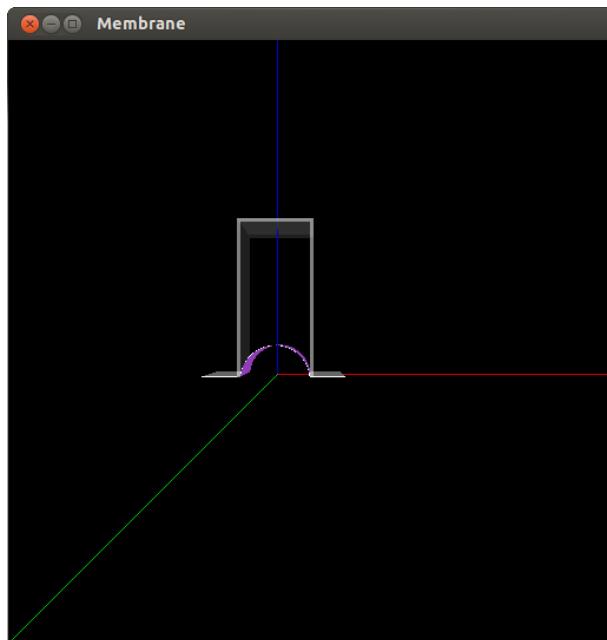


Рис. 19: Касание мембраной стенок матрицы

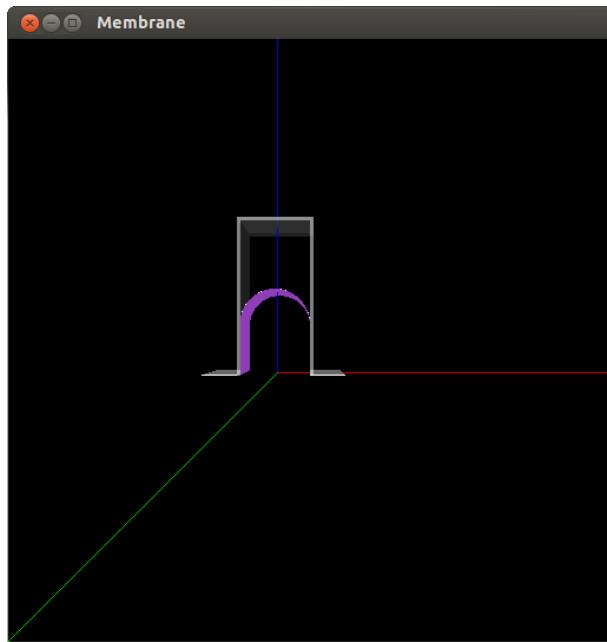


Рис. 20: Третья стадия деформирования

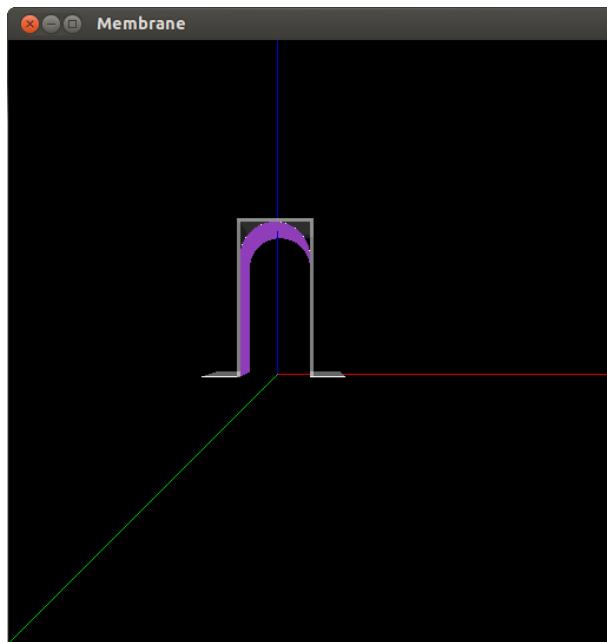


Рис. 21: Касание мембраной днища матрицы



Рис. 22: Четвертая стадия деформирования

# Заключение

В данной работе был проведен анализ существующих решений задачи о деформировании мембранны, в ходе которого была выбрана для реализации не обычная, широко применяемая степенная модель ползучести, а более сложная, дробно-сингулярная модель, позволяющая учитывать разрушение мембранны.

Впервые рассмотрены решения задач о деформировании длинной узкой прямоугольной мембранны в заданных условиях:

1. внутри криволинейной матрицы,
2. внутри матрицы с вертикальными стенками и плоским днищем.

Отличительной особенностью решения второй задачи от существующих решений, является не только модель, в которой возможен учет разрушения, но и то, что перемещение крайней точки касания мембранны является не монотонным (точка касания в начале двигается по вертикальной стенке, а потом касается днища, образуя две полости). В качестве граничных условий рассмотрены и промоделированы два типа, для каждой из задач:

1. идеальное скольжение,
2. прилипание.

Разработан комплекс программ, состоящий из модулей:

1. вычислительное ядро,
2. подпрограмма построения графиков,
3. подпрограмма визуализации,

в которых приведено применение различных методов численного интегрирования для построения зависимости параметров деформации от времени, выбранных для обеспечения наилучшей точности. В качестве графических результатов расчета представлены не только графики зависимостей основных характеристик, но и видео с деформированием мембранны.

# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
2. Малинин Н. Н. Ползучесть в обработке металлов. М.: Машиностроение, 1986. 224 с.
3. Качанов Л. М. Основы механики разрушения.. М.: Наука, 1974. 312 с.
4. Романов К. И. Механика горячего формоизменения металлов.. М.: Машиностроение, 1993. 240 с.
5. Локощенко А. М. Моделирование процесса ползучести и длительной прочности металлов.. М.: МГИУ, 2007. 264 с.
6. Шестериков С. А., Юмашева М. А. Конкретизация в уравнения состояния в теории ползучести. // Механика твердого тела. 1984. № 1. С. 86-91.
7. Целиков А. И., Томленов А. Д., Зюзин В. И. и др. Теория прокатки. Справочник. М.: Металлургия, 1982. 334 с.
8. Зюзин В. И., Третьяков А. В. Механические свойства металлов и сплавов при обработке давлением. М.: Металлургия, 1973. 224 с.
9. Демин В. А., Локощенко А. М, Жеребцов А. А. Ползучесть длинной прямоугольной мембранны внутри криволинейной матрицы. // Известия ВУЗов. Машиностроение. 1998. № 4-6. С. 41-46.
10. Терауд Б. В. Математическое моделирование технологических процессов, протекающих в условиях ползучести. М. МГИУ: Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук, 2011. 210 с.
11. Локощенко А. М. Терауд Б. В. Ползучесть длинной узкой мембранны в стесненных условиях вплоть до разрушения. // Прикладная механика и техническая физика. 2013. № 4. С. 24-30.
12. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: Учеб. пособие для вузов.. М. Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 432 с.
13. Hazewinkel, Michiel Gauss quadrature formula // Encyclopedia of Mathematics. 2001. С. 63-68.
14. Golub, Gene H.; Welsch, John H. (1969), Calculation of Gauss Quadrature Rules // Mathematics of Computation. 1969. № 23 (106). С. 221-230.
15. Institut f ur Theoretische Informatik, Till Tantau The TikZ and PGF Packages <http://sourceforge.net/projects/pgf> Manual for version 2.00: Universit at zu L ubeck, 2008.
16. С. М. Львовский. Набор и верстка в системе LATEX, 3-е изд., испр. и доп.. М., МЦНМО, 2003.
17. Silicon Graphics, Inc. OpenGL Reference Manual (Blue book): Addison-Wesley Publishing Company, 1994.
18. DAVID GOLDBERG What Every Computer Scientist Should Know About Floating-Point Arithmetic. 1991. № 23/1.

# Приложения

## 1. Метод Симпсона

```
1 #ifndef SIMPSON_H_
2 #define SIMPSON_H_
3
4 #include "utils.h"
5 namespace{
6
7 template<typename F>
8 class SubSum {
9 public:
10     SubSum(const F& f, double offset, double scale)
11         : f_(f), offset_(offset), scale_(scale) {
12     }
13
14     double operator () (int i) const {
15         return f_(offset_ + scale_ * i);
16     }
17
18 private:
19     const F& f_;
20     double offset_;
21     double scale_;
22 };
23 }
24
25 class Simpson{
26 public:
27
28     template <class F>
29     static double Integrate(double from,
30                           double to,
31                           int steps,
32                           const F& f){
33         double h = (to - from) / steps;
34
35         SubSum<F> even_sum(f, from + 2 * h, 2 * h);
```

```

36     SubSum<F> odd_sum(f, from + h, 2 * h);
37
38     double sum1 = utils::KahanSum((steps - 1) / 2, even_sum);
39     double sum2 = utils::KahanSum(steps / 2, odd_sum);
40
41     double sum = f(from) + 2*sum1 + 4*sum2 + f(to);
42     sum *= h/3;
43     return sum;
44 }
45 };
46
47 #endif // SIMPSON_H_

```

## 2. Метод Гаусса

```
1 #ifndef GAUSS_H_
2 #define GAUSS_H_
3
4 #include <cmath>
5
6 class Gaus{
7     public:
8
9     template <class F>
10    static double Integrate(double from, double to, const F& f){
11        double summand = (from+to)/2.0, sum, multiplier = (to-from)/2.0;
12        sum = 128/255.0*f(summand) +
13            (322+13*sqrt(70))/900.0*
14                f(summand+1/3.0*sqrt(5-2*sqrt(10/7.0)))*multiplier +
15            (322+13*sqrt(70))/900.0*
16                f(summand-1/3.0*sqrt(5-2*sqrt(10/7.0)))*multiplier +
17            (322-13*sqrt(70))/900.0*
18                f(summand+1/3.0*sqrt(5+2*sqrt(10/7.0)))*multiplier +
19            (322-13*sqrt(70))/900.0*
20                f(summand-1/3.0*sqrt(5+2*sqrt(10/7.0)))*multiplier;
21
22        return sum*(to-from)/2.0;
23    }
24 };
25
26#endif // GAUSS_H_
```

### 3. Метод Кахана

```
1 template<typename F>
2 double KahanSum(int n, const F& f) {
3     double s = 0, c = 0, t, y;
4     for(int j=0; j<n; j++) {
5         y = f(j) - c;
6         t = s + y;
7         c = (t - s) - y;
8         s = t;
9     }
10    return s;
11 }
12 }
```