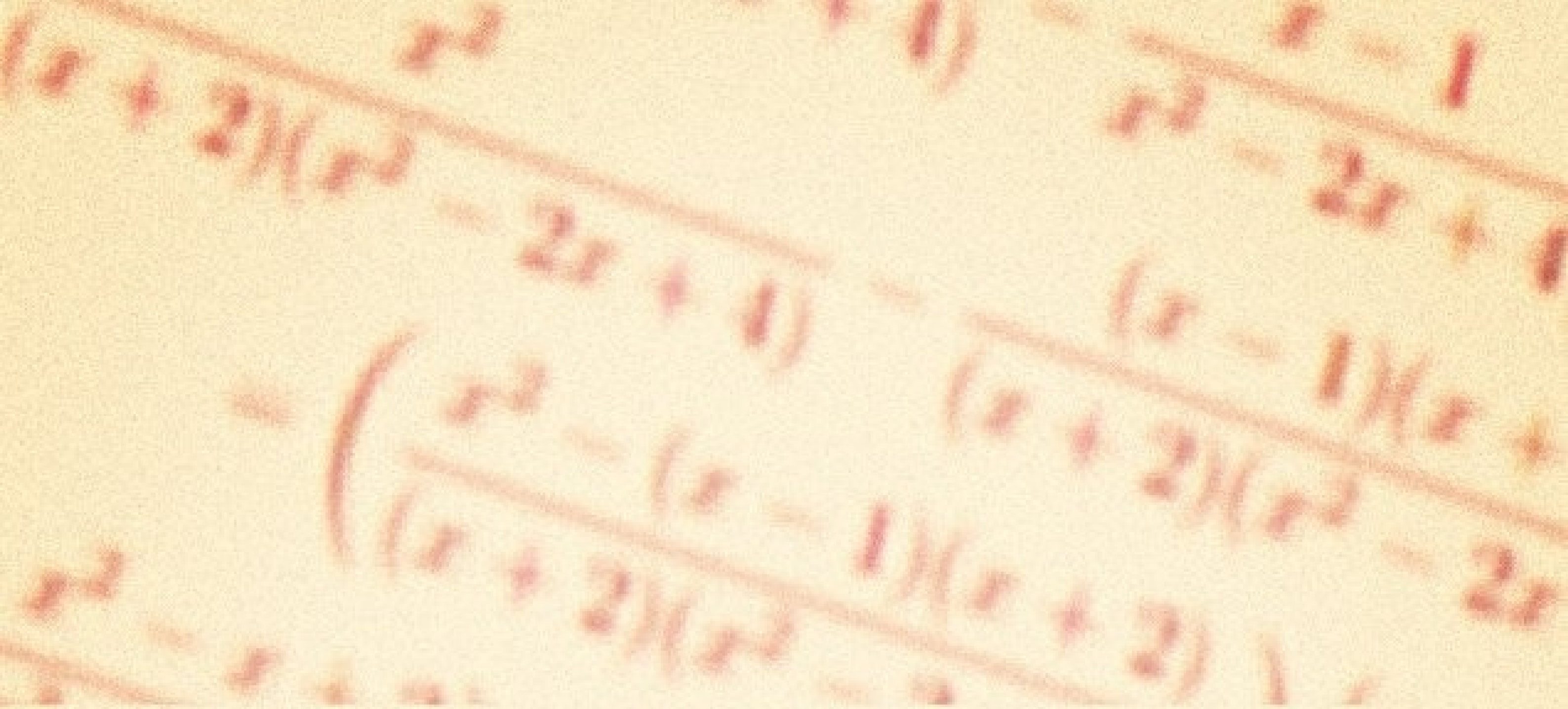


Repetitorij iz matematike

Timotej Hrga, Blaž Jelenc

15. september 2023

Kazalo

1

Števila

Pri matematiki se srečamo z različnimi vrstami števil. Imamo:

1. Naravna števila $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$
2. Cela števila $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
3. Racionalna števila $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n}\,;\, m \in \mathbb{Z} \text{ in } n \in \mathbb{N}\right\}$
4. Realna števila $\mathbb{R}$, ki jih predstavimo z decimalnim zapisom
5. Kompleksna števila $\mathbb{C} = \{a + ib\,;\, a, b \in \mathbb{R}\}$

✍ ***Potence.*** *Naj bo a poljubno število in n naravno število. Potenca a^n je definirana kot*

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n-\text{krat}}\,.$$

Veljajo lastnosti:

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
3. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Z zapisom $a^{-1} = 1 : a = \frac{1}{a}$, potence razširimo na racionalna števila. Dodatno sedaj veljajo še lastnost:

$$a^n \cdot a^{-m} = a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}\,.$$

✍ ***Absolutna vrednost števila.*** *Absolutna vrednost $|a|$ števila a je definirana z*

$$|a| = \begin{cases} a & ; \quad a \geq 0 \\ -a & ; \quad a < 0 \end{cases}$$

Veljajo lastnosti:

1. $|a| \geq 0$ *za vsak* a
2. $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
3. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
4. $|a + b| \leq |a| + |b|$

Naloge

Naloga 1.1. Izračunaj vrednost izraza

$$1\frac{18}{15} : \frac{9}{32} \cdot 5\frac{5}{8} - 3\frac{13}{14} \cdot 3\frac{9}{11} \,.$$

Rešitev. Velja

$$1\frac{18}{15} : \frac{9}{32} \cdot 5\frac{5}{8} - 3\frac{13}{14} \cdot 3\frac{9}{11} = \frac{33}{15} \cdot \frac{32}{9} \cdot \frac{45}{8} - \frac{55}{14} \cdot \frac{42}{11} =$$

$$= \frac{33 \cdot 4}{3} - \frac{5 \cdot 42}{14} = 44 - 15 = 29 \,.$$

Naloga 1.2. Naj bo $a = -\frac{1}{5}$ in $b = \frac{5}{2}$. Izračunaj vrednost izraza

$$\left(\frac{40a^3b}{b^{-2}}\right)^2 - 2a^{-1}b^0 \,.$$

Rešitev. Najprej malenkost poenostavimo

$$\left(\frac{40a^3b}{b^{-2}}\right)^2 - 2a^{-1}b^0 = 1600 \cdot a^5b^5 - \frac{2}{a} = -1600 \cdot \frac{1}{5^5}\frac{5^5}{2^5} - \frac{2}{a} =$$

$$= -2^5 \cdot 50 \cdot \frac{1}{5^5}\frac{5^5}{2^5} - \frac{2}{-\frac{1}{5}} = -50 + 10 = -40 \,.$$

Naloga 1.3. Poenostavi izraz

$$\left(\frac{2a^9b^{-3}}{a^{-2}b^{-5}}\right) : \left(\frac{2a^4b^{-6}}{a^{-4}}\right) .$$

Rešitev. Dobimo

$$2a^{11}b^2 : \frac{2a^8}{b^6} = 2a^{11}b^2 \cdot \frac{b^6}{2a^8} = a^3b^8 \,.$$

Naloga 1.4. Izračunaj vrednost izraza

$$\sqrt{98} + \sqrt{32} + \sqrt{50} \,.$$

Rešitev. Delno korenimo in dobimo

$$\sqrt{98} + \sqrt{32} + \sqrt{50} = \sqrt{49 \cdot 2} + \sqrt{16 \cdot 2} + \sqrt{25 \cdot 2} = 7\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 16\sqrt{2} \,.$$

Naloga 1.5. Izračunaj vrednost izraza

$$\sqrt{5 + \sqrt{17}} \cdot \sqrt{5 - \sqrt{17}} \,.$$

Rešitev. Po pravilih za računanje s koreni dobimo

$$\sqrt{5+\sqrt{17}}\cdot\sqrt{5-\sqrt{17}}=\sqrt{(5+\sqrt{17})(5-\sqrt{17})}=\sqrt{25-17}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}\,.$$

Naloga 1.6. Poenostavi izraz

$$\sqrt[4]{4a^{-2}b^3}\cdot\sqrt[3]{2^{-1}a^5b^{-1}}\,.$$

Rešitev. Vse izraze spremenimo v potence

$$\sqrt[4]{4a^{-2}b^3}\cdot\sqrt[3]{2^{-1}a^5b^{-1}}=4^{\frac{1}{4}}a^{-\frac{2}{4}}b^{\frac{3}{4}}\cdot 2^{-\frac{1}{3}}a^{\frac{5}{3}}b^{-\frac{1}{3}}=$$
$$=\frac{2^{\frac{2}{4}}b^{\frac{3}{4}}a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{4}}2^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}=2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}a^{\frac{5}{3}-\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}-\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{6}}a^{\frac{7}{6}}b^{\frac{5}{12}}=\sqrt[12]{4a^{14}b^5}\,.$$

Naloga 1.7. Poenostavi izraz

$$\sqrt[3]{\frac{x^4y^3\cdot\sqrt{\frac{64x^3}{9y^2}}}{9y^{-1}\sqrt{x^5}}}$$

Rešitev. Izraze spremenimo v potence in dobimo

$$\sqrt[3]{\frac{x^4y^3\cdot\sqrt{\frac{64x^3}{9y^2}}}{9y^{-1}\sqrt{x^5}}}=\sqrt[3]{\frac{x^4y^4\cdot\frac{8x^{\frac{3}{2}}}{3y}}{9x^{\frac{5}{2}}}}=\sqrt[3]{\frac{8}{27}x^3y^3}=\frac{2}{3}xy\,.$$

Naloga 1.8. Poenostavi izraz

$$((3+x)^2-x^2)(x-2)-6(x^2-2)+2\,.$$

Rešitev. Začnemo s poenostavljanjem

$$((3+x)^2-x^2)(x-2)-6(x^2-2)+2=(9+6x+x^2-x^2)(x-2)-6x^2+12+2=$$
$$=(9+6x)(x-2)-6x^2+14=9x+6x^2-12x-18-6x^2+14=$$
$$=-3x-4\,.$$

Naloga 1.9. Poenostavi izraz

$$(3b-a)^2-(a-2b)(a+2b)-3(4b^2-3a^2)\,.$$

Rešitev. Začnemo odpravljati oklepaje

$$(3b-a)^2-(a-2b)(a+2b)-3(4b^2-3a^2)=9a^2-6ab+a^2-a^2+4b^2-12b^2+9a^2=$$
$$=2(9a^2-3ab-4b^2)\,.$$

Naloga 1.10. Poenostavi izraz

$$(x+4y)^3-(4x-y)^3-(65y^3-63x^3)\,.$$

Rešitev. Najprej odpravimo vse oklepaje

$$\begin{aligned}(x+4y)^3-(4x-y)^3-(65y^3-63x^3) &= x^3+12x^2y+48xy^2+64y^3-\ldots\\ &-64x^3+48x^2y-12xy^2+y^3-65y^3+63x^3=\\ &=60x^2y+36xy^2=12xy(5x+3y)\,.\end{aligned}$$

Naloga 1.11. Poenostavi izraz

$$2^{x+4}-2^{x+3}-3\cdot 2^{x+2}+5\cdot 2^{x+1}\,.$$

Rešitev. Izpostavimo skupni faktor in dobimo

$$2^{x+4}-2^{x+3}-3\cdot 2^{x+2}+5\cdot 2^{x+1}=2^{x+1}\left(2^3-2^2-3\cdot 2+5\right)=3\cdot 2^{x+1}\,.$$

Naloga 1.12. Razstavi izraz

$$x^2-81\,.$$

Rešitev. Uporabimo znano formulo $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ in dobimo

$$x^2-81=(x-9)(x+9)\,.$$

Naloga 1.13. Razstavi izraz

$$x^2-14x+48\,.$$

Rešitev. Po Vietovem pravilu iščemo dve števili, ki se zmnožita v 48 in seštejata v -14. To sta -6 in -8. Odtod dobimo

$$x^2-14x+48=(x-6)(x-8)\,.$$

Naloga 1.14. Razstavi izraz

$$6x^2-x-1\,.$$

Rešitev. Ker vodilni koeficient pri členu x^2 ni enak 1, ne moremo uporabiti Vietovega pravila. Pomagamo si s formulo za iskanje ničel kvadratne funkcije (glej tudi drugo poglavje). V našem primeru so koeficienti $a=6$, $b=-1$ in $c=-1$. Po formuli dobimo, da sta ničli enaki

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{12}\,.$$

Odtod dobimo $x_1=\frac{1}{2}$ in $x_2=-\frac{1}{3}$. Sledi, da lahko zgornji izraz razstavimo kot

$$6x^2-x-1=6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)=(2x-1)(3x+1)\,.$$

Naloga 1.15. Razstavi izraz

$$6a^4b-54a^6b^3\,.$$

Rešitev. Izpostavimo skupni faktor, ki je v tem primeru $6a^4b$ in dobimo

$$6a^4b - 54a^6b^3 = 6a^4b(1 - 9a^2b^2) = 6a^4(1 - 3ab)(1 + 3ab)\,.$$

Naloga 1.16. Razstavi izraz

$$a^4 - (b^2 + 2ab)^2\,.$$

Rešitev. Zopet se spomnimo znane formule $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, ki jo v tem primeru uporabimo na sledeč način

$$a^4-(b^2+2ab)^2 = (a^2-(b^2+2ab))(a^2+(b^2+2ab)) = (a^2-2ab-b^2)(a^2+2ab+b^2) =$$
$$= (a^2 - 2ab - b^2)(a + b)^2 =$$
$$= ((a - b)^2 - 2b^2)(a + b)^2 = (a - b - \sqrt{2}b)(a - b + \sqrt{2}b)(a + b)^2 =$$
$$= (a - (1 + \sqrt{2})b)(a - (1 - \sqrt{2})b)(a + b)^2\,.$$

Naloga 1.17. Razstavi izraz

$$x^4 + 2x^2 - 3\,.$$

Rešitev. Vpeljemo novo spremenljivko $t = x^2$. Velja naslednje $t^2 + 2t - 3 = (t + 3)(t - 1)$, iz česar sledi

$$x^4 + 2x^2 - 3 = (x^2 + 3)(x^2 - 1) = (x^2 + 3)(x + 1)(x - 1)\,.$$

Naloga 1.18. Razstavi izraz

$$a^3 - 27b^3\,.$$

Rešitev. Spomnimo se znane enakosti $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, ki nam v tem primeru da

$$a^3 - 27b^3 = a^3 - (3b)^3 = (a - 3b)(a^2 + 3ab + 9b^2)\,.$$

Naloga 1.19. Razstavi izraz

$$2u^4v - 128uv^4\,.$$

Rešitev. Izpostavimo skupni faktor, ki je v tem primeru $2uv$ in uporabimo formulo, ki pove kako razstavimo razliko kubov. Dobimo

$$2u^4v - 128uv^4 = 2uv(u^3 - 64v^3) = 2uv(u - 4v)(u^2 + 4uv + 16v^2)\,.$$

Naloga 1.20. Razstavi izraz

$$27a^4 + ab^3\,.$$

Rešitev. Izpostavimo skupni faktor, ki je v tem primeru a in uporabimo formulo, ki pove kako razstavimo vsoto kubov. Spomnimo se, da velja $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$. Dobimo

$$27a^4 + ab^3 = a(27a^3+b^3) = a(3a+b)(9a^2-3ab+b^2)\,.$$

Naloga 1.21. Razstavi izraz

$$a^6 - 1\,.$$

Rešitev. Zopet uporabimo varianto formule $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$ na naslednji način

$$a^6-1 = (a^3)^2-1 = (a^3-1)(a^3+1) = (a-1)(a^2+a+1)(a+1)(a^2-a+1)\,.$$

Naloga 1.22. Razstavi izraz

$$a^3+3a^2+5a+15\,.$$

Rešitev. Poiščemo kakšen skupni faktor

$$a^3+3a^2+5a+15 = a^2(a+3)+5(a+3) = (a+3)(a^2+5)\,.$$

Naloga 1.23. Razstavi izraz

$$-x^3-x^2+5x-3\,.$$

Rešitev. Za razliko od prejšnje naloge tu ne znamo uganiti skupnega faktorja, zato si pomagamo s Hornerjevim algoritmom. Uganemo, da je ena ničla enaka 1. Sledi

	-1	-1	5	3
1		-1	-2	-3
	-1	-2	3	|| 0

Odtod velja

$$-x^3-x^2+5x-3 = (x-1)(-x^2-2x+3)\,.$$

Pri tem smo drugi faktor prebrali iz zadnje vrstice tabele Hornerjevega algoritma. Končno dobimo

$$-x^3-x^2+5x-3 = (x-1)(-x^2-2x+3) = -(x-1)(x+3)(x-1) = -(x-1)^2(x+3)\,.$$

Naloga 1.24. Poenostavi izraz

$$\frac{x-3}{x^2+6x+9}\cdot\left(\frac{x-4}{x-3}+\frac{2x-15}{x^2-3x}\right):\frac{x}{x^3-5x^2}\,.$$

Rešitev. Podizraze najprej razstavimo, da potem lahko krajšamo skupne faktorje. Dobimo

$$\frac{x-3}{x^2+6x+9}\cdot\left(\frac{x-4}{x-3}+\frac{2x-15}{x^2-3x}\right):\frac{x}{x^3-5x^2} =$$

$$= \frac{x-3}{(x+3)^2} \cdot \left(\frac{x-4}{x-3} + \frac{2x-15}{x(x-3)} \right) \frac{x^2(x-5)}{x} =$$
$$= \frac{x-3}{(x+3)^2} \cdot \left(\frac{x(x-4)}{x(x-3)} + \frac{2x-15}{x(x-3)} \right) \frac{x^2(x-5)}{x} =$$
$$= \frac{x-3}{(x+3)^2} \cdot \left(\frac{x(x-4)+(2x-15)}{x(x-3)} \right) \frac{x^2(x-5)}{x} =$$
$$= \frac{x-3}{(x+3)^2} \cdot \left(\frac{x^2-2x-15}{x(x-3)} \right) \frac{x^2(x-5)}{x} =$$
$$= \frac{x-3}{(x+3)^2} \cdot \left(\frac{(x+3)(x-5)}{x(x-3)} \right) \frac{x^2(x-5)}{x} =$$
$$= \frac{\cancel{x-3}}{(x+3)^{\cancel{2}}} \cdot \left(\frac{\cancel{(x+3)}(x-5)}{\cancel{x}(x-3)} \right) \frac{\cancel{x^2}(x-5)}{\cancel{x}} = \frac{(x-5)^2}{(x+3)(x-3)}\,.$$

Naloga 1.25. Poenostavi izraz
$$\left(\frac{x^2}{x^3+8} - \frac{x-1}{x^2-2x+4} \right) : \frac{6x+4}{x^4+3x^3+8x+24}\,.$$

Rešitev. Zopet izraze najprej razstavimo in nato krajšamo skupne faktorje. Dobimo
$$\left(\frac{x^2}{x^3+8} - \frac{x-1}{x^2-2x+4} \right) : \frac{6x+4}{x^4+3x^3+8x+24} =$$
$$= \left(\frac{x^2}{x^3+8} - \frac{x-1}{x^2-2x+4} \right) \frac{x^4+3x^3+8x+24}{6x+4} =$$
$$= \left(\frac{x^2}{(x+2)(x^2-2x+4)} - \frac{x-1}{x^2-2x+4} \right) \frac{x^3(x+3)+8(x+3)}{6x+4} =$$
$$= \left(\frac{x^2}{(x+2)(x^2-2x+4)} - \frac{(x-1)(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)} \right) \frac{(x+3)(x^3+8)}{6x+4} =$$
$$= \left(\frac{x^2-(x-1)(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)} \right) \frac{(x+3)(x^3+8)}{6x+4} =$$
$$= \left(\frac{x^2-x^2-x+2}{x^3+8} \right) \frac{(x+3)(x^3+8)}{6x+4} = \left(\frac{-x+2}{\cancel{x^3+8}} \right) \frac{(x+3)\cancel{(x^3+8)}}{6x+4} =$$
$$= -\frac{(x-2)(x+3)}{6x+4}\,.$$

Naloga 1.26. Poenostavi izraz
$$\frac{x^{n-1}}{x^n-2x^{n-1}} - \frac{2x^{n-1}}{x^n+2x^{n-1}} + \frac{x^n}{x^{n+1}-4x^{n-1}}\,.$$

Rešitev. Dobimo
$$\frac{\cancel{x^{n-1}}}{\cancel{x^{n-1}}(x-2)} - \frac{2\cancel{x^{n-1}}}{\cancel{x^{n-1}}(x+2)} + \frac{x^n}{x^{n-1}(x-2)(x+2)} =$$
$$\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+2} + \frac{x}{(x-2)(x+2)} = \frac{(x+2)-2(x-2)+x}{(x-2)(x+2)} = \frac{6}{(x-2)(x+2)}\,.$$

NALOGA 1.27. Racionaliziraj izraz

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1}\,.$$

REŠITEV. Odpraviti želimo koren iz imenovalca. Spomnimo se formule

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2\,.$$

Zato pomnožimo števec in imenovalec s številom $\sqrt{3}+1$. Dobimo

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{3}+1}{3-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}\,.$$

NALOGA 1.28. Racionaliziraj izraz

$$\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}\,.$$

REŠITEV. Števec in imenovalec pomnožimo s $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$. Dobimo

$$\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}=\frac{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2}{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}=\frac{18+12\sqrt{6}+12}{18-12}=5+2\sqrt{6}\,.$$

NALOGA 1.29. Racionaliziraj izraz

$$\frac{1}{1-\sqrt[3]{2}}\,.$$

REŠITEV. Spomnimo se formule

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3\,.$$

Zato pomnožimo števec in imenovalec s številom $1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$. Dobimo

$$\frac{1}{1-\sqrt[3]{2}}=\frac{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{(1-\sqrt[3]{2})(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})}=\frac{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{1-2}=-1-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}\,.$$

NALOGA 1.30. Izračunaj vrednost izraza

$$|3|+|-5|-|9-11\cdot|7+(-3)||\,.$$

REŠITEV.

$$|3|+|-5|-|9-11\cdot|7+(-3)||=3+5-|9-11\cdot 4|=3+5-35=-27\,.$$

NALOGA 1.31. Za vse $x\in\mathbb{R}$ izračunaj vrednost izraza

$$|x-3|\,.$$

REŠITEV. Spomnimo se definicije absolutne vrednosti

$$|x| = \begin{cases} x & ; \quad x \geq 0 \\ -x & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

Velja torej

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & ; \quad x-3 \geq 0 \\ -x+3 & ; \quad x-3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-3 & ; \quad x \geq 3 \\ -x+3 & ; \quad x < 3 \end{cases}$$

Rezultat je torej

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & ; \quad x \geq 3 \\ -x+3 & ; \quad x < 3 \end{cases}$$

NALOGA 1.32. Za vse $x \in \mathbb{R}$ izračunaj vrednost izraza

$$|2x+6| - 1\,.$$

REŠITEV. Velja

$$|2x+6| = \begin{cases} 2x+6 & ; \quad 2x+6 \geq 0 \\ -2x-6 & ; \quad 2x+6 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x+6 & ; \quad 2x \geq -6 \\ -2x-6 & ; \quad 2x < -6 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 2x+6 & ; \quad x \geq -3 \\ -2x-6 & ; \quad x < -3 \end{cases}$$

Rezultat je

$$|2x+6| - 1 = \begin{cases} 2x+5 & ; \quad x \geq -3 \\ -2x-7 & ; \quad x < -3 \end{cases}$$

NALOGA 1.33. Za vse $x \in \mathbb{R}$ izračunaj vrednost izraza

$$|x+3| - |x-1|\,.$$

REŠITEV. Velja

$$|x+3| = \begin{cases} x+3 & ; \quad x \geq -3 \\ -x-3 & ; \quad x < -3 \end{cases}$$

in

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & ; \quad x \geq 1 \\ -x+1 & ; \quad x < 1 \end{cases}$$

Imamo torej tri intervale $(-\infty, -3)$, $[-3, 1)$ in $[1, \infty)$ na katerih absolutne vrednosti lahko zamenjamo z zgornjimi izrazi. Imamo

$$|x+3| - |x-1| = \begin{cases} -x-3-(-x+1) & ; \quad x \in (-\infty, -3) \\ x+3-(-x+1) & ; \quad x \in [-3, 1) \\ x+3-(x-1) & ; \quad x \in [1, \infty) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -4 & ; \quad x \in (-\infty, -3) \\ 2x+2 & ; \quad x \in [-3, 1) \\ 4 & ; \quad x \in [1, \infty) \end{cases}$$

Naloga 1.34. Za vse $x \in \mathbb{R}$ izračunaj vrednost izraza

$$|x| + |x^2 - x| \,.$$

Rešitev. Izraz najprej nekoliko preoblikujemo

$$|x| + |x^2 - x| = |x| + |x(x-1)| = |x| + |x||x-1| \,.$$

Imamo

$$|x| = \begin{cases} x & ; \quad x \geq 0 \\ -x & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

in

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & ; \quad x \geq 1 \\ -x+1 & ; \quad x < 1 \end{cases}$$

Imamo torej tri intervale $(-\infty, 0)$, $[0, 1)$ in $[1, \infty)$ na katerih absolutne vrednosti lahko zamenjamo z zgornjimi izrazi. Imamo

$$|x| + |x^2 - x| = |x| + |x||x-1| = \begin{cases} -x + (-x)(-x+1) & ; \quad x \in (-\infty, 0) \\ x + x(-x+1) & ; \quad x \in [0, 1) \\ x + x(x-1) & ; \quad x \in [1, \infty) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x^2 - 2x & ; \quad x \in (-\infty, 0) \\ 2x - x^2 & ; \quad x \in [0, 1) \\ x^2 & ; \quad x \in [1, \infty) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x(x-2) & ; \quad x \in (-\infty, 0) \\ x(2-x) & ; \quad x \in [0, 1) \\ x^2 & ; \quad x \in [1, \infty) \end{cases}$$

Naloga 1.35. Za vse $a \in \mathbb{R}$ izračunaj vrednost izraza

$$\frac{a-2}{|a-4|} - \frac{a-6}{a-4} \,.$$

Rešitev. Imamo

$$|a-4| = \begin{cases} a-4 & ; \quad a \geq 4 \\ -a+4 & ; \quad a < 4 \end{cases}$$

Opazimo še, da izraz ni definiran za $a = 4$, zato $a = 4$ izključimo. Dobimo

$$\frac{a-2}{|a-4|} - \frac{a-6}{a-4} = \begin{cases} \frac{a-2}{a-4} - \frac{a-6}{a-4} & ; \quad a > 4 \\ \frac{a-2}{-a+4} - \frac{a-6}{a-4} & ; \quad a < 4 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{(a-2)-(a-6)}{a-4} & ; \quad a > 4 \\ -\frac{a-2}{a-4} - \frac{a-6}{a-4} & ; \quad a < 4 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{(a-2)-(a-6)}{a-4} & ; \quad a > 4 \\ \frac{(-a+2)-(a-6)}{a-4} & ; \quad a < 4 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{a-4} & ; \quad a > 4 \\ \frac{-2a+8}{a-4} & ; \quad a < 4 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{a-4} & ; \quad a > 4 \\ \frac{-2(a-4)}{a-4} & ; \quad a < 4 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{a-4} & ; \quad a > 4 \\ \frac{-2\cancel{(a-4)}}{\cancel{a-4}} & ; \quad a < 4 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{a-4} & ; \quad a > 4 \\ -2 & ; \quad a < 4 \end{cases}$$

Naloga 1.36. Poenostavi trigonometrijski izraz

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

Rešitev. Spomnimo se adicijskih izrekov za sinus in kosinus:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

V našem primeru dobimo

$$\begin{aligned} \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) &= \sin x \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos x \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &+ \cos x \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin x \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2}(\sin x + \cos x). \end{aligned}$$

Naloga 1.37. Poenostavi trigonometrijski izraz

$$(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha + \cos\alpha)^2.$$

Rešitev. Z uporabo identitete

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

dobimo

$$\begin{aligned} (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 &= \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha \\ &+ \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha \\ &= 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Naloga 1.38. Poenostavi trigonometrijski izraz

$$\left(\tan\alpha + \frac{1}{\cos\alpha}\right)\left(\tan\alpha - \frac{1}{\cos\alpha}\right).$$

Rešitev. Velja

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\,.$$

Odtod dobimo

$$\begin{aligned}\left(\tan\alpha + \frac{1}{\cos\alpha}\right)\left(\tan\alpha - \frac{1}{\cos\alpha}\right) &= \tan^2\alpha - \frac{1}{\cos^2\alpha}\\ &= \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{1}{\cos^2\alpha}\\ &= \frac{-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = -1\end{aligned}$$

Naloga 1.39. Poenostavi trigonometrijski izraz

$$\sin 2x \cdot \tan x + 2\left(\cos 2x + \sin^2 x\right)\,.$$

Rešitev. Uporabimo formuli za dvojni kot:

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

in

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x\,.$$

Dobimo

$$\begin{aligned}\sin 2x \cdot \tan x + 2\left(\cos 2x + \sin^2 x\right) &= 2\sin x\cos x\cdot\frac{\sin x}{\cos x} + 2\left(\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x\right)\\ &= 2\sin^2 x + 2\cos^2 x = 2\,.\end{aligned}$$

Naloga 1.40. Poenostavi izraz

$$(5+3i)(2-7i)\,.$$

Rešitev. S kompleksnimi števili računamo po pravilih za računanje z veččleniki. Pri tem upoštevamo, da za imaginarno enoto velja $i^2 = -1$. V našem primeru dobimo

$$(5+3i)(2-7i) = 10 - 35i + 6i - 21i^2 = 10 + 21 - 35i + 6i = 31 - 29i\,.$$

Naloga 1.41. Poenostavi izraz

$$i^{31}\,.$$

Rešitev. Spomnimo se, da velja $i^4 = 1$. Odtod sledi

$$i^{31} = i^{4\cdot 7+3} = \left(i^4\right)^7 \cdot i^3 = i^3 = ii^2 = -i\,.$$

Naloga 1.42. Poenostavi izraz

$$\frac{2-7i}{5+3i}\,.$$

Rešitev. Radi bi se znebili imaginarne enote v imenovalcu. Kompleksna števila delimo tako, da števec in imenovalec pomnožimo s konjugirano vrednostjo imenovalca. Spomnimo se, da je za kompleksno število $z = x + iy$ konjugirano število enako $\overline{z} = x - iy$, tj. spremenimo predznak imaginarne komponente. V našem primeru dobimo

$$\frac{2-7i}{5+3i} = \frac{(2-7i)(5-3i)}{(5+3i)(5-3i)} = \frac{10-6i-35i-21}{25+9} = -\frac{11}{34} - i\frac{41}{34}\,.$$

Naloga 1.43. Poenostavi naslednji izraz

$$\left|\frac{-5+10i}{8+6i} - \frac{25+5i}{3-4i}\right|\,.$$

Rešitev. Absolutna vrednost kompleksnega števila $z = x + iy$ je definirana kot $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$. Najprej poenostavimo izraz pod absolutno vrednostjo. Dobimo

$$\begin{aligned}
\frac{-5+10i}{8+6i} - \frac{25+5i}{3-4i} &= \frac{(-5+10i)(8-6i)}{(8+6i)(8-6i)} - \frac{(25+5i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} \\
&= \frac{-40+30i+80i+60}{64+36} - \frac{75+100i+15i-20}{9+16} \\
&= \frac{20+110i}{100} - \frac{55+115i}{25} = \frac{20+110i-220-460i}{100} \\
&= \frac{-200-350i}{100} = -2 - \frac{7}{2}i\,.
\end{aligned}$$

Sledi, da je

$$\left|\frac{-5+10i}{8+6i} - \frac{25+5i}{3-4i}\right| = \left|-2-\frac{7}{2}i\right| = \sqrt{4+\frac{49}{4}} = \frac{\sqrt{65}}{2}\,.$$

Naloga 1.44. Dano je kompleksno število $z = 3 - 2i$. Določi kompleksno število

$$w = (z+i)^2 + \sqrt{-81}\cdot i^{50},$$

nato pa poišči številu w konjugirano število in njegovo absolutno vrednost.

Rešitev. Računamo

$$\begin{aligned}
w &= (3-2i+i)^2 + 9i\cdot i^{4\cdot 12+2} \\
&= (3-i)^2 + 9i\cdot i^2 \\
&= 9-6i+i^2-9i \\
&= 8-15i\,.
\end{aligned}$$

Odtod sledi, da je $\overline{w} = 8 + 15i$ in

$$\|w\| = \sqrt{8^2+15^2} = \sqrt{289} = 17\,.$$

Naloga 1.45. V kompleksnih številih reši enačbo

$$x^2 - 2x + 5 = 0\,.$$

Rešitev. Po formuli za ničli kvadratne funkcije dobimo

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i\,.$$

Naloga 1.46. V kompleksnih številih reši enačbo

$$x^3 + 1 = 0\,.$$

Rešitev. Izraz razstavimo in s pomočjo diskriminante poiščemo kompleksne rešitve. Dobimo

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1) = 0\,.$$

Prva rešitev je $x_1 = -1$. Drugi dve dobimo po formuli:

$$x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i\,.$$

2 Enačbe

Enačba je poljuben zapis oblike $f(x) = g(x)$, rešitve enačbe pa so vsa števila x, za katera velja enakost $f(x) = g(x)$.

✐***Linearna enačba.*** *Linearna enačba je enačba oblike*

$$ax + b = 0$$

in njena rešitev je $x = -\frac{b}{a}$.

✐***Kvadratna enačba.*** *Kvadratna enačba je enačba oblike*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

in njeni rešitvi sta $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

✐***Ničle polinomov.*** *Polinom je izraz oblike*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0\,.$$

Ničla polinoma je število x *za katerega velja*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0\,.$$

Pogosto je potrebno ničlo polinoma določiti s poskušanjem. Če so koeficienti polinoma $a_n, ..., a_0$ *cela števila, potem se lahko zgodi, da je ničla polinoma število*

$$x = \frac{p}{q}\,,$$

kjer je p *delitelj števila* a_0 *in* q *delitelj števila* a_n.

Naloge

Naloga 2.1. Reši enačbo

$$x - (5x - (x+2)) = 8\,.$$

Rešitev. Gre za linearno enačbo, zato jo poenostavljamo toliko časa, da lahko izrazimo neznanko x:

$$x - (5x - (x+2)) = 8 \Leftrightarrow x - (5x - x - 2) = 8 \Leftrightarrow x - 5x + x + 2 = 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3x + 2 = 8 \Leftrightarrow -3x = 8 - 2 \Leftrightarrow -3x = 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6}{-3} \Leftrightarrow x = -2\,.$$

Naloga 2.2. Reši enačbo

$$(3x+2)^2 - 8x(x+1) - (x-4)(x+4) = 4\,.$$

Rešitev. Najprej odpravimo oklepaje

$$(3x+2)^2 - 8x(x+1) - (x-4)(x+4) = 4 \Leftrightarrow 9x^2 + 12x + 4 - 8x^2 - 8x - x^2 + 16 = 4 \Leftrightarrow$$

$$4x = -16 \Leftrightarrow x = -4\,.$$

Naloga 2.3. Reši enačbo

$$2(x-4)(x+4) - (x+2)^2 + 36 = 0\,.$$

Rešitev. Najprej odpravimo vse oklepaje

$$2(x-4)(x+4) - (x+2)^2 + 36 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 32 - x^2 - 4x - 4 + 36 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0\,.$$

Rešitvi enačbe sta torej števili

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 4\,.$$

Naloga 2.4. Reši enačbo

$$x(x+5)^2 - (x^2 - 3x)(x+4) + x(x-3)(x+3) = 14x\,.$$

Rešitev. Odpravimo vse oklepaje

$$x(x+5)^2 - (x^2 - 3x)(x+4) + x(x-3)(x+3) = 14x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 10x^2 + 25x - x^3 - x^2 + 12x + x^3 - 9x = 14x$$

Vse izraze prestavimo na levo stran enačbe. Dobimo

$$x^3 + 10x^2 + 25x - x^3 - x^2 + 12x + x^3 - 9x - 14x = 0$$

in poenostavimo v

$$x^3 + 9x^2 + 14x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 9x + 14) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x(x+2)(x+7) = 0\,,$$

torej so rešitve enačbe števila

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = -2 \qquad x_3 = -7\,.$$

Naloga 2.5. Poišči realne rešitve enačbe

$$x^3 - 8 = 0\,.$$

Rešitev. Levo stran enačbe raztavimo kot

$$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4) = 0\,.$$

Sledi, da sta edini možnosti $x - 2 = 0$ in $x^2 + 2x + 4 = 0$. Edina realna ničla je $x = 2$, saj je diskriminanta drugega dela $D = b^2 - 4ac = 4 - 16 = -12$ negativna.

Naloga 2.6. Reši enačbo

$$\frac{x+2}{x-5} - \frac{x-3}{x-1} = \frac{6x+4}{x^2 - 6x + 5}\,.$$

Rešitev. Najprej izraze v enačbi razstavimo

$$\frac{x+2}{x-5} - \frac{x-3}{x-1} = \frac{6x+4}{(x-1)(x-5)}\,.$$

Enačba je definirana za vse $x \in \mathbb{R}$, razen za $x = 1$ in $x = 5$. Enačbo torej rešujemo za $x \in \mathbb{R} - \{1, 5\}$. Pomnožimo sedaj obe strani enačbe z $(x-1)(x-5)$. Dobimo

$$(x+2)(x-1) - (x-3)(x-5) = 6x + 4\,.$$

Sedaj odpravimo oklepaje in dobimo

$$x^2 + x - 2 - x^2 + 8x - 15 = 6x + 4\,.$$

Vse izraze prestavimo na levo stran enačbe in poenostavimo. Dobimo

$$3x - 21 = 0 \Leftrightarrow 3x = 21 \Leftrightarrow x = 7\,.$$

Naloga 2.7. Reši enačbo

$$x^3 - 4x^2 - 9x + 36 = 0\,.$$

Rešitev. Izpostavimo skupne faktorje. Dobimo

$$x^3 - 4x^2 - 9x + 36 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-4) - 9(x-4) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-4)(x^2 - 9) = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-3)(x+3) = 0\,.$$

Rešitve enačbe so torej

$$x_1 = -3 \qquad x_2 = 3 \qquad x_3 = 4\,.$$

NALOGA 2.8. Reši enačbo

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0\,.$$

REŠITEV. V enačbo $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ začasno uvedemo novo spremenljivko $t = x^2$ in dobimo kvadratno enačbo v spremenljivki t:

$$t^2 - 10t + 9 = 0\,.$$

Lahko uporabimo formulo za izračun ničel kvadratne enačbe. Dobimo

$$t_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 36}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = 5 \pm 4\,.$$

Dobimo rešitvi $t_1 = 1$ in $t_2 = 9$. Sedaj pa poiščemo rešitve originalne enačbe. Najprej imamo

$$x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 \qquad x_2 = -1$$

in

$$x^2 = 9 \Rightarrow x_3 = 3 \qquad x_4 = -3\,.$$

Rešitve enačbe so torej

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = -1 \qquad x_3 = 3 \qquad x_4 = -3\,.$$

NALOGA 2.9. Reši enačbo

$$4x^3 + 8x^2 - 11x + 3 = 0\,.$$

REŠITEV. Iščemo ničle polinoma $p(x) = 4x^3 + 8x^2 - 11x + 3$. Spomnimo se, da je kakšna ničla polinoma lahko oblike $\frac{p}{q}$, kjer p deli število 3 in q deli število 4. Tovrstni kandidati so torej

$$\pm 1,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{3}{2}, \ldots$$

Načeloma je sedaj potrebno preiskusti, če je kateri od teh kandidatov ničla, kar lahko vzame nekaj časa.

Preiskusimo, ali je $x = \frac{1}{2}$ ničla polinoma $p(x)$. Uporabimo Hornerjev algoritem. Dobimo

	4	8	-11	3
$\frac{1}{2}$		2	5	-3
	4	10	-6	|| 0

Velja torej

$$4x^3 + 8x^2 - 11x + 3 = \left(x - \frac{1}{2}\right)(4x^2 + 10x - 6)\,.$$

Imamo torej eno ničlo $x_1 = \frac{1}{2}$. Poiščimo še ničle polinoma $4x^2 + 10x - 6 = 0$. Uporabimo formulo in dobimo

$$x_{2,3} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 96}}{8} = \frac{-10 \pm 14}{8}\,.$$

Rezultat je torej

$$x_1 = \frac{1}{2} \qquad x_2 = \frac{1}{2} \qquad x_3 = -3\,.$$

Naloga 2.10. Reši enačbo

$$7 - \sqrt{25 - x^2} = x\,.$$

Rešitev. Enačba je definirana za $x \in \mathbb{R}$, za katere $25 - x^2 \geq 0$, oziroma $x^2 \leq 25$, kar nam da $x \in [-5, 5]$.

Enačbo preoblikujemo

$$7 - \sqrt{25 - x^2} = x \Leftrightarrow 7 - x = \sqrt{25 - x^2}\,.$$

Opazimo še sledeče. Ker je desna stran enačbe pozitivna, je enačba lahko rešljiva le za $x \in \mathbb{R}$, za katere je $7 - x \geq 0$, oziroma $x \leq 7$. Skupaj s pogojem, da morajo biti $x \in [-5, 5]$, torej sledi, da rešitve enačbe morajo ležati na intervalu $[-5, 5]$.

Nadaljujemo, pri čemer enakost $7 - x = \sqrt{25 - x^2}$ na obeh straneh kvadriramo in dobimo

$$49 - 14x + x^2 = 25 - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 14x + 24 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 12 = 0\,.$$

Izraz razstavimo

$$x^2 - 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x - 4) = 0\,,$$

od koder dobimo rešitvi enačbe

$$x_1 = 3 \qquad x_2 = 4\,.$$

(Vidimo, da rešitvi res ležita na intervalu $[-5, 5]$)

Naloga 2.11. Reši enačbo

$$\sqrt{x + 2} - 3 = 1 - x\,.$$

Rešitev. Enačbo najprej malenkost preoblikujemo v

$$\sqrt{x + 2} = 4 - x\,.$$

Najprej opazimo, da je enačba definirana le za $x \in \mathbb{R}$, za katere je $x + 2 \geq 0$, oziroma $x \geq -2$. Poleg tega je leva stran enačbe zmeraj pozitivna, torej so rešitve lahko kvečjemu $x \in \mathbb{R}$, za katere je $4 - x \geq 0$, oziroma $x \leq 4$.

Velja torej, da rešitev enačbe, če obstaja, leži na intervalu $[-2, 4]$.

Enačbo $\sqrt{x + 2} = 4 - x$ sedaj na obeh straneh kvadriramo in dobimo

$$x + 2 = 16 - 8x + x^2 \Leftrightarrow 0 = x^2 - 9x + 14 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 7) = 0\,,$$

od koder dobimo dve rešitvi $x_1 = 2$ in $x_2 = 7$. Ker rešitev $x_2 = 7$ ne leži na intervalu $[-2, 4]$, je torej edina rešitev originalne enačbe

$$x_1 = 2\,.$$

Naloga 2.12. Reši enačbo

$$2\sqrt{x + 5} = \sqrt{x + 2} + \sqrt{10 + x}\,.$$

Rešitev. Najprej opazimo, da je enačba $2\sqrt{x+5} = \sqrt{x+2} + \sqrt{10+x}$ definirana le za $x \geq -2$ (sicer pod koreni lahko dobimo negativne vrednosti). Rešitev enačbe, če obstaja, mora ležati na intervalu $[-2, \infty)$.

Obe strani enačbe $2\sqrt{x+5} = \sqrt{x+2} + \sqrt{10+x}$ kvadriramo in dobimo

$$4x + 20 = x + 2 + 10 + x + 2\sqrt{x+2}\sqrt{10+x}\,,$$

kar preoblikujemo v

$$x + 4 = \sqrt{x+2}\sqrt{10+x}\,.$$

Zopet kvadriramo obe strani enačbe in dobimo

$$x^2 + 8x + 16 = x^2 + 12x + 20 \Leftrightarrow 0 = 4x + 4 \Leftrightarrow x = -1\,.$$

Rešitev $x = -1$ leži na intervalu $[-2, \infty)$, tako da zaključimo, da je edina rešitev začetne enačbe število

$$x = -1\,.$$

Naloga 2.13. Reši enačbo

$$\sqrt[3]{7x-1} = x - 1\,.$$

Rešitev. V tem primeru imamo opravka s 3. korenom $\sqrt[3]{\ }$, ki pa lahko sprejme tako pozitivne kot negativne argumente in tudi zasede tako negativne kot pozitivne vrednosti. Zato v tem primeru nimamo nobenih omejitev glede definiranosti enačbe.

Obe strani enačbe $\sqrt[3]{7x-1} = x - 1$ potenciramo na potenco 3 in dobimo enačbo

$$7x - 1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \Leftrightarrow 0 = x^3 - 3x^2 - 4x\,,$$

kar pa v naslednjih korakih razstavimo

$$0 = x^3 - 3x^2 - 4x \Leftrightarrow 0 = x(x^2 - 3x - 4) \Leftrightarrow x(x+1)(x-4)\,,$$

izčesar zaključimo, da so rešitve enačbe števila

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = -1 \qquad x_3 = 4\,.$$

Naloga 2.14. Obravnavaj rešitve enačbe

$$b(x+1) = b + 3$$

v odvisnosti od parametra $b \in \mathbb{R}$.

Rešitev. Enačbo $b(x+1) = b + 3$ preoblikujemo na naslednji način

$$b(x+1) = b + 3 \Leftrightarrow bx + b = b + 3 \Leftrightarrow bx = 3\,.$$

Sedaj pa lahko obravnavamo dva primera:

1. Če je $b = 0$, potem imamo opravka z enačbo $0 = 3$, ki očitno nima rešitve, saj je $0 \neq 3$.

2. Če je $b \neq 0$, pa lahko enačbo delimo z b in dobimo rešitev

$$x = \frac{3}{b} \quad b \neq 0\,.$$

NALOGA 2.15. Reši enačbo

$$|x+3| = x-1\,.$$

REŠITEV. Najprej si ogledamo člen $|x+3|$. Velja

$$|x+3| = \begin{cases} x+3 & ; \quad x \geq -3 \\ -x-3 & ; \quad x < -3 \end{cases}$$

Vidimo, da se predpis za $|x+3|$ zamenja pri $x=-3$. Enačbo rešimo najprej na intervalu $(-\infty,-3)$ na to pa še na intervalu $[-3,\infty)$.

1. Naj bo $x \in (-\infty,-3)$. Enačba $|x+3| = x-1$ se na tem intervalu glasi

   $$-x-3 = x-1 \Leftrightarrow 0 = 2x+2 \Leftrightarrow x = -1\,.$$

   Ker rešitev $x=-1$ ne leži na intervalu $(-\infty,-3)$ zaključimo, da enačba $|x+3| = x-1$ na intervalu $(-\infty,-3)$ nima rešitev.

2. Naj bo $x \in [-3,\infty)$. Enačba $|x+3| = x-1$ se na tem intervalu glasi

   $$x+3 = x-1 \Leftrightarrow 3 = -1\,,$$

   kar očitno ni rešljiva enačba, torej zaključimo, da enačba $|x+3| = x-1$ na intervalu $[-3,\infty)$ nima rešitev.

Končen zaključek je, da enačba

$$|x+3| = x-1$$

sploh nima nobene rešitve.

NALOGA 2.16. Reši enačbo

$$|x-1| + |2x-1| = 6\,.$$

REŠITEV. Najprej si ogledamo oba izraza $|x-1|$ in $|2x-1|$. Velja

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & ; \quad x \geq 1 \\ -x+1 & ; \quad x < 1 \end{cases}$$

in

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & ; \quad x \geq \frac{1}{2} \\ -2x+1 & ; \quad x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vidimo, da se izrazi za absolutne vrednosti spremenijo pri $x = \frac{1}{2}$ in $x = 1$. Enačbo zato posebej rešujemo na vsakem od intervalov $(-\infty,\frac{1}{2})$, $[\frac{1}{2},1)$ in $[1,\infty)$.

1. Naj bo $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$. Enačba $|x-1|+|2x-1|=6$ se na tem intervalu glasi
$$-x+1+1-2x=6 \Leftrightarrow -3x=4 \Leftrightarrow x=-\frac{4}{3}\,.$$
Ker rešitev $x=-\frac{4}{3}$ leži na intervalu $(-\infty, \frac{1}{2})$ zaključimo, da ima enačba $|x-1|+|2x-1|=6$ na intervalu $(-\infty, \frac{1}{2})$ rešitev $x=-\frac{4}{3}$.

2. Naj bo $x \in [\frac{1}{2}, 1)$. Enačba $|x-1|+|2x-1|=6$ se na tem intervalu glasi
$$-x+1+2x-1=6 \Leftrightarrow x=6 \Leftrightarrow x=-\frac{4}{3}\,.$$
Ker rešitev $x=6$ ne leži na intervalu $[\frac{1}{2}, 1)$ zaključimo, da enačba $|x-1|+|2x-1|=6$ na intervalu $[\frac{1}{2}, 1)$ niam rešitev.

3. Naj bo $x \in [1, \infty)$. Enačba $|x-1|+|2x-1|=6$ se na tem intervalu glasi
$$x-1+2x-1=6 \Leftrightarrow 3x=8 \Leftrightarrow x=\frac{8}{3}\,.$$
Ker rešitev $x=\frac{8}{3}$ leži na intervalu $[1, \infty)$ zaključimo, da ima enačba $|x-1|+|2x-1|=6$ na intervalu $[1, \infty)$ rešitev $x=\frac{8}{3}$.

Enačba $|x-1|+|2x-1|=6$ ima torej rešitvi
$$x_1=-\frac{4}{3} \qquad x_2=\frac{8}{3}\,.$$

NALOGA 2.17. Poišči rešitev sistema enačb
$$\begin{aligned} 3x-5y &= 13 \\ 2x-7y &= -17\,. \end{aligned}$$

REŠITEV. Iz prve enačbe lahko izrazimo spremenljivko x in dobimo
$$x=\frac{5y+13}{3}\,.$$
To vstavimo v drugo enačbo in dobimo
$$-11y=-77\,,$$
od koder dobimo
$$y=7 \qquad x=16\,.$$

NALOGA 2.18. Poišči rešitev sistema enačb
$$\begin{aligned} 3x-4y &= 1 \\ 3x+4y &= 19\,. \end{aligned}$$

REŠITEV. Enačbi seštejemo in dobimo
$$6x=20 \Longrightarrow x=\frac{10}{3}\,.$$
To vstavimo npr. v prvo enačbo in dobimo še
$$y=\frac{9}{4}\,.$$

NALOGA 2.19. Poišči rešitev sistema enačb

$$\begin{aligned} x - 5y &= 13 \\ 2x - 11y &= -17\,. \end{aligned}$$

REŠITEV. Prvo enačbo pomnožimo z -2 in dobimo

$$\begin{aligned} -2x + 10y &= -26 \\ 2x - 11y &= -17\,. \end{aligned}$$

Sedaj enačbi seštejemo in dobimo

$$y = 43\,.$$

To vstavimo v prvo enačbo in dobimo še

$$x = 228\,.$$

NALOGA 2.20. Če številu odštejemo 7 in rezultat pomnožimo z 28 dobimo kvadrat prvotnega števila. Za katero število gre?

REŠITEV. Označimo iskano število z x. Iz besedila naloge razberemo, da za število x velja naslednje

$$28(x-7) = x^2\,.$$

Odpravimo oklepaje in vse izraze prenesemo na desno stran enačbe. Dobimo

$$0 = x^2 - 28x + 196 \Leftrightarrow 0 = (x-14)^2\,.$$

Rešitev enačbe je torej število

$$x = 14\,.$$

NALOGA 2.21. Vzemi poljubno naravno število med 1 in 10. Dodaj 2. Rezultat pomnoži z 2. Nato odštej 2. Nato rezultat deli z 2. Nazadnje odštej tvoje prvotno število.

Rezultat je 1! Zakaj?

REŠITEV. Naj bo x poljubno število. Sledimo besedilu naloge

$$x \to x+2 \to 2(x+2) \to 2(x+2)-2 \to \frac{2(x+2)-2}{2} \to \frac{2(x+2)-2}{2} - x\,.$$

Dobimo torej izraz $\frac{2(x+2)-2}{2} - x$, ki pa ga sedaj poenostavimo. Dobimo

$$\frac{2(x+2)-2}{2} - x = \frac{2x+4-2}{2} - x = \frac{2x+2}{2} - x = x+1-x = 1\,,$$

torej je rezultat res vedno enak 1, neodvisno od začetnega izbranega števila x.

NALOGA 2.22. Vzemi poljubno trimestno število, z samimi različnimi števkami. Obrni vrstni red števk in to odštej od prvotnega števila. Obrni vrstni red števk te razlike in dobljeno število prištej razliki.

Rezultat je 1089! Zakaj?

REŠITEV. Naj bo xyz desetiški zapis izbranega trimestnega števila. Gre torej za število

$$100x + 10y + z\,.$$

zyx je število z obrnjenim vrstim redom števk in torej gre za število

$$100z + 10y + x\,.$$

Izračunajmo razliko teh dveh števil. Denimo, da je $x > z$ in izračunamo

$$(100x+10y+z)-(100z+10y+x) = 100x-100z+z-x = 100(x-z)+z-x\,.$$

Kakšen je desetiški zapis tega števila? Ker smo predpostavili, da je $x > z$, je razlika $z - x$ negativna, torej $(x - z)0(z - x)$ ne bo desetiški zapis tega števila.

Kako torej?

Razliko $100(x - z) + z - x$ preoblikujemo na naslednji način

$$100(x-z)+z-x = 100(x-z-1)+9\cdot 10+10+z-x\,,$$

od koder preberemo, da je desetiški zapis števila $100(x - z) + z - x$ enak

$$(x-z-1)\,9\,(10+z-x)\,.$$

Sedaj pa obrnemo vrstni red teh števk, dobimo število $(10+z-x)\,9\,(x-z-1)$, torej gre za število

$$100(10+z-x)+9\cdot 10+(x-z-1)\,.$$

Temu sedaj prištejemo število $100(x - z) + z - x$. Dobimo

$$100(10+z-x)+9\cdot 10+(x-z-1)+100(x-z)+z-x =$$

$$= 1000+100z-100x+90+x-z-1+100x-100z+z-x = 1000+90-1 = 1089\,.$$

NALOGA 2.23. Štorklja prinese mladičkom črvičke. Če bi vsakemu dala 5 črvičkov, bi trije črvički ostali, če pa bi jih vsakemu hotela dati 6, bi ji pa en črviček zmanjkal. Ugotovi koliko mladičkov in črvičkov je.

REŠITEV. Naj bo x število mladičkov in y število črvičkov. Iz besedila naloge razberemo, da velja naslednje

$$\begin{aligned} 5x+3 &= y \\ 6x-1 &= y\,. \end{aligned}$$

Prva enačba nam torej pove $y = 5x + 3$. To vstavimo v drugo enačbo in dobimo
$$6x - 1 = 5x + 3 \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow y = 23\,.$$
Torej je štorklja prinesla 23 črvičkov 4 mladičkom.

NALOGA 2.24. Oče in sin sta skupaj stara 100 let, čez 10 let pa bo oče dvakrat starejši od sina. Določi starosti obeh.

REŠITEV. Označimo
$$\begin{array}{lll} x & \ldots & \text{starost očeta} \\ y & \ldots & \text{starost sina}\,. \end{array}$$
Velja
$$\begin{aligned} x + y &= 100 \\ x + 10 &= 2(y + 10)\,, \end{aligned}$$
kar lahko preuredimo v
$$\begin{aligned} x + y &= 100 \\ x - 2y &= 10\,. \end{aligned}$$
Dobimo
$$x = 70 \qquad y = 30\,.$$

NALOGA 2.25. Iva poje krožnik juhe v 6 minutah, Črt pa enak krožnik juhe poje v 9 minutah. Črt začne jesti krožnik juhe, čez eno minuto pa se mu pridruži Iva (sedaj oba jesta iz istega krožnika). V kolikšnem času bosta pojedla krožnik juhe?

REŠITEV. Najprej zapišimo hitrosti hranjenja $v_{\text{Iva}} = \frac{1}{6}\frac{\text{krožnika}}{\text{min}}$ in $v_{\text{Črt}} = \frac{1}{9}\frac{\text{krožnika}}{\text{min}}$. Označimo s t čas v katerem bosta skupaj pojedla en krožnik juhe. Če bo Črt jedel t časa, bo Iva jedla $t - 1$ časa, saj začne 1 minuto kasneje. Velja torej
$$1 = tv_{\text{Črt}} + (t-1)v_{\text{Iva}} \Leftrightarrow 1 = \frac{t}{9} + \frac{t-1}{6}\,.$$
Iz zadnje enačbe sedaj izrazimo t. Imamo
$$1 = \frac{t}{9} + \frac{t-1}{6} \Leftrightarrow 1 = \frac{2t}{18} + \frac{3(t-1)}{18} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 = \frac{2t + 3(t-1)}{18} \Leftrightarrow 18 = 2t + 3(t-1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 18 = 5t - 3 \Leftrightarrow 21 = 5t \Leftrightarrow t = \frac{21}{5}\,.$$
Krožnik juhe bosta skupaj pojedla po času $t = \frac{21}{5}$ minute, kar je 4 minute in 12 sekund.

NALOGA 2.26. Poišči vse realne rešitve sistema nelinearnih enačb

$$x^3 - 3xy^2 + 1 = 0,$$
$$3x^2y - y^3 = 0\,.$$

REŠITEV. Levo stran druge enačbe lahko razstavimo kot

$$3x^2y - y^3 = y(3x^2 - y^2) = y(\sqrt{3}x - y)(\sqrt{3}x + y) = 0.$$

Sledi, da je $y_1 = 0$, $y_2 = \sqrt{3}x$ in $y_3 = -\sqrt{3}x$. Najprej vstavimo y_1 v prvo enačbo. Dobimo $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x - 1) = 0$. Edina realna rešitev je $x_1 = -1$. Sledi, da je prva rešitev sistema $(-1, 0)$.

Sedaj vstavimo y_2 v prvo enačbo. Dobimo $x^3 - 9x^3 + 1 = 1 - 8x^3 = (1 - 2x)(1 + 2x + 4x^2) = 0$. Edina realna rešitev je $x_2 = \frac{1}{2}$. Sledi, da je druga rešitev sistema $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Podobno dobimo, če vstavimo y_3 v prvo enačbo. Sledi, da je tretja rešitev sistema $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

NALOGA 2.27. Reši eksponentno enačbo

$$3^{6x-4} + 9^{3x-1} - 2 \cdot 27^{2x-1} = 36\,.$$

REŠITEV. Gre za eksponentno enačbo. Rešujemo jo tako, da jo prevedemo na osnovno obliko $a^x = b$. Potem rešitev uganemo ali dobimo preko logaritma, tj. $x = \log_a b$. V našem primeru vse člene zapišemo z osnovo 3 in dobimo

$$3^{6x-4} + 9^{3x-1} - 2 \cdot 27^{2x-1} = 36 \Leftrightarrow 3^{6x-4} + \left(3^2\right)^{3x-1} - 2 \cdot \left(3^3\right)^{2x-1} = 36$$
$$\Leftrightarrow 3^{6x-4} + 3^{6x-2} - 2 \cdot 3^{6x-3} = 36 \Leftrightarrow 3^{6x-4}\,(1 + 9 - 2 \cdot 3) = 36$$
$$\Leftrightarrow 3^{6x-4} = 9\,.$$

Sledi, da je $6x - 4 = 2$ oziroma $x = 1$.

NALOGA 2.28. Reši eksponentno enačbo

$$2^{x-1} - 4 \cdot 5^{x-3} = 2 \cdot 5^{x-2} - 2^{x-2} + 5^{x-3}\,.$$

REŠITEV. Opazimo, da sta osnovi 2 in 5 tuji si števili. Zato ne moremo vse člene zapisati z isto osnovo. Ustrezno preuredimo.

$$2^{x-1} + 2^{x-2} = 4 \cdot 5^{x-3} + 2 \cdot 5^{x-2} + +5^{x-3} \Leftrightarrow 2^{x-2}(2 + 1) = 5^{x-3}(4 + 2 \cdot 5 + 1)$$
$$3 \cdot 2^{x-2} = 15 \cdot 5^{x-3} \Leftrightarrow 2^{x-2} = 5^{x-2}\,.$$

Sledi, da je edina možnost $x - 2 = 0$. Odtod dobimo $x = 2$.

NALOGA 2.29. Reši eksponentno enačbo

$$6^{1+x} - 6^{2-x} = 30\,.$$

Rešitev. Poenostavimo in dobimo

$$6^{1+x} - 6^{2-x} = 30 \Leftrightarrow 6 \cdot 6^x - \frac{36}{6^x} = 30\,.$$

Enačbo pomnožimo s 6^x in uvedemo novo spremenljivko $t = 6^x$. Dobimo

$$6 \cdot 6^{2x} - 36 - 30 \cdot 6^x = 0 \Leftrightarrow 6t^2 - 30t - 36 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 5t - 6 = 0 \Leftrightarrow (t-6)(t+1) = 0\,.$$

Prva možnost je, da velja $t = 6$ oziroma $6^x = 6$. Odtod dobimo rešitev $x = 1$. Druga možnost je, da velja $t = -1$ oziroma $6^x = -1$. Ta enačba pa nima rešitve.

Naloga 2.30. Reši logaritemsko enačbo

$$\log_x(x+2) = 2\,.$$

Rešitev. Gre za logaritemsko enačbo. Rešujemo jo tako, da jo prevedemo na osnovno obliko $\log_a x = b$. Iz česar sledi, da je $a^x = b$. V našem primeru dobimo

$$\log_x(x+2) = 2 \Leftrightarrow x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) = 0\,.$$

Odtod sledi, da je $x_1 = 2$ in $x_2 = -1$. Naredimo preizkus. Ker niti osnova, niti argument logaritma ne smeta biti negativni števili, sledi, da je $x = 2$ edina rešitev.

Naloga 2.31. Reši logaritemsko enačbo

$$\log \sqrt{75 + 5^x} = 1\,.$$

Rešitev. Spomnimo se, da za logaritme velja pravilo

$$\log_a x^n = n \log_a x\,.$$

V našem primeru dobimo

$$\log \sqrt{75 + 5^x} = 1 \Leftrightarrow \log(75+5^x)^{\frac{1}{2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log(75+5^x) = 1 \Leftrightarrow \log(75+5^x) = 2\,.$$

Sledi

$$10^2 = 75 + 5^x \Leftrightarrow 5^x = 25\,.$$

Torej je $x = 2$.

Naloga 2.32. Reši logaritemsko enačbo

$$\log_2(x+14) + \log_2(x+2) = 6\,.$$

Rešitev. Spomnimo se, da za logaritme z isto osnovo velja pravilo

$$\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)\,.$$

V našem primeru dobimo

$$\log_2(x+14) + \log_2(x+2) = 6 \Leftrightarrow \log_2\left((x+14)(x+2)\right) = 6$$

$$x^2 + 16x + 28 = 2^6 \Leftrightarrow x^2 + 16x - 36 = 0 \Leftrightarrow (x+18)(x-2) = 0\,.$$

Odtod sledi, da je $x_1 = -18$ in $x_2 = 2$. Naredimo preizkus. Edina rešitev je $x = 2$.

NALOGA 2.33. Reši logaritemsko enačbo

$$\ln(x+2) - \ln x = 1\,.$$

REŠITEV. Za logaritme z isto osnovo velja pravilo

$$\log_a x - \log_a y = \log_a \left(\frac{x}{y}\right)\,.$$

V našem primeru računamo z naravnim logaritmom, ki ima za osnovo število e:

$$\ln x = \log_e x\,.$$

Dobimo

$$\ln(x+2) - \ln x = 1 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x} = e$$

$$x+2 = ex \Leftrightarrow x(1-e) = -2\,.$$

Sledi, da je $x = \frac{2}{e-1}$. Preveri in naredi preizkus!

NALOGA 2.34. Reši trigonometrijsko enačbo

$$\tan x = \sqrt{3}\,.$$

REŠITEV. Trigonometrijsko enačbo rešujemo tako, da jo prevedemo na osnovno enačbo oblike

$$f(x) = a\,,$$

kjer je f kotna funkcija in a neko število. Rešitve take enačbe potem razberemo iz enotske krožnice.

V našem primeru je enačba že v taki obliki. Vprašamo se, pri katerih kotih x (v radianih) je vrednost tangensa enaka $\sqrt{3}$. To se zgodi pri $\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

NALOGA 2.35. Reši trigonometrijsko enačbo

$$\cos 3x + 1 = 0\,.$$

REŠITEV. Velja

$$\cos 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 3x = -1\,.$$

Sledi, da je $3x = \pi + 2k\pi$ oziroma $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

NALOGA 2.36. Reši trigonometrijsko enačbo

$$2\sin^2 x - \sin x = 0\,.$$

REŠITEV. Velja

$$2\sin^2 x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x(2\sin x - 1) = 0\,.$$

Sledi, da je $\sin x = 0$ ali $\sin x = \frac{1}{2}$. Rešitve prve enačbe so $x_1 = k\pi$, rešitve druge pa $x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

NALOGA 2.37. Reši trigonometrijsko enačbo

$$4\sin^2 x - 2\cos^2 x = 1\,.$$

REŠITEV. S pomočjo osnovnih trigonometrijskih identitet pretvorimo enačbo v obliko, da bo vsebovala samo eno kotno funkcijo. Dobimo

$$4\sin^2 x - 2\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow 4\sin^2 x - 2(1-\sin^2 x) = 1 \Leftrightarrow 6\sin^2 x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\cdot(2\sin^2 x - 1) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2}\sin x - 1)(\sqrt{2}\sin x + 1) = 0\,.$$

Sledi, da je $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ali $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Rešitve obeh enačb lahko združimo in zapišemo kot $x = \frac{(2k+1)\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$.

NALOGA 2.38. Reši trigonometrijsko enačbo

$$\sin x + \cos x = 1\,.$$

REŠITEV. Enačbo kvadriramo in dobimo

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 1$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x + 1 = 1 \Leftrightarrow \sin x\cos x = 0.$$

Rešitve te enačbe so $k\pi$ in $\frac{\pi}{2} + k\pi$. Moramo pa paziti, ker s potenciranjem enačbe lahko pridelamo dodatne lažne rešitve, ki niso rešitve prvotne enačbe. V našem primeru so to tisti x, ki zadoščajo $\sin x + \cos x = -1$. Zato naredimo preizkus. Dobimo, da so rešitve prvotne enačbe $x_1 = 2k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

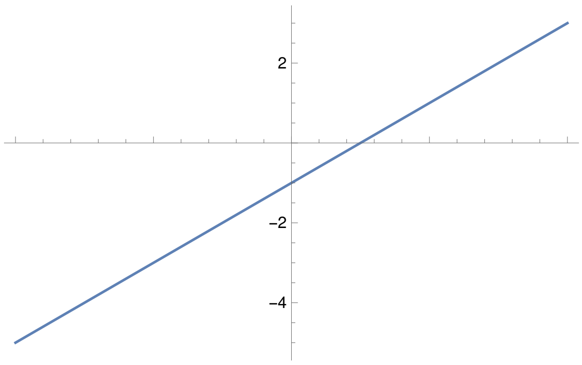
3

Funkcije, grafi, krivulje in neenačbe

Naloga 3.1. Skiciraj graf funkcije

$$f(x) = 2x - 1\,.$$

Rešitev. Gre za linearno funkcijo, ki je oblike $f(x) = kx + n$. Število k imenujemo smerni koeficient in določa strmino grafa funkcije. Za $k > 0$ je funkcija naraščajoča, za $k < 0$ pa je padajoča. Število $n = f(0)$ imenujemo začetna vrednost in določa presečišče grafa linearne funkcije. Graf linearne funkcije je premica. Določena je z dvema točkama. Zato si izberemo dve vrednosti za x in izračunamo pripadajoče vrednosti odvisne spremenljivke $y = f(x)$. Npr. točki $(0, -1)$ in $(1, 1)$. V našem primeru dobimo



Naloga 3.2. Skiciraj graf funkcije

$$f(x) = 4x^2 - 4x - 3\,.$$

Rešitev. Gre za kvadratno funkcijo, ki je oblike $f(x) = ax^2 + bx + c$. Graf kvadratne funkcije je parabola. Pri risanju parabole izračunamo točke na krivulje: ničle, teme in začetno vrednost.

- Ničla funkcije je tisto število x, pri katerem je vrednost funkcije f enaka 0. Tam graf funkcije seka abscisno os. Ničle izračunamo z reševanjem enačbe

$f(x) = 0$. V našem primeru ju bomo izračunali s pomočjo diskriminante. Dobimo

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{8} = \frac{4 \pm 8}{8}\,.$$

Sledi, da je sta ničli $x_1 = \frac{3}{2}$ in $x_2 = -\frac{1}{2}$.

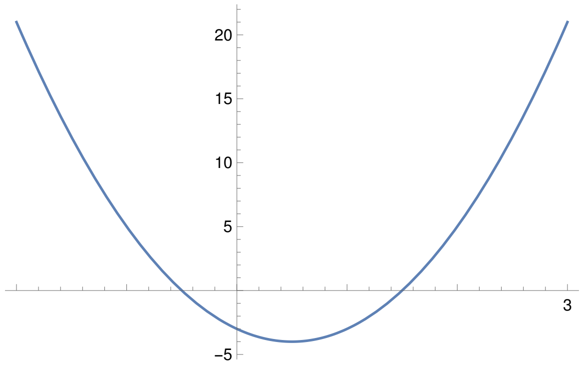
- V temenu $T(p, q)$ parabola doseže največjo vrednost ($a < 0$) oziroma najmanjšo vrednost ($a > 0$). Formuli za izračun koordinat temena sta

$$p = -\frac{b}{2a}, \quad q = -\frac{D}{4a}\,.$$

  V našem primeru dobimo $p = \frac{1}{2}$ in $q = -4$.

- Začetna vrednost je $f(0) = c$. V našem primeru je to -3. Zato točka $(0, -3)$ leži na grafu funkcije.

Ko narišemo te točke in jih povežemo, dobimo parabolo



Naloga 3.3. Dan je polinom $p(x) = x^4 - 3x^2 - 5x^2 + 3x + 4$. Določi števili a in b tako, da pri deljenju polinoma p s polinomom $x^2 + x + 2$ dobimo količnik $x^2 + ax + b$ in ostanek $14x + 10$.

Rešitev. Po osnovnem izreku o deljenju polinomov zapišemo enačbo:

$$p(x) = (x^2 + x + 2)(x^2 + ax + b) + 14x + 10\,.$$

Zmnožimo in uredimo po potencah:

$$x^4 - 3x^2 - 5x^2 + 3x + 4 = x^4 + (a+1)x^3 + (a+b+2)x^2 + (2a+b+14)x + 2b + 10\,.$$

Dobimo sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} a + 1 &= -3 \\ a + b + 2 &= -5 \\ 2a + b + 14 &= 3 \\ 2b + 10 &= 4, \end{aligned}$$

katerega rešitev je $a = -4$, $b = -3$.

NALOGA 3.4. Skiciraj graf funkcije
$$p(x) = x^3 - x^2 - x + 1\,.$$

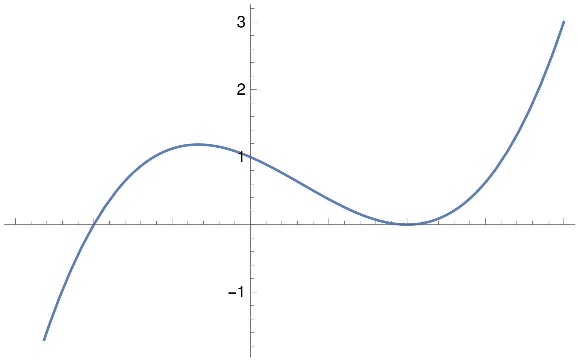
REŠITEV. Graf polinoma $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$ narišemo tako, da poiščemo ničle in izračunamo začetno vrednost. Dodatno še poiščemo par točk, ki ležijo na grafu polinoma. Vedenje polinoma daleč od izhodišča določa vodilni člen $a_n x^n$. Ko bomo na študiju spoznali odvod, pa bomo znali poiskati tudi lokalne minimume in maksimume. V našem primeru dobimo:

- Začetna vrednost je $p(0) = a_0 = 1$. Zato točka $(0, 1)$ leži na grafu polinoma.
- Ničle poiščemo preko Hornerjevega algoritma. Uganemo, da je ena od ničel 1. Dobimo

	1	-1	-1	1
1		1	0	-1
	1	0	-1	‖ 0

  Sledi
  $$x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)(x^2-1) = (x-1)^2(x+1)\,.$$
  Torej je $x_{1,2} = 1$ dvojna ničla in $x_3 = -1$ enojna ničla. Spomnimo se, da se graf funkcije v ničli sode stopnje odbije od abscisne osi.
- Vstavimo še npr. $x = 2$ v funkcijo in dobimo $p(2) = 3$.

Ko narišemo te točke in jih povežemo, dobimo



NALOGA 3.5. Poišči presečišča premice $y = x + 1$ in elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Nariši obe krivulji.

REŠITEV. Presečišča poiščemo z reševanjem sistema enačb
$$x + 1 = y$$
$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1\,.$$
V drugi enačbi upoštevamo, da velja $y = x + 1$ in dobimo
$$\frac{x^2}{4} + (x+1)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + 4x^2 + 8x + 4 = 4$$

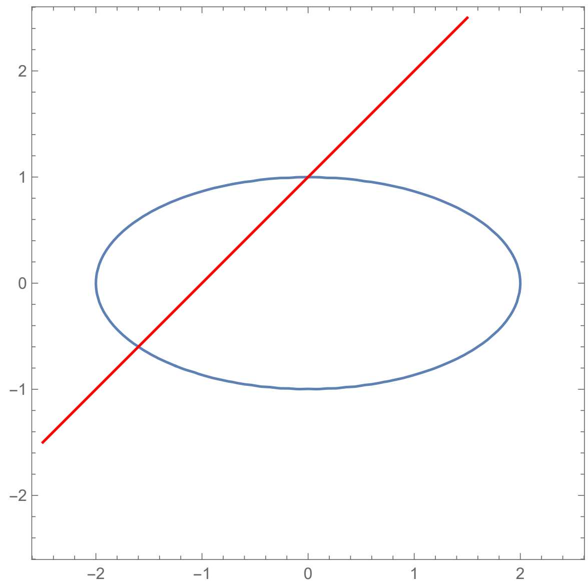
$$\Leftrightarrow 5x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x(5x+8) = 0\,.$$

Dobimo $x_1 = 0$ in $x_2 = -\frac{8}{5}$. Z vstavljanjem v enačbo $y = x + 1$ izračunamo, da sta presečišči $(0, 1)$ in $\left(-\frac{8}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.

Elipsa v osnovni legi je množica točk, ki zadošča enačbi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Pri tem sta a in b dolžini polosi. V našem primeru sta $a = 2$, $b = 1$. Obe krivulji sta na spodnji sliki.



Naloga 3.6. Poišči presečišča premice $y = x - 6$ in parabole $y^2 - 2y + 2 = x$. Nariši obe krivulji.

Rešitev. Presečišča poiščemo z reševanjem sistema enačb

$$x - 6 = y$$
$$y^2 - 2y + 2 = x\,.$$

V drugi enačbi upoštevamo, da velja $y = x - 6$ in dobimo

$$(x-6)^2 - 2(x-6) + 2 = x \Leftrightarrow x^2 - 12x + 36 - 2x + 12 + 2 = x$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 15x + 50 = 0 \Leftrightarrow (x-5)(x-10) = 0\,.$$

Dobimo $x_1 = 5$ in $x_2 = 10$. Z vstavljanjem v enačbo $y = x - 6$ izračunamo, da sta presečišči $(5, -1)$ in $(10, 4)$.

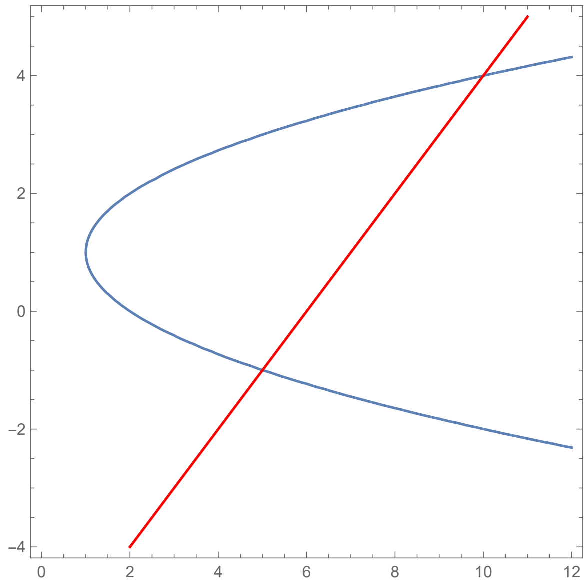
Parabola v osnovni legi je množica točk, ki zadošča enačbi

$$y^2 = 2px\,.$$

Pri tem parameter p določa gorišče $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ in enačbo vodnice $x = -\frac{p}{2}$. V našem primeru enačbo parabole preuredimo:

$$y^2 - 2y + 2 = x \Leftrightarrow (y^2 - 2y + 1) + 1 = x \Leftrightarrow (y-1)^2 = x - 1\,.$$

To krivuljo narišemo tako, da krivuljo $y^2 = x$ premaknemo za 1 v desno in za 1 gor. Obe krivulji sta na spodnji sliki.



Naloga 3.7. Nariši graf funkcije

$$f(x) = 1 - 2e^{2x+1}\,.$$

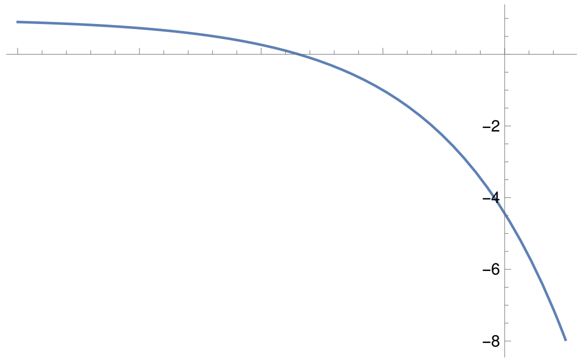
Rešitev. Opazimo, da je osnovna funkcija oblike e^x, katere graf znamo narisati. Graf funkcije f pa bomo dobili s pomočjo raztegov in premikov osnovnega grafa. Funkcijo f zato zapišemo v obliki

$$f(x) = 1 - 2e^{2\left(x+\frac{1}{2}\right)},$$

iz katere razberemo raztege in premike. Risanja se lotimo v naslednjih korakih:

- Narišemo graf funkcije $x \mapsto e^x$.
- Narišemo graf funkcije $x \mapsto e^{2x}$, ki ga dobimo tako, da graf funkcije iz prejšnje točke skrčimo za faktor 2 vzdolž abscisne osi.
- Narišemo graf funkcije $x \mapsto -2e^{2x}$, ki ga dobimo tako, da graf funkcije iz prejšnje točke raztegnemo za faktor 2 vzdolž ordinatne osi in ga nato prezrcalimo čez abscisno os.
- Narišemo graf funkcije f, ki ga dobimo tako, da graf funkcije iz prejšnje točke premaknemo za 1 gor in $\frac{1}{2}$ v levo.

Graf funkcije f je na spodnji sliki.



Naloga 3.8. Nariši graf funkcije

$$f(x) = \ln|2x - 2|\,.$$

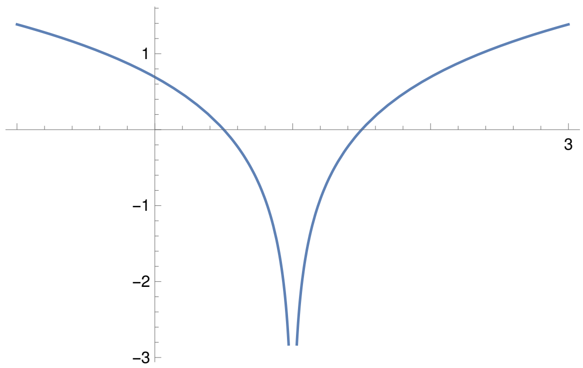
Rešitev. Opazimo, da je osnovna funkcija oblike $\ln|x|$. Graf funkcije f bomo dobili s pomočjo raztegov in premikov osnovnega grafa. Funkcijo f zato zapišemo v obliki

$$f(x) = \ln|2(x-1)|,$$

iz katere razberemo raztege in premike. Risanja se lotimo v naslednjih korakih:

- Narišemo graf funkcije $x \mapsto \ln|x|$. Logaritemsko funkcijo $g(x) = \ln x$ že poznamo. Graf funkcije $x \mapsto g(|x|)$ pa je sestavljen iz tistega dela grafa funkcije g, ki je desno od ordinatne osi in njegove zrcalne slike čez ordinatno os.
- Narišemo graf funkcije $x \mapsto \ln|2x|$, ki ga dobimo tako, da graf funkcije iz prejšnje točke skrčimo za faktor 2 vzdolž abscisne osi.
- Narišemo graf funkcije f, ki ga dobimo tako, da graf funkcije iz prejšnje točke premaknemo za 1 v desno.

Graf funkcije f je na spodnji sliki.



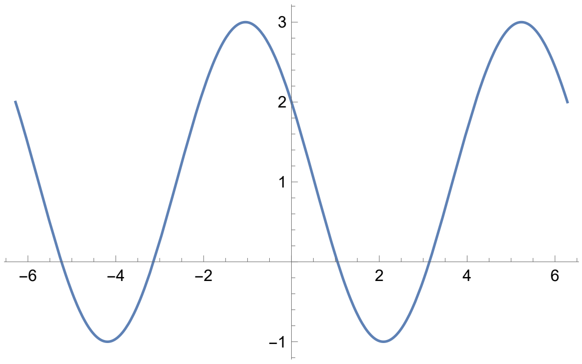
Naloga 3.9. Nariši graf funkcije

$$f(x) = 1 + 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\,.$$

Rešitev. Opazimo, da je osnovna funkcija oblike $\cos x$, katere graf znamo narisati. Graf funkcije f pa bomo dobili s pomočjo raztegov in premikov osnovnega grafa. Risanja se lotimo v naslednjih korakih:

- Narišemo graf funkcije $x \mapsto \cos x$.
- Narišemo graf funkcije $x \mapsto 2\cos x$, ki ga dobimo tako, da graf funkcije iz prejšnje točke raztegnemo za faktor 2 vzdolž ordinatne osi.
- Narišemo graf funkcije f, ki ga dobimo tako, da graf funkcije iz prejšnje točke premaknemo za 1 gor in $\frac{\pi}{3}$ v levo.

Graf funkcije f je na spodnji sliki.



Naloga 3.10. Reši neenačbo

$$\frac{x-6}{2} - \frac{4x+5}{3} \leq 2\,.$$

Rešitev. Gre za linearno neenačbo. Rešujemo jo tako, da vse člene, ki vsebujejo neznanko damo na eno stran, števila na drugo. Za razliko od enačb je pri neenačbi množica rešitev nek interval oziroma unija intervalov. V našem primeru dobimo

$$\frac{x-6}{2} - \frac{4x+5}{3} \leq 2 \Leftrightarrow 3(x-6) - 2(4x+5) \leq 12$$

$$\Leftrightarrow 3x - 18 - 8x - 10 \leq 12 \Leftrightarrow -5x \leq 40 \Leftrightarrow x \geq -8\,.$$

Rešitev lahko zapišemo s pomočjo intervala kot $x \in [-8, \infty)$.

Naloga 3.11. Reši sistem neenačb

$$\frac{x+6}{2} > -x > \frac{x+2}{3}, .$$

Rešitev. Gre za sistem dveh linearnih neenačb, ki ga lahko zapišemo v obliki

$$\frac{x+6}{2} > -x, \quad -x > \frac{x+2}{3}\,.$$

Rešitev prve neenačbe dobimo kot

$$\frac{x+6}{2} > -x \Leftrightarrow x+6 > -2x \Leftrightarrow 3x > -6 \Leftrightarrow x > -2\,.$$

Rešitev druge neenačbe dobimo kot

$$-x > \frac{x+2}{3} \Leftrightarrow -3x > x+2 \Leftrightarrow -4x > 2 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}\,.$$

Ker mora neznanka x zadoščati obema neenačbama, dobimo rešitev kot presek zgornjih intervalov. Sledi, da je $x \in \left(-2, -\frac{1}{2}\right)$.

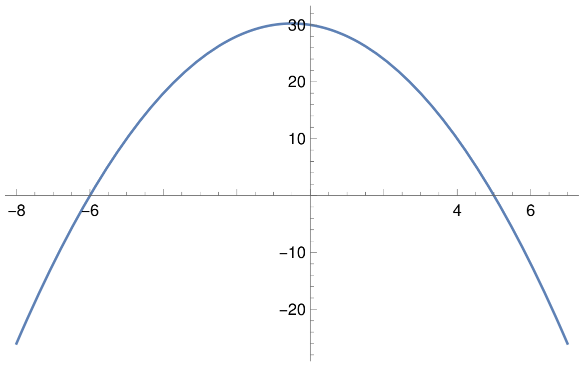
Naloga 3.12. Reši neenačbo

$$-x^2 - x + 30 < 0\,.$$

Rešitev. Kvadratne in polinomske neenačbe rešujemo tako, da najprej izračunamo ničle ustrezne funkcije, nato pa iz poteka grafa funkcije razberemo intervale, na katerih je funkcija določenega predznaka. V našem primeru je neenačba že pravilno urejena, saj je na desni strani neenačbe število nič. Iščemo intervale, na katerih je funkcija $f(x) = -x^2 - x + 30$ negativna. Z razstavljanjem

$$-x^2 - x + 30 = -(x^2 + x - 30) = -(x+6)(x-5)$$

dobimo, da sta ničli $x_1 = -6$ in $x_2 = 5$. Ker je vodilni koeficient kvadratne funkcije negativen, graf funkcije izgleda kot



Sledi, da je funkcija f negativno predznačena na $x \in (-\infty, -6) \cup (5, \infty)$.

Naloga 3.13. Reši neenačbo

$$x^2 - 1 > -x - 4x\,.$$

Rešitev. Neenačbo preuredimo v $x^2 + 5x - 1 > 0$. Ničli dobimo po formuli

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{29}}{2}\,.$$

Ker je vodilni koeficient kvadratne funkcije pozitiven, je rešitev enaka $x \in (-\infty, \frac{-5-\sqrt{29}}{2}) \cup (\frac{-5+\sqrt{29}}{2}, \infty)$. Preveri in nariši sliko!

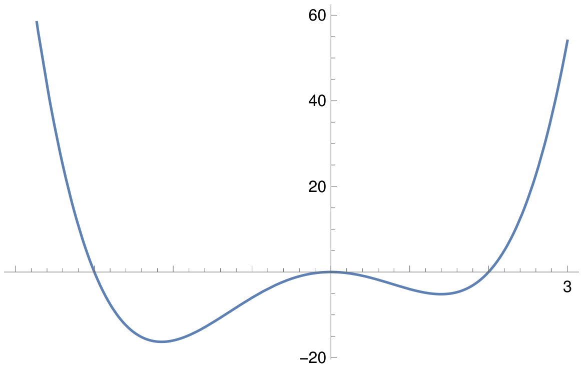
Naloga 3.14. Reši neenačbo

$$x^4 + x^3 - 6x^2 \geq 0\,.$$

Rešitev. Gre za polinomsko neenačbo. Levo stran lahko razstavimo kot

$$x^4 + x^3 - 6x^2 = x^2(x^2 + x - 6) = x^2(x+3)(x-2)\,.$$

Ker je vodilni koeficient polinoma pozitiven, graf funkcije izgleda kot



Sledi, da je funkcija f nenegativna na $x \in (-\infty, -3] \cup \{0\} \cup [2, \infty)$.

Naloga 3.15. Reši neenačbo

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 \geq 0\,.$$

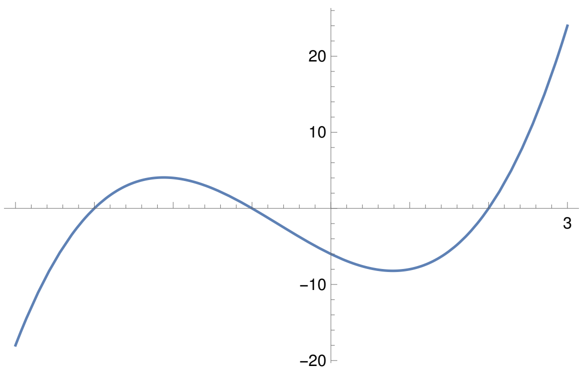
Rešitev. Uganemo ničlo $x_1 = -1$ in uporabimo Hornerjev algoritem, da razstavimo levo stran neenačbe:

	1	2	-5	-6
-1		-1	-1	6
	1	1	-6	‖ 0

Sledi

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x+1)(x^2 + x - 6) = (x+1)(x+3)(x-2)\,.$$

Ker je vodilni koeficient polinoma pozitiven, graf funkcije izgleda kot



Sledi, da je funkcija f nenegativna na $x \in [-3,-1] \cup [2,\infty)$.

Naloga 3.16. Reši neenačbo

$$\frac{1-2x}{3x+3} > 1\,.$$

Rešitev. Gre za racionalno neenačbo. Takoj izločimo, da $x \neq -1$, saj sicer pride do deljenja z nič. Izredno moramo paziti, kako bomo odpravljali ulomke, sicer lahko izgubimo rešitve. Napačen način je, da neenačbo pomnožimo z imenovalcem $3x+3$. V tem primeru namreč ne vemo s kakšnim številom (pozitivnim ali negativnim) množimo in se znak neenakosti lahko obrne. Zato neenačbo pomnožimo z imenovalcem na kvadrat, tj. $(3x+3)^2$. Dobimo

$$\frac{1-2x}{3x+3} > 1 \Leftrightarrow (1-2x)(3x+3) > (3x+3)^2$$

$$\Leftrightarrow (3x+3)(1-2x-(3x+3)) > 0 \Leftrightarrow (3x+3)(-5x-2) > 0\,.$$

Opazimo, da smo dobili polinomsko neenačbo z negativnim vodilnim koeficientom na levi strani. Ničli sta -1 in $-\frac{2}{5}$. Ko narišemo parabolo, vidimo, da je pozivno predznačena na $x \in \left(-1,-\frac{2}{5}\right)$.

Naloga 3.17. Reši neenačbo

$$\sqrt{x^2+1} - 2x + 1 < 0\,.$$

Rešitev. Gre za korensko neenačbo, kjer moramo biti spet previdni. Neenačbo najprej preuredimo v

$$\sqrt{x^2+1} < 2x - 1\,.$$

Opazimo, da je leva stran definirana za vsa števila, saj je pod korenom vedno strogo pozitivno število. Leva stran neenačbe je zaradi korena vedno nenegativna . Zato ločimo primere:

- Če je desna stran neenačbe negativna, tj. za $x < \frac{1}{2}$, potem neenačba nima rešitve.
- Če je pa desna stran neenačbe nenegativna, lahko obe strani kvadriramo. Pri tem znak neenakosti ostane, saj je kvadratna funkcija za pozivna števila naraščajoča. Dobimo

  $$x^2+1 < (2x-1)^2 \Leftrightarrow x^2+1 < 4x^2-4x+1$$

  $$\Leftrightarrow 3x^2-4x > 0 \Leftrightarrow x(3x-4) > 0\,.$$

  Ničli sta 0 in $\frac{4}{3}$. Ko narišemo parabolo, vidimo, da je pozivno predznačena na $x \in (-\infty,0) \cup \left(\frac{4}{3},\infty\right)$. Ker pa mora veljati $x \geq \frac{1}{2}$, sledi, da je množica rešitev prvotne neenačbe enaka $\left(\frac{4}{3},\infty\right)$.

4 Odvod

Odvod. *Naj bo funkcija f definirana v okolici točke x_0. Odvod funkcije f v točki x_0 označimo z $f'(x_0)$ in je definiran s predpisom*

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Vrednost odvoda funkcije f v točki x_0 geometrijsko ustreza naklonskemu koeficientu tangentne premice na graf funkcije f v točki x_0.
Pogosto odvod f' označimo tudi z zapisom $\frac{df}{dx}$.

Lastnosti odvoda. *Veljajo naslednje lastnosti:*

1. $(Cf(x))' = Cf'(x)$ $(C \in \mathbb{R})$
2. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
3. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
4. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
5. $(g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x)$

Tabela odvodov.

$f(x)$	$f'(x)$
x^p	px^{p-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
a^x	$a^x \ln a$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Naloge

Naloga 4.1. Izračunaj odvod funkcije $f(x) = 3x^4 + 2x - 5$ in izračunaj $f'(1)$.

Rešitev. Upoštevamo lastnosti odvoda in dobimo

$$f'(x) = (3x^4)' + (2x)' - (5)' = 12x^3 + 2\,,$$

iz česar sledi $f'(1) = 14$.

Naloga 4.2. Izračunaj odvod funkcije $f(x) = (x - x^2)x^3$.

Rešitev. Upoštevamo lastnosti odvoda in dobimo

$$f'(x) = (x-x^2)'x^3+(x-x^2)(x^3)' = (1-2x)x^3+(x-x^2)3x^2 = x^3-2x^4+3x^3-3x^4 =$$
$$= 4x^3 - 5x^4 = x^3(4 - 5x)\,.$$

Naloga 4.3. Izračunaj odvod funkcije $f(x) = \sqrt[5]{x^3} + \ln(x^2)$.

Rešitev. Upoštevamo lastnosti odvoda in dobimo

$$f'(x) = (\sqrt[5]{x^3})' + (\ln(x^2))' = (x^{\frac{3}{5}})' + (\ln(x^2))' =$$
$$= \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} + \frac{1}{x^2}2x = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} + \frac{2}{x}\,.$$

Naloga 4.4. Izračunaj odvod funkcije $f(x) = 2^x \sin x$.

Rešitev. Upoštevamo lastnosti odvoda in dobimo

$$f'(x) = (2^x)' \sin x + 2^x(\sin x)' = 2^x \ln 2 \sin x + 2^x \cos x =$$
$$= 2^x(\ln 2 \sin x + \cos x)\,.$$

Naloga 4.5. Izračunaj odvod funkcije $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$.

Rešitev. Upoštevamo lastnosti odvoda in dobimo

$$f'(x) = \left(\frac{e^x}{x-1}\right)' = \frac{(e^x)'(x-1) - e^x(x-1)'}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{e^x(x-1) - e^x}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}\,.$$

NALOGA 4.6. Izračunaj odvod funkcije $f(x) = \sin(\cos x)$.

REŠITEV. Upoštevamo lastnosti odvoda in dobimo

$$f'(x) = \cos(\cos x)(\cos x)' = -\cos(\cos x)\sin x\,.$$

NALOGA 4.7. Izračunaj odvod funkcije $f(x) = \tan\left(\frac{x}{x-1}\right)$.

REŠITEV. Upoštevamo lastnosti odvoda in dobimo

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2}\left(\frac{x}{x-1}\right)' =$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2}\frac{(x-1)-x}{(x-1)^2} = -\frac{1}{1+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2}\frac{1}{(x-1)^2}\,.$$

NALOGA 4.8. Dana naj bo funkcija $f(x) = \ln(ax+3)$. Določi število a tako, da bo veljalo $f'(1) = 2$.

REŠITEV. Velja

$$f'(x) = \frac{a}{ax+3}\,.$$

Pogoj $f'(1) = 2$ nam da enačbo

$$\frac{a}{a+3} = 2 \Longrightarrow a = -6\,.$$

NALOGA 4.9. Dana naj bo funkcija $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 3$. Določi stacionarne točke funkcije f in intervale naraščanja in padanja funkcije f.

REŠITEV. Velja

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)\,.$$

Stacionarne točke so vrednosti pri katerih je $f'(x) = 0$. Ker je $f'(x) = 6(x-1)(x-2)$ sta stacionarni točki

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = 2\,.$$

Funkcija f pada povsod kjer je $f'(x) < 0$ in narašča povsod kjer je $f'(x) > 0$. Ker je $f'(x) = 6(x-1)(x-2)$, funkcija f pada na intervalu $(1,2)$ in narašča na uniji $(-\infty,1)\cup(2,\infty)$.

NALOGA 4.10. Dana naj bo funkcija $f(x) = \ln\frac{1}{\cos x}$. Določi vse $x \in \mathbb{R}$, kjer je $f'(x) = 1$.

Rešitev. Velja

$$f'(x) = \tan(x)\,.$$

Velja $f'(x) = 1$ kjer je $\tan x = 1$. To pa se zgodi , ko je

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

5 Vektorji

✍ ***Vektorji v*** $\mathbb{R}^3$**.** *Vektor* $\vec{a}$ *je, geometrijsko gledano, usmerjena daljica v prostoru. Gledano algebraično, pa ga podamo kot element prostora* $\mathbb{R}^3$*, na način*

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}.$$

Vektorje lahko seštevamo:

- *Vsoto* $\vec{a}+\vec{b}$ *vektorjev* $\vec{a}$, $\vec{b}$*, gledano geometrijsko, določimo s pomočjo t.i.* ***paralelogramskega pravila****.*
- *Vsoto* $\vec{a}+\vec{b}$ *vektorjev* $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$*, gledano algebraično, pa izračunamo kot*
$$\vec{a}+\vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{bmatrix}.$$

Vektorje lahko množimo s skalarji:

- *Produkt* $\alpha\vec{a}$ *vektorja* $\vec{a}$ *s skalarjem* $\alpha \in \mathbb{R}$*, gledano geometrijsko, ustreza raztegu vektorja* $\vec{a}$ *za faktor* α*.*
- *Produkt* $\alpha\vec{a}$ *vektorja* $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ *s skalarjem* $\alpha \in \mathbb{R}$*, gledano algebraično, pa izračunamo kot*
$$\alpha\vec{a} = \alpha \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \alpha a_3 \end{bmatrix}.$$

Dolžino vektorja $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ *označimo z* $||\vec{a}||$ *in jo izračunamo s pomočjo* *formule*

$$||\vec{a}|| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,.$$

✍ ***Linearna kombinacija.*** *Naj bodo* $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$ *vektorji in* $\alpha_1, ..., \alpha_n$ *realna števila. Vektorju*

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \cdots + \alpha_n a_n$$

pravimo ***linearna kombinacija*** *vektorjev* $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$.

Vektorji $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$ *so linearno neodvisni, če je*

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$$

samo tedaj, ko so vsi $\alpha_i = 0$.

✍ ***Skalarni produkt.*** *Skalarni produkt* $\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle$ *vektorjev* $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ *je definiran z izrazom*

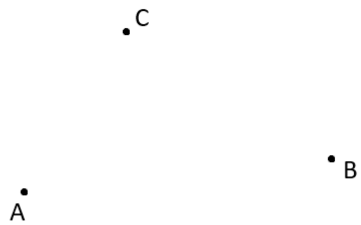
$$\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = ||\vec{a}||\,||\vec{b}||\cos\varphi\,,$$

kjer je φ *kot med vektorjema* $\vec{a}$ *in* $\vec{b}$.
Velja

$$||\vec{a}|| = \sqrt{\langle\vec{a}, \vec{a}\rangle}\,.$$

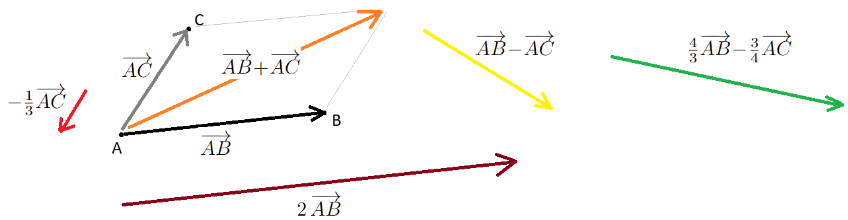
Naloge

Naloga 5.1. V ravnini naj bodo dane točke A, B in C, kot je prikazano na spodnji sliki:



Skiciraj vektorje $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $2\,\overrightarrow{AB}$, $-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ in $\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

Rešitev. Dobimo



Naloga 5.2. V ravnini naj bodo dane točke $A(2,1)$, $B(5,2)$ in $C(-1,6)$.

1. Določi vektorje $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $3\,\overrightarrow{AB}$, $-\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$, $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{4}{5}\overrightarrow{AC}$ in jih skiciraj v ravnini.
2. Izračunaj dolžine vektorjev $\overrightarrow{AB}$ in $3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$.

Rešitev. 1. Komponente vektorja $\overrightarrow{AB}$ dobimo tako, da od koordinat točke B odštejemo koordinate točke A. Dobimo

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{3}{5}\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} \frac{9}{5} \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{4}{5}\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} \frac{22}{5} \\ -\frac{10}{3} \end{bmatrix}.$$

2. Dolžino vektorja $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ izračunamo po formuli $||\vec{a}|| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. Dobimo

$$||\overrightarrow{AB}|| = \left|\left| \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right|\right| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}.$$

Velja $3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = (3, 13)$, kar nam da

$$||3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}|| = \sqrt{3^2 + 13^2} = \sqrt{178}.$$

Naloga 5.3. V prostoru naj bodo dane točke $A(-2, -4, 3)$, $B(1, 5, 6)$ in $C(7, -2, 1)$. Izračunaj dolžino vektorja $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Rešitev. Velja

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

in

$$\overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Velja torej $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Od tod dobimo

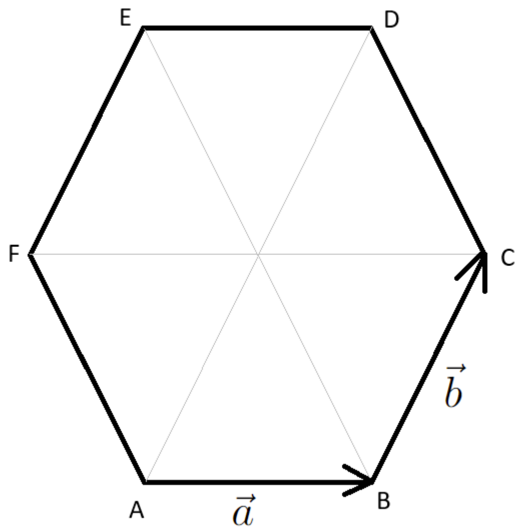
$$||\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Naloga 5.4. Dan naj bo pravilni šestkotnik $ABCDEF$, kjer označimo

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} \qquad \vec{b} = \overrightarrow{BC}.$$

Izrazi vektorje $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BF}$ in $\overrightarrow{DF}$ kot linearne kombinacije vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

Rešitev. Najprej narišemo skico šestkotnika in označimo vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$.



Iz skice in načina seštevanja vektorjev razberemo:

$$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\overrightarrow{AD} = 2\vec{b}$$

$$\overrightarrow{BE} = \vec{b} + \overrightarrow{CD} - \vec{a} = \vec{b} + (-\vec{a} + \vec{b}) - \vec{a} = 2\vec{b} - 2\vec{a}$$

$$\overrightarrow{AE} = \vec{a} + \overrightarrow{BE} = 2\vec{b} - \vec{a}$$

$$\overrightarrow{BF} = -\vec{a} + \overrightarrow{AF} = -\vec{a} + (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{b} - 2\vec{a}$$

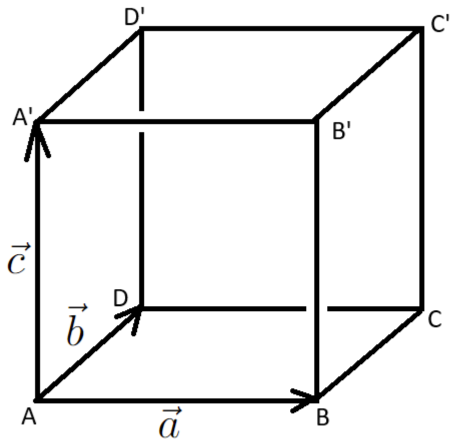
$$\overrightarrow{DF} = -\overrightarrow{FD} = -\overrightarrow{AC} = -(\vec{a} + \vec{b}) = -\vec{a} - \vec{b}\,.$$

Naloga 5.5. Dana naj bo kocka $ABCDA'B'C'D'$, kjer označimo

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} \qquad \vec{b} = \overrightarrow{AD} \qquad \vec{c} = \overrightarrow{AA'}\,.$$

Naj bo točka M središče ploskve $A'B'C'D'$ in N središče ploskve $BCB'C'$. Izrazi vektorje $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{CN}$ in $\overrightarrow{CA}$ kot linearne kombinacije vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$.

Rešitev. Najprej narišemo skico kocke in označimo vektorje $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$.



Iz skice razberemo

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$$

$$\overrightarrow{AN} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{CN} = -\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

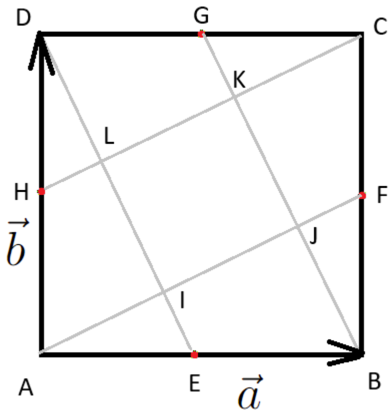
$$\overrightarrow{CA} = -\vec{a} - \vec{b}\,.$$

NALOGA 5.6. Dan naj bo kvadrat $ABCD$, kjer označimo z E razpolovišče daljice AB, z F razpolovišče daljice BC, z G razpolovišče daljice CD in z H razpolovišče daljice AD. Nadalje naj bo točka I presek daljic AF in ED, J naj bo presek AF in BG, K naj bo presek BG in CH ter L naj bo presek CH in DE. Označimo še

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} \qquad \vec{b} = \overrightarrow{AD}\,.$$

Izrazi vektorje $\overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{IJ}$ in $\overrightarrow{IL}$ kot linearne kombinacije vektorjev $\vec{a}$, in $\vec{b}$.

REŠITEV. Najprej narišemo skico kvadrata, označimo vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ ter označimo razpolovišča in presečišča daljic.



Najprej izrazimo vektor $\overrightarrow{AI}$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Točka I je presek daljic AF in DE, zato lahko pišemo

$$\overrightarrow{AI} = \alpha\overrightarrow{AF} = \alpha(\vec{a} + \tfrac{1}{2}\vec{b})\,.$$

S tem zapisom smo povedali, da točka I leži vzdolž daljice AF. Zapišimo še pogoj, da točka I leži vzdolž daljice DE. Dobimo

$$\overrightarrow{AI} = \vec{b} + \beta\overrightarrow{DE} = \vec{b} + \beta(-\vec{b} + \tfrac{1}{2}\vec{a})\,.$$

Oba zapisa za $\overrightarrow{AI}$ izenačimo

$$\alpha(\vec{a} + \tfrac{1}{2}\vec{b}) = \vec{b} + \beta(-\vec{b} + \tfrac{1}{2}\vec{a})\,.$$

Sedaj vse izraze postavimo na levo stran enačbe in izpostavimo $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Dobimo

$$(\alpha - \tfrac{\beta}{2})\vec{a} + (\tfrac{\alpha}{2} + \beta - 1)\vec{b} = 0$$

Ker sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna (saj nista vzporedna) mora veljati

$$\alpha - \tfrac{\beta}{2} = 0 \text{ in } \tfrac{\alpha}{2} + \beta - 1 = 0\,.$$

Rešitev tega sistema enačb je

$$\alpha = \frac{2}{5} \qquad \beta = \frac{4}{5}\,.$$

Dobimo torej

$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}\,.$$

Izrazimo še vektor $\overrightarrow{AJ}$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Na podoben način kot prej lahko pišemo

$$\overrightarrow{AJ} = \alpha\overrightarrow{AF} = \alpha(\vec{a} + \tfrac{1}{2}\vec{b})\,.$$

in

$$\overrightarrow{AJ} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} + \beta(-\vec{b} + \tfrac{1}{2}\vec{a})\,.$$

Izraza izenačimo in dobimo

$$(\alpha - \tfrac{1}{2} - \tfrac{\beta}{2})\vec{a} + (\tfrac{\alpha}{2} + \beta - 1)\vec{b} = 0$$

Sedaj dobimo kot rezultat $\alpha = \frac{4}{5}$ in $\beta = \frac{3}{5}$ in

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{4}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}\,.$$

Velja pa

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AI} = \frac{4}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} - \frac{2}{5}\vec{a} - \frac{1}{5}\vec{b} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}\,.$$

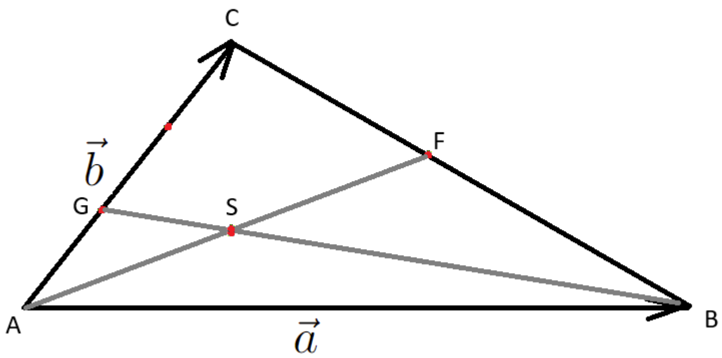
Podobno obravnavamo tudi vektor $\overrightarrow{IL}$.

NALOGA 5.7. Dan naj bo trikotnik ABC, kjer naj bo F razpolovišče daljice BC, točka G pa naj deli daljico AC v razmerju $|AG| : |GC| = 1 : 2$. Naj bo točka S presek daljic AF in BG. Označimo še

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} \qquad \vec{b} = \overrightarrow{AC}\,.$$

Izrazi vektor $\overrightarrow{AS}$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a}$, in $\vec{b}$.

REŠITEV. Najprej narišemo skico trikotnika, označimo vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ ter označimo točki F, G in presečišča daljic.



Imamo

$$\overrightarrow{AS} = \alpha\overrightarrow{AF} = \alpha(\vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}))\,.$$

Po drugi strani pa lahko izrazimo

$$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{3}\vec{b} + \beta\overrightarrow{GB} = \frac{1}{3}\vec{b} + \beta(-\frac{1}{3}\vec{b} + \vec{a})\,.$$

Izraza za $\overrightarrow{AS}$ izenačimo

$$\alpha(\vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b})) = \frac{1}{3}\vec{b} + \beta(-\frac{1}{3}\vec{b} + \vec{a})\,.$$

Vse izraze prestavimo na levo stran enakosti in izpostavimo $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Dobimo

$$(\tfrac{\alpha}{2} - \beta)\vec{a} + (\alpha + \tfrac{\beta}{3} - \tfrac{1}{3})\vec{b} = 0\,.$$

Ker sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna (saj nista vzporedna) mora veljati

$$\tfrac{\alpha}{2} - \beta = 0 \text{ in } \alpha + \tfrac{\beta}{3} - \tfrac{1}{3} = 0\,.$$

Rešitev tega sistema enačb znaša

$$\alpha = \frac{2}{7} \qquad \beta = \frac{1}{7}\,.$$

Dobimo rezultat

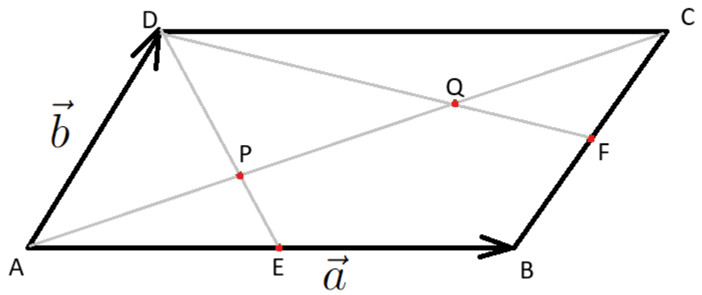
$$\overrightarrow{AS} = \frac{2}{7}(\vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b})) = \frac{1}{7}\vec{a} + \frac{1}{7}\vec{b}.$$

NALOGA 5.8. Dan naj bo paralelogram $ABCD$, kjer naj bo E razpolovišče daljice AB, točka F pa naj bo razpolovišče daljico BC. Naj bo točka P presek daljic AC in DE ter Q naj bo presek AC in DF. Označimo še

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} \qquad \vec{b} = \overrightarrow{AD}\,.$$

Izrazi vektor $\overrightarrow{PQ}$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Preveri, da točki P in Q razdelita daljico AC na tri enake dele.

REŠITEV. Imamo sledečo skico



Pišemo

$$\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AC} = \alpha(\vec{a} + \vec{b})$$

in

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\vec{a} + \beta\overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}\vec{a} + \beta(-\tfrac{1}{2}\vec{a} + \vec{b})\,.$$

Izraza izenačimo

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \beta(-\tfrac{1}{2}\vec{a} + \vec{b})\,,$$

kar preuredimo v

$$(\alpha + \tfrac{\beta}{2} - \tfrac{1}{2})\vec{a} + (\alpha - \beta)\vec{b} = 0\,,$$

kar nam da $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$ in rezultat

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b})\,.$$

Na podoben način izračunamo, da je

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b})\,.$$

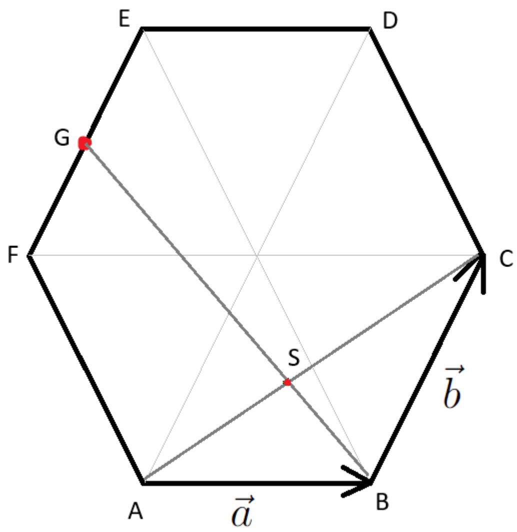
Torej je $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b})$. Jasno pa je tudi, da točki P in Q razdelita daljico AC na tri enake dele.

Naloga 5.9. Dan naj bo pravilni 6-kotnik $ABCDEF$, kjer je G razpolovišče daljice EF. Točka S naj bo presek daljic AC in BG. Označimo še

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} \qquad \vec{b} = \overrightarrow{AD}\,.$$

Izrazi vektor $\overrightarrow{AS}$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

Rešitev. Imamo sledečo skico



Pišemo

$$\overrightarrow{AS} = \alpha\overrightarrow{AC} = \alpha(\vec{a}+\vec{b})$$

in

$$\overrightarrow{AS} = \vec{a} + \beta\overrightarrow{BG} = \vec{a} + \beta(-\vec{a} + (\vec{b}-\vec{a}) + \tfrac{1}{2}\vec{b}) = \vec{a} + \beta(-2\vec{a} + \tfrac{3}{2}\vec{b})\,.$$

Izraza izenačimo

$$\alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a} + \beta(-2\vec{a} + \tfrac{3}{2}\vec{b})\,,$$

kar preuredimo v

$$(\alpha + 2\beta - 1)\vec{a} + (\alpha - \tfrac{3}{2}\beta)\vec{b} = 0\,,$$

kar nam da $\alpha = \frac{3}{7}$ in $\beta = \frac{2}{7}$ in rezultat

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{7}(\vec{a}+\vec{b})\,.$$

Naloga 5.10. Izračunaj skalarni produkt vektorjev $2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$ in $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, če je $||\vec{a}|| = ||\vec{b}|| = ||\vec{c}|| = 3$ in je kot med $\vec{a}$ in $\vec{b}$ enak $60°$, kot med $\vec{b}$ in $\vec{c}$ enak $60°$ in kot med $\vec{a}$ in $\vec{c}$ enak $120°$.

Rešitev. Spomnimo se formule za skalarni produkt $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = ||\vec{a}||\,||\vec{b}||\cos\varphi$. Upoštevamo lastnosti komutativnosti in distributivnosti skalarnega produkta. Izračunajmo

$$\langle(2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}),(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\rangle = 2\langle\vec{a},\vec{a}\rangle + 5\langle\vec{a},\vec{b}\rangle + \langle\vec{a},\vec{c}\rangle + 3\langle\vec{b},\vec{b}\rangle + 2\langle\vec{b},\vec{c}\rangle - \langle\vec{c},\vec{c}\rangle =$$

$$= 2\cdot3\cdot3 + 5\cdot3\cdot3\cdot\frac{1}{2} - 3\cdot3\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot3\cdot3 + 2\cdot3\cdot3\cdot\frac{1}{2} - 3\cdot3 = 18 + \frac{45}{2} - \frac{9}{2} + 27 + 9 - 9 = 63\,.$$

Naloga 5.11. V ravnini je podan trikotnik ABC z oglišči $A(0,0)$, $B(6,3)$ in $C(-2,4)$.

- Izračunaj vektorje $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ in $\overrightarrow{AC}$.
- Ali je trikotnik ABC pravokoten?

Rešitev. Komponente vektorja $\overrightarrow{AB}$ dobimo tako, da od koordinat točke B odštejemo koordinate točke A. Imamo

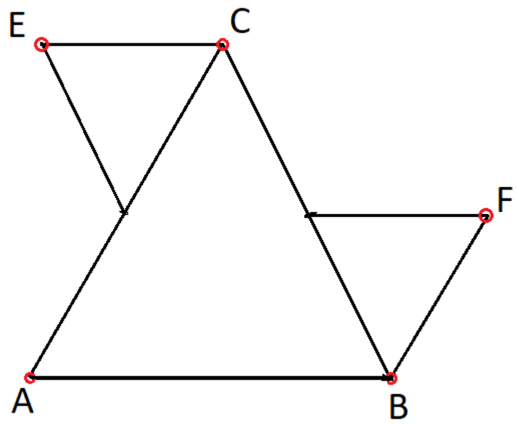
$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} -8 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo skalarni produkt

$$\left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle = 6 \cdot (-2) + 3 \cdot 4 = 0,$$

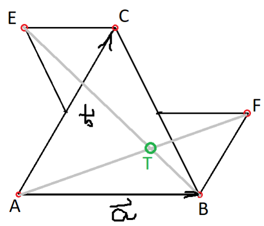
torej je trikotnik ABC pravokoten s pravim kotom pri oglišču A.

Naloga 5.12. Naj bo ABC enakostranični trikotnik, na katerega prilepimo dva (2-krat manjša) enakostranična trikotnika, kot je prikazano na spodnji sliki. Označimo $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.



- Izrazi vektorje $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{BF}$ in $\overrightarrow{EF}$ kot linearne kombinacije vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$.
- Naj bo točka T presečišče daljic AF in BE. Izrazi vektor $\overrightarrow{AT}$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

Rešitev. Imamo sledečo skico:



Velja

$$\overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}\vec{a} \qquad \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\vec{b} \qquad \overrightarrow{EF} = \frac{3}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}.$$

Imamo

$$\overrightarrow{AT} = \alpha\overrightarrow{AF} = \alpha(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b})$$

in

$$\overrightarrow{AT} = \vec{a} + \beta\overrightarrow{BE} = \vec{a} + \beta(\vec{b} - \tfrac{3}{2}\vec{a})\,.$$

Izenačimo in dobimo

$$\left(\alpha + \frac{3}{2}\beta - 1\right)\vec{a} + \left(\frac{1}{2}\alpha - \beta\right)\vec{b} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{4}{7} \quad \beta = \frac{2}{7}\,,$$

torej

$$\overrightarrow{ET} = \frac{4}{7}\vec{a} + \frac{2}{7}\vec{b}\,.$$

Naloga 5.13. Dan naj bo tetraeder $ABCD$. Naj bo

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} \qquad \vec{b} = \overrightarrow{AC} \qquad \vec{c} = \overrightarrow{AD}\,.$$

Naj bo E razpolovišče daljice AB in F razpolovišče daljice CD.

- Izrazi vektor $\overrightarrow{EF}$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$.
- Naj bo G razpolovišče daljice BC in H razpolovišče daljice AD. Označimo z X presečišče daljic EF in GH. Izrazi vektor $\overrightarrow{AX}$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$.

Rešitev. Velja

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\vec{a} + (\vec{b} - \vec{a}) + \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b}) = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}.$$

in

$$\overrightarrow{GH} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}.$$

Nadalje imamo

$$\overrightarrow{AX} = \frac{1}{2}\vec{a} + \alpha\overrightarrow{EF} = \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) + \beta\overrightarrow{GH}\,,$$

od koder dobimo

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2}\,,$$

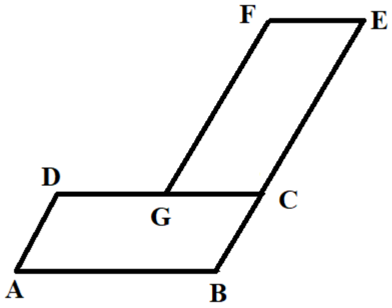
kar nam da

$$\overrightarrow{AX} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\,.$$

Naloga 5.14. Dan naj bo paralelogram $ABCD$, kjer označimo

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} \qquad \vec{b} = \overrightarrow{AD}$$

in velja $|\vec{a}| = 3$, $\vec{b} = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$. K paralelogramu prilepimo še en takšen paralelogram na način, kot je prikazano na spodnji sliki:



- Izrazi vektor $\overrightarrow{GE}$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$.
- Izračunaj dolžino vektorja $\overrightarrow{AF}$.
- Označimo z H točko, kjer daljica DE seka daljico GF. Izrazi vektor $\overrightarrow{GH}$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

Rešitev. Velja

$$\overrightarrow{GE} = 3\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a}\,.$$

Velja

$$\overrightarrow{AF} = \vec{b} + \frac{2}{3}\vec{a} + 3\vec{b} = \frac{2}{3}\vec{a} + 4\vec{b}\,.$$

Dobimo

$$|\overrightarrow{AF}| = \sqrt{(\frac{2}{3}\vec{a} + 4\vec{b}) \cdot (\frac{2}{3}\vec{a} + 4\vec{b})} = \sqrt{\frac{4}{9}9 + 16 + 2\frac{2}{3}4\,3\frac{1}{2}} = \sqrt{28}\,.$$

Velja

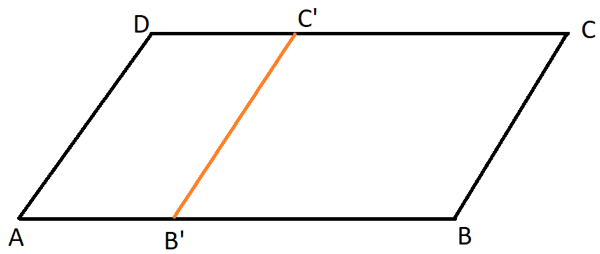
$$\overrightarrow{GH} = s\,3\vec{b} \qquad \overrightarrow{GH} = -\frac{2}{3}\vec{a} + t(\vec{a} + 3\vec{b})$$

od koder dobimo $t = s = \frac{2}{3}$, torej

$$\overrightarrow{GH} = 2\vec{b}\,.$$

Naloga 5.15. Naj bo $ABCD$ paralelogram (glej sliko). Označimo z $\vec{a} = \vec{AB}$, $\vec{b} = \vec{AD}$, kjer je $||\vec{a}|| = 2$, $||\vec{b}|| = 1$ in kot med vektorjem $\vec{a}$ in $\vec{b}$ naj bo $\frac{\pi}{3}$. Naj bosta točki B' in C' takšni, da je paralelogram $AB'C'D$ ***podoben*** paralelogramu $ABCD$.

- Izrazi vektor $\vec{AB'}$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$.
- Naj bo F presečišče daljic $B'C'$ in BD. Izrazi vektor $\vec{AF}$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

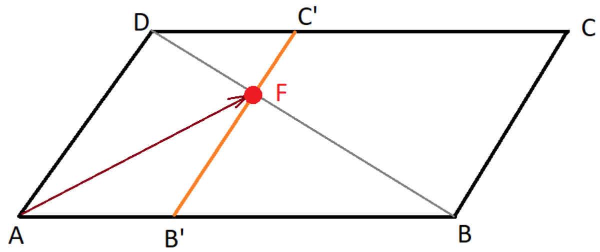


REŠITEV. Iz podobnosti paralelogramov sledi, da je

$$\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} = \frac{|\vec{b}|}{|A\vec{B}'|} \Rightarrow |A\vec{B}'| = \frac{1}{2},$$

kar pomeni, da je

$$A\vec{B}' = \frac{1}{2}\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \Rightarrow A\vec{B}' = \frac{1}{4}\vec{a}.$$



Imamo

$$A\vec{F} = \frac{1}{4}\vec{a} + t\vec{b} \qquad A\vec{F} = \vec{b} + s(\vec{a} - \vec{b})$$

od koder dobimo

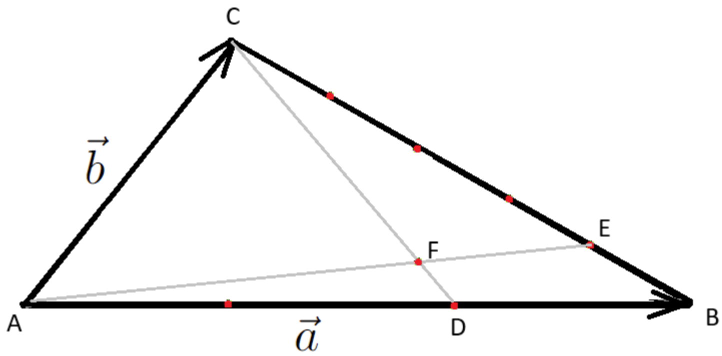
$$\vec{a}(\tfrac{1}{4} - s) + \vec{b}(t - 1 + s) = 0 \Rightarrow s = \frac{1}{4} \quad t = \frac{3}{4}$$

in

$$A\vec{F} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}.$$

NALOGA 5.16. Dan naj bo trikotnik ABC in točka D naj leži na stranici AB tako, da je $|AD| : |DB| = 2 : 1$, točka E pa naj leži na stranici BC tako, da je $|BE| : |EC| = 1 : 4$. Točka F je presek daljic AE in DC. Izračunaj razmerje $|AF| : |FE|$.

REŠITEV. Najprej narišemo skico trikotnika, označimo vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ ter označimo točke D, E in F.



Zapišimo najprej vektor $\overrightarrow{AF}$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Imamo

$$\overrightarrow{AF} = \alpha\overrightarrow{AE} = \alpha(\vec{a} + \tfrac{1}{5}(-\vec{a} + \vec{b}))\,.$$

Po drugi strani pa lahko izrazimo

$$\overrightarrow{AF} = \vec{b} + \beta\overrightarrow{CD} = \vec{b} + \beta(-\vec{b} + \tfrac{2}{3}\vec{a})\,.$$

Izraza za $\overrightarrow{AF}$ izenačimo

$$\alpha(\vec{a} + \tfrac{1}{5}(-\vec{a} + \vec{b})) = \vec{b} + \beta(-\vec{b} + \tfrac{2}{3}\vec{a})\,.$$

Vse izraze prestavimo na levo stran enakosti in izpostavimo $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Dobimo

$$(\tfrac{4}{5}\alpha - \tfrac{2}{3}\beta)\vec{a} + (\tfrac{1}{5}\alpha + \beta - 1)\vec{b} = 0\,.$$

Ker sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna (saj nista vzporedna) mora veljati

$$\tfrac{4}{5}\alpha - \tfrac{2}{3}\beta = 0 \text{ in } \alpha + \beta - 1 = 0\,.$$

Rešitev tega sistema enačb znaša

$$\alpha = \frac{5}{7} \qquad \beta = \frac{6}{7}\,.$$

Dobimo rezultat

$$\overrightarrow{AF} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AE}\,.$$

Velja torej

$$|AF| : |FE| = 5 : 2\,.$$

Naloga 5.17. Dana sta vektorja

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\,.$$

1. Izračunaj

$$3\vec{a} - 5\vec{b}\,.$$

2. Izrazi vektor $\vec{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

REŠITEV. 1. Velja

$$3\vec{a} - 5\vec{b} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -13 \\ -9 \end{bmatrix} .$$

2. Želimo izračunati takšna $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, da bo veljalo $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, oziroma

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} .$$

Enakost mora veljati v vsaki vrstici, tako da dobimo 3 pogoje

$$\alpha + 2\beta = 0 \quad -\alpha + 2\beta = -4 \quad 2\alpha + 3\beta = 1 .$$

Iz prve enačbe izrazimo $\alpha = -2\beta$, kar vstavimo v drugo enačbo in dobimo $\beta = -1$ in nato še $\alpha = 2$. Za vrednosti $\alpha = 2$ in $\beta = -1$ je izpolnjena tudi tretja enačba, torej res velja $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$.

NALOGA 5.18. V prostoru $\mathbb{R}^3$ naj bo dan paralelogram z oglišči

$$A = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

- Preveri, da točke A, B, C in D res tvorijo paralelogram.
- Določi dolžino stranic paralelograma in kot med diagonalama.

REŠITEV. Označimo

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Velja

$$\overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{b}$$

in

$$\overrightarrow{DC} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{a} ,$$

torej dane točke res tvorijo paralelogram.

Izračunajmo sedaj dolžine stranic:

$$||\vec{a}|| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{6^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{38}$$

in

$$||\vec{b}|| = \sqrt{\vec{b}\cdot\vec{b}} = \sqrt{2^2+3^2+1^2} = \sqrt{14}\,.$$

Označimo z $\vec{e}$ in $\vec{f}$ diagonali paralelograma, kjer je

$$\vec{e} = \vec{a}+\vec{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

in

$$\vec{f} = \vec{a}-\vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Kot φ med diagonalama izračunamo preko formule za skalarni produkt, od koder dobimo

$$\cos\varphi = \frac{\langle \vec{e}, \vec{f}\rangle}{||\vec{e}||\,||\vec{f}||} \Longrightarrow \cos\varphi = \frac{24}{\sqrt{72}\sqrt{32}} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}\,.$$

Torej je kot med diagonalama $60°$.

Naloga 5.19. Dana naj bosta vektorja $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ in $\vec{b} = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \\ -x \end{bmatrix}$. Določi $x \in \mathbb{R}$ tako, da bosta $\vec{a}$ in $\vec{b}$:

1. enako dolga,
2. pravokotna,
3. vzporedna.

Rešitev.

1. Veljati mora $||\vec{a}|| = ||\vec{b}||$, kar se pretvori v enačbo
$$\sqrt{4x^2+4+9} = \sqrt{36+4+x^2}\,.$$
Obe strani enačbe kvadriramo in preuredimo, da dobimo enačbo $3x^2 = 27$, kar nam da $x^2 = 9$, oziroma $x = \pm 3$.
2. Veljati mora $\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle = 0$, kar nam da enačbo
$$-12x - 4 - 3x = 0 \Rightarrow -15x - 4 = 0 \Rightarrow x = -\frac{4}{15}\,.$$
3. Obstajati mora $\alpha \in \mathbb{R}$, za katerega je $\vec{b} = \alpha\vec{a}$. Dobimo pogoje
$$-6 = 2\alpha x \qquad -2 = 2\alpha \qquad -x = 3\alpha\,.$$
Iz druge enačbe sledi, da je $\alpha = -1$. Zadnja enačba nam sedaj pove, da je $x = 3$. Vrednosti $x = 3$ in $\alpha = -1$ zadoščata tudi prvi enačbi, tako da sta za $x = 3$ vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ vzporedna.

Naloga 5.20. V prostoru $\mathbb{R}^3$ naj bosta dani točki $A(-1,0,1)$ in $B(2,1,0)$.

1. Izračunaj komponente vektorja $\overrightarrow{AB}$ in izračunaj njegovo dolžino.
2. Poišči koordinate točke, ki predstavlja razpolovišče daljice AB.

Rešitev.

1. Velja $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ in $||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}$.
2. Razpolovišče S daljice AB je dano z

$$S = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Naloga 5.21. Ugotovi ali so vektorji $\vec{a} = \begin{bmatrix} -8 \\ 9 \\ -7 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ in $\vec{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ koplanarni.

Rešitev. Vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ so koplanarni, če so linearno odvisni. Povedano drugače, vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ so koplanarni, če lahko kakšnega od njih zapišemo kot linearno kombinacijo drugih dveh. Poskusimo ali lahko vektor $\vec{c}$ zapišemo kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Poiščimo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tako, da bo veljalo $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Dobimo

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -8 \\ 9 \\ -7 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dobimo pogoje

$$-8\alpha + 2\beta = -1 \quad 9\alpha - \beta = 3 \quad -7\alpha + \beta = -2\,.$$

Zadnji dve enačbi seštejemo in dobimo $\alpha = \frac{1}{2}$ in od tod še $\beta = \frac{3}{2}$. Vrednosti $\alpha = \frac{1}{2}$ in $\beta = \frac{3}{2}$ zadoščata tudi prvi enačbi, torej so vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ res koplanarni.

Literatura

[1] D. Kavka and M. Zemljič. *Matematika v srednji šoli: pregled temeljne učne snovi in nalog srednješolske matematike*. Priprava na zaključni izpit in maturo. Modrijan, 1998.

[2] Dušan Kavka and Martin Zemljič. *Matematika v srednji šoli: zbirka nalog: priprava na maturo, osnovna in višja raven*. Modrijan, 2007.