**№1** a) $f(x) = \log(1+\|Ax\|^2)$

$$df(x) = \frac{d(1+\|Ax\|^2)}{1+\|Ax\|^2} = \frac{d((Ax)^T \cdot Ax)}{1+\|Ax\|^2} = \frac{d(x^T \cdot A^T \cdot Ax)}{1+\|Ax\|^2} = \frac{d(<x, A^TAx>)}{1+\|Ax\|^2} =$$

$$= \frac{<(A^TA + (A^TA)^T)x, dx>}{1+\|Ax\|^2} = \frac{<(A^TA + A^TA)x, dx>}{1+\|Ax\|^2} = \frac{<2A^TAx, dx>}{1+\|Ax\|^2}$$

Градиент $\nabla f(x) = \frac{2A^TAx}{1+\|Ax\|^2}$

в) $f(x) = \frac{-1}{1+x^TAx}$

$$df(x) = \frac{1}{(1+x^TAx)^2} \cdot (1+x^TAx)' = \frac{(x^TAx)'}{(1+x^TAx)^2} = \frac{d<x, Ax>}{(1+x^TAx)^2} = \frac{<(A+A^T)x, dx>}{(1+x^TAx)^2}$$

Градиент $\nabla f(x) = \frac{(A+A^T)x}{(1+x^TAx)^2}$

**№2** $f(x) = \sin(x)\cos(2x)$, $x \in \left[-\frac{3\pi}{2} - a; \frac{3\pi}{2} + a\right]$, $a = \arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$

Пересчитаем область определения, подставив $a$ в виде числа.

Тогда $x \in \left[-\frac{3\pi}{2} - \arccos\sqrt{\frac{2}{3}}; \frac{3\pi}{2} + \arccos\sqrt{\frac{2}{3}}\right] \Rightarrow x \in [-5,33; 5,33]$

Метод градиентного спуска подразумевает, что остановка будет происходить в точках локального минимума.

Найдём экстремумы функции.

Сначала преобразуем функцию.

$f(x) = \sin(x) \cdot \cos(2x) = \sin(x) \cdot (\cos^2(x) - \sin^2(x)) = \sin(x)(1 - 2\sin^2(x))$

либо $f(x) = \sin(x) - 2\sin^3(x)$

$f'(x) = \cos(x) - 6\sin^2(x) \cdot \cos(x) = \cos(x) \cdot (1 - 6\sin^2(x))$

Найдем корни уравнения $f'(x) = 0$

$\cos(x) \cdot (1 - 6\sin^2(x)) = 0$

$\cos(x) = 0$ или $1 - 6\sin^2(x) = 0$

$x_1 = \frac{\pi}{2} \pm \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$\sin^2(x) = \frac{1}{6}$

$\sin(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{6}}$

$x_{2,3} = (-1)^k \arcsin\left(\pm\sqrt{\frac{1}{6}}\right) + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = (-1)^k \arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{6}}\right) + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}$

$x_3 = (-1)^k \arcsin\left(-\sqrt{\frac{1}{6}}\right) + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}$

$\arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{6}}\right) \approx 0,42$

Посчитаем все экстремумы, попадающие в область определения.

$x_1 = \left\{-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\} = \{-4,71; -1,57; 1,57; 4,71\}$

$x_2 = \{-0,42 - 3,14; 0,42; -0,42 + 3,14\} = \{-3,56; 0,42; 2,72\}$

$x_3 = \{0,42 - 3,14; -0,42; 0,42 + 3,14\} = \{-2,72; -0,42; 3,56\}$

Собираем все точки, включая крайние точки области определения

$x = \{-5{,}33; -4{,}71; -3{,}56; -2{,}72; -1{,}57; -0{,}42; 0{,}42; 1{,}57; 2{,}72; 3{,}56; 4{,}71; 5{,}33\}$

Так как кратных точек нет, достаточно определить всего один интервал возрастания / убывания функции. Для простоты можно сравнить значение функции в двух соседних точках, тогда максимальное из них будет максимумом, а минимальное — минимумом функции.

$y\left(x = \frac{\pi}{2} = 1{,}57\right) = \sin\frac{\pi}{2}\left(1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = -1$

$y\left(x = 0{,}42 = \arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{6}}\right)\right) = \sin\left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{6}}\right)\right) \cdot \left(1 - 2 \cdot \sin^2\left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{6}}\right)\right)\right) = \sqrt{\frac{1}{6}} \cdot (1 - 2/6) \approx 0{,}27$

Первая точка — минимум, вторая — максимум

Отобразим координатную прямую и отметим минимумы и максимумы

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
\text{край} \searrow & \text{min} \nearrow & \text{max} \searrow & \text{min} \nearrow & \text{max} \searrow & \text{min} \nearrow & \text{max} \searrow & \text{min} \nearrow & \text{max} \searrow & \text{min} \nearrow & \text{max} \searrow & \text{край} \\
-5{,}33 & -4{,}71 & -3{,}56 & -2{,}72 & -1{,}57 & -0{,}42 & 0{,}42 & 1{,}57 & 2{,}72 & 3{,}56 & 4{,}71 & 5{,}33 \quad x
\end{array}
$$

Вычислим долю спусков к каждому минимуму. Так как точки старта алгоритма выбираются равномерно из интервала, вероятность начать с каждой из точек интервала одинаковая. Тогда доля будет пропорциональна длине отрезка между соседними минимумами.

Посчитаем длины отрезков между всеми критическими точками.

$\{0{,}62; 1{,}15; 0{,}84; 1{,}15; 1{,}15; 0{,}84; 1{,}15; 1{,}15; 0{,}84; 1{,}15; 0{,}62\}$,

длина отрезка от края до края $= 10{,}66$.

Теперь посчитаем долю для каждого минимума.

$x_{min} = -4{,}71$, доля $= \frac{1{,}15 + 0{,}62}{10{,}66} \approx 0{,}166$

$x_{min} = -2{,}72$, доля $= \frac{0{,}84 + 1{,}15}{10{,}66} \approx 0{,}187$

$x_{min} = -0{,}42$, доля $= \frac{1{,}15 + 0{,}84}{10{,}66} \approx 0{,}187$

$x_{min} = 1{,}57$, доля $= \frac{1{,}15 + 1{,}15}{10{,}66} \approx 0{,}216$

$x_{min} = 3{,}56$, доля $= \frac{0{,}84 + 1{,}15}{10{,}66} \approx 0{,}187$

$x_{min\,(край)} = 5{,}33$, доля $= \frac{0{,}62}{10{,}66} \approx 0{,}058$

↳ хоть и не точка минимума для функции, но на данном отрезке функция убывает, а значит локальным минимумом будет краевая точка.

<u>Примечание</u>. Так как шаг (начальный) достаточно мал, и убывает, то ситуация „перескочить" из назначенного нами отрезка между максимумами невозможна.

**№3** а) $f(x) = \max(0, 1-ax)$ , $a$ - const

Определим, когда все значения будут зануляться.

$1 - ax < 0$

$1 < ax$

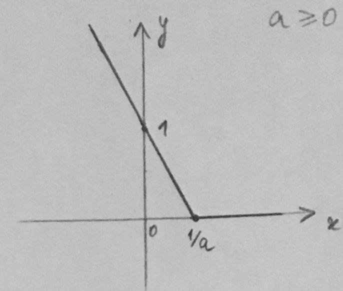
$x > \frac{1}{a}$ => если $x > \frac{1}{a}$, то $\partial f(x) = \{0\}$

Для $x < \frac{1}{a}$ , $\partial f(x) = \{-a\}$

Считаем субдифференциал функции в точке $x = \frac{1}{a}$

$f(x) \geq \max(0,0) + \langle z, x - \frac{1}{a} \rangle$

$\max(0, 1-ax) \geq z(x - \frac{1}{a})$ => $z \in [-a, 0]$ для $a \geq 0$ и $z \in [0, -a]$ для $a < 0$




Тогда субдифференциалы во всех точках для $f(x)$:

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{0\} & , x > \frac{1}{a} \\ [-a, 0] & , x = \frac{1}{a}, \ a \geq 0 \\ [0, -a] & , x = \frac{1}{a}, \ a < 0 \\ \{-a\} & , x < \frac{1}{a} \end{cases}$$