№1 $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu_X, 400)$

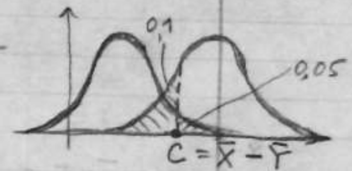
$Y_1, \dots, Y_n \sim N(\mu_Y, 225)$

$H_0: \mu_X - \mu_Y = \theta_0 = 0$

$H_1: \mu_X - \mu_Y = \theta_1 = 10$

Найдём n и C (критическое множество $\{\bar{X} - \bar{Y} > C\}$ при $\alpha = 0{,}05$ и $\beta \le 0{,}1$ и односторонней проверке.

Запишем α и β через вероятности

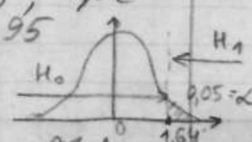


$\alpha = \mathbb{P}_{\theta_0}\{\bar{X} - \bar{Y} > C\} = 0{,}05$

$\beta = \mathbb{P}_{\theta_1}\{\bar{X} - \bar{Y} < C\} = 0{,}1$

Для $\alpha = 0{,}05$ критическая точка, разделяющая область, где мы отвергаем и не имеем достаточно оснований отвергнуть H_0, при доверительной вероятности $1 - 0{,}05 = 0{,}95$

$\Phi_{0,95} = 1{,}645$ (для $1-\beta = 0{,}9$: $\Phi_{0,1} = -1{,}282$)



По формуле критической статистики для выборок из нормального распределения с известными дисперсиями:

$$\begin{cases} Z_{\theta_0} = \dfrac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{n_X} + \dfrac{\sigma_Y^2}{n_Y}}} = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y} - 0}{\sqrt{\dfrac{400+225}{n}}} = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{25} \cdot \sqrt{n} = 1{,}645 \\[2ex] Z_{\theta_1} = \dfrac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{n_X} + \dfrac{\sigma_Y^2}{n_Y}}} = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y} - 10}{25} \cdot \sqrt{n} \le -1{,}282 \end{cases}$$

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y})\sqrt{n}}{25} - \frac{10\sqrt{n}}{25} \le -1{,}282$$

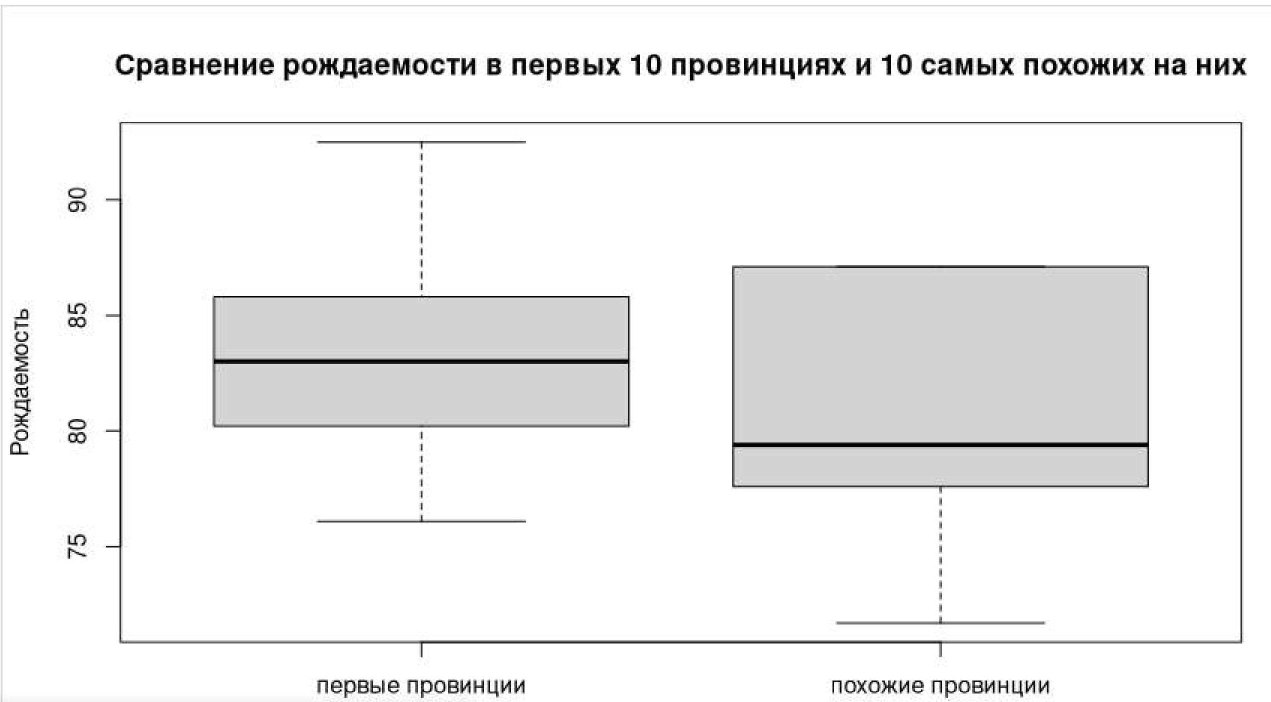
$2{,}5 \cdot (1{,}645 + 1{,}282) \le \sqrt{n} \Rightarrow n \geq 53{,}5$, т.е. $\boxed{\begin{array}{l} n = 54 \\ C = 5{,}6 \end{array}}$

$\bar{X} - \bar{Y} = 1{,}645 \cdot 25 / \sqrt{n} \Rightarrow \bar{X} - \bar{Y} = 5{,}60$, т.е.

```r
# task 2
# 1
initial_swiss = swiss
scaled_swiss = cbind(swiss[, 1], scale(swiss[, 2:6]))
base_pr = scaled_swiss[1:10, ]
other_pr = scaled_swiss[11:47, ]

similar_pr = rep(0, 10)
cur_pr = rep(0, 37)

for (i in 1:10){
  b = base_pr[i, 2:6]
  for (j in 1:37){
    cur_pr[j] = dist(rbind(b, other_pr[j, 2:6]), method = "euclidean")
  }
  similar_pr[i] = which.min(cur_pr)
}
similar_pr
# 7 25 25 33  7  1  1  1 25  1
# оказалось, что четыре провинции являются ближайшими к нескольким базовым провинциям
x = swiss[1:10, 1]
y = swiss[similar_pr + 10, 1]
boxplot(x, y,
        main="Сравнение рождаемости в первых 10 провинциях и 10 самых похожих на них",
        names=c("первые провинции", "похожие провинции"),
        ylab="Рождаемость")
```




```r
# заметим, что медиана первых провинций попадает в интервал (Q1, Q3) похожих выборок,
# но не наоборот. Возможно, группы различаются (нр вторoе распределение не похоже
# на нормальное).

# так как у нас две независимых выборки, применим критерий Манна-Уитни

wilcox.test(x, y, paired = T)
# V = 40, p-value = 0.2324
# alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
# таким образом, нет достаточных оснований отклонить гипотезу о том, что похожи
# показатели рождаемости для первых 10 провинций и 10 самых ближайших для них
# (по социально-экономическому развитию) провинций на уровне значимости 5%.
```

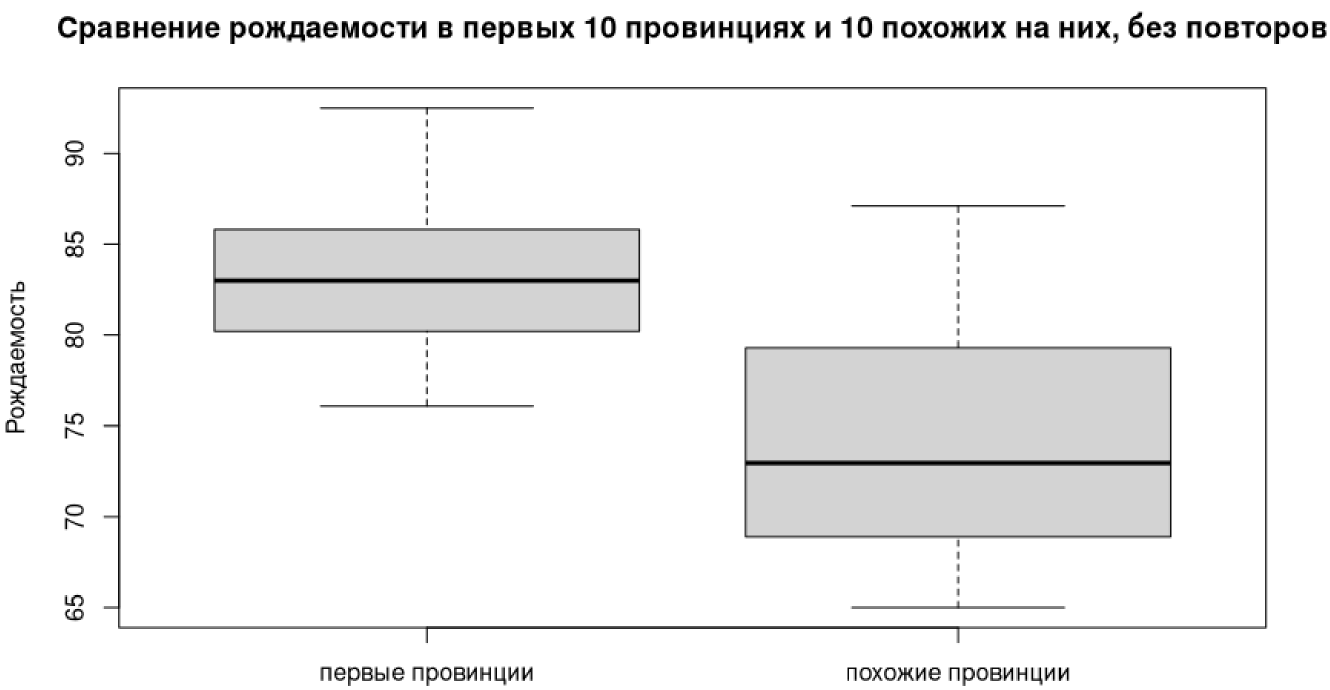
```r
# попробуем подобрать провинции так, чтобы все провинции были разными
cur_dist = matrix(data = 0, nrow = 10, ncol = 37)
cur_ind = matrix(data = 0, nrow = 10, ncol = 37)
```

```r
for (i in 1:10){
  b = base_pr[i, 2:6]
  for (j in 1:37){
    cur_dist[i, j] = dist(rbind(b, other_pr[j, 2:6]), method = "euclidean")
  }
  cur_ind[i, ] = sort(cur_dist[i, ], index.return=TRUE)$ix
  cur_dist[i, ] = sort(cur_dist[i, ], index.return=TRUE)$x
}

deltas = cbind(cur_dist[, 2] - cur_dist[, 1],
               cur_dist[, 3] - cur_dist[, 2],
               cur_dist[, 4] - cur_dist[, 3],
               cur_dist[, 5] - cur_dist[, 4])

# руками подбираем вектор индексов (закодить это не смогла, но идея такая, что
# смотрим на таблицы дистанций каждой провинции с каждой, и на такую же таблицу
# индексов, отсортированные по увеличению дистанции. Далее находим разности
# дистанций между первыми эн значений дистанций, чтобы оценить, насколько "дорого"
# обойдется для каждой из первых провинций взять не провинцию с минимальной дистанцией,
# а следующую, чтобы собрать неповторяющиеся провинции).
man_similar_pr = c(7, 28, 25, 33, 4, 16, 24, 1, 26, 20)
y = swiss[man_similar_pr + 10, 1]

boxplot(x, y,
        main="Сравнение рождаемости в первых 10 провинциях и 10 похожих на них, без повторов",
        names=c("первые провинции", "похожие провинции"),
        ylab="Рождаемость")
```




```r
# теперь обе медианы не попадают в интервал (Q1, Q3) для других выборок, а
# распределение показателей рождаемости стало ближе к нормальному

# так как у нас две независимых выборки, применим критерий Манна-Уитни
wilcox.test(x, y, paired = T)
# V = 55, p-value = 0.001953
# alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
# таким образом, если брать неповторяющиеся провинции, отклоняем нулевую гипотезу
# о том, что похожи показатели рождаемости для первых 10 провинций и 10 ближайших
# (по социально-экономическому развитию) провинций на уровне значимости 5% (и даже
# на уровне значимости меньше 1%).
```

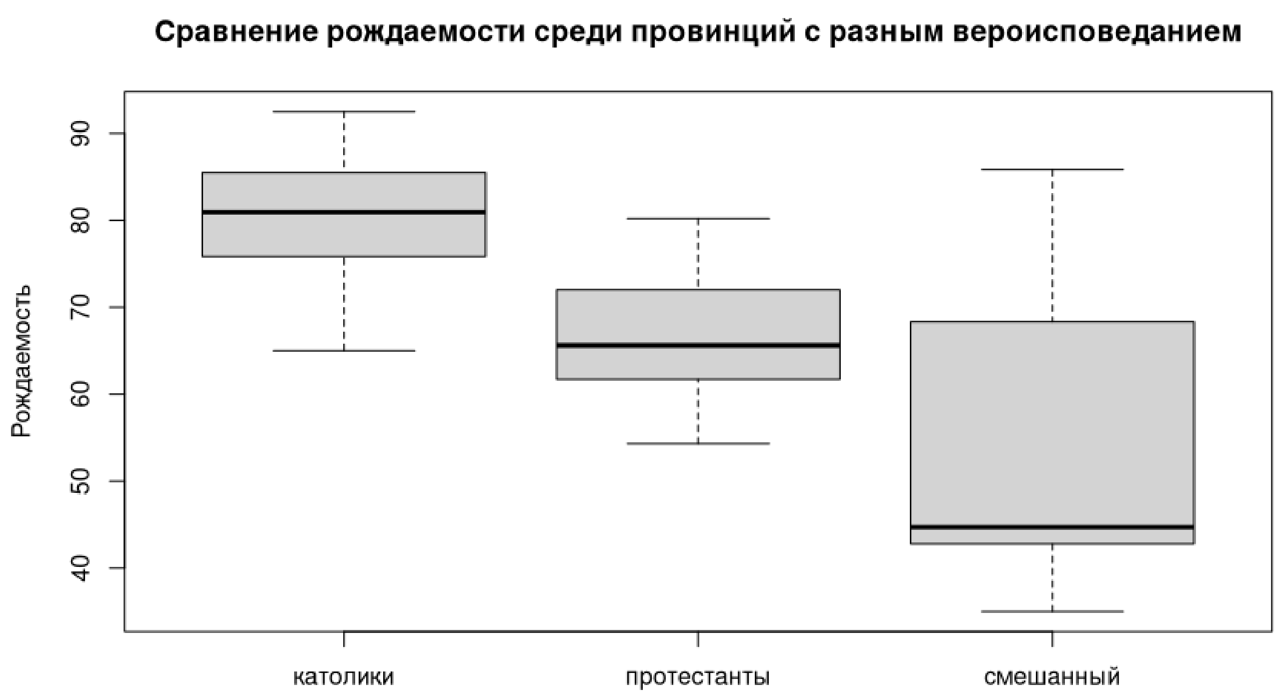
```r
# в принципе, разрешить брать повторяющиеся значения для парного сравнения - это нормально,
# и значит, что мы стараемся понять, образуют ли наши данные "хорошие" кластеры, такие, что
# если в n-мерном пространстве отдельной точкой обозначить каждую провинцию, за координаты
# принять значения стандартизованных признаков, а градиентом цвета отобразить целевой признак,
# то рядом окажутся точки примерно одного оттенка. Для того, чтобы взять не повторяющиеся
# провинции, мне понадобилось рассмотреть соседей вплоть до 5-го, и уже для такого рассмотрения
# нам пришлось отклонить нулевую гипотезу о том, что похожи показатели рождаемости, на уровне
# значимости 5%. То есть, по крайней мере при таком выборе основных 10 провинций (с 1 по 10)
# плотность кластеров - около 5 провинций на кластер.

# 2
# соберем католиков, протестантов и смешанную группу в отдельные датасеты
C = c()
P = c()
M = c()
confession = c()

for (i in 1:47) {
  if (initial_swiss[i, 5] < 20){
    P = c(P, i)
    confession = c(confession, 'P')
  } else if (initial_swiss[i, 5] > 80) {
    C = c(C, i)
    confession = c(confession, 'C')
  } else {
    M = c(M, i)
    confession = c(confession, 'M')
  }
}
```

```r
C = initial_swiss[C, ]
P = initial_swiss[P, ]
M = initial_swiss[M, ]
initial_swiss = cbind(initial_swiss, confession)

# визуализируем данные по рождаемости
boxplot(C[, 1], P[, 1], M[, 1],
        main="Сравнение рождаемости среди провинций с разным вероисповеданием",
        names=c("католики", "протестанты", "смешанный"),
        ylab="Рождаемость")
```



```r
# смешанная группа немногочисленная, при этом у нее большой диапазон значений.
# возможно, следовало разделить на две группы и не выделять смешанную группу
# (а может это как раз выбросы из обеих групп - протестантов и католиков).
# все три группы различаются.

# т.к. у нас три независимых группы наблюдений, используем критерий Краскела-Уоллиса
kruskal.test(Fertility~confession, data = initial_swiss)
# data:  Fertility by confession
# Kruskal-Wallis chi-squared = 18.948, df = 2, p-value = 7.681e-05

# на уровне значимости 5% (и даже меньше 1%) отвергаем нулевую гипотезу о том, что
# во всех трёх группах провинций уровень рождаемости имеет одно и тоже распределение.

# проведем попарные сравнения, для этого снова используем критерий Манна-Уитни
# удалим дублирующиеся значения для каждой пары по отдельности
P[-which((duplicated(c(C[, 1], P[, 1])))) - length(C[, 1]), 1] # 1 значение
wilcox.test(C[, 1], P[-which((duplicated(c(C[, 1], P[, 1])))) - length(C[, 1]), 1],
            alternative = "greater")
# W = 372.5, p-value = 1.079e-05
# alternative hypothesis: true location shift is greater than 0
# отклоняем нулевую гипотезу о том, что распределение показателя рождаемости для
# католиков меньше или равно этому показателю для протестантов на уровне значимости
# 5% (даже меньше 1%, порядка 2 тысячных процента)

(duplicated(c(M[, 1], C[, 1]))) # нет дублей
wilcox.test(C[, 1], M[, 1], alternative = "greater")
# W = 67, p-value = 0.01248
# alternative hypothesis: true location shift is greater than 0
# отклоняем нулевую гипотезу о том, что распределение показателя рождаемости для
# католиков меньше или равно этому показателю для смешанной категории на уровне
# значимости 5% (даже меньше 2%)
(duplicated(c(M[, 1], P[, 1]))) # нет дублей
wilcox.test(P[, 1], M[, 1], alternative = "greater")
# W = 88, p-value = 0.1175
# alternative hypothesis: true location shift is greater than 0
# нет достаточных оснований отклонить нулевую гипотезу о том, что распределение
# показателя рождаемости для протестантов меньше или равно этому показателю для
# смешанной категории на уровне значимости 5% (даже 10%)

# 3
# создаем пустую матрицу для средних значений показателя рождаемости
fert = matrix(data=NA, nrow=4, ncol=3)

# создадим вспомогательную матрицу с граничными значениями
B = matrix(data=NA, nrow=2, ncol=3)
# первая строка - % мужчин, работающих в сельском хозяйстве
B[1, 2] = 50
# вторая строка - 1 квартиль детской смертности по всему датасету
B[2, 2] = quantile(initial_swiss[, 6])["25%"]
B[1:2, 3] = 10000
B[1:2, 1] = 0

confessions = c('P', 'C', 'M')

num=1
matr = initial_swiss
for (i in 1:2){
  for (j in 1:2){
    for (conf in 1:3){
      cond12 = matr[, 2] < B[1, i + 1] & matr[, 6] < B[2, j + 1]
      cond21 = matr[, 2] > B[1, i] & matr[, 6] > B[2, j]
      ind = which(cond12 & cond21 & matr[, 7] == confessions[conf])
      if (length(ind) > 0){
        fert[num, conf] = mean(initial_swiss[ind, 1])
      } else {
        fert[num, conf] = median(initial_swiss[which(cond12 & cond21), 1])
      }
    }
    num = num + 1
  }
}
friedman.test(fert)
# Friedman chi-squared = 3.5, df = 2, p-value = 0.1738
# на уровне значимости 5% не имеем достаточно оснований отклонить нулевую гипотезу
# о том, что средний показатель рождаемости в каждой подгруппе одинаков для групп
# с разным соотношением протестантов и католиков, проживающих в провинциях Швейцарии.
```

(Использовали критерий Фридмана, так как групп больше 2, и они не независимы)

```
fert = as.data.frame(fert, row.names = c('_<50_<1st_q', '_<50_>1st_q',
                                         '_>50_<1st_q', '_>50_>1st_q'))
colnames(fert) = confessions
fert
```

```
> fert
                   P      C        M
_<50_<1st_q 54.30000 44.650 35.00000
_<50_>1st_q 68.88333 83.650 57.76667
_>50_<1st_q 62.68333 78.000 65.25000
_>50_>1st_q 67.75714 80.275 68.30000
```

N 3 | Теорема Штейнера – Гюйгенса:

$$I_{\vec{a}} = \sum_{j=1}^{Q} m_i \| \vec{z}_j - \vec{a} \|^2 \quad (1)$$

$$I_{\vec{a}} = I_{\vec{c}} + M \| \vec{c} - \vec{a} \|^2 \quad (2)$$

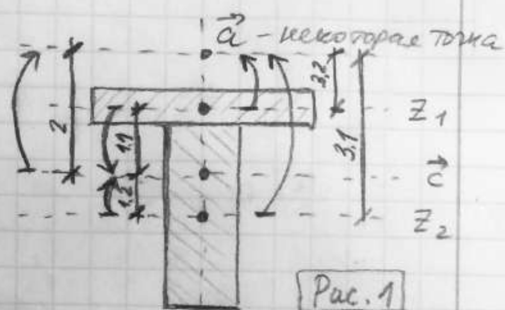


Рис. 1

Распишем вторую формулу через первую (*)

По смыслу, момент инерции составной фигуры относительно точки $\vec{a}$ можно посчитать либо через нахождение суммы моментов инерции каждого из объектов относительно точки $\vec{a}$ (п.3.1, 3.2), либо сначала найти моменты инерции относительно центра тяжести $\vec{c}$ составной фигуры каждого из объектов фигуры (1.1, 1.2), а затем найти момент инерции всей фигуры относительно точки $\vec{a}$ (п.2)

(*) $I_{\vec{c}} = \sum_{j=1}^{Q} m_j \| \vec{z}_j - \vec{c} \|^2$ ($M = \sum_{j=1}^{Q} m_j$, Q – кол-во точек/объектов $\vec{z}$)

$$M \| \vec{c} - \vec{a} \|^2 = \sum_{j=1}^{Q} m_j \| \vec{c} - \vec{a} \|^2$$

Подставим все расписанные значения в формулу (2)

$$\sum_{j=1}^{Q} m_j \| \vec{z}_j - \vec{a} \|^2 = \sum_{j=1}^{Q} m_j \| \vec{z}_j - \vec{c} \|^2 + \sum_{j=1}^{Q} m_j \| \vec{c} - \vec{a} \|^2 \quad (3)$$

В механике, нахождение центра масс фигуры можно заменить на нахождение геометрического центра (среднее арифметическое положений всех точек фигуры) – барицентра – если предполагаем, что объект однороден по плотности

Тогда перепишем массу как произведение массы 1 точки на количество точек объекта
Положим массу одной точки, равной единице.

$m_{ij} = 1$, $j = 1,.., Q$, $i = 1,..$ кол-во точек объекта (его масса m_j)

$$\sum_{i=1}^{m_j} m_{ij} = m_j$$

Тогда $M = \sum_{j=1}^{Q} m_j = \sum_{j=1}^{Q}\sum_{i=1}^{m_j} m_{ij}$

Переложим задачу на исходные данные задачи

Найдём момент инерции составной фигуры относительно её центра масс.

Пусть x_{ij} ($\vec{z}_j$) – координата i-той точки j-того объекта составной фигуры

(рассматриваем одномерный случай либо случай с Рис. 1 – когда все точки центров масс и произвольная точка лежат на одной прямой – оси симметрии составного объекта и его частей)

$x_{\cdot j}$ – к-та центра масс j-того объекта составной фигуры ($\vec{c}$),

$x_{\cdot\cdot}$ – к-та центра масс ($\vec{a}$)

Тогда количество точек j-того объекта при единичной массе точки будет равно m_j (n_j из начальных условий задачи), $m_{ij} = 1$

k (Q) – количество объектов составной фигуры

Подставим все в формулу (3)

$$\sum_{j=1}^{Q} m_j \|\vec{z}_j - \vec{a}\|^2 = \sum_{j=1}^{Q}\sum_{i=1}^{m_j} \overset{=1}{m_{ij}} \|\vec{z}_j - \vec{a}\|^2 \Rightarrow \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - x_{\cdot\cdot})^2$$

$$\sum_{j=1}^{Q} m_j \|\vec{z}_j - \vec{c}\|^2 = \sum_{j=1}^{Q}\sum_{i=1}^{m_j} \overset{=1}{m_{ij}} \|\vec{z}_j - \vec{c}\|^2 \Rightarrow \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - x_{\cdot j})^2$$

$$\sum_{j=1}^{Q} m_j \|\vec{c} - \vec{a}\|^2 = \sum_{j=1}^{Q}\sum_{i=1}^{m_j} \overset{=1}{m_{ij}} \|\vec{c} - \vec{a}\|^2 \Rightarrow \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} (x_{\cdot j} - x_{\cdot\cdot})^2 =$$

= [так как выражение под суммой не зависит от i] =

$$= \sum_{j=1}^{k} n_j (x_{\cdot j} - x_{\cdot\cdot})^2$$

Собираем всё вместе: $\boxed{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - x_{\cdot\cdot})^2 = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - x_{\cdot j})^2 + \sum_{j=1}^{k} n_j (x_{\cdot j} - x_{\cdot\cdot})^2}$

№4 $(S_1, \dots S_n)$ – вектор рангов, имеющий равномерное распределение на множестве $n!$ перестановок чисел $1, \dots n$

1) Матожидание.

Составим таблицу значение – вероятность

Так как всего n значений, а перестановок $n!$, то на i-той позиции (которая встречается $n!$ раз) для равномерного распределения можем встретить n чисел, каждое из них $n!/n = (n-1)!$ раз

$$n! \text{ строк} \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & \overset{S_i}{2} & \dots & n \\ 2 & 1 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & & \\ n & \dots & 2 & 1 \end{array} \right. \quad \underbrace{}_{n \text{ чисел}}$$

Получаем обратно вероятность встретить j-ое число (от 1 до n) для S_i: $(n-1)!/n! = 1/n$

Тогда

i	1	2	...	n
p_i	$1/n$	$1/n$	...	$1/n$

,

или $S_i = \begin{cases} 1, & 1/n \\ 2, & 1/n \\ \vdots \\ n, & 1/n \end{cases}$

Найдём матожидание по определению

$$\boxed{\mathbb{E} S_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot i = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}}, \ \forall i = 1, \dots n$$

2) Дисперсия

Используем формулу $\operatorname{Var} S_i = \mathbb{E}(S_i^2) - (\mathbb{E} S_i)^2$ (*)

$(\mathbb{E} S_i)^2 = \frac{(n+1)^2}{4}$

$\mathbb{E}(S_i^2) = \sum \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2$, где $\sum_{i=1}^{n} i^2$ найдём через:

$(i+1)^3 = i^3 + 3i^2 + 3i + 1$

$\sum_{i=1}^{n} (i+1)^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 + 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + n$

$\sum_{i=1}^{n} (i+1)^3 - \sum_{i=1}^{n} i^3 = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n$

$$(n+1)^3 - 1 = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n$$

$$-\sum_{i=1}^{n} i^2 = \left(\frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) - (n+1)^3\right)\cdot\frac{1}{3} =$$

$$= \frac{(3n+2-2(n+1)^2)(n+1)}{6} = \frac{(n+1)(-2n^2-4n-2+2+3n)}{6} =$$

$$= \frac{-n(2n+1)(n+1)}{6} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Подставляем всё в выражение для дисперсии (*)

$$Var\, S_i = \frac{1}{\cancel{n}}\cdot\frac{\cancel{n}(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{2(2n^2+n+2n+1)}{12} -$$

$$- \frac{3(n^2+2n+1)}{12} = \frac{4n^2-3n^2+6n-6n+2-3}{12} = \boxed{\frac{n^2-1}{12} = Var\, S_i}$$

3) Ковариация

$$cov(S_i, S_j) = \mathbb{E} S_i S_j - \mathbb{E} S_i \cdot \mathbb{E} S_j \quad (**)$$

(в силу линейности матожидания, ru.wikipedia.org/wiki/Ковариация)

$$\mathbb{E} S_i = \mathbb{E} S_j = \frac{n+1}{2}, \text{ тогда } \mathbb{E} S_i \cdot \mathbb{E} S_j = \frac{(n+1)^2}{4}$$

Первое слагаемое найдём с помощью таблицы, где в строках запишем значения S_i, а в столбцах − S_j

S_i \ S_j	1	2	...	n
1	$1\cdot1$	$1\cdot2$	...	$1\cdot n$
2	$2\cdot1$	$2\cdot2$	...	$2\cdot n$
...	...	...	...	...
n	$n\cdot1$	$n\cdot2$	...	$n\cdot n$

Так как мы рассматриваем случай $i \neq j$, то можем посчитать сумму всех значений в таблице и вычесть диагональные значения $\sum_{i=1}^{n} i^2$.

Сумма всех значений в таблице:

$$1\cdot(1+2+...+n) + 2\cdot(1+2+...+n) + ... + n\cdot(1+2+...+n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i \cdot \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Сумма необходимых нам значений: $\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Тогда матожидание $\mathbb{E} S_i S_j$ – сумма на вероятность получить каждую пару, и для равномерного распределения эта вероятность одинакова для всех $n(n-1)$ элементов ($n-1$ т.к из каждой из n строк убрали одно диагональное значение).

$$\mathbb{E} S_i S_j = \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\cdot\frac{1}{n(n-1)} =$$

$$= \frac{3n(n+1)^2 - 2(n+1)(2n+1)}{12(n-1)} = \frac{(n+1)(3n^2+3n-4n-2)}{12(n-1)} =$$

$$= \frac{(n+1)(3n^2-n-2)}{12(n-1)} = \frac{(n+1)(3n+2)\cancel{(n-1)}}{12\cancel{(n-1)}} = \frac{(3n+2)(n+1)}{12}$$

Собираем выражение для ковариации (**)

$$\mathbb{E} S_i S_j - \mathbb{E} S_i \cdot \mathbb{E} S_j = \frac{(3n+2)(n+1)}{12} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)(3n+2-3n-3)}{12} =$$

$$= \frac{(n+1)\cdot(-1)}{12} = \boxed{\frac{-(n+1)}{12} = \operatorname{cov}(S_i, S_j)}, \quad \forall i,j = 1..n,\ i \neq j$$

№5 Две выборки, ранги $R_1, \dots, R_m$ и $S_1, \dots, S_n$

Статистика Уилкоксона $W = \sum_{j=1}^{n} S_j$

1) Наибольшее значение W_{max}

Так как ранги — это натуральные числа, и в случае двух выборок размера m и n без повторяющихся значений, ранги по объединённым выборкам будут представлять собой ряд от 1 до $m+n$.

Тогда максимальное значение статистики получим, если все n значений окажутся справа в ряду

$$1, \dots, m, \underbrace{m+1, \dots, n+m}_{n \text{ чисел}}$$

Найдём $W_{max} = \sum_{j=m+1}^{n+m} S_j = \sum_{j=1}^{n+m} S_j - \sum_{j=1}^{m} S_j = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} - \frac{m(m+1)}{2} = \frac{m^2 + m\cdot n + m + m\cdot n + n^2 + n - m^2 - m}{2} = \boxed{\frac{n^2 + 2mn + n}{2} = W_{max}}$

2) Наименьшее значение W_{min}

Рассмотрим тот же ряд. Минимальная сумма получится, если все n значений будут лежать слева.

$$\underbrace{1, \dots, n}_{n \text{ чисел}}, n+1, \dots, n+m$$

Найдём $W_{min} = \sum_{j=1}^{n} S_j = \boxed{\frac{(n+1)n}{2} = W_{min}}$