Московский Государственный Университет им М. В. Ломоносова

Физический факультет

Кафедра молекулярных процессов и экстремальных состояний вещества

Отчет по заданию: «**Численное решение квазилинейной системы уравнений гемодинамики, описывающая неустановившееся одномерное течение в крупном кровеносном сосуде**».

Выполнил:

Уланов Павел, группа 204М

1. Постановка задачи

Дана система нелинейных уравнений гемодинамики следующего вида:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial t} + \dfrac{\partial uS}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{u^2}{2} + \dfrac{p}{\rho}) = f_e + f_R \end{cases}$$

S – площадь поперечного сечения сосуда (S = S(t,x));
u – скорость крови (u = u(t,x));
p – давление;
ρ – плотность (ρ = 1);
fe – внешняя сила (fe = 0.0);
f_R – сила сопротивления (f_R = 0.0);

Замыкающая модель взаимодействия течения и эластичной стенки S=S(p):

$$S(p) = S_{min} + \frac{S_{max} - S_{min}}{P_{max} - P_{min}}(p - p_{min}).$$

Область решения задачи: $0 \le x \le l$; $0 \le t \le T$; $l = 0.4$; $T = 1.0$

Начальные условия: $S(0,x) = \begin{cases} 0.02, x \le l/2 \\ 0.01, x \ge l/2 \end{cases}, u(0,x) = 0.1.$

Граничные условия: $u(t,0) = 0.1, S_x(t,l) = 0.$

2. Характеристический анализ.

Приведем начальную систему уравнений к следующему виду:

$$A\frac{\partial U}{\partial t} + B\frac{\partial U}{\partial x} = f \qquad (1)$$

Получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial t} + S\dfrac{\partial u}{\partial x} + u\dfrac{\partial S}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + K\dfrac{\partial S}{\partial x} = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

где $K = \frac{pmax - pmin}{Smax - Smin}$.

Приводим систему (2) к матричному виду (1) и получаем матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} u & S \\ K & u \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} S \\ u \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Далее находим характеристические направления λ = dx/dt путем решения уравнения с матрицами коэффициентов:

$$\det(B - A\lambda) = \det\begin{pmatrix} u-\lambda & S \\ K & u-\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

$$(u-\lambda)^2 = SK,$$

$$\lambda = u \pm \sqrt{SK}$$

В результате получаем характеристические направления:

$$\begin{gathered} \frac{dx}{dt} = u + \sqrt{SK} \\ \frac{dx}{dt} = u - \sqrt{SK} \end{gathered} \tag{4}$$

Оба корня λ_k действительные и отличны друг от друга, следовательно, тип уравнения: **гиперболическое уравнение.**

Далее получим соотношения вдоль характеристик. Записываем систему дифференциальных уравнений, которые записываются вдоль характеристик:

$$\det\left(B - A\lambda_k, f - A\frac{dU}{dt}\right) = 0,$$

учитывая (3) и заменив один столбец справа на столбец слева получаем следующие уравнение:

$$det\begin{pmatrix} -\frac{\partial S}{\partial t} & S \\ -\frac{\partial u}{\partial t} & u-\lambda_k \end{pmatrix} = 0$$

В результате получаем уравнение вдоль характеристик:

$$Sdu - \sqrt{SK}dS = 0$$
$$Sdu + \sqrt{SK}dS = 0$$

3. Решение методом Годунова.

Начальная задача описывается уравнением переноса в общем случае:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = \varphi,$$

где q – векторная часть консервативных переменных, f – вектор потоков, φ – неоднородность.

Метод Годунова основан на выделении контрольного объема и на переходе от дифференциальной формы записи исходной системы уравнений к интегральной форме. Интегральная форма записывается в виде равенства нулю интегралов по контуру (границ выделенного контрольного объема) от векторов консервативных переменных и потоков.

В результате выражение для получения значений вектора $\boldsymbol{q}$ на новом временном слое выглядит следующим образом (индекс точки j, номер слоя k):

$$q_j^{k+1} = q_j^k - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(f_{j+1/2} - f_{j-1/2}\right).$$

Величина с полуцелыми индексами обозначены потоки сохраняемых величин через границы расчетной ячейки за время Δt или потоки через боковые грани контрольного объема. Эти значения получаются путем решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва. С этой целью при помощи приближенного решения задачи Римана методом HLL считается:

$$f_{j+1/2}^k = \begin{cases} f_{j+1}^k, S_r^k \le 0 \\ \dfrac{f_j^k S_r^k - f_{j+1}^k S_l^k + S_r^k S_l^k (q_{j+1}^k - q_j^k)}{S_r^k - S_l^k}, S_l^k < 0 < S_r^k \\ f_j^k, S_l^k \ge 0 \end{cases}$$

где $S_r^k = \max(u_j^k + \sqrt{KS_j^k};\ u_{j+1}^k + \sqrt{KS_{j+1}^k})$, $S_l^k = \min(u_j^k - \sqrt{KS_j^k};\ u_{j+1}^k - \sqrt{KS_{j+1}^k})$

Шаг по времени выбирается в соответствие с критерием Куранта – Фридрихса – Леви.

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{max_j\left(S_r^k, S_l^k\right)} \tag{5}$$

4. Результаты решения.

В решении задачи $\Delta x = 0.008, \Delta t$ – выбирается для каждого временного слоя своим. Шаг по времени на 10 процентов больше шага (5).

Результаты представлены для 1, 2 и 3 секунд. Данные представлены в виде 2 трехмерных графиков для скорости **u** и площади поперечного сечения **S**. И графиков зависимости тех же величин в разные моменты времени.

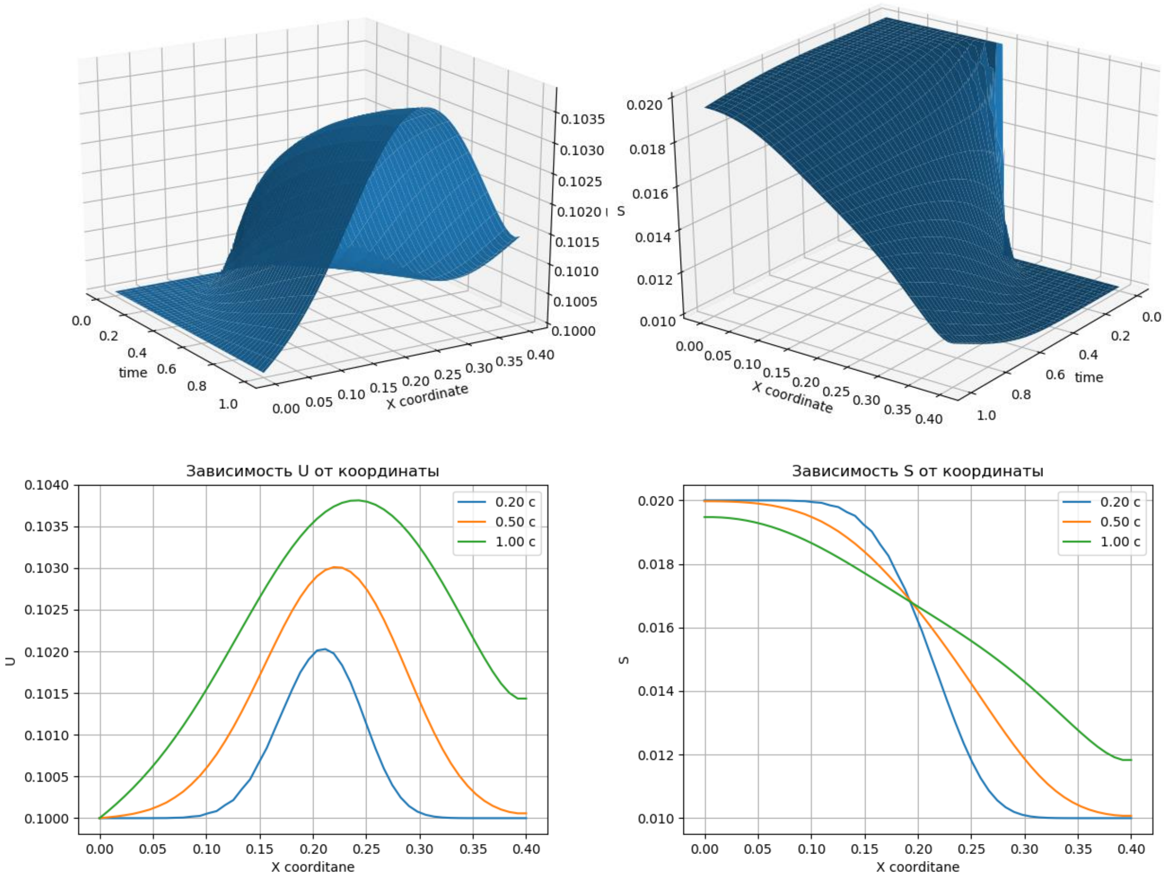

Рис. 1 – Значения скорости **u** и площади поперечного сечения **S** по истечению 1 секунды.

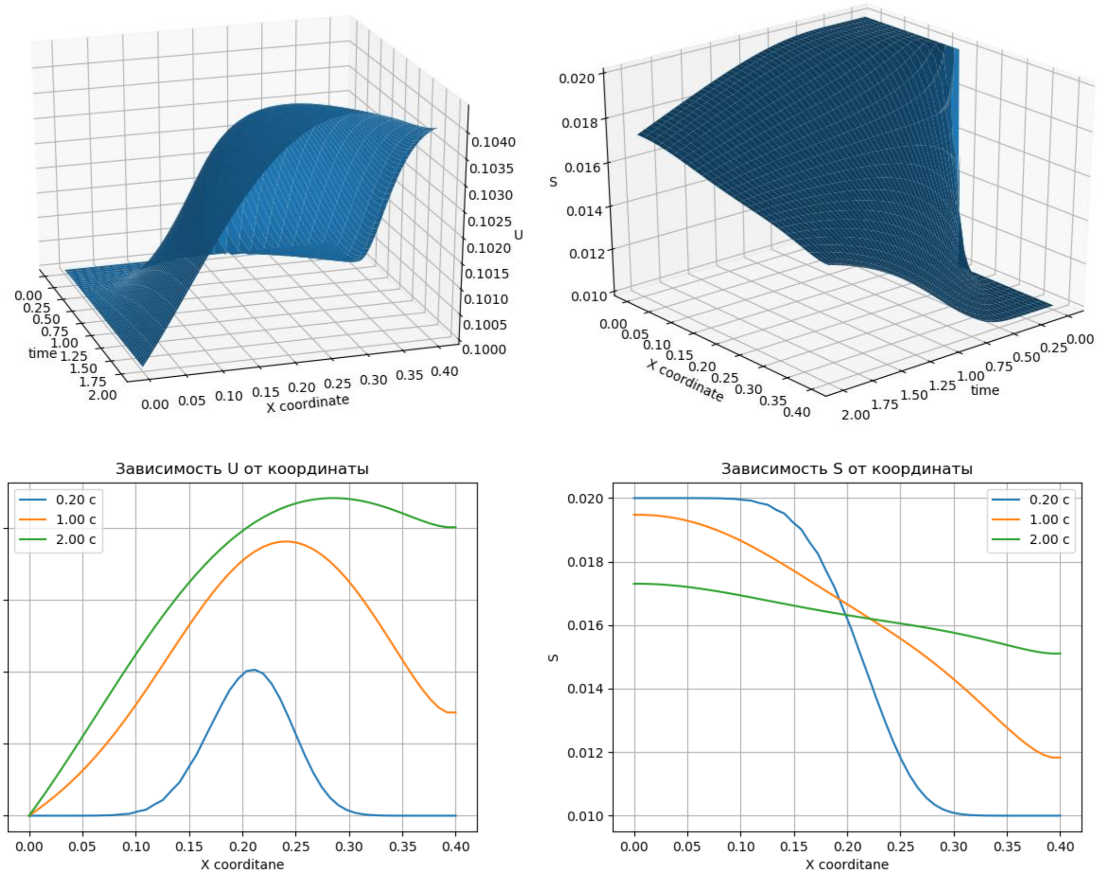

Рис. 2 – Значения скорости **u** и площади поперечного сечения **S** по истечению 2 секунд.

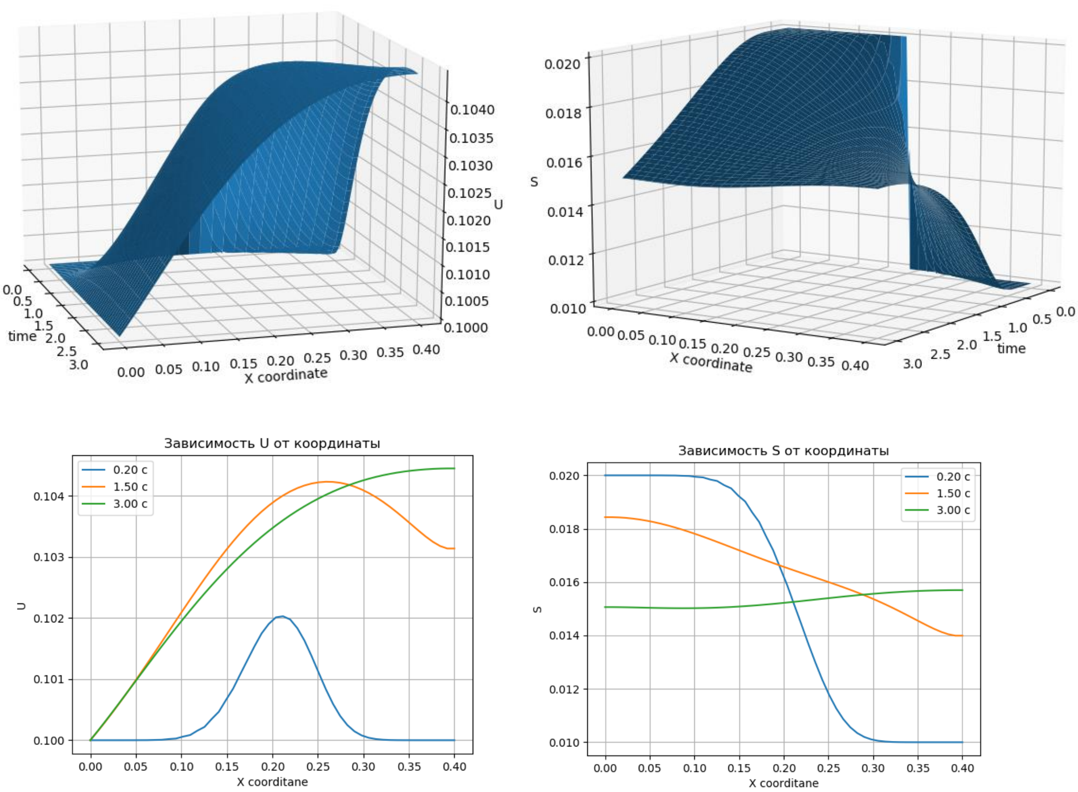

Рис. 3 – Значения скорости **u** и площади поперечного сечения **S** по истечению 3 секунд.

Расчетная сетка выглядит как показано на Рис. 4. Сетка строилась с Nx узлами по координате и Nt по временной оси. Так как для нахождения полуцелых значений вектора ***f*** необходимы значения справа и слева, то были добавлены виртуальные ячейки слева и справа по координате. Значения в виртуальные ячейки переносились с учетом граничных условий с обоих концов.

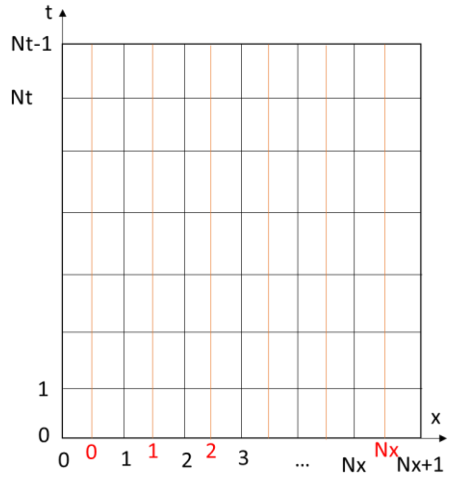

Рис. 4 – Расчетная сетка. Красными символами обозначены узлы, где рассчитываются полуцелые значения вектора ***f***.

5. Выводы.

В результате работы был произведен характеристический анализ системы нелинейных уравнений гемодинамики. Получены направления характеристик и соотношения вдоль характеристик. Был определен гиперболический тип системы уравнений.

Также был реализован алгоритм решения задачи методом Годунова с приближенным решением задачи Римана о произвольном разрыве (метод HLL) на языке python. Были получены результаты моделирования для трех времен протекания процесса: 1 секунда, 2 секунды, 3 секунды. Проанализировав результаты, при начальном распределении площади поперечного сечения в виде «ступени» система стремится к более равномерному распределению площади поперечного сечения. Скорость перераспределяется с «движением» экстремума вправо по координате.