UNIVERSITÉ LAVAL

GLO-4030/7030 APPRENTISSAGE PAR RÉSEAUX DE NEURONES PROFONDS

Réseaux en aval (*feedforward*)

Fonctions de perte

Graphe de calculs et rétropropagation (*backprop*)

Philippe Giguère

Réseaux en aval
(*feedforward*)

Réseau en aval

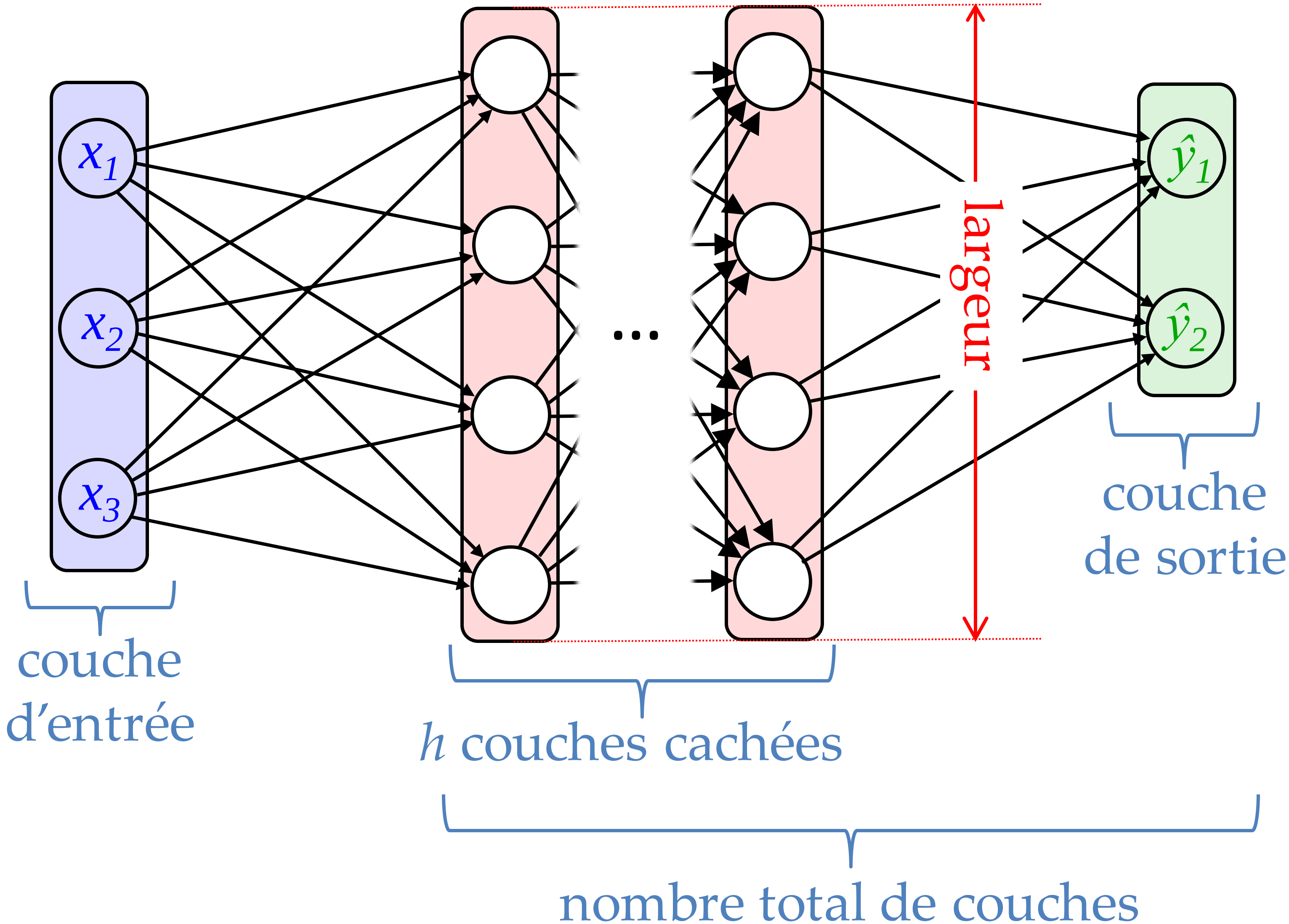
- Forment la base de beaucoup de systèmes
- Composition de plusieurs fonctions

couche

$$\hat{y} = f^{(3)}\left(f^{(2)}\left(f^{(1)}(x)\right)\right) \quad \text{enchaînement}$$

  - exprimé par un graphe acyclique
  - par opposition : réseaux récurrents

Illustration et nomenclature



(Note : exemple pour réseau typique *fully-connected*)

Réseau en aval

- Cherche à approximer une fonction f^*
- Par exemple, un classificateur $y = f^*(x)$
- Appelé en aval (*feedfoward*) car l'information s'écoule de $x \rightarrow y$.
- Recherche les paramètres θ du réseau qui donne la meilleure approximation :

$$\hat{y} = f(x;\theta)$$

Choix à faire

- Architecture (l'ensemble du cours)
  - # couches
  - # neurones (cachés) par couche
  - type de couche
- Forme de la sortie → fonction de sortie
- Fonction de perte
- Optimiseur (semaine prochaine)
  - et autres « *training details* »

« training details » : YOLO9000

Training for classification. We train the network on the standard ImageNet 1000 class classification dataset for 160 epochs using stochastic gradient descent with a starting learning rate of 0.1, polynomial rate decay with a power of 4, weight decay of 0.0005 and momentum of 0.9 using the Darknet neural network framework [13]. During training we use standard data augmentation tricks including random crops, rotations, and hue, saturation, and exposure shifts.

As discussed above, after our initial training on images at 224×224 we fine tune our network at a larger size, 448. For this fine tuning we train with the above parameters but for only 10 epochs and starting at a learning rate of 10^{-3}.

Training for detection. We modify this network for detection by removing the last convolutional layer and instead adding on three 3×3 convolutional layers with 1024 filters each followed by a final 1×1 convolutional layer with the number of outputs we need for detection.

We train the network for 160 epochs with a starting learning rate of 10^{-3}, dividing it by 10 at 60 and 90 epochs. We use a weight decay of 0.0005 and momentum of 0.9. We use a similar data augmentation to YOLO and SSD with random crops, color shifting, etc. We use the same training strategy on COCO and VOC.

Recettes parfois assez complexes…

Exemples de (fonction de) sortie

- softmax pour multiclasse exclusif
  - par rapport à *multilabel*
- sigmoïde pour 0 à 1
- tanh pour -1 à 1
- sin θ et cos θ, pour des angles (*grasping*)
- linéaire (*regression layer*)
  - p. ex. sorties pré-activation z de la dernière couche
- prédire la précision ($1/\sigma^2$) plutôt que la variance (section 6.2.2.4, p.182 du manuel)

Plus la sortie brute pour un réseau initialisé (au hasard) est proche de ce que l'on cherche, plus facile sera la convergence lors de l'entraînement.

Quelques fonctions de perte

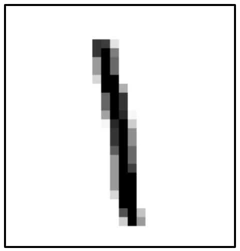
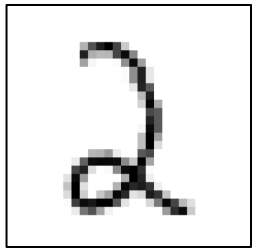
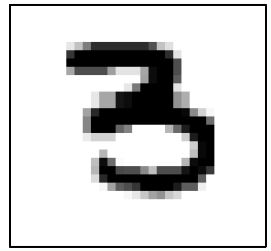
Fonction de perte

- On peut juger *qualitativement* de la qualité des réponses d'un réseau
- Mais besoin d'un formalisme *quantitatif* si on veut l'optimiser : **fonction de perte**
- Calculée sur les exemples d'entraînement (*perte empirique*)
- Entraînement : recherche dans l'espace des paramètres θ, de manière efficace, pour minimiser cette perte

Exemple de loss : SVM Multiclasse

(utilisé la semaine passé)

Scores $s_i = f(x) = Wx$

la cible est l'étiquette y_i

1	**2.3**	1.7	1.7
2	4.1	**5.4**	1.4
3	-2.1	2.3	**-1.3**

$$L = \sum_{j \neq cible} \begin{cases} 0 & \text{si } s_{cible} \geq s_j + 1 \\ s_j - s_{cible} + 1 & \text{autrement} \end{cases}$$

$$= \sum_{j \neq cible} \max(0, s_j - s_{cible} + 1)$$

Adapté de cs231n

Exemple de loss : SVM Multiclasse

Scores $s_i = f(x) = Wx$

1	2.3	1.7	1.7
2	4.1	5.4	1.4
3	-2.1	2.3	-1.3

$$L = \sum_{j \neq cible} \begin{cases} 0 & \text{si } s_{cible} \geq s_j + 1 \\ s_j - s_{cible} + 1 & \text{autrement} \end{cases}$$

$$= \sum_{j \neq cible} \max(0, s_j - s_{cible} + 1)$$

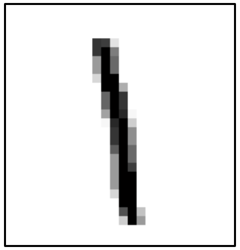
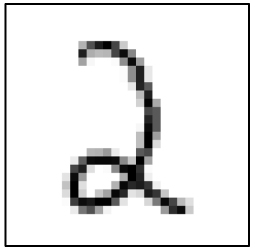
Perte : 2.8

```
= max(0,  4.1 - 2.3 + 1) +
  max(0, -2.1 - 2.3 + 1)
= max(0,2.8) + max(0,-3.4) = 2.8
```

Adapté de cs231n

Exemple de loss : SVM Multiclasse

Scores $s_i = f(x) = Wx$

			
1	2.3	1.7	1.7
2	4.1	**5.4**	1.4
3	-2.1	2.3	-1.3
Perte :	2.8	0	

$$L = \sum_{j \neq cible} \begin{cases} 0 & \text{si } s_{cible} \geq s_j + 1 \\ s_j - s_{cible} + 1 & \text{autrement} \end{cases}$$

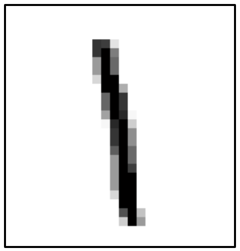
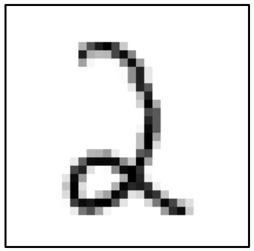
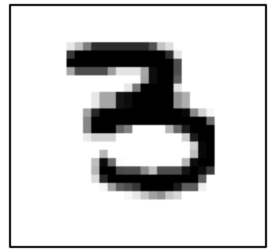
$$= \sum_{j \neq cible} \max(0, s_j - s_{cible} + 1)$$

```
= max(0,  1.7 - 5.4 + 1) +
  max(0,  2.3 - 5.4 + 1)
= max(0,-2.7) + max(0,-2.1) = 0
```


Adapté de cs231n

Exemple de loss : SVM Multiclasse

Scores $s_i = f(x) = Wx$

			
1	2.3	1.7	1.7
2	4.1	**5.4**	1.4
3	-2.1	2.3	**-1.3**
Perte :	2.8	0	7.7

$$L = \sum_{j \neq cible} \begin{cases} 0 & \text{si } s_{cible} \geq s_j + 1 \\ s_j - s_{cible} + 1 & \text{autrement} \end{cases}$$

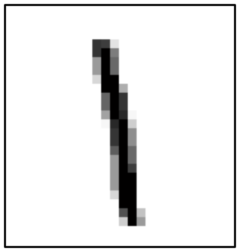
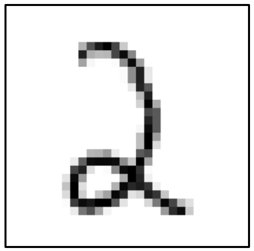
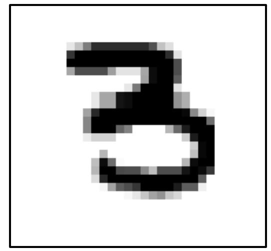
$$= \sum_{j \neq cible} \max(0, s_j - s_{cible} + 1)$$

```
= max(0,  1.7 - -1.3 + 1) +
  max(0,  1.4 - -1.3 + 1)
= max(0,4.0) + max(0,3.7) = 7.7
```

Adapté de cs231n

Exemple de loss : SVM Multiclasse

Scores $s_i = f(x) = Wx$

			
1	2.3	1.7	1.7
2	4.1	**5.4**	1.4
3	-2.1	2.3	**-1.3**
Perte :	2.8	0	7.7

$$L = \sum_{j \neq cible} \begin{cases} 0 & \text{si } s_{cible} \geq s_j + 1 \\ s_j - s_{cible} + 1 & \text{autrement} \end{cases}$$

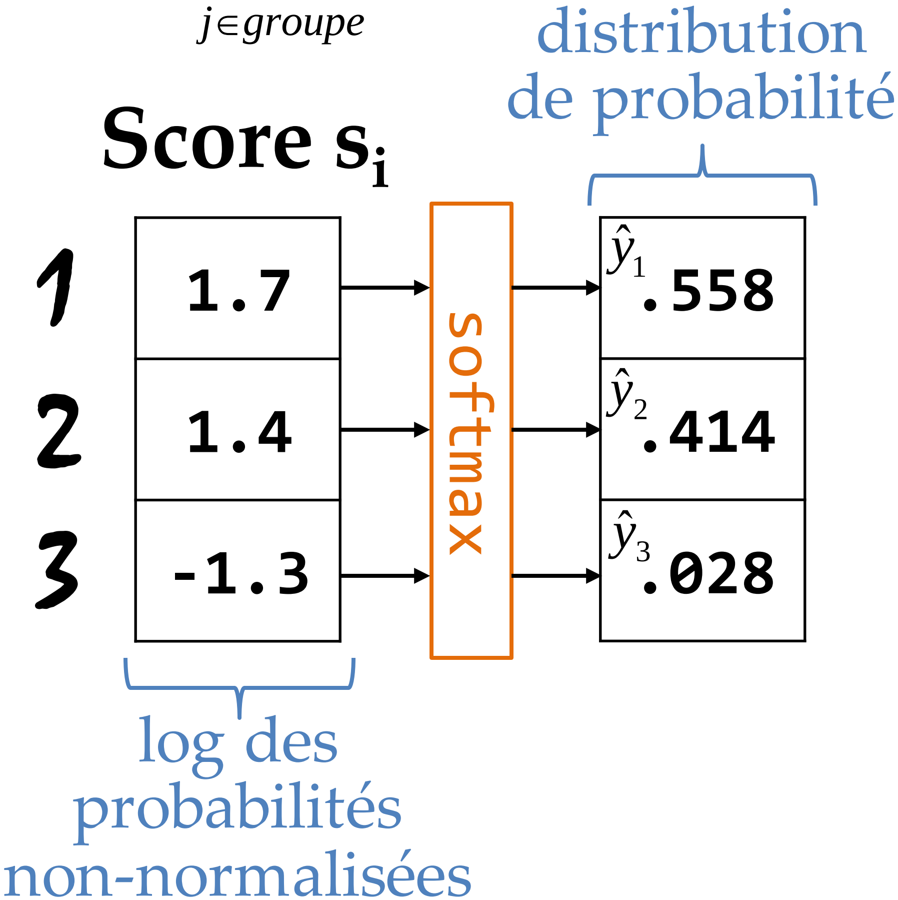
$$= \sum_{j \neq cible} \max(0, s_j - s_{cible} + 1)$$

Perte moyenne J : $\dfrac{2.8 + 0 + 7.7}{3} = 3.5$

Adapté de cs231n

Softmax

$$\hat{y}_i = \frac{\exp(z_i)}{\sum_{j \in groupe} \exp(z_j)}$$



Perte pour softmax

$$\hat{y}_i = \frac{\exp(z_i)}{\sum_{j \in groupe} \exp(z_j)}$$

cible = 2

Score s_i

	Score s_i (log des probabilités non-normalisées)		distribution de probabilité	1-hot encoding y (distribution de probabilité)
1	1.7	softmax	$\hat{y}_1$ .558	y_1 0
2	1.4	softmax	$\hat{y}_2$ .414	y_2 1
3	-1.3	softmax	$\hat{y}_3$ .028	y_3 0

Perte sera une distance entre ces deux distributions de probabilité. Choix?

Cross-Entropy Loss!

1-hot encoding

$$L(f(x), y) = \sum_{j=1}^{c} -y_j \log \hat{y}_j$$

$$= -\log \hat{y}_{cible}$$

Cross-entropy

- Distance asymétrique entre deux distributions de probabilités

$$H(p,q)=\sum_{j}^{c}-p_j(x)\log q_j(x)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}.558\\.414\\.028\end{bmatrix}}_{\hat{y}=f(x)}\qquad\underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}}_{y}$$

Qu'arrive-t-il si on choisit :

$$H(\hat{y},y)=\sum_{j}^{c}-\hat{y}_j\log y_j ?$$

$\log(y_1=0)$ = -∞ ☹

$\log(y_2=1)$ = 0 ☹

Seul choix possible :

$$L(y,\hat{y})=H(y,\hat{y})=\sum_{j}^{c}-y_j\log\hat{y}_j$$

Si la cible est un *1-hot vector* , se réduit à : $L(y,\hat{y})=-\log\hat{y}_{cible}$

Graphes de calculs et algorithme de rétropropagation `backprop`

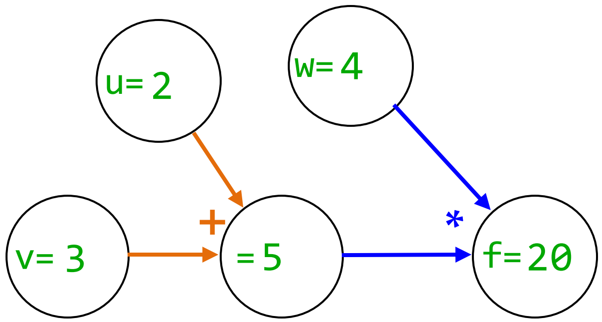
Pourquoi graphe de calcul?

- Pour faire du *lazy evaluation* :
  - découple la création du graphe de son évaluation
  - graphe créé sur CPU (avec votre code)
  - mais calculé sur GPU (10x-40x)
- Nécessaire pour calcul des gradients, via l'algorithme de rétropropagation `backprop`

Exemple graphe calcul

$$f = \boxed{\boxed{(u+v)}w}$$

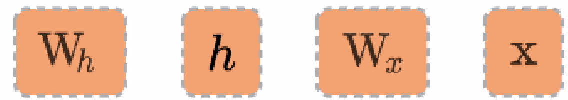
nœud : variable
arête : opération



Instancie les variables
u=2
v=3
w=4
Évalue le graphe pour avoir *f* : **forward pass**

Exemple en code PyTorch

A graph is created on the fly




```python
from torch.autograd import Variable

x = Variable(torch.randn(1, 10))
prev_h = Variable(torch.randn(1, 20))
W_h = Variable(torch.randn(20, 20))
W_x = Variable(torch.randn(20, 10))
```

Tiré du site pytorch.org

Exemple en code PyTorch

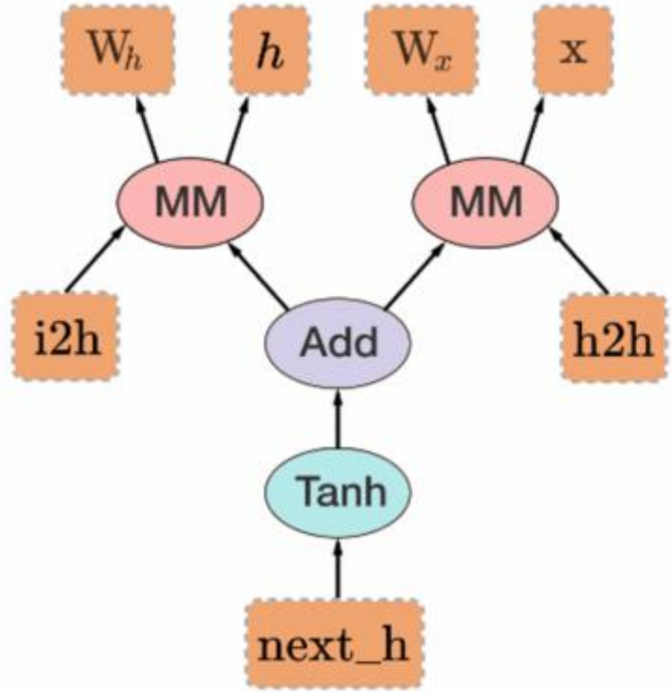
Back-propagation
uses the dynamically built graph

```python
from torch.autograd import Variable

x = Variable(torch.randn(1, 10))
prev_h = Variable(torch.randn(1, 20))
W_h = Variable(torch.randn(20, 20))
W_x = Variable(torch.randn(20, 10))

i2h = torch.mm(W_x, x.t())
h2h = torch.mm(W_h, prev_h.t())
next_h = i2h + h2h
next_h = next_h.tanh()

next_h.backward(torch.ones(1, 20))
```



Tiré du site pytorch.org

- Les graphes peuvent être dynamiques
- On peut ainsi modifier le graphe de calcul en tout temps

Pourquoi la backprop?

- Il faut une procédure pour trouver les paramètres θ (e.g. poids W) du réseau qui minimisent la perte
- Recherche aléatoire? Bonne chance…
- Recherche informée : utilisation du gradient!

Profil de la fonction de perte $L(\theta)$

Adapté de cs231n

Profil de la fonction de perte $L(\theta)$

Réalité : trouver le fond de la vallée embrumée, à tâtons…

Comparaison avec autres méthodes

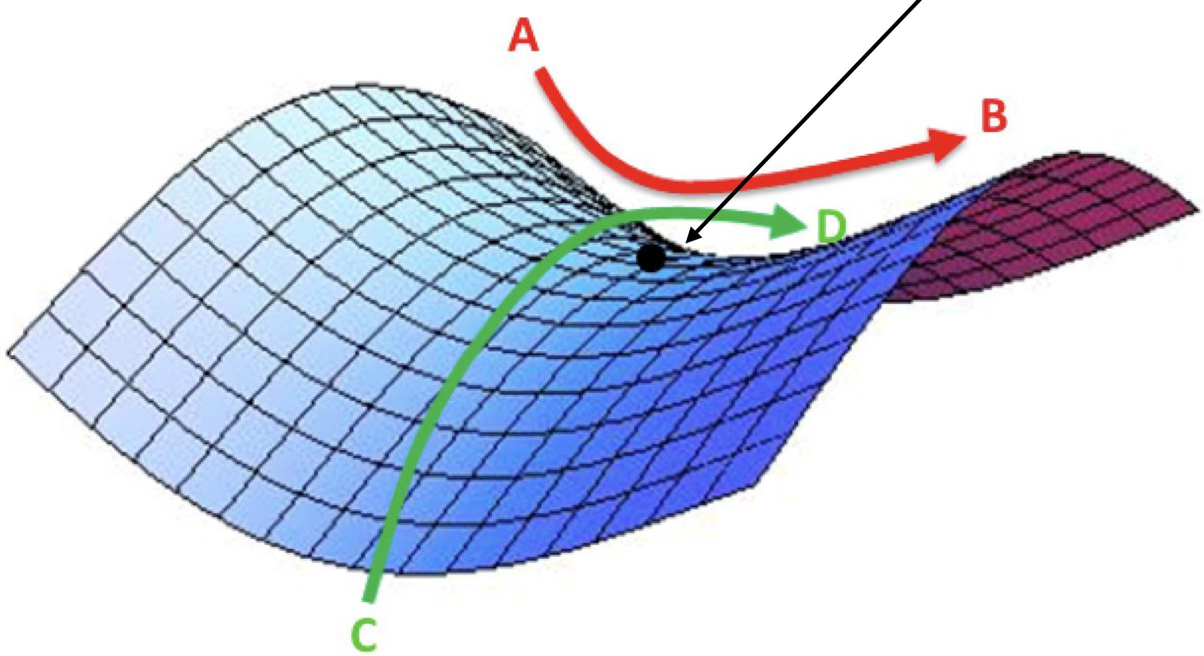
- Beaucoup de méthodes ML sont convexes
  - logistic regression
  - linear regression
  - SVM
- Réseaux de neurones sont non-convexes
  - demande un abandon de garanties théoriques
  - va dépendre de l'initialisation
  - peur historique des minimums locaux
  - réalisation graduelle que les solutions sont plus des points de selle
    - ratio (points de selle)/(minimum locaux) augmente exponentiellement avec nombre $|\theta|$ de paramètres

p. 278-280 du manuel

playground.tensorflow.org pour vous amuser un peu!

Exemple point de selle

- Dérivées partielles nulles au point de selle



https://www.safaribooksonline.com/library/view/fundamentals-of-deep/9781491925607/ch04.html

backprop

- Algorithme qui calcule tous les gradients dans un graphe de calcul
- **N'est pas l'algorithme d'apprentissage!**
- Mais tous les algos d'apprentissage utilisent les gradients calculés par *backprop*
- Basé sur la règle de dérivation en chaîne :

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}}$$

Forme généralisée :

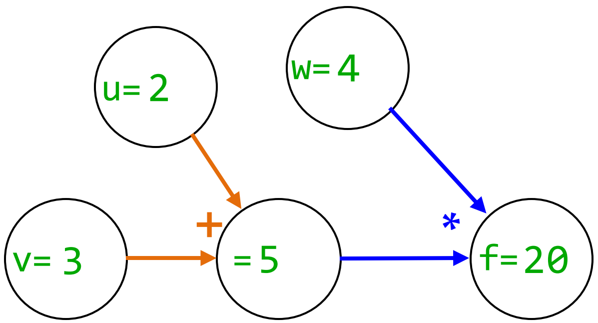
$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = \sum_j \frac{\partial z}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x}}$$

Pourquoi étudier la backprop?

- Pour comprendre :
  - le gradients, donc l'apprentissage
  - des cas pathologiques
  - des améliorations architecturales :
    - *Batch Normalisation*
    - *ResNet*

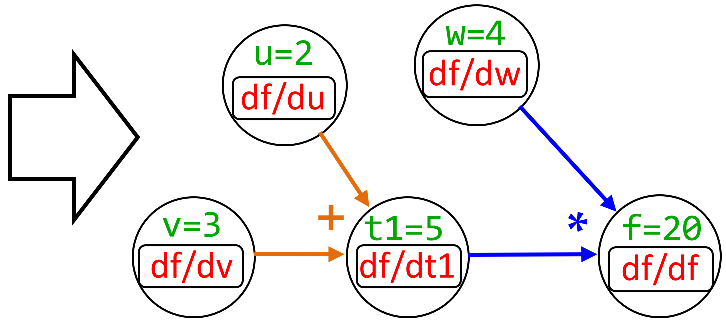
Exemple sur graphe calcul simple

Part d'un graphe de calcul évalué :



$$f=(u+v)w$$

Ajouter une case pour stocker les gradients :



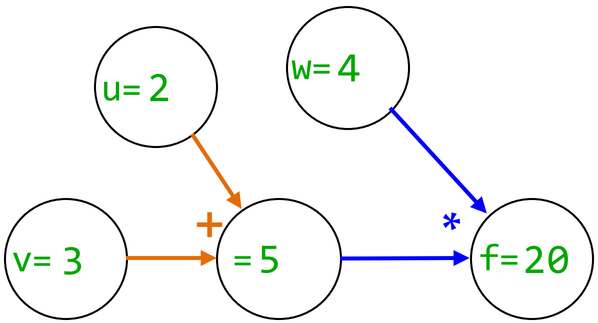
(Rappel : on cherche la sensibilité de la sortie en fonction des variables du graphe)

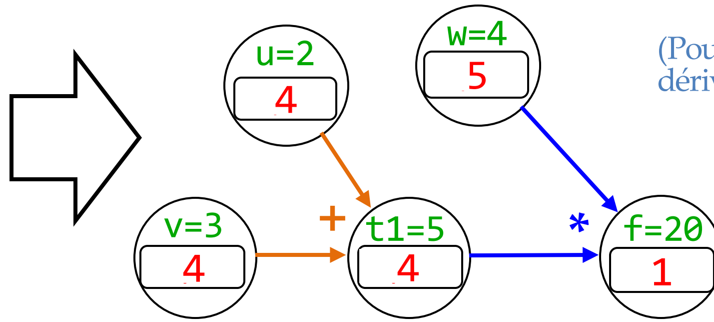
Note : certains placent les fonctions dans le nœuds. Je suis la convention du livre.

Exemple sur graphe calcul simple

Part d'un graphe de calcul évalué :

Ajouter une case pour stocker les gradients :





(Pourquoi `/df`? On cherche les dérivées partielle p.r. à la sortie, `f`)

(Rappel : on cherche la sensibilité de la sortie en fonction des variables du graphe)

$$f=(u+v)w$$

$$f=t_1w,\ t_1=u+v$$

$$\frac{\partial f}{\partial f}=1$$

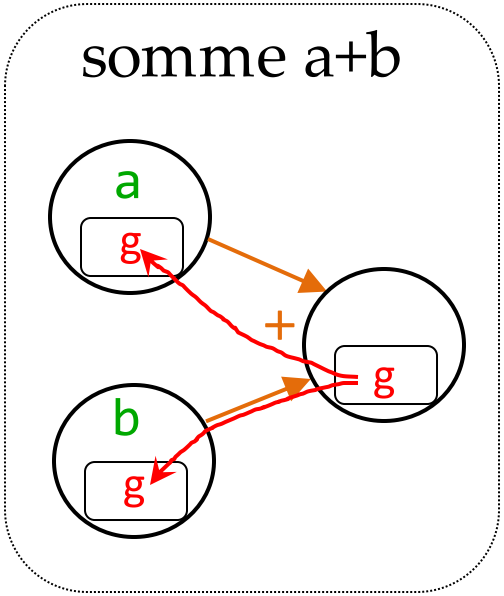
$$\frac{\partial f}{\partial w}=\frac{\partial}{\partial w}(t_1w)\frac{\partial f}{\partial f}=t_1\cdot 1$$

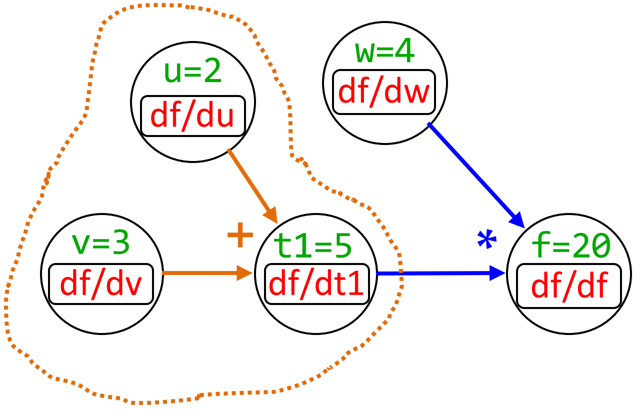
$$\frac{\partial f}{\partial t_1}=\frac{\partial}{\partial t_1}(t_1w)\frac{\partial f}{\partial f}=w\cdot 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial t_1}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial t_1}=1\cdot\frac{\partial f}{\partial t_1}=4$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial t_1}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial t_1}=1\cdot\frac{\partial f}{\partial t_1}=4$$

Tirer des règles de base



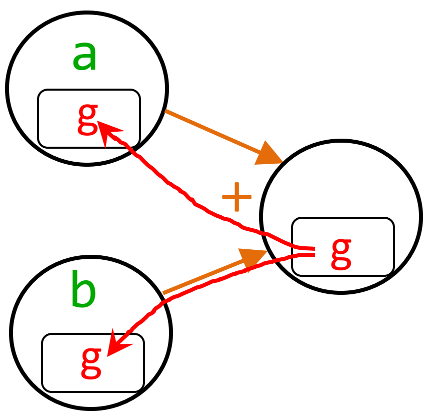


$$\frac{\partial f}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial w}(t_1 w)\frac{\partial f}{\partial f} = t_1 \cdot 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial t_1} = \frac{\partial}{\partial t_1}(t_1 w)\frac{\partial f}{\partial f} = w \cdot 1$$

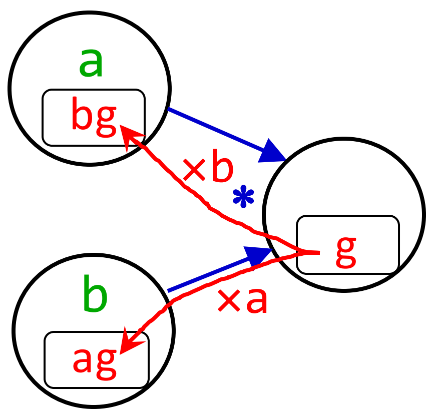
$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial t_1}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial t_1} = 1 \cdot \frac{\partial f}{\partial t_1} = 4 \qquad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial t_1}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial t_1} = 1 \cdot \frac{\partial f}{\partial t_1} = 4$$

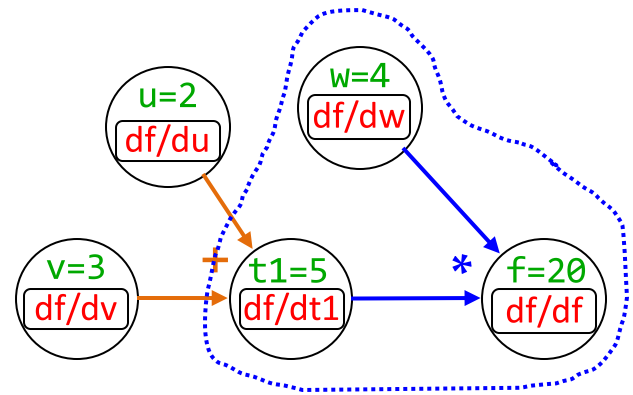
Tirer des règles de base

somme a+b



produit a*b





$$\frac{\partial f}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial w}(t_1 w)\frac{\partial f}{\partial f} = t_1 \frac{\partial f}{\partial f}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t_1} = \frac{\partial}{\partial t_1}(t_1 w)\frac{\partial f}{\partial f} = w \frac{\partial f}{\partial f}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial t_1}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial t_1} = 1 \cdot \frac{\partial f}{\partial t_1} = 4$$

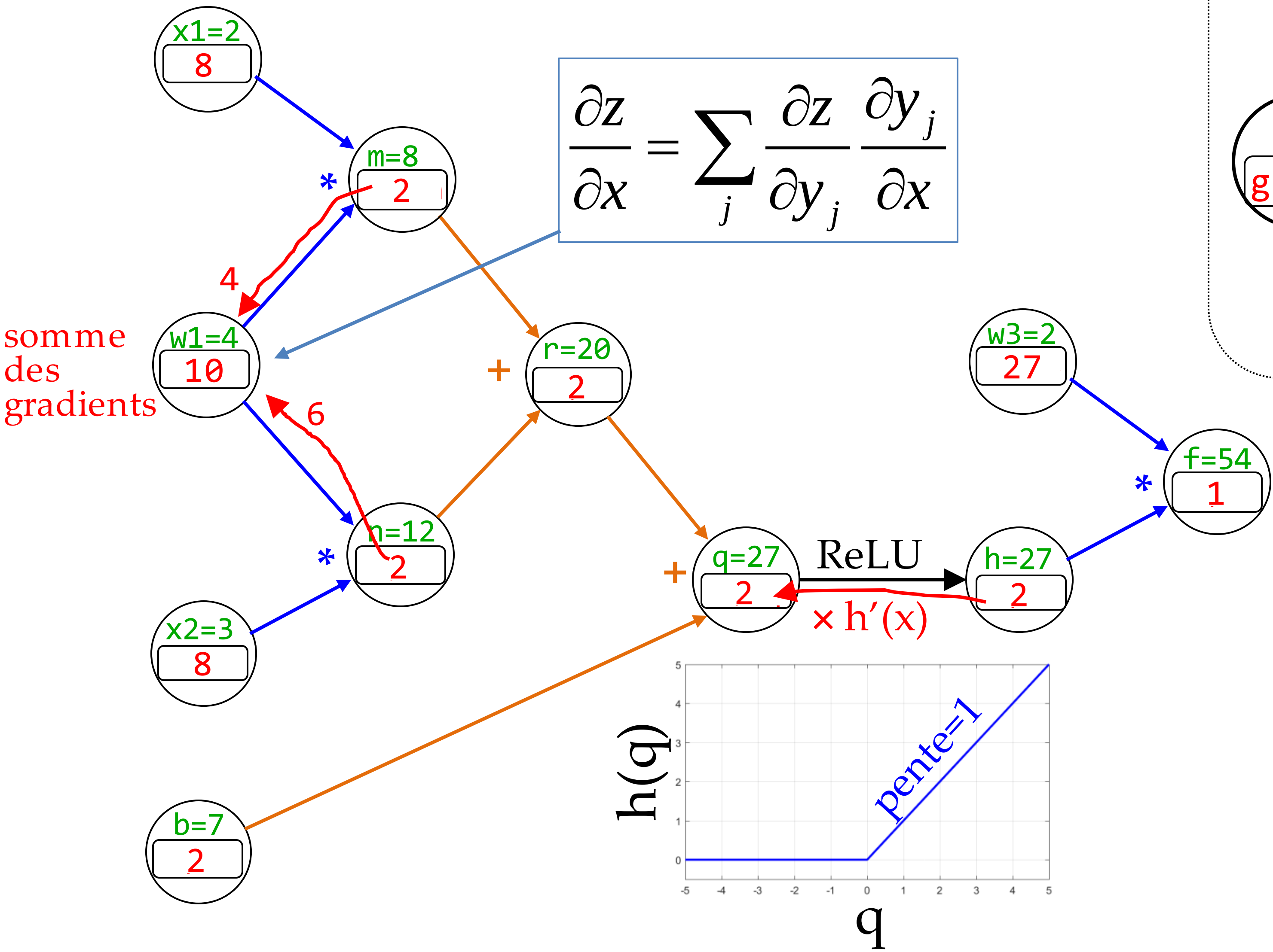
$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial t_1}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial t_1} = 1 \cdot \frac{\partial f}{\partial t_1} = 4$$

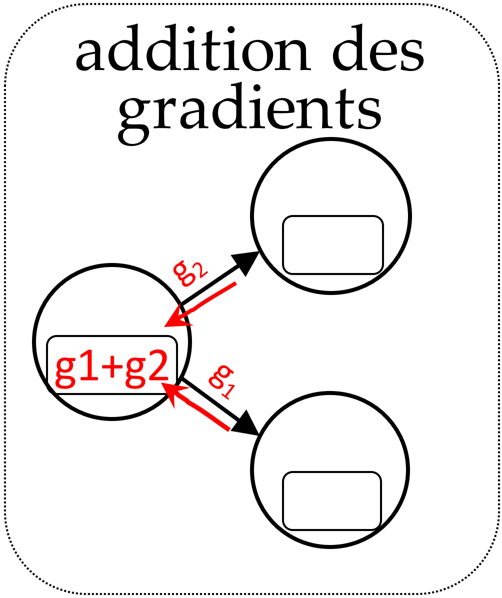
Deuxième exemple

$$f=w_3\mathrm{ReLU}(w_1x_1+w_1x_2+b)$$

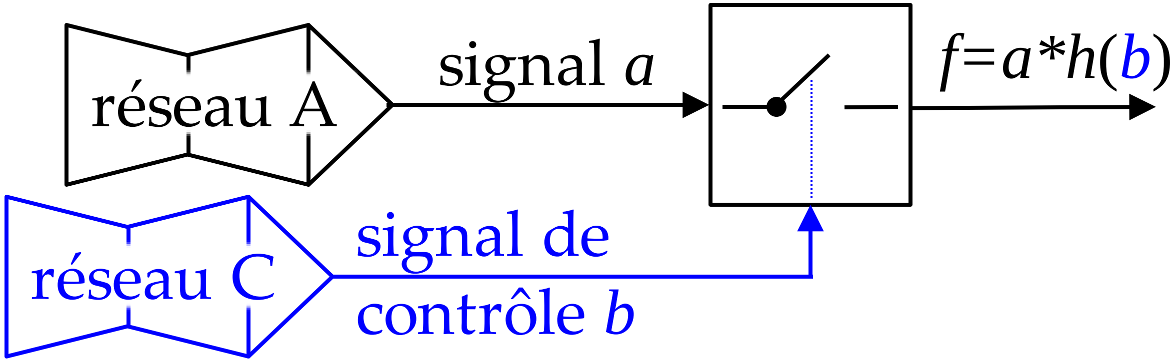
Deuxième exemple

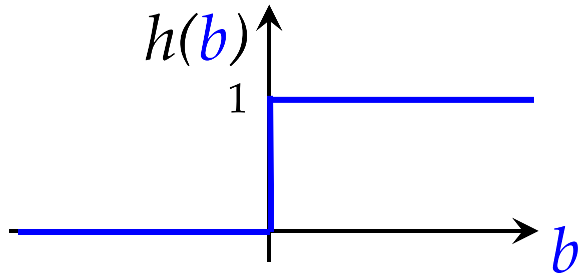
$$f = w_3 \mathrm{ReLU}(w_1 x_1 + w_1 x_2 + b)$$



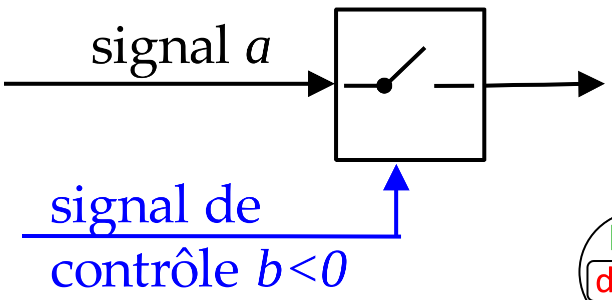


Gradient avec *gate* tout-ou-rien

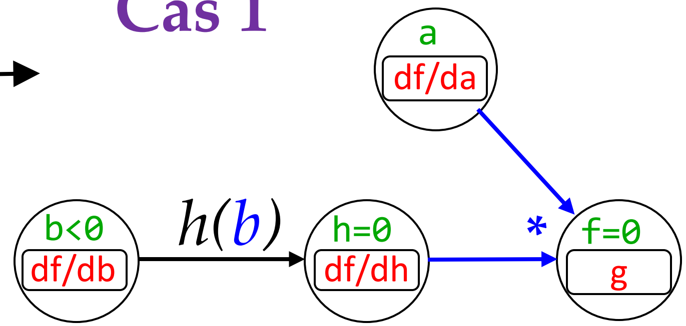


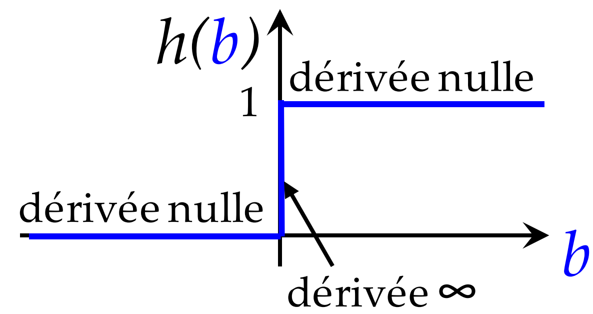


Gradient avec *gate* tout-ou-rien



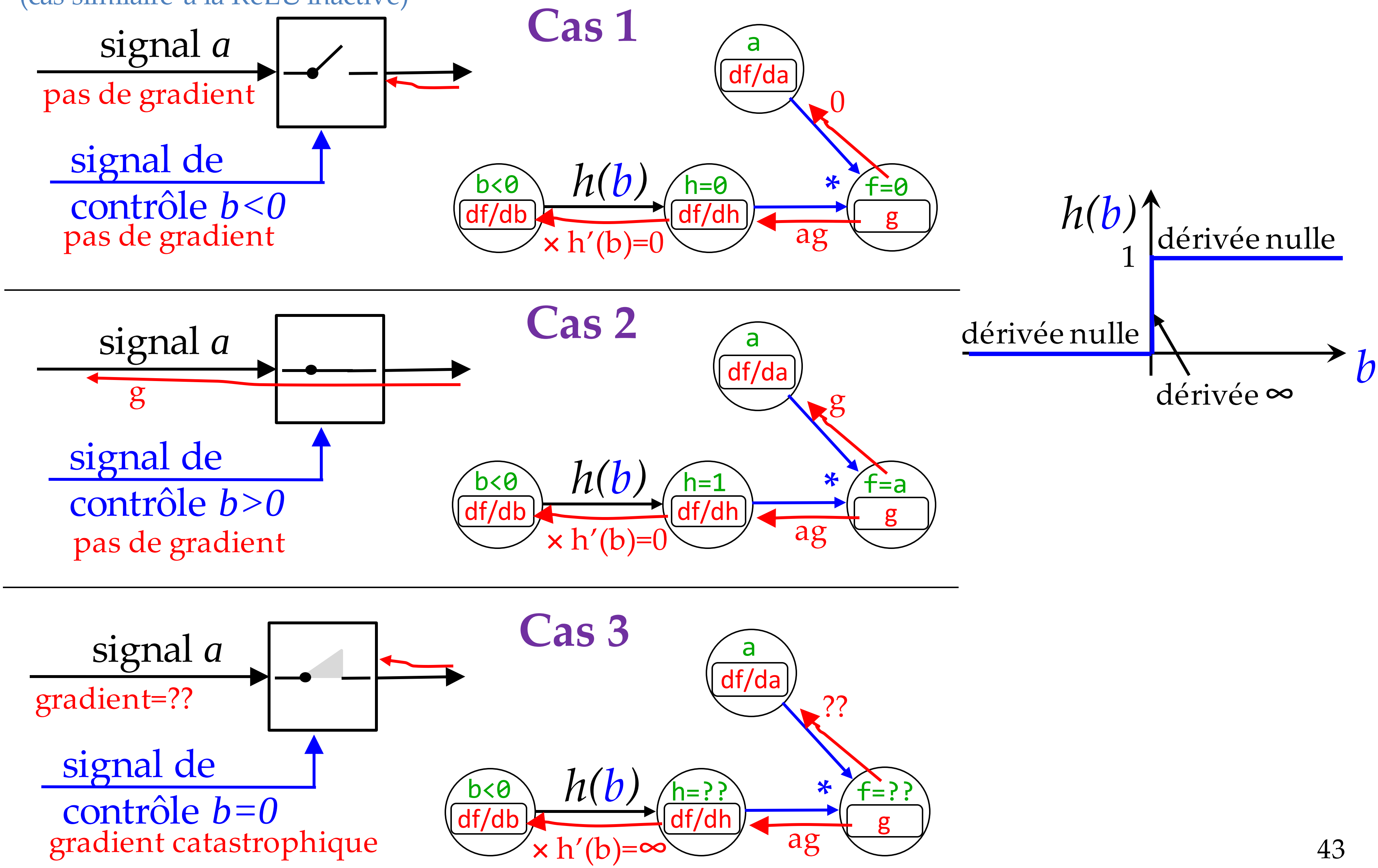
Cas 1



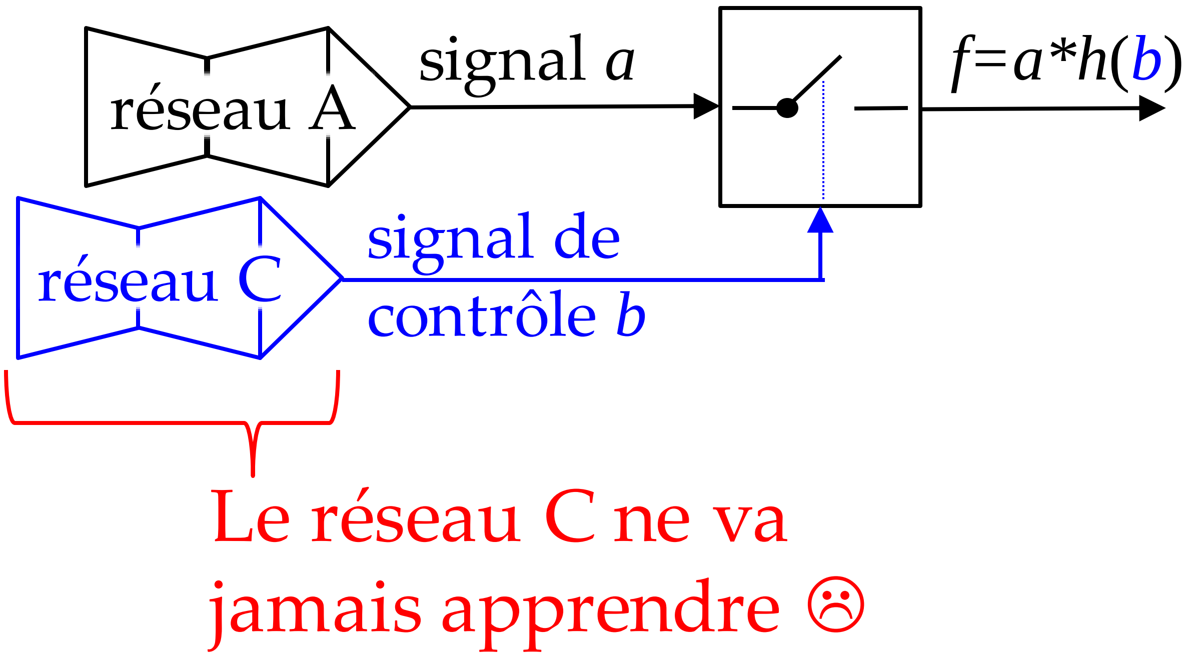


Gradient avec *gate* tout-ou-rien

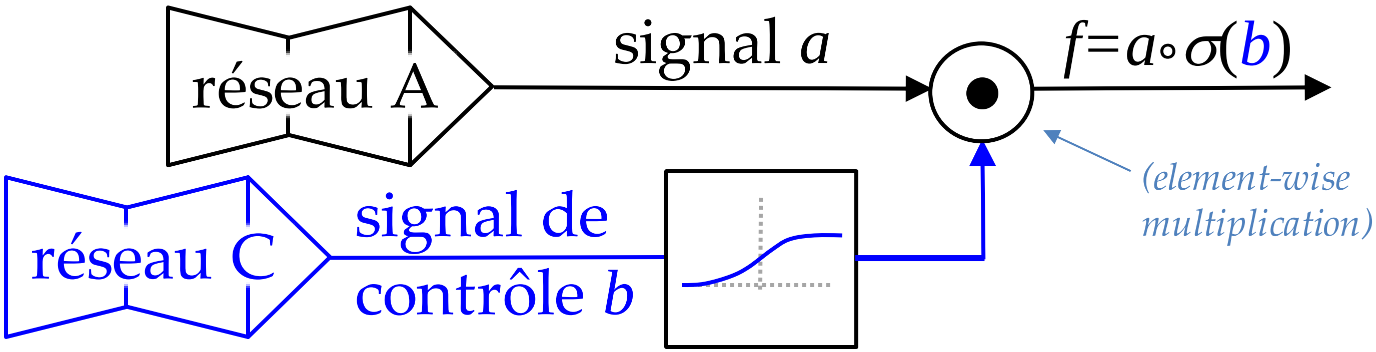
(cas similaire à la ReLU inactive)



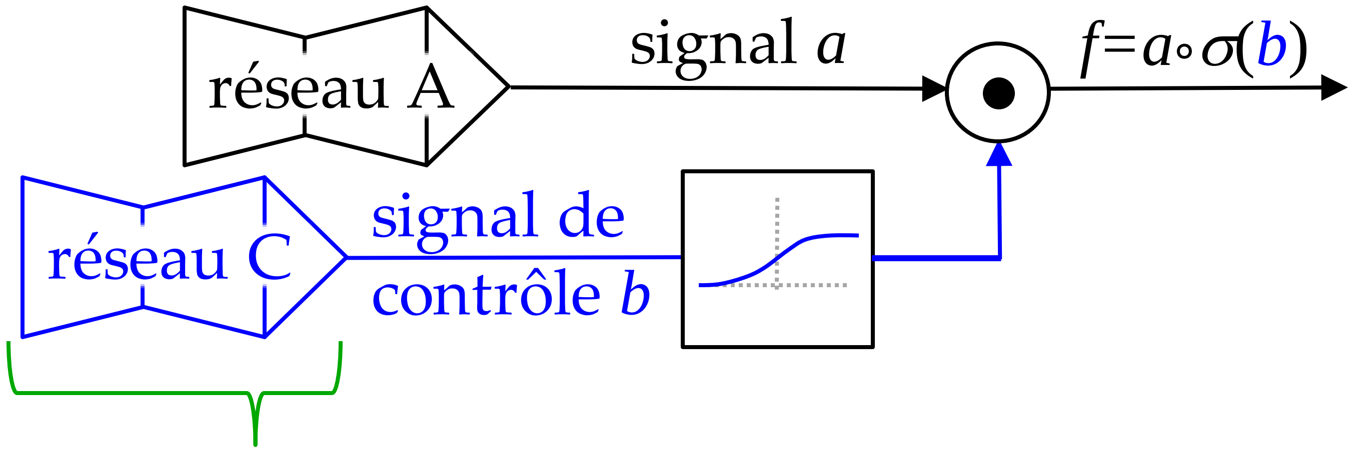
Gradient avec *gate* tout-ou-rien



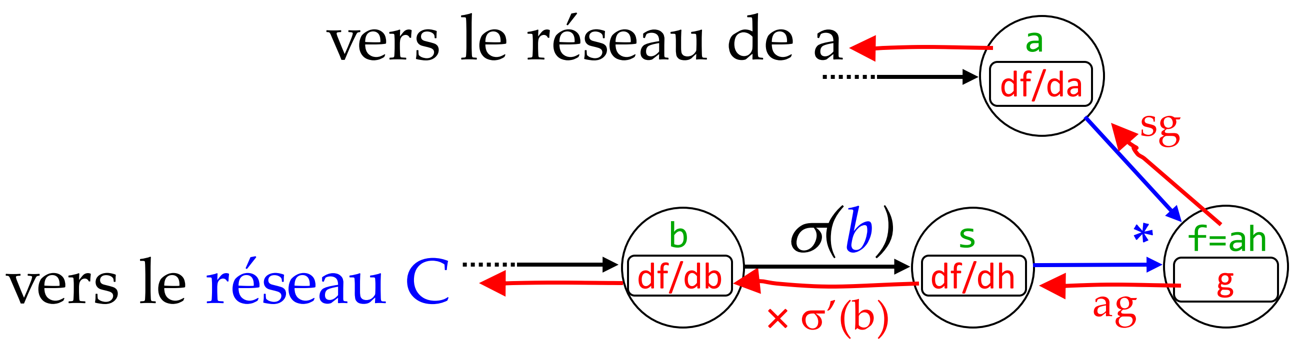
Gradient avec *gate* sigmoïde



Gradient avec *gate* sigmoïde



Ce réseau va apprendre ☺

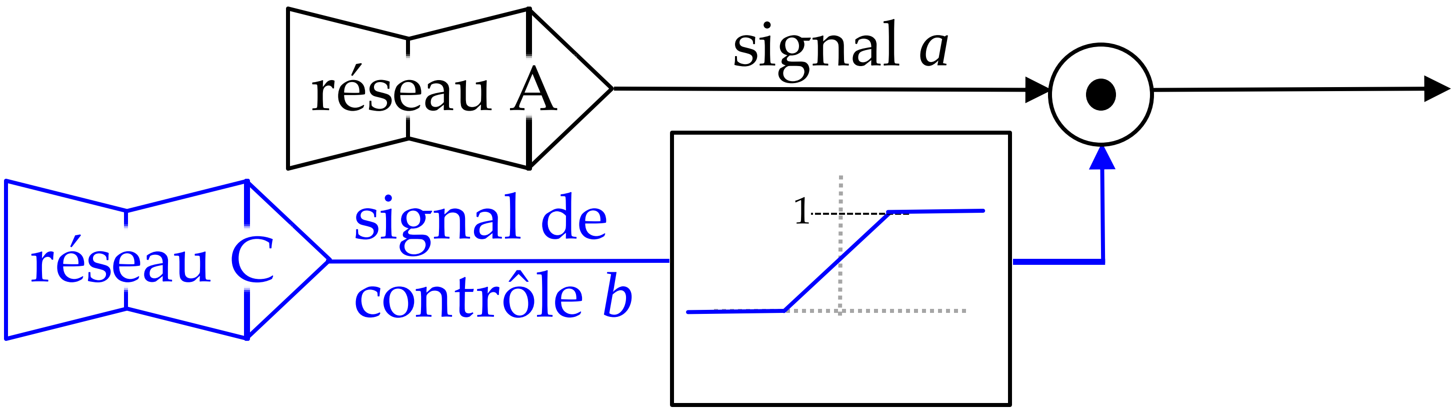


$$\sigma'(b) = \sigma(b)(1-\sigma(b))$$

Importance d'être dérivable/soft end-to-end

Question!

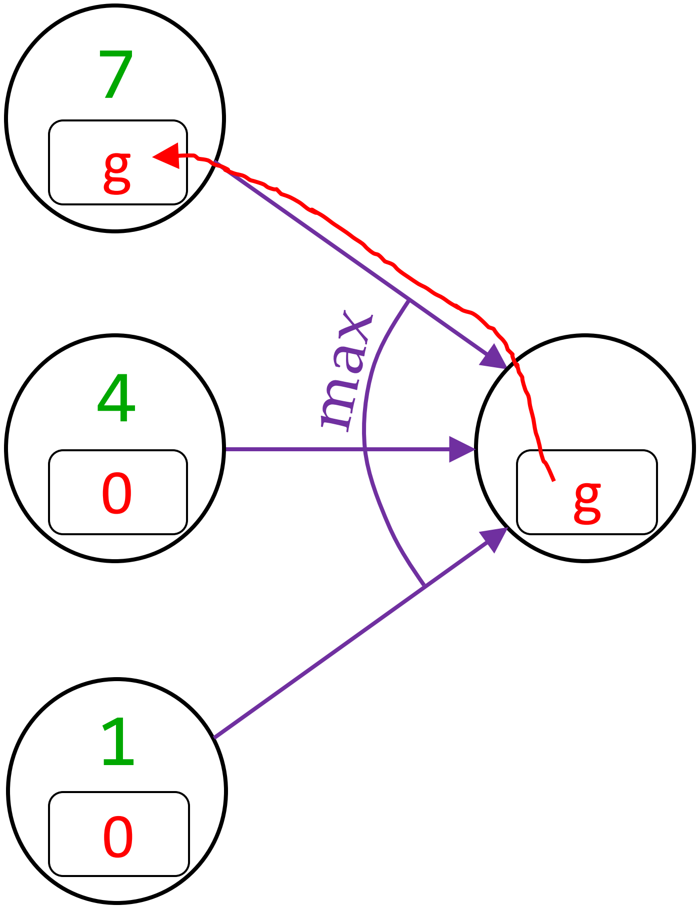
- Que pensez-vous de cette *gate*?



- On conserve encore le signal sortant entre 0 et *a* (c'est bien)
- Mais le réseau C n'apprendra que si le signal *b* est dans la zone linéaire!

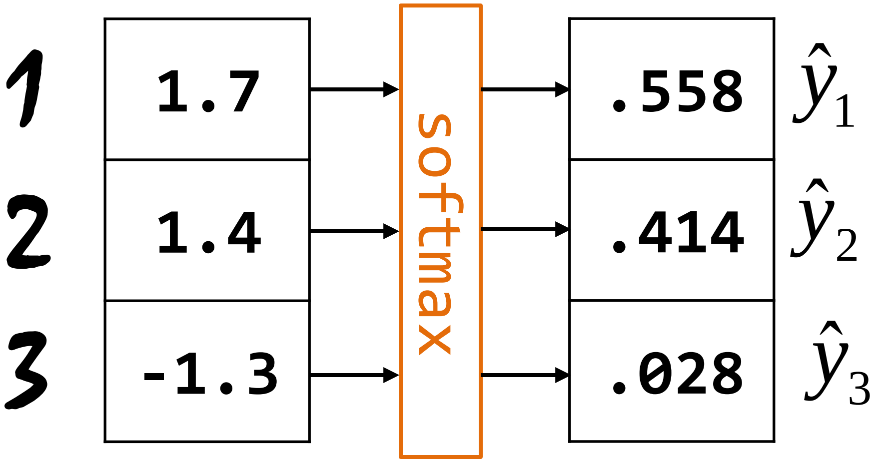
Autre règle

- Fonction max(z1,z2,z3…)



Gradient Softmax

Score s_i



$$\hat{y}_i = \frac{\exp(z_i)}{\sum_{j \in groupe} \exp(z_j)}$$

$$\frac{\partial \hat{y}_j}{\partial s_i} = \begin{cases} \hat{y}_i (1 - \hat{y}_i) & i = j \\ -\hat{y}_i \hat{y}_j & i \neq j \end{cases}$$

Voir https://eli.thegreenplace.net/2016/the-softmax-function-and-its-derivative/ pour la preuve.

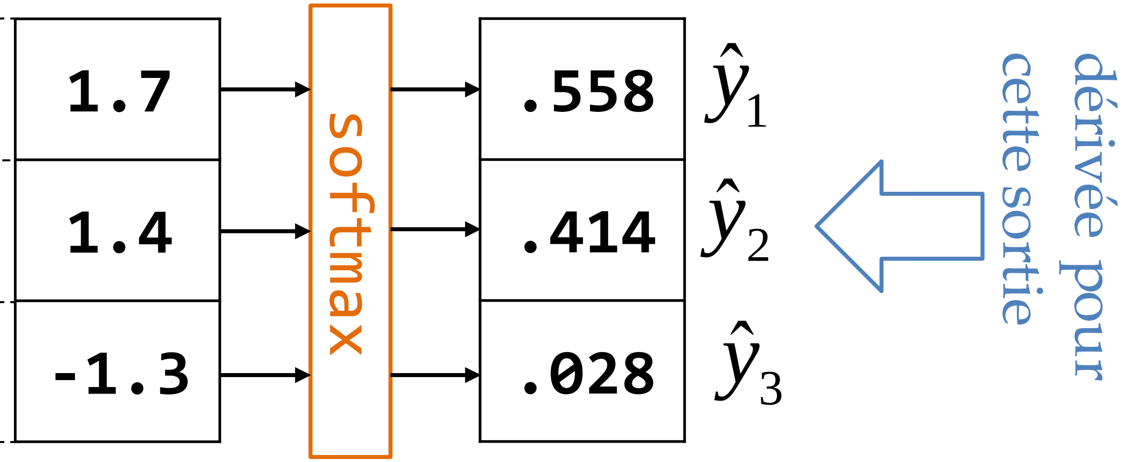
Exemple calcul gradient Softmax

Score $\mathbf{s_i}$

$$\frac{\partial \hat{y}_2}{\partial s_1} = -.558 \cdot 414 = -.231$$

$$\frac{\partial \hat{y}_2}{\partial s_2} = .414 \cdot (1 - .414) = .243$$

$$\frac{\partial \hat{y}_2}{\partial s_3} = -.028 \cdot .414 = -.012$$



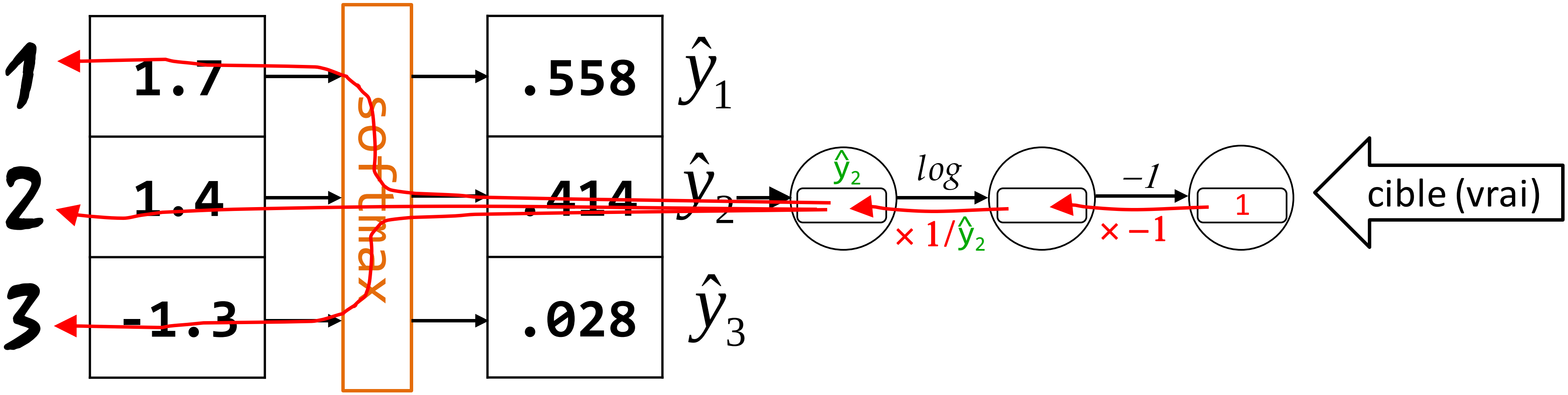
$$\hat{y}_i = \frac{\exp(z_i)}{\sum_{j \in groupe} \exp(z_j)}$$

$$\frac{\partial \hat{y}_j}{\partial s_i} = \begin{cases} \hat{y}_i (1 - \hat{y}_i) & i = j \\ -\hat{y}_i \hat{y}_j & i \neq j \end{cases}$$

Gradient Softmax + x-entropy loss

Score s_i

$$Loss = -\log \hat{y}_{cible}$$



$$\hat{y}_i = \frac{\exp(z_i)}{\sum_{j \in groupe} \exp(z_j)}$$

$$\frac{\partial \hat{y}_j}{\partial s_i} = \begin{cases} \hat{y}_i (1 - \hat{y}_i) & i = j \\ -\hat{y}_i \hat{y}_j & i \neq j \end{cases}$$

Intuition du livre

- softmax et perte avec un log vont bien ensemble

$$-\log(\hat{y}_{cible}) = -\log\left(\frac{\exp(z_i)}{\sum_{j \in groupe} \exp(z_j)}\right)$$

$$= -\left(\log\left(\exp(z_{cible})\right) - \log\left(\sum_{j \in groupe} \exp(z_j)\right)\right)$$

plus z_{cible} augmente,
plus la perte diminue

$$= \overbrace{-z_{cible}} + \underbrace{\log\left(\sum_{j \in groupe} \exp(z_j)\right)}_{\approx max(z_j)}$$

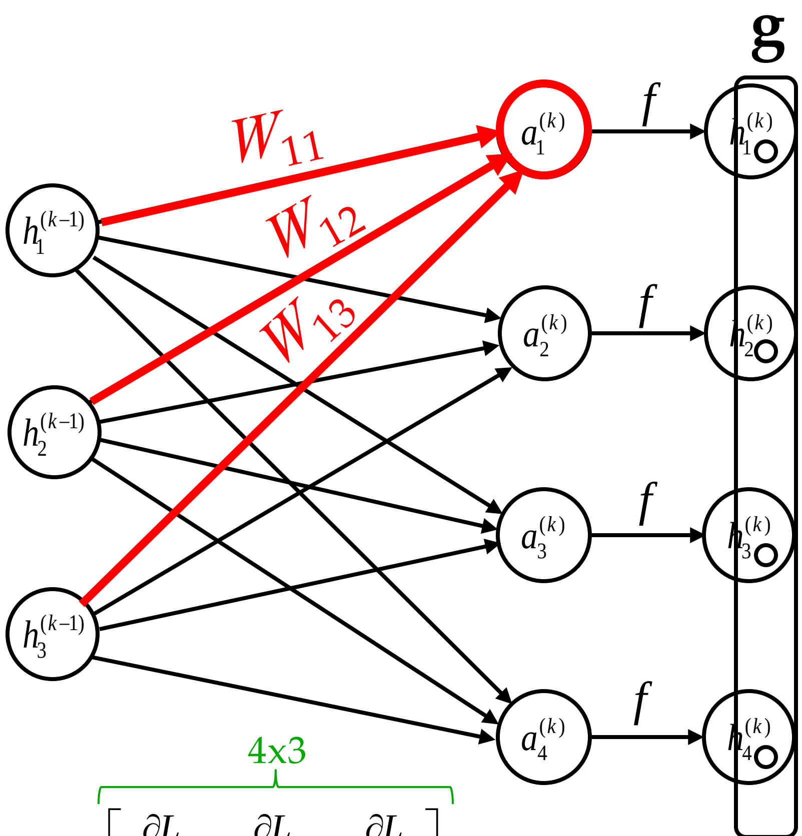
$\approx max(z_j)$
baisser le z_j de la classe
qui est la plus incorrecte

Section 6.2.2.3 du livre, p. 178-182

Notes sur Softmax, X-entropy loss

- Différence entre *multiclass* SVM et c-e :
  - La perte MC SVM pourrait atteindre 0, et le training va s'arrêter
  - Pas pour c-e : les sorties $\hat{y} = f(x)$ ne seront jamais complètement 0 ou 1, algo va juste pousser les scores vers $+\infty$ pour bonne classe et $-\infty$ pour les autres.
- Sortie softmax s'entraîne mal avec une fonction de perte sans *log*, comme $(\bullet)^2$ (p.180)
- Lien avec *lateral inhibition* en biologie (*winner-takes-all*)

Exemple backprop couche MLP



$$g \leftarrow g \odot f'(a^{(k)})$$

Gradient $\nabla_W L$ des poids (comment les poids W affectent la perte L)

$$a^{(k)} = \overbrace{W^{(k)}}^{4\text{x}3} h + b^{(k)}$$

$$a_1^{(k)} = W_{11} h_1^{(k-1)} + W_{12} h_2^{(k-1)} + W_{13} h_3^{(k-1)}$$

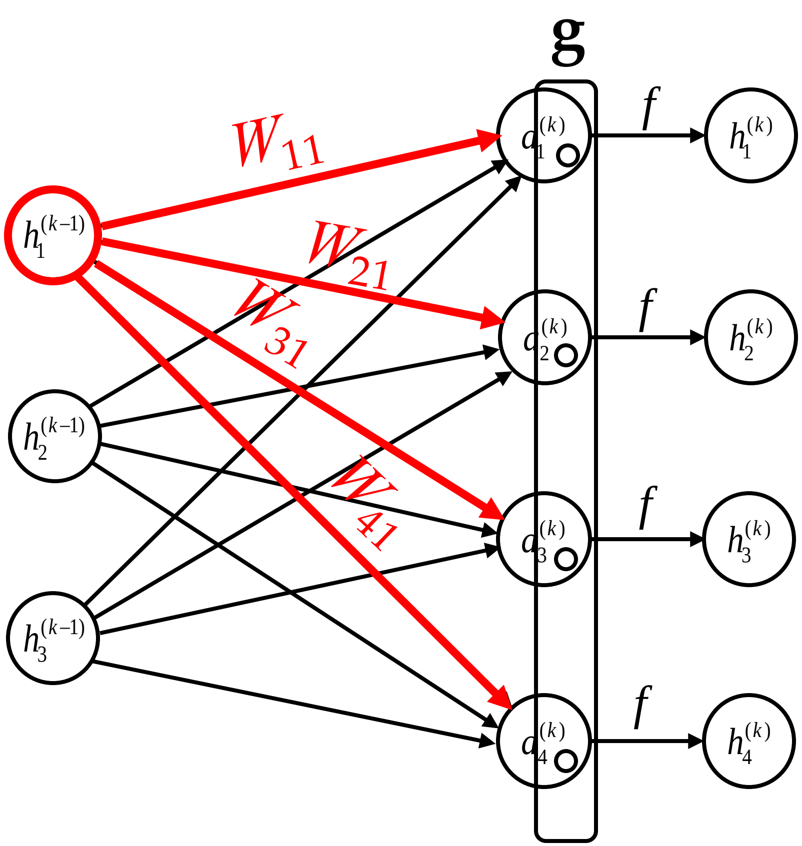
$$\frac{\partial L}{\partial W_{11}} = \frac{\partial a_1^{(k)}}{\partial W_{11}} \frac{\partial L}{\partial a_1^{(k)}} = g_1 h_1^{(k-1)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial W_{12}} = \frac{\partial a_1^{(k)}}{\partial W_{12}} \frac{\partial L}{\partial a_1^{(k)}} = g_1 h_2^{(k-1)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial W_{np}} = \frac{\partial a_n^{(k)}}{\partial W_{np}} \frac{\partial L}{\partial a_n^{(k)}} = g_n h_p^{(k-1)}$$

$$\nabla_W L = \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial W_{11}} & \frac{\partial L}{\partial W_{12}} & \frac{\partial L}{\partial W_{13}} \\ \frac{\partial L}{\partial W_{21}} & \frac{\partial L}{\partial W_{22}} & \frac{\partial L}{\partial W_{23}} \\ \frac{\partial L}{\partial W_{31}} & \frac{\partial L}{\partial W_{32}} & \frac{\partial L}{\partial W_{33}} \\ \frac{\partial L}{\partial W_{41}} & \frac{\partial L}{\partial W_{42}} & \frac{\partial L}{\partial W_{43}} \end{bmatrix}}^{4\text{x}3} = \begin{bmatrix} g_1 h_1^{(k-1)} & g_1 h_2^{(k-1)} & g_1 h_3^{(k-1)} \\ g_2 h_1^{(k-1)} & g_2 h_2^{(k-1)} & g_2 h_3^{(k-1)} \\ g_3 h_1^{(k-1)} & g_3 h_2^{(k-1)} & g_3 h_3^{(k-1)} \\ g_4 h_1^{(k-1)} & g_4 h_2^{(k-1)} & g_4 h_3^{(k-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1^{(k-1)} & h_2^{(k-1)} & h_3^{(k-1)} \end{bmatrix} = g h^{(k-1)T}$$

Exemple backprop couche MLP



Propager gradient g vers $h^{(k-1)}$

$$a^{(k)} = \overbrace{W^{(k)}}^{4\text{x}3} h + b^{(k)}$$

$$a_1^{(k)} = \boxed{W_{11}} h_1^{(k-1)} + W_{12} h_2^{(k-1)} + W_{13} h_3^{(k-1)}$$

$$a_2^{(k)} = \boxed{W_{21}} h_1^{(k-1)} + W_{22} h_2^{(k-1)} + W_{23} h_3^{(k-1)}$$

$$\cdots$$

$$a_4^{(k)} = \boxed{W_{41}} h_1^{(k-1)} + W_{42} h_2^{(k-1)} + W_{43} h_3^{(k-1)}$$

W_{j1}

$$\frac{\partial L}{\partial h_i^{(k-1)}} = \underbrace{\sum_j \frac{\partial a_j^{(k)}}{\partial h_i^{(k-1)}} \overbrace{\frac{\partial L}{\partial a_j^{(k)}}}^{g_j}}_{\text{Forme de l'équation (6.49) du livre}} = \sum_j W_{ji} g_j$$

= produit scalaire entre $W_{j1}{}^{\mathrm{T}}$ et **g**

$$\nabla_{h_i^{(k-1)}} L : g \leftarrow W^T g$$

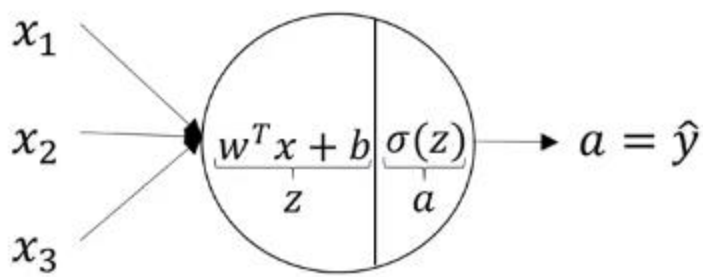
“Gradient check”

- Dérivée numérique (lente) :

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_i} \approx \frac{f(\theta_1,\ldots,\theta_i+\varepsilon,\ldots)-f(\theta_1,\ldots,\theta_i-\varepsilon,\ldots)}{2\varepsilon}$$

- Dérivée analytique est rapide, mais facile de se tromper
- Vérifie l’implémentation de la dérivée analytique avec la dérivée numérique : *gradient check*
- Dans PyTorch, : **`autograd`** calculera automatiquement les gradients pour vous. Mais pas dans les TP ni les examens ;)

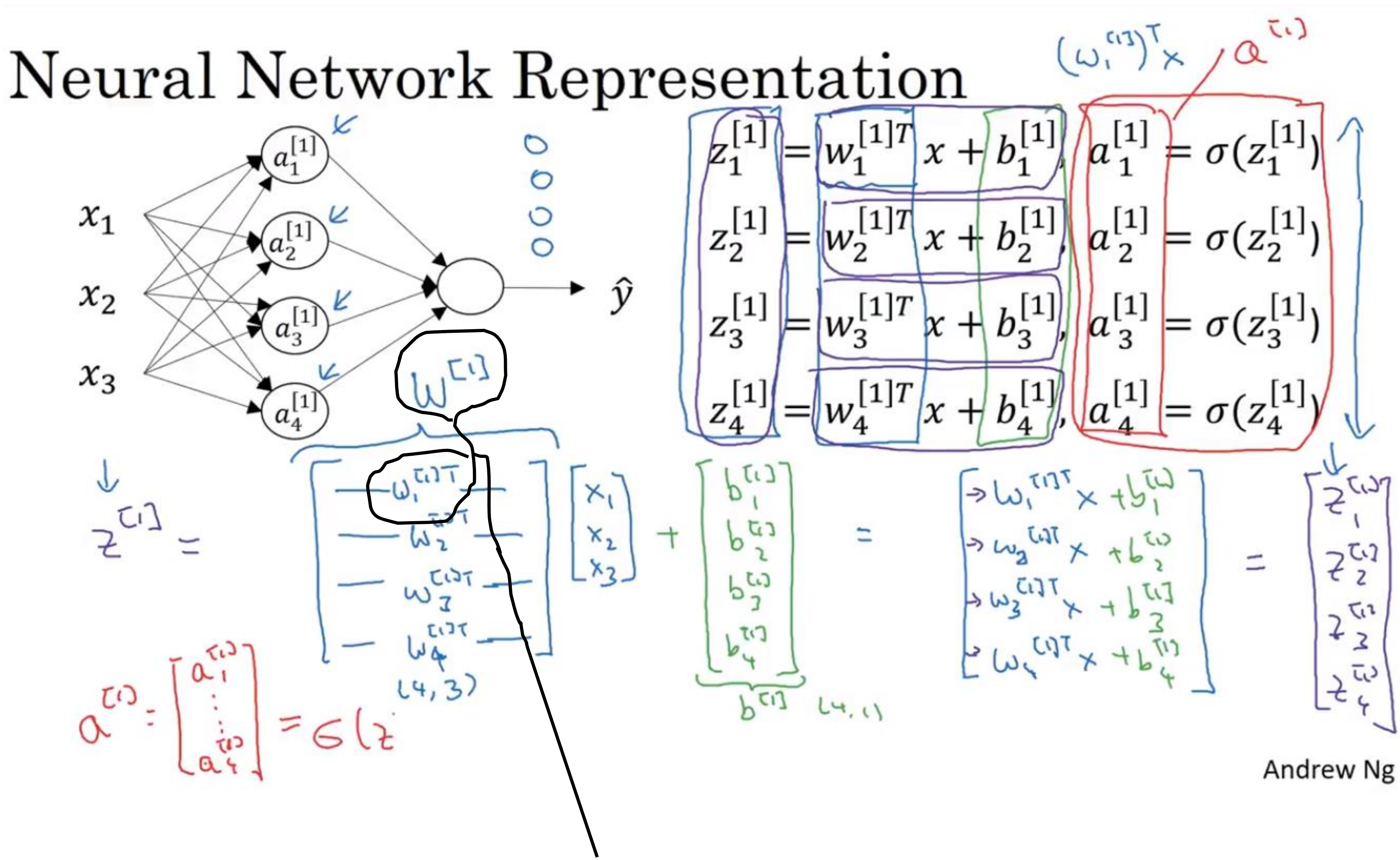
junk



$z = w^T x + b$

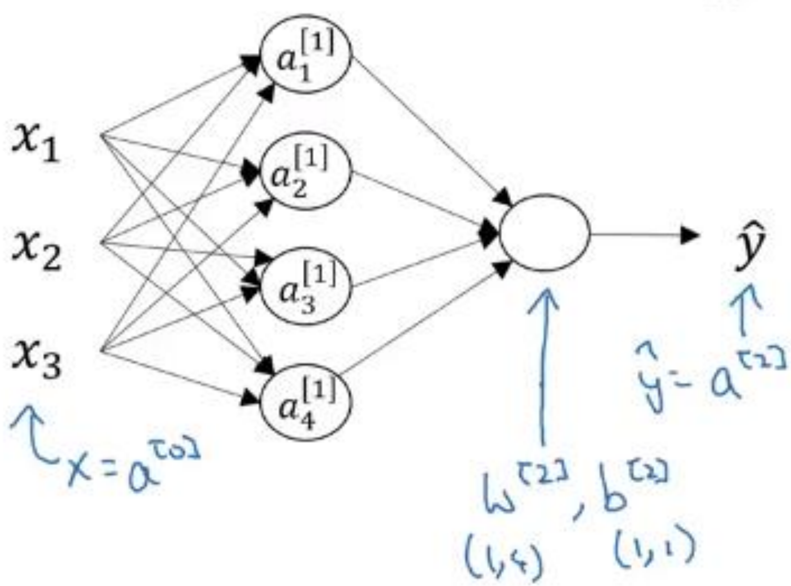
$a = \sigma(z)$

Vectorisation



On voit ici pourquoi c'est pas W^T

Vectorisation



Given input x:

$$\rightarrow \underset{(4,1)}{z^{[1]}} = \underset{(4,3)}{W^{[1]}} \underset{(3,1)}{\overset{a^{[0]}}{\cancel{x}}} + \underset{(4,1)}{b^{[1]}}$$

$$\rightarrow \underset{(4,1)}{a^{[1]}} = \sigma(\underset{(4,1)}{z^{[1]}})$$

$$\rightarrow \underset{(1,1)}{z^{[2]}} = \underset{(1,4)}{W^{[2]}} \underset{(4,1)}{a^{[1]}} + \underset{(1,1)}{b^{[2]}}$$

$$\rightarrow \underset{(1,1)}{a^{[2]}} = \sigma(\underset{(1,1)}{z^{[2]}})$$

Vectorisation

Vectorizing across multiple examples

```
for i = 1 to m:
```

$$\boxed{z^{[1](i)}} = W^{[1]}x^{(i)} + b^{[1]}$$

$$\boxed{a^{[1](i)}} = \sigma(z^{[1](i)})$$

$$\boxed{z^{[2](i)}} = W^{[2]}a^{[1](i)} + b^{[2]}$$

$$\boxed{a^{[2](i)}} = \sigma(z^{[2](i)})$$

$$Z^{[1]} = W^{[1]} X + b^{[1]}$$

$$A^{[1]} = \sigma(Z^{[1]})$$

$$Z^{[2]} = W^{[2]} A^{[1]} + b^{[2]}$$

$$A^{[2]} = \sigma(Z^{[2]})$$

$$X = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ x^{(1)} & x^{(2)} & \cdots & x^{(m)} \\ | & | & & | \end{bmatrix} \quad (n_x, m)$$

$$Z^{[1]} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ z^{[1](1)} & z^{[1](2)} & \cdots & z^{[1](m)} \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

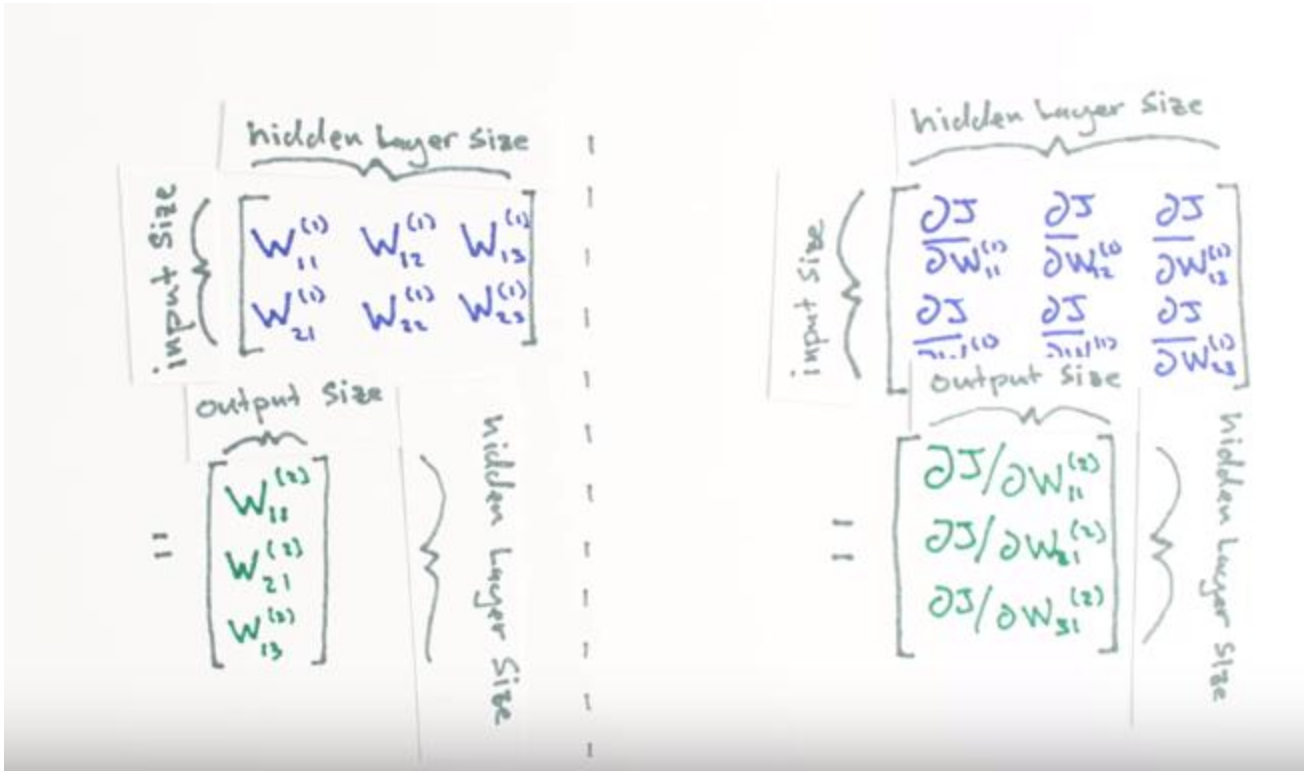
$$A^{[1]} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ a^{[1](1)} & a^{[1](2)} & \cdots & a^{[1](m)} \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

Batch norm

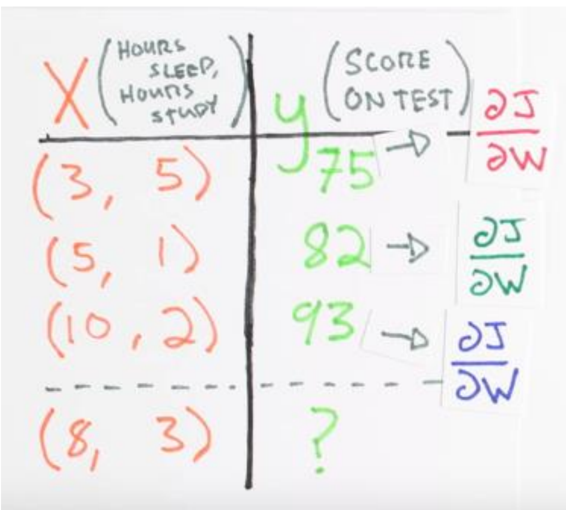
- https://github.com/ducha-aiki/caffenet-benchmark/blob/master/batchnorm.md

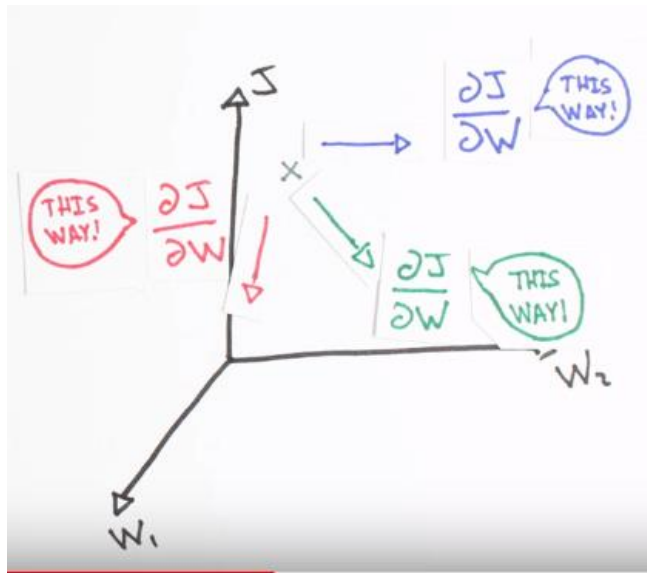
Backprop

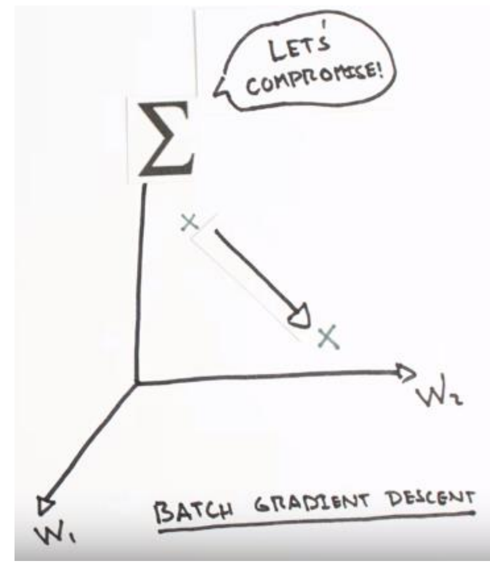
- W et dW doivent avoir la même forme



Gradient sur plusieurs exemples







Objectif

- Pas accès à *f**, mais plutôt à des échantillons :
  - Pairs (x,y) pour l'entraînement supervisé
- Algo d'entraînement ne sait pas quelles valeurs attribuer aux sorties des couches cachées