3D OpenGL : Résumé du cour 1

Clément Barbaste

24 janvier 2014

Première partie

Rappel géometrie

Chapitre 1

Vecteurs

1.1 Rappel des opérations de base sur les vecteurs

1.1.1 Définition d'un vecteur

Un vecteur défini une direction dans l'espace. Un vecteur est défini par 3 coordonnées. Soit le vecteur $\vec{U} = \{U_x, U_y, U_z\}$ définie par 3 coordonnées, avec les points $A = \{A_x, A_y, A_z\}$ et $B = \{B_x, B_y, B_z\}$ à ses extrémitées :

$$\vec{U} = \begin{vmatrix} U_x & = & B_x - A_x \\ U_y & = & B_y - A_y \\ U_z & = & B_z - A_z \end{vmatrix}$$

1.1.2 Addition et Multiplication d'un scalaire

Soit le vecteur $\vec{U}$.

$$\vec{U} \times 1.5 \quad = \quad \begin{vmatrix} U_x \times 1.5 \\ U_y \times 1.5 \\ U_z \times 1.5 \end{vmatrix}$$

$$\vec{U} + \vec{V} \quad = \quad \begin{vmatrix} U_x + V_x \\ U_y + V_y \\ U_z + V_z \end{vmatrix}$$

1.1.3 Norme d'un vecteur

Soit le vecteur $\vec{U}$ avec à ses extrémitées les point A et B tel que $\vec{U} = \vec{AB}$. La norme de $\vec{U}$ noté $\|\vec{U}\|$ vaut :

$$\|\vec{U}\| = \sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2}$$

$\|\vec{U}\|$ = distance entre A et B.
Si $\|\vec{U}\| = 1$, alors $\vec{U}$ est **normé**.
Pour obtenir un vecteur $\overrightarrow{Un}$, normé et de même direction que $\vec{U}$:

$$\overrightarrow{Un} = \left| \begin{array}{lcl} Un_x & = & \frac{U_x}{\|\vec{U}\|} \\ Un_y & = & \frac{U_y}{\|\vec{U}\|} \\ Un_z & = & \frac{U_z}{\|\vec{U}\|} \end{array} \right|$$

1.1.4 Produit scalaire

Le produit scalaire entre 2 vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ se note : $\vec{U} \cdot \vec{V}$

$$\begin{array}{ccc} \vec{U} \cdot \vec{V} & = & U_x \times V_x + U_y \times V_y + U_z \times V_z \\ \text{ou} & & \\ \vec{U} \cdot \vec{V} & = & \cos\alpha \times \|\vec{U}\| \times \|\vec{V}\| \end{array}$$

1.1.5 Produit vectoriel

Le produit vectoriel entre 2 vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ se note : $\vec{U} \wedge \vec{V}$

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = \left| \begin{array}{lcl} U_y \times V_z & - & U_z \times V_y \\ U_z \times V_x & - & U_x \times V_z \\ U_x \times V_y & - & U_y \times V_x \end{array} \right|$$

Relation entre le produit vectoriel et l'angle :

$$\|\vec{U} \wedge \vec{V}\| = \sin\alpha \times \|\vec{U}\| \times \|\vec{V}\|$$

1.1.6 Propriétés importantes

$$\begin{array}{rcl} \text{Symétrie} & \rightarrow & \vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{U} \\ \text{Distributivité} & \rightarrow & \vec{U} \cdot (\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U} \cdot \vec{V} + \vec{U} \cdot \vec{W} \\ \text{Homogénéité} & \rightarrow & (\lambda\vec{U}) \cdot \vec{V} = \lambda(\vec{U} \cdot \vec{V}) \\ \text{lien avec la norme} & \rightarrow & \vec{U} \cdot \vec{U} = \|\vec{U}\|^2 \\ \text{Orthogonalité} & \Longleftrightarrow & \vec{U} \cdot \vec{V} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 90^\circ \text{ ou } 270^\circ \\ \text{Colinéarité} & \Longleftrightarrow & \|\vec{U} \wedge \vec{V}\| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0^\circ \text{ ou } 180^\circ \end{array}$$

Chapitre 2

Matrices

2.1 Rappel des opérations de base sur les matrices

2.1.1 Définition d'une matrice

Soit A une matrice $m \times n$, m étant le nombre de **lignes** et n le nombre de **colonnes** :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_m m, 3 & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Une matrice peut être vue comme un vecteur vertical, avec les coordonnées du vecteur. ex :

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix}$$

2.1.2 Addition et multiplication entre matrices

Soit les matrices A et B. $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix}$

$A + B = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} \end{pmatrix}$

$A \times B = \begin{pmatrix} a_{1,1} \times b_{1,1} + a_{1,2} \times b_{2,1} & a_{1,1} \times b_{1,2} + a_{1,2} \times b_{2,2} \\ a_{2,1} \times b_{1,1} + a_{2,2} \times b_{2,1} & a_{2,1} \times b_{1,2} + a_{2,2} \times b_{2,2} \end{pmatrix}$

2.1.3 Multiplication d'une matrice et d'un scalaire

$$\lambda \times A = \begin{pmatrix} \lambda \times a_{1,1} & \lambda \times a_{1,2} \\ \lambda \times a_{2,1} & \lambda \times a_{2,2} \end{pmatrix}$$

Deuxième partie

Géometrie 2D-3D

Chapitre 3

Projections

Il existe plusieurs types de projection, ellse seront rappellés dans les section à suivre.

3.1 Projection orthogonale

3.1.1 Projection d'un point sur une droite

Soit une droite d définie par 2 points A et B. Ainsi que C, le point à projeter sur la droite d. Le point projeté se nomme C'. Par Pytagore, on sait que :

$$\frac{\|\overrightarrow{AC'}\|}{\|\overrightarrow{AC}\|} = \cos\alpha$$

D'après la *section 1.1.4* :

$$\frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AC}\| \times \|\overrightarrow{AB}\|} = \cos\alpha$$

On peut en deduire :

$$\|\overrightarrow{AC'}\| = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$$

Maintenant qu'on a la norme de $\overrightarrow{AC'}$, il nous faut projeter le point C sur d. Pour cela il suffit de translater A par $\overrightarrow{AB}$ normé, avec une distance $\|\overrightarrow{AC'}\|$. On notera ce vecteur normé $\vec{u}$, pour vecteur Unitaire.

$$\begin{aligned}
C'_x &= A_x + Ux \times \|\overrightarrow{AC'}\| \\
C'_y &= A_y + Uy \times \|\overrightarrow{AC'}\| \\
C'_z &= A_z + Uz \times \|\overrightarrow{AC'}\|
\end{aligned}$$

3.1.2 Projection d'un point sur un plan

Soit le plan P défini par le point A et le vecteur normal $\vec{n}$. Ainsi que le point B, à projeter sur le plan. Le point projeté se nomera B'.

$$\frac{\|\overrightarrow{BB'}\|}{\|\overrightarrow{BA}\|} = \cos\alpha$$

D'après la *section 1.1.4* :

$$\frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{n}}{\|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{n}\|} = \cos\alpha$$

On en deduit :

$$\|\overrightarrow{BB'}\| = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{n}}{\|\overrightarrow{n}\|}$$

Maintenant qu'on a la norme de $\overrightarrow{BB'}$, il suffit de translater B par $\vec{n}$ normé (qu'on nommera $\vec{u}$), avec une distance $\|\overrightarrow{BB'}\|$.

$$\begin{array}{rcl}
B'_x & = & B_x - n_x \times \|\overrightarrow{BB'}\| \\
B'_y & = & B_y - n_y \times \|\overrightarrow{BB'}\| \\
B'_z & = & B_z - n_z \times \|\overrightarrow{BB'}\|
\end{array}$$

Chapitre 4

Transformation

4.1 Translation

On applique une translation avec un vecteur $\vec{U}$ à chaque point de l'objet, les liaisons entre les points restent les mêmes.

4.2 Mise à l'échelle

On choisit un point C dans l'espace, puis on fait une multiplication scalaire, par un ratio r, sur chaque vecteurs avec, C, et un sommet de la figure à mettre à l'échelle, aux extrémitées. Si le point C n'est pas au centre de la figure, celle-ci sera déformée par la mise à l'echelle.

4.3 Rotations

En supposant un point $A = \{A_x, A_y, A_z\}$, et que l'angle de rotation se nomme α.

4.3.1 Rotation par l'axe OX

On considère le point comme une matrice {3,1}

$$A = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

Puis pour appliquer la rotation, multiplie la matrice A par la matrice de rotation en $\overrightarrow{Ox}$.

$$\begin{aligned} A' &= rotOx \times A \\ A' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4.3.2 Rotation par l'axe OY

Identique que pour OX, sauf pour la matrice de rotation qui est :

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

4.3.3 Rotation par l'axe OZ

Identique que pour OX, sauf pour la matrice de rotation qui est :

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.3.4 Rotation autour d'un axe quelconque

On suppose que l'axe de rotation est le vecteur unitaire $\vec{u}$. Voici la matrice de rotation :

$$\begin{pmatrix} u_x^2 + (1 - u_x^2)\cos\alpha & u_x u_y(1-\cos\alpha) - u_z\sin\alpha & u_x u_z(1-\cos\alpha) + u_y\sin\alpha \\ u_x u_y(1-\cos\alpha) + u_z\sin\alpha & u_y^2 + (1 - u_y^2)\cos\alpha & u_y u_z(1-\cos\alpha) - u_x\sin\alpha \\ u_x u_z(1-\cos\alpha) - u_y\sin\alpha & u_y u_z(1-\cos\alpha) + u_x\sin\alpha & u_z^2 + (1 - u_z^2)\cos\alpha \end{pmatrix}$$

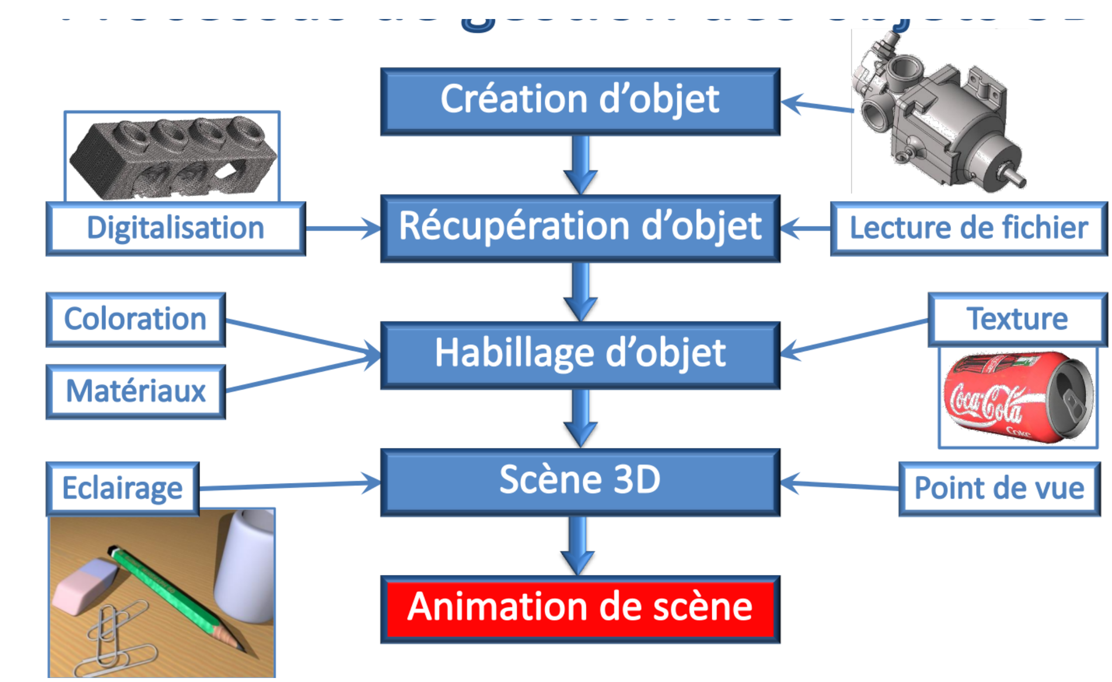
Troisième partie

Notions de cour

Chapitre 5

Notions sur les objets 3D

5.1 Etapes de conception



5.2 Différentes formes de 3D