

# Отчёт

## Задача 5

Титанюк Ульяна

422

# 1 Теоретическое решение дифференциального уравнения

## 1.1 Линейная задача

Решаем уравнение  $u_t - \frac{u_x}{2} = 0$  с начальными условиями

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0 \\ 4x & \text{if } 0 < x \leq 0.25 \\ 1 & \text{if } x > 0.25, \end{cases}$$

Запишем характеристическую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{x} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Следовательно,  $2x + t = \text{const}$  -уравнение характеристик

Общее решение уравнения:  $u = f(2x + t)$  Учитывая начальные условия, получим

$$u(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{if } -1 \leq x < -\frac{t}{2} \\ 4x & \text{if } -\frac{t}{2} \leq x < \frac{1}{4} - \frac{t}{2} \\ 1 & \text{if } -\frac{t}{2} \leq x < 1, \end{cases}$$

(см.Рис. 1).

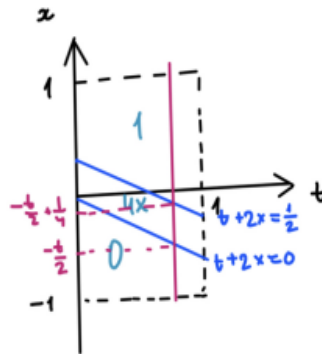


Рис. 1

## 1.2 Нелинейная задача

Решаем уравнение  $u_t - uu_x = 0$  с начальными условиями

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0 \\ 4x & \text{if } 0 < x \leq 0.25 \\ 1 & \text{if } x > 0.25, \end{cases}$$

Запишем характеристическую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{x} = -u \\ \dot{u} = 0 \end{cases}$$

Следовательно,  $x = -u_0 t + x_0$ . С учетом начальных условий при  $x \in (0, 0.25]$   $x(t) = -4x_0 t + x_0 = x_0(1 - 4t)$ , то есть при  $t = 0.25$  все траектории закручиваются. Характеристики сталкиваются, а значит, имеем разрыв (См.Рис.2).

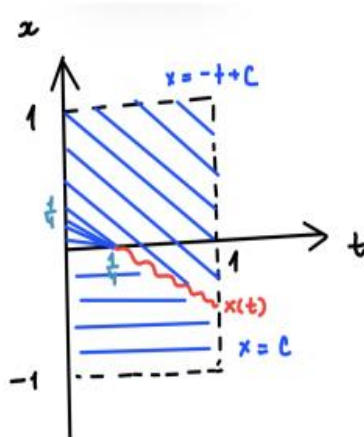


Рис. 2

Ищем разрыв  $x(t)$ :

$$\left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=t^*} = \frac{[F(u)]}{u} = \frac{F(u_+) - F(u_-)}{u_+ - u_-} = \frac{-\frac{u_+^2}{2} - (-\frac{u_-^2}{2})}{u_+ - u_-} = -\frac{u_+ + u_-}{2}$$

Так как  $u_+ = 1, u_- = 0$ ,  $\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{1}{2}$ .

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{2} \\ x(0.25) = 0 \end{cases}$$

Следовательно,  $x(t) = -0.5(t - 0.25)$ . Также в области  $0 \leq x \leq 0.25, 0 \leq t \leq 0.25$  решение имеет вид  $\frac{4x}{1-4t}$ . Итого, см.Рис.3.

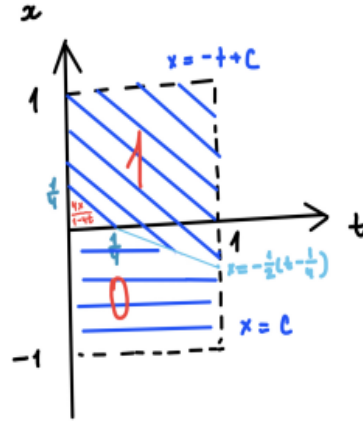


Рис. 3

## 2 Линейная задача

Решаем  $v_t - \frac{v_x}{2} = 0$  в области  $Q_T = (t, x) | 0 < t \leq 1, -1 \leq x \leq 1 = (k_1\tau, k_2h), k_1 \text{in}(0, N), k_2 \text{in}(0, M_h)$ .  
Начальные условия

$$v_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0 \\ 4x & \text{if } 0 \leq x \leq 0.25 \\ 1 & \text{if } x \geq 0.25, \end{cases}$$

Из теоретического решения следует, что граничные условия имеют вид:  
 $v(t, 1) = 1, v(t, -1) = 0$ .

### 2.1 Явная схема

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - \frac{v_{m+1}^n - v_m^n}{2h} = 0$$

#### 2.1.1 Аппроксимация

$$\begin{aligned} v_m^{n+1} &= v + \tau \dot{v} + \frac{\tau^2}{2} \ddot{v} + \frac{\tau^3}{6} \dddot{v} + O(\tau^4) \\ v_{m+1}^n &= v + h v' + \frac{h^2}{2} v'' + \frac{h^3}{6} v''' + O(h^4) \\ \dot{v} + \frac{\tau}{2} \ddot{v} + \frac{\tau^2}{6} \dddot{v} - \frac{v'}{2} - \frac{h}{4} v'' - \frac{h^2}{12} v''' + O(\tau^3 + h^3) &= 0 \\ \text{остаточный член аппроксимации: } &O(\tau + h). \end{aligned}$$

#### 2.1.2 Дифференциальное приближение

$$\begin{aligned} \dot{v} - \frac{v'}{2} &= -\frac{\tau}{2} \ddot{v} + \frac{\tau^2}{6} \dddot{v} + \frac{h}{4} v'' + \frac{h^2}{12} v''' + O(\tau^3 + h^3) \\ \ddot{v} - \frac{v'}{2} &= -\frac{\tau}{2} \dddot{v} + \frac{h}{4} v'' + O(\tau^2 + h^2) \\ \dot{v}' - \frac{v''}{2} &= -\frac{\tau}{2} \ddot{v}' + \frac{h}{4} v''' + O(\tau^2 + h^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{v} - \frac{v'''}{4} &= -\frac{\tau}{2}(\ddot{v} + \frac{v'''}{2}) + \frac{h}{4}(v'' + \frac{v'''}{2}) + O(\tau^2 + h^2) \\
\ddot{v} &= \frac{v'''}{8} + O(\tau + h) \\
\dot{v}' &= \frac{v'''}{4} + O(\tau + h) \\
\dot{v}'' &= \frac{v'''}{2} + O(\tau + h) \\
\dot{v} - \frac{v'}{2} &= -\frac{\tau}{8}v'' - \frac{\tau^2}{12}v''' - \frac{\tau h}{8}v''' + \frac{h}{4}v''' + \frac{\tau^2}{8}v''' + \frac{h^2}{12}v''' + O(\tau^3 + h^3) \\
\dot{v} - \frac{v'}{2} &= -\frac{\tau}{8}v'' + \frac{h}{4}v'' + \frac{\tau^2}{24}v''' - \frac{\tau h}{8}v''' + \frac{h^2}{12}v''' + O(\tau^3 + h^3)
\end{aligned}$$

### 2.1.3 Спектральная устойчивость

Заменяя  $v_m^n = \lambda^n e^{im\phi}$  получим  $\lambda = 1 + \frac{\tau}{2h}(e^{i\phi} - 1)$  - окружность с центром в  $1 + \frac{\tau}{2h}$  радиуса  $\frac{\tau}{2h}$ . Необходимое условие устойчивости - окружность лежит в единичном круге, т.е.  $\frac{\tau}{2h} \leq 1$ .

### 2.1.4 Численное решение

Граничные условия примут вид:  $v(t, 1) = 1$  перейдет в  $v_{M_h}^n = 1 \forall n \in \overline{0, N}$ , а  $v(t, -1) = 0$  в  $v_0^n = 0 \forall n \in \overline{0, N}$ .

Тогда  $\{v_m^{n+1}\}$  считается по  $\{v_m^n\}$  согласно системе:

$$v_m^{n+1} = v_m^n - \tau \frac{v_{m+1}^n - v_m^n}{2h}, m \in \overline{1, M_h - 1}.$$

Результаты расчетов:

$\tau$	$h$	$\Delta(v)_{C_h}$	$\Delta(v)_{L_1, h}$	$\delta(v)_{C_h}$	$\delta(v)_{L_1, h}$
0.100	0.100	2.304688e-01	7.781250e-02	2.304688e-01	5.479754e-02
0.010	0.100	2.727869e-01	1.197663e-01	2.727869e-01	8.440261e-02
0.001	0.100	2.751648e-01	1.232034e-01	2.751648e-01	8.683992e-02
0.100	0.010	1.000000e+00	4.288000e-01	7.575758e-01	4.375510e-01
0.010	0.010	7.958923e-02	9.978660e-03	7.958923e-02	7.230913e-03
0.001	0.010	1.097955e-01	1.863108e-02	1.097955e-01	1.350078e-02
0.100	0.001	1.000000e+00	4.900000e-01	1.000000e+00	5.533597e-01
0.010	0.001	1.000000e+00	4.902880e-01	9.689922e-01	5.536849e-01
0.001	0.001	2.522502e-02	1.000000e-03	2.522502e-02	7.270084e-04

Получены следующие графики:

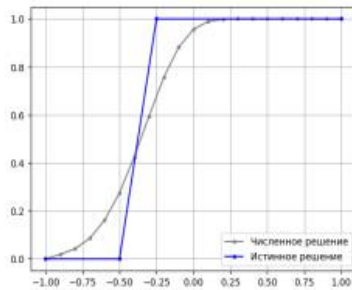


Рис. 4.  $\tau = 0.001, h = 0.1$

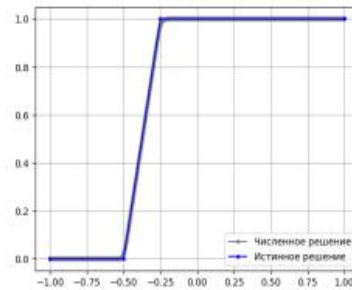


Рис. 5.  $\tau = 0.001, h = 0.001$

Теперь рассмотрим случай равномерного дробления сетки, при исходных данных  $\tau = 0.1, h = 0.1$ . Причем  $\tau_k = \frac{\tau}{2^k}$  и  $h_k = \frac{h}{2^k}$

$$\Delta(v, v^k)_\alpha = \|v - v^k\|_\alpha, \delta(v, v^k)_\alpha = \frac{\|v - v^k\|_\alpha}{\|v\|_\alpha}:$$

	$\tau_k$	$h_k$	$\Delta(v, \cdot)_{C_h}$	$\Delta(v, \cdot)_{L_1, h}$	$\delta(v, \cdot)_{C_h}$	$\delta(v, \cdot)_{L_1, h}$
$v^1$	0.050000	0.050000	9.514595e-01	5.266888e-01	9.514595e-01	3.709076e-01
$v^2$	0.025000	0.025000	9.995810e-01	5.799972e-01	9.995810e-01	4.084487e-01
$v^3$	0.012500	0.012500	9.996094e-01	5.800000e-01	9.996094e-01	4.084507e-01
$v^4$	0.006250	0.006250	9.996094e-01	5.800000e-01	9.996094e-01	4.084507e-01
$u$	0.100	0.100	2.034375e+00	4.489844e-01	2.034375e+00	3.161862e-01

Для  $\tau = 0.001, h = 0.01$ :

	$\tau_k$	$h_k$	$\Delta(v, \cdot)_{C_h}$	$\Delta(v, \cdot)_{L_1, h}$	$\delta(v, \cdot)_{C_h}$	$\delta(v, \cdot)_{L_1, h}$
$v^1$	0.005000	0.005000	9.999996e-01	5.594117e-01	9.999996e-01	4.053708e-01
$v^2$	0.002500	0.002500	1.000000e+00	6.200000e-01	1.000000e+00	4.492754e-01
$v^3$	0.001250	0.001250	1.000000e+00	6.200000e-01	1.000000e+00	4.492754e-01
$v^4$	0.000625	0.000625	1.000000e+00	6.200000e-01	1.000000e+00	4.492754e-01
$u$	0.010	0.010	2.061181e+00	5.042041e-01	2.061181e+00	3.653653e-01

## 2.2 Неявная схема

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - \frac{v_{m+1}^{n+1} - v_{m-1}^{n+1}}{4h} = \frac{\omega h^2}{\tau} \frac{v_{m+1}^n - 2v_m^n + v_{m-1}^n}{h^2}$$

### 2.2.1 Аппроксимация

$$\begin{aligned} v_m^{n+1} &= v + \tau \dot{v} + \frac{\tau^2}{2} \ddot{v} + \frac{\tau^3}{6} \dddot{v} + O(\tau^4) \\ v_{m\pm 1}^n &= v \pm h v' + \frac{h^2}{2} v'' \pm \frac{h^3}{6} v''' + O(h^4) \\ v_{m\pm 1}^{n+1} &= v + \dot{v} \pm h v' + \frac{\tau^2}{2} \ddot{v} \pm v' \tau h + \frac{h^2}{2} v'' + \frac{\tau^3}{6} \ddot{v} \pm \frac{\tau^2 h}{2} \dot{v}'' + \frac{\tau h^2}{2} v' \dot{v}'' \pm \frac{h^3}{6} v''' + O(h^4 + \tau^4) \\ \dot{v} + \frac{\tau}{2} \ddot{v} + \frac{\tau^2}{6} \dddot{v} - \frac{v'}{2} - \frac{\tau}{2} \dot{v}' + \frac{\tau^2}{4} \ddot{v}' - \frac{h^2}{12} v''' + O(\tau^3 + h^3) &= \frac{\omega h^2}{\tau} (v'' + \frac{h^2}{12} v''') + O(\tau^3 + h^3) \end{aligned}$$

остаточный член аппроксимации:  $O(\tau + h^2 + \frac{h^2}{\tau})$ .

### 2.2.2 Дифференциальное приближение

$$\begin{aligned} \dot{v} - \frac{v'}{2} - \frac{\omega h^2}{\tau} v'' &= -\frac{\tau}{2} (\ddot{v} - \dot{v}') - \frac{\tau^2}{6} (\ddot{v} - \frac{3}{2} \ddot{v}') - \frac{h^2}{12} v''' + O(\tau^3 + h^3 + \frac{h^4}{\tau}) \\ \ddot{v} - \frac{v''}{2} &= -\frac{\tau}{2} (\dddot{v} - \ddot{v}') + O(\tau^2 + h^2 + \frac{h^2}{\tau}) \\ \dot{v}' - \frac{v''}{2} &= -\frac{\tau}{2} (\ddot{v}' - \dot{v}'') + O(\tau^2 + h^2 + \frac{h^2}{\tau}) \\ \ddot{v} - \frac{v''}{4} &= -\frac{\tau}{2} (\ddot{v} - \frac{v'}{2} - \frac{v''}{2}) + O(\tau^2 + h^2 + \frac{h^2}{\tau}) \\ \ddot{v} &= \frac{v'''}{8} + O(\tau + h^2 + \frac{h^2}{\tau}) \\ \ddot{v}' &= \frac{v'''}{4} + O(\tau + h^2 + \frac{h^2}{\tau}) \\ \dot{v}'' &= \frac{v'''}{2} + O(\tau + h^2 + \frac{h^2}{\tau}) \\ \ddot{v} &= \frac{v'''}{4} + \frac{\tau v'''}{8} + O(\tau^2 + h^2 + \frac{h^2}{\tau}) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\dot{v} &= \frac{v''}{2} + \frac{\tau v'''}{8} + O(\tau^2 + h^2 + \frac{h^2}{\tau}) \\ \dot{v} - \frac{v'}{2} - \frac{\omega h^2}{\tau} v'' &= \frac{\tau v''}{8} + \frac{\tau^2 v'''}{24} - \frac{h^2}{12} v''' O(\tau^3 + h^3 + \frac{h^4}{\tau})\end{aligned}$$

### 2.2.3 Спектральная устойчивость

Заменяя  $v_m^n = \lambda^n e^{im\phi}$  получим  $\lambda = \frac{(2\omega(\cos\phi-1)+1)(1+\frac{\tau}{2h}\sin\phi i)}{1+\frac{\tau^2}{4h^2}\sin^2\phi}$ .

Тогда  $|\lambda| = \frac{|(2\omega(\cos\phi-1)+1)|}{\sqrt{1+\frac{\tau^2}{4h^2}\sin^2\phi}}$ . Числитель достигает своего максимума при  $\phi = \pi$ . Тогда при  $\omega \in [0, \frac{1}{2}]$  выполнен спектральный признак устойчивости. При других  $\omega$  и  $\phi = \pi$  числитель  $\geq 1$ , а знаменатель  $= 1$ . То есть при  $\omega = 0.1$  выполняется необходимый признак устойчивости, а при  $\omega = 1$  - схема неустойчива.

### 2.2.4 Численное решение

Схему:

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - \frac{v_{m+1}^{n+1} - v_{m-1}^{n+1}}{4h} = \frac{\omega h^2}{\tau} \frac{v_{m+1}^n - 2v_m^n + v_{m-1}^n}{h^2}$$

перепишем в виде:  $v_m^{n+1} - \tau \frac{v_{m+1}^{n+1} - v_{m-1}^{n+1}}{4h} = v_m^n + \omega h^2 \frac{v_{m+1}^n - 2v_m^n + v_{m-1}^n}{h^2}$ .

Тогда  $\{v_m^{n+1}\}$  считается по  $\{v_m^n\}$  методом прогонки:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\tau}{4h} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{\tau}{4h} & 1 & -\frac{\tau}{4h} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\tau}{4h} & 1 \end{pmatrix}$$

Результат работы программы для  $\omega = 0.1$ :

$\tau$	$h$	$\Delta(v)_{C_h}$	$\Delta(v)_{L_1, h}$	$\delta(v)_{C_h}$	$\delta(v)_{L_1, h}$
0.100	0.100	2.568583e-01	1.131866e-01	2.567833e-01	7.978901e-02
0.010	0.100	3.838685e-01	2.741985e-01	3.838685e-01	1.968930e-01
0.001	0.100	4.968123e-01	4.373284e-01	4.968123e-01	3.674792e-01
0.100	0.010	2.466747e-01	7.623064e-02	2.466741e-01	5.524486e-02
0.010	0.010	1.068050e-01	1.769934e-02	1.068050e-01	1.282561e-02
0.001	0.010	2.181782e-01	6.513838e-02	2.181782e-01	4.720179e-02
0.100	0.001	2.457915e-01	7.574855e-02	2.457915e-01	5.507485e-02
0.010	0.001	8.003762e-02	1.005433e-02	8.003762e-02	7.309581e-03
0.001	0.001	3.384368e-02	1.800000e-03	3.384368e-02	1.308615e-03

Получен график:

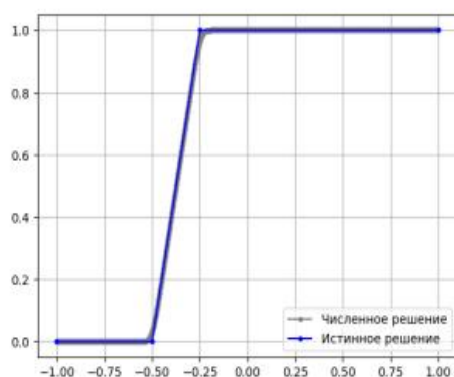


Рис. 6

Результат работы программы для  $\omega = 1$ :

$\tau$	$h$	$\Delta(v)_{C_h}$	$\Delta(v)_{L_1,h}$	$\delta(v)_{C_h}$	$\delta(v)_{L_1,h}$
0.100	0.100	3.513536e-01	2.180426e-01	3.492987e-01	1.545586e-01
0.010	0.100	4.489492e-01	4.116403e-01	4.489492e-01	3.274437e-01
0.001	0.100	5.753647e-01	4.988624e-01	5.753647e-01	4.602458e-01
0.100	0.010	2.493747e-01	7.807090e-02	2.493120e-01	5.657879e-02
0.010	0.010	1.753602e-01	4.367358e-02	1.753590e-01	3.164753e-02
0.001	0.010	3.489297e-01	1.896326e-01	3.489297e-01	1.378769e-01
0.100	0.001	2.458192e-01	7.576664e-02	2.458188e-01	5.508801e-02
0.010	0.001	8.126715e-02	1.036199e-02	8.126714e-02	7.533256e-03
0.001	0.001	5.596351e-02	4.919792e-03	5.596351e-02	3.576730e-03

Получен график:

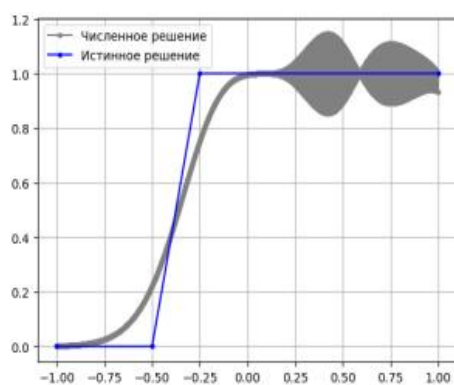


Рис. 7



Теперь рассмотрим случай равномерного дробления сетки, при исходных данных  $\tau = 0.1, h = 0.1$ . Причем  $\tau_k = \frac{\tau}{2^k}$  и  $h_k = \frac{h}{2^k}$   
 $\Delta(v, v^k)_\alpha = \|v - v^k\|_\alpha, \delta(v, v^k)_\alpha = \frac{\|v - v^k\|_\alpha}{\|v\|_\alpha}$ . Для  $\omega = 0.1$ :

	$\tau_k$	$h_k$	$\Delta(v, \cdot)_{C_h}$	$\Delta(v, \cdot)_{L_1, h}$	$\delta(v, \cdot)_{C_h}$	$\delta(v, \cdot)_{L_1, h}$
$v^1$	0.050000	0.050000	9.471386e-02	4.538516e-02	9.468620e-02	3.199351e-02
$v^2$	0.025000	0.025000	1.553445e-01	7.326469e-02	1.552992e-01	5.164672e-02
$v^3$	0.012500	0.012500	1.953264e-01	9.004536e-02	1.952694e-01	6.347598e-02
$v^4$	0.006250	0.006250	2.194344e-01	1.003608e-01	2.193703e-01	7.074769e-02
$u$	0.100	0.100	2.005065e+00	4.699233e-01	2.004479e+00	3.312646e-01

Для  $\tau = 0.001, h = 0.01$ :

	$\tau_k$	$h_k$	$\Delta(v, \cdot)_{C_h}$	$\Delta(v, \cdot)_{L_1, h}$	$\delta(v, \cdot)_{C_h}$	$\delta(v, \cdot)_{L_1, h}$
$v^1$	0.005000	0.005000	3.119690e-02	8.662405e-03	3.119690e-02	6.277105e-03
$v^2$	0.002500	0.002500	5.331166e-02	1.313692e-02	5.331166e-02	9.519509e-03
$v^3$	0.001250	0.001250	6.896876e-02	1.538371e-02	6.896876e-02	1.114762e-02
$v^4$	0.000625	0.000625	8.004693e-02	1.650793e-02	8.004693e-02	1.196227e-02
$u$	0.001	0.100	1.993598e+00	7.659560e-01	1.993598e+00	6.436190e-01

Для  $\omega = 1$ :

для  $\tau = 0.1, h = 0.1$ :

	$\tau_k$	$h_k$	$\Delta(v, \cdot)_{C_h}$	$\Delta(v, \cdot)_{L_1, h}$	$\delta(v, \cdot)_{C_h}$	$\delta(v, \cdot)_{L_1, h}$
$v_1$	0.050000	0.050000	5.065387e-02	2.032866e-02	5.063365e-02	1.473091e-02
$v_2$	0.025000	0.025000	8.749135e-02	3.196751e-02	8.745641e-02	2.316486e-02
$v_3$	0.012500	0.012500	1.136137e-01	3.814630e-02	1.135683e-01	2.764224e-02
$v_4$	0.006250	0.006250	1.320870e-01	4.126920e-02	1.320342e-01	2.990522e-02
$u$	0.100	0.100	2.005065e+00	4.699233e-01	2.004479e+00	3.312646e-01

Для  $\tau = 0.001, h = 0.01$ :

	$\tau_k$	$h_k$	$\Delta(v, \cdot)_{C_h}$	$\Delta(v, \cdot)_{L_1, h}$	$\delta(v, \cdot)_{C_h}$	$\delta(v, \cdot)_{L_1, h}$
$v_1$	0.005000	0.005000	8.546227e-02	7.555303e-02	8.470321e-02	5.356490e-02
$v_2$	0.002500	0.002500	1.565218e-01	1.297304e-01	1.551316e-01	9.197506e-02
$v_3$	0.001250	0.001250	2.149870e-01	1.666995e-01	2.130776e-01	1.181851e-01
$v_4$	0.000625	0.000625	2.658106e-01	1.903680e-01	2.634498e-01	1.349654e-01
$u$	0.001	0.100	2.220413e+00	5.410673e-01	2.220413e+00	3.933963e-01

### 3 Нелинейная задача

Решаем  $v_t - vv_x = 0$  в области  $Q_T = (t, x) | 0 < t \leq 1, -1 \leq x \leq 1$  Начальные условия

$$v_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0 \\ 4x & \text{if } 0 < x \leq 0.25 \\ 1 & \text{if } x > 0.25, \end{cases}$$

Из теоретического решения следует, что граничные условия имеют вид:  
 $v(t, 1) = 1, v(t, -1) = 0$ .

#### 3.1 Явная схема

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - \frac{v_{m+1}^{2n} - v_m^{2n}}{2h} = 0$$

##### 3.1.1 Аппроксимация

$$\begin{aligned} v_m^{n+1} &= v + \tau \dot{v} + \frac{\tau^2}{2} \ddot{v} + \frac{\tau^3}{6} \dddot{v} + O(\tau^4) \\ v_{m+1}^n &= v + hv' + \frac{h^2}{2} v'' + \frac{h^3}{6} v''' + O(h^4) \\ \dot{v} + \frac{\tau}{2} \ddot{v} + \frac{\tau^2}{6} \dddot{v} - vv' - \frac{hv'^2}{2} - \frac{h}{2} v''v + O(\tau^2 + h^2) &= 0 \\ \text{остаточный член аппроксимации: } O(\tau + h). \end{aligned}$$

##### 3.1.2 Численное решение

Преобразуем нашу схему к виду  $v_m^{n+1} = v_m^n - \tau \frac{v_{m+1}^{2n} - v_m^{2n}}{2h}$

Тогда  $\{v_m^{n+1}\}$  считается по  $\{v_m^n\}$  согласно системе.

Результаты расчетов:

$\tau$	$h$	$\Delta(v)_{C_h}$	$\Delta(v)_{L_1, h}$	$\delta(v)_{C_h}$	$\delta(v)_{L_1, h}$
0.100	0.100	3.994249e-01	4.200000e-01	3.994249e-01	3.750000e-01
0.010	0.100	3.984968e-01	4.200000e-01	3.984968e-01	3.750000e-01
0.001	0.100	3.983875e-01	4.200000e-01	3.983875e-01	3.750000e-01
0.100	0.010	5.999998e-01	2.600000e-01	5.999998e-01	2.921348e-01
0.010	0.010	4.000000e-01	4.500000e-01	4.000000e-01	4.166667e-01
0.001	0.010	5.999989e-01	3.000000e-01	5.999989e-01	3.225806e-01
0.100	0.001	5.980636e-01	2.605000e-01	5.564585e-01	2.941841e-01
0.010	0.001	6.000000e-01	2.515000e-01	6.000000e-01	2.869367e-01
0.001	0.001	3.994228e-01	2.509000e-01	3.994228e-01	2.864482e-01

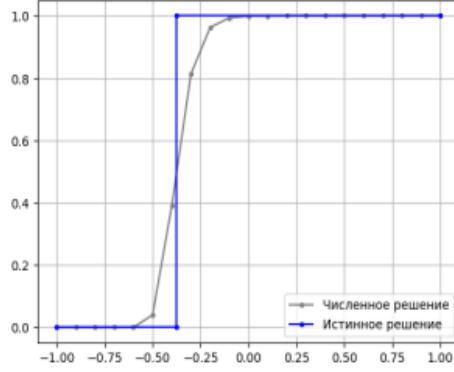


Рис. 8

Теперь рассмотрим случай равномерного дробления сетки, при исходных данных  $\tau = 0.1, h = 0.1$ . Причем  $\tau_k = \frac{\tau}{2^k}$  и  $h_k = \frac{h}{2^k}$   
 $\Delta(v, v^k)_\alpha = \|v - v^k\|_\alpha, \delta(v, v^k)_\alpha = \frac{\|v - v^k\|_\alpha}{\|v\|_\alpha}$ :

	$\tau_k$	$h_k$	$\Delta(v, \cdot)_{C_h}$	$\Delta(v, \cdot)_{L_1, h}$	$\delta(v, \cdot)_{C_h}$	$\delta(v, \cdot)_{L_1, h}$
$v_1$	0.050000	0.050000	1.221117e-01	1.792714e-02	1.221117e-01	1.262475e-02
$v_2$	0.025000	0.025000	2.470711e-01	3.042715e-02	2.470711e-01	2.142757e-02
$v_3$	0.012500	0.012500	2.560863e-01	3.132867e-02	2.560863e-01	2.206244e-02
$v_4$	0.006250	0.006250	2.560863e-01	3.132867e-02	2.560863e-01	2.206244e-02
$u$	0.100	0.100	1.000000e+00	7.200000e-01	1.000000e+00	5.070423e-01

Для  $\tau = 0.001, h = 0.01$ :

	$\tau_k$	$h_k$	$\Delta(v, \cdot)_{C_h}$	$\Delta(v, \cdot)_{L_1, h}$	$\delta(v, \cdot)_{C_h}$	$\delta(v, \cdot)_{L_1, h}$
$v_1$	0.005000	0.005000	1.249594e-01	2.500000e-03	1.249594e-01	1.811594e-03
$v_2$	0.002500	0.002500	1.339746e-01	2.680305e-03	1.339746e-01	1.942250e-03
$v_3$	0.001250	0.001250	1.339746e-01	2.680305e-03	1.339746e-01	1.942250e-03
$v_4$	0.000625	0.000625	1.339746e-01	2.680305e-03	1.339746e-01	1.942250e-03
$u$	0.001	0.100	1.000000e+00	7.200000e-01	1.000000e+00	5.070423e-01

### 3.2 Неявная схема

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - \frac{v_{m+1}^{2n+1} - v_{m-1}^{2n+1}}{4h} = \frac{\omega h^2}{\tau} \frac{v_{m+1}^n - 2v_m^n + v_{m-1}^n}{h^2}$$

#### 3.2.1 Неявная схема. Аппроксимация

$$\begin{aligned} v_m^{n+1} &= v + \tau \dot{v} + \frac{\tau^2}{2} \ddot{v} + O(\tau^3) \\ v_{m+1}^n &= v + h v' + \frac{h^2}{2} v'' + \frac{h^3}{6} v''' + O(h^4) \\ \dot{v} + \frac{\tau}{2} \ddot{v} + \frac{\tau^2}{6} \ddot{v} - v v' - \frac{h v'^2}{2} - \frac{h}{2} v'' v + O(\tau^2 + h^2) &= 0 \end{aligned}$$

$$v_{m\pm 1}^n = v \pm hv' + \frac{h^2}{2}v'' + O(h^3)$$

$$v_{m\pm 1}^{n+1} = v + \dot{v} \pm hv' + \frac{\tau^2}{2}\ddot{v} \pm \dot{v}'\tau h + \frac{h^2}{2}v'' + O(h^3 + \tau^3)$$

$$\dot{v} + \frac{\tau}{2}\ddot{v} - 2vv' - 2\tau\dot{v}' - \tau^2v'' - h^2v'v'' - 2\tau\dot{v}'v - 2\tau^2\dot{v}'\dot{v} - \frac{\omega h^2}{\tau}v'' + O(\tau^2 + h^3 + \frac{h^4}{\tau})$$

остаточный член аппроксимации:  $O(\tau + h^2 + \frac{h^2}{\tau})$ .

### 3.2.2 Численное решение

В случае неявной нелинейной схемы использую метод Ньютона для нахождения решения.

Результаты расчетов для  $\omega = 0.1$ :

$\tau$	$h$	$\Delta(v)_{C_h}$	$\Delta(v)_{L_1,h}$	$\delta(v)_{C_h}$	$\delta(v)_{L_1,h}$
0.100	0.0100	2.182575e+01	2.585981e+01	1.029933e+00	1.001761e+00
0.100	0.0010	1.037365e+00	8.124929e-01	8.995216e-01	5.906385e-01
0.200	0.0010	1.000020e+00	7.505096e-01	9.999942e-01	5.456267e-01
0.100	0.0001	1.182650e+00	1.005996e+00	7.363515e-01	7.306586e-01
0.200	0.0001	1.000000e+00	7.500501e-01	9.999999e-01	5.454711e-01
0.200	0.0001	1.000082e+00	7.501414e-01	9.998568e-01	5.451768e-01

Получены следующий график:

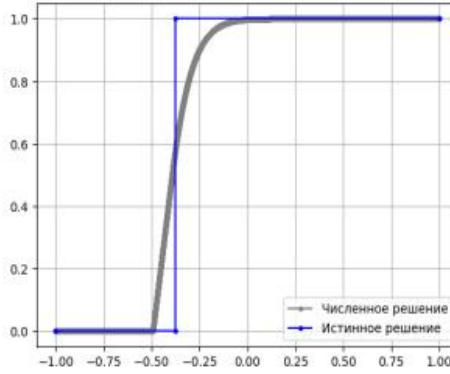


Рис. 9