

Problem 1 – Gwiazda dziwna

Uliana Pylypenko

Kwiecień 2023

1 Wstęp

Gwiazdy dziwne – to hipotetyczne obiekty zbudowane z dziwnej materii kwarkowej. Ich główną cechą jest to, że są one samozwiązane, czyli mogłyby istnieć nawet gdyby nie było grawitacji. Uważa się, że gwiazdy dziwne mogą powstawać podczas zapadnięcia masywnych gwiazd, które jest tak potężne, że kwarki są uwalniane z neutronów. Szacuje się, że ich maksymalna masa i promień wynoszą odpowiednio $\sim 1.9M_\odot$ i $\sim 10\text{km}$ [2][3]. Gwiazdy dziwne nie zostały jeszcze bezpośrednio zaobserwowane, jednak rozważane są kilka kandydatów, na przykład 4U 1820–30 [3].

Problem polega na rozwiązaniu równań Tolmana–Oppenheimera–Volkoffa (TOV):

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2} \left(1 + \frac{P}{\rho c^2}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 P}{mc^2}\right) \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2}\right)^{-1} \quad (1)$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (2)$$

zakładając równanie stanu, które dobrze opisuje materię dziwną:

$$P = \frac{c^2}{3} (\rho - \rho_0), \quad (3)$$

W tym równaniu ρ_0 oznacza gęstość na powierzchni gwiazdy i jest równe:

$$\rho_0 = 10^{15} \left(0.5 + \frac{d}{70}\right) \frac{g}{\text{cm}^3} \quad (4)$$

Najbardziej interesuje nas zależność między masą a promieniem, a także zależności masy i promienia od gęstości centralnej.

2 Rozwiązanie

Wygodnie jest podstawić równość 3 do równania 1, żeby otrzymać:

$$\frac{d\rho}{dr} = -\frac{Gm}{c^2 r^2} (4\rho - \rho_0) \left(1 + \frac{4\pi r^3 (\rho - \rho_0)}{3m}\right) \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right)^{-1} \quad (5)$$

i pracować dalej z równaniami 5 i 2. Równania te rozwiązujemy numerycznie metodą Eulera, przyjmując $d=20$ w równości 4.

Żeby pochodna $\frac{d\rho}{dr}$ w środku była skończona, zamiast $r = 0$ przyjmujemy $r \equiv r_0 = 10^{-10} \text{ km}$. Jest to wystarczająco mała wartość, żeby można było uważać, że $m(r_0) = 0$ i $\rho(r_0) = \rho_c$ (ρ_c – gęstość centralna gwiazdy). Potrzebne są jeszcze początkowe wartości pochodnych, które otrzymujemy, podstawiając początkowe wartości m, ρ, r do równań 5 i 2:

- $\frac{d\rho}{dr}(r_0) = -\frac{4\pi G r_0^2}{3c^2} (4\rho(r_0)^2 - 5\rho(r_0)\rho_0 + \rho_0^2)$
- $\frac{dm}{dr}(r_0) = 4\pi r_0^2 \rho(r_0)$

Algorytm numeryczny polega na obliczaniu kolejnych wartości masy, promienia oraz gęstości za pomocą wzorów:

- $m_{n+1} = m_n + \left.\frac{dm}{dr}\right|_n \delta r$

- $\rho_{n+1} = \rho_n + \left. \frac{d\rho}{dr} \right|_n \delta r$
- $r_{n+1} = r_n + \delta r$

gdzie $\delta r = 0.01$ km jest krokiem całkowania. Następnie wyliczamy nowe wartości pochodnych, podstawiając wartości m_{n+1} , ρ_{n+1} , r_{n+1} do wzorów 2 i 5. Powtarzamy cykl, dopóki $\rho > \rho_0$. Wtedy końcowe wartości masy i promienia będą właściwie masą i promieniem gwiazdy kwarkowej dla danego d i ρ_c . Implementacja tego algorytmu w Pythonie jest podana niżej.

```

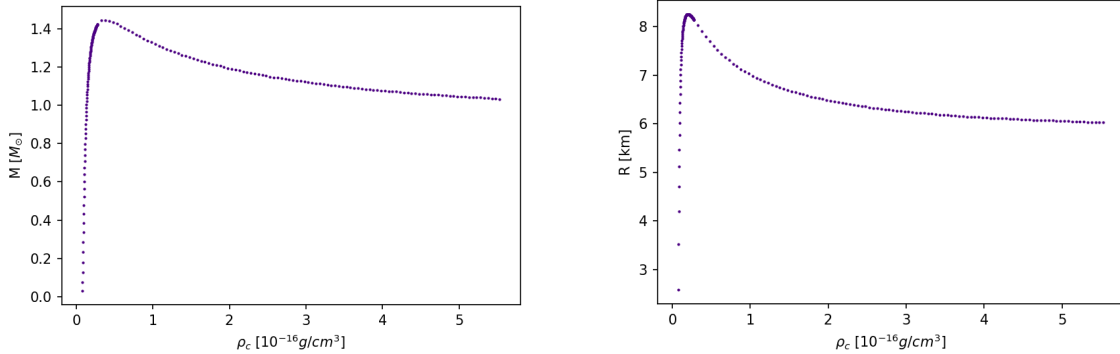
1 def proces(m0,rho0,r0,dm_dr0,drho_dr0):
2     while rho0>rho00:
3         m1 = m0 + dm_dr0*d_r
4         rho1 = rho0 + drho_dr0*d_r
5         r1 = r0 + d_r
6
7         dm_dr1 = 4*pi*r1**2*rho1
8         drho_dr1 = - ((G*m1)/(c**2*r1**2))*(4*rho1 - rho0)*(1 + (4*pi*r1**3*(rho1 -
9             rho0))/(3*m1))*(1-(2*G*m1)/(c**2*r1))**(-1)
10
11         m0 = m1
12         rho0 = rho1
13         dm_dr0 = dm_dr1
14         drho_dr0 = drho_dr1
15         r0 = r1
16
17     return m1, rho1, r1, dm_dr1, drho_dr1

```

Listing 1: Funkcja wyliczająca masę i promień gwiazdy

3 Wyniki

Żeby otrzymać zależności $M(\rho_c)$ i $R(\rho_c)$, algorytm powtórzono dla wielu wartości ρ_c z przedziału $(\rho_{min}, 5.5) \frac{10^{16}g}{cm^3}$, $\rho_{min} = \rho_0 + 2 \cdot 10^{13} \frac{g}{cm^3}$. Są one przedstawione na rysunku:

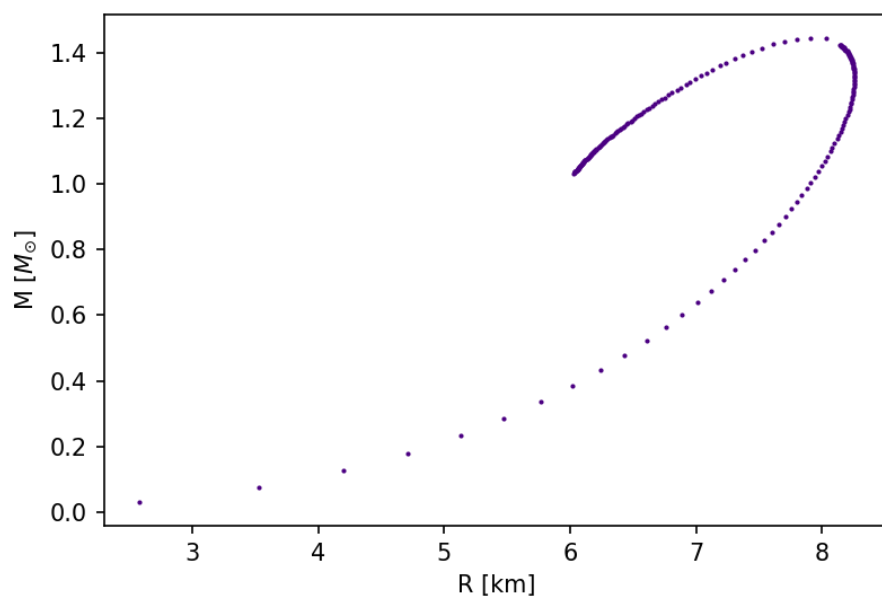


Rysunek 1: Zależność masy od gęstości centralnej (po lewej) i promienia od gęstości centralnej (po prawej).

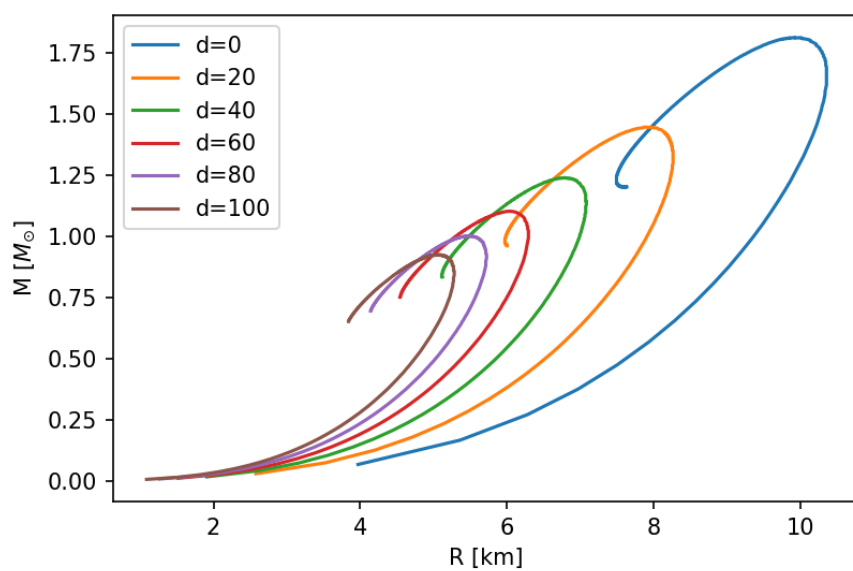
Mamy także zależność masy od promienia na rys. 2

Wyniki te są zgodne na przykład z pracą Alcock et al. [4]. Najpierw funkcje $M(\rho_c)$ i $R(\rho_c)$ szybko rosną z ρ_c i osiągają maksimum dla $\rho_c \sim 0.2 \frac{10^{16}g}{cm^3}$. Dla tego modelu maksymalna masa i promień wynoszą odpowiednio $M_{max} \sim 1.4M_\odot$ i $R_{max} \sim 8km$. Zależność masa-promień dla tych wartości z kolei zaczyna robić "zakręt". Podobnie jak dla białych karłów i gwiazd neutronowych, dla $\rho_c \leq 0.2 \frac{10^{16}g}{cm^3}$ (czyli przed "zakrętem") gwiazda dziwna jest stabilna, natomiast dla wartości większych zaczyna się obszar konfiguracji niestabilnych.

Na rys. 3 są też przedstawione zależności masa-promień dla gwiazd o różnych parametrach d , czyli o różnych gęstościach powierzchniowych. Jak widać, im mniejsza jest gęstość powierzchniowa, tym większą i masywniejszą może być gwiazda.



Rysunek 2: Zależność masy od promienia



Rysunek 3: Zależność masy od promienia dla różnych d

Literatura

- [1] F.Weber (2005) *Strange quark matter and compact stars*, Progress in Particle and Nuclear Physics.
- [2] K. B. Goswami et al. (2022) *Analytical model on mass limits of strange stars*, Class. Quantum Grav. 39 175006
- [3] Ang Li et al. (2011) *Strange Star Candidates Revised Within a Quark Model with Chiral Mass Scaling*, Res. Astron. Astrophys. 11 482
- [4] C. Alcock et al. (1986) *Strange Stars*, Astrophysical Journal v.310, p.261