Problem 3 – Soczewkowanie grawitacyjne

Uliana Pylypenko

Czerwiec 2023

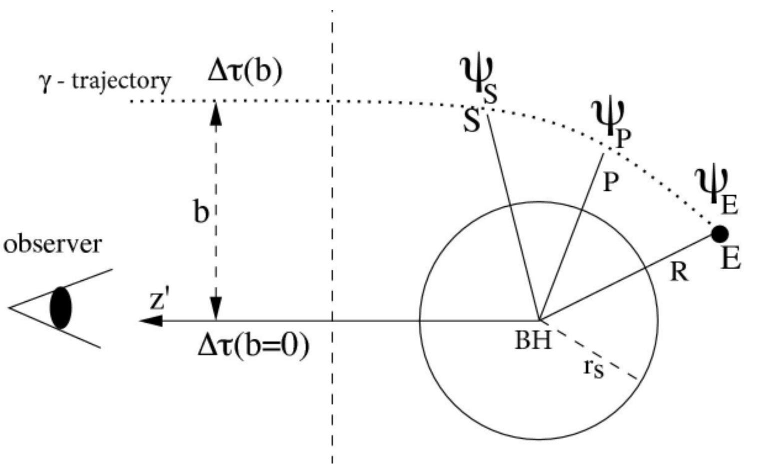
1 Wstęp

Soczewkowanie grawitacyjne – to zjawisko zakrzywienia toru światła przez pole grawitacyjne, wynikające z Ogólnej Teorii Względności. Dzięki temu można zaobserwować niezwykłe efekty, takie jak powiększenie lub zniekształcenie obrazów odległych obiektów. Soczewkowanie grawitacyjne zapewnia unikalne narzędzie do badania rozkładu materii we Wszechświecie i odkrywania ukrytych struktur kosmicznych.

Czarna dziura – to jeden z najprostszych obiektów, który może spowodować całkiem zjawiskowy efekt soczewkowania. Czasoprzestrzeń wokół niej można opisać za pomocą metryki Schwarzschilda, która działa dla sferycznie symetrycznych nierotujących obiektów. Zatem jest ona istotna dla zrozumienia zachowania światła w pobliżu czarnej dziury.

Problem polegał na wyznaczeniu obrazu litery na ekranie znajdującym się za czarną dziurą, który zobaczy odległy obserwator. Oznaczamy promień grawitacyjny czarnej dziury jako r_s ($r_s = 1$), a płaszczyznę prostopadłą do rysunku, w której leżą obserwator i czarna dziura jako O-BH. Odległość między czarną dziurą i ekranem – $D_{LS} = 20r_s$, między czarną dziurą i obserwatorem – $D_L = 100r_s$ (większe odległości nie zmieniają wyniku).

2 Rozwiązanie



Rysunek 1: Trajektoria fotonu w pobliżu czarnej dziury

Żeby opisać trajektorię fotonu w pobliżu czarnej dziury skorzystamy z następującej całki eliptycznej wynikającej z metryki Schwarzschilda:

$$\psi(R) = \int_R^\infty \frac{dr}{r^2}\left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\right] \tag{1}$$

$$b = r_{min}\sqrt{\frac{r_{min}}{r_{min} - r_s}} \tag{2}$$

$\psi(R)$ jest kątem, pod którym obserwator widzi punkt emisji światła z odległości R od środka czarnej dziury. Jest on liczony od obserwatora w stronę punktu emisji (rys. 1). b – to odległość fotonu od plaszczyzny O-BH w nieskończoności, r_{min} – minimalna odległość, na jaką się zbliży foton do czarnej dziury, jeśli będzie leciał równolegle do płaszczyzny O-BH z nieskończoności.

Kąty $\psi(R)$ są symetryczne względem r_{min}. To znaczy, że jeśli $\psi_P = \psi(r_{min})$, ψ_S i ψ_E – kąty odpowiadające temu samemu promieniowi R, ale po różne strony od r_{min}, to $\psi_P - \psi_S = \psi_E - \psi_P$, albo inaczej $\psi_E = 2\psi_P - \psi_S$ (rys. 1).

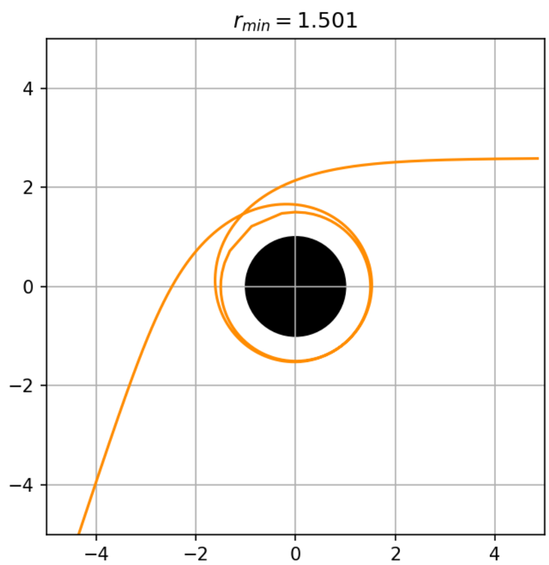
Najważniejszym krokiem w tym problemie było zaimplementowanie wzoru 1. Ekran jest dwuwymiarowy, ale łatwiej jest przyjąć, że jest jednowymiarowy i korzystać ze sferycznej symetrii problemu, aby znaleźć cały obraz. Przyjmujemy układ współrzędnych (x, y), w środku którego się znajduje czarna dziura. Wtedy dla obserwatora $x_O = D_L$, a dla ekranu $x_E = -D_{LS}$. Algorytm zaczynamy od $x = x_O$ i kontynuujemy do momentu gdy $x = x_E$ (region w którym $-r_{min} < R < r_{min}$ pomijamy). **Wygląda on następująco:**

1. Ustalamy R,
2. Obliczamy całkę 1 i otrzymujemy kąt $\psi(|R|)$,
3. Jeśli $R > 0$, to $\psi = \psi(|R|)$, w innym przypadku $\psi = 2\psi(r_{min}) - \psi(|R|)$,
4. Obliczamy współrzędne: $x = Rcos(\psi)$, $y = Rsin(\psi)$,
5. Powtarzamy dla $R - \Delta R$.

Najpierw ciekawie było po prostu zbadać jak się zachowuje światło w pobliżu czarnej dziury dla różnych wartości r_{min}.

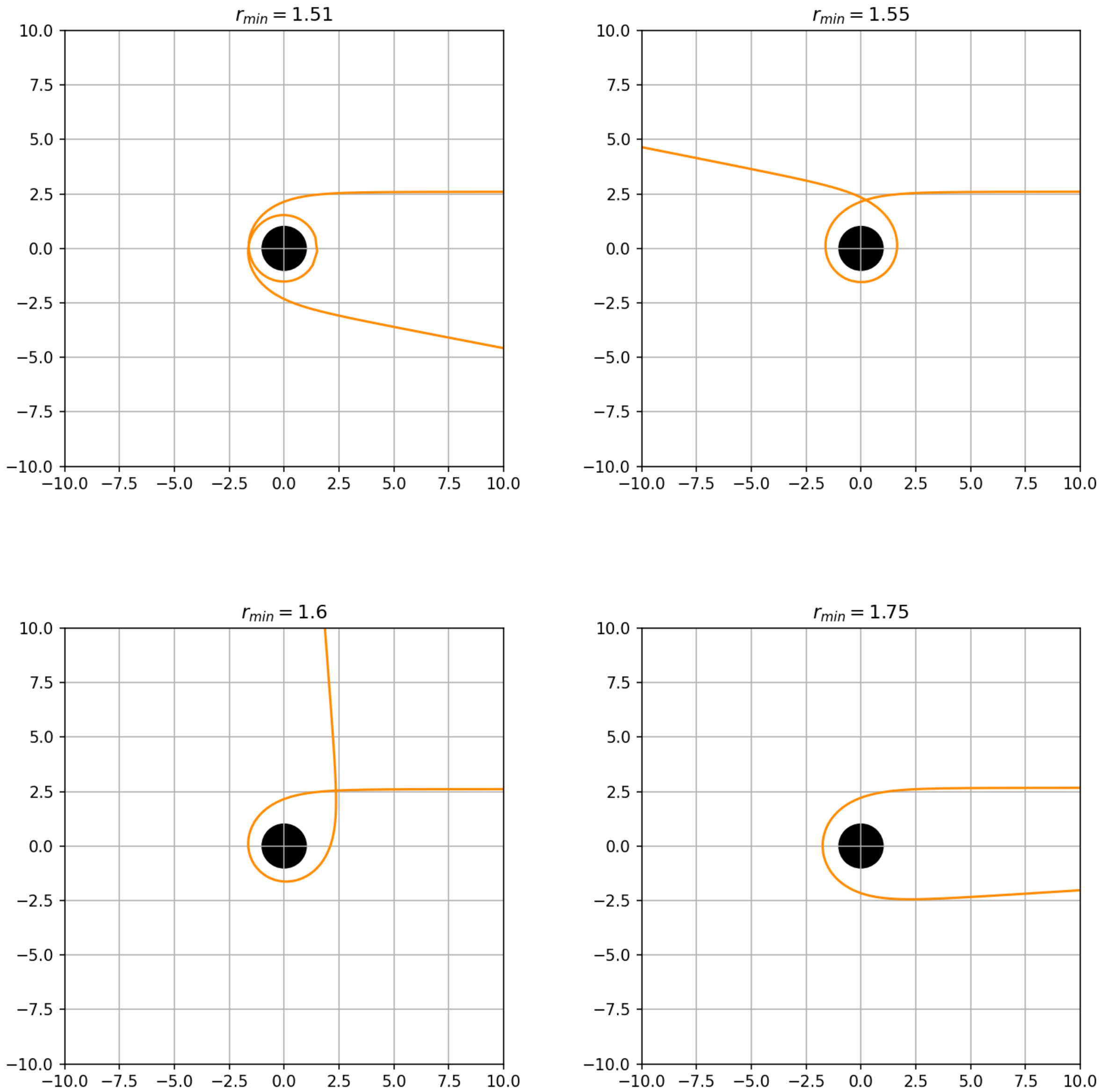
Przede wszystkim marginalnie stabilna orbita kołowa wokół czarnej dziury dla fotonu leży w odległości $r = 1.5r_s$ (dla mniejszych r fotony spadną na czarną dziurę). Dlatego r_{min} powinno być większe od 1.5.

Okazuje się, że im mniejsza wartość r_{min}, tym więcej razy foton okrąża czarną dziurę. Na przykład, na rys. 2 $r_{min} = 1.501$ i światło okrąża czarną dziurę dwukrotnie.



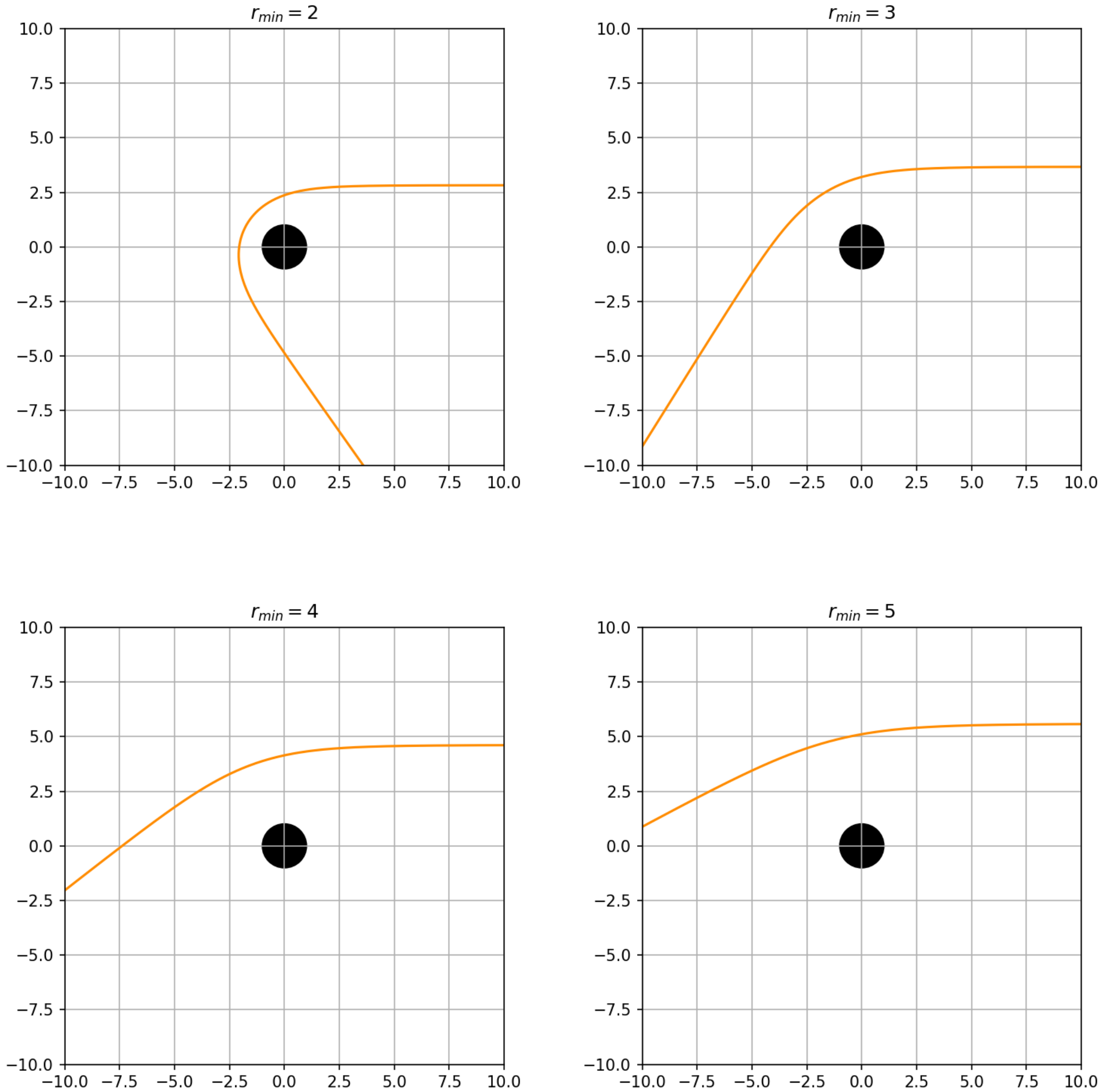
Rysunek 2: Dwa okrążenia światła wokół czarnej dziury

Dla $1.51 < r_{min} < 1.70$ Światło robi jedno okrążenie, a zawraca dla $r \sim 1.75$.



Rysunek 3: Trajektorię światła dla różnych $r_{min} \leq 1.75$

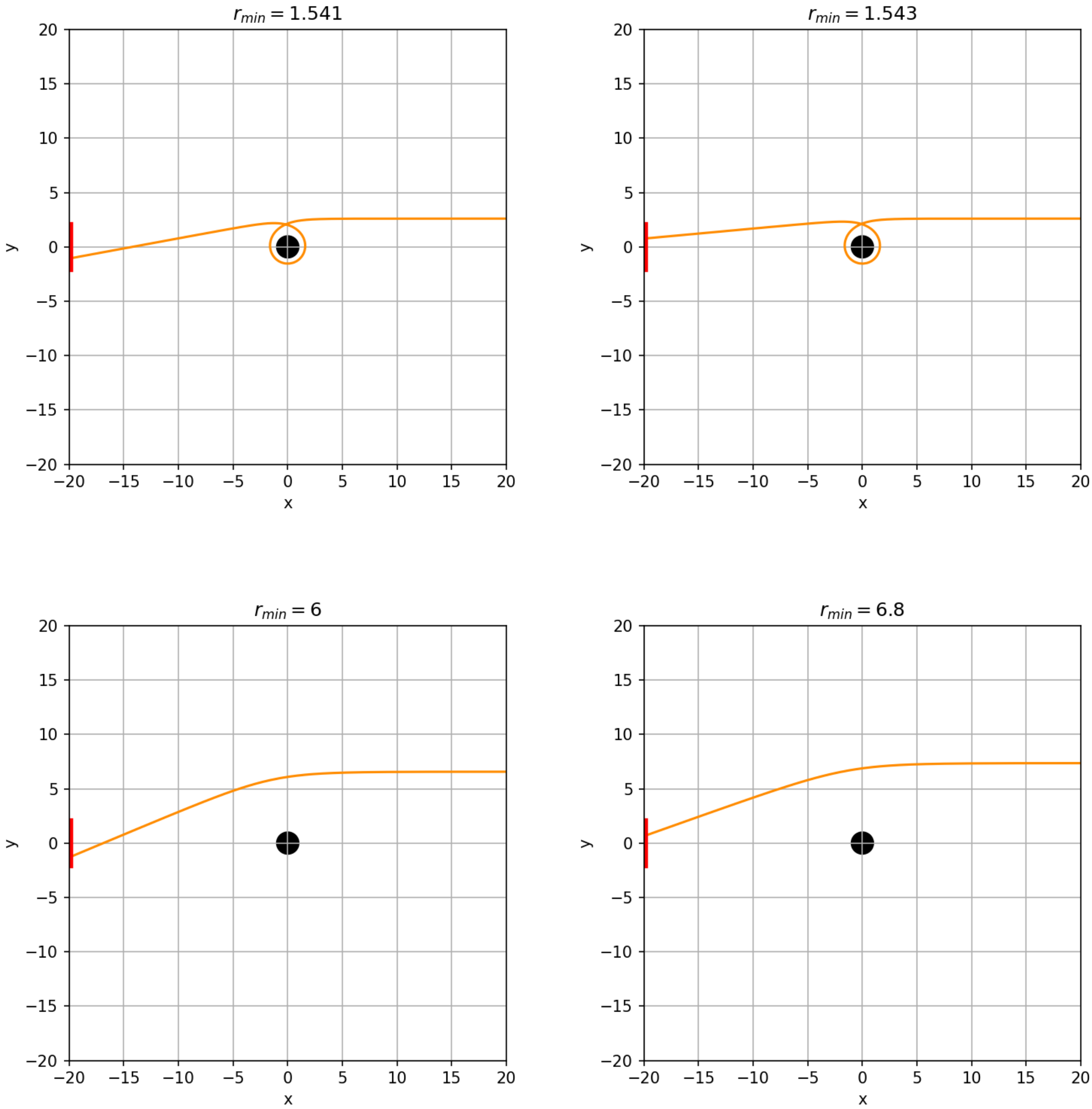
Dla większych wartości r_{min} światło zmienia swoją drogę mniej gwałtownie.



Rysunek 4: Trajektorię światła dla różnych $r_{min} \geq 2$

Można zobaczyć, że jeśli uwzględniać maksymalnie jedno okrążenie, to są **cztery reżimy w których możemy dostać cztery różne obrazy 5:**

1. $1.540 < r_{min} < 1.542$: jedno okrążenie, obraz odwrócony ($y < 0$)
2. $1.542 < r_{min} < 1.545$: jedno okrążenie, obraz nieodwrócony ($y > 0$)
3. $5.7 < r_{min} < 6.4$: bez okrążeń, obraz odwrócony ($y < 0$)
4. $6.4 < r_{min} < 7.4$: bez okrążeń, obraz nieodwrócony ($y > 0$)



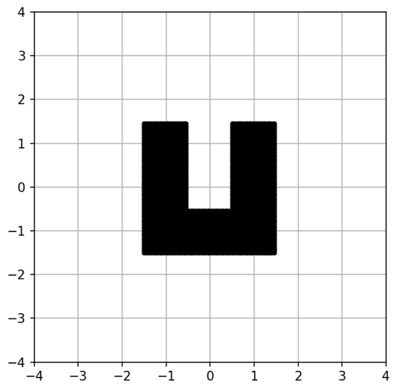
Rysunek 5: Cztery możliwe sposoby trafiania światła w ekran

Teraz korzystając z tego mamy znaleźć jaki będzie obraz litery na ekranie. **Cały program działa następująco:**

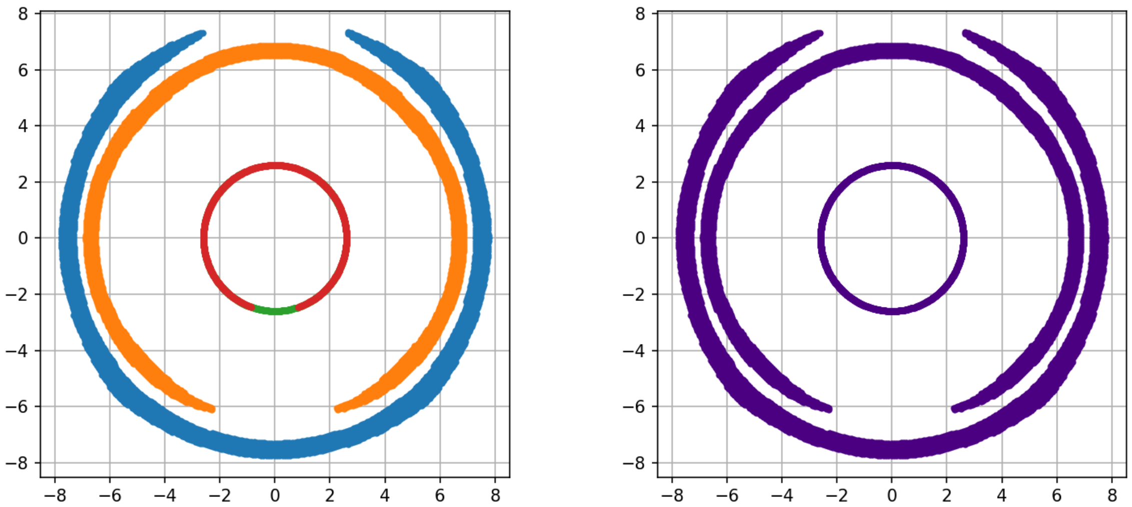
1. Wykonujemy poprzedni algorytm dla wyznaczenia trajektorii światła dla danego r_{min},
2. Oznaczmy współrzędną y punktu w którym foton uderza w ekran jak y_0. Sprawdzamy cały okrąg o promieniu y_0 na obecność litery. Z punktami, w których jest część litery, czynimy następująco:
   - jeśli $y > 0$, to po prostu dodajemy je do końcowego obrazu,
   - jeśli $y < 0$, to dodajemy do końcowego obrazu punkt obrócony o 180 stopni,
3. Powtarzamy dla następnych r_{min}

3 Wyniki

Poniżej są przedstawione oryginalna litera oraz jej obraz zmieniony przez czarną dziurę.



Rysunek 6: Początkowy obraz na ekranie



Rysunek 7: Cztery obrazy litery widzane przez dalekiego obserwatora. Na prawym rysunku widać, że dwa mniejsze obrazy się zlewają.

Literatura

[1] V. De Falco (2016), *Approximate analytical calculations of photon geodesics in the Schwarzschild metric*

[2] D.A. Leahy and L. Li (1995), *Including the effect of gravitational light bending in X-ray profile modelling*

[3] H. Riffert and P. Mészáros (1986), *Gravitational light bending near the neutron stars*

[4] S.L. Shapiro and S.A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars*