Théorie des langages : THL

CM 7

Uli Fahrenberg

EPITA Rennes

S5 2021

Aperçu

Programme du cours

1. Langages rationnels
2. Automates finis
3. Langages algébriques, grammaires hors-contexte, automates à pile
4. Parsage LL
5. TP 1 : `flex`
6. Parsage LR, partie 1
7. Parsage LR, partie 2

QCM 3

8. TP 2, 3 : `flex` & `bison`

Re : parsage ascendant : the basics

function $\textsc{BULRP}(\alpha)$
  if $\alpha = S$ **then**
    return True
  for $i \leftarrow 1$ **to** $|\alpha|$ **do**
    for $j \leftarrow i$ **to** $|\alpha|$ **do** ▷ décalage / SHIFT
      for $A \in N$ **do**
        if $A \rightarrow \alpha_i \ldots \alpha_j$ **then** ▷ réduction / REDUCE
          if $\textsc{BULRP}(\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1} A \alpha_{j+1} \ldots \alpha_n)$ **then**
            return True
  return False

Définition (8.8)

Soit G une grammaire hors-contexte. Une production pointée de G est une paire $(A, \alpha \bullet \beta)$ telle que $A \rightarrow \alpha\beta$ est une production de G.

Re : automate de parsage LR(0)

Définition (8.10)

Soit G une grammaire hc et $\mathcal{I}$ un ensemble de productions pointées de G. La clôture de $\mathcal{I}$ est le plus petit ensemble $\mathrm{cl}(\mathcal{I})$ t.q. $\mathcal{I} \subseteq \mathrm{cl}(\mathcal{I})$ et

- si $(A, \alpha \bullet B \beta) \in \mathrm{cl}(\mathcal{I})$ et $B \to \gamma$ est une production de G, alors $(B, \bullet \gamma) \in \mathcal{I}$.

Définition

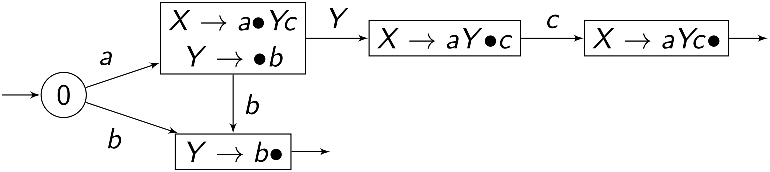
L'automate de parsage LR(0) d'une grammaire hors-contexte G est l'automate fini déterministe (Q, q_0, F, δ) avec

- $Q = \{\mathrm{cl}(\mathcal{I}) \mid \mathcal{I}$ ensemble de productions pointées de $G\}$;
- $q_0 = \mathrm{cl}(\{(Z, \bullet S\$)\})$;
- $F = \{q \in Q \mid \exists$ production $X \to w$ de G t.q. $(X, w\bullet) \in q\}$
- et $\delta : Q \times V \to Q$ donnée par

$$\delta(q, \beta) = \mathrm{cl}(\{(X, \alpha\beta\bullet\gamma) \mid (X, \alpha\bullet\beta\gamma) \in q\}).$$

Re : exemple

$$X \to aYc \qquad (1)$$
$$Y \to b \qquad (2)$$



Dans le poly

1. Langages rationnels 2.1, 2.2, 2.3.1, 2.4, 3.1.1, 3.1.2, 3.2
2. Automates finis 4.1, 4.2.2
3. Langages algébriques, grammaires hors-contexte, automates à pile 5.1, 5.2.3, 5.2.4, 5.3.6, 6.2, plus Sipser 2.2
4. Parsage LL 7, 8.1
5. Parsage LR 8.2

Parsage LR(0)

Algorithme de parsage

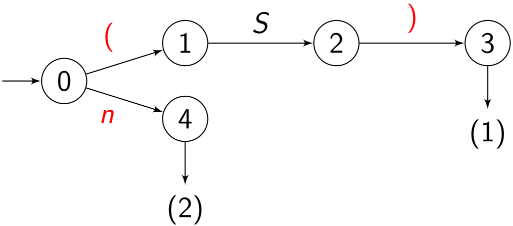
1. empiler q_0
2. `repeat`
    1. $q \leftarrow$ état en haut de la pile
    2. si $q =$ état final $X \to w\bullet$: REDUCE
        1. dépiler $|w|$ états
        2. $q' \leftarrow$ état en haut de la pile
        3. empiler $\delta(q', X)$
    3. sinon : SHIFT
        1. $a \leftarrow \text{next}(\text{input})$
        2. empiler $\delta(q, a)$
3. `until` $q =$ état final $Z \to S\$\bullet$ (✓) ou échec (✗)

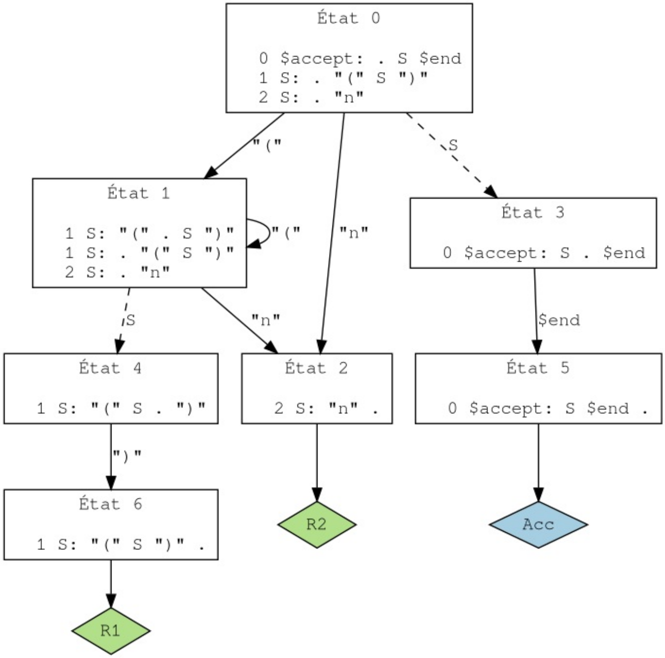
Algorithme de parsage

1. empiler q_0
2. `repeat`
   1. $q \leftarrow$ état en haut de la pile
   2. si $q =$ état final $X \to w\bullet$: **REDUCE**
      1. dépiler $|w|$ états
      2. $q' \leftarrow$ état en haut de la pile
      3. empiler $\delta(q', X)$ $\longleftarrow$ possible ✗
   3. sinon : **SHIFT**
      1. $a \leftarrow$ next(input) $\longleftarrow$ possible ✗
      2. empiler $\delta(q, a)$ $\longleftarrow$ possible ✗
3. `until` $q =$ état final $Z \to S\$\bullet$ (✓) ou échec (✗)

Exemple

$$
\begin{aligned}
S &\to (S) \qquad (1)\\
&\mid n \qquad (2)
\end{aligned}
$$





État 0
0 $accept: . S $end
1 S: . "(" S ")"
2 S: . "n"
"("
"n"
S
État 1
1 S: "(" . S ")"
1 S: . "(" S ")"
2 S: . "n"
"("
État 3
0 $accept: S . $end
S
"n"
$end
État 4
1 S: "(" S . ")"
État 2
2 S: "n" .
État 5
0 $accept: S $end .
")"
État 6
1 S: "(" S ")" .
R2
Acc
R1

Exemple : automate de parsage

$$
\begin{aligned}
Z &\to S\$ && (0)\\
S &\to (S) && (1)\\
&\mid n && (2)
\end{aligned}
$$

$$\longrightarrow \boxed{Z \to \bullet S\$}$$

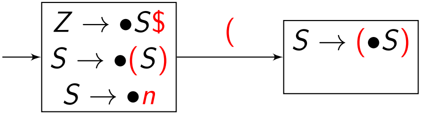
Exemple : automate de parsage

$$
\begin{aligned}
Z &\to S\$ && (0)\\
S &\to (S) && (1)\\
&\mid n && (2)
\end{aligned}
$$

$$
\longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} Z \to \bullet S\$ \\ S \to \bullet (S) \\ S \to \bullet n \end{array}}
$$

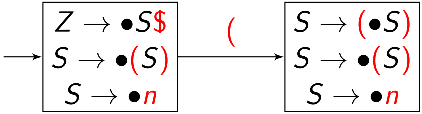
Exemple : automate de parsage

$$
\begin{aligned}
Z &\to S\$ && (0)\\
S &\to (S) && (1)\\
&\mid n && (2)
\end{aligned}
$$



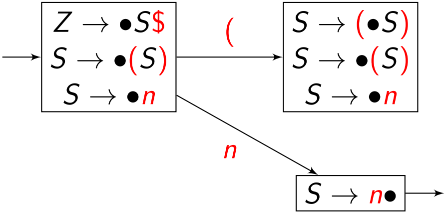
Exemple : automate de parsage

$$
\begin{aligned}
Z &\to S\$ && (0)\\
S &\to (S) && (1)\\
&\mid n && (2)
\end{aligned}
$$



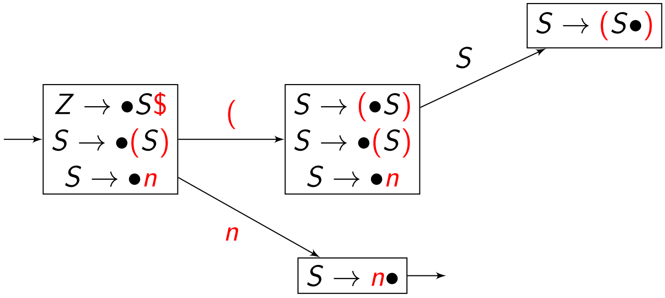
Exemple : automate de parsage

$$
\begin{aligned}
Z &\to S\$ && (0)\\
S &\to (S) && (1)\\
&\mid n && (2)
\end{aligned}
$$



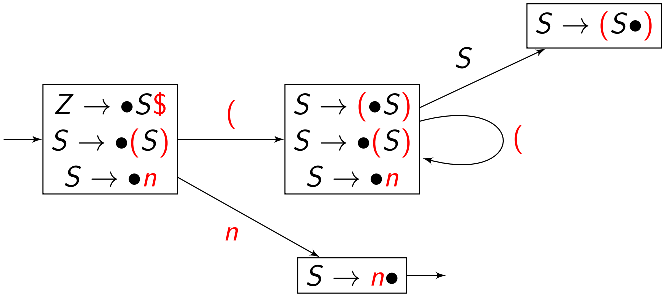
Exemple : automate de parsage

$$\begin{aligned} Z &\to S\$ && (0) \\ S &\to (S) && (1) \\ &\mid n && (2) \end{aligned}$$



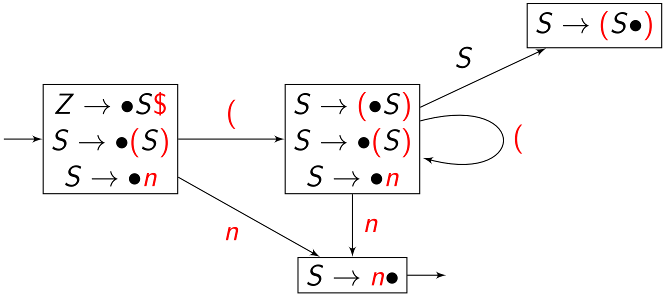
Exemple : automate de parsage

$$
\begin{aligned}
Z &\to S\$ && (0)\\
S &\to (S) && (1)\\
&\mid n && (2)
\end{aligned}
$$



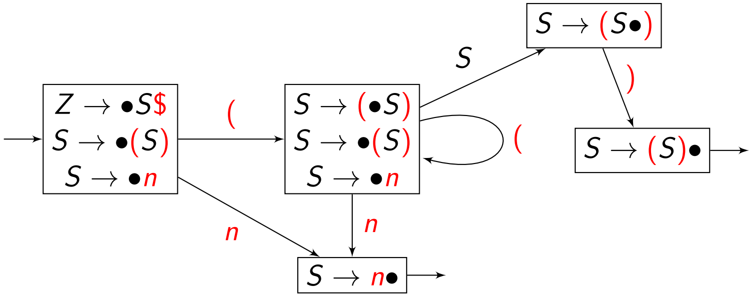
Exemple : automate de parsage

$$
\begin{aligned}
Z &\to S\$ && (0)\\
S &\to (S) && (1)\\
&\mid n && (2)
\end{aligned}
$$



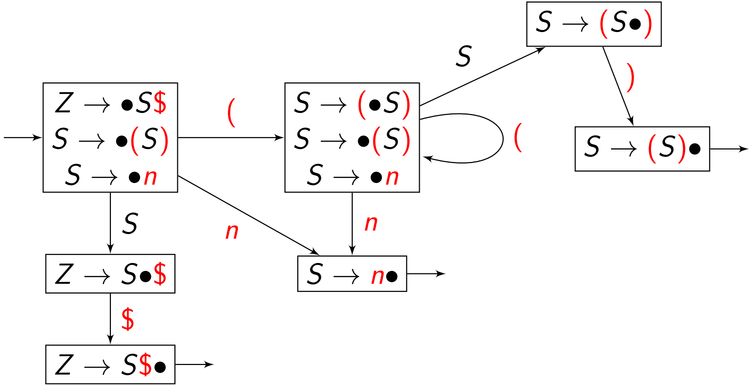
Exemple : automate de parsage

$$
\begin{array}{lll}
Z \to S\$ & & (0) \\
S \to (S) & & (1) \\
\quad\;\; \mid n & & (2)
\end{array}
$$



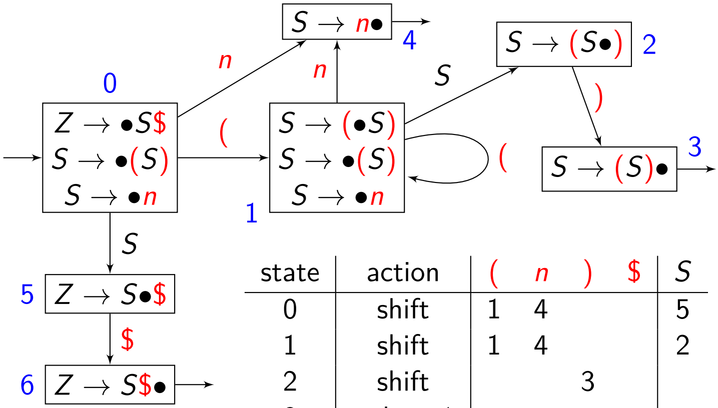
Exemple : automate de parsage

$$\begin{aligned} Z &\to S\$ && (0) \\ S &\to (S) && (1) \\ &\mid n && (2) \end{aligned}$$



Exemple : table de parsage

$$
\begin{array}{lll}
Z \to S\$ & & (0) \\
S \to (S) & & (1) \\
\quad\;\; \mid n & & (2)
\end{array}
$$



state	action	(	n	)	$	S
0	shift	1	4			5
1	shift	1	4			2
2	shift			3		
3	reduce 1					
4	reduce 2					
5	shift				6	
6	accept					

Autre exemple

$$Z \to S\$ \qquad (0)$$
$$S \to S - n \qquad (1)$$
$$\mid n \qquad (2)$$

état	productions pointées
0	$Z \to \bullet S\$$, $S \to \bullet S - n$, $S \to \bullet n$
1	$S \to n\bullet$
2	$Z \to S\bullet\$$, $S \to S\bullet - n$
3	$Z \to S\$\bullet$
4	$S \to S - \bullet n$
5	$S \to S - n\bullet$

état	action	n	$-$	$\$$	S
0	décaler	1			2
1	réduire 2				
2	décaler		4	3	
3	accepter				
4	décaler	5			
5	réduire 1				

Autre exemple

$$
\begin{aligned}
Z &\to S\$ && (0)\\
S &\to S{-}n && (1)\\
&\mid n && (2)
\end{aligned}
$$

état	action	n	$-$	$\$$	S
0	décaler	1			2
1	réduire 2				
2	décaler		4	3	
3	accepter				
4	décaler	5			
5	réduire 1				

Autre exemple

$$
\begin{aligned}
Z &\to S\$ && (0)\\
S &\to S - n && (1)\\
&\mid n && (2)
\end{aligned}
$$

état	action	n	$-$	$\$$	S
0	décaler	1			2
1	réduire 2				
2	décaler		4	3	
3	accepter				
4	décaler	5			
5	réduire 1				

parser $n - n\$$:

entrée	pile	action
$n - n\$$	$\perp 0$	décaler
$-n\$$	$\perp 01$	réduire 2
$-n\$$	$\perp 02$	décaler
$n\$$	$\perp 024$	décaler
$\$$	$\perp 0245$	réduire 1
$\$$	$\perp 02$	décaler
	$\perp 023$	✓

Autre exemple

$$
\begin{aligned}
Z &\to S\$ && (0)\\
S &\to S-n && (1)\\
&\mid n && (2)
\end{aligned}
$$

état	action	n	$-$	$\$$	S
0	décaler	1			2
1	réduire 2				
2	décaler		4	3	
3	accepter				
4	décaler	5			
5	réduire 1				

parser $n - n\$$:

entrée	pile	action	
$n-n\$$	$\perp 0$	décaler	
$-n\$$	$\perp 01$	réduire 2	$S \to n$
$-n\$$	$\perp 02$	décaler	
$n\$$	$\perp 024$	décaler	
$\$$	$\perp 0245$	réduire 1	$S \to S-n$
$\$$	$\perp 02$	décaler	
	$\perp 023$	✓	

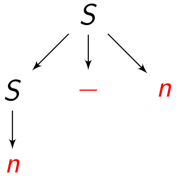
Autre exemple

$$Z \to S\$ \qquad (0)$$
$$S \to S{-}n \qquad (1)$$
$$\mid\ n \qquad (2)$$

état	action	n	$-$	$\$$	S
0	décaler	1			2
1	réduire 2				
2	décaler		4	3	
3	accepter				
4	décaler	5			
5	réduire 1				

parser $n - n\$$:

entrée	pile	action	
$n - n\$$	$\perp 0$	décaler	
$-n\$$	$\perp 01$	réduire 2	$S \to n$
$-n\$$	$\perp 02$	décaler	
$n\$$	$\perp 024$	décaler	
$\$$	$\perp 0245$	réduire 1	$S \to S{-}n$
$\$$	$\perp 02$	décaler	
	$\perp 023$	✓	



Parsage LR(0)

- lire l'entrée de gauche à droite (L)
- approche ascendant
- construire une dérivation droite (R)
- pas de regard avant (0)

Parsage SLR(1)

Encore un exemple

$$\begin{aligned} Z &\to S\$ && (0) \\ S &\to n{-}S && (1) \\ &\mid n && (2) \end{aligned}$$

état	productions pointées
0	$Z \to \bullet S\$$, $S \to \bullet n{-}S$, $S \to \bullet n$
1	$Z \to S \bullet \$$
2	$S \to n \bullet {-}S$, $S \to n \bullet$
3	$S \to n{-}\bullet S$, $S \to \bullet n{-}S$, $S \to \bullet n$
4	$Z \to S\$ \bullet$
5	$S \to n{-}S \bullet$

état	action	n	$-$	$\$$	S
0	décaler	2			1
1	décaler			4	
2	réduire 2, décaler		3		
3	décaler	2			5
4	accepter				
5	réduire 1				

Encore un exemple

$$
\begin{aligned}
Z &\to S\$ && (0)\\
S &\to n{-}S && (1)\\
&\mid n && (2)
\end{aligned}
$$

état	productions pointées
0	$Z \to \bullet S\$,\ S \to \bullet n{-}S,\ S \to \bullet n$
1	$Z \to S\bullet\$$
2	$S \to n\bullet{-}S,\ S \to n\bullet$
3	$S \to n{-}\bullet S,\ S \to \bullet n{-}S,\ S \to \bullet n$
4	$Z \to S\$\bullet$
5	$S \to n{-}S\bullet$

état	action	n	$-$	$\$$	S
0	décaler	2			1
1	décaler			4	
2	réduire 2, décaler		3		conflit SHIFT/REDUCE
3	décaler	2			5
4	accepter				
5	réduire 1				

Conflits

- SHIFT/REDUCE $\qquad X \to u \bullet v \quad Y \to u \bullet$
  - faut réduire avec $Y \to u$
  - ou décaler en attendant v ?
- REDUCE/REDUCE $\qquad X \to u \quad Y \to u$
  - faut réduire avec $X \to u$
  - ou réduire avec $Y \to u$?
- utiliser FOLLOW pour résoudre
- (et pourquoi des conflits SHIFT/SHIFT n'existent pas ?)

Re : FOLLOW

Calculer des terminaux qui peuvent suivre un symbole dans une dérivation :

Définition

Soit $x \in V$, alors $\text{FOLLOW}(x) \subseteq \Sigma$ est défini par $\text{FOLLOW}(x) = \{a \in \Sigma \mid \exists B \in N, \alpha, \beta \in V^* : B \Rightarrow^* \alpha x a \beta\}$.

Algorithme :

1. pour chaque $x \in V$: $\text{FOLLOW}(x) = \emptyset$
2. répéter jusqu'au point fixe :
   1. pour chaque $B \to \alpha x \beta \gamma$ avec $\beta \in \text{NULL}^*$:
      1. si $\gamma \notin \text{NULL}^*$: $\text{FOLLOW}(x)$ += $\text{FIRST}(\gamma)$
      2. si $\gamma \in \text{NULL}^*$: $\text{FOLLOW}(x)$ += $\text{FOLLOW}(B)$

Simple LR(1)

1. calculer la table LR(0)
2. si conflits : conditionner l'action par le FOLLOW

Exemple :

$$
\begin{array}{rcll}
Z & \to & S\$ & (0) \\
S & \to & n{-}S & (1) \\
 & | & n & (2)
\end{array}
$$

état	action	n	$-$	$\$$	S
0	décaler	2			1
1	décaler			4	
2	réd. 2, déc.		3		
3	décaler	2			5
4	accepter				
5	réduire 1				

$\Longrightarrow$

état	n	$-$	$\$$	S
0	d.2			d.1
1			d.4	
2		d.3	r.2	
3	d.2			d.5
4	— accepter —			
5			r.1	

Simple LR(1)

1. calculer la table LR(0)
2. si conflits : conditionner l'action par le FOLLOW
3. passer du type état $\to$ action $\to$ entrée
   au type état $\to$ entrée $\to$ action

Parsage LR(1)

Exemple

$$
\begin{aligned}
Z &\to S\$ && (0)\\
S &\to L{=}E && (1)\\
&\mid E && (2)\\
L &\to x && (3)\\
&\mid *E && (4)\\
E &\to L && (5)
\end{aligned}
$$

- manipulation des pointeurs

Exemple

$$
\begin{array}{rcll}
Z & \to & S\$ & (0) \\
S & \to & L{=}E & (1) \\
 & \mid & E & (2) \\
L & \to & x & (3) \\
 & \mid & *E & (4) \\
E & \to & L & (5)
\end{array}
$$

état	x	$*$	$=$	$\$$	S	L	E
0	d.4	d.5			d.1	d.2	d.3
1				d.6			
2			d.7				
			r.5	r.5			
3				r.2			
4			r.3	r.3			
5	d.4	d.5				d.9	d.8
6			— accepter —				
7	d.4	d.5				d.9	d.10
8			r.4	r.4			
9			r.5	r.5			
10			r.1	r.1			

Exemple

$$
\begin{aligned}
Z &\to S\$ && (0)\\
S &\to L{=}E && (1)\\
&\mid E && (2)\\
L &\to x && (3)\\
&\mid {*}E && (4)\\
E &\to L && (5)
\end{aligned}
$$

état	x	$*$	$=$	$\$$	S	L	E
0	d.4	d.5			d.1	d.2	d.3
1				d.6			
2		conflit	d.7 r.5	r.5			
3				r.2			
4			r.3	r.3			
5	d.4	d.5				d.9	d.8
6			— accepter —				
7	d.4	d.5				d.9	d.10
8			r.4	r.4			
9			r.5	r.5			
10			r.1	r.1			

Exemple, bis

Le problème :

$$
\begin{aligned}
Z &\to S\$ && (0)\\
S &\to L{=}E && (1)\\
&\mid E && (2)\\
L &\to x && (3)\\
&\mid *E && (4)\\
E &\to L && (5)
\end{aligned}
$$

état	productions pointées
0	$Z \to \bullet S\$$

Exemple, bis

Le problème :

$$
\begin{aligned}
Z &\to S\$ && (0)\\
S &\to L{=}E && (1)\\
&\mid E && (2)\\
L &\to x && (3)\\
&\mid *E && (4)\\
E &\to L && (5)
\end{aligned}
$$

état	productions pointées
0	$Z \to \bullet S\$,\ S \to \bullet L{=}E,\ S \to \bullet E$

Exemple, bis

Le problème :

$$
\begin{array}{lll}
Z \to S\$ & & (0) \\
S \to L{=}E & & (1) \\
\quad\;\; \mid E & & (2) \\
L \to x & & (3) \\
\quad\;\; \mid {*}E & & (4) \\
E \to L & & (5)
\end{array}
$$

état	productions pointées
0	$Z \to \bullet S\$$, $S \to \bullet L{=}E$, $S \to \bullet E$
	$L \to \bullet x$, $L \to \bullet {*}E$, $E \to \bullet L$

Exemple, bis

Le problème :

$$
\begin{array}{lll}
Z \to S\$ & & (0) \\
S \to L{=}E & & (1) \\
\quad\;\; \mid E & & (2) \\
L \to x & & (3) \\
\quad\;\; \mid *E & & (4) \\
E \to L & & (5)
\end{array}
$$

état	productions pointées
0	$Z \to \bullet S\$$, $S \to \bullet L{=}E$, $S \to \bullet E$
	$L \to \bullet x$, $L \to \bullet * E$, $E \to \bullet L$
1	$Z \to S \bullet \$$
2	$S \to L \bullet {=} E$, $E \to L \bullet$ ✓

Exemple, bis

Le problème :

$$
\begin{array}{lll}
Z \to S\$ & & (0) \\
S \to L{=}E & & (1) \\
\quad\mid E & & (2) \\
L \to x & & (3) \\
\quad\mid *E & & (4) \\
E \to L & & (5)
\end{array}
$$

état	productions pointées
0	$Z \to \bullet S\$$, $S \to \bullet L{=}E$, $S \to \bullet E$
	$L \to \bullet x$, $L \to \bullet * E$, $E \to \bullet L$
1	$Z \to S \bullet \$$
2	$S \to L \bullet {=} E$, $E \to L \bullet$ ✓

- l'état 2 ne doit qu'accepter si le L est suivi d'un $\$$

Regard en avant

Définition

Soit G une grammaire hors-contexte. Une production pointée élargie de G est un triplet $(A, \alpha\bullet\beta, a)$ telle que $A \to \alpha\beta$ est une production de G et $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$.

- noté $A \to \alpha\bullet\beta\ [a]$
- on a achevé α dans la production $A \to \alpha\beta$;
- il nous reste à trouver β ;
- la production n'est que valable si A est suivi par a dans l'entrée
- donc $a = \varepsilon$ (pas de contraint) ou $a \in \text{FOLLOW}(A)$

Clôture

Définition

Soit G une grammaire hors-contexte et $\mathcal{I}$ un ensemble de productions pointées élargies de G. La clôture de $\mathcal{I}$ est le plus petit ensemble $\mathsf{cl}(\mathcal{I})$ tel que $\mathcal{I} \subseteq \mathsf{cl}(\mathcal{I})$ et

- si $(A, \alpha \bullet B\beta, a) \in \mathsf{cl}(\mathcal{I})$, $B \to \gamma$ est une production de G et $b \in \mathrm{FIRST}(\beta)$, alors $(B, \bullet\gamma, b) \in \mathsf{cl}(\mathcal{I})$;
- si $(A, \alpha \bullet B, a) \in \mathsf{cl}(\mathcal{I})$ et $B \to \gamma$ est une production de G, alors $(B, \bullet\gamma, a) \in \mathsf{cl}(\mathcal{I})$.

Automate LR(1)

Définition

L'automate de parsage LR(1) d'une grammaire hors-contexte G est l'automate fini déterministe (Q, q_0, F, δ) avec

- $Q = \{\mathsf{cl}(\mathcal{I}) \mid \mathcal{I}$ ensemble de prod. pointées élargies de $G\}$;
- $q_0 = \mathsf{cl}\big(\{(Z, \bullet S\$, \varepsilon)\}\big)$;
- $F = \{q \in Q \mid \exists$ production $X \to w$ de G et $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ tels que $(X, w\bullet, a) \in q\}$
- et $\delta : Q \times V \to Q$ donnée par

$$\delta(q, \beta) = \mathsf{cl}\big(\{(X, \alpha\beta\bullet\gamma, a) \mid (X, \alpha\bullet\beta\gamma, a) \in q\}\big).$$

Exemple, ter

$$
\begin{aligned}
Z &\to S\$ && (0)\\
S &\to L{=}E && (1)\\
&\mid E && (2)\\
L &\to x && (3)\\
&\mid *E && (4)\\
E &\to L && (5)
\end{aligned}
$$

état	productions pointées élargies
0	$Z \to \bullet S\$ \ [\varepsilon]$

Exemple, ter

$$
\begin{aligned}
Z &\to S\$ && (0)\\
S &\to L{=}E && (1)\\
&\mid E && (2)\\
L &\to x && (3)\\
&\mid {*}E && (4)\\
E &\to L && (5)
\end{aligned}
$$

état	productions pointées élargies
0	$Z \to \bullet S\$\ [\varepsilon]$
	$S \to \bullet L{=}E\ [\$]$, $S \to \bullet E\ [\$]$

Exemple, ter

$$
\begin{aligned}
Z &\to S\$ && (0)\\
S &\to L{=}E && (1)\\
&\mid E && (2)\\
L &\to x && (3)\\
&\mid *E && (4)\\
E &\to L && (5)
\end{aligned}
$$

état	productions pointées élargies
0	$Z \to \bullet S\$\ [\varepsilon]$ $S \to \bullet L{=}E\ [\$]$, $S \to \bullet E\ [\$]$ $L \to \bullet x\ [=]$, $L \to \bullet *E\ [=]$

Exemple, ter

$$
\begin{aligned}
Z &\to S\$ && (0)\\
S &\to L{=}E && (1)\\
&\mid E && (2)\\
L &\to x && (3)\\
&\mid *E && (4)\\
E &\to L && (5)
\end{aligned}
$$

état	productions pointées élargies
0	$Z \to \bullet S\$ \; [\varepsilon]$ $S \to \bullet L{=}E \; [\$]$, $S \to \bullet E \; [\$]$ $L \to \bullet x \; [=]$, $L \to \bullet * E \; [=]$ $E \to \bullet L \; [\$]$

Exemple, ter

$$
\begin{array}{lll}
Z \to S\$ & & (0) \\
S \to L{=}E & & (1) \\
\quad\;\; \mid E & & (2) \\
L \to x & & (3) \\
\quad\;\; \mid *E & & (4) \\
E \to L & & (5)
\end{array}
$$

état	productions pointées élargies
0	$Z \to \bullet S\$ \ [\varepsilon]$
	$S \to \bullet L{=}E\ [\$]$, $S \to \bullet E\ [\$]$
	$L \to \bullet x\ [=]$, $L \to \bullet *E\ [=]$
	$E \to \bullet L\ [\$]$
	$L \to \bullet x\ [\$]$, $L \to \bullet *E\ [\$]$

Exemple, ter

$Z \to S\$$	(0)
$S \to L{=}E$	(1)
$\mid E$	(2)
$L \to x$	(3)
$\mid *E$	(4)
$E \to L$	(5)

état	productions pointées élargies
0	$Z \to \bullet S\$\ [\varepsilon]$
	$S \to \bullet L{=}E\ [\$]$, $S \to \bullet E\ [\$]$
	$L \to \bullet x\ [=]$, $L \to \bullet * E\ [=]$
	$E \to \bullet L\ [\$]$
	$L \to \bullet x\ [\$]$, $L \to \bullet * E\ [\$]$
1	$Z \to S \bullet \$\ [\varepsilon]$
2	$S \to L \bullet {=} E\ [\$]$, $E \to L \bullet\ [\$\checkmark]$

- l'état 2 n'accepte que dans un contexte \$

Exemple, complet

$$Z \to S\$ \quad (0) \qquad L \to x \quad (3)$$
$$S \to L{=}E \quad (1) \qquad \mid *E \quad (4)$$
$$\mid E \quad (2) \qquad E \to L \quad (5)$$

état	x	$*$	$=$	$\$$	S	L	E
0	d.4	d.5			d.1	d.2	d.3

état	productions pointées élargies
0	$Z \to \bullet S\$\ [\varepsilon]$, $S \to \bullet L{=}E\ [\$]$ $S \to \bullet E\ [\$]$, $L \to \bullet x\ [=]$ $L \to \bullet *E\ [=]$, $E \to \bullet L\ [\$]$ $L \to \bullet x\ [\$]$, $L \to \bullet *E\ [\$]$

Exemple, complet

$$Z \to S\$ \quad (0) \qquad L \to x \quad (3)$$
$$S \to L{=}E \quad (1) \qquad \mid *E \quad (4)$$
$$\mid E \quad (2) \qquad E \to L \quad (5)$$

état	x	$*$	$=$	$\$$	S	L	E
0	d.4	d.5			d.1	d.2	d.3

état	productions pointées élargies
0	$Z \to \bullet S\$\ [\varepsilon]$, $S \to \bullet L{=}E\ [\$]$
	$S \to \bullet E\ [\$]$, $L \to \bullet x\ [=]$
	$L \to \bullet *E\ [=]$, $E \to \bullet L\ [\$]$
	$L \to \bullet x\ [\$]$, $L \to \bullet *E\ [\$]$
1	$Z \to S \bullet \$\ [\varepsilon]$
2	$S \to L \bullet {=} E\ [\$]$, $E \to L \bullet\ [\$\checkmark]$

Exemple, complet

$$
\begin{array}{lll}
Z \to S\$ & (0) & L \to x \quad (3) \\
S \to L{=}E & (1) & \quad\;\; \mid *E \quad (4) \\
\quad\;\; \mid E & (2) & E \to L \quad (5)
\end{array}
$$

état	x	$*$	$=$	$\$$	S	L	E
0	d.4	d.5			d.1	d.2	d.3

état	productions pointées élargies
0	$Z \to \bullet S\$\ [\varepsilon]$, $S \to \bullet L{=}E\ [\$]$ $S \to \bullet E\ [\$]$, $L \to \bullet x\ [=]$ $L \to \bullet {*}E\ [=]$, $E \to \bullet L\ [\$]$ $L \to \bullet x\ [\$]$, $L \to \bullet {*}E\ [\$]$
1	$Z \to S\bullet\$\ [\varepsilon]$
2	$S \to L\bullet{=}E\ [\$]$, $E \to L\bullet\ [\$\checkmark]$
3	$S \to E\bullet\ [\$\checkmark]$
4	$L \to x\bullet\ [=\checkmark]$, $L \to x\bullet\ [\$\checkmark]$

Exemple, complet

$$Z \to S\$ \quad (0) \qquad L \to x \quad (3)$$
$$S \to L{=}E \quad (1) \qquad \mid *E \quad (4)$$
$$\mid E \quad (2) \qquad E \to L \quad (5)$$

état	x	$*$	$=$	$\$$	S	L	E
0	d.4	d.5			d.1	d.2	d.3

état	productions pointées élargies
0	$Z \to \bullet S\$ \ [\varepsilon]$, $S \to \bullet L{=}E \ [\$]$ $S \to \bullet E \ [\$]$, $L \to \bullet x \ [=]$ $L \to \bullet * E \ [=]$, $E \to \bullet L \ [\$]$ $L \to \bullet x \ [\$]$, $L \to \bullet * E \ [\$]$
1	$Z \to S \bullet \$ \ [\varepsilon]$
2	$S \to L \bullet {=} E \ [\$]$, $E \to L \bullet \ [\$\checkmark]$
3	$S \to E \bullet \ [\$\checkmark]$
4	$L \to x \bullet \ [=\checkmark]$, $L \to x \bullet \ [\$\checkmark]$
5	$L \to * \bullet E \ [=]$, $L \to * \bullet E \ [\$]$

Exemple, complet

$$Z \to S\$ \quad (0) \qquad L \to x \quad (3)$$
$$S \to L{=}E \quad (1) \qquad \mid *E \quad (4)$$
$$\mid E \quad (2) \qquad E \to L \quad (5)$$

état	x	*	=	\$	S	L	E
0	d.4	d.5			d.1	d.2	d.3

état	productions pointées élargies
0	$Z \to \bullet S\$ \ [\varepsilon]$, $S \to \bullet L{=}E \ [\$]$
	$S \to \bullet E \ [\$]$, $L \to \bullet x \ [=]$
	$L \to \bullet *E \ [=]$, $E \to \bullet L \ [\$]$
	$L \to \bullet x \ [\$]$, $L \to \bullet *E \ [\$]$
1	$Z \to S\bullet\$ \ [\varepsilon]$
2	$S \to L\bullet{=}E \ [\$]$, $E \to L\bullet \ [\$\checkmark]$
3	$S \to E\bullet \ [\$\checkmark]$
4	$L \to x\bullet \ [=\checkmark]$, $L \to x\bullet \ [\$\checkmark]$
5	$L \to *\bullet E \ [=]$, $L \to *\bullet E \ [\$]$
	$E \to \bullet L \ [=]$, $L \to \bullet x \ [=]$
	$L \to \bullet *E \ [=]$, $E \to \bullet L \ [\$]$
	$L \to \bullet x \ [\$]$, $L \to \bullet *E \ [\$]$

Exemple, complet

$Z \to S\$$ (0) $\quad L \to x$ (3)

$S \to L{=}E$ (1) $\quad \mid *E$ (4)

$\mid E$ (2) $\quad E \to L$ (5)

état	x	$*$	$=$	$\$$	S	L	E
0	d.4	d.5			d.1	d.2	d.3
1				d.6			

état	productions pointées élargies
0	$Z \to \bullet S\$\ [\varepsilon]$, $S \to \bullet L{=}E\ [\$]$
	$S \to \bullet E\ [\$]$, $L \to \bullet x\ [=]$
	$L \to \bullet *E\ [=]$, $E \to \bullet L\ [\$]$
	$L \to \bullet x\ [\$]$, $L \to \bullet *E\ [\$]$
1	$Z \to S \bullet \$\ [\varepsilon]$
2	$S \to L\bullet{=}E\ [\$]$, $E \to L\bullet\ [\$\checkmark]$
3	$S \to E\bullet\ [\$\checkmark]$
4	$L \to x\bullet\ [=\checkmark]$, $L \to x\bullet\ [\$\checkmark]$
5	$L \to *\bullet E\ [=]$, $L \to *\bullet E\ [\$]$
	$E \to \bullet L\ [=]$, $L \to \bullet x\ [=]$
	$L \to \bullet *E\ [=]$, $E \to \bullet L\ [\$]$
	$L \to \bullet x\ [\$]$, $L \to \bullet *E\ [\$]$
6	$Z \to S\$\bullet\ [\varepsilon\checkmark]$

Exemple, complet

$Z \to S\$$	(0)		$L \to x$	(3)
$S \to L{=}E$	(1)		$\mid *E$	(4)
	$\mid E$	(2)	$E \to L$	(5)

état	x	$*$	$=$	$\$$	S	L	E
0	d.4	d.5			d.1	d.2	d.3
1				d.6			
2			d.7	r.5			

état	productions pointées élargies
0	$Z \to \bullet S\$\ [\varepsilon]$, $S \to \bullet L{=}E\ [\$]$
	$S \to \bullet E\ [\$]$, $L \to \bullet x\ [=]$
	$L \to \bullet * E\ [=]$, $E \to \bullet L\ [\$]$
	$L \to \bullet x\ [\$]$, $L \to \bullet * E\ [\$]$
1	$Z \to S \bullet \$\ [\varepsilon]$
2	$S \to L \bullet {=} E\ [\$]$, $E \to L \bullet\ [\$\checkmark]$
3	$S \to E \bullet\ [\$\checkmark]$
4	$L \to x \bullet\ [=\checkmark]$, $L \to x \bullet\ [\$\checkmark]$
5	$L \to * \bullet E\ [=]$, $L \to * \bullet E\ [\$]$
	$E \to \bullet L\ [=]$, $L \to \bullet x\ [=]$
	$L \to \bullet * E\ [=]$, $E \to \bullet L\ [\$]$
	$L \to \bullet x\ [\$]$, $L \to \bullet * E\ [\$]$
6	$Z \to S\$ \bullet\ [\varepsilon\checkmark]$
7	$S \to L{=}\bullet E\ [\$]$

Exemple, complet

$$Z \to S\$ \quad (0) \qquad L \to x \quad (3)$$
$$S \to L{=}E \quad (1) \qquad \mid *E \quad (4)$$
$$\mid E \quad (2) \qquad E \to L \quad (5)$$

état	x	$*$	$=$	$\$$	S	L	E
0	d.4	d.5			d.1	d.2	d.3
1				d.6			
2			d.7	r.5			

état	productions pointées élargies
0	$Z \to \bullet S\$\ [\varepsilon]$, $S \to \bullet L{=}E\ [\$]$
	$S \to \bullet E\ [\$]$, $L \to \bullet x\ [=]$
	$L \to \bullet *E\ [=]$, $E \to \bullet L\ [\$]$
	$L \to \bullet x\ [\$]$, $L \to \bullet *E\ [\$]$
1	$Z \to S\bullet\$\ [\varepsilon]$
2	$S \to L\bullet{=}E\ [\$]$, $E \to L\bullet\ [\$\checkmark]$
3	$S \to E\bullet\ [\$\checkmark]$
4	$L \to x\bullet\ [=\checkmark]$, $L \to x\bullet\ [\$\checkmark]$
5	$L \to *\bullet E\ [=]$, $L \to *\bullet E\ [\$]$
	$E \to \bullet L\ [=]$, $L \to \bullet x\ [=]$
	$L \to \bullet *E\ [=]$, $E \to \bullet L\ [\$]$
	$L \to \bullet x\ [\$]$, $L \to \bullet *E\ [\$]$
6	$Z \to S\$\bullet\ [\varepsilon\checkmark]$
7	$S \to L{=}\bullet E\ [\$]$, $E \to \bullet L\ [\$]$
	$L \to \bullet x\ [\$]$, $L \to \bullet *E\ [\$]$

Exemple, complet

$$Z \to S\$ \quad (0) \qquad L \to x \quad (3)$$
$$S \to L{=}E \quad (1) \qquad \mid *E \quad (4)$$
$$\mid E \quad (2) \qquad E \to L \quad (5)$$

état	x	$*$	$=$	$\$$	S	L	E
0	d.4	d.5			d.1	d.2	d.3
1				d.6			
2			d.7	r.5			
3				r.2			
4			r.3	r.3			

état	productions pointées élargies
0	$Z \to \bullet S\$ \ [\varepsilon]$, $S \to \bullet L{=}E\ [\$]$
	$S \to \bullet E\ [\$]$, $L \to \bullet x\ [=]$
	$L \to \bullet *E\ [=]$, $E \to \bullet L\ [\$]$
	$L \to \bullet x\ [\$]$, $L \to \bullet *E\ [\$]$
1	$Z \to S\bullet\$ \ [\varepsilon]$
2	$S \to L\bullet{=}E\ [\$]$, $E \to L\bullet\ [\$\checkmark]$
3	$S \to E\bullet\ [\$\checkmark]$
4	$L \to x\bullet\ [=\checkmark]$, $L \to x\bullet\ [\$\checkmark]$
5	$L \to *\bullet E\ [=]$, $L \to *\bullet E\ [\$]$
	$E \to \bullet L\ [=]$, $L \to \bullet x\ [=]$
	$L \to \bullet *E\ [=]$, $E \to \bullet L\ [\$]$
	$L \to \bullet x\ [\$]$, $L \to \bullet *E\ [\$]$
6	$Z \to S\$\bullet\ [\varepsilon\checkmark]$
7	$S \to L{=}\bullet E\ [\$]$, $E \to \bullet L\ [\$]$
	$L \to \bullet x\ [\$]$, $L \to \bullet *E\ [\$]$

Exemple, complet

$$
\begin{array}{llll}
Z \to S\$ & (0) & L \to x & (3) \\
S \to L{=}E & (1) & \quad \mid *E & (4) \\
\quad \mid E & (2) & E \to L & (5)
\end{array}
$$

état	x	$*$	$=$	$\$$	S	L	E
0	d.4	d.5			d.1	d.2	d.3
1				d.6			
2			d.7	r.5			
3				r.2			
4			r.3	r.3			
5	d.4	d.5				d.9	d.8

état	productions pointées élargies
0	$Z \to \bullet S\$\ [\varepsilon]$, $S \to \bullet L{=}E\ [\$]$ $S \to \bullet E\ [\$]$, $L \to \bullet x\ [=]$ $L \to \bullet *E\ [=]$, $E \to \bullet L\ [\$]$ $L \to \bullet x\ [\$]$, $L \to \bullet *E\ [\$]$
1	$Z \to S \bullet \$\ [\varepsilon]$
2	$S \to L \bullet {=}E\ [\$]$, $E \to L \bullet\ [\$\checkmark]$
3	$S \to E \bullet\ [\$\checkmark]$
4	$L \to x \bullet\ [=\checkmark]$, $L \to x \bullet\ [\$\checkmark]$
5	$L \to * \bullet E\ [=]$, $L \to * \bullet E\ [\$]$ $E \to \bullet L\ [=]$, $L \to \bullet x\ [=]$ $L \to \bullet *E\ [=]$, $E \to \bullet L\ [\$]$ $L \to \bullet x\ [\$]$, $L \to \bullet *E\ [\$]$
6	$Z \to S\$ \bullet\ [\varepsilon\checkmark]$
7	$S \to L{=}\bullet E\ [\$]$, $E \to \bullet L\ [\$]$ $L \to \bullet x\ [\$]$, $L \to \bullet *E\ [\$]$
8	$L \to *E \bullet\ [=\checkmark]$, $L \to *E \bullet\ [\$\checkmark$
9	$E \to L \bullet\ [=\checkmark]$, $E \to L \bullet\ [\$\checkmark]$

Exemple, complet

$$\begin{array}{llllll} Z \to S\$ & (0) & & L \to x & (3) \\ S \to L{=}E & (1) & & \quad \mid *E & (4) \\ \quad \mid E & (2) & & E \to L & (5) \end{array}$$

état	x	$*$	$=$	$\$$	S	L	E
0	d.4	d.5			d.1	d.2	d.3
1				d.6			
2			d.7	r.5			
3				r.2			
4			r.3	r.3			
5	d.4	d.5				d.9	d.8
6				— accepter —			
7	d.12	d.13				d.11	d.10
8			r.4				
9			r.5				
10				r.1			
11				r.5			
12				r.3			
13	d.12	d.13				d.11	d.14
14				r.4			

état	productions pointées élargies
0	$Z \to \bullet S\$ \ [\varepsilon]$, $S \to \bullet L{=}E \ [\$]$
	$S \to \bullet E \ [\$]$, $L \to \bullet x \ [=]$
	$L \to \bullet * E \ [=]$, $E \to \bullet L \ [\$]$
	$L \to \bullet x \ [\$]$, $L \to \bullet * E \ [\$]$
1	$Z \to S \bullet \$ \ [\varepsilon]$
2	$S \to L \bullet {=} E \ [\$]$, $E \to L \bullet \ [\$\checkmark]$
3	$S \to E \bullet \ [\$\checkmark]$
4	$L \to x \bullet \ [=\checkmark]$, $L \to x \bullet \ [\$\checkmark]$
5	$L \to * \bullet E \ [=]$, $L \to * \bullet E \ [\$]$
	$E \to \bullet L \ [=]$, $L \to \bullet x \ [=]$
	$L \to \bullet * E \ [=]$, $E \to \bullet L \ [\$]$
	$L \to \bullet x \ [\$]$, $L \to \bullet * E \ [\$]$
6	$Z \to S\$ \bullet \ [\varepsilon\checkmark]$
7	$S \to L{=}\bullet E \ [\$]$, $E \to \bullet L \ [\$]$
	$L \to \bullet x \ [\$]$, $L \to \bullet * E \ [\$]$
8	$L \to * E \bullet \ [=\checkmark]$, $L \to * E \bullet \ [\$\checkmark$
9	$E \to L \bullet \ [=\checkmark]$, $E \to L \bullet \ [\$\checkmark]$
10	$S \to L{=}E \bullet \ [\$\checkmark]$
11	$E \to L \bullet \ [\$\checkmark]$
12	$L \to x \bullet \ [\$\checkmark]$
13	$L \to * \bullet E \ [\$]$, $E \to \bullet L \ [\$]$
	$L \to \bullet x \ [\$]$, $L \to \bullet * E \ [\$]$
14	$L \to * E \bullet \ [\$\checkmark]$


That's all Folks!