Om NP-hårde problemer

30 marts 2007

Om NP-hårde problemer

- Jeg antager at
  - I ved hvad en algoritme er
  - I ved hvordan man beregner køretiden af en algoritme
- Jeg antager *ikke* at I ved noget om Turing-maskiner
  (Og jeg vil ikke bruge noget om Turing-maskiner her)
- Definition: En algoritme er en Ja/Nej-algoritme hvis den som output kun har “Ja” hhv. “Nej”
- Eksempler:
  - Input: heltal x Output: “Ja,” hvis x kan divideres med 7, “Nej” ellers
  - Input: graf G, heltal k Output: “Ja,” hvis G kan farves med k farver, “Nej” ellers
- Ikke-eksempler:
  - Input: graf G Output: antal farver som skal bruges for at farve G
  - Input: ufuldstændig Sudoku Output: udfyldt Sudoku

- Definition: Et Ja/Nej-problem er en afbildning fra en eller anden input-mængde til mængden $\{\text{Ja}, \text{Nej}\}$
- Eksempel: afbildningen fra (mængden af grafer) $\times \mathbb{N}$ til $\{\text{Ja}, \text{Nej}\}$ givet ved foreskriften: "Ja," hvis G kan farves med k farver, "Nej" ellers
- (der er nogen detaljer her mht. *kodningen* af input som vi springer over)
- Definition: En Ja/Nej-algoritme A løser et Ja/Nej-problem $Q : I \to \{\text{Ja}, \text{Nej}\}$ hvis $A(x) = Q(x)$ for alle $x \in I$.
- Definition: Et Ja/Nej-problem Q kaldes løsbar hvis der findes en Ja/Nej-algoritme der løser det.
- Vigtig sætning: Der findes uløsbare Ja/Nej-problemer.
- F.eks. Posts korrespondence-problem, se `http://en.wikipedia.org/wiki/Post_correspondence_problem`

- Definition *(igen)*: En Ja/Nej-algoritme A løser et Ja/Nej-problem $Q : I \to \{\text{Ja}, \text{Nej}\}$ hvis $A(x) = Q(x)$ for alle $x \in I$.
- Definition: Givet et Ja/Nej-problem $Q : I \to \{\text{Ja}, \text{Nej}\}$ og en mængde (af *certifikater*) J. En Ja/Nej-algoritme A afprøver ("verifies") Q hvis der
  - til ethvert $x \in I$ med $Q(x) =$ "Ja" findes et $y \in J$ så $A(x, y) =$ "Ja",
  - til ethvert $x \in I$ med $Q(x) =$ "Nej" *ikke* findes noget $y \in J$ med $A(x, y) =$ "Ja".
- Eksempel: $I =$ Grafer $\times\ \mathbb{N}$,
  $Q(G, k) =$ "Kan G farves med k farver?",
  $J =$ farvninger af grafer,
  $A =$ "Givet graf G, tal k og certifikat H, se efter om H er en k-farvning af G"

- Definition:
  - $\mathbb{P}$ er mængden af alle Ja/Nej-problemer hvortil der findes polynomiske Ja/Nej-algoritmer der løser dem.
  - $\mathbb{NP}$ er mængden af alle Ja/Nej-problemer hvortil der findes polynomiske Ja/Nej-algoritmer der afprøver dem.
- $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{NP}$, men er $\mathbb{P} \neq \mathbb{NP}$? Ved ikke ...

- Definition: Givet to Ja/Nej-problemer $Q_1 : I_1 \rightarrow \{\text{Ja}, \text{Nej}\}$ og $Q_2 : I_2 \rightarrow \{\text{Ja}, \text{Nej}\}$. En algoritme A med input I_1 og output I_2 kaldes en reduktion fra Q_1 til Q_2 hvis

$$Q_1(x) = \text{“Ja”} \quad \Leftrightarrow \quad Q_2(A(x)) = \text{“Ja”} \quad \text{for alle } x \in I_1$$

- En polynomisk reduktion er en reduktion der kører i polynomisk tid.

- Definition: Et Ja/Nej-problem Q er $\mathbb{NP}$-hårdt hvis der til ethvert problem $Q' \in \mathbb{NP}$ findes en polynomisk reduktion fra Q' til Q.
- $\mathbb{NPC}$ (mængden af $\mathbb{NP}$-fuldstændige problemer) er mængden af alle problemer som
  - ligger i $\mathbb{NP}$ og
  - er $\mathbb{NP}$-hårde.
- Eksempler på $\mathbb{NPC}$-problemer: graffarvning, subset-sum, partielle latinske kvadrater etc.
- at vise at et givet Ja/Nej-problem Q er $\mathbb{NP}$-hårdt: Opskriv en *reduktion* fra et andet Ja/Nej-problem Q' som *er* $\mathbb{NP}$-hårdt til Q.

- Lad I være mængden af alle $n^2 \times n^2$-matricer hvor nogen indgange er fyldt ud med heltal mellem 1 og n^2. Lad $Q : I \to \{\text{Ja}, \text{Nej}\}$ være problemet

$$Q(x) = \text{“Ja”} \quad \Leftrightarrow \quad \text{matricen } x \text{ kan fyldes ud til en Sudoku}$$

- Sætning: $Q \in \mathbb{NP}$ (nemt at vise)
- Sætning: Q er $\mathbb{NP}$-hårdt.
  Ikke så nemt at vise; f.eks. ved at reducere partielle-latinske-kvadrater-problemet til Q.

- om $\mathbb{P}$, $\mathbb{NP}$ og $\mathbb{NPC}$: Cormen, Leiserson, Rivest. *Introduction to Algorithms*. Kapitel 36
- om reduktion af LATIN til Sudoku:
  - `http://web.archive.org/web/20060521153500/http://www.dcs.warwick.ac.uk/~pwg/cs301/sudoku.html`
  - `http://www-imai.is.s.u-tokyo.ac.jp/~yato/data2/MasterThesis.pdf`