Théorie des langages rationnels : THLR

CM 1

Uli Fahrenberg

EPITA Rennes

Septembre 2021

Aperçu

Ouverture culturelle

C'est quoi ce cours ?

- fondements algébriques de l'informatique
- fondements de la calculabilité
- ouverture scientifique
- la qualité fondamentale d'un chercheur :

Ouverture culturelle

C'est quoi ce cours ?

- fondements algébriques de l'informatique
- fondements de la calculabilité
- ouverture scientifique
- la qualité fondamentale d'un chercheur : la curiosité

Langages, mots, expressions

Langages :

- de programmation
- naturelles
- en bio-informatique, *etc.*

Langages, mots, expressions

Langages :

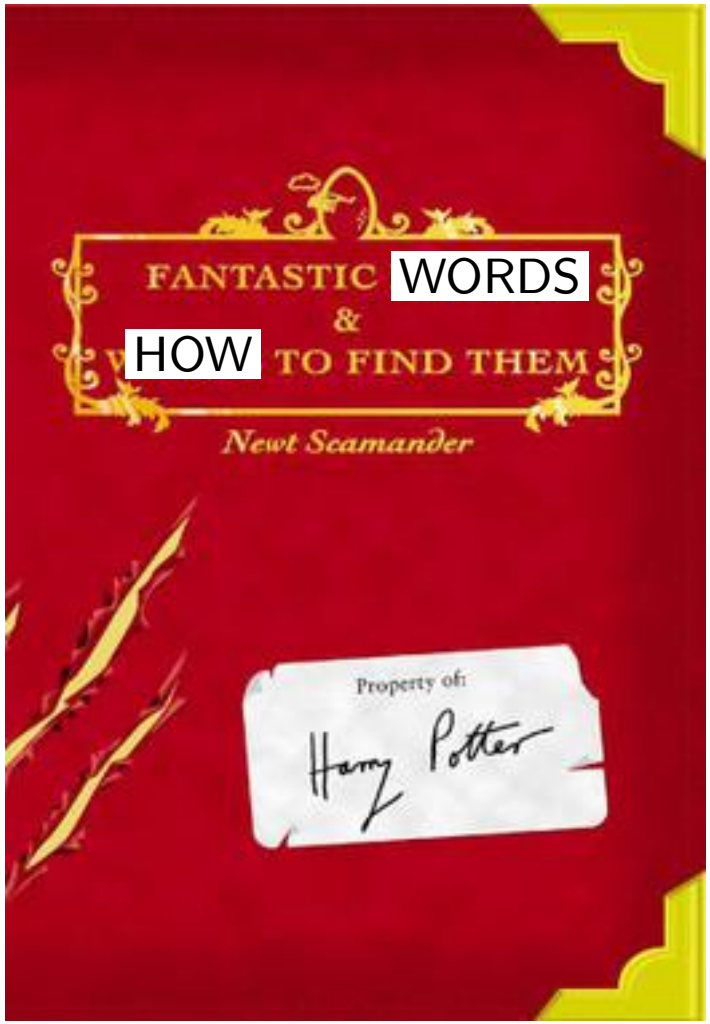
- de programmation
- naturelles
- en bio-informatique, *etc.*
- *qu'est-ce que :* syntaxe, sémantique

Langages, mots, expressions

Langages :

- de programmation
- naturelles
- en bio-informatique, *etc.*
- *qu'est-ce que :* syntaxe, sémantique

Mots :



Langages, mots, expressions

Langages :

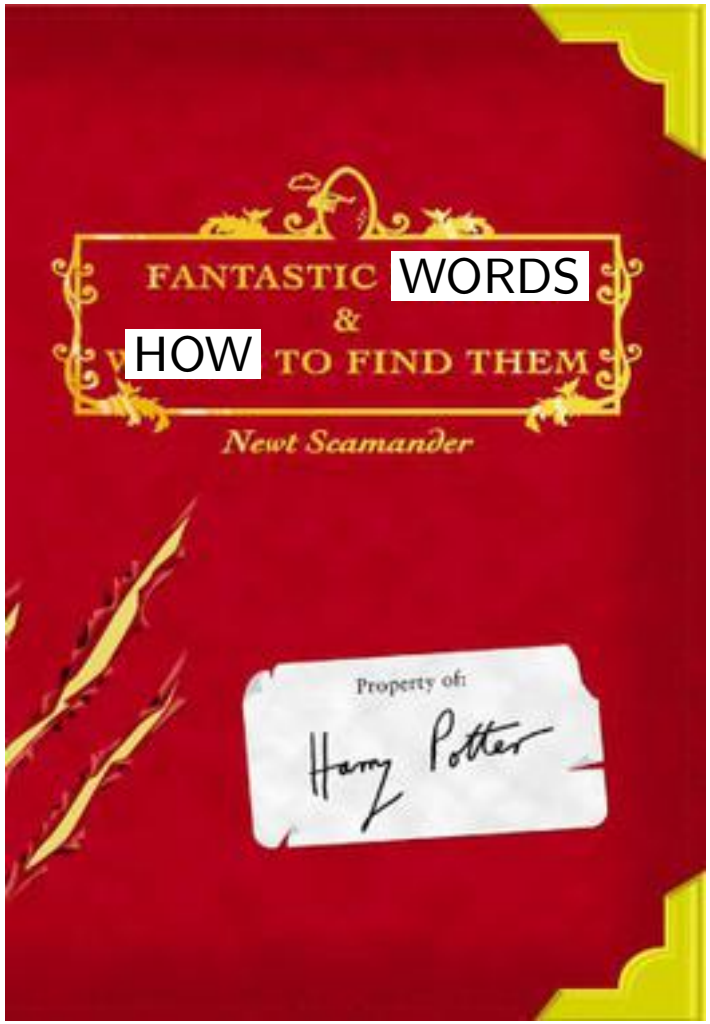
- de programmation
- naturelles
- en bio-informatique, *etc.*
- *qu'est-ce que :* syntaxe, sémantique

Mots :

- suite finie de *symboles*
- `while`, `my_var_336`, Schallplattenabspielgerät, *ACTAAGGT*

Expressions rationnelles :

- `[a-zA-Z][a-zA-Z0-9_]*`



Un peu (!) de précision

Symbole :

- notion axiomatique (*on s'en fout de ce que c'est*)
- $\Sigma = \{a, b, c, \dots\}$

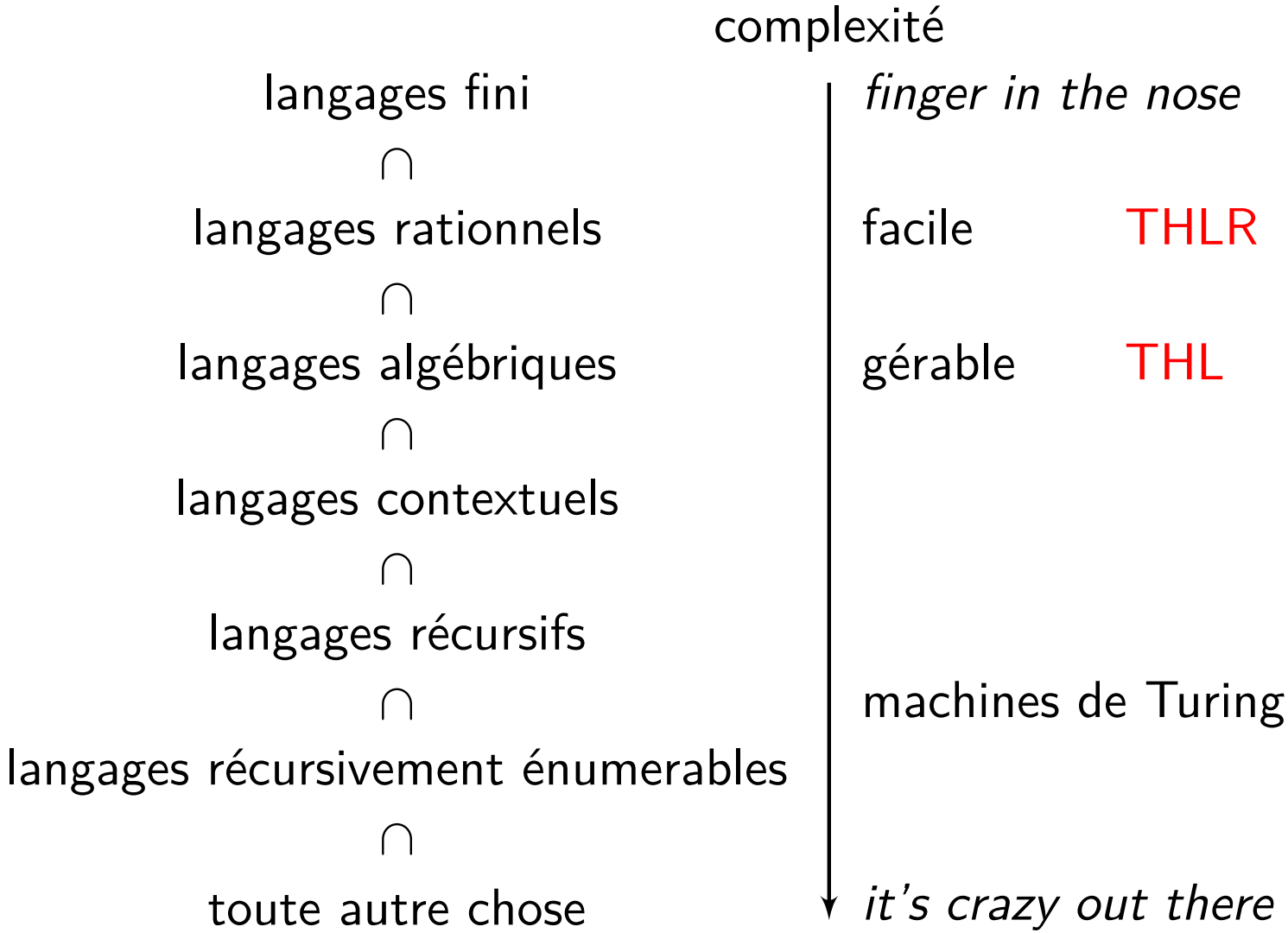
Mot :

- suite finie de symboles
- a, *abba*, *abracadabra*, *jenesaispasquoimaisilfautdubeurresurlepain*
- finie, mais sans limite fixe de longueur
- "Ich bin ein Berliner", "`for x in range(5)`" $\longleftarrow$ pas souvent

Langage :

- ensemble de mots
- peut être fini (même vide !), mais normalement infini

. . . et pourquoi *rationnel* ?



Une démonstration

Définition

Un langage L est récursivement énumerable s'il existe un algorithme qui énumère tout les mots de L.

Exemple :

```
x = 2
while true:
  if isprime(x): print(x)
  x += 1
```

Une démonstration

Définition

Un langage L est récursivement énumerable s'il existe un algorithme qui énumère tout les mots de L.

Théorème

Il existe un langage qui n'est pas récursivement énumerable.

Démonstration.

1. L'ensemble de tous algorithmes est dénombrable. *(Pourquoi ? Qu'est-ce que ?)*
2. Chaque algorithme n'énumère guère qu'un langage.
3. L'ensemble de langages n'est pas dénombrable. *(Pourquoi ?)*

. . . *et pourquoi ?*

Des applications :

- le parsage
  - expressions rationnelles
  - `grep 'a.*io.*e.*e' thlr1.txt`
- la compilation
  - analyse lexicale
  - analyse syntaxique
- la bio-informatique
  - analyse de mutations
  - « Ève mitochondriale »
- la traduction automatique

Pour en finir (la première partie)

Définition

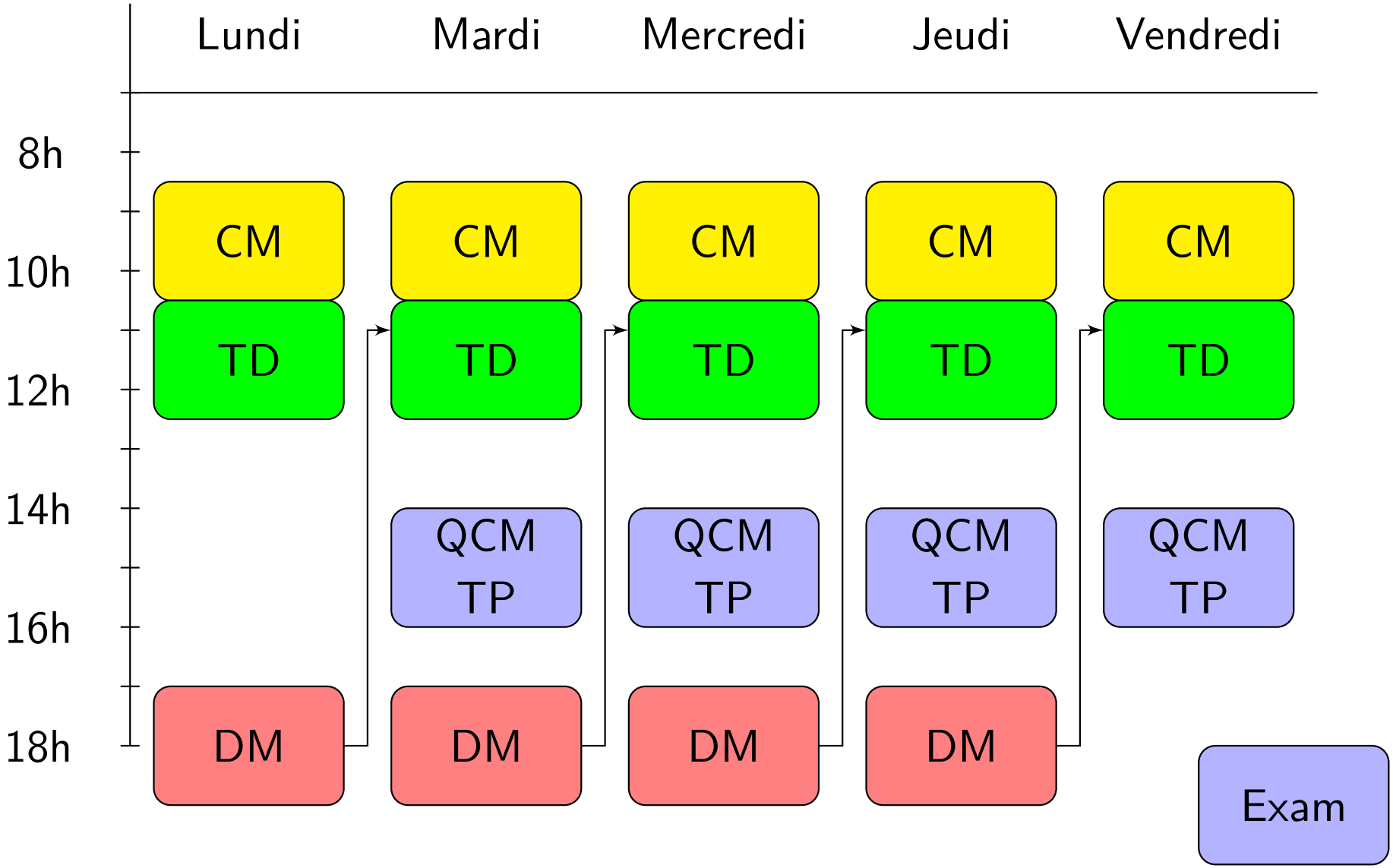
Un algorithme A décide un langage donné L si, pour chaque mot w en entrée, A répond « OUI » si $w \in L$ et « NON » si $w \notin L$.

Exercice (5 mn)

1. Trouver un algorithme *simple* qui décide le langage de tous les mots qui commencent par ab :
$$L = \{ab, aba, abb, abaa, abab, abba, \ldots\}$$
2. Trouver un algorithme *simple* qui décide le langage de tous les mots qui se terminent par ab :
$$L = \{ab, aab, bab, aaab, abab, baab, \ldots\}$$

Infos pratiques

La semaine


Lundi
Mardi
Mercredi
Jeudi
Vendredi
8h
10h
12h
14h
16h
18h
CM
TD
QCM
TP
DM
Exam

Les notes

Seront notés :

- les 4 QCM
- un des 4 DM (choisi aléatoirement)
- l'examen final (encore un QCM)

L'équipe

Uli Fahrenberg
CM, responsable

Maxime Bridoux
TD, TP

Tom Bachard
TP

Programme d'aujourd'hui

1. Symboles, mots, langages
2. L'algèbre de langages
3. Opérations, relations et distances sur mots

Programme du cours

1. Mots, langages
2. Langages rationnels, expressions rationnelles
3. Automates finis
4. Langages non-rationnels
5. Langages reconnaissables, minimisation

Le poly

F.Yvon, A.Demaille, Théorie des langages rationnels

- cours $\subsetneq$ shuffle(chapitres 1-4)
- aujourd'hui : chapitre 2, moins 2.3.2, 2.3.5, 2.4.4

- `https://www.lrde.epita.fr/~uli/thlr/`
- (aussi pour les sujets TD, TP, DM et les planches)

Symboles, mots, langages

Symboles, mots, langages : de la précision

Soit Σ un ensemble fini.

- on appelle Σ un alphabet
- et les éléments $a, b, \ldots \in \Sigma$ des symboles

On dénote Σ^* l'ensemble de tous les suites finies d'éléments de Σ.

- donc $\Sigma^* = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \cdots = \bigcup_{n \geq 0} \Sigma^n$
- on appelle les éléments $u, v, w, \ldots \in \Sigma^*$ des mots
- on écrit des mots $aabab$ (par exemple) au lieu de (a, a, b, a, b)

Un langage est un sous-ensemble $L \subseteq \Sigma^*$.

L'algèbre de mots

Il y a une opération binaire sur Σ^* :

L'algèbre de mots

Il y a une opération binaire sur Σ^* :

Définition

La concaténation de deux mots $a_1 \dots a_n$ et $b_1 \dots b_m$ est le mot $a_1 \dots a_n\, b_1 \dots b_m$.

- on utilise le symbole « . » si besoin ; sinon, rien

Voici les propriétés de la concaténation :

L'algèbre de mots

Il y a une opération binaire sur Σ^* :

Définition

La concaténation de deux mots $a_1 \dots a_n$ et $b_1 \dots b_m$ est le mot $a_1 \dots a_n\, b_1 \dots b_m$.

- on utilise le symbole « . » si besoin ; sinon, rien

Voici les propriétés de la concaténation :

Théorème

L'opération « . » est associative et a le mot vide comme élément neutre de deux côtés.

- on utilise ε pour le mot vide
- donc $u(vw) = (uv)w$, $u.\varepsilon = u$ et $\varepsilon.u = u$ pour tout $u, v, w \in \Sigma^*$
- pas commutative

L'algèbre de langages

Opérations sur langages

Opérations ensemblistes

Opérations sur langages

Opérations ensemblistes

$$L_1 \cup L_2 = \{u \in \Sigma^* \mid u \in L_1 \text{ ou } u \in L_2\}$$
$$L_1 \cap L_2 = \{u \in \Sigma^* \mid u \in L_1 \text{ et } u \in L_2\}$$
$$\overline{L} = \{u \in \Sigma^* \mid u \notin L\}$$

Opérations sur langages

Opérations ensemblistes

$$L_1 \cup L_2 = \{u \in \Sigma^* \mid u \in L_1 \text{ ou } u \in L_2\}$$
$$L_1 \cap L_2 = \{u \in \Sigma^* \mid u \in L_1 \text{ et } u \in L_2\}$$
$$\overline{L} = \{u \in \Sigma^* \mid u \notin L\}$$

Concaténation

$$L_1.L_2 = \{u_1\, u_2 \mid u_1 \in L_1, u_2 \in L_2\}$$
$$L^n = L \cdots L \quad (n \text{ copies de } L)$$

Opérations sur langages

Opérations ensemblistes

$$L_1 \cup L_2 = \{u \in \Sigma^* \mid u \in L_1 \text{ ou } u \in L_2\}$$
$$L_1 \cap L_2 = \{u \in \Sigma^* \mid u \in L_1 \text{ et } u \in L_2\}$$
$$\overline{L} = \{u \in \Sigma^* \mid u \notin L\}$$

Concaténation

$$L_1.L_2 = \{u_1\, u_2 \mid u_1 \in L_1, u_2 \in L_2\}$$
$$L^n = L \cdots L \quad (n \text{ copies de } L)$$

Étoile de Kleene

$$L^* = L^0 \cup L_1 \cup L^2 \cup \cdots = \bigcup_{n \geq 0} L^n$$

L'algèbre de langages

Théorème

L'opération « . » sur langages est associative et a le langage $\{\varepsilon\}$ comme élément neutre de deux côtés.

- donc $L_1(L_2L_3) = (L_1L_2)L_3$, $L.\{\varepsilon\} = L$ et $\{\varepsilon\}.L = L$
- pas commutative
- aussi, $L.\emptyset = \emptyset$ et $\emptyset.L = \emptyset$

Théorème

$\Sigma^* = \Sigma^*.$

- (ce n'est pas une tautologie)
- aussi, $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$, en fait $\varepsilon \in L^*$ pour chaque L

5 minutes de réflexion

Vrai ou faux ?

1. $\{ab\} \cup \{ba\} = \{abba\}$
2. $\{a\}^n = \{a^n\}$
3. $\{a\}^* = \{a^n \mid n \geq 0\}$
4. $\{a, b\}^n = \{a^n, b^n\}$
5. $\{a, b\}^3 = \{aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb\}$
6. $(L_1 \cup L_2)^2 = L_1^2 \cup L_1 L_2 \cup L_2 L_1 \cup L_2^2$
7. $L_1.(L_2 \cup L_3) = L_1 L_2 \cup L_1 L_3$

5 minutes de réflexion

Vrai ou faux ?

1. $\{ab\} \cup \{ba\} = \{abba\}$ ✗
2. $\{a\}^n = \{a^n\}$ ✓
3. $\{a\}^* = \{a^n \mid n \geq 0\}$ ✓
4. $\{a, b\}^n = \{a^n, b^n\}$ ✗
5. $\{a, b\}^3 = \{aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb\}$ ✓
6. $(L_1 \cup L_2)^2 = L_1^2 \cup L_1 L_2 \cup L_2 L_1 \cup L_2^2$ ✓
7. $L_1.(L_2 \cup L_3) = L_1 L_2 \cup L_1 L_3$ ✓

Opérations sur mots

Longueur d'un mot

Définition

La longueur $|u|$ d'un mot $u \in \Sigma^*$ correspond au nombre de symboles de u.

- (pas « *dans* », mais « *de* » : $|ababa| = 5$)
- donc $|\varepsilon| = 0$ et $|uv| = |u| + |v|$
- aussi, $|u| = 0$ ssi $u = \varepsilon$
- et $|u| = 1$ ssi $u \in \Sigma$

Notation

On dénote u^n la concaténation de n copies de $u \in \Sigma^*$.

- donc $(abc)^3 = abcabcabc$
- définition récursive : $u^0 = \varepsilon$ et $u^{n+1} = u\,u^n$
- aussi, $|u^n| = n\,|u|$

Préfixe, suffixe, facteur

Définition

Soit $u, v \in \Sigma^*$, alors u est un préfixe de v ssi il existe $w \in \Sigma^*$ tel que $uw = v$.

- des préfixes de *tomate* :

$$\{ \quad t, to, tom, toma, tomat, tomate \}$$

Préfixe, suffixe, facteur

Définition

Soit $u, v \in \Sigma^*$, alors u est un préfixe de v ssi il existe $w \in \Sigma^*$ tel que $uw = v$.

- des préfixes de *tomate* :

$$\{\varepsilon, t, to, tom, toma, tomat, tomate\}$$

Préfixe, suffixe, facteur

Définition

Soit $u, v \in \Sigma^*$, alors u est un préfixe de v ssi il existe $w \in \Sigma^*$ tel que $uw = v$.

- des préfixes de *tomate* :

$$\{\varepsilon, t, to, tom, toma, tomat, tomate\}$$

Définition

Soit $u, v \in \Sigma^*$, alors

- u est un suffixe de v ssi $\exists w \in \Sigma^* : wu = v$;
- u est un facteur de v ssi $\exists w_1, w_2 \in \Sigma^* : w_1 u w_2 = v$.

Préfixe, suffixe, facteur, 2.

Pour un langage $L \subseteq \Sigma^*$ on note le langage de préfixes de L par

$$\mathrm{Pref}(L) = \{u \in \Sigma^* \mid \exists v \in L : u \text{ préfixe de } v\}$$

- donc $\mathrm{Pref}(\{tomate\}) = \{\varepsilon, t, to, tom, toma, tomat, tomate\}$
- même chose pour $\mathrm{Suff}(L)$ et $\mathrm{Fact}(L)$

Vrai ou faux ? (5 mn)

1. $\mathrm{Fact}(L) = \mathrm{Pref}(L) \cup \mathrm{Suff}(L)$
2. $\mathrm{Pref}(\mathrm{Pref}(L)) = \mathrm{Pref}(L)$
3. $\mathrm{Pref}(\mathrm{Fact}(L)) = \mathrm{Pref}(L)$
4. $\mathrm{Pref}(\mathrm{Fact}(L)) = \mathrm{Fact}(L)$
5. $\mathrm{Pref}(\mathrm{Suff}(L)) = \mathrm{Suff}(\mathrm{Pref}(L)) = \mathrm{Fact}(L)$

Préfixe, suffixe, facteur, 2.

Pour un langage $L \subseteq \Sigma^*$ on note le langage de préfixes de L par

$$\text{Pref}(L) = \{u \in \Sigma^* \mid \exists v \in L : u \text{ préfixe de } v\}$$

- donc $\text{Pref}(\{tomate\}) = \{\varepsilon, t, to, tom, toma, tomat, tomate\}$
- même chose pour $\text{Suff}(L)$ et $\text{Fact}(L)$

Vrai ou faux ? (5 mn)

1. $\text{Fact}(L) = \text{Pref}(L) \cup \text{Suff}(L)$ ✗
2. $\text{Pref}(\text{Pref}(L)) = \text{Pref}(L)$ ✓
3. $\text{Pref}(\text{Fact}(L)) = \text{Pref}(L)$ ✗
4. $\text{Pref}(\text{Fact}(L)) = \text{Fact}(L)$ ✓
5. $\text{Pref}(\text{Suff}(L)) = \text{Suff}(\text{Pref}(L)) = \text{Fact}(L)$ ✓

Relations d'ordre sur mots

L'ordre de préfixe

Écrivons $u \leq_p v$ si u est un préfixe de v

- donc $\mathrm{Pref}(L) = \{u \in \Sigma^* \mid \exists v \in L : u \leq_p v\}$

La relation $\leq_p$ sur mots est

- réflexive $u \leq_p u$
- transitive $u \leq_p v$ et $v \leq_p w \Rightarrow u \leq_p w$
- antisymétrique $u \leq_p v$ et $v \leq_p u \Rightarrow u = v$

$\Rightarrow$ une relation d'ordre partiel

- $\mathit{tom} \leq_p \mathit{tomate}$, mais $\mathit{tomate} \not\leq_p \mathit{patate}$ et $\mathit{patate} \not\leq_p \mathit{tomate}$

L'ordre lexicographique

L'ordre lexicographique $\hat{=}$ l'ordre du dictionnaire :

- $tom \leq_l tomate \leq_l tupac \leq_l ukulele$
- un ordre totale

Définition

Soit $\leq$ un ordre totale sur Σ et $u, v \in \Sigma^*$, alors on écrit $u \leq_l v$ si

- $u \leq_p v$ ou
-

L'ordre lexicographique

L'ordre lexicographique $\hat{=}$ l'ordre du dictionnaire :

- $tom \leq_l tomate \leq_l tupac \leq_l ukulele$
- un ordre totale

Définition

Soit $\leq$ un ordre totale sur Σ et $u, v \in \Sigma^*$, alors on écrit $u \leq_l v$ si

- $u \leq_p v$ ou
- $\exists a, b \in \Sigma, w, u', v' \in \Sigma^*$ t.q. $u = wau'$, $v = wbv'$ et $a \leq b$

L'ordre lexicographique

L'ordre lexicographique $\hat{=}$ l'ordre du dictionnaire :

- $tom \leq_l tomate \leq_l tupac \leq_l ukulele$
- un ordre totale

Définition

Soit $\leq$ un ordre totale sur Σ et $u, v \in \Sigma^*$, alors on écrit $u \leq_l v$ si

- $u \leq_p v$ ou
- $\exists a, b \in \Sigma, w, u', v' \in \Sigma^*$ t.q. $u = wau'$, $v = wbv'$ et $a \leq b$

Problèmes théorique : l'ordre $\leq_l$

- n'est pas compatible avec la concaténation : $a \leq_l ab$ mais $ab.c \leq_l a.c$
- n'est pas nœthérien / pas bien fondé : il existe des suites infinies strictement décroissantes
  - par exemple, $b \geq_l ab \geq_l aab \geq_l aaab \geq_l \cdots$

L'ordre radiciel

L'ordre radiciel, ou militaire :

Définition

Soit $\leq$ un ordre totale sur Σ et $u, v \in \Sigma^*$, alors on écrit $u \leq_r v$ si

- $|u| < |v|$ ou
- $|u| = |v|$ et $u \leq_l v$

- compatible avec la concaténation
- nœthérien
- mais pas compatible avec l'ordre lexicographique

L'ordre radiciel

L'ordre radiciel, ou militaire :

Définition

Soit $\leq$ un ordre totale sur Σ et $u, v \in \Sigma^*$, alors on écrit $u \leq_r v$ si

- $|u| < |v|$ ou
- $|u| = |v|$ et $u \leq_l v$

- compatible avec la concaténation

$$u \leq_r v \Rightarrow uw \leq_r vw \text{ et } wu \leq_r wv$$

- nœthérien

$$u_1 \geq_r u_2 \geq_r u_3 \geq_r \cdots \Rightarrow \exists m : \forall n \geq m : u_n = u_m$$

- mais pas compatible avec l'ordre lexicographique

par exemple, $b \leq_r ab$ mais $ab \leq_l b$

Distances entre mots

La distance préfixe

Notons plpc(u, v) le plus long préfixe commun entre mots u et v

La distance préfixe

Notons plpc(u, v) le plus long préfixe commun entre mots u et v

$$\begin{aligned}\text{plpc}(u, v) &= \max_{\leq_p}\{w \in \Sigma^* \mid w \leq_p u \text{ et } w \leq_p v\} \\ &= \max_{\leq_p}\left(\text{Pref}(\{u\}) \cap \text{Pref}(\{v\})\right)\end{aligned}$$

La distance préfixe

Notons plpc(u, v) le plus long préfixe commun entre mots u et v

$$\begin{aligned}\text{plpc}(u, v) &= \max_{\leq_p}\{w \in \Sigma^* \mid w \leq_p u \text{ et } w \leq_p v\} \\ &= \max_{\leq_p}\left(\text{Pref}(\{u\}) \cap \text{Pref}(\{v\})\right)\end{aligned}$$

Définition

La distance préfixe entre mots $u, v \in \Sigma^*$ est

$$d_p(u, v) = |uv| - 2\,|\text{plpc}(u, v)|.$$

Propriétés :

- positivité
- séparation
- symétrie
- inégalité triangulaire

$\Rightarrow$ d_p est, en fait, une distance

La distance préfixe

Notons plpc(u, v) le plus long préfixe commun entre mots u et v

$$\begin{aligned}\text{plpc}(u, v) &= \max_{\leq_p}\{w \in \Sigma^* \mid w \leq_p u \text{ et } w \leq_p v\} \\ &= \max_{\leq_p}\left(\text{Pref}(\{u\}) \cap \text{Pref}(\{v\})\right)\end{aligned}$$

Définition

La distance préfixe entre mots $u, v \in \Sigma^*$ est

$$d_p(u, v) = |uv| - 2\,|\text{plpc}(u, v)|.$$

Propriétés :

- positivité $d_p(u, v) \geq 0$
- séparation $d_p(u, v) = 0 \iff u = v$
- symétrie $d_p(u, v) = d_p(v, u)$
- inégalité triangulaire $d_p(u, w) \leq d_p(u, v) + d_p(v, w)$

$\Rightarrow$ d_p est, en fait, une distance

La distance d'édition

Des opérations élémentaires sur mots, pour $u, v \in \Sigma^*$ et $a \in \Sigma$:

- insertion : $uv \xrightarrow{+a} uav$
- suppression : $uav \xrightarrow{-a} uv$

Définition

La distance d'édition (ou de *Levenshtein*) entre $u, v \in \Sigma^*$ est la longueur minimale d'une séquence d'opérations élémentaires entre u et v.

Exemple : $tomate \xrightarrow{-e} tomat \xrightarrow{-o} tmat \xrightarrow{+u} tumat \xrightarrow{-m} tuat \xrightarrow{+p} tupat \xrightarrow{-t} tupa \xrightarrow{+c} tupac \quad \Rightarrow$ distance ≤ 7

Applications :

- GNU `diff`
- correcteurs orthographique
- reconnaissance de texte
- analyse de mutations (!)


That's all Folks!