Syntaks og semantik

Lektion 14

29 april 2008

Rekursive definitioner og fikspunkter

En (lille) kontekstfri grammatik:

$$S \to aSb \mid c \mid S$$

Oversæt direkte til en rekursiv sprogligning:

$$L_S = \{a\} \circ L_S \circ \{b\} \cup \{c\} \cup L_S$$

At finde en løsning til dén ligning: Kald højresiden for $F(L_S)$:

$$L_S = F(L_S) = \{a\} \circ L_S \circ \{b\} \cup \{c\} \cup L_S$$

Start med $U_0 = \emptyset$ og anvend ligningen:

$U_1 = F(U_0) = \{a\} \circ \emptyset \circ \{b\} \cup \{c\} \cup \emptyset = \{c\}$

$U_2 = F(U_1) = \{a\} \circ \{c\} \circ \{b\} \cup \{c\} \cup \{c\} = \{c, acb\}$

$U_3 = F(U_2) = \{a\} \circ \{c, acb\} \circ \{b\} \cup \{c\} \cup \{c, acb\} = \{c, acb, a^2cb^2\}$

$\quad\dots$

$U_n = \{a^icb^i \mid i < n\}$

“grænseværdi”: $U = \{a^icb^i \mid i \in \mathbb{N}\}$

U er en løsning – fordi $F(U) = U$ (Prøve!)

Så for

$$L_S = F(L_S) = \{a\} \circ L_S \circ \{b\} \cup \{c\} \cup L_S$$

virkede følgende:

- start med $U_0 = \emptyset$
- anvend rekursionsligningen gentagne gange
- få en følge $U_1 \subseteq U_2 \subseteq U_3 \subseteq \cdots$
- "tag grænseværdien" af følgen

$\Rightarrow$ løsning til ligningen: $L_S = \{a^i cb^i \mid i \in \mathbb{N}\}$

Er der flere løsninger?

- Jep, f.x. $L''_S = \{a^i cb^i, a^i cccb^i \mid i \in \mathbb{N}\}$

Hvorfor virker det? Virker det også ved andre eksempler?

- Hvad med ligningen

$$\mathbf{Env}_P = \mathbf{Pnavne} \rightharpoonup \mathbf{Kom} \times \mathbf{Env}_V \times \mathbf{Env}_P \quad ?$$

Et par rekursive ligninger:

$$
\begin{aligned}
L &= F_1(L) = \{a\} \circ L \circ \{b\} \cup \{c\} \cup L \\
x &= F_2(x) = 6 - x^2 \\
\mathbf{Env}_P &= F_3(\mathbf{Env}_P) = \mathbf{Pnavne} \rightharpoonup \mathbf{Kom} \times \mathbf{Env}_V \times \mathbf{Env}_P
\end{aligned}
$$

Funktionerne på højresiderne:

$$
\begin{aligned}
F_1 &: \Sigma^* \to \Sigma^* \\
F_2 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\
F_3 &: \text{mængder} \to \text{mængder} \quad (?)
\end{aligned}
$$

Definition 14.2: Lad $F : D \to D$ være en funktion. Et element $x \in D$ kaldes et fikspunkt for F hvis $F(x) = x$.

– så vi skal finde ud af hvornår, og hvordan, vi kan beregne fikspunkter

Sidebemærkning: Rekursion for reelle funktioner:

- ligningen $x^2 + x = 6$ har en løsning $x = 2$
- rekursion: omskriv ligningen til $x = F(x) = 6 - x^2$
- kan løsningen $x = 2$ findes ved rekursion?
  Nej [rekursion-bad.c]

- ligningen $x^2 + 8x = 20$ har en løsning $x = 2$
- rekursion: omskriv ligningen til $x = F(x) = (20 - x^2)/8$
- kan løsningen $x = 2$ findes ved rekursion?
  Ja, men kun for *nogle* startværdier ! [rekursion-ok.c]

Tarskis fikspunkts-sætning 14.3:
Lad D være et domæne og $f : D \to D$ en kontinuert funktion. Da har f et mindste fikspunkt x^*, som kan beregnes ved

$$x^* = \lim\{f^i(\perp) \mid i \in \mathbb{N}\}$$

hvor $\perp$ er bundelementet i D.

- domæne: en mængde D med en fuldstændig partiel orden $\sqsubseteq$
- $\perp$: det mindste element i D; $\perp \sqsubseteq d$ for alle $d \in D$
- grænseværdi: $\lim Y$ er den mindste øvre grænse for den voksende mængde Y (hvis den findes)
- kontinuert funktion: f kontinuert $\Leftrightarrow f(\lim Y) = \lim f(Y)$ for alle voksende mængder Y

Definition 14.4: En relation $\sqsubseteq$ over en mængde D kaldes en **partiel orden** hvis den er

- **refleksiv**: $d \sqsubseteq d$ for alle $d \in D$
- **transitiv**: hvis $d_1 \sqsubseteq d_2$ og $d_2 \sqsubseteq d_3$, så $d_1 \sqsubseteq d_3$
- **antisymmetrisk**: hvis $d_1 \sqsubseteq d_2$ og $d_2 \sqsubseteq d_1$, så $d_1 = d_2$

Parret $(D, \sqsubseteq)$ kaldes da en **partielt ordnet mængde**.

Eksempler:

- $\mathbb{R}$ med den sædvanlige orden $\sqsubseteq = \leq$
- $\mathbb{N}$ med den sædvanlige orden $\sqsubseteq = \leq$
- $\mathbb{R}^2$ med den *punktvise* orden

$$(x, y) \sqsubseteq (x', y') \quad \Leftrightarrow \quad x \leq x' \text{ og } y \leq y'$$

- **delmængdedomænet**: Givet en mængde M, da er potensmængden $\mathcal{P}(M)$ partielt ordnet ved

$$A \sqsubseteq B \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B$$

Definition 14.9: Givet en partielt ordnet mængde D og en delmængde $Y \subseteq D$, da kaldes Y en voksende mængde hvis der findes en nummerering $Y = \{d_1, d_2, d_3, \dots\}$ af elementerne i Y således at $d_1 \sqsubseteq d_2 \sqsubseteq d_3 \sqsubseteq \cdots$.

Eksempler:

- $\{1, 17, 3, 9\}$ er en voksende mængde i $(\mathbb{N}, \leq)$
- $\{0, 2, 4, 6, \dots\}$ er en voksende mængde i $(\mathbb{N}, \leq)$
- $\{3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, \dots\}$ er en voksende mængde i $(\mathbb{Q}, \leq)$ $\longleftarrow$ rationelle tal
- $\{(1, 0), (0, 1)\}$ er *ikke* en voksende mængde i $(\mathbb{R}^2, \sqsubseteq)$

Definition 14.10 / 14.11 : Givet en partielt ordnet mængde D og en voksende delmængde $Y \subseteq D$.

- $x \in D$ kaldes en øvre grænse for Y hvis $y \sqsubseteq x$ for alle $y \in Y$.
- $x \in D$ kaldes en grænseværdi (eller mindste øvre grænse; *least upper bound*, *lub*) for Y, hvis
  1. x er en øvre grænse for Y,
  2. og for alle andre øvre grænser z for Y gælder $x \sqsubseteq z$

Eksempler:

- 42 er en øvre grænse for $\{1, 17, 3, 9\}$ i $(\mathbb{N}, \leq)$
- 17 er en grænseværdi for $\{1, 17, 3, 9\}$ i $(\mathbb{N}, \leq)$
- $\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ har ingen øvre grænse i $(\mathbb{N}, \leq)$
- $\{3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, \ldots\}$ har en øvre grænse i $(\mathbb{Q}, \leq)$, *men ingen grænseværdi*

Opgave: Vis at enhver voksende mængde kan have højst én grænseværdi (!)

Hvis en voksende mængde Y har en grænseværdi x, skriver vi den $x = \lim Y$

Definition 14.16: Et domæne er en partielt ordnet mængde D der opfylder følgende betingelser:

- Enhver voksende mængde $Y \subseteq D$ har en grænseværdi $\lim Y \in D$
- Der findes et element $\perp \in D$ som opfylder $\perp \sqsubseteq d$ for alle $d \in D$

$\perp$ kaldes bundelementet af D

Eksempler:

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$ og $(\mathbb{R}^2, \sqsubseteq)$ er *ikke* domæner
- delmængdedomænet er et domæne

Definition 14.21′: Lad D_1 og D_2 være partielt ordnede mængder og $f : D_1 \to D_2$ en funktion. Da siges f at være monoton (eller monotont voksende) hvis $d_1 \sqsubseteq d_2$ medfører $f(d_1) \sqsubseteq f(d_2)$ for alle $d_1, d_2 \in D_1$.

- så monotone funktioner er dem der bevarer ordensrelationen
- monotone funktioner er de "*naturlige*" funktioner for partielt ordnede mængder. Man siger også at partielt ordnede mængder og monotone funktioner tilsammen udgør en kategori
- dertil skal bruges følgende:

Lemma: Hvis $f_1 : D_1 \to D_2$ og $f_2 : D_2 \to D_3$ er monotone, er deres sammensætning $f_2 \circ f_1 : D_1 \to D_3$ også monoton.

$$\begin{tikzcd} & D_2 \arrow[dr, "f_2"] & \\ D_1 \arrow[ur, "f_1"] \arrow[rr, "f_2 \circ f_1"'] & & D_3 \end{tikzcd}$$

Bevis:

1. Lad $d_1, d_2 \in D_1$, med $d_1 \sqsubseteq d_2$.
2. f_1 monoton $\Rightarrow f_1(d_1) \sqsubseteq f_1(d_2)$
3. f_2 monoton $\Rightarrow f_2(f_1(d_1)) \sqsubseteq f_2(f_1(d_2))$
4. færdig

Notation 14.25: For en funktion $f : D_1 \to D_2$ og en delmængde $Y \subseteq D_1$ betegner $f(Y) = \{f(y) \mid y \in Y\} \subseteq D_2$.

Lemma 14.23′: Lad $f : D_1 \to D_2$ være en monoton funktion mellem partielt ordnede mængder. Hvis $Y \subseteq D_1$ er en voksende mængde, er $f(Y) \subseteq D_2$ også en voksende mængde.

Bevis:

1. Skal vise at der findes nummerering $f(Y) = \{z_1, z_2, \dots\}$ med $z_1 \sqsubseteq z_2 \sqsubseteq \cdots$
2. Y voksende $\Rightarrow$ *har* nummerering $Y = \{y_1, y_2\}$ med $y_1 \sqsubseteq y_2 \sqsubseteq \cdots$

$\Rightarrow$ skriv $f(Y) = \{f(y_1), f(y_2), \dots\}$ ✓

Definition 14.26′: Lad D_1 og D_2 være domæner og $f : D_1 \to D_2$ en *monoton* funktion. Da siges f at være kontinuert hvis f er *grænseværdi-bevarende*, dvs.:

$$\text{for alle voksende mængder } Y \subseteq D_1 : \lim f(Y) = f(\lim Y)$$

Domæner og kontinuerte funktioner udgør igen en kategori. Specielt:

Sætning 14.15(201): Hvis $f_1 : D_1 \to D_2$ og $f_2 : D_2 \to D_3$ er kontinuerte, er deres sammensætning $f_2 \circ f_1 : D_1 \to D_3$ også kontinuert.

$$\begin{tikzcd} & D_2 \arrow[dr, "f_2"] & \\ D_1 \arrow[ur, "f_1"] \arrow[rr, "f_2 \circ f_1"'] & & D_3 \end{tikzcd}$$

Bevis:

1. Lad $Y \subseteq D_1$ være en voksende mængde.

$\Rightarrow$ $f_1(Y) \subseteq D_2$ og $f_2(f_1(Y)) \subseteq D_3$ er også voksende

2. og $f_2(f_1(\lim Y)) = f_2(\lim f_1(Y)) = \lim f_2(f_1(Y))$

Notation: For en funktion $f : D \to D$ betegner f^i funktionen f sammensat med sig selv i gange: $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f, \ldots$

Lemma 14.30: Lad $f : D \to D$ være en monoton funktion. Da er også $f^i : D \to D$ monoton for alle $i \in \mathbb{N}$.

Bevis: Sammensætninger af monotone funktioner er monotone. $\checkmark$

Lemma 14.31: Lad D være et domæne og $f : D \to D$ en *monoton* funktion. Da er $\{f^i(\bot) \mid i \in \mathbb{N}\}$ en voksende mængde.

Bevis:

1. $\bot$ er mindste element i $D \Rightarrow \bot \sqsubseteq f(\bot)$
2. anvend f, i gange: $\Rightarrow f^i(\bot) \sqsubseteq f^{i+1}(\bot)$ $\checkmark$

Sætning 14.3: Lad D være et domæne og $f : D \to D$ en kontinuert funktion. Da har f et mindste fikspunkt x^*, som kan beregnes ved

$$x^* = \lim\{f^i(\perp) \mid i \in \mathbb{N}\}$$

hvor $\perp$ er bundelementet i D.

Bevis:

1. x^* er *et fikspunkt*:

$$f(x^*) = f(\lim\{f^i(\perp)\}) = \lim f(\{f^i(\perp)\}) = \lim\{f^{i+1}(\perp)\}$$
$$= \lim(\{f^{i+1}(\perp)\} \cup \{\perp\}) = \lim\{f^i(\perp)\} = x^*$$

2. x^* er *det mindste* fikspunkt:
   - Lad d være et fikspunkt for f, dvs. $f(d) = d$. Vis at $x^* \sqsubseteq d$.
   - $\perp \sqsubseteq d \Rightarrow f^i(\perp) \sqsubseteq f^i(d) = d$

   $\Rightarrow$ d er øvre grænse for $\{f^i(\perp)\}$

   $\Rightarrow$ $\lim\{f^i(\perp)\} \sqsubseteq d$ ✓

Sætning 14.7(199): For enhver mængde S er potensmængden $\mathcal{P}(S)$, med inklusion $\subseteq$ som ordensrelation, et domæne.

Bevis (fyld selv detaljer ind!):

1. $\subseteq$ er en partiel orden på $\mathcal{P}(S)$
2. bundelementet er $\perp = \emptyset$
3. hvis $Y = \{M_1, M_2, \ldots\}$ er en voksende mængde (af delmængder $M_1, M_2, \ldots \subseteq S$), er

$$\begin{aligned}\lim Y &= \bigcup_i M_i \\ &= M_1 \cup M_2 \cup \cdots\end{aligned}$$

Anvendelse: Mængden af sprog over et givet alfabet Σ, $\mathcal{P}(\Sigma^*)$, er et domæne.

Lemma: Konkatenering og foreningsmængde er kontinuerte operationer på $\mathcal{P}(\Sigma^*)$.

Bevis (delvis): Vi skal f.x. vise følgende:

- for ethvert $L \subseteq \Sigma^*$ er funktionen $f : \mathcal{P}(\Sigma^*) \to \mathcal{P}(\Sigma^*)$ givet ved $f(M) = L \circ M$ kontinuert:
  1. Lad $\{M_1, M_2, \dots\}$ være en voksende mængde af sprog.
  2. Da er også $\{L \circ M_1, L \circ M_2, \dots\}$ en voksende mængde.
  3. Vi skal vise at $f(\lim\{M_1, M_2 \dots\}) = \lim f(\{M_1, M_2, \dots\})$, dvs. $f(\bigcup_i M_i) = \bigcup_i f(M_i)$.
  4. Men $f(\bigcup_i M_i) = L \circ (\bigcup_i M_i)$ og $\bigcup_i f(M_i) = \bigcup_i L \circ M_i$.
  5. Og $L \circ (\bigcup_i M_i) = \bigcup_i L \circ M_i$ pga. distributivitet.

Eksemplet med den kontekstfrie grammatik igen:

$$S \to aSb \mid c \mid S$$

Oversat til en fikspunktsligning:

$$L_S = F(L_S) = \{a\} \circ L_S \circ \{b\} \cup \{c\} \cup L_S$$

Og $F : \mathcal{P}(\Sigma^*) \to \mathcal{P}(\Sigma^*)$ er en sammensætning af konkateneringer og foreningsmængder $\Rightarrow$ F er kontinuert !

$\Rightarrow$ L_S kan findes ved fikspunktssætningen:

$$\begin{aligned} L_S &= \lim\{F^i(\emptyset) \mid i \in \mathbb{N}\} \\ &= \lim \left\{\emptyset, \{c\}, \{c, acb\}, \{c, acb, a^2cb^2\}, \ldots\right\} \\ &= \bigcup_n \{a^i cb^i \mid i < n\} \\ &= \{a^n cb^n \mid n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Eksemplet med $\mathbf{Env}_P$ igen:

$$\mathbf{Env}_P = \mathbf{Pnavne} \rightharpoonup \mathbf{Kom} \times \mathbf{Env}_V \times \mathbf{Env}_P$$

Oversat til en fikspunktsligning:

$$\mathbf{Env}_P = F(\mathbf{Env}_P) = \mathbf{Pnavne} \rightharpoonup \mathbf{Kom} \times \mathbf{Env}_V \times \mathbf{Env}_P$$

F er nu en funktion fra "mængden" af domæner til sig selv, givet ved

$$F(D) = \mathbf{Pnavne} \rightharpoonup \mathbf{Kom} \times \mathbf{Env}_V \times D$$

og følgende virker:

- tag det mindste domæne $\{\perp\}$
- beregn en "voksende mængde" af domæner $\{\{\perp\}, F(\{\perp\}), F(F(\{\perp\})), \dots\}$
- tag "grænseværdien" af den "mængde"

Men *hvorfor* virker det? og *hvad* bliver resultatet?

- Se de grumme detaljer i kapitel 6 af Mads Rosendahls domæneteori-noter: `http://akira.ruc.dk/~madsr/webpub/domaene.pdf`