Eléments de logique pour l'informatique
Exercices II

Uli Fahrenberg
uli@lmf.cnrs.fr

d'après Christine Paulin

21 novembre 2025

5 Skolémisation

Exercice 5.1 Mettre sous forme clausale l'ensemble de formules $E = \{F_1, F_2, F_3\}$ où

1. $F_1 = \forall x, (p(x) \Rightarrow \exists y, \forall x, q(x, y))$
2. $F_2 = ((\exists x, (p(x) \Rightarrow r(x))) \vee \forall y,\ p(y)) \wedge \forall x, \exists y, (r(y) \Rightarrow p(x))$
3. $F_3 = ((\forall x, (p(x) \Rightarrow \exists y, q(y))) \Rightarrow \exists z, r(z)) \Rightarrow \exists u, s(u)$

Exercice 5.2 Soit la formule $A \stackrel{\text{def}}{=} (\exists x, \neg P(x)) \Rightarrow ((\forall x, P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \forall x, Q(x))$

1. Mettre la formule A en forme normale de négation (les négations ne portent que sur les prédicats et il n'y a plus de connecteur d'implication).
2. Soit B la formule obtenue à la question précédente, dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses
   — $A \models B$
   — $B \models A$
   — A est satisfiable si et seulement si B l'est.
3. Eliminer dans B les quantificateurs existentiels ($\exists$) en utilisant la skolémisation et mettre les quantificateurs universels ($\forall$) en tête de la formule.
4. Soit C la formule obtenue à la question précédente, dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses
   — $B \models C$
   — $C \models B$
   — B est satisfiable si et seulement si C l'est.
5. La formule C est-elle vraie dans un modèle dont le domaine a exactement un élément ? Même question pour A, justifier vos réponses.
6. La formule A est-elle satisfiable ?
7. Mettre la formule $\neg A$ en forme clausale.
8. Indiquer le domaine et la base de Herbrand pour la forme clausale ainsi obtenue.
9. La formule $\neg A$ est-elle satisfiable ? La formule A est-elle valide ?

Exercice 5.3 On rappelle que la propriété de "Skolemisation" dit que pour toute formule close A, il existe une formule B de la forme $\forall x_1 \ldots x_n, C$ avec C sans quantificateur telle que les trois propriétés suivantes soient vérifiées

1. $B \models A$,
2. si A est satisfiable alors B est satisfiable
3. si A est insatisfiable alors il existe des substitutions closes $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ telles que $\{C[\sigma_1], \ldots, C[\sigma_k]\}$ soit insatisfiable.

A partir de ce résultat, et de la correspondance entre validité d'une formule et insatisfiabilité de sa négation, montrer le résultat dual suivant

1. Pour une formule P close quelconque, montrer qu'il existe une formule Q (appelée forme de Herbrand de P) qui s'écrit $\exists x_1 \ldots x_n, R$ avec R sans quantificateur telle que les trois propriétés suivantes sont vérifiées
   (a) $P \models Q$,
   (b) si Q est valide alors P est valide
   (c) si P est valide alors il existe des substitutions closes $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ telles que la formule $R[\sigma_1] \vee \ldots \vee R[\sigma_k]$ soit valide.
2. Soit une formule existentielle Q de la forme $\exists x_1 \ldots x_n, R$ avec R sans quantificateur. Montrer que $R[\sigma_1] \vee \ldots \vee R[\sigma_k] \Rightarrow Q$ est une formule valide.
3. Soit la formule $P \stackrel{\text{def}}{=} (T(a) \vee T(b)) \Rightarrow \exists x, T(x)$, trouver la forme de Herbrand associée ainsi que des substitutions closes $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ telles que $R[\sigma_1] \vee \ldots \vee R[\sigma_k]$ soit valide. Peut-on trouver une solution à ce problème avec une seule substitution.