Théorie des langages rationnels : THLR

CM 6

Uli Fahrenberg

EPITA Rennes

S3 2022

Aperçu

Programme du cours

1. Mots, langages
2. Langages rationnels, expressions rationnelles
3. Automates finis
4. Langages non-rationnels
5. Langages reconnaissables, minimisation

Dernièrement : Automates finis

Définition

Un automate fini (à transitions spontanées) : $A = (\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$:

- Σ : ensemble fini de symboles, Q : ensemble fini d'états
- $Q_0 \subseteq Q$: états initiaux, $F \subseteq Q$: états finaux
- $\delta \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times Q$: relation de transition

- on note $q \xrightarrow{a} r$ si $(q, a, r) \in \delta$

Définition (Sémantique de A)

- Un calcul dans A : $\sigma = q_1 \xrightarrow{a_1} q_2 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_{n-1}} q_n$
- L'étiquette d'un calcul : $\lambda(\sigma) = a_1 a_2 \dots a_{n-1} \in \Sigma^*$
- Un calcul réussi : $q_1 \in Q_0$ et $q_n \in F$
- Le langage reconnu par A :
  $L(A) = \{\lambda(\sigma) \mid \sigma \text{ calcul réussi dans } A\}$

Variants

Un automate fini (à transitions spontanées) : $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$:

- Σ, Q ensembles finis, $q_0 \in Q$, $F \subseteq Q$,
- $\delta \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times Q$: la relation de transition

Définition

- A est sans transitions spontanées si $\delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$.
- A est complet si $\forall q \in Q : \forall a \in \Sigma : |\{r \in Q \mid (q, a, r) \in \delta\}| \geq 1$.
- A est déterministe si $\delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$, $|Q_0| = 1$ et
  $\forall q \in Q : \forall a \in \Sigma : |\{r \in Q \mid (q, a, r) \in \delta\} \leq 1$.

On les a vu dans l'ordre

1. automates finis déterministes complets
2. automates finis déterministes
3. automates finis (sans transitions spontanées)
4. automates finis (à transitions spontanées)

Variants

Un automate fini (à transitions spontanées) : $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$:

- Σ, Q ensembles finis, $q_0 \in Q$, $F \subseteq Q$,
- $\delta \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times Q$: la relation de transition

Définition

- A est sans transitions spontanées si $\delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$.
- A est complet si $\forall q \in Q : \forall a \in \Sigma : |\{r \in Q \mid (q, a, r) \in \delta\}| \geq 1$.
- A est déterministe si $\delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$, $|Q_0| = 1$ et
  $\forall q \in Q : \forall a \in \Sigma : |\{r \in Q \mid (q, a, r) \in \delta\} \leq 1$.

On les a vu dans l'ordre

1. automates finis déterministes complets — DFA
2. automates finis déterministes
3. automates finis (sans transitions spontanées) — NFA
4. automates finis (à transitions spontanées) — ε-NFA

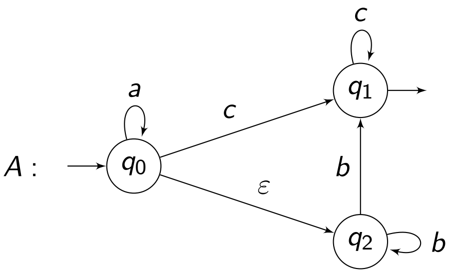
Dernièrement : Langages reconnaissables

Définition

Un langage L est reconnaissable si $\exists$ un automate fini A t.q. $L = L(A)$.

syntaxe		sémantique
aut. finis dét. complets		langages reconnaissables
$\subsetneq$		$\parallel$ ✓
aut. finis déterministes		langages reconnaissables
$\subsetneq$		$\parallel$?
automates finis	$\xrightarrow{L(\cdot)}$	langages reconnaissables
$\subsetneq$		$\parallel$?
aut. finis à trans. spontanées		langages reconnaissables
		$\parallel$?
expressions rationnelles		langages rationnelles

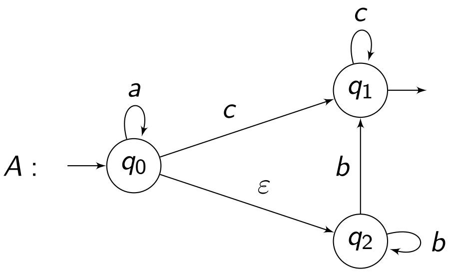
5 minutes de réflexion



Vrai ou faux ?

1. $acc \in L(A)$
2. $acb \in L(A)$
3. $abc \in L(A)$
4. $abb \in L(A)$
5. $L(b^* bc^*) \subseteq L(A)$

5 minutes de réflexion



Vrai ou faux ?

1. $acc \in L(A)$ ✓
2. $acb \in L(A)$ ✗
3. $abc \in L(A)$ ✓
4. $abb \in L(A)$ ✓
5. $L(b^* bc^*) \subseteq L(A)$ ✓

Des expressions rationnelles aux automates

Automates finis aux transitions spontanées

Définition (4.11)

Un automate fini à transitions spontanées est une structure $(\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$ où

- Σ est un ensemble fini de symboles,
- Q est un ensemble fini d'états,
- $Q_0 \subseteq Q$ est l'ensemble des états initiaux,
- $F \subseteq Q$ est l'ensemble des états finaux, et
- $\delta \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times Q$ est la relation de transition.

- peut changer de l'état spontanément sans lire un symbole

Comment ça marche

Un automate fini à transitions spontanées : $A = (\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$:

- Σ, Q ensembles finis, $Q_0, F \subseteq Q$,
- $\delta \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times Q$: la relation de transition

On note $q \xrightarrow{a} r$ si $(q, a, r) \in \delta$. $\Longleftarrow$ donc a peut être ε

Définition

- Un calcul dans A est une séquence $\sigma = q_1 \xrightarrow{a_1} q_2 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_{n-1}} q_n$.
- L'étiquette d'un calcul comme ci-dessus est
  $\lambda(\sigma) = a_1 a_2 \dots a_{n-1} \in \Sigma^*$.
- Un calcul comme ci-dessus est réussi si $q_1 \in Q_0$ et $q_n \in F$.
- Le langage reconnu par A est
  $L(A) = \{\lambda(\sigma) \mid \sigma \text{ calcul réussi dans } A\}$.

- note $a\,\varepsilon\,b\,\varepsilon\,a\,\varepsilon\,b = abab$, par exemple

Théorème de Kleene

Théorème (Kleene)

Un langage $L \subseteq \Sigma^*$ est rationnel ssi il est reconnaissable.

syntaxe		sémantique
aut. finis dét. complets		langages reconnaissables
$\subsetneq$		$\parallel$ ✓
aut. finis déterministes		langages reconnaissables
$\subsetneq$	$\xrightarrow{L(\cdot)}$	$\parallel$?
automates finis		langages reconnaissables
$\subsetneq$		$\parallel$!
aut. finis à trans. spontanées		langages reconnaissables
		$\parallel$ $\Uparrow$
expressions rationnelles		langages rationnelles

Fin à la spontanéité

Lemme

Pour tout automate fini à transitions spontanées A il existe un automate fini A' tel que $L(A') = L(A)$.

- on note $q \xrightarrow{\varepsilon}^* r$ si il existe une suite $q \xrightarrow{\varepsilon} \cdots \xrightarrow{\varepsilon} r$ de transitions spontanées

Démonstration.

1. Soit $A = (\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$.
2. On construit $A' = (\Sigma, Q', Q_0', F', \delta')$ comme suit :
3. $Q' = Q, Q_0' = Q_0$,
4. $F' = \{q \in Q \mid \exists r \in F : q \xrightarrow{\varepsilon}^* r\}$, et
5. $\delta' = \{(p, a, r) \mid \exists q \in Q : p \xrightarrow{\varepsilon}^* q \text{ et } (q, a, r) \in \delta\}$.
6. Maintenant il faut démontrer que, en fait, $L(A') = L(A)$.

Algorithme de Thompson

Lemme (Thompson)

Pour toute expression rationnelle e il existe un automate fini à transitions spontanées A tel que $L(e) = L(A)$.

Démonstration.

1. Soit e une expression rationnelle.
2. On construit, par induction structurelle, un automate fini $A(e)$ à transitions spontanées tel que $L(A(e)) = L(e)$.
3. Nos automates vont être pures, avec un unique état initial sans transitions entrantes et symétriquement pour l'état final.
4. Si $e = \emptyset$, alors soit $A(e) =$  (sans transitions).

Algorithme de Thompson

Lemme (Thompson)

Pour toute expression rationnelle e il existe un automate fini à transitions spontanées A tel que $L(e) = L(A)$.

Démonstration.

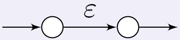
1. Soit e une expression rationnelle.
2. On construit, par induction structurelle, un automate fini $A(e)$ à transitions spontanées tel que $L(A(e)) = L(e)$.
3. Nos automates vont être pures, avec un unique état initial sans transitions entrantes et symétriquement pour l'état final.
4. Si $e = \emptyset$, alors soit $A(e) =$  (sans transitions).
5. Si $e = \varepsilon$, alors soit $A(e) =$

Algorithme de Thompson

Lemme (Thompson)

Pour toute expression rationnelle e il existe un automate fini à transitions spontanées A tel que $L(e) = L(A)$.

Démonstration.

1. Soit e une expression rationnelle.
2. On construit, par induction structurelle, un automate fini $A(e)$ à transitions spontanées tel que $L(A(e)) = L(e)$.
3. Nos automates vont être pures, avec un unique état initial sans transitions entrantes et symétriquement pour l'état final.
4. Si $e = \emptyset$, alors soit $A(e) =$  (sans transitions).
5. Si $e = \varepsilon$, alors soit $A(e) =$ 

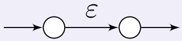
.

Algorithme de Thompson

Lemme (Thompson)

Pour toute expression rationnelle e il existe un automate fini à transitions spontanées A tel que $L(e) = L(A)$.

Démonstration.

1. Soit e une expression rationnelle.
2. On construit, par induction structurelle, un automate fini $A(e)$ à transitions spontanées tel que $L(A(e)) = L(e)$.
3. Nos automates vont être pures, avec un unique état initial sans transitions entrantes et symétriquement pour l'état final.
4. Si $e = \emptyset$, alors soit $A(e) =$  (sans transitions).
5. Si $e = \varepsilon$, alors soit $A(e) =$ 

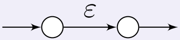
.
6. Si $e = a \in \Sigma$, alors soit $A(e) =$

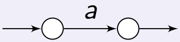
Algorithme de Thompson

Lemme (Thompson)

Pour toute expression rationnelle e il existe un automate fini à transitions spontanées A tel que $L(e) = L(A)$.

Démonstration.

1. Soit e une expression rationnelle.
2. On construit, par induction structurelle, un automate fini $A(e)$ à transitions spontanées tel que $L(A(e)) = L(e)$.
3. Nos automates vont être pures, avec un unique état initial sans transitions entrantes et symétriquement pour l'état final.
4. Si $e = \emptyset$, alors soit $A(e) =$  (sans transitions).
5. Si $e = \varepsilon$, alors soit $A(e) =$ 

.
6. Si $e = a \in \Sigma$, alors soit $A(e) =$ 

.

Algorithme de Thompson

Lemme (Thompson)

Pour toute expression rationnelle e il existe un automate fini à transitions spontanées A tel que $L(e) = L(A)$.

Démonstration (suite).

7. Si $e = e_1 e_2$, alors prenons $A(e_1) = \longrightarrow (i_1) \longrightarrow \boxed{Q_1} \longrightarrow (f_1) \longrightarrow$ et $A(e_2) = \longrightarrow (i_2) \longrightarrow \boxed{Q_2} \longrightarrow (f_2) \longrightarrow$ et construisons

   $A(e) = \longrightarrow (i_1) \longrightarrow \boxed{Q_1} \longrightarrow (f_1) \xrightarrow[\varepsilon]{} (i_2) \longrightarrow \boxed{Q_2} \longrightarrow (f_2) \longrightarrow$.

Algorithme de Thompson

Lemme (Thompson)

Pour toute expression rationnelle e il existe un automate fini à transitions spontanées A tel que $L(e) = L(A)$.

Démonstration (suite).

8. Si $e = e_1 + e_2$, alors prenons $A(e_1) = \longrightarrow i_1 \longrightarrow \boxed{Q_1} \longrightarrow f_1 \longrightarrow$ et $A(e_2) = \longrightarrow i_2 \longrightarrow \boxed{Q_2} \longrightarrow f_2 \longrightarrow$ et construisons

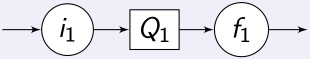
$A(e) =$

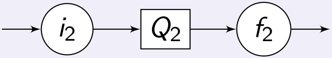
Algorithme de Thompson

Lemme (Thompson)

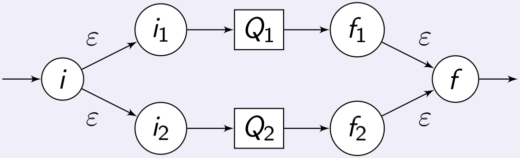
Pour toute expression rationnelle e il existe un automate fini à transitions spontanées A tel que $L(e) = L(A)$.

Démonstration (suite).

8. Si $e = e_1 + e_2$, alors prenons $A(e_1) =$ 

et $A(e_2) =$ 

et construisons

$A(e) =$ 

.

Algorithme de Thompson

Lemme (Thompson)

Pour toute expression rationnelle e il existe un automate fini à transitions spontanées A tel que $L(e) = L(A)$.

Démonstration (suite).

9. Si $e = e_1^*$, alors prenons $A(e_1) = \longrightarrow i_1 \longrightarrow \boxed{Q_1} \longrightarrow f_1 \longrightarrow$ et construisons

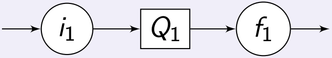
$A(e) =$

Algorithme de Thompson

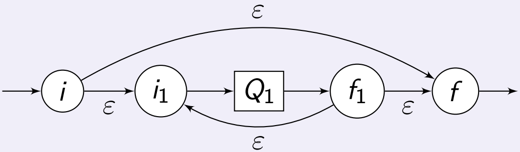
Lemme (Thompson)

Pour toute expression rationnelle e il existe un automate fini à transitions spontanées A tel que $L(e) = L(A)$.

Démonstration (suite).

9. Si $e = e_1^*$, alors prenons $A(e_1) =$ 

et construisons

$A(e) =$ 

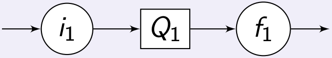
.

Algorithme de Thompson

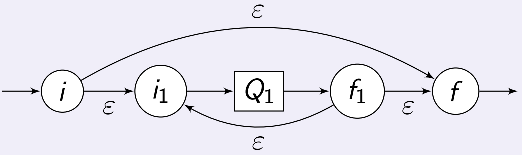
Lemme (Thompson)

Pour toute expression rationnelle e il existe un automate fini à transitions spontanées A tel que $L(e) = L(A)$.

Démonstration (suite).

9. Si $e = e_1^*$, alors prenons $A(e_1) =$ 

   et construisons

$A(e) =$ 

.

10. Maintenant il faut démontrer que $L(A(e)) = L(e)$ en chaque cas.

Exercice

Utiliser l'algorithme de Thompson pour convertir l'expression rationnelle $a(b^*a + b)$ en automate fini à transitions spontanées.

That's all Folks!