Théorie des langages rationnels : THLR

CM 8

Uli Fahrenberg

EPITA Rennes

S3 2022

Aperçu

Programme du cours

1. Mots, langages
2. Langages rationnels, expressions rationnelles
3. Automates finis
4. Langages non-rationnels
5. Langages reconnaissables, minimisation

Langages reconnaissables

Définition

Un langage L est reconnaissable si $\exists$ un automate fini A t.q. $L = L(A)$.

syntaxe		sémantique
aut. finis dét. complets		langages reconnaissables
$\subsetneq$		$\parallel$ ✓
aut. finis déterministes		langages reconnaissables
$\subsetneq$	$L(\cdot)$	$\parallel$ ✓
automates finis	$\longrightarrow$	langages reconnaissables
$\subsetneq$		$\parallel$ ✓
aut. finis à trans. spontanées		langages reconnaissables
		$\parallel$ $\Uparrow$
expressions rationnelles		langages rationnelles

La dernière fois : Déterminisation par automates des parties

L'automate des parties d'un automate fini $A = (\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$:

- $A' = (\Sigma, Q', q'_0, F', \delta')$
- $Q' = \mathcal{P}(Q)$, l'ensemble des parties de Q
- $q'_0 = Q_0$
- $F' = \{P \subseteq Q \mid P \cap F \neq \emptyset\}$
- $\delta'(P, a) = \{q \in Q \mid \exists p \in P : (p, a, q) \in \delta\}$

$\Rightarrow$ un automate fini déterministe complet avec $L(A') = L(A)$

- si A a n états, alors A' a 2^n états

Il existe des langages rationnelles L qui

- sont reconnus par un automate fini de taille n,
- mais l'automate fini déterministe minimal pour reconnaitre L a 2^n états.

Langages non-rationnels

Motifs répétitifs

- Existent-ils des langages non-rationnels ?
- Le langage $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ est-il rationnel ?
- Le langage des expressions arithmétiques est-il rationnel ?

Lemme de l'étoile

1. Soit $A = (\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$ un automate fini avec k états.
2. Soit $x \in L(A)$ un mot de longueur $|x| = k$ (si il existe) ; écrivons $x = a_1 \dots a_k$.
3. Alors on a un calcul réussi $s_1 \xrightarrow{a_1} s_2 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_k} s_{k+1}$ dans A.
4. Ce calcul utilise $k+1$ états, alors un état de A a été utilisé deux fois. (Principe des tiroirs.)
5. Soient donc $i < j$ tel que $s_i = s_j$: la chaîne $s_i \rightsquigarrow s_j$ est une boucle.
6. Alors $s_1 \xrightarrow{a_1} \cdots \xrightarrow{a_{i-1}} s_i \xrightarrow{a_j} s_{j+1} \to \cdots \to s_{k+1}$ est aussi un calcul réussi, avec étiquette $a_1 \dots a_{i-1} a_j \dots a_k$.
7. En écrivant $u = a_1 \dots a_{i-1}$, $v = a_i \dots a_{j-1}$ et $w = a_j \dots a_k$ on trouve que $L(uv^*w) \subseteq L(A)$.

Lemme de l'étoile

Théorème (4.25)

Soit L un langage rationnel. Il existe $k \geq 0$ tel que tout $x \in L$ avec longueur $|x| \geq k$ peut s'écrire $x = uvw$ avec $|uv| \leq k$, $|v| \geq 1$ et $L(uv^*w) \subseteq L$.

- aussi lemme de pompage
- note $\exists k : \forall x : \exists u, v, w$
- démonstration par quelques petites modifications de l'argument précédent

Corollaire

Théorème (rappel)

Soit L un langage rationnel. Il existe $k \geq 0$ tel que tout $x \in L$ avec longueur $|x| \geq k$ peut s'écrire $x = uvw$ avec $|uv| \leq k$, $|v| \geq 1$ et $L(uv^* w) \subseteq L$.

Corollaire

Le langage $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ n'est pas rationnel.

Démonstration.

1. Supposons par l'absurde que L soit rationnel.
2. Soit k comme fourni par la lemme d'étoile.
3. Soit $x = a^k b^k$, alors $x = uvw$ avec $|uv| \leq k$ et $|v| \geq 1$.
4. Donc $u = a^i$, $v = a^j$ et $w = a^{k-i-j} b^k$ pour un $j \geq 1$.
5. On a $uw \in L(uv^* w)$ mais $uw \notin L$, contradiction !

Exercice

Théorème (rappel)

Soit L un langage rationnel. Il existe $k \geq 0$ tel que tout $x \in L$ avec longueur $|x| \geq k$ peut s'écrire $x = uvw$ avec $|uv| \leq k$, $|v| \geq 1$ et $L(uv^*w) \subseteq L$.

Montrer que le langage $L = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$ n'est pas rationnel.

Les automates finis sont décidables

Théorème (4.27)

Il existe un algorithme qui, pour A un automate fini, décide si $L(A)$ est vide, fini ou infini.

Démonstration.

Soit k le nombre d'états de A.

1. $L(A)$ est non-vide ssi il existe $w \in L(A)$ avec longueur $|w| < k$.
2. $L(A)$ est infini ssi il existe $w \in L(A)$ avec $k \leq |w| < 2k$.

(le reste sur tableau)


That's all Folks!