Syntaks og semantik

Lektion 6

26 februar 2008

Definition 2.2: En kontekstfri grammatik (CFG) er en 4-tupel $G = (V, \Sigma, R, S)$, hvor delene er

1. V : en endelig mængde af variable
2. Σ : en endelig mængde af terminaler, med $V \cap \Sigma = \emptyset$
3. $R : V \to \mathcal{P}\big((V \cup \Sigma)^*\big)$: produktioner / regler
4. $S \in V$: startvariablen

– produktioner skrives $A \to w$ i stedet for $w \in R(A)$

- Hvis $u, v, w \in (V \cup \Sigma)^*$ er ord og $A \to w$ er en produktion, siges uAv at frembringe uwv: $uAv \Rightarrow uwv$.
- Hvis $u, v \in (V \cup \Sigma)^*$ er ord, siges u at derivere v: $u \stackrel{*}{\Rightarrow} v$, hvis $u = v$ (!) eller der findes en følge $u_1, u_2, \dots, u_k$ af ord således at $u \Rightarrow u_1 \Rightarrow u_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow u_k \Rightarrow v$.
- Sproget som G genererer er $[\![G]\!] = \{w \in \Sigma^* \mid S \stackrel{*}{\Rightarrow} w\}$.

– dvs. et ord $w \in \Sigma^*$ genereres af G hvis og kun hvis der findes en derivation $S \Rightarrow w_1 \Rightarrow w_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow w_k \Rightarrow w$, hvor alle $w_i \in (V \cup \Sigma)^*$.

Fra sidst

1. Kontekstfrie grammatikker
2. Lukningsegenskaber
3. Regulære grammatikker

Eksempel: Opgave 2.6 d (ca.)

$$\begin{aligned} S &\to A\#T\#A \\ T &\to aTa \mid bTb \mid \#A\# \\ A &\to aA \mid bA \mid \varepsilon \mid A\#A \end{aligned}$$

Genererer sproget

$$\{x_1\#x_2\#\dots\#x_k \mid k \geq 5, \text{alle } x_i \in \{a,b\}^*, \\ \text{og } x_i = x_j^R \text{ for to indices } i \neq j\}$$

Definition: Et sprog siges at være **kontekstfrit** hvis der findes en CFG der genererer det.

Sætning 2.20: Et sprog er kontekstfrit hvis og kun hvis der findes en **push-down-automat** der genkender det.

(PDAs kommer lige om lidt.)

Sætning: Klassen af kontekstfrie sprog er lukket under $\cup$, $\circ$ og *.

Bevis: (Opgave 2.8) Lad A_1 og A_2 være kontekstfrie sprog over et fælles alfabet Σ.

- $\cup$: Lad $G_1 = (V_1, \Sigma, R_1, S_1)$, $G_2 = (V_2, \Sigma, R_2, S_2)$ være CFGs med $[\![G_1]\!] = A_1$ og $[\![G_2]\!] = A_2$. Konstruér en ny CFG $G = (V, \Sigma, R, S)$ ved $V = V_1 \cup V_2 \cup \{S\}$ og $R = R_1 \cup R_2 \cup \{S \to S_1 \mid S_2\}$. Da er $[\![G]\!] = A_1 \cup A_2$.
- $\circ$: Lad $G_1 = (V_1, \Sigma, R_1, S_1)$, $G_2 = (V_2, \Sigma, R_2, S_2)$ være CFGs med $[\![G_1]\!] = A_1$ og $[\![G_2]\!] = A_2$. Konstruér en ny CFG $G = (V, \Sigma, R, S)$ ved $V = V_1 \cup V_2 \cup \{S\}$ og $R = R_1 \cup R_2 \cup \{S \to S_1 S_2\}$. Da er $[\![M]\!] = A_1 \circ A_2$.
- $*$: Lad $G_1 = (V_1, \Sigma, R_1, S_1)$ være en CFG med $[\![G_1]\!] = A_1$. Konstruér en ny CFG $G = (V, \Sigma, R, S)$ ved $V = V_1 \cup \{S\}$ og $R = R_1 \cup \{S \to \varepsilon \mid SS \mid S_1\}$. Da er $[\![G]\!] = A_1^*$.

- **Definition:** En kontekstfri grammatik siges at være
  - **højre-regulær** hvis alle produktioner er på formen
    $$A \to a \quad \text{eller} \quad A \to aB \quad \text{eller} \quad A \to \varepsilon$$
  - **venstre-regulær** hvis alle produktioner er på formen
    $$A \to a \quad \text{eller} \quad A \to Ba \quad \text{eller} \quad A \to \varepsilon$$
- **Sætning:** Et sprog er regulært
  $\Leftrightarrow$ det genereres af en højre-regulær grammatik
  $\Leftrightarrow$ det genereres af en venstre-regulær grammatik.
- Men højre og venstre må ikke blandes: Grammatikken
  $$S \to aA \mid \varepsilon \qquad A \to Sb$$
  genererer $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$!

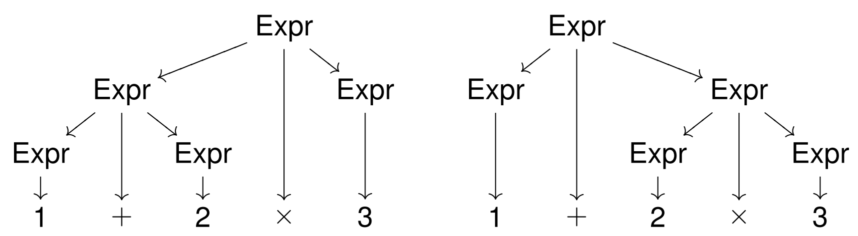
Kontekstfrie grammatikker og push-down-automater

4 Tvetydighed
5 Chomsky-normalformen
6 Push-down-automater
7 Ethvert kontekstfrit sprog genkendes af en PDA

Eksempel: Grammatikken G_5, ca.:

$$\text{Expr} \to \text{Expr} + \text{Expr} \mid \text{Expr} \times \text{Expr} \mid (\text{Expr}) \mid \text{Heltal}$$

To forskellige parsetræer for $1 + 2 \times 3$:



$= 9$ $= 7$

Definition: En derivation $S \Rightarrow w_1 \Rightarrow w_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow w_k$ i en grammatik kaldes en venstre-derivation hvis det i ethvert skridt er den variable *længst til venstre* der erstattes.

Eksempel:

- $S \Rightarrow AB \Rightarrow aB \Rightarrow ab$ er en venstre-derivation,
- $S \Rightarrow AB \Rightarrow Ab \Rightarrow ab$ er ikke.

Bemærk: Til ethvert parsetræ svarer en entydig venstre-derivation.

Definition 2.7:

- Et ord siges at være genereret tvetydigt hvis det har to forskellige venstre-derivationer.
- En grammatik er tvetydig hvis den genererer et ord på en tvetydig måde.
- Et kontekstfrit sprog har en iboende tvetydighed hvis enhver CFG der genererer det er tvetydig.

Sætning: Der findes kontekstfrie sprog som har en iboende tvetydighed. (Opgave 2.29)

Sætning: Der findes ikke nogen algoritme som, givet en kontekstfri grammatik, kan afgøre om denne er tvetydig eller ej. (Opgave 5.21)

⇒ i anvendelser: vigtigt at designe ikke-tvetydige CFGs

Mål: specielle former for kontekstfrie grammatikker som er nemme at håndtere

Definition 2.8: En CFG med startvariabel S er i Chomsky-normalform hvis hver produktion er af formen $A \to BC$ eller $A \to a$, hvor a er en terminal, A, B og C er variable og $B, C \neq S$. Desuden tillades produktionen $S \to \varepsilon$.

Sætning 2.9: Ethvert kontekstfrit sprog genereres af en CFG i Chomsky-normalform.

Bevis: Lad (V, Σ, R, S) være en CFG. Vi konverterer den til Chomsky-normalform:

1. *S* må ikke forekomme på højresider.
   Introducér en ny startvariabel S_0 og en produktion $S_0 \to S$.

Bevis: Lad (V, Σ, R, S) være en CFG. Vi konverterer den til Chomsky-normalform:

1. *S* må ikke forekomme på højresider.
2. Vi vil ikke have ε-produktioner $A \to \varepsilon$, medmindre $A = S$.
   - Tag en produktion $A \to \varepsilon$ og fjern den.
   - For alle produktioner $R \to uAv$: introducér en ny produktion $R \to uv$.
   - Men hvis der er en produktion $R \to A$, introduceres $R \to \varepsilon$ *kun hvis den ikke allerede før er blevet fjernet*.
   - Gentag indtil alle ε-produktioner er væk (undtaget måske $S \to \varepsilon$).

Bevis: Lad (V, Σ, R, S) være en CFG. Vi konverterer den til Chomsky-normalform:

1. *S* må ikke forekomme på højresider.
2. Vi vil ikke have ε-produktioner $A \to \varepsilon$, medmindre $A = S$.
3. Vi vil ikke have *unit rules*: produktioner af formen $A \to B$.
   - Tag en produktion $A \to B$ og fjern den.
   - For alle produktioner $B \to u$: introducér en ny produktion $A \to u$.
   - Men hvis der er en produktion $B \to C$, introduceres $A \to C$ *kun hvis den ikke allerede før er blevet fjernet*.
   - Gentag indtil alle *unit rules* er væk.

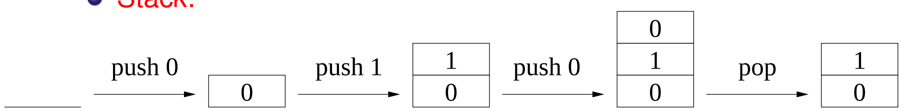
Bevis: Lad (V, Σ, R, S) være en CFG. Vi konverterer den til Chomsky-normalform:

1. *S* må ikke forekomme på højresider.
2. Vi vil ikke have ε-produktioner $A \to \varepsilon$, medmindre $A = S$.
3. Vi vil ikke have *unit rules*: produktioner af formen $A \to B$.
4. Vi vil ikke have produktioner af formen $A \to u_1 u_2 \dots u_k$ for $k \geq 3$.
   - Lad $A \to u_1 u_2 \dots u_k$ være en sådan produktion. (Her er $u_i$erne variable eller terminaler.)
   - Erstat den med produktioner $A \to u_1 A_1$, $A_1 \to u_2 A_2, \dots,$ $A_{k-2} \to u_{k-1} u_k$, hvor $A_i$erne er nye variable.
   - Gentag.

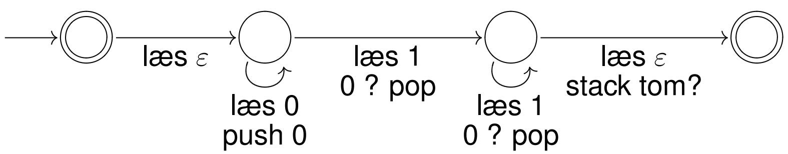
Bevis: Lad (V, Σ, R, S) være en CFG. Vi konverterer den til Chomsky-normalform:

1. S må ikke forekomme på højresider.
2. Vi vil ikke have ε-produktioner $A \to \varepsilon$, medmindre $A = S$.
3. Vi vil ikke have *unit rules*: produktioner af formen $A \to B$.
4. Vi vil ikke have produktioner af formen $A \to u_1 u_2 \dots u_k$ for $k \geq 3$.
5. Vi vil ikke have produktioner af formen $A \to bC$, $A \to Bc$ eller $A \to bc$.
   - Erstat $A \to bC$ med $A \to BC$ og $B \to b$, og gør lignende for de andre to. (Igen introduceres nye variable.)
6. Færdig!

- Pushdown-automat: endelig automat plus *stack*
- Stack:



- kan pushe symboler på stacken og læse og poppe det *øverste* stacksymbol
- Eksempel:



- genkender sproget $\{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$

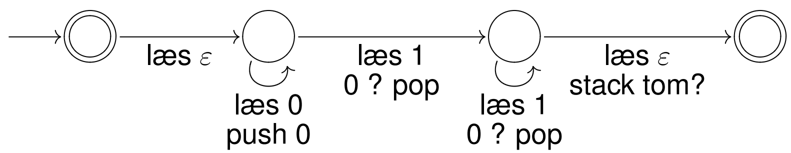
Definition 2.13: En pushdown-automat (PDA) er en 6-tupel $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$, hvor delene er

1. Q : en endelig mængde af tilstande
2. Σ : input-alfabetet
3. Γ : stack-alfabetet
4. $\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma_\varepsilon)$: transitionsfunktionen
5. $q_0 \in Q$: starttilstanden
6. $F \subseteq Q$: mængden af accepttilstande

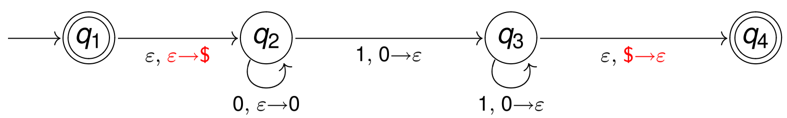
M siges at acceptere et ord $w \in \Sigma^*$ hvis der findes $m \in \mathbb{N}$ og $w_1, w_2, \dots, w_m \in \Sigma_\varepsilon$, $r_0, r_1, \dots, r_m \in Q$ og $s_0, s_1, \dots, s_m \in \Gamma^*$ således at $w = w_1 w_2 \dots w_m$ og

1. $r_0 = q_0$ og $s_0 = \varepsilon$,
2. for alle $i = 0, 1, \dots, m-1$ findes $a, b \in \Gamma_\varepsilon$ og $t \in \Gamma^*$ som opfylder $s_i = at$, $s_{i+1} = bt$ og $(r_{i+1}, b) \in \delta(r_i, w_{i+1}, a)$, og
3. $r_m \in F$.

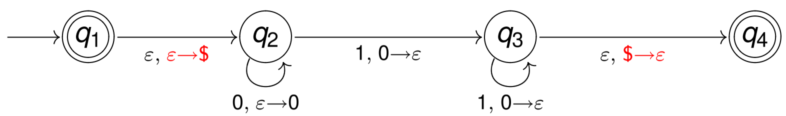
Eksempel 2.14:



At finde ud af om stacken er tom: Introducér et specielt end-of-stack-symbol \$



Eksempel 2.14:



$Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ $\Sigma = \{0, 1\}$ $\Gamma = \{0, \$\}$ $F = \{q_1, q_4\}$

δ :

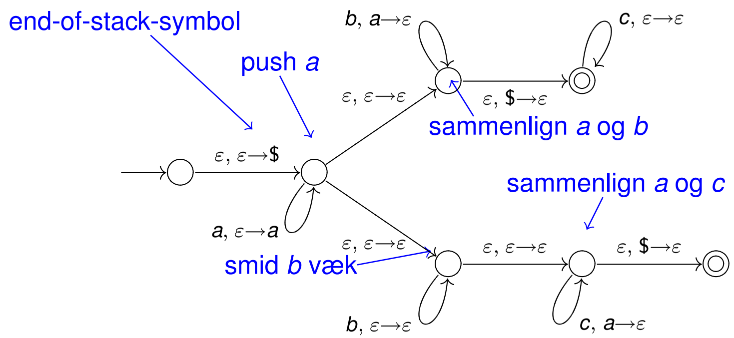
Input:	0			1			ε		
Stack:	0	\$	ε	0	\$	ε	0	\$	ε
q_1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{(q_2, \$)\}$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{(q_2, 0)\}$	$\{(q_3, \varepsilon)\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_3	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{(q_3, \varepsilon)\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{(q_4, \varepsilon)\}$	$\emptyset$
q_4	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Opsummering: PDA:

- endelig automat med *stack*
- stacken kan gemme på *vilkårligt mange* symboler, men kun det *øverste* kan læses (og poppes)
- *(first-in, last-out)*
- *nondeterministiske*
- der findes deterministiske PDAs, ja. Men
  - vi skal ikke se på dem her, og
  - de genkender *færre* sprog end de nondeterministiske PDAs!

Eksempel 2.16: En PDA der genkender sproget

$$\{a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \mathbb{N}_0 \text{ og } i = j \text{ eller } i = k\}$$



– det kan vises at man *skal* bruge en *nondeterministisk* PDA for at genkende det sprog

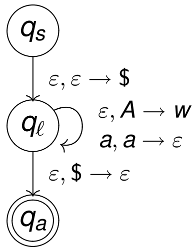
Lemma 2.21: Lad Σ være et alfabet og $A \subseteq \Sigma^*$ et kontekstfrit sprog. Da findes en PDA P med $[\![P]\!] = A$.

Bevis: Lad $G = (V, \Sigma, R, S)$ være en CFG med $[\![G]\!] = A$.
Idéen er at PDAen, givet en inputstreng s, nondeterministisk forsøger at finde en derivation for s i G:

1. Push S på stacken
2. Hvis topsymbolet på stacken er en variabel A: Pop A og push højresiden w af en produktion $A \to w$ i R. (Dø hvis der ikke er nogen produktion $A \to w$ i R.)
3. Hvis topsymbolet på stacken er en terminal a: Sammenlign med næste inputsymbol. Hvis de er ens, pop a. Hvis de ikke er ens, dø.
4. Gentag step 2 og 3 indtil stacken er tom.

Lemma 2.21: Lad Σ være et alfabet og $A \subseteq \Sigma^*$ et kontekstfrit sprog. Da findes en PDA P med $[\![P]\!] = A$.

Bevis: Lad $G = (V, \Sigma, R, S)$ være en CFG med $[\![G]\!] = A$.
Vi konstruerer først en "generaliseret PDA" $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_s, F)$, der kan pushe strenge i stedet for bare symboler. Lad $Q = \{q_s, q_\ell, q_f\}$, $F = \{q_a\}$ og $\Gamma = V \cup \Sigma \cup \{\$\}$. Lad



$\delta(q_s, \varepsilon, \varepsilon) = \{(q_\ell, S\$)\}$

$\delta(q_\ell, \varepsilon, A) = \{(q_\ell, w) \mid w \in R(A)\}$ for alle $A \in V$

$\delta(q_\ell, a, a) = \{(q_\ell, \varepsilon)\}$ for alle $a \in \Sigma$

$\delta(q_\ell, \varepsilon, \$) = \{(q_a, \varepsilon)\}$

$\delta(q, a, b) = \emptyset$ for alle andre

Lav til sidst P om til en "almindelig" PDA ved at erstatte enhver transition $q \xrightarrow{a,b \to s_1 s_2 \dots s_n} r$ med (nye tilstande og) en følge $q \xrightarrow{a,b \to s_n} q_1 \xrightarrow{\varepsilon,\varepsilon \to s_{n-1}} q_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow q_{n-1} \xrightarrow{\varepsilon,\varepsilon \to s_1} r$.