

# Syntaks og semantik

Lektion 14

17 april 2007

# Rekursive definitioner og fikspunkter

- 1 Eksempler
- 2 Fikspunkter
- 3 Partielt ordnede mængder
- 4 Grænseværdier
- 5 Domæner
- 6 Kontinuerte funktioner
- 7 Fikspunktssætningen
- 8 Anvendelser

En (lille) kontekstfri grammatik:

$$S \rightarrow aSb \mid c \mid S$$

Oversæt direkte til en rekursiv sproglikning:

$$L_S = \{a\} \circ L_S \circ \{b\} \cup \{c\} \cup L_S$$

At finde en løsning til dén ligning: Kald højresiden for  $F(L_S)$ :

$$L_S = F(L_S) = \{a\} \circ L_S \circ \{b\} \cup \{c\} \cup L_S$$

Start med  $U_0 = \emptyset$  og anvend ligningen:

$$U_1 = F(U_0) = \{a\} \circ \emptyset \circ \{b\} \cup \{c\} \cup \emptyset = \{c\}$$

$$U_2 = F(U_1) = \{a\} \circ \{c\} \circ \{b\} \cup \{c\} \cup \{c\} = \{c, acb\}$$

$$U_3 = F(U_2) = \{a\} \circ \{c, acb\} \circ \{b\} \cup \{c\} \cup \{c, acb\} = \{c, acb, a^2cb^2\}$$

...

$$U_n = \{a^i cb^i \mid i < n\}$$

“grænseværdi”:  $U = \{a^i cb^i \mid i \in \mathbb{N}\}$

$U$  er en løsning – fordi  $F(U) = U$  (Prøve!)

Så for

$$L_S = F(L_S) = \{a\} \circ L_S \circ \{b\} \cup \{c\} \cup L_S$$

virkede følgende:

- start med  $U_0 = \emptyset$
- anvend rekursionsligningen gentagne gange
- få en følge  $U_1 \subseteq U_2 \subseteq U_3 \subseteq \dots$
- “tag grænseværdien” af følgen

⇒ løsning til ligningen:  $L_S = \{a^i cb^i \mid i \in \mathbb{N}\}$

Er der flere løsninger?

- **Jep**, f.x.  $L''_S = \{a^i cb^i, a^i cccb^i \mid i \in \mathbb{N}\}$

Hvorfor virker det? Virker det også ved andre eksempler?

- Hvad med ligningen

$$\mathbf{Env}_P = \mathbf{Pnavne} \rightarrow \mathbf{Kom} \times \mathbf{Env}_V \times \mathbf{Env}_P \quad ?$$

### Sidebemærkning: Rekursion for reelle funktioner:

- ligningen  $x^2 + x = 6$  har en løsning  $x = 2$
- rekursion: omskriv ligningen til  $x = F(x) = 6 - x^2$
- kan løsningen  $x = 2$  findes ved rekursion?

Nej

[rekursion-bad.c]

- ligningen  $x^2 + 8x = 20$  har en løsning  $x = 2$
- rekursion: omskriv ligningen til  $x = F(x) = (20 - x^2)/8$
- kan løsningen  $x = 2$  findes ved rekursion?

Ja, men kun for *nogle* startværdier !

[rekursion-ok.c]

Et par rekursive ligninger:

$$L = F_1(L) = \{a\} \circ L \circ \{b\} \cup \{c\} \cup L$$

$$x = F_2(x) = 6 - x^2$$

$$\mathbf{Env}_P = F_3(\mathbf{Env}_P) = \mathbf{Pnavne} \rightarrow \mathbf{Kom} \times \mathbf{Env}_V \times \mathbf{Env}_P$$

Funktionerne på højresiderne:

$$F_1 : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$$

$$F_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F_3 : \text{mængder} \rightarrow \text{mængder} \quad (?)$$

**Definition 14.2:** Lad  $F : D \rightarrow D$  være en funktion. Et element  $x \in D$  kaldes et **fikspunkt** for  $F$  hvis  $F(x) = x$ .

– så vi skal finde ud af hvornår, og hvordan, vi kan beregne fikspunkter

### Tarskis fikspunkts-sætning 14.3:

Lad  $D$  være et domæne og  $f : D \rightarrow D$  en kontinuert funktion. Da har  $f$  et mindste fikspunkt  $x^*$ , som kan beregnes ved

$$x^* = \lim \{f^i(\perp) \mid i \in \mathbb{N}\}$$

hvor  $\perp$  er bundelementet i  $D$ .

- domæne: en mængde  $D$  med en fuldstændig partiel orden  $\sqsubseteq$
- $\perp$ : det mindste element i  $D$ ;  $\perp \sqsubseteq d$  for alle  $d \in D$
- grænseværdi:  $\lim Y$  er den mindste øvre grænse for den voksende mængde  $Y$  (hvis den findes)
- kontinuert funktion:  $f$  kontinuert  $\Leftrightarrow f(\lim Y) = \lim f(Y)$  for alle voksende mængder  $Y$

**Definition 14.4:** En relation  $\sqsubseteq$  over en mængde  $D$  kaldes en **partiel orden** hvis den er

- **refleksiv:**  $d \sqsubseteq d$  for alle  $d \in D$
- **transitiv:** hvis  $d_1 \sqsubseteq d_2$  og  $d_2 \sqsubseteq d_3$ , så  $d_1 \sqsubseteq d_3$
- **antisymmetrisk:** hvis  $d_1 \sqsubseteq d_2$  og  $d_2 \sqsubseteq d_1$ , så  $d_1 = d_2$

Parret  $(D, \sqsubseteq)$  kaldes da en **partielt ordnet mængde**.

**Eksempler:**

- $\mathbb{R}$  med den sædvanlige orden  $\sqsubseteq = \leq$
- $\mathbb{N}$  med den sædvanlige orden  $\sqsubseteq = \leq$
- $\mathbb{R}^2$  med den *punktvise* orden

$$(x, y) \sqsubseteq (x', y') \quad \Leftrightarrow \quad x \leq x' \text{ og } y \leq y'$$

- **delmængdedomænet:** Givet en mængde  $M$ , da er potensmængden  $\mathcal{P}(M)$  partielt ordnet ved

$$A \sqsubseteq B \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B$$



**Definition 14.9:** Givet en partielt ordnet mængde  $D$  og en delmængde  $Y \subseteq D$ , da kaldes  $Y$  en **voksende mængde** hvis der findes en nummerering  $Y = \{d_1, d_2, d_3, \dots\}$  af elementerne i  $Y$  således at  $d_1 \sqsubseteq d_2 \sqsubseteq d_3 \sqsubseteq \dots$ .

**Eksempler:**

- $\{1, 17, 3, 9\}$  er en voksende mængde i  $(\mathbb{N}, \leq)$
- $\{0, 2, 4, 6, \dots\}$  er en voksende mængde i  $(\mathbb{N}, \leq)$
- $\{3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, \dots\}$  er en voksende mængde i  $(\mathbb{Q}, \leq)$  ← **rationelle tal**
- $\{(1, 0), (0, 1)\}$  er *ikke* en voksende mængde i  $(\mathbb{R}^2, \sqsubseteq)$

**Definition 14.10 / 14.11 :** Givet en partielt ordnet mængde  $D$  og en voksende delmængde  $Y \subseteq D$ .

- $x \in D$  kaldes en **øvre grænse** for  $Y$  hvis  $y \sqsubseteq x$  for alle  $y \in Y$ .
- $x \in D$  kaldes en **grænseværdi** (eller **mindste øvre grænse**; *least upper bound*, *lub*) for  $Y$ , hvis
  - 1  $x$  er en øvre grænse for  $Y$ ,
  - 2 og for alle andre øvre grænser  $z$  for  $Y$  gælder  $x \sqsubseteq z$

**Eksempler:**

- 42 er en øvre grænse for  $\{1, 17, 3, 9\}$  i  $(\mathbb{N}, \leq)$
- 17 er en grænseværdi for  $\{1, 17, 3, 9\}$  i  $(\mathbb{N}, \leq)$
- $\{0, 2, 4, 6, \dots\}$  har ingen øvre grænse i  $(\mathbb{N}, \leq)$
- $\{3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, \dots\}$  har en øvre grænse i  $(\mathbb{Q}, \leq)$ ,  
*men ingen grænseværdi*

**Opgave:** Vis at enhver voksende mængde kan have højst én grænseværdi (!)

Hvis en voksende mængde  $Y$  har en grænseværdi  $x$ , skriver vi den  
 **$x = \lim Y$**

**Definition 14.16:** Et **domæne** er en partielt ordnet mængde  $D$  der opfylder følgende betingelser:

- Enhver voksende mængde  $Y \subseteq D$  har en grænseværdi  $\lim Y \in D$
  - Der findes et element  $\perp \in D$  som opfylder  $\perp \sqsubseteq d$  for alle  $d \in D$
- $\perp$  kaldes **bundelementet** af  $D$

**Eksempler:**

- $(\mathbb{N}, \leq)$ ,  $(\mathbb{R}, \leq)$  og  $(\mathbb{R}^2, \sqsubseteq)$  er *ikke* domæner
- delmængdedomænet er et domæne

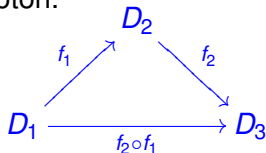
**Definition 14.21':** Lad  $D_1$  og  $D_2$  være partielt ordnede mængder og  $f : D_1 \rightarrow D_2$  en funktion. Da siges  $f$  at være **monoton** (eller **monotont voksende**) hvis  $d_1 \sqsubseteq d_2$  medfører  $f(d_1) \sqsubseteq f(d_2)$  for alle  $d_1, d_2 \in D_1$ .

- så monotone funktioner er dem der **bevarer ordensrelationen**
- monotone funktioner er de "*naturlige*" funktioner for partielt ordnede mængder. Man siger også at partielt ordnede mængder og monotone funktioner tilsammen udgør en **kategori**
- dertil skal bruges følgende:

**Lemma:** Hvis  $f_1 : D_1 \rightarrow D_2$  og  $f_2 : D_2 \rightarrow D_3$  er monotone, er deres sammensætning  $f_2 \circ f_1 : D_1 \rightarrow D_3$  også monoton.

**Bevis:**

- 1 Lad  $d_1, d_2 \in D_1$ , med  $d_1 \sqsubseteq d_2$ .
- 2  $f_1$  monoton  $\Rightarrow f_1(d_1) \sqsubseteq f_1(d_2)$
- 3  $f_2$  monoton  $\Rightarrow f_2(f_1(d_1)) \sqsubseteq f_2(f_1(d_2))$
- 4 færdig



**Notation 14.25:** For en funktion  $f : D_1 \rightarrow D_2$  og en delmængde  $Y \subseteq D_1$  betegner  $f(Y) = \{f(y) \mid y \in Y\} \subseteq D_2$ .

**Lemma 14.23':** Lad  $f : D_1 \rightarrow D_2$  være en monoton funktion mellem partielt ordnede mængder. Hvis  $Y \subseteq D_1$  er en voksende mængde, er  $f(Y) \subseteq D_2$  også en voksende mængde.

**Bevis:**

- ① Skal vise at der findes nummerering  $f(Y) = \{z_1, z_2, \dots\}$  med  $z_1 \sqsubseteq z_2 \sqsubseteq \dots$
  - ②  $Y$  voksende  $\Rightarrow$  har nummerering  $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$  med  $y_1 \sqsubseteq y_2 \sqsubseteq \dots$
- $\Rightarrow$  skriv  $f(Y) = \{f(y_1), f(y_2), \dots\}$  ✓

**Definition 14.26':** Lad  $D_1$  og  $D_2$  være domæner og  $f : D_1 \rightarrow D_2$  en monoton funktion. Da siges  $f$  at være **kontinuert** hvis  $f$  er grænseværdi-bevarende, dvs.:

for alle voksende mængder  $Y \subseteq D_1$  :  $\lim f(Y) = f(\lim Y)$

Domæner og kontinuerte funktioner udgør igen en **kategori**.  
Specielt:

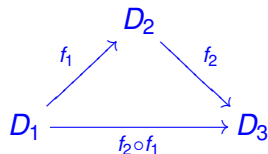
**Sætning 14.15(201):** Hvis  $f_1 : D_1 \rightarrow D_2$  og  $f_2 : D_2 \rightarrow D_3$  er kontinuerte, er deres sammensætning  $f_2 \circ f_1 : D_1 \rightarrow D_3$  også kontinuert.

**Bevis:**

❶ Lad  $Y \subseteq D_1$  være en voksende mængde.

$\Rightarrow f_1(Y) \subseteq D_2$  og  $f_2(f_1(Y)) \subseteq D_3$  er også voksende

❷ og  $f_2(f_1(\lim Y)) = f_2(\lim f_1(Y)) = \lim f_2(f_1(Y))$



**Notation:** For en funktion  $f : D \rightarrow D$  betegner  $f^i$  funktionen  $f$  sammensat med sig selv  $i$  gange:  $f^1 = f$ ,  $f^2 = f \circ f$ ,  $f^3 = f \circ f \circ f$ , ...

**Lemma 14.30:** Lad  $f : D \rightarrow D$  være en monoton funktion. Da er også  $f^i : D \rightarrow D$  monoton for alle  $i \in \mathbb{N}$ .

**Bevis:** Sammensætninger af monotone funktioner er monotone. ✓

**Lemma 14.31:** Lad  $D$  være et domæne og  $f : D \rightarrow D$  en *monoton* funktion. Da er  $\{f^i(\perp) \mid i \in \mathbb{N}\}$  en voksende mængde.

**Bevis:**

- ①  $\perp$  er mindste element i  $D \Rightarrow \perp \sqsubseteq f(\perp)$
- ② anvend  $f$ ,  $i$  gange:  $\Rightarrow f^i(\perp) \sqsubseteq f^{i+1}(\perp)$  ✓

**Sætning 14.3:** Lad  $D$  være et domæne og  $f : D \rightarrow D$  en kontinuert funktion. Da har  $f$  et **mindste fikspunkt**  $x^*$ , som kan beregnes ved

$$x^* = \lim\{f^i(\perp) \mid i \in \mathbb{N}\}$$

hvor  $\perp$  er bundelementet i  $D$ .

**Bevis:**

①  $x^*$  er et fikspunkt:

$$\begin{aligned} f(x^*) &= f(\lim\{f^i(\perp)\}) = \lim f(\{f^i(\perp)\}) = \lim\{f^{i+1}(\perp)\} \\ &= \lim(\{f^{i+1}(\perp)\} \cup \{\perp\}) = \lim\{f^i(\perp)\} = x^* \end{aligned}$$

②  $x^*$  er det mindste fikspunkt:

- Lad  $d$  være et fikspunkt for  $f$ , dvs.  $f(d) = d$ . Vis at  $x^* \sqsubseteq d$ .
- $\perp \sqsubseteq d \Rightarrow f^i(\perp) \sqsubseteq f^i(d) = d$
- $\Rightarrow d$  er øvre grænse for  $\{f^i(\perp)\}$
- $\Rightarrow \lim\{f^i(\perp)\} \sqsubseteq d$  ✓



**Sætning 14.7(199):** For enhver mængde  $S$  er potensmængden  $\mathcal{P}(S)$ , med inklusion  $\subseteq$  som ordensrelation, et domæne.

**Bevis** (fyld selv detaljer ind!):

- 1  $\subseteq$  er en partiel orden på  $\mathcal{P}(S)$
- 2 bundelementet er  $\perp = \emptyset$
- 3 hvis  $Y = \{M_1, M_2, \dots\}$  er en voksende mængde (af delmængder  $M_1, M_2, \dots \subseteq S$ ), er

$$\begin{aligned}\lim Y &= \bigcup_i M_i \\ &= M_1 \cup M_2 \cup \dots\end{aligned}$$

**Anvendelse:** Mængden af **sprog over et givet alfabet  $\Sigma$** ,  $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ , er et domæne.

**Lemma:** Konkaterering og foreningsmængde er kontinuerte operationer på  $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ .

**Bevis** (delvis): Vi skal f.x. vise følgende:

- for ethvert  $L \subseteq \Sigma^*$  er funktionen  $f : \mathcal{P}(\Sigma^*) \rightarrow \mathcal{P}(\Sigma^*)$  givet ved  $f(M) = L \circ M$  kontinuert:
  - 1 Lad  $\{M_1, M_2, \dots\}$  være en voksende mængde af sprog.
  - 2 Da er også  $\{L \circ M_1, L \circ M_2, \dots\}$  en voksende mængde.
  - 3 Vi skal vise at  $f(\lim\{M_1, M_2, \dots\}) = \lim f(\{M_1, M_2, \dots\})$ ,  
dvs.  $f(\bigcup_i M_i) = \bigcup_i f(M_i)$ .
  - 4 Men  $f(\bigcup_i M_i) = L \circ (\bigcup_i M_i)$  og  $\bigcup_i f(M_i) = \bigcup_i L \circ M_i$ .
  - 5 Og  $L \circ (\bigcup_i M_i) = \bigcup_i L \circ M_i$  pga. distributivitet.

**Eksemplet** med den kontekstfrie grammatik igen:

$$S \rightarrow aSb \mid c \mid S$$

Oversat til en fikspunktsligning:

$$L_S = F(L_S) = \{a\} \circ L_S \circ \{b\} \cup \{c\} \cup L_S$$

Og  $F : \mathcal{P}(\Sigma^*) \rightarrow \mathcal{P}(\Sigma^*)$  er en **sammensætning af konkateneringer og foreningsmængder**  $\Rightarrow F$  er **kontinuert** !

$\Rightarrow L_S$  kan findes ved fikspunktssætningen:

$$\begin{aligned} L_S &= \lim \{F^i(\emptyset) \mid i \in \mathbb{N}\} \\ &= \lim \{\emptyset, \{c\}, \{c, acb\}, \{c, acb, a^2cb^2\}, \dots\} \\ &= \bigcup_n \{a^i cb^i \mid i < n\} \\ &= \{a^n cb^n \mid n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

**Eksemplet** med  $\mathbf{Env}_P$  igen:

$$\mathbf{Env}_P = \mathbf{Pnavne} \rightarrow \mathbf{Kom} \times \mathbf{Env}_V \times \mathbf{Env}_P$$

Oversat til en fikspunktsligning:

$$\mathbf{Env}_P = F(\mathbf{Env}_P) = \mathbf{Pnavne} \rightarrow \mathbf{Kom} \times \mathbf{Env}_V \times \mathbf{Env}_P$$

$F$  er nu en funktion fra “mængden” af domæner til sig selv, givet ved

$$F(D) = \mathbf{Pnavne} \rightarrow \mathbf{Kom} \times \mathbf{Env}_V \times D$$

og følgende virker:

- tag det mindste domæne  $\{\perp\}$
- beregn en “voksende mængde” af domæner  $\{\{\perp\}, F(\{\perp\}), F(F(\{\perp\})), \dots\}$
- tag “grænseværdien” af den “mængde”

Men *hvorfor* virker det? og *hvad* bliver resultatet?

- Se de grumme detaljer i kapitel 6 af Mads Rosendahls domæneteori-noter:

<http://akira.ruc.dk/~madsr/webpub/domaene.pdf>