Théorie des langages rationnels : THLR
CM 7

Uli Fahrenberg

EPITA Rennes

S3 2022

Aperçu

Programme du cours

1. Mots, langages
2. Langages rationnels, expressions rationnelles
3. Automates finis
4. Langages non-rationnels
5. Langages reconnaissables, minimisation

Dernièrement : Automates finis

- poly chapitre 4, sections 4.1.1, 4.1.2, 4.1.4 première moitié, 4.1.5
- plus la moitié de section 4.2.2

Dernièrement : Automates finis

Définition

Un automate fini (à transitions spontanées) : $A = (\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$:

- Σ : ensemble fini de symboles, Q : ensemble fini d'états
- $Q_0 \subseteq Q$: états initiaux, $F \subseteq Q$: états finaux
- $\delta \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times Q$: relation de transition

- on note $q \xrightarrow{a} r$ si $(q, a, r) \in \delta$

Définition (Sémantique de A)

- Un calcul dans A : $\sigma = q_1 \xrightarrow{a_1} q_2 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_{n-1}} q_n$
- L'étiquette d'un calcul : $\lambda(\sigma) = a_1 a_2 \ldots a_{n-1} \in \Sigma^*$
- Un calcul réussi : $q_1 = q_0$ et $q_n \in F$
- Le langage reconnu par A :

$$L(A) = \{\lambda(\sigma) \mid \sigma \text{ calcul réussi dans } A\}$$

Variants

Un automate fini (à transitions spontanées) : $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$:

- Σ, Q ensembles finis, $q_0 \in Q$, $F \subseteq Q$,
- $\delta \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times Q$: la relation de transition

Définition

- A est sans transitions spontanées si $\delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$.
- A est complet si $\forall q \in Q : \forall a \in \Sigma : |\{r \in Q \mid (q, a, r) \in \delta\}| \geq 1$.
- A est déterministe si $\delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$, $|Q_0| = 1$ et $\forall q \in Q : \forall a \in \Sigma : |\{r \in Q \mid (q, a, r) \in \delta\} \leq 1$.

On les a vu dans l'ordre

1. automates finis déterministes complets
2. automates finis déterministes
3. automates finis (sans transitions spontanées)
4. automates finis (à transitions spontanées)

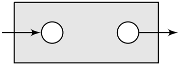
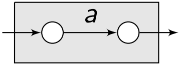
Dernièrement : Langages reconnaissables

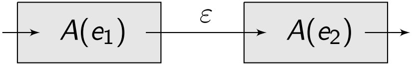
Définition

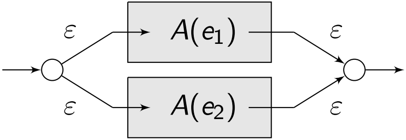
Un langage L est reconnaissable si $\exists$ un automate fini A t.q. $L = L(A)$.

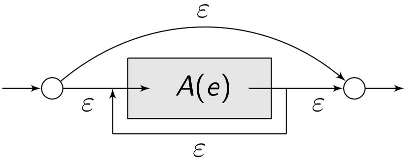
syntaxe		sémantique
aut. finis dét. complets		langages reconnaissables
$\subsetneq$		$\parallel$ ✓
aut. finis déterministes		langages reconnaissables
$\subsetneq$	$L(\cdot)$	$\parallel$?
automates finis	$\longrightarrow$	langages reconnaissables
$\subsetneq$		$\parallel$ ✓
aut. finis à trans. spontanées		langages reconnaissables
		$\parallel$ $\Uparrow$
expressions rationnelles		langages rationnelles

Dernièrement : Algorithme de Thompson

- pour traduire une expression rationnelle e en automate fini $A(e)$, inductivement
- $\emptyset \mapsto$  ; $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\} \mapsto$ 

- $e_1 e_2 \mapsto$ 

- $e_1 + e_2 \mapsto$ 

- $e^* \mapsto$ 

Déterminisation

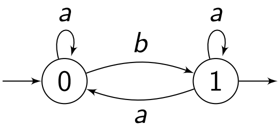
Automate des parties

Définition

Soit $A = (\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$ un automate fini. L'automate des parties de A est l'automate fini déterministe complet $A' = (\Sigma, Q', q_0', F', \delta')$ définit comme suite :

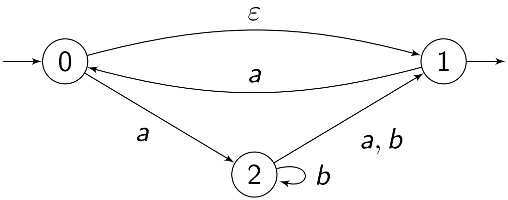
- $Q' = \mathcal{P}(Q)$, l'ensemble des parties de Q,
- $q_0' = Q_0$,
- $F' = \{P \subseteq Q \mid P \cap F \neq \emptyset\}$, et
- $\delta'(P, a) = \{q \in Q \mid \exists p \in P : (p, a, q) \in \delta\}$.

Exemple (sur tableau)



Exemple (sur tableau)

- et ça marche aussi avec transitions spontanées :



Le non-déterminisme ne paye pas

Théorème

Pour tout automate fini A il existe un automate fini déterministe complet A' tel que $L(A') = L(A)$.

Démonstration.

1. Notons $A = (\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$.
2. Soit A' l'automate des parties de A, on montre que $L(A') = L(A)$.

Le non-déterminisme ne paye pas

Théorème

Pour tout automate fini A il existe un automate fini déterministe complet A' tel que $L(A') = L(A)$.

Démonstration.

1. Notons $A = (\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$.
2. Soit A' l'automate des parties de A, on montre que $L(A') = L(A)$.
3. Soit $w \in L(A)$, alors il existe un calcul réussi $\sigma = q_0 \xrightarrow{a_1} \cdots \xrightarrow{a_n} q_n$ dans A t.q. $\lambda(\sigma) = w$.

Le non-déterminisme ne paye pas

Théorème

Pour tout automate fini A il existe un automate fini déterministe complet A' tel que $L(A') = L(A)$.

Démonstration.

1. Notons $A = (\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$.
2. Soit A' l'automate des parties de A, on montre que $L(A') = L(A)$.
3. Soit $w \in L(A)$, alors il existe un calcul réussi $\sigma = q_0 \xrightarrow{a_1} \cdots \xrightarrow{a_n} q_n$ dans A t.q. $\lambda(\sigma) = w$.
4. Soit $Q_1 = \delta'(Q_0, a_1)$, $Q_2 = \delta'(Q_1, a_2)$ etc., alors $\sigma' = Q_0 \xrightarrow{a_1} \cdots \xrightarrow{a_n} Q_n$ est un calcul dans A' t.q. $\lambda(\sigma') = w$.

Le non-déterminisme ne paye pas

Théorème

Pour tout automate fini A il existe un automate fini déterministe complet A' tel que $L(A') = L(A)$.

Démonstration.

1. Notons $A = (\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$.
2. Soit A' l'automate des parties de A, on montre que $L(A') = L(A)$.
3. Soit $w \in L(A)$, alors il existe un calcul réussi $\sigma = q_0 \xrightarrow{a_1} \cdots \xrightarrow{a_n} q_n$ dans A t.q. $\lambda(\sigma) = w$.
4. Soit $Q_1 = \delta'(Q_0, a_1)$, $Q_2 = \delta'(Q_1, a_2)$ etc., alors $\sigma' = Q_0 \xrightarrow{a_1} \cdots \xrightarrow{a_n} Q_n$ est un calcul dans A' t.q. $\lambda(\sigma') = w$.
5. On a $q_i \in Q_i$ pour tout i, donc $q_n \in Q_n \cap F$, c.à.d. $Q_n \in F'$, alors σ' est un calcul réussi, donc $w \in L(A')$.

Le non-déterminisme ne paye pas

Théorème

Pour tout automate fini A il existe un automate fini déterministe complet A' tel que $L(A') = L(A)$.

Démonstration.

1. Notons $A = (\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$.
2. Soit A' l'automate des parties de A, on montre que $L(A') = L(A)$.
3. Soit $w \in L(A)$, alors il existe un calcul réussi $\sigma = q_0 \xrightarrow{a_1} \cdots \xrightarrow{a_n} q_n$ dans A t.q. $\lambda(\sigma) = w$.
4. Soit $Q_1 = \delta'(Q_0, a_1)$, $Q_2 = \delta'(Q_1, a_2)$ etc., alors $\sigma' = Q_0 \xrightarrow{a_1} \cdots \xrightarrow{a_n} Q_n$ est un calcul dans A' t.q. $\lambda(\sigma') = w$.
5. On a $q_i \in Q_i$ pour tout i, donc $q_n \in Q_n \cap F$, c.à.d. $Q_n \in F'$, alors σ' est un calcul réussi, donc $w \in L(A')$.

Et l'autre direction ?

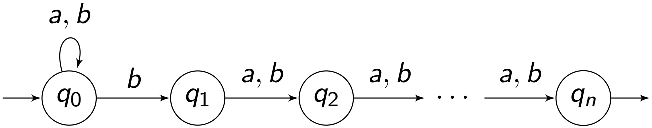
Le non-déterminisme paye

$$\begin{tikzcd}
 & \text{aut. finis déterministes} \arrow[dl] & \\
\text{aut. finis dét. complets} \arrow[dr] & & \text{automates finis} \arrow[ul] \\
 & \text{aut. finis à trans. spontanées} \arrow[ur] & \\
 & \text{expressions rationnelles} \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

- difficile d'inventer un traduction directe des expressions rationnelles en automates finis déterministes
- le non-déterminisme est utile pour des spécifications partielles
- des automates finis non-déterministes peuvent être exponentiellement plus distinctes que des automates finis déterministes :

Exercice

Pour $n \geq 2$ soit A_n l'automate fini comme suit :

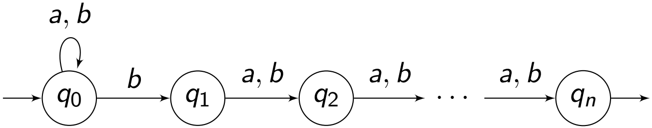


1. Trouver une expression rationnelle e_n telle que $L(e_n) = L(A_n)$.

2. Quelle est le nombre d'états le plus petit d'un automate fini déterministe A'_n tel que $L(A'_n) = L(A_n)$?

Exercice

Pour $n \geq 2$ soit A_n l'automate fini comme suit :



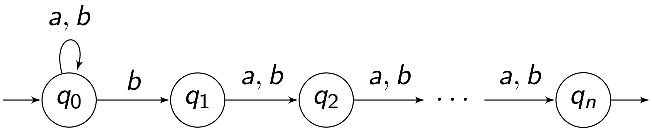
1. Trouver une expression rationnelle e_n telle que $L(e_n) = L(A_n)$.

   $(a+b)^* b (a+b)^{n-1}$

2. Quelle est le nombre d'états le plus petit d'un automate fini déterministe A'_n tel que $L(A'_n) = L(A_n)$?

Exercice

Pour $n \geq 2$ soit A_n l'automate fini comme suit :



1. Trouver une expression rationnelle e_n telle que $L(e_n) = L(A_n)$.

   $(a + b)^* b(a + b)^{n-1}$

2. Quelle est le nombre d'états le plus petit d'un automate fini déterministe A'_n tel que $L(A'_n) = L(A_n)$?

   2^n


That's all Folks!