Faculté des Sciences d'Orsay — Université Paris-Saclay
Licence Informatique, LDD Informatique, Mathématiques, semestre 5 — 2022-23
Eléments de logique pour l'informatique (Info 315) — 13 décembre 2023

Examen - 14 décembre 2022

L'examen dure 2 heures. L'énoncé est composé de 6 pages, le barème est indicatif.
Toutes les réponses (sauf QCM) devront être clairement justifiées.
Le seul document autorisé est une page A4 manuscripte recto-verso.
Le tableau résumant les règles du système G est donné à la fin du sujet.
Vous devez cacheter les copies. Recopier le numéro d'anonymat sur les intercalaires et sur le QCM
Correction :

Exercice 1 *QCM (4 points)* Le **numéro d'anonymat** de la copie principale (pas le numéro d'étudiant) doit être reporté sur l'énoncé du QCM. Utiliser un stylo bleu ou noir pour cocher les cases (pas de crayon papier). Si vous vous êtes trompé, indiquer en toute lettre la réponse souhaitée (vrai, faux ou pas de réponse).

Sauf indication contraire, une bonne réponse rapporte $\frac{1}{4}$, une mauvaise réponse retire $\frac{1}{8}$ point, l'absence de réponse vaut 0 point.

N'oubliez pas de rendre le QCM avec vos copies.

Correction : *Voir correction individuelle des QCM.*

Exercice 2 *Modélisation (3 points).*
On cherche à modéliser en logique comment des personnes sont installées autour de tables. L'univers dans lequel on se place pour la logique contient uniquement des personnes et on se donne les symboles de prédicats suivants :

$\texttt{table}(x, y)$	: x et y sont assis à la même table
$\texttt{ennemi}(x, y)$	: x et y sont ennemis
$\texttt{enfant}(x)$	: x est un enfant
$x = y$	: x et y sont la même personne

Remarque : La notion de table en langue naturelle ne se reflète dans le langage logique qu'au travers de la relation $\texttt{table}$ qui représente le fait pour deux personnes d'être assises à la même table. La formule $\texttt{table}(x, x)$ traduit simplement le fait que x est assis à une table.

On pourra supposer dans les traductions que les interprétations auxquelles on va s'intéresser vérifient des propriétés naturelles de la relation "être à la même table" comme le fait que la relation $\texttt{table}$ est symétrique (si $\texttt{table}(x, y)$ est vrai alors il en est de même de $\texttt{table}(y, x)$) et transitive et que si $\texttt{table}(x, y)$ est vrai alors $\texttt{table}(x, x)$ aussi. De même on pourra supposer que la relation $\texttt{ennemi}$ est symétrique.

1. Ajouter des parenthèses aux formules logiques suivantes en respectant les précédences vues en cours puis les traduire en langue naturelle (français ou anglais intelligible) :
   (a) $\forall x, \exists y, \texttt{table}(x, y) \land \texttt{ennemi}(x, y)$
   (b) $\neg\forall x\, y, \texttt{table}(x, y) \Rightarrow \neg\texttt{ennemi}(x, y)$
   (c) $\neg\exists x\, y, \texttt{table}(x, x) \land \texttt{table}(y, y) \land \neg\texttt{table}(x, y)$
   (d) $\forall x\, y, \texttt{table}(x, y) \land \texttt{enfant}(x) \Rightarrow x = y$

2. Traduire en formules logiques utilisant uniquement les symboles de prédicat `table`, `ennemi`, `enfant` et `=` les phrases suivantes :
   (a) Tous les enfants sont à la même table
   (b) S'il y a un enfant à une table alors il y a également un adulte (une personne qui n'est pas un enfant) à cette même table.
   (c) Il y a une table avec exactement deux personnes.
   (d) Il y a une table occupée par (au moins) une personne telle que toutes les personnes à cette table sont ennemies entre elles.
3. Soit un domaine composé de 5 éléments A, B, C, D, E, on suppose que A, B sont les seuls enfants, et que les seuls ennemis sont A et D ainsi que E et D. Proposer une interprétation de la relation `table` telle que les formules de la question 2 sont toutes vraies. On pourra représenter l'interprétation dans un tableau ou comme un graphe.

Correction :

1. *(a)* $\forall x, \exists y, (\texttt{table}(x,y) \wedge \texttt{ennemi}(x,y))$ *: toute personne est assise à la même table qu'un de ses ennemis.*
   (b) $\neg(\forall x\, y, (\texttt{table}(x,y) \Rightarrow \neg\texttt{ennemi}(x,y)))$ *: il est faux que toutes les personnes assises à la même table ne sont pas ennemis entre elles ou encore il existe deux personnes assises à la même table qui sont ennemies.*
   (c) $\neg(\exists x\, y, (\texttt{table}(x,x) \wedge \texttt{table}(y,y) \wedge \neg\texttt{table}(x,y)))$ *"il est faux qu'il existe deux personnes assises qui ne sont pas assises à la même table" ou encore "toutes les personnes assises sont assises à la même table".*
   (d) $\forall x\, y, ((\texttt{table}(x,y) \wedge \texttt{enfant}(x)) \Rightarrow x = y)$ *: si deux personnes sont assises à la même table et que l'un est un enfant alors ces deux personnes sont la même personne, c'est-à-dire que les enfants sont assis seuls à table.*

2. *(a)* $\forall x\, y, \texttt{enfant}(x) \wedge \texttt{enfant}(y) \Rightarrow \texttt{table}(x,y)$
   (b) $\forall x, \texttt{enfant}(x) \wedge \texttt{table}(x,x) \Rightarrow (\exists z, \neg\texttt{enfant}(z) \wedge \texttt{table}(x,z))$
   (c) $\exists x\, y, (x \neq y \wedge \texttt{table}(x,y) \wedge \forall z, (\texttt{table}(x,z) \Rightarrow z = x \vee z = y))$
   (d) $\exists x, \texttt{table}(x,x) \wedge \forall y\, z, \texttt{table}(x,y) \wedge \texttt{table}(x,z) \Rightarrow \texttt{ennemi}(y,z)$

3. *On fait une table avec les enfants A, B et un adulte et une table avec uniquement des ennemis. Cette deuxième table va comporter D et E. Cela laisse C à la table des enfants. L'interprétation de la relation `table` peut donc se représenter par le tableau suivant :*

	A	B	C	D	E
A	V	V	V	F	F
B	V	V	V	F	F
C	V	V	V	F	F
D	F	F	F	V	V
E	F	F	F	V	V

Exercice 3 *Résolution (3 points).*
On se place dans un langage avec deux symboles de prédicat unaires P et Q. Soit la formule

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \exists x, \forall y, \forall z, ((P(y) \Rightarrow Q(z)) \Rightarrow (P(x) \Rightarrow Q(x)))$$

En utilisant la résolution (on détaillera les étapes), montrer que la formule A est valide.

Correction :

1. *On cherche une contradiction à partir de la formule $\neg A$, on commence par calculer sa forme normale de négation :* $\neg A \equiv \forall x, \exists y, \exists z, (\neg P(y) \lor Q(z)) \land P(x) \land \neg Q(x)$
2. *skolemisation (il est judicieux de commencer par le quantificateur existentiel le plus haut). Pour les deux quantificateurs, la formule sous le il existe ne contient qu'une variable libre à savoir x il faut donc introduire des symboles de fonction unaires. Par exemple le symbole f pour remplacer y par $f(x)$ et le symbole g pour remplacer z par $g(x)$. On obtient :* $\forall x, (\neg P(f(x)) \lor Q(g(x))) \land P(x) \land \neg Q(x)$
   La formule est déjà en FNC, on obtient la forme clausale suivante (3 clauses) :
   $C_1 : \neg P(f(x)) \lor Q(g(x)) \qquad C_2 : P(x) \qquad C_3 : \neg Q(x)$
3. *résolution : On obtient la clause $C_4 : Q(g(x))$ par résolution de C_1 et C_2 dans laquelle on renomme la variable x par la variable y avec la substitution $\{y \leftarrow f(x)\}$, puis avec C_3 dans laquelle on renomme la variable x par la variable z et la substitution $\{z \leftarrow g(x)\}$ on obtient la clause vide.*

Exercice 4 Preuves en logique propositionnelle (3 points).
Soit A, B et C, trois variables propositionnelles

1. En utilisant le système G, construire les arbres de dérivation pour les séquents $(A \land B) \Rightarrow C \vdash (A \Rightarrow C) \lor (B \Rightarrow C)$ et $(A \Rightarrow C) \lor (B \Rightarrow C) \vdash (A \lor B) \Rightarrow C$
2. Dire pour chacun de ces séquents s'il est valide et en cas de réponse négative, donner une interprétation des variables qui le rend faux.

Correction :

$$\lor d\ \dfrac{\Rightarrow d \times 2\ \dfrac{\Rightarrow g\ \dfrac{\text{hyp}\ \dfrac{}{C, A, B \vdash C} \qquad \land d\ \dfrac{\text{hyp}\ \dfrac{}{A, B \vdash A, C} \quad \text{hyp}\ \dfrac{}{A, B \vdash B, C}}{A, B \vdash A \land B, C}}{((A \land B) \Rightarrow C), A, B \vdash C}}{(A \land B) \Rightarrow C \vdash (A \Rightarrow C), (B \Rightarrow C)}}{(A \land B) \Rightarrow C \vdash (A \Rightarrow C) \lor (B \Rightarrow C)}$$

Ce séquent à un arbre de dérivation complet et est donc valide

$$\Rightarrow d\ \dfrac{\lor g\ \dfrac{\lor g\ \dfrac{\Rightarrow g\ \dfrac{\text{H}\ \dfrac{}{C, A \vdash C} \quad \text{H}\ \dfrac{}{A \vdash A, C}}{(A \Rightarrow C), A \vdash C} \quad \Rightarrow g\ \dfrac{\text{H}\ \dfrac{}{C, A \vdash C} \quad \boxed{A \vdash B, C}}{(B \Rightarrow C), A \vdash C}}{(A \Rightarrow C) \lor (B \Rightarrow C), A \vdash C} \quad \lor g\ \dfrac{\Rightarrow g\ \dfrac{\text{H}\ \dfrac{}{C, B \vdash C} \quad \boxed{B \vdash A, C}}{(A \Rightarrow C), B \vdash C} \quad \Rightarrow g\ \dfrac{\text{H}\ \dfrac{}{C, B \vdash C} \quad \text{H}\ \dfrac{}{B \vdash B, C}}{(B \Rightarrow C), B \vdash C}}{(A \Rightarrow C) \lor (B \Rightarrow C), B \vdash C}}{(A \Rightarrow C) \lor (B \Rightarrow C), (A \lor B) \vdash C}}{(A \Rightarrow C) \lor (B \Rightarrow C) \vdash (A \lor B) \Rightarrow C}$$

L'arbre de dérivation n'est pas complet avec deux feuilles qui ne sont pas valides $A \vdash B, C$ et $B \vdash A, C$ qui correspondent à deux interprétations qui rendent faux le séquent : A vrai et B et C faux ou de manière symétrique B vrai et A et C faux.

Exercice 5 *Problème (8 points)*

On se place dans un langage dont la signature est composée d'un prédicat binaire $S(x, y)$, une constante $\mathtt{1}$ et deux symboles de fonction unaires $\mathtt{b}_0$ et $\mathtt{b}_1$. On introduit les formules suivantes

$$\begin{array}{l} S_0 : S(\mathtt{1}, \mathtt{b}_0(\mathtt{1})) \\ S_1 : \forall x, S(\mathtt{b}_0(x), \mathtt{b}_1(x)) \\ S_2 : \forall x\, y, S(x, y) \Rightarrow S(\mathtt{b}_1(x), \mathtt{b}_0(y)) \end{array}$$

1. Soit une interprétation I dont le domaine est formé des entiers naturels non nuls et dans laquelle les symboles sont interprétés de la manière suivante

   $$\mathtt{1}_I = 1 \qquad (\mathtt{b}_0)_I(x) = 2 \times x \qquad (\mathtt{b}_1)_I(x) = 2 \times x + 1$$

   On pourra remarquer que dans ce modèle, le terme représente le codage binaire du nombre (bit de poids faible en tête). Par exemple le nombre 12 a pour code binaire 1100 qui va correspondre au terme $\mathtt{b}_0(\mathtt{b}_0(\mathtt{b}_1(\mathtt{1})))$ dont la valeur dans notre interprétation est $2 \times 2 \times (2 \times 1 + 1)$ qui est bien égal à 12.

   Donner deux interprétations différentes de la relation S qui satisfont les trois formules S_0, S_1 et S_2.
2. On ajoute au langage un symbole d'égalité, montrer qu'il existe une interprétation dans laquelle les axiomes S_0, S_1, S_2 sont vrais ainsi que les axiomes de l'égalité mais dans laquelle la formule $\forall x\, y\, z, S(x, z) \wedge S(y, z) \Rightarrow x = y$ est fausse. Cette formule est-elle valide ?
3. Résoudre chacun des problèmes d'unification suivants entre littéraux. Si le problème a une solution, donner l'unificateur principal sinon donner les étapes de l'algorithme et expliquer la nature de l'échec.

   $$\begin{array}{rl} 1: & \neg S(\mathtt{b}_0(x), z) \stackrel{?}{=} \neg S(z, \mathtt{b}_0(\mathtt{b}_1(\mathtt{1}))) \\ 2: & S(\mathtt{b}_1(x), y) \stackrel{?}{=} S(y, x) \\ 3: & S(\mathtt{b}_1(x), y) \stackrel{?}{=} \neg S(\mathtt{b}_1(\mathtt{1}), \mathtt{1}) \\ 4: & S(\mathtt{b}_1(x), \mathtt{1}) \stackrel{?}{=} S(\mathtt{b}_1(\mathtt{b}_0(y)), x) \end{array}$$

4. Mettre les formules S_0, S_1 et S_2 en forme clausale.
5. En utilisant la méthode de résolution, montrer que la formule $\exists x, S(x, \mathtt{b}_0(\mathtt{b}_0(\mathtt{1})))$ est une conséquence logique des formules S_0, S_1 et S_2.
6. (**bonus**) En analysant les étapes de résolutions effectuées préalablement et les substitutions associées, trouver un ensemble fini d'instances closes des clauses utilisées qui soit insatisfiable. En déduire un terme clos t tel que $S_1, S_2, S_3 \models S(t, \mathtt{b}_0(\mathtt{b}_0(\mathtt{1})))$
7. Que constate-t-on si on veut prouver la formule $\exists x, S(x, \mathtt{1})$ par résolution à partir de S_0, S_1 et S_2 en utilisant la même méthode ?
8. La formule $(S_0 \wedge S_1 \wedge S_2) \Rightarrow \exists x, S(x, \mathtt{1})$ est-elle valide ? est-elle satisfiable ?

Correction :

1. *Un modèle évident est si $S = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire que $S(x, y)$ est vrai pour tous les entiers non nuls.*

   Un autre modèle (le plus petit) consiste à prendre $S_I = \{(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* | y = x + 1\}$ en effet, dans cette interprétation les formules sont vraies si :

— S_0 : $2 \times 1 = 1 + 1$,
— S_1 : *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $2n + 1 = 2n + 1$,
— S_2 : *pour tout* $n\,m \in \mathbb{N}^*$ *si* $m = n + 1$ *alors* $2m = 2n + 1 + 1$

ce qui se vérifie trivialement.

Un troisième modèle (intermédiaire) est $S_I = \{(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* | x < y\}$ *dont on peut vérifier de la même manière qu'il rend vraies les trois formules.*

2. *On prend une interprétation dans laquelle* S *est toujours vrai (donc les trois axiomes sont vérifiés) et le symbole d'égalité est interprété par l'égalité du domaine donc les axiomes d'égalité sont vrais. On choisit n'importe quel domaine avec plus de deux éléments, on choisit des valeurs pour* x *et* y *différentes et n'importe quelle valeur pour* z*. On a alors* $S(x, z) \wedge S(y, z)$ *vrai mais* $x = y$ *faux donc* $\forall x\, y\, z, S(x, z) \wedge S(y, z) \Rightarrow x = y$ *est faux dans cette interprétation et donc cette formule n'est pas valide.*
3. (a) *unifiable* $\{x \leftarrow \mathtt{b}_1(\mathtt{l}); z \leftarrow \mathtt{b}_0(\mathtt{b}_1(\mathtt{l}))\}$
   (b) *pas unifiable car il faudrait* $x \stackrel{?}{=} \mathtt{b}_1(x)$ *qui n'a pas de solution*
   (c) *pas unifiable (littéral et sa négation)*
   (d) *pas unifiable car il faudrait* $\mathtt{b}_0(y) \stackrel{?}{=} \mathtt{l}$
4. *La mise en forme clausale est triviale (les formules sont déjà universelles)*

$$C_0 : S(\mathtt{l}, \mathtt{b}_0(\mathtt{l})) \quad C_1 : S(\mathtt{b}_0(x), \mathtt{b}_1(x)) \quad C_2 : \neg S(x, y) \vee S(\mathtt{b}_1(x), \mathtt{b}_0(y))$$

5. *soit la formule* $A \stackrel{\text{def}}{=} \exists x, S(x, \mathtt{b}_0(\mathtt{b}_0(\mathtt{l})))$
   — *On met* $\neg A$ *en forme clausale on a* $\neg A \equiv \forall x, \neg S(x, \mathtt{b}_0(\mathtt{b}_0(\mathtt{l})))$ *et donc* $C_3 : \neg S(z, \mathtt{b}_0(\mathtt{b}_0(\mathtt{l})))$ *(après renommage de* x *en* z*)*
   — *On unifie* C_2 *et* C_3*, avec la substitution* $\{y \leftarrow \mathtt{b}_0(\mathtt{l}); z \leftarrow \mathtt{b}_1(x); x \leftarrow x'\}$ *on obtient* $C_4 : \neg S(x', \mathtt{b}_0(\mathtt{l}))$
   on unifie C_4 *avec* C_0 *avec la substitution* $\{x' \leftarrow \mathtt{l}\}$ *et on obtient la clause vide.*
6. *On peut reconstruire la résolution sur les instances closes :*

$$\dfrac{\dfrac{\neg S(\mathtt{l}, \mathtt{b}_0(\mathtt{l})) \vee S(\mathtt{b}_1(\mathtt{l}), \mathtt{b}_0(\mathtt{b}_0(\mathtt{l}))) \qquad \neg S(\mathtt{b}_1(\mathtt{l}), \mathtt{b}_0(\mathtt{b}_0(\mathtt{l})))}{\neg S(\mathtt{l}, \mathtt{b}_0(\mathtt{l}))} \qquad S(\mathtt{l}, \mathtt{b}_0(\mathtt{l}))}{\bot}$$

Les instances closes contradictoires sont donc

$$\neg S(\mathtt{l}, \mathtt{b}_0(\mathtt{l})) \vee S(\mathtt{b}_1(\mathtt{l}), \mathtt{b}_0(\mathtt{b}_0(\mathtt{l}))), \neg S(\mathtt{b}_1(\mathtt{l}), \mathtt{b}_0(\mathtt{b}_0(\mathtt{l}))) \text{ et } S(\mathtt{l}, \mathtt{b}_0(\mathtt{l}))$$

On a donc $\neg S(\mathtt{l}, \mathtt{b}_0(\mathtt{l})) \vee S(\mathtt{b}_1(\mathtt{l}), \mathtt{b}_0(\mathtt{b}_0(\mathtt{l}))), S(\mathtt{l}, \mathtt{b}_0(\mathtt{l})) \models S(\mathtt{b}_1(\mathtt{l}), \mathtt{b}_0(\mathtt{b}_0(\mathtt{l})))$ *et donc a fortiori* $S_0, S_2 \models S(\mathtt{b}_1(\mathtt{l}), \mathtt{b}_0(\mathtt{b}_0(\mathtt{l})))$*. Le terme* t *qui convient est* $\mathtt{b}_1(\mathtt{l})$*.*

7. *Lorsque l'on met la formule* $\neg\exists x, S(x, \mathtt{l})$ *en forme clausale, on obtient* $\neg S(x, \mathtt{l})$*, cette clause ne s'unifie à aucune des clauses positives de* C_0*,* C_1*,* C_2*, il n'y a donc pas moyen de dériver la clause vide en utilisant* C_3*. Comme on a vu que les formules* S_0, S_1, S_2 *avaient un modèle, il n'y a pas non plus de manière de dériver la clause vide à partir de* C_0*,* C_1 *et* C_2*.*
8. *La formule* $(S_0 \wedge S_1 \wedge S_2) \Rightarrow \exists x, S(x, \mathtt{l})$ *n'est pas valide, si on reprend le modèle du successeur sur les entiers strictement positifs, on constate qu'il rend vrai les formules* S_0, S_1, S_2 *mais par contre il rend faux la formule* $\exists x, S(x, \mathtt{l})$*. Par contre cette formule est satisfiable si on prend le modèle dans lequel* S *est vrai partout.*

Rappel des règles du système G (propositionnel)

hypothèse	$(\textsc{Hyp})\dfrac{}{A, \Gamma \vdash \Delta, A}$	
	gauche	droite
$\bot$	$\dfrac{}{\bot, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \bot}$
$\top$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\top, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{}{\Gamma \vdash \Delta, \top}$
$\neg$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$
$\wedge$	$\dfrac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}$
$\vee$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta \qquad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$
$\Rightarrow$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \Rightarrow B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B}$