Syntaks og semantik

Lektion 7

6 marts 2007

Fra sidst

1. Kontekstfrie grammatikker
2. Pushdown-automater
3. Lukningsegenskaber

Definition 2.2: En kontekstfri grammatik (CFG) er en 4-tupel $G = (V, \Sigma, R, S)$, hvor delene er

1. V : en endelig mængde af variable
2. Σ : en endelig mængde af terminaler, med $V \cap \Sigma = \emptyset$
3. $R : V \to \mathcal{P}\big((V \cup \Sigma)^*\big)$: produktioner / regler
4. $S \in V$: startvariablen

– produktioner skrives $A \to w$ i stedet for $w \in R(A)$

- Hvis $u, v, w \in (V \cup \Sigma)^*$ er ord og $A \to w$ er en produktion, siges uAv at frembringe uwv: $uAv \Rightarrow uwv$.
- Hvis $u, v \in (V \cup \Sigma)^*$ er ord, siges u at derivere v: $u \overset{*}{\Rightarrow} v$, hvis $u = v$ (!) eller der findes en følge $u_1, u_2, \dots, u_k$ af ord således at $u \Rightarrow u_1 \Rightarrow u_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow u_k \Rightarrow v$.
- Sproget som G genererer er $[\![G]\!] = \{w \in \Sigma^* \mid S \overset{*}{\Rightarrow} w\}$.

– dvs. et ord $w \in \Sigma^*$ genereres af G hvis og kun hvis der findes en derivation $S \Rightarrow w_1 \Rightarrow w_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow w_k \Rightarrow w$, hvor alle $w_i \in (V \cup \Sigma)^*$.

Eksempel: Opgave 2.6 d (ca.)

$$
\begin{aligned}
S &\to A\#T\#A \\
T &\to aTa \mid bTb \mid \#A\# \\
A &\to aA \mid bA \mid \varepsilon \mid A\#A
\end{aligned}
$$

Genererer sproget

$$
\{x_1\#x_2\#\ldots\#x_k \mid k \geq 5, \text{alle } x_i \in \{a,b\}^*, \\
\text{og } x_i = x_j^R \text{ for to indices } i \neq j\}
$$

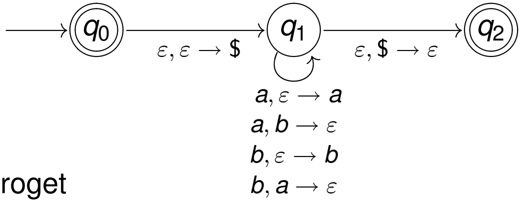
Definition 2.13: En **pushdown-automat** (**PDA**) er en 6-tupel $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$, hvor delene er

1. Q : en endelig mængde af tilstande
2. Σ : input-alfabetet
3. Γ : stack-alfabetet
4. $\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma_\varepsilon)$: transitionsfunktionen
5. $q_0 \in Q$: starttilstanden
6. $F \subseteq Q$: mængden af accepttilstande

M siges at **acceptere** et ord $w \in \Sigma^*$ hvis der findes $m \in \mathbb{N}$ og $w_1, w_2, \dots, w_m \in \Sigma_\varepsilon$, $r_0, r_1, \dots, r_m \in Q$ og $s_0, s_1, \dots, s_m \in \Gamma^*$ således at $w = w_1 w_2 \dots w_m$ og

1. $r_0 = q_0$ og $s_0 = \varepsilon$,
2. for alle $i = 0, 1, \dots, m-1$ findes $a, b \in \Gamma_\varepsilon$ og $t \in \Gamma^*$ som opfylder $s_i = at$, $s_{i+1} = bt$ og $(r_{i+1}, b) \in \delta(r_i, w_{i+1}, a)$, og
3. $r_m \in F$.

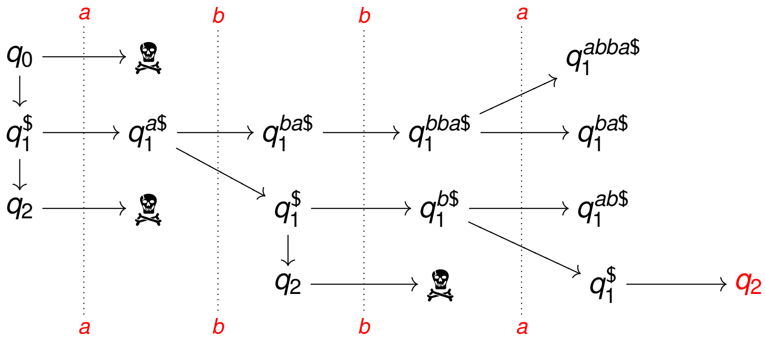
Eksempel:



Genkender sproget

$$\{w \in \{a,b\}^* \mid \text{antallet af } a \text{ i } w = \text{antallet af } b \text{ i } w\}$$

At læse strengen *abba*:



Definition: Et sprog siges at være kontekstfrit hvis der findes en CFG der genererer det.

Sætning 2.20: Et sprog er kontekstfrit hvis og kun hvis der findes en PDA der genkender det.

Bevis lige om lidt.

Sætning: Klassen af kontekstfrie sprog er lukket under $\cup$, $\circ$ og *.

Bevis: (Opgave 2.8) Lad A_1 og A_2 være kontekstfrie sprog over et fælles alfabet Σ.

- $\cup$: Lad $G_1 = (V_1, \Sigma, R_1, S_1)$, $G_2 = (V_2, \Sigma, R_2, S_2)$ være CFGs med $[\![G_1]\!] = A_1$ og $[\![G_2]\!] = A_2$. Konstruér en ny CFG $G = (V, \Sigma, R, S)$ ved $V = V_1 \cup V_2 \cup \{S\}$ og $R = R_1 \cup R_2 \cup \{S \to S_1 \mid S_2\}$. Da er $[\![G]\!] = A_1 \cup A_2$.
- $\circ$: Lad $M_1 = (Q_1, \Sigma, \Gamma_1, \delta_1, q_1, F_1)$, $M_2 = (Q_2, \Sigma, \Gamma_2, \delta_2, q_2, F_2)$ være PDAs med $[\![M_1]\!] = A_1$ og $[\![M_2]\!] = A_2$. Antag at $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. Konstruér en ny PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, F_2)$ ved $Q = Q_1 \cup Q_2$, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ og $\delta = \delta_1 \cup \delta_2 \cup \{(q_f, \varepsilon, \varepsilon) \to (q_2, \varepsilon) \mid q_f \in F_1\}$. Da er $[\![M]\!] = A_1 \circ A_2$.
- $*$: Lad $G_1 = (V_1, \Sigma, R_1, S_1)$ være en CFG med $[\![G_1]\!] = A_1$. Konstruér en ny CFG $G = (V, \Sigma, R, S)$ ved $V = V_1 \cup \{S\}$ og $R = \{S \to \varepsilon \mid SS \mid S_1\}$. Da er $[\![G]\!] = A_1^*$.

Kontekstfrie grammatikker og pushdown-automater

4. Ethvert kontekstfrit sprog genkendes af en PDA
5. Ethvert sprog genkendt af en PDA er kontekstfrit

Lemma 2.21: Lad Σ være et alfabet og $A \subseteq \Sigma^*$ et kontekstfrit sprog. Da findes en PDA P med $[\![P]\!] = A$.

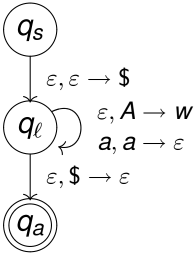
Bevis: Lad $G = (V, \Sigma, R, S)$ være en CFG med $[\![G]\!] = A$.
Idéen er at PDAen, givet en inputstreng s, nondeterministisk forsøger at finde en derivation for s i G:

1. Push S på stacken
2. Hvis topsymbolet på stacken er en variabel A: Pop A og push højresiden w af en produktion $A \to w$ i R. (Dø hvis der ikke er nogen produktion $A \to w$ i R.)
3. Hvis topsymbolet på stacken er en terminal a: Sammenlign med næste inputsymbol. Hvis de er ens, pop a. Hvis de ikke er ens, dø.
4. Gentag step 2 og 3 indtil stacken er tom.

Lemma 2.21: Lad Σ være et alfabet og $A \subseteq \Sigma^*$ et kontekstfrit sprog. Da findes en PDA P med $[\![P]\!] = A$.

Bevis: Lad $G = (V, \Sigma, R, S)$ være en CFG med $[\![G]\!] = A$.
Vi konstruerer først en “generaliseret PDA”
$P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_s, F)$, der kan pushe strenge i stedet for bare symboler. Lad $Q = \{q_s, q_\ell, q_f\}$, $F = \{q_a\}$ og $\Gamma = V \cup \Sigma \cup \{\$\}$.
Lad

$$\begin{aligned}
\delta(q_s, \varepsilon, \varepsilon) &= \{(q_\ell, S\$)\} \\
\delta(q_\ell, \varepsilon, A) &= \{(q_\ell, w) \mid w \in R(A)\} \quad \text{for alle } A \in V \\
\delta(q_\ell, a, a) &= \{(q_\ell, \varepsilon)\} \quad \text{for alle } a \in \Sigma \\
\delta(q_\ell, \varepsilon, \$) &= \{(q_a, \varepsilon)\} \\
\delta(q, a, b) &= \emptyset \quad \text{for alle andre}
\end{aligned}$$



Lav til sidst P om til en “almindelig” PDA ved at erstatte enhver transition $q \xrightarrow{a,b\to s_1 s_2 \dots s_n} r$ med (nye tilstande og) en følge
$q \xrightarrow{a,b\to s_n} q_1 \xrightarrow{\varepsilon,\varepsilon\to s_{n-1}} q_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow q_{n-1} \xrightarrow{\varepsilon,\varepsilon\to s_1} r$.

Lemma 2.27: Lad Σ være et alfabet og P en PDA over Σ. Da findes en CFG G over Σ med $[\![G]\!] = [\![P]\!]$.

Bevis: Lad $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$. Vi konstruerer $G = (V, \Sigma, R, S)$:

1. Sørg for at P kun har én accepttilstand q_a og at stacken tømmes før P går i q_a.
2. Lad $V = \{A_{pq} \mid p, q \in Q\}$, og sørg for at A_{pq} deriverer præcist de strenge som bringer P fra p med tom stack til q med tom stack.
3. Lad $S = A_{q_0 q_a}$. Voilà!

Lemma 2.27: Lad Σ være et alfabet og P en PDA over Σ. Da findes en CFG G over Σ med $[\![G]\!] = [\![P]\!]$.

Bevis: Lad $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$. Vi konstruerer $G = (V, \Sigma, R, S)$:

1. Sørg for at P kun har én accepttilstand q_a og at stacken tømmes før P går i q_a.
   Nyt stacksymbol \$. Tre nye tilstande: q_s, q_e og q_a. Nye transitioner: $q_s \xrightarrow{\varepsilon,\varepsilon\to\$} q_0$, $q \xrightarrow{\varepsilon,\varepsilon\to\varepsilon} q_e$ for alle $q \in F$, $q_e \xrightarrow{\varepsilon,a\to\varepsilon} q_e$ for alle $a \in \Sigma$, og $q_e \xrightarrow{\varepsilon,\$\to\varepsilon} q_a$.

   Sørg for at enhver transition *enten* pusher *eller* popper.

   - Erstat enhver transition $q \xrightarrow{a,b\to c} r$ med $q \xrightarrow{a,b\to\varepsilon} q_1 \xrightarrow{\varepsilon,\varepsilon\to c} r$
   - Erstat enhver transition $q \xrightarrow{a,\varepsilon\to\varepsilon} r$ med $q \xrightarrow{a,\varepsilon\to x} q_1 \xrightarrow{\varepsilon,x\to\varepsilon} r$ for et eller andet symbol $x \in \Gamma$.

Lemma 2.27: Lad Σ være et alfabet og P en PDA over Σ. Da findes en CFG G over Σ med $[\![G]\!] = [\![P]\!]$.

Bevis: Lad $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$. Vi konstruerer $G = (V, \Sigma, R, S)$:

2. Lad $V = \{A_{pq} \mid p, q \in Q\}$, og sørg for at A_{pq} deriverer præcist de strenge som bringer P fra p med tom stack til q med tom stack.
   - Lav en produktion $A_{pp} \to \varepsilon$ for alle $p \in Q$ (terminering)
   - Lav en produktion $A_{pq} \to A_{pr} A_{rq}$ for alle $p, q, r \in Q$ (rekursion)
   - For alle $p, q, r, s \in Q$: Hvis $p \xrightarrow{a,\varepsilon \to t} r$ og $s \xrightarrow{b,t \to \varepsilon} q$ for nogle $a, b \in \Sigma_\varepsilon$ og et $t \in \Gamma$: Lav en produktion $A_{pq} \to a A_{rs} b$. (produktion)

– der skal *argumenteres* for at dette giver det rigtige resultat!