Eléments de logique pour l'informatique
Exercices I

Uli Fahrenberg
`uli@lmf.cnrs.fr`

d'après Christine Paulin

2 septembre 2025

1 Calcul Propositionnel

Exercice 1.1 La contraposée d'une formule $P \Rightarrow Q$ est la formule $\neg Q \Rightarrow \neg P$, la réciproque est la formule $Q \Rightarrow P$, la contraposée de la réciproque est la formule $\neg P \Rightarrow \neg Q$.

1. Exprimer par des phrases ces 4 formules en prenant pour P la propriété « il est midi » et pour Q la propriété « j'ai faim ».
2. Pour P et Q arbitraires construire les tables de vérité de ces quatre formules, lesquelles sont équivalentes ?
3. Attention aux usages courants qui ne respectent pas toujours les règles de la logique. Soit la formule P « Max a bu » et la formule Q « Max ne peut pas conduire ». On suppose que la formule $P \Rightarrow Q$ est vérifiée. Peut-on en déduire que si Max n'a pas bu alors il peut conduire ?

Exercice 1.2 *Table de vérité*

Soient les formules $A \stackrel{\text{def}}{=} P \wedge Q \Rightarrow R$ et $B \stackrel{\text{def}}{=} P \Rightarrow Q \Rightarrow R$.

1. Ajouter des parenthèses autour des connecteurs sans changer le sens de ces formules.
2. Donner les tables de vérité de ces deux formules. Que constate-t-on ?
3. Reprendre les mêmes questions avec les formules $P \vee Q \Rightarrow R$ et les formules $(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$.

Exercice 1.3 *Partiel 2012.*
Un homme qui semble divaguer déclare à toute la clientèle d'un café :

1. Le jour où je ne bois pas et où je dors, je ne suis pas content.
2. Le jour où je bois, je ne suis pas content et je dors.
3. Le jour où je ne mange pas, ou bien je ne suis pas content, ou bien je dors ou les deux.
4. Le jour où je mange, ou bien je suis content, ou bien je bois ou les deux.
5. Aujourd'hui, je suis content.

Questions

1. Introduire des variables propositionnelles pour représenter les principales notions et donner les formules correspondantes à chacune des affirmations précédentes. Combien y-a-t-il a priori de situations possibles ?
2. On considère que toutes les affirmations précédentes sont vraies.

(a) Par raisonnement élémentaire à partir des affirmations, montrer qu'il n'a pas bu.
(b) Répondre en les justifiant par un raisonnement ou une table de vérité aux questions suivantes : a-t-il mangé ? a-t-il dormi ?

Exercice 1.4 *Structure arborescente des formules.*
Soit la formule A définie comme $\neg P \Rightarrow Q \vee \neg(P \vee R)$.

1. Parenthéser la formule A en préservant le sens
2. Donner la forme arborescente de cette formule.
3. Pour quelles valeurs de P, Q et R, la formule A est-elle vraie ? (on essaiera de répondre sans construire l'ensemble de la table de vérité).

Exercice 1.5 Dans la suite X, Y et Z sont des variables propositionnelles (symboles de prédicat d'arité 0) **distinctes**. Dire pour chacune des affirmations suivantes si elle est vraie ou fausse.

Affirmation	vrai	faux
$A = B$ représente le fait que les deux formules sont syntaxiquement égales (même représentation).		
$X \vee Y = Y \vee X$		
$X \Rightarrow Y \wedge Z = X \Rightarrow (Y \wedge Z)$		
$A \equiv B$ représente le fait que les deux formules sont sémantiquement égales (même table de vérité).		
$(X \vee Y) \wedge X \equiv X$		
$(X \wedge Y) \vee Z \equiv X \vee Z$		
$\neg(X \Rightarrow Y) \equiv \neg X \wedge \neg Y$		
Si $X \Rightarrow Y$ est faux alors X est vrai.		
Si $X \vee Y$ est vrai alors Y est vrai.		
Si X est vrai alors $(\neg X) \Rightarrow Y$ est faux.		
Une formule est *satisfiable* s'il existe des valeurs pour les variables propositionnelles qui la rendent vraie. Une formule est *valide* si elle est vraie quelles que soient les valeurs des variables propositionnelles.		
La formule $X \Rightarrow \neg Y$ est satisfiable		
La formule $X \Rightarrow \neg Y$ est valide		

Autres énigmes

Exercice 1.6 *Enigme, d'après Smullyan, partiel 2013*
Une aventurière découvre 3 coffres numérotés de 1 à 3. Un seul de ces coffres contient un trésor qu'il faut découvrir, les autres coffres sont piégés. Chaque coffre comporte une inscription :

1. Le trésor est dans ce coffre
2. Le trésor n'est pas dans ce coffre
3. Le trésor n'est pas dans le coffre 1

Questions. On introduit des variables propositionnelles P_1 pour représenter le fait que le trésor est dans le coffre 1 et P_2 pour représenter le fait que le trésor est dans le coffre 2.

1. Donner une formule qui utilise les variables P_1 et P_2 et qui est vraie exactement lorsque le trésor est dans le coffre 3.
2. Donner une formule qui utilise les variables P_1 et P_2 et qui représente le fait que le trésor est exactement dans un des coffres.

3. Donner des formules I_1, I_2 et I_3 qui utilisent les variables P_1 et P_2 et qui représentent les inscriptions sur chacun des coffres.
4. Sachant qu'une seule des formules I_1, I_2 et I_3 est vraie, en déduire dans quel coffre est caché le trésor.

Exercice 1.7 *Enigme.* Trois collègues, Albert, Bernard et Charles déjeunent ensemble chaque jour ouvrable. Les affirmations suivantes sont vraies :

1. Si Albert commande un dessert, Bernard en commande un aussi.
2. Chaque jour, soit Bernard, soit Charles, mais pas les deux, commandent un dessert.
3. Albert ou Charles, ou les deux, commandent chaque jour un dessert.
4. Si Charles commande un dessert, Albert fait de même.

Questions

1. Exprimer les données du problème comme des formules propositionnelles
2. Que peut on en déduire sur qui commande un dessert ?
3. Pouvait-on arriver à la même conclusion en supprimant l'une des quatre affirmations ?

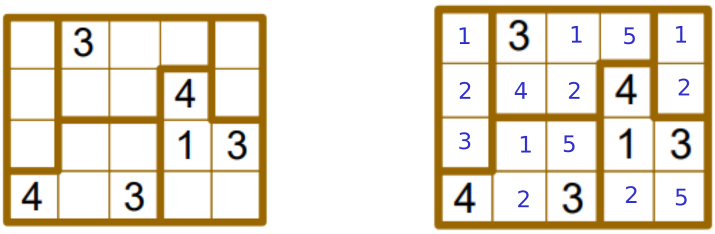
Exercice d'approfondissement

Exercice 1.8 *Modélisation propositionnelle du jeu de Tectonic (d'après session 2 2022-23)*

Le but de cet exercice est de modéliser le jeu de tectonic en logique propositionnelle.

Ce jeu se joue sur une grille découpée en zones de 1 à 5 cases. Il s'agit de compléter chaque case de chaque zone par un chiffre entre 1 et la taille de la zone. Deux cases qui se touchent par un bord ou un coin ne peuvent pas avoir le même chiffre. Par exemple si le chiffre 4 se trouve sur une case, il ne peut par apparaître sur les 8 cases qui l'entourent.

La figure ci-dessous présente un exemple de grille et sa solution.



On manipule des *cases*, avec une relation de *deux cases qui se touchent par un bord ou un coin* et des *valeurs* (les chiffres entre 1 et 5).

L'organisation spatiale des cases dans des *zones* et leur taille varie d'un problème à l'autre, on va donc les traiter de manière abstraite.

En logique propositionnelle, il n'y a pas de quantificateur dans les formules (juste les connecteurs $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$) et les seuls symboles dans la signature sont des variables propositionnelles.

On introduit une variable propositionnelle X_p^i pour chaque case p et chaque valeur i possible. La variable X_p^i sera vraie dans une grille où la solution pour la case p est le chiffre i.

Les notions de case, de zones, d'adjacence ou de max sont des objets mathématiques qui dépendent du problème :

— `case` est l'ensemble des cases

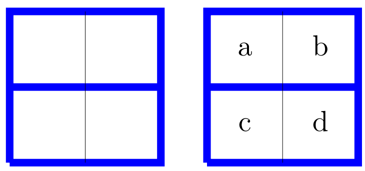
— $\mathtt{max}$ est ue fonction qui associe à chaque case un entier entre 1 et 5
— $\mathtt{adj} \subseteq \mathtt{case} \times \mathtt{case}$ est l'ensemble des couples de cases qui se touchent
— $\mathtt{zone} \subseteq \mathtt{case} \times \mathtt{case}$ est l'ensemble des couples de cases qui sont dans la même zone

L'ensemble des variables propositionnelles pour modéliser une grille est

$$\{X_p^i \mid p \in \mathtt{case}, 1 \leq i \leq \mathtt{max}(p)\}$$

L'ensemble $\mathcal{E}$ des formules propositionnelles qui expriment le fait qu'on peut compléter toutes les cases de la grille par au moins un chiffre compris entre 1 et la taille de la zone s'écrira :
$\{X_p^1 \vee \ldots \vee X_p^{\mathtt{max}(p)} | p \in \mathtt{case}\}$

1. Sur l'exemple de grille donné, indiquer le nombre de variables propositionnelles nécessaires et le cardinal de l'ensemble des formules $\mathcal{E}$
2. Donner dans le cas général l'ensemble des formules qui expriment que deux cases différentes qui sont dans la même zone ou qui sont adjacentes ne peuvent pas avoir la même valeur (attention, en calcul propositionnel, il n'y a pas d'égalité dans les formules engendrées).
3. Donner dans le cas général l'ensemble des formules qui expriment qu'une case ne peut pas avoir deux valeurs différentes.
4. On suppose que l'on a construit un ensemble X de formules propositionnelles pour toutes les conditions énoncées ci-dessus dans le cas de la grille de l'exemple. On veut maintenant résoudre le problème en utilisant des outils logiques.
   (a) Quelles formules faut-il ajouter à la modélisation ?
   (b) A quelle question logique sur l'ensemble de formules obtenu correspond une solution du jeu ?
5. On s'intéresse à une grille très simple avec deux zones de deux cases.



   On note les cases a, b, c, d (voir schéma).
   (a) Pour cette grille, expliciter les relations d'adjacence, de zones ainsi que la fonction $\mathtt{max}$.
   (b) On veut montrer que cette grille n'a pas de solution. Donner un ensemble de formules propositionnelles qui correspondent aux règles du jeu (comme vu aux questions précédentes), qui concernent uniquement les cases a, b et c et à partir desquelles vous établirez une contradiction (par la méthode de votre choix).

Exercice 1.9 *Coloriage de graphe*

Le problème de coloriage de graphe consiste à se donner un ensemble fini de couleurs et à associer à chaque sommet d'un graphe une couleur de manière à ce que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur.

Pour chaque couleur $c \in C$ on se donne un ensemble de variables propositionnelles (x_i^c) avec (x_i^c) qui sera vrai si le sommet i a la couleur c.

— Combien y-a-t-il de variables pour un graphe de n sommets et k couleurs ?
— Proposer un ensemble de formules tel que toute interprétation qui rend vraies ces formules correspond à un coloriage du graphe.
— Soit un graphe infini avec un nombre dénombrable de sommets, montrer que si tous les sous-graphes finis sont coloriables alors le graphe complet est coloriable.