Théorie des langages rationnels : THLR
CM 9

Uli Fahrenberg

EPITA Rennes

S3 2022

Aperçu

Programme du cours

1. Mots, langages
2. Langages rationnels, expressions rationnelles
3. Automates finis
4. Langages non-rationnels
5. Langages reconnaissables, minimisation

Propriétés de clôture

Propriétés de clôture

Théorème

Les langages rationnels sont clos par

- *union, concaténation, étoile,*
- *préfixe, suffixe, facteur,*
- *intersection et complémentation.*

Propriétés de clôture

Théorème

Les langages rationnels sont clos par

- *union, concaténation, étoile,* ✓
- *préfixe, suffixe, facteur,* ? ✓
- *intersection et complémentation.* ? ✓

Clôture par préfixe etc.

Lemme

Soit $L \subseteq \Sigma^*$ un langage rationnel, alors $\mathsf{Pref}(L)$, $\mathsf{Suff}(L)$ et $\mathsf{Fact}(L)$ sont rationnels aussi.

Démonstration.

1. Soit A un automate fini tel que $L = L(A)$.
2. Notons $A = (\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$.

Clôture par préfixe etc.

Lemme

Soit $L \subseteq \Sigma^*$ un langage rationnel, alors Pref(L), Suff(L) *et* Fact(L) *sont rationnels aussi.*

Démonstration.

1. Soit A un automate fini tel que $L = L(A)$.
2. Notons $A = (\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$.
3. Soient
   - $\mathrm{pref}(A) = (\Sigma, Q, Q_0, Q, \delta)$,
   - $\mathrm{suff}(A) = (\Sigma, Q, Q, F, \delta)$,
   - $\mathrm{fact}(A) = (\Sigma, Q, Q, Q, \delta)$.
4. Alors $L(\mathrm{pref}(A)) = \mathrm{Pref}(L(A))$, $L(\mathrm{suff}(A)) = \mathrm{Suff}(L(A))$ et $L(\mathrm{fact}(A)) = \mathrm{Fact}(L(A))$.

Clôture par complémentation

Lemme

Soit $L \subseteq \Sigma^*$ un langage rationnel, alors $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$ est rationnel aussi.

Démonstration.

1. Soit A un automate fini tel que $L = L(A)$.

Clôture par complémentation

Lemme

Soit $L \subseteq \Sigma^*$ un langage rationnel, alors $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$ est rationnel aussi.

Démonstration.

1. Soit A un automate fini déterministe complet tel que $L = L(A)$.

Clôture par complémentation

Lemme

Soit $L \subseteq \Sigma^*$ un langage rationnel, alors $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$ est rationnel aussi.

Démonstration.

1. Soit A un automate fini déterministe complet tel que $L = L(A)$.
2. Notons $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$.

Clôture par complémentation

Lemme

Soit $L \subseteq \Sigma^*$ un langage rationnel, alors $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$ est rationnel aussi.

Démonstration.

1. Soit A un automate fini déterministe complet tel que $L = L(A)$.
2. Notons $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$.
3. Soit $A' = (\Sigma, Q, q_0, Q \setminus F, \delta)$.
4. Alors $L(A') = \overline{L(A)} = \overline{L}$.

Clôture par intersection

Corollaire

Soient L_1 et L_2 des langages rationnels, alors $L_1 \cap L_2$ l'est aussi.

Démonstration.

Par la loi de de Morgan,

Clôture par intersection

Corollaire

Soient L_1 et L_2 des langages rationnels, alors $L_1 \cap L_2$ l'est aussi.

Démonstration.

Par la loi de de Morgan, $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$.

- aussi, construction directe par produit d'automates finis déterministes complets

Minimisation

Minimisation

Soit L un langage rationnel. On s'intéresse aux questions d'existence et unicité d'un automate fini minimal qui reconnait L.

- très compliqué pour des automates non-déterministes
- p.ex. [Brzozowski, Tamm : Theory of átomata. Theor. Comput. Sci. 539 : 13-27 (2014)]
- mais pour des automates finis déterministes :

Théorème

Pour tout langage rationnel L il existe un unique automate fini déterministe complet A avec nombre d'états minimal t.q. $L = L(A)$.

Indistinguabilité

Soit $A = (\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$ un automate fini.

- on note L_q, pour tout $q \in Q$, le langage reconnu par A depuis état initial q

Définition

Deux états $q_1, q_2 \in Q$ sont indistinguables si $L_{q_1} = L_{q_2}$.

- si deux états sont indistinguables, on peut les identifier
- écrivons $q_1 \sim q_2$ si q_1 et q_2 sont indistinguables : une relation d'équivalence dans Q

Théorème

Si A est déterministe complet, alors l'automate quotient $A_{/\sim}$ est l'automate fini déterministe complet minimal pour $L(A)$.

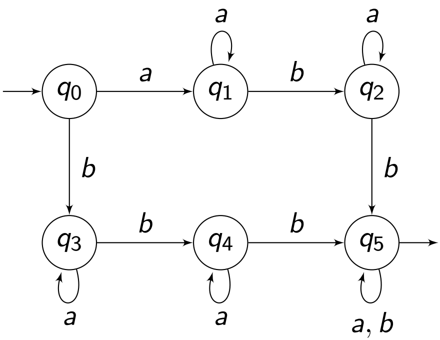
L'automate quotient

Définition

Soit $A = (\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$ un automate fini et $R \subseteq Q \times Q$ une relation d'équivalence. L'automate quotient de A sur R est $A_{/R} = (\Sigma, Q', Q'_0, F', \delta')$ defini comme suite :

- $Q' = Q_{/R} = \{[q]_R \mid q \in Q\}$, l'ensemble de classes d'équivalence de R
- $Q'_0 = \{[q_0]_R \mid q_0 \in Q_0\}$
- $F' = \{[q_f]_R \mid q_f \in F\}$
- $\delta' = \{([p]_R, a, [q]_R) \mid (p, a, q) \in \delta\}$

Exemple (sur tableau)



Démonstration

- rappel : $q_1 \sim q_2$ ssi $L_{q_1} = L_{q_2}$

Théorème (rappel)

Soit A un automate fini déterministe complet, alors $A_{/\sim}$ est l'unique automate fini déterministe complet minimal pour $L(A)$.

Démonstration.

1. $A_{/\sim}$ est déterministe complet et $L(A_{/\sim}) = L(A)$. *(Pourquoi ?)*
2. On finit la démonstration par le lemme suivant.

Lemme

Si A et A' sont deux automates finis déterministes complets avec $L(A) = L(A')$, alors $A_{/\sim}$ et $A'_{/\sim}$ sont isomorphes.

- *Qu'est-ce que c'est « isomorphe » ?*
- *Pourquoi le lemme démontre-t-il le théorème ?*

Démonstration, suite

- rappel : $q_1 \sim q_2$ ssi $L_{q_1} = L_{q_2}$

Lemme (rappel)

Si A et A' sont deux automates finis déterministes complets avec $L(A) = L(A')$, alors $A_{/\sim}$ et $A'_{/\sim}$ sont isomorphes.

Démonstration.

1. On note $A_{/\sim} = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ et $A'_{/\sim} = (\Sigma, Q', q'_0, F', \delta')$.
2. Soit $R \subseteq Q \times Q'$ la relation défini par $q\,R\,q'$ ssi $L_q = L_{q'}$.
3. $L_{q_0} = L(A_{/\sim}) = L(A) = L(A') = L(A'_{/\sim}) = L_{q'_0}$, alors $q_0\,R\,q'_0$.
4. $q_1\,R\,q'$ et $q_2\,R\,q' \Rightarrow L_{q_1} = L_{q'} = L_{q_2} \Rightarrow q_1 \sim q_2 \Rightarrow q_1 = q_2$;
5. $q\,R\,q'_1$ et $q\,R\,q'_2 \Rightarrow L_{q'_1} = L_q = L_{q'_2} \Rightarrow q'_1 \sim q'_2 \Rightarrow q'_1 = q'_2$;
6. alors R est une bijection.
7. *Est-ce qu'on a fini ?*

Myhill-Nerode

- même chose qu'avant, sans passer par un automate :

Définition

Soit $L \subseteq \Sigma^*$ et $u, v \in \Sigma^*$, alors u et v sont indistinguables dans L si pour tout $w \in \Sigma^*$, $uw \in L \iff vw \in L$.

- écrivons $u \equiv_L v$ si u et v sont indistinguables dans L : une relation d'équivalence dans Σ^*

Théorème (Myhill-Nerode)

Un langage $L \subseteq \Sigma^*$ est rationnel ssi le nombre n de classes d'équivalence de $\equiv_L$ est fini. Dans ce cas, n est aussi le nombre d'états de l'automate fini déterministe complet minimal reconnaissant L.

- voir le poly pour une démonstration
- l'automate a comme états les classes d'équivalence de $\equiv_L$

Algorithme de minimisation

Soit $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ un automate fini déterministe complet.

- rappel : $q_1 \sim q_2$ ssi $L_{q_1} = L_{q_2}$

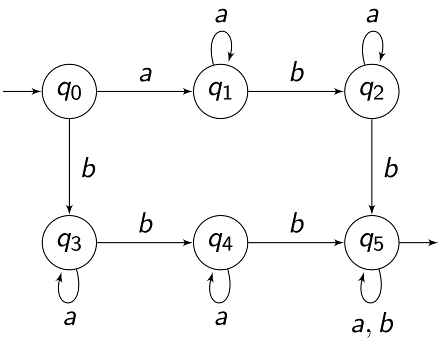
Théorème (rappel)

$A_{/\sim}$ est l'unique automate fini déterministe complet minimal pour $L(A)$.

Algorithme

1. Initialiser avec deux classes d'équivalence : F et $Q \setminus F$
2. Itérer jusqu'à stabilisation :
   - pour tout $p, q \in Q$ dans une même classe d'équivalence C :
   - s'il existe $p \xrightarrow{a} p'$ et $q \xrightarrow{a} q'$ tel que p' et q' ne sont pas dans la même classe :
   - séparer C en classes $C_1 \ni p$ et $C_2 \ni q$

Exemple (sur tableau)



Égalité est décidable

Corollaire

Il existe un algorithme qui, pour automates finis A_1 et A_2, décide si $L(A_1) = L(A_2)$.

Démonstration.

1. Convertir A_1 et A_2 en automates finis déterministes complets minimaux.
2. Décider si A_1 et A_2 sont isomorphes.


That's all Folks!