

Syntaks og semantik

Lektion 14

29 april 2008

Eksempler Fikspunkter Partielt ordnede mængder Grænseværdier Domæner Kontinuitet Sætningen Anvendelser

Rekursive definitioner og fikspunkter

- 1 Eksempler
- 2 Fikspunkter
- 3 Partielt ordnede mængder
- 4 Grænseværdier
- 5 Domæner
- 6 Kontinuerte funktioner
- 7 Fikspunktssætningen
- 8 Anvendelser

En (lille) kontekstfri grammatik:

$$S \rightarrow aSb \mid c \mid S$$

Oversæt direkte til en rekursiv sproglikning:

$$L_S = \{a\} \circ L_S \circ \{b\} \cup \{c\} \cup L_S$$

At finde en løsning til dén likning: Kald højresiden for $F(L_S)$:

$$L_S = F(L_S) = \{a\} \circ L_S \circ \{b\} \cup \{c\} \cup L_S$$

Start med $U_0 = \emptyset$ og anvend ligningen:

$$U_1 = F(U_0) = \{a\} \circ \emptyset \circ \{b\} \cup \{c\} \cup \emptyset = \{c\}$$

$$U_2 = F(U_1) = \{a\} \circ \{c\} \circ \{b\} \cup \{c\} \cup \{c\} = \{c, acb\}$$

$$U_3 = F(U_2) = \{a\} \circ \{c, acb\} \circ \{b\} \cup \{c\} \cup \{c, acb\} = \{c, acb, a^2cb^2\}$$

...

$$U_n = \{a^i cb^i \mid i < n\}$$

$$\text{"grænseværdi": } U = \{a^i cb^i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

U er en løsning – fordi $F(U) = U$ (Prøve!)

3/20

Så for

$$L_S = F(L_S) = \{a\} \circ L_S \circ \{b\} \cup \{c\} \cup L_S$$

virkede følgende:

- start med $U_0 = \emptyset$
- anvend rekursionsligningen gentagne gange
- få en følge $U_1 \subseteq U_2 \subseteq U_3 \subseteq \dots$
- "tag grænseværdien" af følgen

$$\Rightarrow \text{løsning til likningen: } L_S = \{a^i cb^i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

Er der flere løsninger?

- **Jep**, f.x. $L''_S = \{a^i cb^i, a^i ccccb^i \mid i \in \mathbb{N}\}$

Hvorfor virker det? Virker det også ved andre eksempler?

- Hvad med likningen

$$\mathbf{Env}_P = \mathbf{Pnavne} \rightarrow \mathbf{Kom} \times \mathbf{Env}_V \times \mathbf{Env}_P \quad ?$$

Et par rekursive ligninger:

$$L = F_1(L) = \{a\} \circ L \circ \{b\} \cup \{c\} \cup L$$

$$x = F_2(x) = 6 - x^2$$

$$\mathbf{Env}_P = F_3(\mathbf{Env}_P) = \mathbf{Pnavne} \rightarrow \mathbf{Kom} \times \mathbf{Env}_V \times \mathbf{Env}_P$$

Funktionerne på højresiderne:

$$F_1 : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$$

$$F_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F_3 : \text{mængder} \rightarrow \text{mængder} \quad (?)$$

Definition 14.2: Lad $F : D \rightarrow D$ være en funktion. Et element $x \in D$ kaldes et **fikspunkt** for F hvis $F(x) = x$.

– så vi skal finde ud af hvornår, og hvordan, vi kan beregne fikspunkter

5/20

Sidebemærkning: Rekursion for reelle funktioner:

- ligningen $x^2 + x = 6$ har en løsning $x = 2$
- rekursion: omskriv ligningen til $x = F(x) = 6 - x^2$
- kan løsningen $x = 2$ findes ved rekursion?

Nej

[rekursion-bad.c]

- ligningen $x^2 + 8x = 20$ har en løsning $x = 2$
- rekursion: omskriv ligningen til $x = F(x) = (20 - x^2)/8$
- kan løsningen $x = 2$ findes ved rekursion?

Ja, men kun for *nogle* startværdier !

[rekursion-ok.c]

Tarskis fikspunkts-sætning 14.3:

Lad D være et domæne og $f : D \rightarrow D$ en kontinuert funktion. Da har f et mindste fikspunkt x^* , som kan beregnes ved

$$x^* = \lim \{f^i(\perp) \mid i \in \mathbb{N}\}$$

hvor \perp er bundelementet i D .

- **domæne**: en mængde D med en fuldstændig partiel orden \sqsubseteq
- \perp : det mindste element i D ; $\perp \sqsubseteq d$ for alle $d \in D$
- **grænseværdi**: $\lim Y$ er den mindste øvre grænse for den voksende mængde Y (hvis den findes)
- **kontinuert funktion**: f kontinuert $\Leftrightarrow f(\lim Y) = \lim f(Y)$ for alle voksende mængder Y

7/20

Definition 14.4: En relation \sqsubseteq over en mængde D kaldes en **partiel orden** hvis den er

- **refleksiv**: $d \sqsubseteq d$ for alle $d \in D$
- **transitiv**: hvis $d_1 \sqsubseteq d_2$ og $d_2 \sqsubseteq d_3$, så $d_1 \sqsubseteq d_3$
- **antisymmetrisk**: hvis $d_1 \sqsubseteq d_2$ og $d_2 \sqsubseteq d_1$, så $d_1 = d_2$

Parret (D, \sqsubseteq) kaldes da en **partielt ordnet mængde**.

Eksempler:

- \mathbb{R} med den sædvanlige orden $\sqsubseteq = \leq$
- \mathbb{N} med den sædvanlige orden $\sqsubseteq = \leq$
- \mathbb{R}^2 med den *punktvise* orden

$$(x, y) \sqsubseteq (x', y') \Leftrightarrow x \leq x' \text{ og } y \leq y'$$

- **delmængdedomænet**: Givet en mængde M , da er potensmængden $\mathcal{P}(M)$ partielt ordnet ved

$$A \sqsubseteq B \Leftrightarrow A \subseteq B$$

8/20

Definition 14.9: Givet en partielt ordnet mængde D og en delmængde $Y \subseteq D$, da kaldes Y en **voksende mængde** hvis der findes en nummerering $Y = \{d_1, d_2, d_3, \dots\}$ af elementerne i Y således at $d_1 \sqsubseteq d_2 \sqsubseteq d_3 \sqsubseteq \dots$.

Eksempler:

- $\{1, 17, 3, 9\}$ er en voksende mængde i (\mathbb{N}, \leq)
- $\{0, 2, 4, 6, \dots\}$ er en voksende mængde i (\mathbb{N}, \leq)
- $\{3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, \dots\}$ er en voksende mængde i (\mathbb{Q}, \leq) \leftarrow **rationelle tal**
- $\{(1, 0), (0, 1)\}$ er *ikke* en voksende mængde i $(\mathbb{R}^2, \sqsubseteq)$

9/20

Definition 14.10 / 14.11 : Givet en partielt ordnet mængde D og en voksende delmængde $Y \subseteq D$.

- $x \in D$ kaldes en **øvre grænse** for Y hvis $y \sqsubseteq x$ for alle $y \in Y$.
- $x \in D$ kaldes en **grænseværdi** (eller **mindste øvre grænse**; *least upper bound*, *lub*) for Y , hvis
 - 1 x er en øvre grænse for Y ,
 - 2 og for alle andre øvre grænser z for Y gælder $x \sqsubseteq z$

Eksempler:

- 42 er en øvre grænse for $\{1, 17, 3, 9\}$ i (\mathbb{N}, \leq)
- 17 er en grænseværdi for $\{1, 17, 3, 9\}$ i (\mathbb{N}, \leq)
- $\{0, 2, 4, 6, \dots\}$ har ingen øvre grænse i (\mathbb{N}, \leq)
- $\{3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, \dots\}$ har en øvre grænse i (\mathbb{Q}, \leq) , *men ingen grænseværdi*

Opgave: Vis at enhver voksende mængde kan have højst én grænseværdi (!)

Hvis en voksende mængde Y har en grænseværdi x , skriver vi den $x = \lim Y$

10/20

Definition 14.16: Et **domæne** er en partielt ordnet mængde D der opfylder følgende betingelser:

- Enhver voksende mængde $Y \subseteq D$ har en grænseværdi $\lim Y \in D$
 - Der findes et element $\perp \in D$ som opfylder $\perp \sqsubseteq d$ for alle $d \in D$
- \perp kaldes **bundelementet** af D

Eksempler:

- (\mathbb{N}, \leq) , (\mathbb{R}, \leq) og $(\mathbb{R}^2, \sqsubseteq)$ er *ikke* domæner
- delmængdedomænet er et domæne

11 / 20

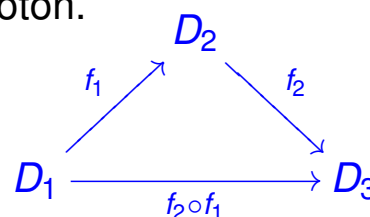
Definition 14.21': Lad D_1 og D_2 være partielt ordnede mængder og $f : D_1 \rightarrow D_2$ en funktion. Da siges f at være **monoton** (eller **monotont voksende**) hvis $d_1 \sqsubseteq d_2$ medfører $f(d_1) \sqsubseteq f(d_2)$ for alle $d_1, d_2 \in D_1$.

- så monotone funktioner er dem der **bevarer ordensrelationen**
- monotone funktioner er de “*naturlige*” funktioner for partielt ordnede mængder. Man siger også at partielt ordnede mængder og monotone funktioner tilsammen udgør en **kategori**
- dertil skal bruges følgende:

Lemma: Hvis $f_1 : D_1 \rightarrow D_2$ og $f_2 : D_2 \rightarrow D_3$ er monotone, er deres sammensætning $f_2 \circ f_1 : D_1 \rightarrow D_3$ også monoton.

Bevis:

- 1 Lad $d_1, d_2 \in D_1$, med $d_1 \sqsubseteq d_2$.
- 2 f_1 monoton $\Rightarrow f_1(d_1) \sqsubseteq f_1(d_2)$
- 3 f_2 monoton $\Rightarrow f_2(f_1(d_1)) \sqsubseteq f_2(f_1(d_2))$
- 4 færdig



12 / 20

Notation 14.25: For en funktion $f : D_1 \rightarrow D_2$ og en delmængde $Y \subseteq D_1$ betegner $f(Y) = \{f(y) \mid y \in Y\} \subseteq D_2$.

Lemma 14.23': Lad $f : D_1 \rightarrow D_2$ være en monoton funktion mellem partielt ordnede mængder. Hvis $Y \subseteq D_1$ er en voksende mængde, er $f(Y) \subseteq D_2$ også en voksende mængde.

Bevis:

- 1 Skal vise at der findes nummerering $f(Y) = \{z_1, z_2, \dots\}$ med $z_1 \sqsubseteq z_2 \sqsubseteq \dots$
- 2 Y voksende \Rightarrow har nummerering $Y = \{y_1, y_2\}$ med $y_1 \sqsubseteq y_2 \sqsubseteq \dots$
 \Rightarrow skriv $f(Y) = \{f(y_1), f(y_2), \dots\}$ ✓

Definition 14.26': Lad D_1 og D_2 være domæner og $f : D_1 \rightarrow D_2$ en monoton funktion. Da siges f at være **kontinuert** hvis f er *grænseværdi-bevarende*, dvs.:

$$\text{for alle voksende mængder } Y \subseteq D_1 : \lim f(Y) = f(\lim Y)$$

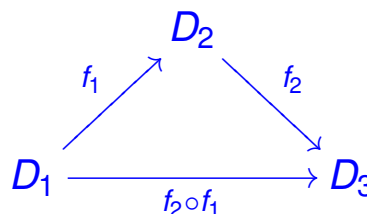
13/20

Domæner og kontinuerte funktioner udgør igen en **kategori**.
 Specielt:

Sætning 14.15(201): Hvis $f_1 : D_1 \rightarrow D_2$ og $f_2 : D_2 \rightarrow D_3$ er kontinuerte, er deres sammensætning $f_2 \circ f_1 : D_1 \rightarrow D_3$ også kontinuert.

Bevis:

- 1 Lad $Y \subseteq D_1$ være en voksende mængde.
 $\Rightarrow f_1(Y) \subseteq D_2$ og $f_2(f_1(Y)) \subseteq D_3$ er også voksende
- 2 og $f_2(f_1(\lim Y)) = f_2(\lim f_1(Y)) = \lim f_2(f_1(Y))$



14/20

Notation: For en funktion $f : D \rightarrow D$ betegner f^i funktionen f sammensat med sig selv i gange: $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$, ...

Lemma 14.30: Lad $f : D \rightarrow D$ være en monoton funktion. Da er også $f^i : D \rightarrow D$ monoton for alle $i \in \mathbb{N}$.

Bevis: Sammensætninger af monotone funktioner er monotone. ✓

Lemma 14.31: Lad D være et domæne og $f : D \rightarrow D$ en *monoton* funktion. Da er $\{f^i(\perp) \mid i \in \mathbb{N}\}$ en voksende mængde.

Bevis:

- ① \perp er mindste element i $D \Rightarrow \perp \sqsubseteq f(\perp)$
- ② anvend f , i gange: $\Rightarrow f^i(\perp) \sqsubseteq f^{i+1}(\perp)$ ✓

15/20

Sætning 14.3: Lad D være et domæne og $f : D \rightarrow D$ en kontinuert funktion. Da har f et **mindste fikspunkt** x^* , som kan beregnes ved

$$x^* = \lim\{f^i(\perp) \mid i \in \mathbb{N}\}$$

hvor \perp er bundelementet i D .

Bevis:

- ① x^* er et fikspunkt:

$$\begin{aligned} f(x^*) &= f(\lim\{f^i(\perp)\}) = \lim f(\{f^i(\perp)\}) = \lim\{f^{i+1}(\perp)\} \\ &= \lim(\{f^{i+1}(\perp)\} \cup \{\perp\}) = \lim\{f^i(\perp)\} = x^* \end{aligned}$$

- ② x^* er det *mindste* fikspunkt:

- Lad d være et fikspunkt for f , dvs. $f(d) = d$. Vis at $x^* \sqsubseteq d$.
- $\perp \sqsubseteq d \Rightarrow f^i(\perp) \sqsubseteq f^i(d) = d$
- $\Rightarrow d$ er øvre grænse for $\{f^i(\perp)\}$
- $\Rightarrow \lim\{f^i(\perp)\} \sqsubseteq d$ ✓

16/20

Sætning 14.7(199): For enhver mængde S er potensmængden $\mathcal{P}(S)$, med inklusion \subseteq som ordensrelation, et domæne.

Bevis (fyld selv detaljer ind!):

- ① \subseteq er en partiel orden på $\mathcal{P}(S)$
- ② bundelementet er $\perp = \emptyset$
- ③ hvis $Y = \{M_1, M_2, \dots\}$ er en voksende mængde (af delmængder $M_1, M_2, \dots \subseteq S$), er

$$\begin{aligned} \lim Y &= \bigcup_i M_i \\ &= M_1 \cup M_2 \cup \dots \end{aligned}$$

Anvendelse: Mængden af **sprog over et givet alfabet Σ** , $\mathcal{P}(\Sigma^*)$, er et domæne.

17/20

Lemma: Konkaterering og foreningsmængde er kontinuerte operationer på $\mathcal{P}(\Sigma^*)$.

Bevis (delvis): Vi skal f.x. vise følgende:

- for ethvert $L \subseteq \Sigma^*$ er funktionen $f : \mathcal{P}(\Sigma^*) \rightarrow \mathcal{P}(\Sigma^*)$ givet ved **$f(M) = L \circ M$** kontinuert:
 - ① Lad $\{M_1, M_2, \dots\}$ være en voksende mængde af sprog.
 - ② Da er også $\{L \circ M_1, L \circ M_2, \dots\}$ en voksende mængde.
 - ③ Vi skal vise at $f(\lim\{M_1, M_2, \dots\}) = \lim f(\{M_1, M_2, \dots\})$, dvs. **$f(\bigcup_i M_i) = \bigcup_i f(M_i)$** .
 - ④ Men $f(\bigcup_i M_i) = L \circ (\bigcup_i M_i)$ og $\bigcup_i f(M_i) = \bigcup_i L \circ M_i$.
 - ⑤ Og $L \circ (\bigcup_i M_i) = \bigcup_i L \circ M_i$ pga. distributivitet.

18/20

Eksemplet med den kontekstfrie grammatik igen:

$$S \rightarrow aSb \mid c \mid S$$

Oversat til en fikspunktsligning:

$$L_S = F(L_S) = \{a\} \circ L_S \circ \{b\} \cup \{c\} \cup L_S$$

Og $F : \mathcal{P}(\Sigma^*) \rightarrow \mathcal{P}(\Sigma^*)$ er en **sammensætning af konkateneringer og foreningsmængder** $\Rightarrow F$ er **kontinuert** !

$\Rightarrow L_S$ kan findes ved fikspunktssætningen:

$$\begin{aligned} L_S &= \lim \{F^i(\emptyset) \mid i \in \mathbb{N}\} \\ &= \lim \{\emptyset, \{c\}, \{c, acb\}, \{c, acb, a^2cb^2\}, \dots\} \\ &= \bigcup_n \{a^i cb^i \mid i < n\} \\ &= \{a^n cb^n \mid n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

19/20

Eksemplet med \mathbf{Env}_P igen:

$$\mathbf{Env}_P = \mathbf{Pnavne} \rightarrow \mathbf{Kom} \times \mathbf{Env}_V \times \mathbf{Env}_P$$

Oversat til en fikspunktsligning:

$$\mathbf{Env}_P = F(\mathbf{Env}_P) = \mathbf{Pnavne} \rightarrow \mathbf{Kom} \times \mathbf{Env}_V \times \mathbf{Env}_P$$

F er nu en funktion fra **“mængden” af domæner** til sig selv, givet ved

$$F(D) = \mathbf{Pnavne} \rightarrow \mathbf{Kom} \times \mathbf{Env}_V \times D$$

og følgende virker:

- tag det mindste domæne $\{\perp\}$
- beregn en **“voksende mængde” af domæner** $\{\{\perp\}, F(\{\perp\}), F(F(\{\perp\})), \dots\}$
- tag **“grænseværdien”** af den “mængde”

Men *hvorfor* virker det? og *hvad* bliver resultatet?

- Se de grumme detaljer i kapitel 6 af Mads Rosendahls domæneteori-noter:

<http://akira.ruc.dk/~madsr/webpub/domaene.pdf>

20/20