Calcul scientifique

CM 5

Uli Fahrenberg

Polytech Paris-Saclay

2025-26

Google PageRank

Google PageRank

(Ceci est une élaboration de ce que vous avec vu en TP 2.)

- Quand on cherche des infos sur l'internet, on aimerait bien que les résultats soient ordonnés par importance
- Mais qu'est-ce qu'est une bonne mesure d'importance ?

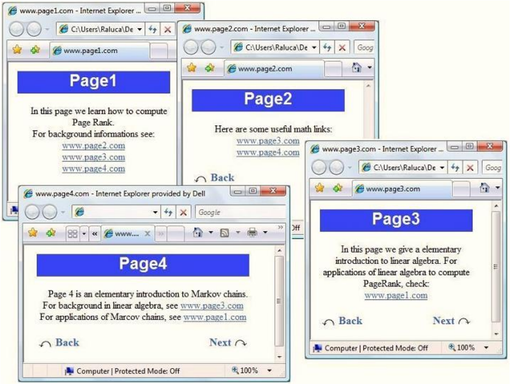
Google PageRank

(Ceci est une élaboration de ce que vous avec vu en TP 2.)

- Quand on cherche des infos sur l'internet, on aimerait bien que les résultats soient ordonnés par importance
- Mais qu'est-ce qu'est une bonne mesure d'importance ?
- Avant google : le nombre de fois que des mots dans notre recherche apparaîssent sur la page concernée (!)
- Google : une page est importante si cette importance est reconnue par beaucoup d'autres pages importantes à travers des liens
- Une révolution !

Importance

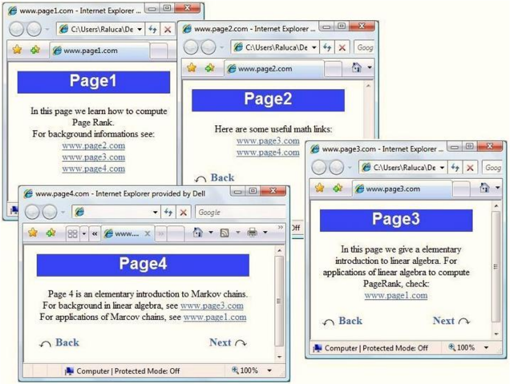
« une page est importante si cette importance est reconnue par beaucoup d'autres pages importantes à travers des liens »

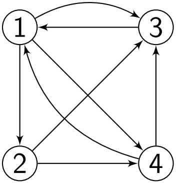


C'est qui le plus important ?

Importance

« une page est importante si cette importance est reconnue par beaucoup d'autres pages importantes à travers des liens »



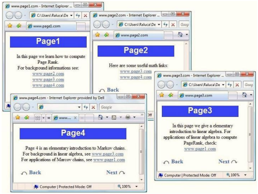


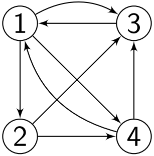
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

C'est qui le plus important ?

Itération

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} 2 & 1 & 3 & 2 \end{matrix} \end{array} =: {\color{red} A}$$





- la page 3 a trois liens entrants ; si toutes pages sont de la même importance, alors la page 3 gagne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

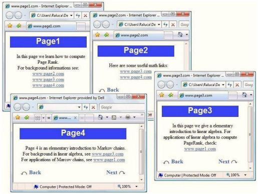
- mais les pages ne sont pas de la même importance !

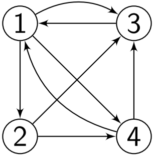
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

- moins clair . . .

Itération !

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$





- Idée : itérer le calcul $v := v\,A$, commencant avec $v = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et en normalisant chaque fois :

$$v := v\,A \qquad v := v * 4/\|v\|_1$$

- Cela converge assez rapidement :

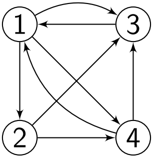
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1.5 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1.33 & 0.53 & 1.33 & 0.80 \end{pmatrix}$$
$$\cdots \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1.16 & 0.59 & 1.35 & 0.90 \end{pmatrix}$$

- Au final oui, la page 3 est la plus importante

Modélisation

On utilise nos idées pour faire une propre modélisation.

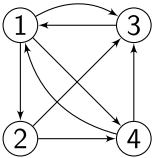
- Normaliser le vecteur v à chaque itération donne l'idée de le voir comme un vecteur de probabilités
- Si une page i a plus de liens entrants, alors la probabilité de se trouver ici devrait être plus grande – c'est la composante v_i
- On modélise l'utilisitateur comme un agent aléatoire qui va cliquer un lien sur une page à l'aléa ("random surfer")



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

- On va aussi transposer la matrice, car on aime mieux la multiplication $A\,v$ que $v\,A$

Modélisation : Random Surfer



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0.33 & 0 & 0 & 0 \\ 0.33 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.33 & 0.5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- A : matrice normalisée (et transposée) des liens
- Chaque colonne correspond à une page et indique les probabilités d'aller vers d'autres pages
- Une matrice stochastique de colonne
- Au début, notre random surfer a une probabilité uniforme d'être sur une page : $v_0 = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}^T$
- Itération $v_{n+1} := A\, v_n$
- On s'intéresse à la probabilité stationnaire $\lim_{n\to\infty} A^n\, v_0$
- Mais comment la calculer ? Qu'en est-il de sa convergence ?

Analyse : Chaînes de Markov

Définition

Une chaîne de Markov est une séquence $X_0, X_1, \dots$ de variables aléatoires t.q. $\forall n \geq 1, \forall x_0, x_1, \dots, x_n$:

$$\mathbb{P}\mathrm{r}(X_n = x_n \mid X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) = \mathbb{P}\mathrm{r}(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1})$$

- C. à d. X_n ne dépend que de son passé immédiat X_{n-1} (« pas de mémoire »)
- Si $\mathbb{P}\mathrm{r}(X_n = y \mid X_{n-1} = x) = \mathbb{P}\mathrm{r}(X_1 = y \mid X_0 = x)$ pour tout n, x, y, la chaîne est dite homogène
- Pour une chaîne homogène avec espace d'états fini, on peut définir $P_{ij} = \mathbb{P}\mathrm{r}(X_1 = i \mid X_0 = j)$
- Cela donne la matrice de transition $P = (P_{ij})$
- (Attention P_{ij} est la probabilité de transitionner de j à i)

Analyse : Probabilité stationnaire

Soit $X = X_0, X_1, \ldots$ une chaîne de Markov homogène sur espace d'états fini, avec $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice de transition.

Définition

Un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ est une probabilité stationnaire pour la chaîne si $\sum v_i = 1$ et $P\,v = v$.

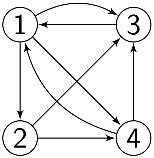
- Mesure la probabilité de se trouver dans des différents états sur le long terme / au limite

Théorème

Si X est irréductible et récurrent positif, alors

- *il existe une unique probabilité stationnaire v, et*
- *pour tout vecteur v_0, $v = \lim_{n \to \infty} P^n\, v_0$.*

Analyse : Markov Surfer



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0.33 & 0 & 0 & 0 \\ 0.33 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.33 & 0.5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- A : matrice normalisée (et transposée) des liens
- On prend un v_0 et s'intéresse au $\lim_{n \to \infty} A^n \, v_0$
- Une chaîne de Markov homogène avec matrice de transition A

$\Longrightarrow$ Si A est irréductible et récurrent positif, alors il y a un unique v avec $v = A\, v$, et $v = \lim_{n \to \infty} A^n \, v_0$ pour tout v_0

- Irréductible : tout état accessible depuis tout autre
- Récurrent positif : tout état vu infiniment souvent avec probabilité > 0
- (On va faire plus simple)

Simplification : Perron-Frobenius

Théorème (Perron-Frobenius version stochastique)

Soit A une matrice stochastique de colonne et strictement positive.

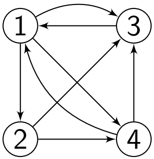
- $\lambda = 1$ *est une valeur propre de A, et la valeur propre avec le plus grand module ;*
- *l'espace propre de* $\lambda = 1$ *est de dimension* 1 *;*
- *l'unique vecteur stochastique propre correspondant à* $\lambda = 1$ *est la limite de* $A^n v_0$ *pour* $n \to \infty$ *et tout vecteur stochastique* v_0.

Simplification : Perron-Frobenius

Théorème (Perron-Frobenius version stochastique)

Soit A une matrice stochastique de colonne et strictement positive.

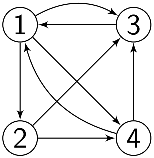
- *$\lambda = 1$ est une valeur propre de A, et la valeur propre avec le plus grand module ;*
- *l'espace propre de $\lambda = 1$ est de dimension 1 ;*
- *l'unique vecteur stochastique propre correspondant à $\lambda = 1$ est la limite de $A^n v_0$ pour $n \to \infty$ et tout vecteur stochastique v_0.*



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0.33 & 0 & 0 & 0 \\ 0.33 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.33 & 0.5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mais notre A n'est pas strictement positive !?

The Teleporting Random Surfer



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0.33 & 0 & 0 & 0 \\ 0.33 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.33 & 0.5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- On a envie d'appliquer Perron-Frobenius à notre matrice A, mais elle n'est pas strictement positive
- Solution : un facteur d'amortissement : soit $0 < p < 1$ et

$$M = (1-p)\,A + p * \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- On suit les liens avec probabilité $1-p$, et avec probabilité p on recommence à un endroit aléatoire
- Typiquement $p = 0.15$
- Perron-Frobenius s'applique à M !

Conclusion

- Soit A la matrice normalisée (et transposée) des liens, de taille $n \times n$
- Soit $p = 0.15$ et $M = (1-p)\,A + p * \frac{1}{n}B$, où B est la matrice avec 1 partout
- Alors l'importance de chaque page est donné par l'unique vecteur stochastique v pour lequel $A\,v = v$
- Et $v = \lim_{n\to\infty} A^n v_0$ pour n'importe vecteur stochastique v_0
- Comment calculer v, si $n > 10^9$?!

Conclusion

- Soit A la matrice normalisée (et transposée) des liens, de taille $n \times n$
- Soit $p = 0.15$ et $M = (1-p)\,A + p * \frac{1}{n}B$, où B est la matrice avec 1 partout
- Alors l'importance de chaque page est donné par l'unique vecteur stochastique v pour lequel $A\,v = v$
- Et $v = \lim_{n\to\infty} A^n v_0$ pour n'importe vecteur stochastique v_0
- Comment calculer v, si $n > 10^9$?!
- Le calcul vecteur propre $v = A\,v$ va échouer
- Mais la méthode des puissances $v = \lim_{n\to\infty} A^n v_0$ converge assez vite
- "The Billion Dollar Eigenvector Calculation"

Jupyter notebooks

Jupyter notebooks

1. PageRank
2. Conditionnement d'une matrice


That's all Folks!