Théorie des langages rationnels : THLR

CM 5

Uli Fahrenberg

EPITA Rennes

Septembre 2021

Aperçu

Programme du cours

1. Mots, langages
2. Langages rationnels, expressions rationnelles
3. Automates finis
4. Langages non-rationnels
5. Langages reconnaissables, minimisation

Hier : Déterminisation ; langages non-rationnels

- poly section 4.1.4 seconde moitié
- plus section 4.3

Hier : Déterminisation par automates des parties

L'automate des parties d'un automate fini $A = (\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$:

- $A' = (\Sigma, Q', q'_0, F', \delta')$
- $Q' = \mathcal{P}(Q)$, l'ensemble des parties de Q
- $q'_0 = Q_0$
- $F' = \{P \subseteq Q \mid P \cap F \neq \emptyset\}$
- $\delta'(P, a) = \{q \in Q \mid \exists p \in P : (p, a, q) \in \delta\}$

$\Rightarrow$ un automate fini déterministe complet avec $L(A') = L(A)$

- si A a n états, alors A' a 2^n états

Il existe des langages rationnelles L qui

- sont reconnus par un automate fini de taille n,
- mais l'automate fini déterministe minimal pour reconnaitre L a 2^n états.

Hier : Langages non-rationnels

Lemme de l'étoile / de pompage :

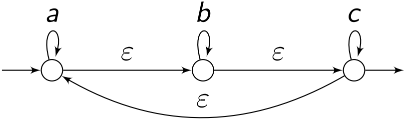
- Soit L un langage rationnel. Il existe $k \geq 0$ tel que tout $x \in L$ avec $|x| \geq k$ peut s'écrire $x = uvw$ avec $|uv| \leq k$, $|v| \geq 1$ et $L(uv^*w) \subseteq L$.
- note : c'est une implication, pas un "L est rationnel ssi ..."

Applications :

- montrer que certains langages ne sont pas rationnels
- algorithme pour décider si $L(A)$ est vide, fini ou infini pour un automate fini A donné.

Quelques retours QCM 3

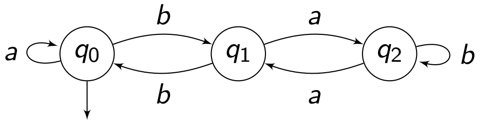
1. Soit A l'automate produit par l'algorithme de Thompson à partir de l'expression régulière $((a+b)+c)^*$.
   - Quel est le nombre d'états de A ? 12
   - Quel est le nombre d'arêtes étiquetées par ε dans A ? 12
2. Considérons l'automate A suivant, et A' le résultat de l'élimination arrière des ε-transitions.



   - Quel est le nombre d'arêtes de A' ? 9
   - Quel est le nombre d'états finaux de A' ? 3

Pour aller plus loin

A :



DM4-exo6 (suite) :

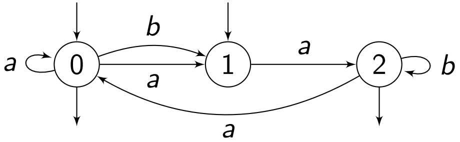
- soit L_i le langage reconnu par A avec état initial q_i
- alors $$\begin{aligned} L_0 &= \{a\}L_0 \cup \{b\}L_1 \cup \{\varepsilon\} \\ L_1 &= \{a\}L_2 \cup \{b\}L_0 \\ L_2 &= \{a\}L_1 \cup \{b\}L_2 \end{aligned}$$
- comme équation matrice-vecteur : $\begin{bmatrix} L_0 \\ L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & \emptyset \\ b & \emptyset & a \\ \emptyset & a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_0 \\ L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \emptyset \\ \emptyset \end{bmatrix}$

Slogan

Un automate fini sur Σ est une transformation affine dans un espace vectoriel sur le demi-anneau $\mathcal{P}(\Sigma^*)$.

Pour aller encore plus loin

A :



Définition (variante)

Un automate fini (pondéré) avec n états sur un demi-anneau S est composé d'une matrice $\Delta \in S^{n\times n}$ et deux vecteurs $i, f \in S^n$.

- ici : $S = \mathcal{P}(\Sigma^*)$, $\Delta = \begin{bmatrix} \{a\} & \{a,b\} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \{a\} \\ \{a\} & \emptyset & \{b\} \end{bmatrix}$, $i = \begin{bmatrix} \{\varepsilon\} \\ \{\varepsilon\} \\ \emptyset \end{bmatrix}$, $f = \begin{bmatrix} \{\varepsilon\} \\ \emptyset \\ \{\varepsilon\} \end{bmatrix}$

Théoréme / définition

Si S est une algèbre de Kleene, alors $S^{n\times n}$ l'est aussi, et le langage reconnu par A est $L(A) = i\Delta^* f$.

5 minutes de questions

?

Langages reconnaissables

Aujourd'hui

1. Langages reconnaissables
2. Propriétés de clôture
3. Minimisation

- poly section 4.2.2 seconde moitié
- plus 4.2.1 et (parties de) 4.4

Langages reconnaissables

Théorème de Kleene

Théorème (Kleene)

Un langage $L \subseteq \Sigma^*$ est rationnel ssi il est reconnaissable.

Démonstration.

$\Longrightarrow$ algorithme de Thompson : convertir une expression rationelle dans un automate fini à transitions spontanées

$\Longleftarrow$ algorithme de Brzozowski & McCluskey : convertir un automate fini dans une expression rationelle $\longleftarrow$ maintenant

- outil : automates finis généralisés, avec transitions étiquetées en expressions rationnelles

Automates finis généralisés

Définition

Un automate fini généralisé est une structure $(\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$ où

- Σ est un ensemble fini de symboles,
- Q est un ensemble fini d'états,
- $Q_0 \subseteq Q$ est l'ensemble des états initiaux,
- $F \subseteq Q$ est l'ensemble des états finaux, et
- $\delta \subseteq Q \times RE(\Sigma) \times Q$ est la relation de transition.

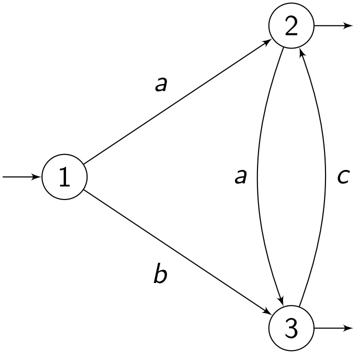
- un calcul dans A : $\sigma = q_1 \xrightarrow{e_1} q_2 \xrightarrow{e_2} \cdots \xrightarrow{e_{n-1}} q_n$
- l'étiquette d'un calcul : $\lambda(\sigma) = e_1 e_2 \dots e_{n-1} \in RE(\Sigma)$
- un calcul réussi : $q_1 \in Q_0$ et $q_n \in F$
- Le langage reconnu par A :

$$L(A) = \bigcup \{ L(\lambda(\sigma)) \mid \sigma \text{ calcul réussi dans } A \}$$

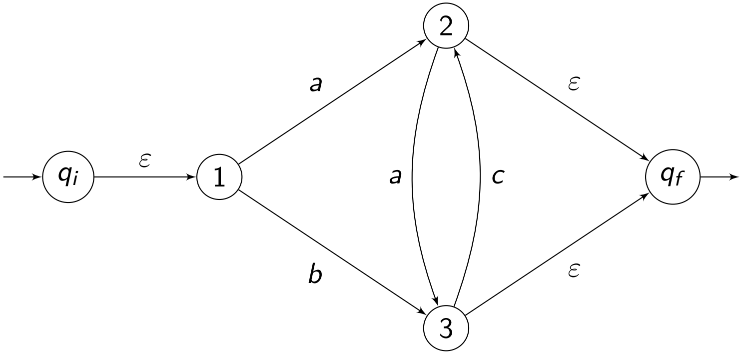
Algorithme de Brzozowski & McCluskey

1. Soit A un automate fini
2. « Convertir » A en automate fini généralisé
3. Convertir A en automate fini généralisé pure :
   - une unique transition entre chaque pair d'états
   - un état initial unique q_0 sans transitions entrantes
   - un état final unique q_f sans transition sortante
4. `while` $Q \neq \{q_0, q_f\}$:
   - supprimer un état $q \notin \{q_0, q_f\}$
   - corriger étiquettes
5. `return` l'étiquette de la transition unique

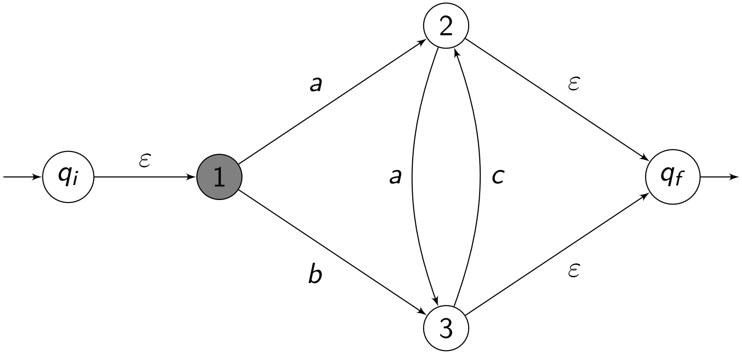
Exemple



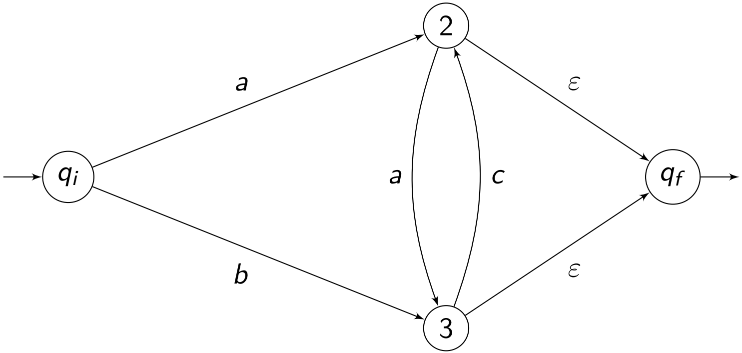
Exemple



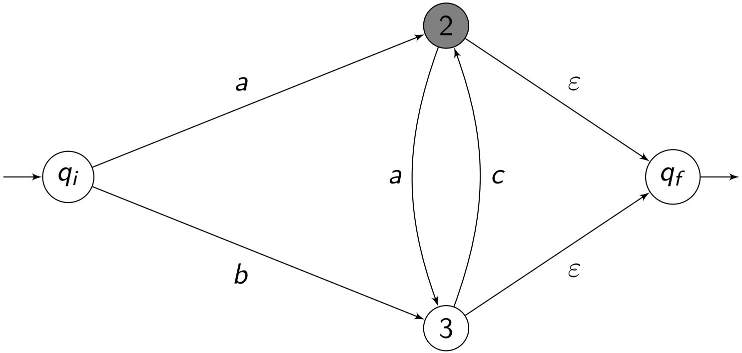
Exemple



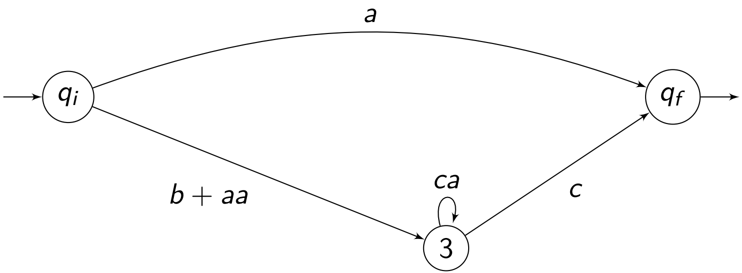
Exemple



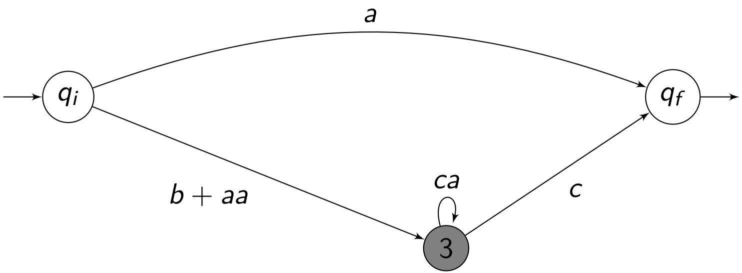
Exemple



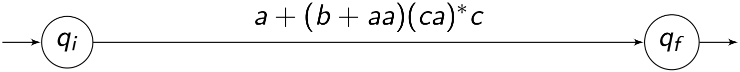
Exemple



Exemple



Exemple



Algorithme de Brzozowski & McCluskey, détail

1. Soit $(\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$ un automate fini
2. Convertir A en automate fini généralisé pure $(\Sigma, Q', q_0, f, \Delta)$:
    - une unique transition entre chaque pair d'états
    - un état initial unique q_0 sans transitions entrantes
    - un état final unique q_f sans transition sortante

Algorithme de Brzozowski & McCluskey, détail

1. Soit $(\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$ un automate fini
2. Convertir A en automate fini généralisé pure $(\Sigma, Q', q_0, f, \Delta)$:
   - une unique transition entre chaque pair d'états
   - un état initial unique q_0 sans transitions entrantes
   - un état final unique q_f sans transition sortante

- $Q' = Q \cup \{q_0, q_f\}$ pour $q_0, q_f \notin Q$
- $\Delta : Q' \times Q' \to RE(\Sigma)$
- $\Delta(q_1, q_2) = \sum \{a \mid (q_1, a, q_2) \in \delta\}$ pour $q_1, q_2 \in Q$
  - c.à.d. $\Delta(q_1, q_2) = \varnothing$ si $\{a \mid (q_1, a, q_2) \in \delta\} = \emptyset$
- $\Delta(q_i, q_2) = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } q_2 \in Q_0 \\ \varnothing & \text{sinon} \end{cases}$ $\quad \Delta(q_1, q_f) = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } q_1 \in F \\ \varnothing & \text{sinon} \end{cases}$

Algorithme de Brzozowski & McCluskey, détail

1. Soit $(\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$ un automate fini
2. Convertir A en automate fini généralisé pure $(\Sigma, Q', q_0, f, \Delta)$:
3. `while` $Q \neq \{q_0, q_f\}$:
   - supprimer un état $q \notin \{q_0, q_f\}$
   - corriger étiquettes

Algorithme de Brzozowski & McCluskey, détail

1. Soit $(\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$ un automate fini
2. Convertir A en automate fini généralisé pure $(\Sigma, Q', q_0, f, \Delta)$:
3. `while` $Q \neq \{q_0, q_f\}$:
   - supprimer un état $q \notin \{q_0, q_f\}$
   - corriger étiquettes

- $Q' \leftarrow Q' \setminus \{q\}$
- pour tout $p, r \in Q'$ (donc aussi pour $p = q$!) :
- $\Delta(p, r) \leftarrow \Delta(p, r) + \Delta(p, q)\Delta(q, q)^*\Delta(q, r)$

Algorithme de Brzozowski & McCluskey, détail

1. Soit $(\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$ un automate fini
2. Convertir A en automate fini généralisé pure $(\Sigma, Q', q_0, f, \Delta)$:
3. `while` $Q \neq \{q_0, q_f\}$:
   - supprimer un état $q \notin \{q_0, q_f\}$
   - corriger étiquettes

- $Q' \leftarrow Q' \setminus \{q\}$
- pour tout $p, r \in Q'$ (donc aussi pour $p = q$!) :
- $\Delta(p, r) \leftarrow \Delta(p, r) + \Delta(p, q)\Delta(q, q)^*\Delta(q, r)$

4. `return` l'étiquette de la transition unique

- donc $\Delta(q_i, q_f)$

Exercice

Utiliser

1. l'algorithme de Thompson pour convertir l'expression rationnelle $a(b^* a + b)$ en automate fini à transitions spontanées A ;
2. l'algorithme de Brzozowski et McCluskey pour reconvertir A en expression rationnelle.

Propriétés de clôture

Propriétés de clôture

Théorème

Les langages rationnels sont clos par

- *union, concaténation, étoile,*
- *préfixe, suffixe, facteur,*
- *intersection et complémentation.*

Propriétés de clôture

Théorème

Les langages rationnels sont clos par

- *union, concaténation, étoile,* ✓
- *préfixe, suffixe, facteur,*
- *intersection et complémentation.*

Propriétés de clôture

Théorème

Les langages rationnels sont clos par

- *union, concaténation, étoile,* ✓
- *préfixe, suffixe, facteur,* ✓
- *intersection et complémentation.*

Propriétés de clôture

Théorème

Les langages rationnels sont clos par

- *union, concaténation, étoile,* ✓
- *préfixe, suffixe, facteur,* ✓
- *intersection et complémentation.* ? ✓

Clôture par complémentation

Lemme

Soit $L \subseteq \Sigma^*$ un langage rationnel, alors $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$ est rationnel aussi.

Démonstration.

1. Soit A un automate fini tel que $L = L(A)$.

Clôture par complémentation

Lemme

Soit $L \subseteq \Sigma^*$ *un langage rationnel, alors* $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$ *est rationnel aussi.*

Démonstration.

1. Soit A un automate fini déterministe complet tel que $L = L(A)$.

Clôture par complémentation

Lemme

Soit $L \subseteq \Sigma^*$ un langage rationnel, alors $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$ est rationnel aussi.

Démonstration.

1. Soit A un automate fini déterministe complet tel que $L = L(A)$.
2. Notons $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$.

Clôture par complémentation

Lemme

Soit $L \subseteq \Sigma^*$ un langage rationnel, alors $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$ est rationnel aussi.

Démonstration.

1. Soit A un automate fini déterministe complet tel que $L = L(A)$.
2. Notons $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$.
3. Soit $A' = (\Sigma, Q, q_0, Q \setminus F, \delta)$.
4. Alors $L(A') = \overline{L(A)} = \overline{L}$.

Clôture par intersection

Corollaire

Soient L_1 et L_2 des langages rationnels, alors $L_1 \cap L_2$ l'est aussi.

Démonstration.

Par la loi de de Morgan,

Clôture par intersection

Corollaire

Soient L_1 et L_2 des langages rationnels, alors $L_1 \cap L_2$ l'est aussi.

Démonstration.

Par la loi de de Morgan, $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$.

- aussi, construction directe par produit d'automates finis déterministes complets

Minimisation

Minimisation

Soit L un langage rationnel. On s'intéresse aux questions d'existence et unicité d'un automate fini minimal qui reconnait L.

- très compliqué pour des automates non-déterministes
- p.ex. [Brzozowski, Tamm : Theory of átomata. Theor. Comput. Sci. 539 : 13-27 (2014)]
- mais pour des automates finis déterministes :

Théorème

Pour tout langage rationnel L il existe un unique automate fini déterministe complet A avec nombre d'états minimal t.q. $L = L(A)$.

Indistinguabilité

Soit $A = (\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$ un automate fini.

- on note L_q, pour tout $q \in Q$, le langage reconnu par A depuis état initial q

Définition

Deux états $q_1, q_2 \in Q$ sont indistinguables si $L_{q_1} = L_{q_2}$.

- si deux états sont indistinguables, on peut les identifier
- écrivons $q_1 \sim q_2$ si q_1 et q_2 sont indistinguables : une relation d'équivalence dans Q

Théorème

Si A est déterministe complet, alors l'automate quotient $A_{/\sim}$ est l'automate fini déterministe complet minimal pour $L(A)$.

L'automate quotient

Définition

Soit $A = (\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$ un automate fini et $R \subseteq Q \times Q$ une relation d'équivalence. L'automate quotient de A sur R est $A_{/R} = (\Sigma, Q', Q_0', F', \delta')$ defini comme suite :

- $Q' = Q_{/R} = \{[q]_R \mid q \in Q\}$, l'ensemble de classes d'équivalence de R
- $Q_0' = \{[q_0]_R \mid q_0 \in Q_0\}$
- $F' = \{[q_f]_R \mid q_f \in F\}$
- $\delta' = \{([p]_R, a, [q]_R) \mid (p, a, q) \in \delta\}$

Démonstration

- rappel : $q_1 \sim q_2$ ssi $L_{q_1} = L_{q_2}$

Théorème (rappel)

Soit A un automate fini déterministe complet, alors $A_{/\sim}$ est l'unique automate fini déterministe complet minimal pour $L(A)$.

Démonstration.

1. $A_{/\sim}$ est déterministe complet et $L(A_{/\sim}) = L(A)$. *(Pourquoi ?)*
2. On finit la démonstration par le lemme suivant.

Lemme

Si A et A' sont deux automates finis déterministes complets avec $L(A) = L(A')$, alors $A_{/\sim}$ et $A'_{/\sim}$ sont isomorphes.

- *Qu'est-ce que c'est « isomorphe » ?*
- *Pourquoi le lemme démontre-t-il le théorème ?*

Démonstration, suite

- rappel : $q_1 \sim q_2$ ssi $L_{q_1} = L_{q_2}$

Lemme (rappel)

Si A et A' sont deux automates finis déterministes complets avec $L(A) = L(A')$, alors $A_{/\sim}$ et $A'_{/\sim}$ sont isomorphes.

Démonstration.

1. On note $A_{/\sim} = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ et $A'_{/\sim} = (\Sigma, Q', q'_0, F', \delta')$.
2. Soit $R \subseteq Q \times Q'$ la relation défini par $q \, R \, q'$ ssi $L_q = L_{q'}$.
3. $L_{q_0} = L(A_{/\sim}) = L(A) = L(A') = L(A'_{/\sim}) = L_{q'_0}$, alors $q_0 \, R \, q'_0$.
4. $q_1 \, R \, q'$ et $q_2 \, R \, q' \Rightarrow L_{q_1} = L_{q'} = L_{q_2} \Rightarrow q_1 \sim q_2 \Rightarrow q_1 = q_2$;
5. $q \, R \, q'_1$ et $q \, R \, q'_2 \Rightarrow L_{q'_1} = L_q = L_{q'_2} \Rightarrow q'_1 \sim q'_2 \Rightarrow q'_1 = q'_2$;
6. alors R est une bijection.
7. *Est-ce qu'on a fini ?*

Myhill-Nerode

- même chose qu'avant, sans passer par un automate :

Définition

Soit $L \subseteq \Sigma^*$ et $u, v \in \Sigma^*$, alors u et v sont indistinguables dans L si pour tout $w \in \Sigma^*$, $uw \in L \iff vw \in L$.

- écrivons $u \equiv_L v$ si u et v sont indistinguables dans L : une relation d'équivalence dans Σ^*

Théorème (Myhill-Nerode)

Un langage $L \subseteq \Sigma^*$ est rationnel ssi le nombre n de classes d'équivalence de $\equiv_L$ est fini. Dans ce cas, n est aussi le nombre d'états de l'automate fini déterministe complet minimal reconnaissant L.

- voir le poly pour une démonstration
- l'automate a comme états les classes d'équivalence de $\equiv_L$

Algorithme de minimisation

Soit $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ un automate fini déterministe complet.

- rappel : $q_1 \sim q_2$ ssi $L_{q_1} = L_{q_2}$

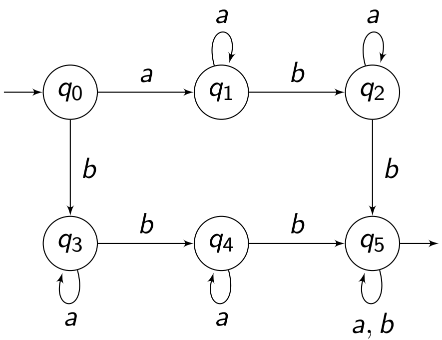
Théorème (rappel)

$A_{/\sim}$ est l'unique automate fini déterministe complet minimal pour $L(A)$.

Algorithme

1. Initialiser avec deux classes d'équivalence : F et $Q \setminus F$
2. Itérer jusqu'à stabilisation :
   - pour tout $p, q \in Q$ dans une même classe d'équivalence C :
   - s'il existe $p \xrightarrow{a} p'$ et $q \xrightarrow{a} q'$ tel que p' et q' ne sont pas dans la même classe :
   - séparer C en classes $C_1 \ni p$ et $C_2 \ni q$

Exemple (sur tableau)



Égalité est décidable

Corollaire

Il existe un algorithme qui, pour automates finis A_1 et A_2, décide si $L(A_1) = L(A_2)$.

Démonstration.

1. Convertir A_1 et A_2 en automates finis déterministes complets minimaux.
2. Décider si A_1 et A_2 sont isomorphes.

Conclusion

Récapitulatif

1. Mots, langages
2. Langages rationnels, expressions rationnelles
3. Automates finis
4. Langages non-rationnels
5. Langages reconnaissables, minimisation

- poly chapitres 1-4
- moins 2.3.2, 2.3.5, 2.4.4 et 4.1.3

Applications

- automate fini $\hat{=}$ algorithme en mémoire constante
- lien vers les algorithmes online / streaming
- parsage, analyse lexicale, `grep` etc. : expression rationnelle $\rightsquigarrow$ automate fini déterministe / non-déterministe (!)
- apprentissage par automates : automate fini $\hat{=}$ représentation compacte
- traduction automatique : automates probabilistes
- vérification : modélisation par automates probabilistes / pondérés / temporisés / hybrides / etc.
- et après ? langages algébriques, automates à pile, analyse syntaxique, compilation $\rightsquigarrow$ THL

Pour aller plus loin

- (le poly !)
- O. Carton, *Langages formels*. Vuibert 2014
- J. Sakarovitch, *Eléments de théorie des automates*. Vuibert 2003
- T.A. Sudkamp, *Languages and Machines*. Addison-Wesley 2005
- D.C. Kozen, *Automata and Computability*. Springer 2012

- algèbre de Kleene pour la vérification des programmes
- Tony Hoare et.al : Concurrent Kleene algebra pour la vérification des systèmes distribués

Relational and Algebraic Methods in Computer Science (RAMICS 2021)

s

ntributions
s

19th International Conference on Relational and Algebraic Methods in Computer Science RAMICS 2021

RAMICS 2021 will take place at CIRM close to Marseille from **2 to 5 November** 2021.

Since 1994, the RAMiCS conference series has been the main venue for research on relation algebras, Kleene
similar algebraic formalisms, and their applications as conceptual and methodological tools in computer scienc

Theoretical aspects include semigroups, residuated lattices, semirings, Kleene algebras, relation algebras,
other algebras; their connections with program logics and other logics; their use in the theories of automata
formal languages, games, networks and programming languages; the development of algebraic, algorith
theoretic, coalgebraic and proof-theoretic methods for these theories; their formalisation with theorem provers

Applications include tools and techniques for program correctness, specification and verification; quantitative
models and semantics of computing systems and processes; algorithm design, automated reasoning, net
analysis, social choice, optimisation and control.

Invited Speakers

- Marcelo Frias, Argentina
- Barbara König, Germany
- Dmitriy Zhuk, Russia

Accepted papers

List of accepted papers.