Faculté des Sciences d'Orsay | Université Paris-Saclay

Licence Informatique, LDD Informatique, Mathématiques, semestre 5 | 2025–26

Eléments de logique pour l'informatique | 13 octobre 2025

Partiel - 22 octobre 2025

L'examen dure 2 heures. L'énoncé est composé de 8 pages et d'un QCM de 2 pages.
Toutes les réponses (sauf QCM) devront être clairement justifiées.
Le barème est indicatif.
Le seul document autorisé est le polycopié de cours non annoté.
Ne pas cacheter les copies!

Exercice 1 *QCM (5 points)*

Les nom et prénom ainsi que la filière doivent être reportés sur l'énoncé du QCM que vous rendrez avec votre copie (utiliser un stylo bleu ou noir pour cocher les cases). Sauf indication contraire, une bonne réponse rapporte $\frac{1}{4}$, une mauvaise réponse retire $\frac{1}{8}$ point, l'absence de réponse vaut 0 point.

Exercice 2 *Enigme (4 points)*

Arthur, Bob et Casimir sont soupçonnés d'avoir peint en bleu le chat de la voisine. Ils font les déclarations suivantes :

— Arthur : Bob est coupable et Casimir est innocent.

— Bob : Si Arthur est coupable, Casimir aussi.

— Casimir : Je suis innocent mais au moins l'un des deux autres est coupable.

1. On pose : a = "Arthur est coupable", b = "Bob est coupable" et c = "Casimir est coupable". Avec ces notations transcrire les trois déclarations ci-dessus dans le langage de la logique propositionnelle (notées F_A, F_B et F_C).

2. Construire la table de vérité des formules F_A, F_B et F_C en numérotant les interprétations.
3. En utilisant la question précédente et en expliquant votre raisonnement, répondez aux questions suivantes :
   — (a) Montrer que si Casimir a menti alors Arthur aussi.
   — (b) Si Casimir a menti que peut-on dire de la déclaration de Bob ?
   — (c) En supposant que tous ont dit la vérité, qui est coupable qui est innocent ?
   — (d) En supposant que tous sont coupables, qui a dit vrai qui a menti ?
   — (e) Est-il possible que tous les innocents aient menti et que tous les coupables aient dit la vérité ?

Exercice 3 *Connecteur de Sheffer (6 points)*

On définit le connecteur de Sheffer noté $|$ (barre de Sheffer, ou encore NAND) par : $p \mid q \overset{\text{def}}{=} \neg(p \wedge q)$

1. Donner la table de vérité de la formule $(p \mid q)$
2. Donner la table de vérité de la formule $((p \mid q) \mid (p \mid q))$
3. On veut maintenant exprimer les connecteurs usuels en utilisant la barre de Sheffer, et rien qu'elle.
   (a) Donner la table de vérité de la formule $(p \mid p)$ et en déduire que le connecteur $\neg$ peut être défini en n'utilisant que la barre de Sheffer.
   (b) Trouver une formule équivalente à $p \vee q$, qui n'utilise que la barre de Sheffer (éventuellement plusieurs fois).
   (c) Trouver une formule équivalente à $p \Rightarrow q$, qui n'utilise que la barre de Sheffer (éventuellement plusieurs fois).
4. Définir par des équations récursives une fonction `shef` qui étant donnée une formule propositionnelle construite sur les connecteurs habituels, la transforme

en une formule qui ne contient que des variables propositionnelles et la barre de Sheffer.

5. Donner le résultat de $\texttt{shef}(x \vee (y \vee z))$.
6. Si n est le nombre de connecteurs logiques dans la formule P, quel est l'ordre de grandeur du nombre de barres de Sheffer dans la formule $\texttt{shef}(P)$ en fonction de n ? On pourra étudier le nombre de connecteurs dans la formule $\texttt{shef}(x_p \vee \ldots \vee x_1 \vee x_0)$ en fonction de p.
7. Soit C et D deux formules, montrer que

$$C, A, B \models D \qquad \text{si et seulement si} \qquad C \models (A \mid B) \vee D$$

Exercice 4 *Modélisation (5 points)*

On considère une signature avec a et f deux symboles de constante, J et G deux symboles de prédicats binaires. On interprète ces objets de la manière suivante :

— a est l'équipe d'Allemagne et f est l'équipe de France ;

— $J(x, y)$ représente "x a joué un match contre y" et $G(x, y)$ représente "x a gagné un match contre y."

1. Exprimer par des formules du calcul des prédicats les faits suivants :
   (a) L'Equipe de France a gagné (au moins) un match et en a perdu (au moins) un
   (b) L'Equipe de France et l'équipe d'Allemagne ont fait match nul (aucun des deux n'a gagné)
   (c) Une équipe a gagné tous ses matchs
   (d) Aucune équipe n'a perdu tous ses matchs
2. On considère la phrase suivante : "tous ceux qui ont joué contre une équipe qui a gagné tous ses matchs ont gagné au moins un match". Parmi les

formules suivantes, dire lesquelles expriment la phrase ci-dessus et lesquelles sont équivalentes.

(a) $\forall x, \exists y, (J(x,y) \wedge \forall z, (J(y,z) \Rightarrow G(y,z)) \Rightarrow \exists v, G(x,v))$

(b) $\forall x, (\exists y, (J(x,y) \wedge \forall z, (J(y,z) \Rightarrow G(y,z)))) \Rightarrow \exists v, G(x,v)$

(c) $\exists x, ((\forall y, (J(x,y) \Rightarrow G(x,y))) \Rightarrow \forall z, (J(x,z) \Rightarrow \exists v, G(x,v)))$

(d) $\forall x, \forall y, (J(x,y) \wedge \forall z, (J(y,z) \Rightarrow G(y,z)) \Rightarrow \exists v, G(x,v))$

(e) $\forall x, (\forall y, J(x,y) \wedge \forall z, (J(y,z) \Rightarrow G(y,z))) \Rightarrow \exists v, G(x,v)$

3. On abandonne notre interprétation de a comme allemands et f français et, à la place, se donne le tableau de matchs suivant dans lequel on a des équipes a, b, c, d, e et f. Pour garder le score d'un match entre les équipes x et y on commence par ordonner les deux équipes (par exemple $x < y$) puis on inscrit le résultat sur la ligne x et la colonne y (le tableau n'est donc rempli que dans sa partie supérieure). Le résultat est le nombre 1 si x a gagné contre y, -1 si x a perdu contre y (et donc y a gagné contre x) et 0 si il y a eu match nul entre les deux équipes. Tous les matchs joués apparaissent au tableau.

	b	c	d	e	f
a	-1		-1	-1	0
b		-1		1	
c			1	1	
d				-1	
e					-1

Ce tableau nous permet d'interpréter les relations G et J sur le domaines $D \stackrel{\text{def}}{=} \{a,b,c,d,e,f\}$. On appelle I cette interprétation et on cherche à connaitre la valeur de vérité des formules dans cette interprétation.

(a) Comment voit-on dans le tableau si $G(t,u)$ est vrai ?

(b) Donner l'ensemble des couples qui appartiennent à la relation G dans l'interprétation I.

(c) Comment voit-on dans le tableau qu'une équipe a gagné tous ses matchs ? n'en a perdu aucun ?

(d) Pour quelles valeurs de y la formule $\forall z, (J(y,z) \Rightarrow G(y,z))$ est-elle vraie dans l'interprétation I ?

(e) Dire pour les formules de la question 2 si elles sont ou non vraies dans l'interprétation I.

Exercice 5 *Propriété de graphes (BONUS 4 points)*

L'objet de cet exercise est d'explorer quelques propriétés des graphes exprimées en logique du premier ordre.

Lorsqu'on étudie les *graphes en mathématiques ou en informatique*, on s'appuie sur la théorie des ensembles : un graphe est donné par deux ensembles, l'ensemble des sommets $\mathcal{V}$ et l'ensemble des arêtes $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$. Pour deux sommets x et y, on a $(x,y) \in \mathcal{E}$ si et seulement si il existe une arète qui part du sommet x et arrive au sommet y. On peut exprimer les propriétés des graphes en utilisant tous les outils disponibles en théorie des ensembles (entiers, fonctions, égalité etc.) et on peut également en théorie des ensembles quantifier sur un graphe quelconque.

La théorie des graphes en *logique du premier ordre* repose sur un langage beaucoup plus pauvre dans lequel on considère les propriétés d'un seul graphe. Pour cela on introduit une signature avec deux symboles de prédicat d'arité 2 : un symbole E qui sert à caractériser les arètes et l'égalité $=$. On note $\mathcal{G}$ l'ensemble des axiomes de la théorie de l'égalité associés à ce langage.

Une interprétation I de cette théorie est donnée par un domaine $\mathcal{D}$ et des interprétations $(E_I, =_I)$ des deux symboles de prédicat. Les interprétations E_I et $=_I$ sont des relations binaires sur $\mathcal{D}$ donc des sous-ensembles de $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$. On va ici ne considérer que des modèles dits *équationnels* dans lesquels le symbole d'égalité de la logique est interprété par l'égalité (mathématique) de $\mathcal{D}$ (si le symbole d'égalité est interprété par une relation d'équivalence plus générale, il faut se placer dans l'espace quotient $\mathcal{D}/_{=_I}$ pour retrouver un modèle équationnel). L'interprétation I correspond à un graphe (au sens mathématique) dont les sommets sont les éléments de $\mathcal{D}$ et les arêtes correspondent à l'ensemble E_I. Réciproquement tout graphe $\mathcal{V}, \mathcal{E}$ définit une interprétation de la théorie des graphes avec pour domaine $\mathcal{V}$. L'interprétation du symbole E est l'ensemble des arêtes $\mathcal{E}$ et l'interprétation du symbole d'égalité est l'égalité sur $\mathcal{V}$.

Dans les questions qui suivent, lorsqu'il est demandé d'écrire une formule logique représentant une certaine propriété mathématique des graphes, il s'agit de l'exprimer *en utilisant uniquement les symboles de prédicats E et $=$ de la théorie des graphes et les connecteurs et quantificateurs logiques* (les quantifications portent uniquement sur des variables qui représentent un sommet quelconque), aucune autre notation "mathématique" n'est autorisée.

1. Traduire en formule logique de la théorie des graphes les propriétés suivantes :
   (a) De tout sommet qui a une arète qui boucle sur lui-même, il part également une arète sur un sommet différent.
   (b) Il n'y a pas de sommet isolé (un sommet est isolé s'il n'y a aucune arète qui part ou qui arrive sur ce sommet).
   (c) Il existe 3 sommets distincts reliés deux à deux par des arètes (le sens de l'arète est indifférent)
2. Traduire en langue naturelle (en utilisant le vocabulaire usuel des graphes) les propriétés logiques suivantes
   (a) $\forall x\, y, E(x, y) \Rightarrow \neg E(y, x)$
   (b) $\forall x, \exists y\, z, E(x, y) \wedge E(x, z)$
   (c) $\exists x\, y, \neg E(x, y) \wedge \neg E(y, x)$
3. On s'intéresse à la propriété d'existence d'un chemin entre deux sommets du graphe. D'un point de vue mathématique, on dira qu'il existe un chemin de

taille n entre deux sommets x et y s'il existe des sommets $x_0, \dots x_{n+1}$ avec $x_0 = x, x_{n+1} = y$ et pour $i = 0 \dots n$, $(x_i, x_{i+1}) \in \mathcal{E}$.

Si une formule P contient une variable libre x, on pourra convenir de la noter $P[x]$. On pourra alors utiliser la notation $P[t]$ pour représenter la formule $P[x \leftarrow t]$ obtenue en remplaçant les occurrences libres de la variable x dans P par le terme t.

(a) Reprendre la définition mathématique pour expliciter à quelle condition il existe un chemin de longueur 0 entre x et y.

Définir une formule logique $C_0[x, y]$ paramétrée par deux variables libres x et y qui est vraie si et seulement si x et y sont deux sommets reliés par un chemin de longueur 0.

(b) On suppose qu'on a construit une formule $C_n[x, y]$ paramétrée par deux variables libres x et y qui est vraie si et seulement si x et y sont deux sommets reliés par un chemin de longueur n. Utiliser $C_n[x, y]$ (ou des instances de cette formule) pour construire une formule $C_{n+1}[x, y]$ paramétrée par deux variables libres x et y qui est vraie si et seulement si x et y sont deux sommets reliés par un chemin de longueur $n + 1$.

(c) Pour un entier quelconque $n \in \mathbb{N}$, la formule $C_n[x, y]$ est bien une formule de la théorie des graphes.

Expliciter cette formule dans le cas particulier de $n = 2$ (c'est-à-dire donner la définition de $C_2[x, y]$ en n'utilisant que les symboles $E, =$ et les connecteurs et quantificateurs logiques).

4. On suppose qu'il existe une formule du premier ordre $C[x, y]$ dans le langage de la théorie des graphes qui est vraie dans un modèle si et seulement si il existe un chemin (de longueur quelconque) entre les sommets correspondant à x et y. On ajoute deux constantes a, b au langage, qui représentent donc des sommets.

(a) Montrer que tout sous-ensemble fini de l'ensemble des formules $\mathcal{G} \cup$

$\{\neg C_n[a,b] | n \in \mathbb{N}\} \cup \{C[a,b]\}$ est satisfiable.

(b) Montrer que l'ensemble des formules $\mathcal{G} \cup \{\neg C_n[a,b] | n \in \mathbb{N}\} \cup \{C[a,b]\}$ est insatisfiable.

5. On admet dans cette question le théorème de compacité pour les formules de la logique du premier ordre. C'est-à-dire qu'un ensemble $\mathcal{A}$ quelconque de formules est satisfiable si et seulement si tout *sous-ensemble fini* de formules de $\mathcal{A}$ est satisfiable.

   En appliquant ce théorème à l'ensemble $\mathcal{G} \cup \{\neg C_n[a,b] | n \in \mathbb{N}\} \cup \{C[a,b]\}$, la question précédente montre une contradiction. Que peut-on en déduire par rapport aux hypothèses faites ?