Examen - 15 décembre 2021

L'examen dure 2 heures. L'énoncé est composé de 6 pages, le barème est indicatif.
Toutes les réponses (sauf QCM) devront être clairement justifiées.
Le seul document autorisé est une page A4 manuscripte recto-verso.
Le tableau résumant les règles du système G est donné à la fin du sujet.
Ne pas cacheter les copies ! (exception sanitaire)
Correction :

Exercice 1 *QCM (5 points)*

Le nom et le numéro d'étudiant doivent être reportés sur l'énoncé du QCM que vous rendrez avec votre copie (utiliser un stylo bleu ou noir pour cocher les cases, pas de crayon-papier).

Sauf indication contraire, une bonne réponse rapporte $\frac{1}{4}$, une mauvaise réponse retire $\frac{1}{8}$ point, l'absence de réponse vaut 0 point.

Correction : *Voir correction individuelle des QCM.*

Exercice 2 *Satisfiabilité (5 points)*

Exercice à compléter sur la feuille de QCM.

Exercice 3 *Modèles et preuves au premier ordre (6 points)*

On se place dans un langage dont la signature contient un symbole de constante 0, un symbole de fonction unaire S et un symbole de prédicat binaire L.

Soient les formules :

D1 $\stackrel{\text{def}}{=} \forall x, L(0, S(x))$

D2 $\stackrel{\text{def}}{=} \forall x\, y, L(x, y) \Leftrightarrow L(S(x), S(y))$

D3 $\stackrel{\text{def}}{=} \forall x, \neg L(x, x)$

D4 $\stackrel{\text{def}}{=} \forall x\, y\, z, L(x, y) \land L(y, z) \Rightarrow L(x, z)$

1. On se donne une interprétation de la signature dont le domaine est l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, dans lequel la constante 0 est interprétée par l'entier 0 et le symbole de fonction S est interprété par la fonction qui ajoute 1 à un entier.
   (a) Quelle est l'interprétation du terme $S(S(S(0)))$?
   (b) On se donne plusieurs interprétations du symbole de prédicat L. Pour chacune d'entre elles, dire si les formules $D1$, $D2$, $D3$ et $D4$ sont vraies ou fausses.
   - L1 : L est interprété par l'ensemble vide
   - L2 : L est interprété par l'ensemble de tous les couples d'entiers naturels
   - L3 : L est interprété par l'ensemble de tous les couples d'entiers naturels $(0, n)$ tels que n est strictement positif
   - L4 : L est interprété par l'ensemble de tous les couples d'entiers naturels (n, m) tels que n est strictement plus petit que m

Donner une justification courte des cas où les formules sont fausses.

(c) Donner une interprétation de L dans laquelle toutes les formules $D1$, $D2$, $D3$ et $D4$ sont fausses. Justifier votre réponse.

Correction :

(a) $S(S(S(0)))$ *est interprété par l'entier* 3

(b)

	$D1$	$D2$	$D3$	$D4$
$L1$	F	V	V	V
$L2$	V	V	F	V
$L3$	V	F	V	V
$L4$	V	V	V	V

(c) On peut prendre par exemple une interprétation de L *qui contient exactement les couples* $\{(0,0),(0,1),(1,0)\}$. *On a* $\{x \mapsto 1\} \not\models L(0,S(x))$, $\{x \mapsto 0, y \mapsto 0\} \not\models L(x,y) \Leftrightarrow L(S(x),S(y))$, $\{x \mapsto 0\} \not\models \neg L(x,y)$ *et* $\{x \mapsto 1, y \mapsto 0, z \mapsto 1\} \not\models L(x,y) \wedge L(y,z) \Rightarrow L(x,z)$,

2. On souhaite montrer que $D3, D4 \models \forall x\, y, L(x,y) \Rightarrow \neg L(y,x)$.

   (a) Faire une preuve dans le système G de la validité du séquent $\Gamma, L(t,u), L(u,v) \vdash L(t,v)$, pour un ensemble de formules Γ qui contient la formule $D4$ et des termes t, u, v quelconques. On pourra réutiliser cette propriété dans la suite sans redonner l'arbre de dérivation.

   (b) Utiliser le système G pour montrer la propriété $D3, D4 \models \forall x\, y, L(x,y) \Rightarrow \neg L(y,x)$.

   (c) utilisant la méthode de résolution dont on détaillera les différentes étapes pour montrer $D3, D4 \models \forall x\, y, L(x,y) \Rightarrow \neg L(y,x)$.

Correction :

(a) Preuve dans le système G de $\Gamma, L(t,u), L(u,v) \vdash L(t,v)$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, L(t,u), L(u,v), L(t,v) \vdash L(t,v)} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, L(t,u), L(u,v) \vdash L(t,v), L(t,u)} \quad \dfrac{}{\Gamma, L(t,u), L(u,v) \vdash L(t,v), L(u,v)}}{\Gamma, L(t,u), L(u,v) \vdash L(t,v), L(t,u) \wedge L(u,v)}\wedge d}{\Gamma, L(t,u), L(u,v), L(t,u) \wedge L(u,v) \Rightarrow L(t,v) \vdash L(t,v)}\Rightarrow g}{\Gamma, L(t,u), L(u,v), \forall z, L(t,u) \wedge L(u,z) \Rightarrow L(t,z) \vdash L(t,v)}\forall g}{\Gamma, L(t,u), L(u,v), \forall y\, z, L(t,y) \wedge L(y,z) \Rightarrow L(t,z) \vdash L(t,v)}\forall g}{\Gamma, L(t,u), L(u,v) \vdash L(t,v)}\forall g
$$

(b) on note Γ, *l'ensemble des formules* $D3, D4$.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, L(x,y), L(y,x) \vdash L(x,x)}\text{TRANS}}{\Gamma, L(x,y), L(y,x), \neg L(x,x) \vdash}\neg g}{\Gamma, L(x,y), L(y,x) \vdash}\forall g}{\Gamma, L(x,y) \vdash \neg L(y,x)}\neg d}{\Gamma \vdash L(x,y) \Rightarrow \neg L(y,x)}\Rightarrow d}{\Gamma \vdash \forall y, L(x,y) \Rightarrow \neg L(y,x)}\forall d}{\Gamma \vdash \forall x\, y, L(x,y) \Rightarrow \neg L(y,x)}\forall d
$$

(c) Preuve par la méthode de résolution

i. Mise en forme clausale de $D3, D4, \neg\forall x\, y, L(x,y) \Rightarrow \neg L(y,x)$ *:*

C1 $\neg L(y,y)$

C2 $\neg L(p,q) \vee \neg L(q,r) \vee L(p,r)$

C3 La forme normale de négation de $\neg\forall x\, y, L(x,y) \Rightarrow \neg L(y,x)$ *est* $\exists x\, y, L(x,y) \wedge L(y,x)$*, la skolemisation introduit deux symboles de constante* a *et* b *et deux clauses* $L(a,b)$ *et* $L(b,a)$*.*

La résolution donne

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg L(p,q) \vee \neg L(q,r) \vee L(p,r) \qquad L(a,b)}{\neg L(b,r) \vee L(a,r)}\,p \leftarrow a, q \leftarrow b \qquad L(b,a)}{L(a,a)}\,r \leftarrow a \qquad \neg L(y,y)}{\perp}\,y \leftarrow a$$

Exercice 4 *Modélisation (6 points)*

On se donne un langage avec trois prédicats unaires H, E et S et deux prédicats binaires O et l'égalité notée $=$ de manière infixe.

On décide que ces prédicats représentent les notions suivantes :

— $O(x,y)$: x offre un cadeau à y (ou de manière équivalente, y reçoit un cadeau de x)
— $H(x)$: x est heureux
— $E(x)$: x est un enfant
— $S(x)$: x est sage
— $x = y$: x et y sont égaux

1. Traduire en langage naturel les formules suivantes
   (a) $\exists x, \forall y, H(y) \Rightarrow O(x,y)$
   (b) $\forall y, H(y) \Rightarrow \exists x, O(x,y)$
   (c) $\forall x, (\forall y, O(x,y) \Rightarrow S(y)) \Rightarrow H(x)$
   (d) $\forall x\, y, O(x,y) \Rightarrow \exists z, O(z,x)$

   Correction :

   — *il existe une personne qui offre des cadeaux à toutes les personnes heureuses*
   — *toutes les personnes heureuses reçoivent (au moins) un cadeau*
   — *les personnes qui n'ont offert des cadeaux qu'à des personnes sages sont heureuses*
   — *Tous ceux qui offrent un cadeau en reçoivent également un (pas forcément de la personne à qui ils ont fait leur cadeau)*

2. Traduire sous forme de formule logique les énoncés suivants
   (a) Tous les enfants qui reçoivent (au moins) un cadeau sont heureux
   (b) Tous les enfants sages reçoivent (au moins) un cadeau
   (c) Il existe une personne qui est sage mais qui n'est pas heureuse
   (d) Il existe un enfant qui n'a reçu un cadeau que d'une seule personne

   Correction :

   (a) $\forall x, E(x) \Rightarrow (\exists p, O(p,x)) \Rightarrow H(x)$
   (b) $\forall x, E(x) \wedge S(x) \Rightarrow \exists p, O(p,x)$

(c) $\exists x, S(x) \wedge \neg H(x)$

(d) $\exists x, E(x) \wedge \exists p, O(p,x) \wedge \forall q, O(q,x) \Rightarrow p = q$

3. Dire parmi les formules suivantes lesquelles sont équivalentes
   (a) $\neg\forall x, H(x) \Rightarrow S(x)$
   (b) $\forall x, \neg H(x) \Rightarrow S(x)$
   (c) $\exists x, \neg H(x) \Rightarrow \neg S(x)$
   (d) $\exists x, H(x) \Rightarrow S(x)$
   (e) $\exists x, S(x) \Rightarrow H(x)$
   (f) $\exists x, H(x) \wedge \neg S(x)$

   Correction : *On a* $(a) \equiv (f)$ *et* $(c) \equiv (e)$

4. On modélise le même problème de manière propositionnelle. On suppose fixé l'ensemble fini P des personnes et on introduit des variables propositionnelles :
   — S_p, pour chaque $p \in P$ vraie si et seulement si p est sage.
   — H_p, pour chaque $p \in P$ vraie si et seulement si p est heureux.
   — E_p, pour chaque $p \in P$ vraie si et seulement si p est un enfant.
   — $O_{p,q}$ pour chaque couple de personnes $p, q \in P \times P$, vraie si et seulement si p offre un cadeau à q.

   (a) Donner le nombre de variables propositionnelles dans le cas particulier où l'ensemble P contient 3 éléments et dans le cas où l'ensemble P contient n éléments.

   Correction : *si* P *a trois éléments, il y a* $3{+}3{+}3{+}9 = 18$ *variables propositionelles, si on a* n *éléments, il y en a* $3n + n^2$.

   (b) Dans cette question, on suppose que l'ensemble P contient uniquement 3 éléments $\{a, b, c\}$.

   Donner des formules en **logique propositionnelle** en utilisant uniquement les variables propositionnelles S_p, H_p, E_p et $O_{p,q}$ pour $p, q \in \{a, b, c\}$ et les connecteurs propositionnels qui expriment les propriétés suivantes :
   i. Il existe un enfant sage
   ii. Tous les enfants sages sont heureux
   iii. La personne a a reçu un cadeau
   iv. Si une personne fait un cadeau à une autre alors elle reçoit en retour un cadeau de cette personne

   Correction :
   i. $((E_a \wedge S_a) \vee (E_b \wedge S_b) \vee (E_c \wedge S_c)$
   ii. $(E_a \wedge S_a \Rightarrow H_a) \wedge (E_b \wedge S_b \Rightarrow H_b) \wedge (E_c \wedge S_c \Rightarrow H_c)$
   iii. $O_{a,a} \vee O_{b,a} \vee O_{c,a}$
   iv. $(O_{a,b} \Leftrightarrow O_{b,a}) \wedge (O_{a,c} \Leftrightarrow O_{c,a}) \wedge (O_{b,c} \Leftrightarrow O_{c,b})$

   (c) On se place maintenant dans le cadre général d'un ensemble P fini quelconque. On introduit les notations suivantes pour une famille $(A_p)_{p\in P}$ de formules paramétrées par $p \in P$.

   $\bigvee_{p\in P} A_p$ la disjonction généralisée des formules et $\bigwedge_{p\in P} A_p$ la conjonction généralisée.

Ainsi si $P = \{a, b, c\}$ et $A_p \stackrel{\text{def}}{=} H_p \Rightarrow S_p$ on a $\bigvee_{p\in P} A_p = (H_a \Rightarrow S_a) \vee (H_b \Rightarrow S_b) \vee (H_c \Rightarrow S_c)$ et $\bigwedge_{p\in P} A_p = (H_a \Rightarrow S_a) \wedge (H_b \Rightarrow S_b) \wedge (H_c \Rightarrow S_c)$.

On cherche à traduire une formule exprimée au premier ordre en une formule du calcul propositionnel. Les quantificateurs universels deviennent des conjonctions généralisées pour tous les $p \in P$ et les quantificateurs existentiels des disjonctions généralisées pour tous les $p \in P$. Les formules atomiques sont de la forme un prédicat appliqué à des variables comme $E(x)$ ou $O(x, y)$ et se transforment en variables propositionnelles indexées par des éléments de P.

Par exemple la formule du premier ordre $\exists x, H(x)$ est traduite dans la formule propositionnelle $\bigvee_{p\in P} H_p$ et la formule du premier ordre $\forall x, \exists y, O(x, y)$ est traduite dans la formule propositionnelle $\bigwedge_{p\in P} \bigvee_{q\in P} O_{p,q}$.

Il est tout à fait possible de réutiliser le symbole utilisé pour la variable liée dans le quantificateur comme nom de paramètre pour les conjonctions et disjonctions généralisées et d'écrire donc dans les exemples précédents $\bigvee_{x\in P} H_x$ et $\bigwedge_{x\in P} \bigvee_{y\in P} O_{x,y}$.

i. Donner la traduction de la formule $\forall x, S(x) \Rightarrow \exists y, H(y) \wedge O(y, x)$

ii. Définir par des équations récursives une fonction `trad` qui prend en argument une formule du premier ordre close sur la signature E, S, H, O et la transforme en une formule propositionnelle utilisant les variables propositionnelles S_p, H_p, E_p et $O_{p,q}$ qui représente la même propriété.

Correction :

i. $\bigwedge_{x\in P} S_x \Rightarrow \bigvee_{y\in P} H_y \wedge O_{y,x}$

ii.

$$\begin{aligned}
\mathtt{trad}(\bot) &= \bot \\
\mathtt{trad}(\top) &= \top \\
\mathtt{trad}(H(x)) &= H_x \\
\mathtt{trad}(S(x)) &= S_x \\
\mathtt{trad}(E(x)) &= E_x \\
\mathtt{trad}(O(x,y)) &= O_{x,y} \\
\mathtt{trad}(A \circ B) &= \mathtt{trad}(A) \circ \mathtt{trad}(B) && \circ \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow\} \\
\mathtt{trad}(\forall x, A) &= \textstyle\bigwedge_{x\in P} \mathtt{trad}(A) \\
\mathtt{trad}(\exists x, A) &= \textstyle\bigvee_{x\in P} \mathtt{trad}(A)
\end{aligned}$$

Rappel des règles du système G

hypothèse	$(\textsc{Hyp})\dfrac{}{A,\Gamma\vdash\Delta,A}$	
	gauche	droite
$\bot$	$\dfrac{}{\bot,\Gamma\vdash\Delta}$	$\dfrac{\Gamma\vdash\Delta}{\Gamma\vdash\Delta,\bot}$
$\top$	$\dfrac{\Gamma\vdash\Delta}{\top,\Gamma\vdash\Delta}$	$\dfrac{}{\Gamma\vdash\Delta,\top}$
$\neg$	$\dfrac{\Gamma\vdash\Delta,A}{\neg A,\Gamma\vdash\Delta}$	$\dfrac{A,\Gamma\vdash\Delta}{\Gamma\vdash\Delta,\neg A}$
$\wedge$	$\dfrac{A,B,\Gamma\vdash\Delta}{A\wedge B,\Gamma\vdash\Delta}$	$\dfrac{\Gamma\vdash\Delta,A\quad\Gamma\vdash\Delta,B}{\Gamma\vdash\Delta,A\wedge B}$
$\vee$	$\dfrac{A,\Gamma\vdash\Delta\quad B,\Gamma\vdash\Delta}{A\vee B,\Gamma\vdash\Delta}$	$\dfrac{\Gamma\vdash\Delta,A,B}{\Gamma\vdash\Delta,A\vee B}$
$\Rightarrow$	$\dfrac{\Gamma\vdash\Delta,A\quad B,\Gamma\vdash\Delta}{A\Rightarrow B,\Gamma\vdash\Delta}$	$\dfrac{A,\Gamma\vdash\Delta,B}{\Gamma\vdash\Delta,A\Rightarrow B}$
$\forall$	$\dfrac{P[x\leftarrow t],(\forall x,P),\Gamma\vdash\Delta}{(\forall x,P),\Gamma\vdash\Delta}$	$\dfrac{\Gamma\vdash\Delta,P\qquad x\notin\mathsf{Vl}(\Gamma,\Delta)}{\Gamma\vdash\Delta,(\forall x,P)}$
$\exists$	$\dfrac{P,\Gamma\vdash\Delta\qquad x\notin\mathsf{Vl}(\Gamma,\Delta)}{(\exists x,P),\Gamma\vdash\Delta}$	$\dfrac{\Gamma\vdash\Delta,(\exists x,P),P[x\leftarrow t]}{\Gamma\vdash\Delta,(\exists x,P)}$