Syntaks og semantik

Lektion 2

7 februar 2008

Forord

- alfabet: en endelig mængde, normalt betegnet Σ
- bogstav / tegn / symbol: et element i Σ
- ord / streng: en endelig følge $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ af bogstaver. Normalt skrevet uden parenteser og komma: $a_1 a_2 \dots a_k$
- ε: det tomme ord (med 0 bogstaver)
- at sammensætte ord: $abe \circ kat = abekat$
- ε er identiteten for $\circ$: $w \circ \varepsilon = \varepsilon \circ w = w$ for alle ord w

- Sprog (over Σ): en mængde af ord med bogstaver fra Σ
- $\emptyset$: det tomme sprog
- Σ^*: sproget bestående af *alle* ord over Σ

$\Rightarrow$ L er et sprog over Σ hvis og kun hvis $L \subseteq \Sigma^*$

Bemærk: Det kan godt være vi snakker om “ord” og “sprog” her, men vi tillægger dem ikke nogen betydning! Vi er (lige nu) *kun* interesseret i formen, ikke i betydningen.

Givet sprog $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$, da kan vi danne sprogene

- $L_1 \cup L_2 = \{w \mid w \in L_1 \text{ eller } w \in L_2\}$
- $L_1 \circ L_2 = \{w_1 \circ w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$
- $L_1^* = \{w_1 \circ w_2 \circ \cdots \circ w_k \mid \text{alle } w_i \in L_1\}$

Disse 3 operationer (forening, sammensætning og stjerne) kaldes de regulære operationer på sprog.

(Der er andre operationer på sprog, ja.)

- formål: At beskrive sprog (som generelt er *uendelige* mængder) ved *endelige* udtryk.
- a (for $a \in \Sigma$), ε, $\emptyset$
- $R_1 \cup R_2$, $R_1 \circ R_2$, R_1^*, for R_1, R_2 regulære udtryk
- en rekursiv definition
- forkortelser: $\Sigma = a_1 \cup a_2 \cup \cdots \cup a_n$ (for $\Sigma = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$), $R^+ = R \circ R^*$
- $[\![a]\!] = \{a\}$, $[\![\varepsilon]\!] = \{\varepsilon\}$, $[\![\emptyset]\!] = \emptyset$
- $[\![R_1 \cup R_2]\!] = [\![R_1]\!] \cup [\![R_2]\!]$, $[\![R_1 \circ R_2]\!] = [\![R_1]\!] \circ [\![R_2]\!]$, $[\![R_1^*]\!] = [\![R_1]\!]^*$
- ikke alle sprog kan beskrives ved regulære udtryk! (se lektion 4 …)

Anvendelse:

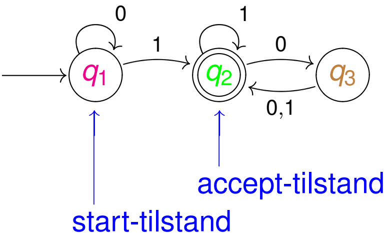
- tekstbehandling (`grep`, `sed`, etc.)
- leksikalsk analyse: at splitte en input stream op i tokens:

$$\underbrace{\texttt{while}}\,\underbrace{\texttt{(}}\,\underbrace{\texttt{xy}}\,\underbrace{<}\,\underbrace{\texttt{zp}}\,\underbrace{\texttt{)}}\,\underbrace{\{}\,\underbrace{\texttt{t}}\,\underbrace{=}\,\underbrace{\texttt{t}}\,\underbrace{*}\,\underbrace{1.2}\,\underbrace{;}\,\underbrace{\}}$$

- (`flex`)

Endelige automater

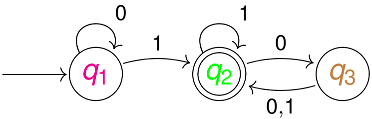
- at beskrive sprog ved maskiner der kan læse dem
- den mest simple maskine: endelig automat
- tilstande, og transitioner der læser bogstaver:



- eksempel: læs ordet "1101": $q_1 \xrightarrow{1} q_2 \xrightarrow{1} q_2 \xrightarrow{0} q_3 \xrightarrow{1} q_2$ $\Rightarrow$ accept
- eksempel: læs ordet "0110": $q_1 \xrightarrow{0} q_1 \xrightarrow{1} q_2 \xrightarrow{1} q_2 \xrightarrow{0} q_3$ $\Rightarrow$ afvis

Definition 1.5: En endelig automat er en 5-tupel $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, hvor delene er

1. Q : en endelig mængde af tilstande
2. Σ : en endelig mængde af bogstaver (input-alfabetet)
3. $\delta : Q \times \Sigma \to Q$: transitions-funktionen
4. $q_0 \in Q$: starttilstanden
5. $F \subseteq Q$: mængden af accepttilstande



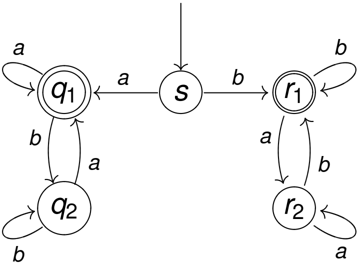
Her har vi:

1. tilstande $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$
2. inputalfabetet $\Sigma = \{0, 1\}$
3. transitionsfunktionen $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ givet ved

	0	1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_3	q_2
q_3	q_2	q_2

4. starttilstanden $q_0 = q_1$
5. accepttilstandene $F = \{q_2\}$

Eksempel 1.11:



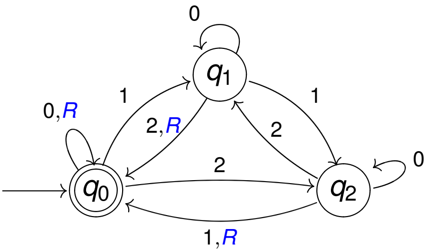
$$Q = \{s, q_1, q_2, r_1, r_2\}$$
$$\Sigma = \{a, b\}$$
$$q_0 = s$$
$$F = \{q_1, r_1\}$$

δ :

	a	b
s	q_1	r_1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_2
r_1	r_2	r_1
r_2	r_2	r_1

Accepterer alle ord der starter og slutter med samme bogstav.

Eksempel 1.13:



Accepterer alle ord hvor summen af cifrene efter det sidste "*R*" er deleligt med 3 !

Eksempel 1.15: En endelig automat over alfabetet $\{0, 1, 2, R\}$ der accepterer alle ord hvor summen af cifrene efter det sidste "R" er deleligt med et givet tal i:

$$
\begin{aligned}
Q &= \{q_0, q_1, \ldots, q_{i-1}\} \\
\Sigma &= \{0, 1, 2, R\} \\
q_0 &= q_0 \\
F &= \{q_0\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta(q_j, 0) &= q_j \\
\delta(q_j, 1) &= q_{j+1 \text{ mod } i} \\
\delta(q_j, 2) &= q_{j+2 \text{ mod } i} \\
\delta(q_j, R) &= q_0
\end{aligned}
$$

– kan umiddelbart generaliseres til $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, R\}$ (Hvordan?)

Definition: Lad $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ være en endelig automat, og lad $w = w_1 w_2 \dots w_n \in \Sigma^*$. Da siges M at acceptere w hvis der findes en følge $(r_0, r_1, \dots, r_n)$ af tilstande $r_i \in Q$ således at

1. $r_0 = q_0$,
2. $r_{i+1} = \delta(r_i, w_{i+1})$ for alle $i = 0, 1, \dots, n-1$, og
3. $r_n \in F$.

Sproget som genkendes af M er

$$[\![M]\!] = L(M) = \{w \mid M \text{ accepterer } w\}$$

Eksempel: *Sætning:* Sproget som genkendes af automaten M fra eksempel 1.15 er
$L = \{w \mid \text{summen af cifrene efter sidste “}R\text{” er deleligt med } i\}$

Bevis: Lad $w \in \Sigma^*$, og skriv w som $w = \Sigma^* R w_1 w_2 \dots w_k$, hvor $w_1, w_2, \dots, w_k \in \{0, 1, 2\}$. Dvs. $w_1 w_2 \dots w_k$ er den del af w der står efter det *sidste* “R.”
Efter at have læst det sidste “R,” er M i tilstand q_0. Lad nu $r_1, r_2, \dots, r_k$ betegne de tilstande som M er i efter at have læst $w_1, w_2, \dots, w_k$. Da er

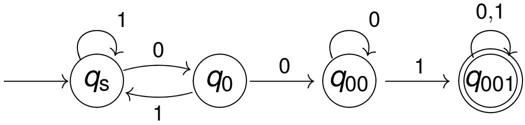
$$\begin{aligned}
r_1 &= \delta(q_0, w_1) = q_{w_1 \bmod i} \\
r_2 &= \delta(r_1, w_2) = \delta(q_{w_1 \bmod i}, w_2) = q_{w_1 + w_2 \bmod i} \\
r_3 &= \delta(r_2, w_3) = \delta(q_{w_1 + w_2 \bmod i}, w_3) = q_{w_1 + w_2 + w_3 \bmod i} \\
&\vdots \\
r_k &= q_{w_1 + w_2 + \cdots + w_k \bmod i}
\end{aligned}$$

Bemærk nu at w accepteres af M hvis og kun hvis $r_k = q_0$. Dvs. w accepteres af M hvis og kun hvis
$w_1 + w_2 + \cdots + w_k \bmod i = 0$. $\square$

Clue: tilstandene repræsenterer *information*!

Eksempel 1.21: En endelig automat der genkender sproget $\Sigma^* 001 \Sigma^*$, for $\Sigma = \{0, 1\}$.

- starttilstand q_s
- tilstand "jeg har lige set '0' " q_0
- tilstand "jeg har lige set '00' " q_{00}
- tilstand "jeg har lige set '001' " (accept!) q_{001}



Definition 1.16: Et sprog siges at være regulært hvis der findes en endelig automat der genkender det.

Eller: Givet et alfabet Σ og $L \subseteq \Sigma^*$, da kaldes L et regulært sprog hvis der findes en endelig automat M over Σ således at $[\![M]\!] = L$.

Vigtig sætning 1.54: Et sprog er regulært hvis og kun hvis det kan beskrives ved et regulært udtryk.

(Beviset ser vi på næste gang.)

Sætning 1.25 / 1.45 / 1.47 / 1.49:
Klassen af regulære sprog er lukket under foreningsmængde $\cup$, sammensætning $\circ$ og stjerne *.
Dvs. hvis A og B er regulære sprog, da er også

- $A \cup B$,
- $A \circ B$ og
- A^*

regulære sprog.

Beviserne skal vi se i dag og næste gang.

Sætning 1.25: Lad A_1 og A_2 være regulære sprog over et fælles alfabet Σ. Da er også $A_1 \cup A_2$ et regulært sprog.

Bevis: Lad $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$, $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ være endelige automater med $[\![M_1]\!] = A_1$ og $[\![M_2]\!] = A_2$.
Konstruér en ny endelig automat $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ved

- $Q = Q_1 \times Q_2$,
- $q_0 = (q_1, q_2)$,
- $F = \{(r_1, r_2) \in Q \mid r_1 \in F_1 \text{ eller } r_2 \in F_2\}$,
- og med $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ defineret som

$$\delta\big((r_1, r_2), a\big) = \big(\delta(r_1, a), \delta(r_2, a)\big)$$

For at vise at $[\![M]\!] = A_1 \cup A_2$, skal vi vise at

1. ethvert $w \in [\![M_1]\!]$ også er i $[\![M]\!]$,
2. ethvert $w \in [\![M_2]\!]$ også er i $[\![M]\!]$, og at
3. ethvert $w \in [\![M]\!]$ også er i $[\![M_1]\!]$ eller i $[\![M_2]\!]$.