DM 4
Automates

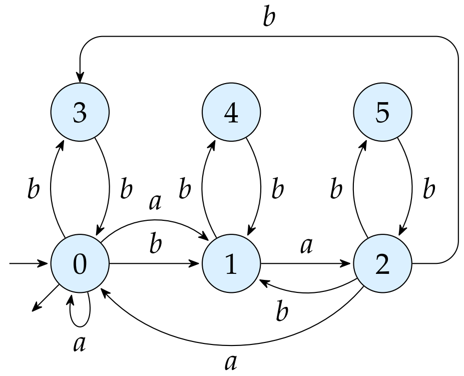
Version du 24 juin 2021

Ce dernier [1] devoir à la maison est à rendre demain, vendredi, au début du TD.

Exercice 1 – Minimisation de Brzozowski

Soyez très méticuleux dans cet exercice. Comptez le nombre de a et de b lorsque vous recopiez un automate du brouillon vers la copie; comptez les flèches entrantes et sortantes de chaque état; n'oubliez pas de marquer les états initiaux et finaux. Le moindre oubli est fatal lorsqu'on enchaîne les opérations comme ici.

Notons $\mathcal{A}$ l'automate non-déterministe suivant :



Le transposé de $\mathcal{A}$, noté $T(\mathcal{A})$, est l'automate dans lequel toutes les flèches de $\mathcal{A}$ ont été retournées (même les états initiaux sont devenus finaux et vice-versa).

Le déterminisé de $\mathcal{A}$, noté $Det(\mathcal{A})$, est le DFA obtenu à partir de $\mathcal{A}$ en utilisant l'algorithme de déterminisation du cours (qui est aussi un théorème du poly...).

1. Construisez $\mathcal{A}' = Det(T(\mathcal{A}))$.
2. Construisez $\mathcal{A}'' = Det(T(\mathcal{A}'))$.
   Note : $\mathcal{A}''$ possède 3 états. Si vous trouvez autre chose vous avez fait une erreur ! [2]
3. Justifiez que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}''$ reconnaissent le même langage.

Ne soyez pas surpris que l'automate $\mathcal{A}''$ soit plus petit que l'automate $D(\mathcal{A})$ (que vous pouvez construire au brouillon si le cœur vous en dit) et même, dans notre cas, plus petit que $\mathcal{A}$. En chaînant ces deux « co-déterminisations » vous avez construit un DFA équivalent à $\mathcal{A}$ de taille minimale : il n'en existe pas avec moins d'états.

Exercice 2 – Conversion d'automates en expressions rationnelles

Soit q et r deux expressions rationnelles dénotant les langages $L(q)$ et $L(r)$ de $\Sigma^\star$. Considérons l'équation $X = qX + r$. Une expression rationnelle t dénotant le langage $L(t)$ est solution de cette équation si

$$L(t) = L(q)L(t) \cup L(r) \tag{1}$$

1. Courage !
2. C'est triste, mais il vaut mieux faire les erreurs chez soi que pendant l'examen : le canapé est bien plus confortable.

1. Montrez (par récurrence sur n) que si t est une solution de (1), alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ L(q)^n L(r) \subset L(t) \tag{2}$$

   Note : par convention $L(q)^0 = \{\varepsilon\}$.

2. Montrez (par récurrence sur n) que si t est une solution de (1) alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ L(t) \subset L(q)^n L(t) \cup L(q)^{n-1} L(r) \cup \cdots \cup L(r). \tag{5}$$

   Attention à ne pas mélanger les r et les t dans l'équation précédente !

3. Si $\varepsilon \notin L(q)$ et que t est une solution de cette équation, montrez que $L(t) \subset L(q^\star r)$.
   Indice : si $\varepsilon \notin L(q)$ les mots de $L(q)^n$ sont au moins de taille n, prenez donc chaque mot de $L(t)$ et regardez comment vous pouvez choisir n dans l'équation (5).

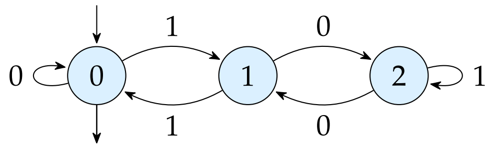
4. Déduisez des questions précédentes le théorème suivant :

   Théorème 1. *Soient q et r deux expressions rationnelles telles que $\varepsilon \notin L(q)$; si l'expression rationnelle t est une solution de l'équation $L(t) = L(q)L(t) \cup L(r)$, alors $L(q^\star r) = L(t)$.*

   Même si plusieurs expressions t peuvent définir ce même langage, nous dirons que cette solution est unique (au sens du langage) pour q et r données.

5. Si $\varepsilon \in L(q)$, l'équation (1) n'admet pas forcément d'unique solution. Donnez une solution t qui ne dépende ni de q ni de r.

6. **Application.** Considérons l'automate $\mathcal{D}_3$ du DM précédent :



   Nous notons t_i l'expression rationnelle dénotant le langage de tous les mots qui peuvent être acceptés par l'automate $\mathcal{D}_3$ *à partir de* de l'état i. On a par exemple $01 \in L(t_2)$ car il est possible d'atteindre un état final en lisant 01 à partir de l'état 2.
   Nous pouvons énoncer des contraintes entre t_0, t_1, et t_2 en lisant la figure. Par exemple si on rajoute un 1 en tête d'un mot reconnu par t_2, il restera reconnu par t_2 à cause de la boucle sur l'état 2. De même si on ajoute un 0 en tête d'un mot reconnu par t_1, il sera cette fois-ci reconnu par t_2. En fait l'expression t_2 satisfait l'équation $t_2 = 0t_1 + 1t_2$.
   Si l'on fait cette lecture de l'automate pour tous les états, on obtient le système d'équations suivant :

$$t_0 = 0t_0 + 1t_1 + \varepsilon \tag{6}$$
$$t_1 = 0t_2 + 1t_0 \tag{7}$$
$$t_2 = 0t_1 + 1t_2 \tag{8}$$

   Le ε a été ajouté à la première équation parce que l'état 0 est final : t_0 accepte donc le mot vide en plus d'accepter les mots de t_1 préfixés par 1 ainsi que ses propres mots préfixés par 0.
   L'expression rationnelle t_0, parce qu'elle est associée à l'état initial, dénote le langage accepté par l'automate. Pour reconstruire une expression rationnelle associée à l'automate, il nous suffit[3] de résoudre le système d'équations (6)-(8) pour trouver t_0.

3. La seule difficulté, vraiment, c'est de bien se mettre dans la tête que nos produits sont des concaténations. La concaténation ne commute pas et n'est pas inversible.

Faisons la première étape ensemble. En remplaçant (7) dans (6) et (8) on élimine t_1 de notre système. Voici une bonne chose de faite :

$$t_0 = (0 + 11)t_0 + 10t_2 + \varepsilon \tag{9}$$
$$t_2 = (00 + 1)t_2 + 01t_0 \tag{10}$$

C'est maintenant à vous de finir : **trouvez** t_0.

Indices : Ces deux équations sont de la forme $t = qt + r$. Commencez donc par appliquer le théorème 1 à l'équation (10) pour exprimer t_2 en fonction de t_0 uniquement, puis injectez votre résultat dans 9 avant d'appliquer à nouveau le théorème.