TD 5
Stabilité des langages rationnels

Version du 24 juin 2021

Exercice 1 – Négation d'expression rationnelle

Posons $\Sigma = \{a, b\}$. Soit L le langage dénoté par l'expression rationnelle $a^\star(ba^\star ba^\star ba^\star)^\star$. Notre but est de construire une expression rationnelle dénotant le langage complémentaire $\overline{L} = \Sigma^\star \setminus L$.

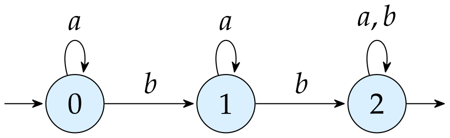
1. $\overline{L}$ est-il forcément rationnel ? Justifiez votre réponse.
2. Proposez un automate fini déterministe A_L reconnaissant L.
3. Donnez $\overline{A_L}$, l'automate complémentaire de A_L.
4. Appliquez l'algorithme de Brzozowski et McCluskey présenté en cours pour construire l'expression rationnelle correspondant à l'automate $\overline{A_L}$.
5. Le complémentaire construit est-il toujours valide si $\Sigma = \{a, b, c\}$? Dans la négative, que faut-il changer à notre procédure de complémentation d'expression rationnelle pour qu'il le soit ?

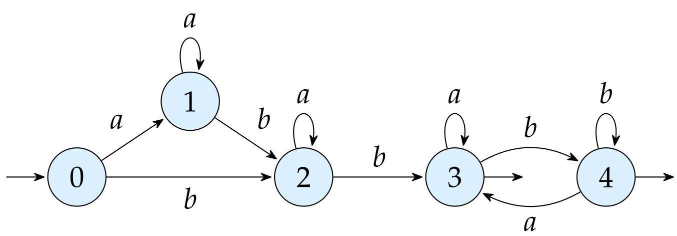
Exercice 2 – Relations entre langages rationnels

1. Soit deux langages rationnels L_1 et L_2 tels que $L_2 \subset L_1$. Le langage $L_1 \setminus L_2$ est-il rationnel ?
2. Soient deux langages L_1 et L_2 tels que $L_2 \subset L_1$. Si l'on sait que L_2 est rationnel, peut-on dire que L_1 l'est aussi ? Justifiez votre réponse.

Exercice 3 – Intersection de langages rationnels

On considère les deux automates suivants :

$A_1 =$ 

et $A_2 =$ 

L'objectif est de montrer que ces deux automates sont équivalents en calculant $\overline{L(A_1)} \cap L(A_2)$ et $L(A_1) \cap \overline{L(A_2)}$.

1. Que doivent valoir $\overline{L(A_1)} \cap L(A_2)$ et $L(A_1) \cap \overline{L(A_2)}$ si les automates sont équivalents ?
2. Calculez $\overline{A_1}$ et $\overline{A_2}$. Vous émonderez ces automates.
3. Pour deux automates non-déterministes $A = (\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$ et $A' = (\Sigma, Q', Q'_0, F', \delta')$, le produit synchronisé $A \mathbin{\&} A'$ est l'automate $(\Sigma, Q^\&, Q_0^\&, F^\&, \delta^\&)$ défini par :
   — $Q^\& = Q \times Q'$,
   — $Q_0^\& = Q_0 \times Q'_0$,
   — $F^\& = F \times F'$,
   — $\delta^\& = \{((s, s'), l, (d, d')) \in Q^\& \times \Sigma \times Q^\& \mid (s, l, d) \in \delta \text{ et } (s', l, d') \in \delta'\}$.

Avec cette définition il est facile de voir que les mots reconnus par $A \,\&\, A'$ sont des mots à la fois de A et de A'. En fait on a $L(A \,\&\, A') = L(A) \cap L(A')$.

Utilisez cette définition pour calculer les automates $A_1 \,\&\, \overline{A_2}$ et $A_2 \,\&\, \overline{A_1}$.

4. Qu'en conclure sur l'équivalence de A_1 et A_2 ?
5. Utilisez l'algorithme de minimisation présenté en cours pour réduire l'automate A_2. Vous indiquerez la partition des états de l'automate à chaque itération de l'algorithme.

Exercice 4 – Un langage difficile à définir

1. Posons $\Sigma = \{a, b\}$. Soit L un langage rationnel sur Σ. En utilisant des notations ensemblistes (sur les langages) ou des expressions rationnelles, comment définiriez-vous le langage L' rassemblant tous les mots qui possèdent **exactement un** facteur dans le langage L ?

   Par exemple si $L = \{ab, ba\}$, alors $a\underline{ab}b \in L'$, $bbb\underline{ba} \in L'$, mais $a\underline{ab}b\underline{ba} \notin L'$.

   (Indice : essayez la différence ensembliste.)
2. Ce langage est-il rationnel ?