Syntaks og semantik

Lektion 11

3 april 2007

Fra sidst

1. Operationelle semantikker for **Bims**
2. Big-step-semantik for **Bims**
3. Small-step operationel semantik for **Bims**
4. Terminering
5. Ækvivalens

- konfigurationer $\Gamma = \textbf{Kom} \times \textbf{Tilstande} \cup \textbf{Tilstande}$, slutkonfigurationer $T = \textbf{Tilstande}$
- **Tilstande** $=$ **Var** $\rightharpoonup \mathbb{Z}$: en programtilstand er en *partiel* funktion fra variabelnavne til værdier. For $s \in$ **Tilstande** og $x \in$ **Var** har vi

$$s(x) = \begin{cases} \text{værdien af } x & \text{hvis } x \text{ er defineret} \\ \underline{\text{undef}} & \text{ellers} \end{cases}$$

- tilstandsopdatering: $s[x \mapsto v]$ givet ved

$$s[x \mapsto v](y) = \begin{cases} s(y) & \text{hvis } y \neq x \\ v & \text{hvis } y = x \end{cases}$$

- transitioner på formen $\langle S, s\rangle \to s'$: fra *konfigurationer* til *slutkonfigurationer*
- regler på formen

$$[\text{ass}_{\text{bss}}] \qquad \langle x := a, s\rangle \to s[x \mapsto v] \qquad \text{hvor } s \vdash a \to_a v$$

(et aksiom)

- eller på formen

$$[\text{if-sand}_{\text{bss}}] \qquad \frac{\langle S_1, s\rangle \to s'}{\langle \texttt{if}\ b\ \texttt{then}\ S_1\ \texttt{else}\ S_2\ , s\rangle \to s'}$$

hvis $s \vdash b \to_b tt$

- reglen

$$[\text{while-sand}_{\text{bss}}] \qquad \frac{\langle S, s\rangle \to s'' \quad \langle \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S, s''\rangle \to s'}{\langle \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S, s\rangle \to s'}$$

hvis $s \vdash b \to_b tt$

er *ikke kompositionel*, men *rekursiv*

- transitioner på formen $\langle S, s\rangle \Rightarrow s'$ (terminering i ét skridt) eller på formen $\langle S, s\rangle \Rightarrow \langle S', s'\rangle$
- regler på formen

$$[\text{comp-1}_{\text{sss}}] \qquad \frac{\langle S_1, s\rangle \Rightarrow \langle S_1', s'\rangle}{\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_1'; S_2, s'\rangle}$$

- eller på formen

$$[\text{if-sand}_{\text{sss}}] \qquad \langle \texttt{if}\ b\ \texttt{then}\ S_1\ \texttt{else}\ S_2\ , s\rangle \Rightarrow \langle S_1, s\rangle \quad \text{hvis } s \vdash b \rightarrow_b tt$$

- reglen

$$[\text{while}_{\text{sss}}] \qquad \langle \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S, s\rangle \Rightarrow \langle \texttt{if}\ b\ \texttt{then}\ (S; \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S)\ \texttt{else}\ \texttt{skip}, s\rangle$$

  er igen *ikke kompositionel*, men *rekursiv*

Givet $S \in \textbf{Kom}$ og $s \in \textbf{Tilstande}$

- S terminerer fra starttilstand s i big-step-semantikken hvis der findes $s' \in \textbf{Tilstande}$ så $\langle S, s \rangle \to s'$
- S terminerer fra starttilstand s i small-step-semantikken hvis der findes $s' \in \textbf{Tilstande}$ så $\langle S, s \rangle \stackrel{*}{\Rightarrow} s'$
- S går i uendelig løkke fra starttilstand s i big-step- semantikken hvis der *ikke* findes $s' \in \textbf{Tilstande}$ så $\langle S, s \rangle \to s'$
- S går i uendelig løkke fra starttilstand s i small-step-semantikken hvis der findes en *uendelig transitionsfølge*

$$\langle S, s \rangle \Rightarrow \langle S_1, s_1 \rangle \Rightarrow \langle S_2, s_2 \rangle \Rightarrow \ldots$$

- *Bemærk forskellen ...*

- Sætning 4.11 /4.13 : Vores givne big-step- og small-step-semantikker for **Bims** er semantisk ækvivalente:

$$\forall S \in \textbf{Kom}, \forall s, s' \in \textbf{Tilstande} : \langle S, s\rangle \to s' \Leftrightarrow \langle S, s\rangle \overset{*}{\Rightarrow} s'$$

- Bevis for sætning 4.13 (ikke gennemgået!): ved induktion i transitionsfølgers længde
- Bevis for sætning 4.11: ved transitionsinduktion:
  1. Vis at $\langle S, s\rangle \to s' \Rightarrow \langle S, s\rangle \overset{*}{\Rightarrow} s'$ gælder hver gang $\langle S, s\rangle \to s'$ kommer fra et *aksiom*
  2. Vis for enhver transitionsregel der ikke er et aksiom: Hvis $\langle S, s\rangle \to s' \Rightarrow \langle S, s\rangle \overset{*}{\Rightarrow} s'$ gælder for alle dens *præmisser*, da gælder det også for dens *konklusion*

Udvidelser af **Bims**

Abstrakt syntaks for **Kom**+`repeat`:

$$S ::= x\texttt{:=}a \mid \texttt{skip} \mid S_1\texttt{;}S_2 \mid \texttt{if}\ b\ \texttt{then}\ S_1\ \texttt{else}\ S_2 \mid \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S \mid \texttt{repeat}\ S\ \texttt{until}\ b$$

Big-step-semantik:

$$[\text{rep-sand}_{\text{bss}}] \quad \frac{\langle S, s\rangle \to s'}{\langle \texttt{repeat}\ S\ \texttt{until}\ b, s\rangle \to s'} \quad \text{hvis } s' \vdash b \to_b tt$$

$$[\text{rep-falsk}_{\text{bss}}] \quad \frac{\langle S, s\rangle \to s' \quad \langle \texttt{repeat}\ S\ \texttt{until}\ b, s'\rangle \to s''}{\langle \texttt{repeat}\ S\ \texttt{until}\ b, s\rangle \to s''} \quad \text{hvis } s' \vdash b \to_b ff$$

Sætning 5.2: Kommandoerne “$\texttt{repeat}\ S\ \texttt{until}\ b$” og “$S\texttt{;}\texttt{while}\ \neg b\ \texttt{do}\ S$” er semantisk ækvivalente. Dvs.

$$\forall S \in \textbf{Kom}, \forall s, s' \in \textbf{Tilstande} : \langle \texttt{repeat}\ S\ \texttt{until}\ b, s\rangle \to s' \Leftrightarrow \langle S\texttt{;}\texttt{while}\ \neg b\ \texttt{do}\ S, s\rangle \to s'$$

(dvs. “*de gør de samme ting*”)

– vi viser kun $\Rightarrow$ her; den anden retning er tilsvarende

$$\forall S \in \textbf{Kom}, \forall s, s' \in \textbf{Tilstande} : \langle \texttt{repeat}\ \ S\ \ \texttt{until}\ \ b, s\rangle \to s' \\ \Rightarrow \langle S\texttt{;}\,\texttt{while}\ \ \neg b\ \ \texttt{do}\ \ S, s\rangle \to s'$$

Bevis ved *induktion i højden af derivationstræer*:

1. Hvis $\langle \texttt{repeat}\ \ S\ \ \texttt{until}\ \ b, s\rangle \to s'$ har et derivationstræ af højde 0, da har $\langle S\texttt{;}\,\texttt{while}\ \ \neg b\ \ \texttt{do}\ \ S, s\rangle \to s'$ også. (For der er ikke nogen.) ✓
2. Antag at vi har vist for alle S, s, s' for hvilke $\langle \texttt{repeat}\ \ S\ \ \texttt{until}\ \ b, s\rangle \to s'$ har et derivationstræ af højde $\leq n$, at da har $\langle S\texttt{;}\,\texttt{while}\ \ \neg b\ \ \texttt{do}\ \ S, s\rangle \to s'$ et derivationstræ. Lad S, s, s' være således at $\langle \texttt{repeat}\ \ S\ \ \texttt{until}\ \ b, s\rangle \to s'$ har et derivationstræ af højde $n+1$.
3. Hvis den sidste regel i træet er [rep-sand$_{\text{bss}}$]:
   - $\Rightarrow$ $\langle S, s\rangle \to s'$, $s' \vdash b \to_b tt$
   - $\Rightarrow$ (pga. [while-falsk$_{\text{bss}}$]) $\langle \texttt{while}\ \ \neg b\ \ \texttt{do}\ \ S, s'\rangle \to s'$
   - $\Rightarrow$ (pga. [comp$_{\text{bss}}$]) $\langle S\texttt{;}\,\texttt{while}\ \ \neg b\ \ \texttt{do}\ \ S, s\rangle \to s'$ ✓

$$\forall S \in \textbf{Kom}, \forall s, s' \in \textbf{Tilstande} : \langle \texttt{repeat } S \texttt{ until } b, s\rangle \to s' \Rightarrow \langle S; \texttt{while } \neg b \texttt{ do } S, s\rangle \to s'$$

Bevis ved *induktion i højden af derivationstræer*:

1. Hvis $\langle \texttt{repeat } S \texttt{ until } b, s\rangle \to s'$ har et derivationstræ af højde 0, da har $\langle S; \texttt{while } \neg b \texttt{ do } S, s\rangle \to s'$ også. (For der er ikke nogen.) ✓
2. Antag at vi har vist for alle S, s, s' for hvilke $\langle \texttt{repeat } S \texttt{ until } b, s\rangle \to s'$ har et derivationstræ af højde $\leq n$, at da har $\langle S; \texttt{while } \neg b \texttt{ do } S, s\rangle \to s'$ et derivationstræ. Lad S, s, s' være således at $\langle \texttt{repeat } S \texttt{ until } b, s\rangle \to s'$ har et derivationstræ af højde $n + 1$.
4. Hvis den sidste regel i træet er [rep-falsk$_{\text{bss}}$]:
   - $\Rightarrow$ $\langle S, s\rangle \to s''$, $\langle \texttt{repeat } S \texttt{ until } b, s''\rangle \to s'$, $s'' \vdash b \to_b ff$
   - $\Rightarrow$ (induktionshypotese) $\langle S; \texttt{while } \neg b \texttt{ do } S, s''\rangle \to s'$
   - $\Rightarrow$ ([comp$_{\text{bss}}$]) $\langle S, s''\rangle \to s'''$, $\langle \texttt{while } \neg b \texttt{ do } S, s'''\rangle \to s'$
   - $\Rightarrow$ ([while-sand$_{\text{bss}}$]) $\langle \texttt{while } \neg b \texttt{ do } S, s''\rangle \to s'$
   - $\Rightarrow$ ($\langle S, s\rangle \to s''$, [comp$_{\text{bss}}$]) $\langle S; \texttt{while } \neg b \texttt{ do } S, s\rangle \to s'$ ✓

Definition 5.4: Lad $(\Gamma, \rightarrow, T)$ være transitionssystemet for **Bims**s big-step-semantik, og lad $S_1, S_2 \in \mathbf{Kom}$. S_1 og S_2 siges at være semantisk ækvivalente i big-step-semantik ($S_1 \sim_{\text{bss}} S_2$) hvis

$$\forall s, s' \in \mathbf{Tilstande} : \langle S_1, s\rangle \rightarrow s' \Leftrightarrow \langle S_2, s\rangle \rightarrow s'$$

Definition 5.8: Lad $(\Gamma, \Rightarrow, T)$ være transitionssystemet for **Bims**s small-step-semantik, og lad $S_1, S_2 \in \mathbf{Kom}$. S_1 og S_2 siges at være semantisk ækvivalente i small-step-semantik ($S_1 \sim_{\text{sss}} S_2$) hvis

$$\forall s, s' \in \mathbf{Tilstande} : \langle S_1, s\rangle \overset{*}{\Rightarrow} s' \Leftrightarrow \langle S_2, s\rangle \overset{*}{\Rightarrow} s'$$

Bemærk at for vores semantikker er $\sim_{\text{bss}}$ og $\sim_{\text{sss}}$ *det samme*, for vi har jo allerede vist at

$$\forall S \in \mathbf{Kom}, \forall s, s' \in \mathbf{Tilstande} : \langle S, s\rangle \rightarrow s' \Leftrightarrow \langle S, s\rangle \overset{*}{\Rightarrow} s'$$

Abstrakt syntaks for **Kom**+`for`:

$$S ::= x \texttt{:=} a \mid \texttt{skip} \mid S_1 \texttt{;} S_2 \mid \texttt{if}\ b\ \texttt{then}\ S_1\ \texttt{else}\ S_2$$
$$\mid \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S \mid \texttt{for}\ x \texttt{:=} n_1\ \texttt{to}\ n_2\ \texttt{do}\ S$$

$$[\text{for-1}_{\text{bss}}] \quad \frac{\langle S, s[x \mapsto v_1]\rangle \to s'' \quad \langle \texttt{for}\ x \texttt{:=} n_1'\ \texttt{to}\ n_2\ \texttt{do}\ S, s''\rangle \to s'}{\langle \texttt{for}\ x \texttt{:=} n_1\ \texttt{to}\ n_2\ \texttt{do}\ S, s\rangle \to s'}$$
$$\text{hvis } v_1 \leq v_2 \text{ hvor } v_1 = \mathcal{N}[\![n_1]\!], v_2 = \mathcal{N}[\![n_2]\!]$$
$$\text{og } n_1' = \mathcal{N}^{-1}(v_1 + 1)$$

$$[\text{for-2}_{\text{bss}}] \quad \langle \texttt{for}\ x \texttt{:=} n_1\ \texttt{to}\ n_2\ \texttt{do}\ S, s\rangle \to s[x \mapsto v_1]$$
$$\text{hvis } v_1 > v_2 \text{ hvor } v_1 = \mathcal{N}[\![n_1]\!], v_2 = \mathcal{N}[\![n_2]\!]$$

Abstrakt syntaks for **Kom**+`abort`:

$$S ::= x := a \mid \texttt{skip} \mid S_1 ; S_2 \mid \texttt{if } b \texttt{ then } S_1 \texttt{ else } S_2 \mid \texttt{while } b \texttt{ do } S \mid \texttt{abort}$$

– ingen nye transitionsregler

- `abort` $\sim_{\mathsf{bss}}$ `while 0=0 do skip` og `abort` $\sim_{\mathsf{sss}}$ `while 0=0 do skip`
- i small-step-semantik går `while 0=0 do skip` i *uendelig løkke*, mens `abort` *ikke* gør!

Abstrakt syntaks for **Kom**+`or`:

$$S ::= x := a \mid \texttt{skip} \mid S_1 ; S_2 \mid \texttt{if } b \texttt{ then } S_1 \texttt{ else } S_2 \mid \texttt{while } b \texttt{ do } S \mid S_1 \texttt{ or } S_2$$

Big-step-semantik:

$$[\text{or-1}_{\text{bss}}] \quad \frac{\langle S_1, s\rangle \to s'}{\langle S_1 \texttt{ or } S_2, s\rangle \to s'} \qquad [\text{or-2}_{\text{bss}}] \quad \frac{\langle S_2, s\rangle \to s'}{\langle S_1 \texttt{ or } S_2, s\rangle \to s'}$$

Small-step-semantik:

$$[\text{or-1}_{\text{sss}}] \quad \langle S_1 \texttt{ or } S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_1, s\rangle$$
$$[\text{or-2}_{\text{sss}}] \quad \langle S_1 \texttt{ or } S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_2, s\rangle$$

Lad $S = \texttt{x:=1 or while 0=0 do skip}$

- big-step: S terminerer
- small-step: S terminerer og går i uendelig løkke!

Abstrakt syntaks for **Kom**+`par`:

$$S ::= x \texttt{:=} a \mid \texttt{skip} \mid S_1 \texttt{;} S_2 \mid \texttt{if}\ b\ \texttt{then}\ S_1\ \texttt{else}\ S_2$$
$$\mid \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S \mid S_1\ \texttt{par}\ S_2$$

[par-1$_{\text{sss}}$] $$\frac{\langle S_1, s\rangle \Rightarrow \langle S_1', s'\rangle}{\langle S_1\ \texttt{par}\ S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_1'\ \texttt{par}\ S_2, s'\rangle}$$

[par-2$_{\text{sss}}$] $$\frac{\langle S_1, s\rangle \Rightarrow s'}{\langle S_1\ \texttt{par}\ S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_2, s'\rangle}$$

[par-3$_{\text{sss}}$] $$\frac{\langle S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_2', s'\rangle}{\langle S_1\ \texttt{par}\ S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_1\ \texttt{par}\ S_2', s'\rangle}$$

[par-4$_{\text{sss}}$] $$\frac{\langle S_2, s\rangle \Rightarrow s'}{\langle S_1\ \texttt{par}\ S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_1, s'\rangle}$$

- fletning: $\langle \texttt{x:=1 par (x:=2; x:=x+3)}, s\rangle$
  $\stackrel{*}{\Rightarrow} s[x \mapsto 1]$ og $\stackrel{*}{\Rightarrow} s[x \mapsto 4]$ og $\stackrel{*}{\Rightarrow} s[x \mapsto 5]$

- fletning kan ikke beskrives i big-step-semantik – fordi her er de atomare skridt *hele kommandoer*

$\Rightarrow$ big-step-semantik kan ikke bruges til at beskrive parallelitet

- fletning af kommandoer *der ikke kan gå i uendelig løkke* $=$ nondeterminisme:

```
x:=1 par (x:=2; x:=x+3)
```

$\sim_{\text{sss}}$ `(x:=1;x:=2;x:=x+3)`
`or (x:=2;x:=1;x:=x+3)`
`or (x:=2;x:=x+3;x:=1)`