

Syntaks og semantik

Lektion 9

11 marts 2008

Syntaks vs. semantik Tilgange Anvendelser Transitionssystemer Eksempler Operationel semantik Eksempler Aflukningen

Semantik

- 1 Syntaks vs. semantik
- 2 Forskellige tilgange til semantik
- 3 Anvendelser
- 4 Transitionssystemer
- 5 Eksempler : syntaks
- 6 Operationel semantik
- 7 Eksempler : semantik
- 8 Transitionsaflukningen

Syntaks: Læren om sprogs *form*

- hvordan *ser* et lovligt program *ud*?
- beskriv byggesten (*alfabet*) og hvordan de kan sættes sammen (*grammatik, automat* etc.)

Semantik: Læren om sprogs *betydning*

- hvordan *opfører* et givet program sig?
- beskriv *betydningen* af byggesten og hvordan betydningen af sammensætninger af byggesten fås ud fra de enkelte betydninger

3 / 29

- **denotationel** semantik
 - beskriv et programs betydning som funktion fra *input* til *output*
 - *Hvad* laver det her program?
- **operationel** semantik
 - beskriv et programs betydning som *transitionssystem*
 - *Hvordan* udføres det her program?
- **aksiomatisk** semantik
 - beskriv et program ved *præ-* og *post-betingelser*
 - *Hvilke egenskaber* har det her program?
- (**algebraisk** semantik: variant af aksiomatisk semantik)

4 / 29

- **præcis beskrivelse** af programmeringssprog
 - “rettesnor” til implementation
- **automatisk generering** af compilere og fortolkere
- **automatisk verifikation** af programmer
 - det kan være *dyrt* at finde fejl i et program ved aftestning
 \Rightarrow heller finde fejl *før*

5/29

Husk: Definition:

- Et **transitionssystem** er et par (Γ, \rightarrow) , hvor delene er
 - 1 Γ : en mængde af **tilstande** (eller **konfigurationer**)
 - 2 $\rightarrow \subseteq \Gamma \times \Gamma$: **transitions-relationen**
 – en *orienteret graf*
- Et **afmærket transitionssystem** er en tripel $(\Gamma, \Sigma, \rightarrow)$, hvor delene er
 - 1 Γ : en mængde af **tilstande** (eller **konfigurationer**)
 - 2 Σ : en mængde af **mærker**
 - 3 $\rightarrow \subseteq \Gamma \times \Sigma \times \Gamma$: **transitions-relationen**
- De (afmærkede) transitionssystemer vi er interesserede her, har alle specificeret et antal **sluttilstande** $T \subseteq \Gamma$.
- Nogle gange er vi også interesserede i (afmærkede) transitionssystemer der har en **starttilstand** $\gamma_0 \in \Gamma$.
- *Hüttels* definition 3.2 inkluderer sluttilstande.
- Jeg har i lektion 4 givet en definition af transitionssystemer med starttilstand, men uden sluttilstande.

6/29

- En **NFA** er et afmærket transitionssystem med start- og sluttilstande $(\Gamma, \Sigma, \gamma_0, T, \rightarrow)$, hvor både Γ og Σ er **endelige**.

gammel notation	Q	Σ	q_0	F	δ
ny notation	Γ	Σ	γ_0	T	\rightarrow

- En **DFA** er en NFA der er **deterministisk**, dvs.
 - ① $\forall \gamma \in \Gamma : \forall a \in \Sigma : \exists \gamma' \in \Gamma : \gamma \xrightarrow{a} \gamma'$
 - ② $\forall \gamma \in \Gamma : \forall a \in \Sigma : \forall \gamma'_1, \gamma'_2 \in \Gamma : (\gamma \xrightarrow{a} \gamma'_1 \wedge \gamma \xrightarrow{a} \gamma'_2) \Rightarrow \gamma'_1 = \gamma'_2$
- En **PDA** er et afmærket transitionssystem med start- og sluttilstande $(\Gamma, \Sigma_1 \times \Sigma_2 \times \Sigma_2, \gamma_0, T, \rightarrow)$, hvor Γ, Σ_1 og Σ_2 er endelige.
 - Σ_1 : inputalfabet, Σ_2 : stackalfabet
 - transitioner $\gamma \xrightarrow[b,c]{a} \gamma'$: læs a , pop b , push c
- dvs. transitionssystemer giver en fælles ramme for **syntaktisk** beskrivelse af NFAs, DFAs og PDAs, **nice!**
- men hvad med deres **semantik**?
 Mål: fælles ramme for beskrivelsen af virkemåden for NFA, PDA og en masse andre maskiner

7/29

Idé i operationel semantik:

- transitionssystemer (uden mærker) som den mest basale model for beregninger
- “abstrakt maskine”
- modeller (automater, grammatikker, programmeringssprog, ...) gives mening ved at **angive hvordan man konverterer dem til transitionssystemer**

8/29

Eksempel: En operationel semantik for **endelige automater**:

Givet en NFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$:

- konfigurationer: tilstand i Q plus tilbageværende del af inputstrengen
dvs. $\Gamma = Q \times \Sigma^*$ (*uendeligt mange konfigurationer!*)
- slutkonfigurationer: sluttilstand i F plus tom streng
dvs. $T = \{(q, \varepsilon) \mid q \in F\}$
- transitioner: at læse et tegn (eller ε) og gå i en anden tilstand
dvs. $(q, aw) \rightarrow (q', w)$ hver gang $q' \in \delta(q, a)$, og for alle $w \in \Sigma^*$

M accepterer en streng w hvis og kun hvis der findes $\gamma \in T$ således at $(q_0, w) \xrightarrow{*} \gamma$.

9/29

Eksempel: En operationel semantik for **PDA's**:

Givet en PDA $M = (Q, \Sigma_1, \Sigma_2, \delta, q_0, F)$ (Σ_2 er stackalfabetet):

- konfigurationer: tilstand i Q plus tilbageværende del af inputstrengen plus stackindhold
dvs. $\Gamma = Q \times \Sigma_1^* \times \Sigma_2^*$
- slutkonfigurationer: sluttilstand i F plus tom streng plus vilkårlig stackstreng
dvs. $T = \{(q, \varepsilon, s) \mid q \in F, s \in \Sigma_2^*\}$
- transitioner: at læse et tegn (eller ε) fra input og fra stacken, gå i en anden tilstand og pushe et tegn (eller ε) på stacken
dvs. $(q, aw, bs) \rightarrow (q', w, cs)$ hver gang $(q', c) \in \delta(q, a, b)$, og for alle $w \in \Sigma_1^*$, $s \in \Sigma_2^*$

M accepterer en streng w hvis og kun hvis der findes $\gamma \in T$ således at $(q_0, w, \varepsilon) \xrightarrow{*} \gamma$.

10/29

Eksempel: En operationel semantik for *kontekstfrie grammatikker*:

Givet en CFG $G = (V, \Sigma, R, S)$:

- konfigurationer: strenge af variable og terminaler:

$$\Gamma = (V \cup \Sigma)^*$$

- slutkonfigurationer: strenge af terminaler:

$$T = \Sigma^*$$

- transitioner: derivationsskridt!

$$uAv \Rightarrow uvw \text{ hvis } A \rightarrow w \text{ er i } R$$

G genererer en streng $w \in T$ hvis og kun hvis $S \xRightarrow{*} w$.

11 / 29

Definition 3.11: Lad (Γ, \Rightarrow, T) være et transitionssystem.

Transitionsaflukningen i k skridt \xRightarrow{k} er defineret induktivt ved

$$\begin{aligned} \gamma &\xRightarrow{0} \gamma \quad \text{for alle } \gamma \\ \gamma &\xRightarrow{n+1} \gamma' \quad \text{hvis der findes } \gamma'' \text{ for hvilket } \gamma \Rightarrow \gamma'' \xRightarrow{n} \gamma' \end{aligned}$$

Vi skriver $\gamma \xRightarrow{*} \gamma'$ hvis der findes et k så $\gamma \xRightarrow{k} \gamma'$.

– dvs. $\gamma \xRightarrow{k} \gamma'$ hvis der findes en *transitionsfølge*

$$\gamma \Rightarrow \gamma_1 \Rightarrow \gamma_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow \gamma_{k-1} \Rightarrow \gamma'$$

– vi har allerede brugt aflukningen $\xRightarrow{*}$ adskillige gange!

12 / 29

Operationel semantik

- 9 Abstrakt syntaks for **Bims**
- 10 Big-step-semantik for aritmetiske udtryk (uden variable)
- 11 Derivationstræer
- 12 Small-step-semantik for aritmetiske udtryk (uden variable)
- 13 Egenskaber
- 14 Big-step-semantik for boolske udtryk (uden variable)

13 / 29

$n \in \mathbf{Num}$ – Numeraler
 $x \in \mathbf{Var}$ – Variable
 $a \in \mathbf{Aud}$ – Aritmetiske udtryk
 $b \in \mathbf{Bud}$ – Boolske udtryk
 $S \in \mathbf{Kom}$ – Kommandoer

$S ::= x := a \mid \text{skip} \mid S_1; S_2 \mid \text{if } b \text{ then } S_1 \text{ else } S_2$
 $\mid \text{while } b \text{ do } S$

$b ::= a_1 = a_2 \mid a_1 < a_2 \mid \neg b_1 \mid b_1 \wedge b_2 \mid (b_1)$

$a ::= n \mid x \mid a_1 + a_2 \mid a_1 * a_2 \mid a_1 \div a_2 \mid (a_1)$

basiselementer

sammensatte elementer

umiddelbare bestanddele

14 / 29

Aritmetiske udtryk uden variable:

Aud: $a ::= n \mid a_1 + a_2 \mid a_1 * a_2 \mid a_1 - a_2 \mid (a_1)$

hvor n er et **numeral** (talord) (en *streng*!), *ikke et tal*

- numeraler skrives 42, tal skrives 42
- *værdien* af 42 er 42
- vi har en *semantisk funktion* $\mathcal{N} : \mathbf{Num} \rightarrow \mathbb{Z}$ som giver værdien af en numeral

Big-step-semantik: udtryk evalueres i ét hug

- transitioner fra *udtryk* til *værdier*
- f.x. en transition $(\underline{2} + \underline{4}) * (\underline{6} + \underline{1}) \rightarrow 42$

15/29

$$[\text{plus}_{\text{bss}}] \quad \frac{a_1 \rightarrow v_1 \quad a_2 \rightarrow v_2}{a_1 + a_2 \rightarrow v} \quad \text{hvor } v = v_1 + v_2$$

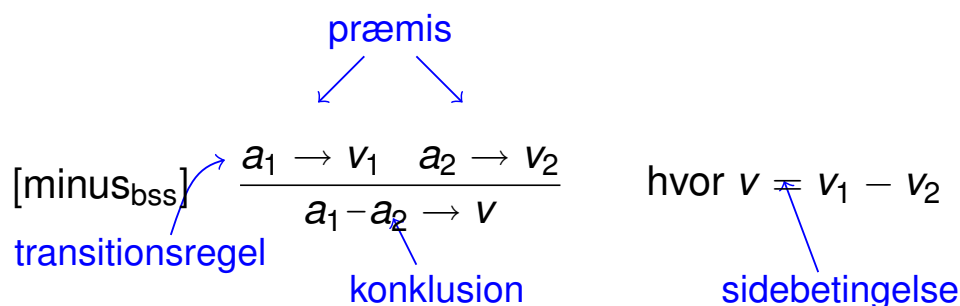
$$[\text{minus}_{\text{bss}}] \quad \frac{a_1 \rightarrow v_1 \quad a_2 \rightarrow v_2}{a_1 - a_2 \rightarrow v} \quad \text{hvor } v = v_1 - v_2$$

$$[\text{mult}_{\text{bss}}] \quad \frac{a_1 \rightarrow v_1 \quad a_2 \rightarrow v_2}{a_1 * a_2 \rightarrow v} \quad \text{hvor } v = v_1 \cdot v_2$$

$$[\text{parent}_{\text{bss}}] \quad \frac{a_1 \rightarrow v_1}{(a_1) \rightarrow v_1}$$

$$[\text{num}_{\text{bss}}] \quad n \rightarrow v \quad \text{hvis} \quad \mathcal{N}[\![n]\!] = v$$

16/29



aksiom (*transitionsregel uden præmis*)

[num_{bss}] $n \rightarrow v \quad \text{hvis} \quad \mathcal{N}[[n]] = v$

17/29

[plus_{bss}] $\frac{a_1 \rightarrow v_1 \quad a_2 \rightarrow v_2}{a_1 + a_2 \rightarrow v} \quad \text{hvor } v = v_1 + v_2$

[minus_{bss}] $\frac{a_1 \rightarrow v_1 \quad a_2 \rightarrow v_2}{a_1 - a_2 \rightarrow v} \quad \text{hvor } v = v_1 - v_2$

[mult_{bss}] $\frac{a_1 \rightarrow v_1 \quad a_2 \rightarrow v_2}{a_1 * a_2 \rightarrow v} \quad \text{hvor } v = v_1 \cdot v_2$

[parent_{bss}] $\frac{a_1 \rightarrow v_1}{(a_1) \rightarrow v_1}$

[num_{bss}] $n \rightarrow v \quad \text{hvis} \quad \mathcal{N}[[n]] = v$

Transitionssystemet (Γ, \rightarrow, T) :

- $\Gamma = \mathbf{Aud} \cup \mathbb{Z}$, $T = \mathbb{Z}$
- \rightarrow består af præcis de transitioner som kan udledes af aksiomerne ved brug af et endeligt antal transitionsregler

18/29

At konstruere et **derivationstræ** for udtrykket $(\underline{2}+\underline{4}) * (\underline{6}+\underline{1})$:

$$(\underline{2}+\underline{4}) * (\underline{6}+\underline{1}) \rightarrow ?$$

19 / 29

At konstruere et **derivationstræ** for udtrykket $(\underline{2}+\underline{4}) * (\underline{6}+\underline{1})$:

$$\frac{(\underline{2}+\underline{4}) \rightarrow ? \qquad (\underline{6}+\underline{1}) \rightarrow ?}{(\underline{2}+\underline{4}) * (\underline{6}+\underline{1}) \rightarrow ?}$$

20 / 29

At konstruere et **derivationstræ** for udtrykket $(\underline{2}+\underline{4}) * (\underline{6}+\underline{1})$:

$$\begin{array}{c}
 \underline{2}+\underline{4} \rightarrow ? \qquad \underline{6}+\underline{1} \rightarrow ? \\
 \hline
 (\underline{2}+\underline{4}) \rightarrow ? \qquad (\underline{6}+\underline{1}) \rightarrow ? \\
 \hline
 (\underline{2}+\underline{4}) * (\underline{6}+\underline{1}) \rightarrow ?
 \end{array}$$

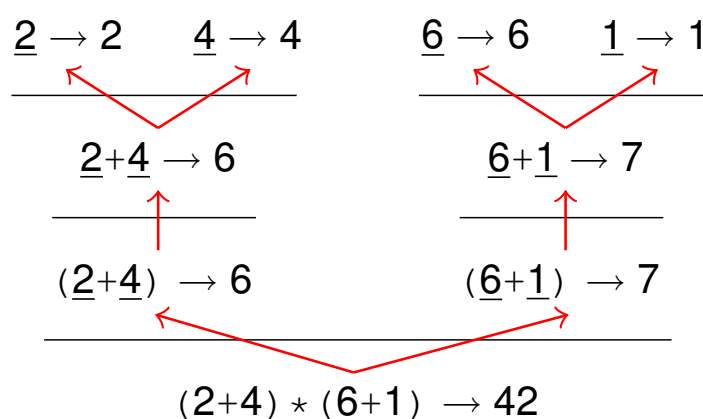
21 / 29

At konstruere et **derivationstræ** for udtrykket $(\underline{2}+\underline{4}) * (\underline{6}+\underline{1})$:

$$\begin{array}{c}
 \underline{2} \rightarrow 2 \quad \underline{4} \rightarrow 4 \qquad \underline{6} \rightarrow 6 \quad \underline{1} \rightarrow 1 \\
 \hline
 \underline{2}+\underline{4} \rightarrow 6 \qquad \underline{6}+\underline{1} \rightarrow 7 \\
 \hline
 (\underline{2}+\underline{4}) \rightarrow 6 \qquad (\underline{6}+\underline{1}) \rightarrow 7 \\
 \hline
 (\underline{2}+\underline{4}) * (\underline{6}+\underline{1}) \rightarrow 42
 \end{array}$$

22 / 29

At konstruere et **derivationstræ** for udtrykket $(\underline{2}+\underline{4}) * (\underline{6}+\underline{1})$:



derivationstræer:

- aksiomer i bladene
- knude k har sønner p_1, p_2, \dots, p_n hvis og kun hvis der er en transitionsregel

$$\frac{p_1, p_2, \dots, p_n}{k}$$

23 / 29

Small-step-semantik: udtryk evalueres **et skridt ad gangen**

- transitioner fra *udtryk* til *udtryk* og fra *udtryk* til *værdier*
- f.x.

$$\begin{aligned}
 (\underline{2}+\underline{4}) * (\underline{6}+\underline{1}) &\Rightarrow (\underline{2}+\underline{4}) * (\underline{6}+\underline{1}) \\
 &\Rightarrow (\underline{2}+\underline{4}) * (\underline{6}+\underline{1}) \\
 &\Rightarrow (\underline{6}) * (\underline{6}+\underline{1})
 \end{aligned}$$

- transitionssystem (Γ, \Rightarrow, T) :

- $\Gamma = \mathbf{Aud}' \cup \mathbb{Z}$, $T = \mathbb{Z}$
- \Rightarrow defineret ved transitionsregler (*coming up!*)

Aritmetiske udtryk uden variable, men *med værdier*:

$$\mathbf{Aud}' : \quad a ::= n \mid v \mid a_1 + a_2 \mid a_1 * a_2 \mid a_1 - a_2 \mid (a_1)$$

hvor $n \in \mathbf{Num}$ er et numeral og $v \in \mathbb{Z}$ en værdi

24 / 29

$$[\text{plus-1}_{\text{sss}}] \quad \frac{a_1 \Rightarrow a'_1}{a_1 + a_2 \Rightarrow a'_1 + a_2}$$

$$[\text{plus-2}_{\text{sss}}] \quad \frac{a_2 \Rightarrow a'_2}{a_1 + a_2 \Rightarrow a_1 + a'_2}$$

$$[\text{plus-3}_{\text{sss}}] \quad v_1 + v_2 \Rightarrow v \quad \text{hvor} \quad v = v_1 + v_2$$

$$[\text{mult-1}_{\text{sss}}] \quad \frac{a_1 \Rightarrow a'_1}{a_1 * a_2 \Rightarrow a'_1 * a_2}$$

$$[\text{mult-2}_{\text{sss}}] \quad \frac{a_2 \Rightarrow a'_2}{a_1 * a_2 \Rightarrow a_1 * a'_2}$$

$$[\text{mult-3}_{\text{sss}}] \quad v_1 * v_2 \Rightarrow v \quad \text{hvor} \quad v = v_1 \cdot v_2$$

25 / 29

$$[\text{sub-1}_{\text{sss}}] \quad \frac{a_1 \Rightarrow a'_1}{a_1 - a_2 \Rightarrow a'_1 - a_2}$$

$$[\text{sub-2}_{\text{sss}}] \quad \frac{a_2 \Rightarrow a'_2}{a_1 - a_2 \Rightarrow a_1 - a'_2}$$

$$[\text{sub-3}_{\text{sss}}] \quad v_1 - v_2 \Rightarrow v \quad \text{hvor} \quad v = v_1 - v_2$$

$$[\text{parent-1}_{\text{sss}}] \quad \frac{a_1 \Rightarrow a'_1}{(a_1) \Rightarrow (a'_1)}$$

$$[\text{parent-2}_{\text{sss}}] \quad (v) \Rightarrow v$$

$$[\text{num}_{\text{sss}}] \quad n \Rightarrow v \quad \text{hvis} \quad \mathcal{N}[\![n]\!] = v$$

26 / 29

Sætning: Vores big-step- og small-step-semantikker for **Aud** er ækvivalente: Givet $a \in \mathbf{Aud}$ og $v \in \mathbb{Z}$, da har vi $a \rightarrow v$ hvis og kun hvis $a \xRightarrow{*} v$. *(Bevis næste gang)*

Definition: En operationel semantik givet ved et transitionssystem (Γ, \rightarrow, T) kaldes **deterministisk** hvis $\gamma \rightarrow \gamma_1$ og $\gamma \rightarrow \gamma_2$ medfører $\gamma_1 = \gamma_2$ for alle $\gamma \in \Gamma$ og $\gamma_1, \gamma_2 \in T$ (!). Semantikken kaldes **deterministisk på lang sigt** hvis $\gamma \xrightarrow{*} \gamma_1$ og $\gamma \xrightarrow{*} \gamma_2$ medfører $\gamma_1 = \gamma_2$ for alle $\gamma \in \Gamma$ og $\gamma_1, \gamma_2 \in T$.

Sætning 3.13 / 3.15 : Vores big-step-semantik for **Aud** er *deterministisk*. Vores small-step-semantik for **Aud** er *deterministisk på lang sigt*. *(Bevises senere)*

Opgave π : Vores small-step-semantik for **Aud** er *ikke deterministisk*. Lav den om så den er!

27 / 29

Boolske udtryk:

Bud: $b ::= a_1 = a_2 \mid a_1 < a_2 \mid \neg b_1 \mid b_1 \wedge b_2 \mid (b_1)$

- transitionssystem $(\mathbf{Bud} \cup \{tt, ff\}, \rightarrow_b, \{tt, ff\})$
- tt = sandt, ff = falsk
- \rightarrow_a er transitioner fra **Aud**-transitionssystemet

$$[\text{ligmed-1}_{\text{bss}}] \quad \frac{a_1 \rightarrow_a v_1 \quad a_2 \rightarrow_a v_2}{a_1 = a_2 \rightarrow_b tt} \quad \text{hvis } v_1 = v_2$$

$$[\text{ligmed-2}_{\text{bss}}] \quad \frac{a_1 \rightarrow_a v_1 \quad a_2 \rightarrow_a v_2}{a_1 = a_2 \rightarrow_b ff} \quad \text{hvis } v_1 \neq v_2$$

$$[\text{størreend-1}_{\text{bss}}] \quad \frac{a_1 \rightarrow_a v_1 \quad a_2 \rightarrow_a v_2}{a_1 < a_2 \rightarrow_b tt} \quad \text{hvis } v_1 < v_2$$

$$[\text{størreend-2}_{\text{bss}}] \quad \frac{a_1 \rightarrow_a v_1 \quad a_2 \rightarrow_a v_2}{a_1 < a_2 \rightarrow_b ff} \quad \text{hvis } v_1 \not< v_2$$

28 / 29

[ikke-1 _{bss}]	$\frac{b \rightarrow_b tt}{\neg b \rightarrow_b ff}$
[ikke-2 _{bss}]	$\frac{b \rightarrow_b ff}{\neg b \rightarrow_b tt}$
[parent-b _{bss}]	$\frac{b_1 \rightarrow_b v}{(b_1) \rightarrow_b v}$
[og-1 _{bss}]	$\frac{b_1 \rightarrow_b tt \quad b_2 \rightarrow_b tt}{b_1 \wedge b_2 \rightarrow_b tt}$
[og-2 _{bss}]	$\frac{b_1 \rightarrow_b ff}{b_1 \wedge b_2 \rightarrow_b ff}$
[og-3 _{bss}]	$\frac{b_2 \rightarrow_b ff}{b_1 \wedge b_2 \rightarrow_b ff}$