Syntaks og semantik

Lektion 15

6 maj 2008

$$
\begin{array}{lrcl}
\textbf{ErkF:} & D_F & ::= & \texttt{func}\ \ f(x)\ \ \texttt{is}\ \ S\,;D_F \mid \varepsilon \\
\textbf{Kom:} & S & ::= & \cdots \mid \texttt{begin}\ \ D_V\ \ D_F\ \ S\ \ \texttt{end} \\
\textbf{Aud:} & a & ::= & \cdots \mid f(a)
\end{array}
$$

- sideeffekter i aritmetiske udtryk $\Rightarrow$ evaluering af et aritmetisk udtryk kan ændre store $\Rightarrow$ transitioner på formen

$$env_V, env_F \vdash \langle a, sto \rangle \to_a \langle v, sto' \rangle$$

- samme for boolske udtryk
- transitionsregler for **Aud**, **Bud**, **ErkV** og **Kom** skal laves om, de fleste kun lidt (!)
- nye regler til funktionserklæringer (transitionssystem $\to_{DF}$)
- ny regel til funktionskald (i **Aud**!)

Eksempel: gammel regel til variabelerklæringer:

[var-erkl-bip$_{bss}$]

$$\frac{\langle D_V, env_V[x \mapsto \ell][\text{next} \mapsto \text{new}(\ell)], sto[\ell \mapsto v]\rangle \to_{DV} \langle env'_V, sto'\rangle}{\langle \texttt{var}\ \ x\texttt{:=}a\texttt{;}\, D_V, env_V, sto\rangle \to_{DV} \langle env'_V, sto'\rangle}$$

$$\text{hvor } \ell = env_V(\text{next})$$

$$env_V, sto \vdash a \to_a v$$

ny regel:

[var-erkl-bof$_{bss}$]

$$\frac{env_F \vdash \langle D_V, env_V[x \mapsto \ell][\text{next} \mapsto \text{new}(\ell)], sto''[\ell \mapsto v]\rangle \to_{DV} \langle env'_V, sto'\rangle}{env_F \vdash \langle \texttt{var}\ \ x\texttt{:=}a\texttt{;}\, D_V, env_V, sto\rangle \to_{DV} \langle env'_V, sto'\rangle}$$

$$\text{hvor } \ell = env_V(\text{next})$$

$$env_V, env_F \vdash \langle a, sto\rangle \to_a \langle v, sto''\rangle$$

Denotationel semantik for **Bims**

2 Overblik
3 λ-notation
4 Aritmetiske udtryk
5 Boolske udtryk
6 Kommandoer
7 Denotationel semantik af `while`-løkker
8 Funktionsrums-domænet
9 Denotationel semantik af `while`-løkker, 2.

- operationel semantik:
  - oversæt et program til et transitionssystem:
    - *konfigurationer:* kodestump plus programtilstand
    - *slutkonfigurationer:* mulige resultater af programudførelser
    - *transitioner:* programskridt (small-step vs. big-step)
  - beskrivelse af en faktisk *programudførsel*
  - abstrakt maskine
- denotationel semantik:
  - oversæt et program til en funktion fra input til output:
    - λ*-notation* for at kunne beskrive funktioner på en effektiv måde
    - funktioner mellem funktionsrum (*højere-ordens-funktioner*)
  - beskrivelse af et programs *effekt*

λ-notation: en praktisk måde at skrive funktioner på

- før: Lad f være funktionen givet ved $f(z) = 3 + z$
- nu: $\lambda z.3 + z$
- før: Lad f_2 være funktionen givet ved $f_2(x) = \begin{cases} x & \text{hvis } x > 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$
- nu: $\lambda x.\underline{hvis}\ x > 0\ \underline{så}\ x\ \underline{ellers}\ 0$
- før: Lad g være funktionen der, givet en funktion h som input, returnerer funktionen der er givet ved foreskriften $h(h(x + 3))$
- nu: $\lambda h.\lambda x.h(h(x + 3))$

- $\lambda x.f(x)$ betegner funktionen f med variabel x
- "kroppen" $f(x)$ har scope så langt til højre som muligt
- at anvende en funktion på en værdi: $(\lambda x.x + 3)4 = 7$
- udefineret output: $\lambda x.\underline{hvis}\ x \geq 0\ \underline{så}\ \sqrt{x}\ \underline{ellers}\ \underline{udef}$

Aritmetiske udtryk *uden variable*:

$$\textbf{Aud} : \quad a ::= n \mid a_1 + a_2 \mid a_1 \star a_2 \mid a_1 - a_2 \mid (a_1)$$

betydning af et aritmetisk udtryk: dens værdi

$$\mathcal{A}^- : \textbf{Aud} \to \mathbb{Z}$$

givet ved

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^-[\![n]\!] &= \mathcal{N}[\![n]\!] \\
\mathcal{A}^-[\![a_1 + a_2]\!] &= \mathcal{A}^-[\![a_1]\!] + \mathcal{A}^-[\![a_2]\!] \\
\mathcal{A}^-[\![a_1 \star a_2]\!] &= \mathcal{A}^-[\![a_1]\!] \cdot \mathcal{A}^-[\![a_2]\!] \\
\mathcal{A}^-[\![a_1 - a_2]\!] &= \mathcal{A}^-[\![a_1]\!] - \mathcal{A}^-[\![a_2]\!] \\
\mathcal{A}^-[\![(a)]\!] &= \mathcal{A}^-[\![a]\!]
\end{aligned}$$

Aritmetiske udtryk *med variable*:

$$\textbf{Aud}: \quad a ::= x \mid n \mid a_1 + a_2 \mid a_1 * a_2 \mid a_1 - a_2 \mid (a_1)$$

betydning af et aritmetisk udtryk: en funktion fra tilstande til værdier

$$\mathcal{A} : \textbf{Aud} \to (\textbf{Tilstande} \to \mathbb{Z})$$

givet ved

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}[\![x]\!] &= \lambda s.s(x) \\
\mathcal{A}[\![n]\!] &= \lambda s.\mathcal{N}[\![n]\!] \\
\mathcal{A}[\![a_1 + a_2]\!] &= \lambda s.\mathcal{A}[\![a_1]\!]s + \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \\
\mathcal{A}[\![a_1 * a_2]\!] &= \lambda s.\mathcal{A}[\![a_1]\!]s \cdot \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \\
\mathcal{A}[\![a_1 - a_2]\!] &= \lambda s.\mathcal{A}[\![a_1]\!]s - \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \\
\mathcal{A}[\![(a)]\!] &= \lambda s.\mathcal{A}[\![a]\!]s
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}[\![x]\!] &= \lambda s.s(x) \\
\mathcal{A}[\![n]\!] &= \lambda s.\mathcal{N}[\![n]\!] \\
\mathcal{A}[\![a_1 + a_2]\!] &= \lambda s.\mathcal{A}[\![a_1]\!]s + \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \\
\mathcal{A}[\![a_1 \star a_2]\!] &= \lambda s.\mathcal{A}[\![a_1]\!]s \cdot \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \\
\mathcal{A}[\![a_1 - a_2]\!] &= \lambda s.\mathcal{A}[\![a_1]\!]s - \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \\
\mathcal{A}[\![\,(a)\,]\!] &= \lambda s.\mathcal{A}[\![a]\!]s
\end{aligned}
$$

Eksempel: Lad s være tilstanden givet ved $s(\mathtt{x}) = 4$ og $s(\mathtt{y}) = 6$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}[\![\mathtt{x}\star\mathtt{y}+\underline{\mathtt{18}}]\!] &= \lambda s.\mathcal{A}[\![\mathtt{x}\star\mathtt{y}]\!]s + \mathcal{A}[\![\underline{\mathtt{18}}]\!]s \\
&= \lambda s.\mathcal{A}[\![\mathtt{x}\star\mathtt{y}]\!]s + \mathcal{N}[\![\underline{\mathtt{18}}]\!] \\
&= \lambda s.\mathcal{A}[\![\mathtt{x}\star\mathtt{y}]\!]s + 18 \\
&= \lambda s.\mathcal{A}[\![\mathtt{x}]\!]s \cdot \mathcal{A}[\![\mathtt{y}]\!]s + 18 \\
&= \lambda s.s(\mathtt{x}) \cdot s(\mathtt{y}) + 18 \\
&= 24 + 18 = 42 \qquad \text{(igen! ︶)}
\end{aligned}
$$

Boolske udtryk:

$$\textbf{Bud}: \quad b \ ::= \ a_1 = a_2 \mid a_1 < a_2 \mid \neg b_1 \mid b_1 \wedge b_2 \mid (b_1)$$

betydning af et boolsk udtryk: en funktion fra tilstande til sandhedsværdier

$$\mathcal{B} : \textbf{Bud} \to \big(\textbf{Tilstande} \to \{tt, ff\}\big)$$

givet ved

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}[\![a_1 = a_2]\!] &= \lambda s.\underline{\text{hvis}}\ \mathcal{A}[\![a_1]\!]s = \mathcal{A}[\![a_2]\!]s\ \underline{\text{så}}\ tt\ \underline{\text{ellers}}\ ff \\
\mathcal{B}[\![a_1 < a_2]\!] &= \lambda s.\underline{\text{hvis}}\ \mathcal{A}[\![a_1]\!]s < \mathcal{A}[\![a_2]\!]s\ \underline{\text{så}}\ tt\ \underline{\text{ellers}}\ ff \\
\mathcal{B}[\![\neg b]\!] &= \lambda s.\underline{\text{hvis}}\ \mathcal{B}[\![b]\!]s = tt\ \underline{\text{så}}\ ff\ \underline{\text{ellers}}\ tt \\
\mathcal{B}[\![b_1 \wedge b_2]\!] &= \lambda s.\underline{\text{hvis}}\ \mathcal{B}[\![b_1]\!]s = tt \text{ og } \mathcal{B}[\![b_2]\!]s = tt\ \underline{\text{så}}\ tt\ \underline{\text{ellers}}\ ff \\
\mathcal{B}[\![(b)]\!] &= \lambda s.\mathcal{B}[\![b]\!]s
\end{aligned}$$

$$\textbf{Kom}: \quad S ::= x := a \mid \texttt{skip} \mid S_1 ; S_2 \mid \texttt{if } b \texttt{ then } S_1 \texttt{ else } S_2 \mid \texttt{while } b \texttt{ do } S$$

betydningen af en kommando: *partiel* funktion fra tilstande til tilstande

$$\mathcal{S} : \textbf{Kom} \to (\textbf{Tilstande} \rightharpoonup \textbf{Tilstande})$$

givet ved

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}[\![\texttt{skip}]\!] &= \lambda s.s \\
\mathcal{S}[\![x := a]\!] &= \lambda s.s[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]s] \\
\mathcal{S}[\![S_1 ; S_2]\!] &= \mathcal{S}[\![S_2]\!] \circ \mathcal{S}[\![S_1]\!] \\
\mathcal{S}[\![\texttt{if } b \texttt{ then } S_1 \texttt{ else } S_2]\!] & \\
&= \lambda s.\underline{hvis}\ \mathcal{B}[\![b]\!]s = tt\ \underline{så}\ \mathcal{S}[\![S_1]\!]s\ \underline{ellers}\ \mathcal{S}[\![S_2]\!]s \\
\mathcal{S}[\![\texttt{while } b \texttt{ do } S]\!] & \\
&= \lambda s.\underline{hvis}\ \mathcal{B}[\![b]\!]s = tt \\
&\qquad \underline{så}\ (\mathcal{S}[\![\texttt{while } b \texttt{ do } S]\!] \circ \mathcal{S}[\![S]\!])s\ \underline{ellers}\ s
\end{aligned}$$

(partiel funktion – fordi nogle kommandoer ikke terminerer)

Ligningen

$$\mathcal{S}[\![\texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S]\!] = \lambda s.\underline{hvis}\ \mathcal{B}[\![b]\!]s = tt \\ \underline{så}\ (\mathcal{S}[\![\texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S]\!] \circ \mathcal{S}[\![S]\!])s\ \underline{ellers}\ s$$

er rekursiv.

Mere præcist: Lad $b \in \mathbf{Bud}$ og $S \in \mathbf{Kom}$.
En løsning $f = \mathcal{S}[\![\texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S]\!]$ må opfylde ligningen

$$f = \lambda s.\underline{hvis}\ \mathcal{B}[\![b]\!]s = tt\ \underline{så}\ (f \circ \mathcal{S}[\![S]\!])s\ \underline{ellers}\ s$$

Endnu mere præcist: Lad

$$F : (\mathbf{Tilstande} \rightharpoonup \mathbf{Tilstande}) \to (\mathbf{Tilstande} \rightharpoonup \mathbf{Tilstande})$$

være funktionen givet ved

$$F(f) = \lambda s.\underline{hvis}\ \mathcal{B}[\![b]\!]s = tt\ \underline{så}\ (f \circ \mathcal{S}[\![S]\!])s\ \underline{ellers}\ s$$

Vi leder efter et mindste fikspunkt for F.

Eksempel: Lad $b = \neg\texttt{(x=0)}$ og $S = \texttt{x:=x-1}$. Find

$$\mathcal{S}[\![\texttt{while }\neg\texttt{(x=0) do x:=x-1}]\!]$$

Fikspunktligningen:

$$f = F(f) = \lambda s.\underline{hvis}\ \mathcal{B}[\![\neg\texttt{(x=0)}]\!]s = tt\ \underline{så}\ (f \circ \mathcal{S}[\![\texttt{x:=x-1}]\!])s\ \underline{ellers}\ s$$

Et par fikspunkter:

$$\begin{aligned} f_1 &= \lambda s.\underline{hvis}\ s(\mathrm{x}) \geq 0\ \underline{så}\ s[\mathrm{x} \mapsto 0]\ \underline{ellers}\ \underline{\mathrm{udef}} \\ f_2 &= \lambda s.\underline{hvis}\ s(\mathrm{x}) \geq 0\ \underline{så}\ s[\mathrm{x} \mapsto 0]\ \underline{ellers}\ s[\mathrm{x} \mapsto 42] \\ f_3 &= \lambda s.s[\mathrm{x} \mapsto 0] \end{aligned}$$

Mål: Domænestruktur på mængden **Tilstande** $\rightharpoonup$ **Tilstande** så

- *fikspunktsætningen* kan anvendes på F, og
- f_1 bliver *mindste fikspunkt* for F

Definition 14.10(200): Givet mængder A, B og en partiel funktion $f : A \rightharpoonup B$, da er **grafen** af f defineret som

$$\mathrm{graf}(f) = \{(a, b) \mid f(a) = b\}$$

(dén kendte vi vist allerede . . .)

Definition 14.11(200): For mængder A, B defineres ordningen $\sqsubseteq$ på funktionsrummet $A \rightharpoonup B$ ved

$$f_1 \sqsubseteq f_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{graf}(f_1) \subseteq \mathrm{graf}(f_2)$$

- dvs. $f_1 \sqsubseteq f_2$ hvis $f_1(a) = f_2(a)$ for alle a for hvilke f_1 er defineret
- men f_1 må godt være udef for nogle værdier for hvilke f_2 er defineret

Eksempel: For $A = B =$ **Tilstande** og

$$f_1 = \lambda s.\underline{\mathit{hvis}}\ s(\mathrm{x}) \geq 0\ \underline{\mathit{så}}\ s[\mathrm{x} \mapsto 0]\ \underline{\mathit{ellers}}\ \underline{\mathrm{udef}}$$
$$f_2 = \lambda s.\underline{\mathit{hvis}}\ s(\mathrm{x}) \geq 0\ \underline{\mathit{så}}\ s[\mathrm{x} \mapsto 0]\ \underline{\mathit{ellers}}\ s[\mathrm{x} \mapsto 42]$$

er $f_1 \sqsubseteq f_2$.

$$f_1 \sqsubseteq f_2 \quad \Leftrightarrow \quad \text{graf}(f_1) \subseteq \text{graf}(f_2)$$

Lemma 14.14(200): Med ordningen $\sqsubseteq$ er $A \rightharpoonup B$ et domæne.

Bevis:

1. $\sqsubseteq$ er en partiel orden fordi $\subseteq$ er.
2. Bundelementet er $\perp = \lambda a.\underline{\text{udef}}$.
3. Lad $Y = \{f_0 \sqsubseteq f_1 \sqsubseteq f_2 \sqsubseteq \cdots\}$ være en voksende mængde.
   Vi skal finde lim Y.
4. Grafer af funktioner $A \rightharpoonup B$ er delmængder af $A \times B$, og $\sqsubseteq$ mellem svarer til $\subseteq$ mellem grafer
   $\Rightarrow$ forsøg med "lim $Y = \bigcup_i \text{graf}(f_i)$" ligesom for potensmængde-domænet!
5. Lad $f = \lambda a.\underline{\textit{hvis}}\ f_i(a) = b$ for et i $\underline{\textit{så}}$ b $\underline{\textit{ellers}}$ $\underline{\text{udef}}$
   Det svarer til $\text{graf}(f) = \bigcup_i \text{graf}(f_i)$
6. Vis at $f = \lim Y$.

Recap:

- Lad $b \in$ **Bud**, $S \in$ **Kom**. Betragt kommandoen `while` b `do` S.
- Lad $F : (\textbf{Tilstande} \rightharpoonup \textbf{Tilstande}) \to (\textbf{Tilstande} \rightharpoonup \textbf{Tilstande})$ være funktionen

$$F = \lambda f.\lambda s.\underline{hvis}\ \mathcal{B}[\![b]\!]s = tt\ \underline{så}\ (f \circ \mathcal{S}[\![S]\!])s\ \underline{ellers}\ s$$

- Vi ønsker at *definere* $\mathcal{S}[\![\texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S]\!]$ som det mindste fikspunkt for F, og at anvende fikspunktsætningen for at *finde* det.
- Fikspunktsætningen: Lad D være et domæne og $g : D \to D$ en kontinuert funktion. Da har g et mindste fikspunkt x^*, som kan beregnes ved

$$x^* = \lim\{g^i(\bot) \mid i \in \mathbb{N}\}$$

hvor $\bot$ er bundelementet i D.
- **Tilstande** $\rightharpoonup$ **Tilstande** er nu et domæne, *men er F kontinuert?*
- Ja. Bevis: *Opgave* ...

Eksempel: Betragt igen `while ¬(x=0) do x:=x-1`

$$F = \lambda f.\lambda s.\underline{hvis}\ \mathcal{B}[\![\neg(\mathtt{x=0})]\!]s = tt\ \underline{så}\ (f \circ \mathcal{S}[\![\mathtt{x:=x-1}]\!])s\ \underline{ellers}\ s$$
$$= \lambda f.\lambda s.\underline{hvis}\ s(\mathtt{x}) \neq 0\ \underline{så}\ f(s[\mathtt{x} \mapsto s(\mathtt{x}) - 1])\ \underline{ellers}\ s$$

at beregne det mindste fikspunkt:

$$F^0(\bot) = \bot = \lambda s.\underline{\mathrm{udef}}$$
$$F^1(\bot) = F(\bot) = \lambda s.\underline{hvis}\ s(\mathtt{x}) \neq 0\ \underline{så}\ \bot(s[\mathtt{x} \mapsto \mathtt{x} - 1])\ \underline{ellers}\ s$$
$$= \lambda s.\underline{hvis}\ s(\mathtt{x}) \neq 0\ \underline{så}\ \underline{\mathrm{udef}}\ \underline{ellers}\ s$$
$$F^2(\bot) = F(F(\bot)) = \lambda s.\underline{hvis}\ s(\mathtt{x}) \neq 0\ \underline{så}$$
$$\underline{hvis}\ s[\mathtt{x} \mapsto s(\mathtt{x}) - 1](\mathtt{x}) \neq 0\ \underline{så}\ \underline{\mathrm{udef}}$$
$$\underline{ellers}\ s[\mathtt{x} \mapsto s(\mathtt{x}) - 1]$$
$$\underline{ellers}\ s$$
$$= \lambda s.\underline{hvis}\ s(\mathtt{x}) \neq 0 \text{ og } s(\mathtt{x}) \neq 1\ \underline{så}\ \underline{\mathrm{udef}}\ \underline{ellers}\ s[\mathtt{x} \mapsto 0]$$
$$\ldots \quad F^i(\bot) = \lambda s.\underline{hvis}\ s(\mathtt{x}) < 0 \text{ eller } s(\mathtt{x}) > i - 1$$
$$\underline{så}\ \underline{\mathrm{udef}}\ \underline{ellers}\ s[\mathtt{x} \mapsto 0]$$