Faculté des Sciences d'Orsay | Université Paris-Saclay
Licence Informatique, LDD Informatique, Mathématiques, semestre 5 | 2024–25
Eléments de logique pour l'informatique (Info 315) | 16 octobre 2024

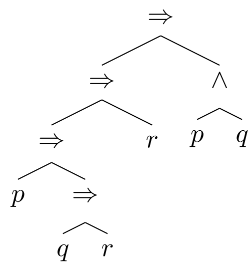
Exercices de révision pour le partiel

Exercice 1 *Logique propositionnelle.*
Soit la formule A définie comme $((p \Rightarrow q \Rightarrow r) \Rightarrow r) \Rightarrow p \land q$.

1. Représenter la formule A sous forme d'arbre.
2. Donner la table de vérité de la formule A.
3. Dire si la formule est valide, satisfiable, insatisfiable ?
4. La formule $\neg A$ a-t-elle un modèle ? si oui donner un exemple.

Correction :

1. *La formule complètement parenthésée est $((p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow r) \Rightarrow (p \land q)$.*
   Elle correspond à l'arbre :



2. *Table de vérité :*

p	q	r	$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow r$	$p \land q$	A
V	V	_		V	V
V	F	V	V	F	F
V	F	F	F	F	V
F	_	V	V	F	F
F	_	F	F	F	V

3. *La formule n'est pas valide (une ligne de la table de vérité où elle est fausse), elle est satisfiable (une ligne où elle est vraie) et donc elle n'est pas insatisfiable.*
4. *La formule $\neg A$ a trois modèles, $\{p \mapsto V; q \mapsto F; r \mapsto V\}$ $\{p \mapsto F; q \mapsto V; r \mapsto V\}$ $\{p \mapsto F; q \mapsto F; r \mapsto V\}$*

Exercice 2 *Modélisation (partiel 2017)*

Dans cet exercice, on s'intéresse à modéliser un système de droit d'accès sur des ressources.

Les objets de la logique vont représenter des individus, des groupes d'individus, des ressources (fichiers, répertoires), des actions à réaliser (lire, écrire, supprimer,...). Les symboles de prédicat qui nous intéressent sont les suivants :

— `action`(a) : a est une action ;
— `ressource`(r) : r est une ressource ;
— `groupe`(g) : g est un groupe ;
— `individu`(x) : x est un individu ;
— `dans`(x, g) : l'individu x est dans le groupe g ;
— `proprio`(x, r) : l'individu x est le propriétaire de la ressource r ;
— `droit`(g, a, r) : le groupe g est autorisé à effectuer l'action a sur la ressource r ;
— `peut`(x, a, r) : l'individu x peut effectuer l'action a sur la ressource r ;
— $x = y$ les objets x et y sont égaux.

On introduit également trois constantes `Ecrire`, `Lire` et `Supp` qui représentent les actions d'écriture, de lecture et de suppression d'une ressource.

1. Traduire en langage naturel les formules suivantes :
   (a) $\forall x\, r, \texttt{peut}(x, \texttt{Ecrire}, r) \Rightarrow \texttt{peut}(x, \texttt{Supp}, r)$
   (b) $\forall r, \texttt{ressource}(r) \Rightarrow \exists x, \texttt{peut}(x, \texttt{Supp}, r)$
   (c) $\forall x, \exists a, \exists r, \texttt{ressource}(r) \land \texttt{action}(a) \land \neg\texttt{peut}(x, a, r)$
   (d) $\exists r, \texttt{ressource}(r) \land \forall a, \forall x, \neg\texttt{peut}(x, a, r)$
2. Exprimer comme des formules logiques les propriétés suivantes :
   (a) Toute ressource a au moins un propriétaire ;
   (b) Il existe une ressource qui a au moins deux propriétaires ;
   (c) Une personne peut effectuer une action sur une ressource si et seulement si elle en est propriétaire ou bien si elle appartient à un groupe qui a le droit d'effectuer cette action ;
   (d) Tout groupe qui a le droit d'écriture sur une ressource a aussi le droit de lecture.
3. Proposer une interprétation sur un domaine qui contient deux individus (A et B), un groupe G, deux ressources F et D et les trois actions `Ecrire`, `Lire` et `Supp` et qui vérifie l'ensemble des formules de la question précédente.
4. Est-il possible de trouver une interprétation qui vérifie toutes les conditions de la première question ?

Correction :

1. (a) Toute personne qui peut écrire sur une ressource peut aussi la supprimer.
   (b) Toute ressource peut être supprimée (pour toute ressource, il existe une personne qui peut la supprimer).
   (c) Personne n'a le droit de faire toutes les actions sur toutes les ressources (pour toute personne, il existe une ressource et une action que la personne ne peut pas faire sur cette ressource).
   (d) Il existe une ressource sur laquelle personne ne peut faire aucune action.

2. (a) $\forall r, \textit{ressource}(r) \Rightarrow \exists x, \textit{proprio}(x, r)$
   (b) $\exists r, \textit{ressource}(r) \land \exists x, \exists y, \textit{proprio}(x, r) \land \textit{proprio}(y, r) \land x \neq y$
   (c) $\forall x\, a\, r, \textit{peut}(x, a, r) \Leftrightarrow (\textit{proprio}(x, r) \lor \exists g, \textit{dans}(x, g) \land \textit{droit}(g, a, r))$
   (d) $\forall g\, r, \textit{droit}(g, \textit{Ecrire}, r) \Rightarrow \textit{droit}(g, \textit{Lire}, r)$

3. On doit donner les éléments du domaine qui vérifient les prédicats. Les interprétations des prédicats unaires (action, ressource, groupe et individu) sont imposés par l'énoncé. On peut ensuite choisir librement qui on met dans le groupe (éventuellement personne). De même les droits du groupe peuvent être fixés librement en respectant juste le fait que d'avoir le droit d'écriture donne aussi le droit de lecture. Le choix de propriétaire doit juste respecter que chaque ressource a un propriétaire et qu'une des ressources en a deux. Une fois l'interprétation de ces relations fixée, la condition (c) détermine complètement l'interprétation de peut.

   Une solution possible (les deux individus sont dans le groupe G qui a uniquement le droit de lire la ressource D, A est le propriétaire de F et D, tandis que B est propriétaire uniquement de F).
   - $\textit{action}_I = \{\textit{Ecrire}, \textit{Lire}, \textit{Supp}\}$
   - $\textit{ressource}_I = \{F, D\}$
   - $\textit{groupe}_I = \{G\}$
   - $\textit{individu}_I = \{A, B\}$
   - $\textit{dans}_I = \{(A, G), (B, G)\}$
   - $\textit{proprio}_I = \{(A, F), (B, F), (A, D)\}$
   - $\textit{droit}_I = \{(G, \textit{Lire}, D)\}$
   - $\textit{peut}_I = \{(A, \textit{Lire}, F), (A, \textit{Ecrire}, F), (A, \textit{Supp}, F), (A, \textit{Lire}, D), (A, \textit{Ecrire}, D), (A, \textit{Supp}, D), (B, \textit{Lire}, F), (B, \textit{Ecrire}, F), (B, \textit{Supp}, F), (B, \textit{Lire}, D)\}$

4. Non car il y a une contradiction entre la formule (b) qui dit que toute ressource peut être supprimée et la formule (d) qui dit qu'il existe une ressource sur laquelle on ne peut faire aucune action.

Exercice 3 *Transformation de formules*

On se donne une signature avec pour les termes deux constantes a et b, et pour les formules un symbole de prédicat binaire R.

On veut transformer une formule close du calcul des prédicats sur la signature précédente en une formule close **sans quantificateur** qui est équivalente si on se place sur le domaine à deux élements $\mathcal{D} = \{a, b\}$. On rappelle que pour toute interprétation sur ce domaine, et pour une formule A quelconque on a $(\forall x, A) \Leftrightarrow (A[x \leftarrow a] \wedge A[x \leftarrow b])$ et $(\exists x, A) \Leftrightarrow (A[x \leftarrow a] \vee A[x \leftarrow b])$. La notation $A[x \leftarrow t]$ désigne la formule A dans laquelle on a remplacé les occurrences libres de la variable x par le terme t.

1. Appliquer la transformation à la formule $\forall x, \exists y, R(a, y) \wedge R(x, y)$ (notée P) et simplifier la formule obtenue.
2. La formule P est-elle valide ? satisfiable ? justifier votre réponse.
3. Définir par des équations récursives une fonction `subst` qui étant donnée une formule A du calcul des prédicats sur la signature ci-dessus, une variable x et un terme t, retourne la formule $A[x \leftarrow t]$.
4. Définir par des équations récursives une fonction `dom2` qui étant donnée une formule du calcul des prédicats sans variable libre calcule une formule close sans quantificateur, équivalente dans toute interprétation sur un domaine à deux éléments $D = \{a, b\}$ en utilisant la méthode rappelée ci-dessus et la fonction `subst`. Justifier la terminaison du calcul.

Correction :

1. $\forall x, \exists y, R(a, y) \wedge R(x, y)$
$\Leftrightarrow (\exists y, R(a, y) \wedge R(a, y)) \wedge (\exists y, R(a, y) \wedge R(b, y))$
$\equiv (\exists y, R(a, y)) \wedge (\exists y, R(a, y) \wedge R(b, y))$
$\Leftrightarrow (R(a, a) \vee R(a, b)) \wedge ((R(a, a) \wedge R(b, a)) \vee (R(a, b) \wedge R(b, b)))$
$\equiv (R(a, a) \wedge R(b, a)) \vee (R(a, b) \wedge R(b, b))$

2. La formule P est satisfiable : on construit une interprétation sur le domaine $\mathcal{D} = \{a, b\}$ en choisissant $R(a, a)$ et $R(b, a)$ vrais. La formule P n'est pas valide, toujours sur le même domaine, il suffit de choisir $R(a, a)$ et $R(b, b)$ faux.

3. On reprend les définitions du cours dans le cas de cette signature particulière. On remarque que les termes sont soit des variables, soit l'une des constantes a ou b.

$$\begin{array}{rll}
x[x \leftarrow t] & = t & \\
u[x \leftarrow t] & = u & \textit{si } u \neq x
\end{array}$$

$$\begin{array}{rll}
\top[x \leftarrow t] & = \top & \\
\bot[x \leftarrow t] & = \bot & \\
R(u, v)[x \leftarrow t] & = R(u[x \leftarrow t], v[x \leftarrow t]) & \\
(P \circ Q)[x \leftarrow t] & = (P[x \leftarrow t]) \circ (Q[x \leftarrow t]) & \circ \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\} \\
(\forall x, P)[x \leftarrow t] & = \forall x, P & \\
(\forall y, P)[x \leftarrow t] & = \forall y, (P[x \leftarrow t]) & \textit{si } t \neq y \\
(\exists x, P)[x \leftarrow t] & = \exists x, P & \\
(\exists y, P)[x \leftarrow t] & = \exists y, (P[x \leftarrow t]) & \textit{si } t \neq y
\end{array}$$

4.

$$\begin{array}{lll}
\texttt{dom2}(p) & = p & \textit{si p est atomique} \\
\texttt{dom2}(\neg P) & = \neg \texttt{dom2}(P) & \\
\texttt{dom2}(P \circ Q) & = \texttt{dom2}(P) \circ \texttt{dom2}(Q) & \circ \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\} \\
\texttt{dom2}(\forall x, P) & = \texttt{dom2}(P[x \leftarrow a]) \wedge \texttt{dom2}(P[x \leftarrow b]) & \\
\texttt{dom2}(\exists x, P) & = \texttt{dom2}(P[x \leftarrow a]) \vee \texttt{dom2}(P[x \leftarrow b]) &
\end{array}$$

Dans la partie droite des équations, la fonction `dom2` est appliquée à une formule dont le nombre de connecteurs et de quantificateurs est strictement plus petit que dans le membre gauche.

Exercice 4 On introduit le connecteur $\diamond$ (nor) dont la table de vérité est donnée par

x	y	$x \diamond y$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

1. Donner une forme normale conjonctive et une forme normale disjonctive de la formule $x \diamond y$.
   Correction :
   FNC et FND : $(\neg x \wedge \neg y)$ *autre FNC :* $(\neg x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg y)$

2. Donner les tables de vérité des formules $(x \diamond x)$, $((x \diamond x) \diamond x)$ et $(x \diamond y) \diamond (x \diamond y)$
   Correction :

x	y	$x \diamond x$	$(x \diamond x) \diamond x$	$(x \diamond y)$	$(x \diamond y) \diamond (x \diamond y)$
V	V	F	F	F	V
F	V	V	F	F	V
V	F			F	V
F	F			V	F

3. Donner des formules équivalentes à $\top$, $\bot$, $\neg x$, $x \wedge y$, $x \vee y$ et $x \Rightarrow y$ qui n'utilisent que l'opérateur $\diamond$ et possiblement les variables x et y. On pourra justifier le résultat soit par des tables de vérité, soit en utilisant des équivalences avec les formules propositionnelles usuelles.
   Correction :

$$\top \equiv ((x \diamond x) \diamond x) \diamond ((x \diamond x) \diamond x) \qquad \bot \equiv (x \diamond x) \diamond x \qquad \neg x \equiv x \diamond x$$
$$(x \vee y) \equiv (x \diamond y) \diamond (x \diamond y) \qquad (x \wedge y) \equiv (x \diamond x) \diamond (y \diamond y) \qquad (x \Rightarrow y) \equiv ((x \diamond x) \diamond y) \diamond ((x \diamond x) \diamond y)$$

4. Définir par des équations récursives une fonction `nor` qui étant donnée une formule propositionnelle construite sur les connecteurs habituels, la transforme en une formule qui ne contient que des variables propositionnelles et le connecteur $\diamond$.
   Correction :

$$\begin{array}{ll}
\texttt{nor}(x) & = x \quad x \text{ variable prop} \\
\texttt{nor}(\top) & = ((x \diamond x) \diamond x) \diamond ((x \diamond x) \diamond x) \\
\texttt{nor}(\bot) & = (x \diamond x) \diamond x \\
\texttt{nor}(\neg P) & = (\texttt{nor}(P) \diamond \texttt{nor}(P)) \\
\texttt{nor}(P \vee Q) & = (\texttt{nor}(P) \diamond \texttt{nor}(Q)) \diamond (\texttt{nor}(P) \diamond \texttt{nor}(Q)) \\
\texttt{nor}(P \wedge Q) & = (\texttt{nor}(P) \diamond \texttt{nor}(P)) \diamond (\texttt{nor}(Q) \diamond \texttt{nor}(Q)) \\
\texttt{nor}(P \Rightarrow Q) & = ((\texttt{nor}(P) \diamond \texttt{nor}(P))\ \texttt{nor}(Q)) \diamond ((\texttt{nor}(P) \diamond \texttt{nor}(P))\ \texttt{nor}(Q))
\end{array}$$

5. Donner le résultat de $\texttt{nor}(x \vee (y \vee z))$.
   Correction : *On remarquera que le nombre de connecteurs $\diamond$ dans la formule transformée croit exponentiellement par rapport au nombre de connecteurs logiques dans la formule initiale.*

$$\begin{array}{ll}
\texttt{nor}(x \vee y \vee z) & (\texttt{nor}(x) \diamond \texttt{nor}(y \vee z)) \diamond (\texttt{nor}(x) \diamond \texttt{nor}(y \vee z)) \\
 & = (x \diamond ((\texttt{nor}(y) \diamond \texttt{nor}(z)) \diamond (\texttt{nor}(y) \diamond \texttt{nor}(z)))) \diamond (x \diamond ((\texttt{nor}(y) \diamond \texttt{nor}(z)) \diamond (\texttt{nor}(y) \diamond \texttt{nor}(z)))) \\
 & = (x \diamond ((y \diamond z) \diamond (y \diamond z))) \diamond (x \diamond ((y \diamond z) \diamond (y \diamond z)))
\end{array}$$