TD 2
Expressions rationnelles

Version du 24 juin 2021

Exercice 1 – Opérateurs basiques

Dans cet exercice nous ne considérons que les opérateurs basiques suivants :

— le choix $(e_1 + e_2)$

— la concaténation (e_1e_2)

— la répétition $(e^\star)$

On pourra omettre les parenthèses superflues en respectant les priorités classiques de ces opérateurs (répétition plus prioritaire que la concaténation elle-même plus prioritaire que le choix).

Soit $\Sigma = \{-, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, .\}$. Proposez des expressions rationnelles reconnaissant les sous-langages de $\Sigma^\star$ qui suivent.

1. Les entiers signés en base 10. C'est-à-dire avec le « $-$ » en première position s'il apparaît, et pas de 0 en tête (sauf pour représenter 0).
2. Les nombres à virgule.
3. Les développements décimaux d'un nombre réel, comme 3.141592, -318.29 ou 42. Trois contraintes pour corser :
   — on n'acceptera pas un point qui n'est pas suivi de chiffre,
   — à nouveau la partie entière ne peut pas commencer par 0 sauf pour les nombres compris entre -1 et 1,
   — on n'acceptera pas -0.
4. Tous les entiers naturels multiples de 20.

Exercice 2 – Sucre syntaxique

Autorisons-nous les opérateurs suivants en plus des opérateurs basiques.

— Pour une expression rationnelle e, $e^?$ est l'abréviation de $(\varepsilon + e)$.

— Pour une expression rationnelle e, e^+ est l'abréviation de $ee^\star$.

— Pour des symboles $s_1, s_2, \ldots s_n$, $[s_1s_2 \ldots s_n]$ désigne l'un de ces symboles. Cet opérateur peut facilement se réécrire avec l'opérateur +. Par exemple si $\Sigma = \{a, b, \ldots, z\}$, on a $[aeiou] = (a + e + i + o + u)$.

— Si les symboles de Σ sont ordonnés (par exemple les chiffres ou notre alphabet latin) $[s_1-s_2]$ représente un symbole parmi tous ceux compris entre le symbole s_1 et le symbole s_2 (inclus). Cet opérateur peut lui aussi se réécrire, par exemple si $\Sigma = \{a, b, \ldots, z\}$, on a $[a - e] = (a + b + c + d + e)$.

1. Simplifiez toutes les expressions de l'exercice précédent avec ces opérateurs.
2. Avec $\Sigma = \{-, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ., e\}$, proposez une expression rationnelle reconnaissant un nombre décimal en notation scientifique, c'est-à-dire de la forme $-1.234e56$ où
   — « $-$ » est le signe, il peut être absent
   — « 1.234 » est la mantisse, comprise entre 0 et 9.99999 . . ..
   — « $e56$ » est l'exposant, il est facultatif et s'interprète comme 10^{56}. L'exposant est un nombre entier qui peut être signé, par exemple $2e{-}3$ représente 0.002.

   On s'autorise les 0 superflus, ainsi que -0, vous avez compris que c'était suffisamment pénible à gérer.

Exercice 3 – Simplification et équivalences

Pour chaque entrée de la liste suivante, dites si le langage dénoté par l'expression rationnelle e est égal, inclus, contenant, ou incomparable à celui dénoté par l'expression rationnelle f pour l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Proposez des contre-exemples quand les langages sont différents.

e	f
$a^\star b(ab)^\star$	$a^\star(bab)^\star$
$a(bb)^\star$	$ab^\star$
$a(a+b)^\star b$	$a^\star(a+b)^\star b^\star$
$abc + acb$	$a(b+c)(c+b)$
$a^\star bc + a^\star cb$	$a^\star(bc + a^\star cb)$
$(abc+acb)^\star$	$((abc)^\star(acb)^\star)^\star$
$(abc+acb)^+$	$((abc)^\star(acb)^\star)^+$
$(abc+acb)^\star$	$(abc(acb)^\star)^\star$
$(abc+acb)^\star$	$(a(bc)^\star(cb)^\star)^\star$

Exercice 4 – Intersection de langages

1. L'intersection de deux langages rationnels est-elle un langage rationnel ?
2. Soient L_1 et L_2 les langages respectivement dénotés par $ab + bc^+$ et $a^\star b^\star c^\star$. Proposez une expression rationnelle dénotant le langage $L_1L_2 \cap L_2L_1$.

Exercice 5

Parmi les langages suivants, déterminez ceux qui sont égaux.

$$(L \cup M)^\star \quad (LM)^\star L \quad L(LM)^\star \quad (L^\star \cup M)^\star \quad (M^\star \cup L)^\star \quad (L^\star M^\star)^\star \quad (M^\star L^\star)^\star \quad (L^\star \cup M^\star)^\star$$