Syntaks og semantik

Lektion 5

19 februar 2007

Regulære sprog

- alfabet: en endelig mængde, normalt betegnet Σ
- bogstav / tegn / symbol: et element i Σ
- ord / streng: en endelig følge $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ af bogstaver. Normalt skrevet uden parenteser og komma: $a_1 a_2 \dots a_k$
- ε: det tomme ord (med 0 bogstaver)
- at sammensætte ord: $abe \circ kat = abekat$
- ε er identiteten for $\circ$: $w \circ \varepsilon = \varepsilon \circ w = w$ for alle ord w

- Sprog (over Σ): en mængde af ord med bogstaver fra Σ
- $\emptyset$: det tomme sprog
- Σ^*: sproget bestående af *alle* ord over Σ

$\Rightarrow$ L er et sprog over Σ hvis og kun hvis $L \subseteq \Sigma^*$

- Givet sprog $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$, da kan vi danne sprogene
  - $L_1 \cup L_2 = \{w \mid w \in L_1 \text{ eller } w \in L_2\}$ foreningsmængden
  - $L_1 \circ L_2 = \{w_1 \circ w_2 \mid w_1 \in L_1 \text{ og } w_2 \in L_2\}$ sammensætningen
  - $L_1^* = \{w_1 \circ w_2 \circ \dots \circ w_k \mid \text{alle } w_i \in L_1\}$ stjernen
- Disse 3 operationer kaldes de regulære operationer på sprog.
- Vi kan også danne andre sprog; de vigtigste andre operationer:
  - $L_1 \cap L_2 = \{w \mid w \in L_1 \text{ og } w \in L_2\}$ fællesmængden
  - $\bar{L}_1 = \Sigma^* \setminus L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid w \notin L\}$ komplementet

- Definition 1.5: En deterministisk endelig automat (DFA) er en 5-tupel $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, hvor delene er
  1. Q : en endelig mængde af tilstande
  2. Σ : input-alfabetet
  3. $\delta : Q \times \Sigma \to Q$: transitionsfunktionen
  4. $q_0 \in Q$: starttilstanden
  5. $F \subseteq Q$: mængden af accepttilstande
- M siges at acceptere et ord $w \in \Sigma^*$ hvis der findes $w_1, w_2, \dots, w_k \in \Sigma$ og $r_0, r_1, \dots, r_k \in Q$ således at $w = w_1 w_2 \dots w_k$ og
  1. $r_0 = q_0$,
  2. $r_{i+1} = \delta(r_i, w_{i+1})$ for alle $i = 0, 1, \dots, k-1$, og
  3. $r_k \in F$.
- Sproget som genkendes af M er $[\![M]\!] = \{w \in \Sigma^* \mid M \text{ accepterer } w\}$.
- Definition 1.16: Et sprog siges at være regulært hvis der findes en DFA der genkender det.

- Definition 1.37: En nondeterministisk endelig automat (NFA) er en 5-tupel $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, hvor delene er
  1. Q : en endelig mængde af tilstande
  2. Σ : input-alfabetet
  3. $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$: transitionsfunktionen
  4. $q_0 \in Q$: starttilstanden
  5. $F \subseteq Q$: mængden af accepttilstande
- M siges at acceptere et ord $w \in \Sigma^*$ hvis der findes $w_1, w_2, \dots, w_k \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ og $r_0, r_1, \dots, r_k \in Q$ således at $w = w_1 w_2 \dots w_k$ og
  1. $r_0 = q_0$,
  2. $r_{i+1} \in \delta(r_i, y_{i+1})$ for alle $i = 0, 1, \dots, k-1$, og
  3. $r_k \in F$.
- Sproget som genkendes af M er $[\![M]\!] = \{w \in \Sigma^* \mid M \text{ accepterer } w\}$.

- Enhver DFA er også en NFA.
- Sætning 1.39: Til enhver NFA findes der en DFA der genkender samme sprog.
- Bevis ved brug af
  - delmængdekonstruktionen: Hvis NFAen har tilstandsmængde Q, skal DFAens tilstandsmængde være $\mathcal{P}(Q)$
  - og ε-aflukningen: Den nye transitionsfunktion skal være

$$\delta'(R, a) = \{q \in Q \mid q \text{ kan nås fra } R \text{ ved en } a\text{-transition efterfulgt af 0 eller flere } \varepsilon\text{-transitioner}\}$$

- Sætning 1.45, 1.47, 1.49: Mængden af regulære sprog er lukket under de regulære operationer. Dvs. $A_1, A_2 \in \Sigma^*$ regulære $\Rightarrow A_1 \cup A_2, A_1 \circ A_2, A_1^*$ regulære
- Bevis ved at sammensætte NFAs på en meget intuitiv måde
- Sætning 1.25 (fodnote): Mængden af regulære sprog er lukket under $\cap$.
- Bevis ved at konstruere produktet af to DFAs
- Opgave 1.14: Mængden af regulære sprog er lukket under $^-$ (komplement)
- Bevis ved at bytte om på accept- og reject-tilstandene i en DFA

- Definition 1.52: Et regulært udtryk over et alfabet Σ er et udtryk af formen
  1. a for et $a \in \Sigma$, ε eller $\emptyset$,
  2. $(R_1 \cup R_2)$, $(R_1 \circ R_2)$ eller (R_1^*), hvor R_1 og R_2 er regulære udtryk.
- Sproget, som et regulært udtryk R beskriver, betegnes $[\![R]\!]$ og er defineret som følger:
  1. $[\![a]\!] = \{a\}$, $[\![\varepsilon]\!] = \{\varepsilon\}$ og $[\![\emptyset]\!] = \emptyset$,
  2. $[\![R_1 \cup R_2]\!] = [\![R_1]\!] \cup [\![R_2]\!]$, $[\![R_1 \circ R_2]\!] = [\![R_1]\!] \circ [\![R_2]\!]$ og $[\![R_1^*]\!] = [\![R_1]\!]^*$
- Sætning 1.54: Et sprog er regulært hvis og kun hvis det kan beskrives ved et regulært udtryk.
- (følger af Lemma 1.55 og Lemma 1.60)

- Lemma 1.55: Hvis et sprog genereres af et regulært udtryk, da er det regulært.
- Bevis ved brug af strukturel induktion:
  1. Vis at de basale regulære udtryk a, ε og $\emptyset$ kan konverteres til NFAs
  2. Konvertér sammensætninger af regulære udtryk til sammensætninger af NFAs
- Lemma 1.60: Hvis et sprog er regulært, da kan det beskrives ved et regulært udtryk.
- Bevis ved brug af
  - generaliserede NFAs: Konvertér en DFA til en GNFA, der har regulære udtryk på transitionerne (i stedet for bare bogstaver)
  - og rekursion: Konvertér en GNFA til en ny med én tilstand mindre, ved at fjerne en tilstand og lave tilsvarende ændringer på transitionerne.

Tre formalismer der beskriver den samme klasse af sprog:

$$\begin{array}{c}
\text{NFA} \\
\downarrow \text{delmængde} \\
\text{DFA} \\
\downarrow \text{GNFA, rekursion} \\
\text{RE} \\
\downarrow \text{strukturel induktion, lukningsegenskaber} \\
\text{NFA}
\end{array}$$

– Findes der endnu andre formalismer til det? Jep, f.x. regulære grammatikker.

- Sætning 1.70 (Pumpelemmaet): For ethvert regulært sprog A findes der et (naturligt) tal p (pumpelængden) således at ethvert ord $s \in A$ der har længde mindst p kan pumpes, dvs. opsplittes i tre stykker, $s = xyz$, med
  - $|y| \geq 1$ og $|xy| \leq p$,
  - og således at ordene $xy^iz \in A$ for alle $i \in \mathbb{N}_0$.
- Bevis ved at tage en DFA for A og lade p være antallet af dens tilstande
- Anvendelse: At vise at et givet sprog B ikke er regulært:
  1. *antag* at B er regulært
  2. så må der findes en pumpelængde p for B
  3. tag et velegnet ord s som
     - har længde $|s| \geq p$, dvs. bør kunne pumpes,
     - men som *ikke kan pumpes*.
  4. Modstrid!

- `grep`, `sed`, teksteditorer etc.: konverterer et givet regulært udtryk til en NFA for at søge og erstatte
- `lex`, `flex` etc.: konverterer et eller flere givne regulære udtryk til en DFA der kan bruges til leksikalsk analyse

[sok.lex]

Vigtige emner indtil nu

- Sprog ✓
- DFA, NFA ✓
- Konvertering NFA $\longrightarrow$ DFA ✓
- Lukningsegenskaber (+ beviser) ✓
- Regulære udtryk ✓
- Konvertering RE $\longrightarrow$ NFA ✓
- Konvertering DFA $\longrightarrow$ RE ?
- Pumpelemma (+ bevis) ✓
- Anvendelse af pumpelemma ?

At forstå (på forskellige måder)

	formelt	grafisk	ved eksempel
Sætninger	✓		✓
Beviser	✓	✓	✓
Anvendelser	✓	✓	✓

Hvis I synes at *Sipser* er for blød, eller hvis I vil vide mere end hvad *Sipser* skriver om, prøv at kigge i

> Hopcroft, Motwani, Ullman: Introduction to automata theory, languages, and computation. 2nd ed. Addison-Wesley, 2001

Kontekst-frie grammatikker

- Problem: Mange interessante sprog er ikke regulære. F.x.
  - sproget *ADD* fra opgave 1.53
  - sproget L_3 fra syntaksopgaven
  - programmeringssprog generelt
- Brug for "stærkere" værktøjer til at beskrive dem:
  - kontekst-frie grammatikker (CFG) for at *generere* dem
  - push-down-automater (PDA) for at *genkende* dem
- sprog genereret af CFGs = sprog genkendt af PDAs = kontekst-frie sprog
- Er alle sprog kontekst-frie? *Nej.*
- Anvendelse: parsere

En kontekstfri grammatik:

$$S \xrightarrow{1} ASB$$
$$S \xrightarrow{2} \varepsilon$$
$$A \xrightarrow{3} 0$$
$$B \xrightarrow{4} 1$$

- S, A, B: variable
- 0, 1: terminaler
- startvariablen: S

At *generere ord*:

- $S \overset{2}{\Longrightarrow} \varepsilon$ ✓
- $S \overset{1}{\Longrightarrow} ASB \overset{2}{\Longrightarrow} A\varepsilon B \overset{3}{\Longrightarrow} 0B \overset{4}{\Longrightarrow} 01$ ✓
- $S \overset{1}{\Longrightarrow} ASB \overset{1}{\Longrightarrow} AASBB \overset{2}{\Longrightarrow} AA\varepsilon BB \overset{3,3,4,4}{\Longrightarrow} 0011$ ✓
- $S \overset{1,\dots,1}{\Longrightarrow} A^nSB^n \overset{2}{\Longrightarrow} A^n\varepsilon B^n \overset{3,4}{\Longrightarrow} 0^n1^n$
- grammatikken genererer sproget $\{0^n1^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$

Definition 2.2: En kontekstfri grammatik (CFG) er en 4-tupel $G = (V, \Sigma, R, S)$, hvor delene er

1. V : en endelig mængde af variable
2. Σ : en endelig mængde af terminaler, med $V \cap \Sigma = \emptyset$
3. $R : V \to \mathcal{P}\big((V \cup \Sigma)^*\big)$: produktioner / regler
4. $S \in V$: startvariablen

– produktioner skrives $A \to w$ i stedet for $w \in R(A)$

- Hvis $u, v, w \in (V \cup \Sigma)^*$ er ord og $A \to w$ er en produktion, siges uAv at frembringe uwv: $uAv \Rightarrow uwv$.
- Hvis $u, v \in (V \cup \Sigma)^*$ er ord, siges u at derivere v: $u \overset{*}{\Rightarrow} v$, hvis $u = v$ eller der findes en følge $u_1, u_2, \dots, u_k$ af ord således at $u \Rightarrow u_1 \Rightarrow u_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow u_k \Rightarrow v$.
- Sproget som G genererer er $[\![G]\!] = \{w \in \Sigma^* \mid S \overset{*}{\Rightarrow} w\}$.

– dvs. et ord $w \in \Sigma^*$ genereres af G hvis og kun hvis der findes en derivation $S \Rightarrow w_1 \Rightarrow w_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow w_k \Rightarrow w$, hvor alle $w_i \in (V \cup \Sigma)^*$.

Eksempel 2.3: $G_3 = (\{S\}, \{a, b\}, R, S)$ med produktioner

$$S \to aSb \mid SS \mid \varepsilon$$

Et par derivationer:

- $S \Rightarrow \varepsilon$
- $S \Rightarrow aSb \Rightarrow ab$
- $S \Rightarrow aSb \Rightarrow aSSb \Rightarrow aaSbSb \Rightarrow aaSbaSbb \Rightarrow aababb$

Generelt er det nok at opskrive *produktionerne* for at specificere en kontekstfri grammatik:

- de variable er venstresiderne
- terminalerne er alle andre bogstaver
- startvariablen er venstresiden af den *øverste* produktion

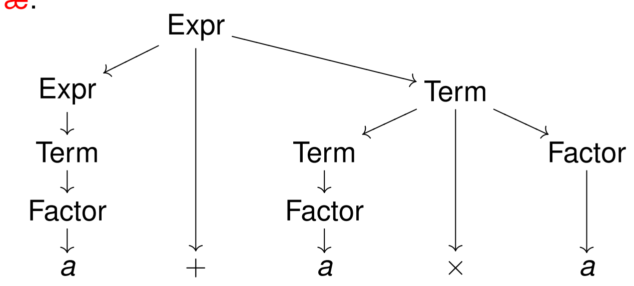
Eksempel 2.4: Aritmetiske udtryk

$$\begin{aligned} \text{Expr} &\to \text{Expr} + \text{Term} \mid \text{Term} \\ \text{Term} &\to \text{Term} \times \text{Factor} \mid \text{Factor} \\ \text{Factor} &\to (\text{Expr}) \mid a \end{aligned}$$

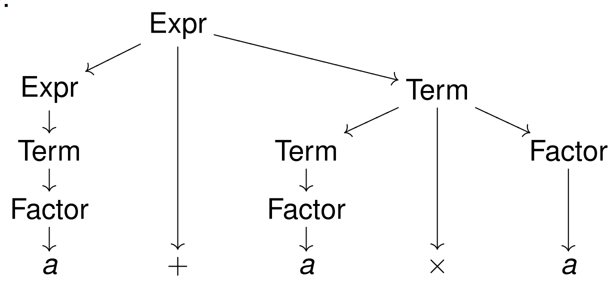
En derivation:

$$\begin{aligned} \text{Expr} &\Rightarrow \text{Expr} + \text{Term} \Rightarrow \text{Term} + \text{Term} \stackrel{*}{\Rightarrow} \text{Factor} + \text{Term} \times \text{Factor} \\ &\Rightarrow \text{Factor} + \text{Factor} \times \text{Factor} \stackrel{*}{\Rightarrow} a + a \times a \end{aligned}$$

Et parse-træ:



Et parsetræ:



- Parsetræer udtrykker betydningen af et ord
- At parse: programkode $\rightsquigarrow$ parsetræ $\rightsquigarrow$ ...
- En kontekstfri grammatik i hvilken der er et ord der har to *forskellige* parsetræer kaldes tvetydig.
- to forskellige parsetræer $\Rightarrow$ to forskellige *betydninger* $\Rightarrow$ BAD

Opsummering:

- CFG: et (endeligt) antal produktioner af formen $A \to s_1 \mid s_2 \mid \dots s_k$ for symboler A og strenge $s_1, s_2, \dots, s_k$.
- "|" kendetegner *alternativer* (nondeterminisme!)
- symboler på venstre side af produktionerne: variable (eller non-terminaler)
- alle andre symboler: terminaler
- venstre side af *første* produktion: startsymbolet
- at frembringe: $uAv \Rightarrow uwv$ hvis $A \to w$ er en produktion
- hvis w er en streng af *terminaler*: grammatikken genererer w hvis der findes en derivation $S \Rightarrow w_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow w_k \Rightarrow w$, hvor alle w_i er strenge af terminaler og variable.
- vigtigt: parsetræer
- Definition: Et sprog siges at være kontekstfrit hvis det kan genereres af en CFG.

Eksempel: En CFG til sproget

$$\{w \in \{a, b\}^* \mid \text{antallet af } a \text{ i } w = \text{antallet af } b \text{ i } w\}$$

Idé: Variable som *tilstande*:

- S : Jeg har set lige mange a og b
- A : Jeg mangler et a
- B : Jeg mangler et b

$$\begin{aligned} S &\to aB \mid bA \mid \varepsilon \\ A &\to aS \mid bAA \\ B &\to bS \mid aBB \end{aligned}$$

(opgave 2.21!)

Eksempel: En (ufuldstændig og ikke helt rigtig) CFG for **Sok**

$$\begin{aligned} \text{ProGram} &\to \text{VarErkList} \,;\, \text{MetErkList} \\ \text{VarErkList} &\to \text{VarErk} \,;\, \text{VarErkList} \mid \varepsilon \\ \text{VarErk} &\to \textit{var}\ \text{VarNavn} = \text{HelTal} \\ \text{MetErkList} &\to \text{MetErk} \,;\, \text{MetErkList} \mid \varepsilon \\ \text{MetErk} &\to \textit{metode}\ \text{MetNavn StateMentList}\ \textit{end} \\ \text{StateMentList} &\to \text{StateMent} \,;\, \text{StateMentList} \mid \varepsilon \\ \text{StateMent} &\to \text{MetKald} \mid \text{TilSkriv} \\ \text{TilSkriv} &\to \text{VarNavn} := \text{ArUdtryk} \\ \text{MetKald} &\to \textit{kald}\ \text{MetNavn} \end{aligned}$$