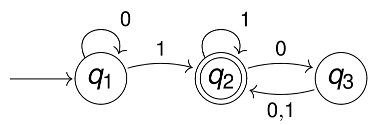
Syntaks og semantik

Lektion 3

12 februar 2008

Forord

1. Endelige automater
2. Regulære sprog
3. Lukningsegenskaber ved regulære sprog



- tilstande + transitioner
- $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$: tilstande, (input)alfabetet, transitionsfunktionen, starttilstand, accepttilstande
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$
- deterministisk: givet en tilstand og et inputsymbol, kender vi næste tilstand
- accepterer et ord $w \in \Sigma^*$ hvis der findes $w_1, w_2, \dots, w_n \in \Sigma$ og $r_0, r_1, \dots, r_n \in Q$ således at $w = w_1 w_2 \dots w_n$ og
  1. $r_0 = q_0$,
  2. $r_{i+1} = \delta(r_i, w_{i+1})$ for alle $i = 0, 1, \dots, n-1$, og
  3. $r_n \in F$.
- genkender sproget $[\![M]\!] = \{w \mid M \text{ accepterer } w\}$

- Definition: Et sprog siges at være regulært hvis der findes en endelig automat der genkender det.
- Vigtig, hidtil ubevist Sætning: Et sprog er regulært hvis og kun hvis det kan beskrives ved et regulært udtryk.
- Ligeså vigtig, også hidtil ubevist Sætning: Der findes sprog der *ikke* er regulære.

Lad Σ være et alfabet og $A_1, A_2 \subseteq \Sigma^*$. Hvis A_1 og A_2 er regulære sprog, da er også følgende sprog regulære:

- $A_1 \cup A_2$ ✓
- $A_1 \cap A_2$ ✓
- $\overline{A}_1 = \Sigma^* \setminus A_1$
- $A_1 \circ A_2$
- A_1^*

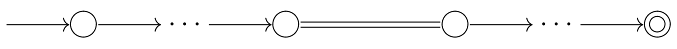
Lad Σ være et alfabet og $A_1, A_2 \subseteq \Sigma^*$. Hvis A_1 og A_2 er regulære sprog, da er også følgende sprog regulære:

- $A_1 \cup A_2$ ✓
- $A_1 \cap A_2$ ✓
- $\overline{A}_1 = \Sigma^* \setminus A_1$ ✓
  Lad $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ være en endelig automat med $[\![M]\!] = A_1$. Lad $F' = Q \setminus F$ og $M' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F')$, da er $[\![M']\!] = \overline{A}_1$.
- $A_1 \circ A_2$?
  Problem: Flertydigheder i sammensætninger. F.eks. ved $A_1 = \{a, ab\}$, $A_2 = \{ba\}$: $A_1 \circ A_2 = \{aba, abba\}$
- A_1^* ?

Non-determinisme

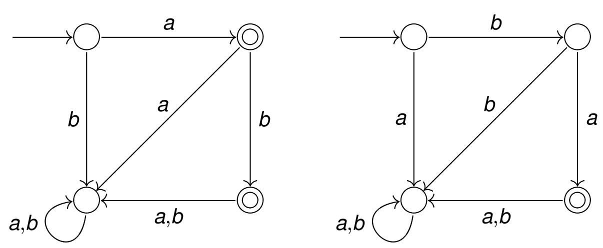
Ønske: Givet endelige automater M_1 og M_2, konstruér en "sammensat" automat M således at $[\![M]\!] = [\![M_1]\!] \circ [\![M_2]\!]$.

Ønske: Givet endelige automater M_1 og M_2, konstruér en "sammensat" automat M således at $[\![M]\!] = [\![M_1]\!] \circ [\![M_2]\!]$.

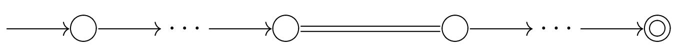


Problem: Hvis M_1 har transitioner mellem accepttilstande, bliver transitionsfunktionen uspecificeret.

Eksempel, med $[\![M_1]\!] = \{a, ab\}$, $[\![M_2]\!] = \{ba\}$:

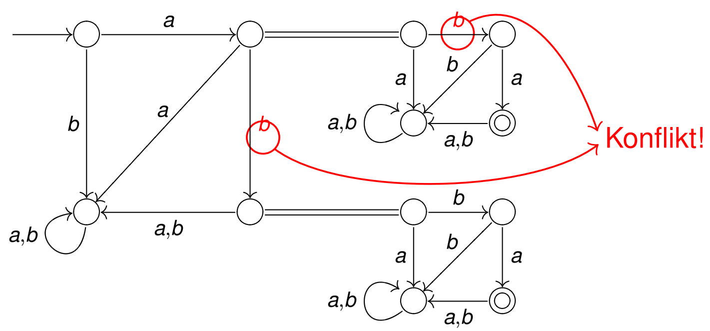


Ønske: Givet endelige automater M_1 og M_2, konstruér en "sammensat" automat M således at $[\![M]\!] = [\![M_1]\!] \circ [\![M_2]\!]$.



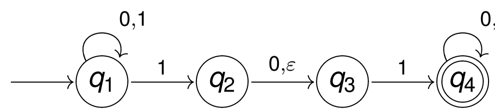
Problem: Hvis M_1 har transitioner mellem accepttilstande, bliver transitionsfunktionen uspecificeret.

Eksempel, med $[\![M_1]\!] = \{a, ab\}$, $[\![M_2]\!] = \{ba\}$:

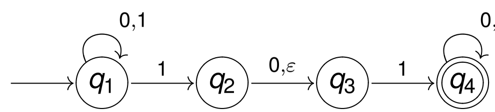


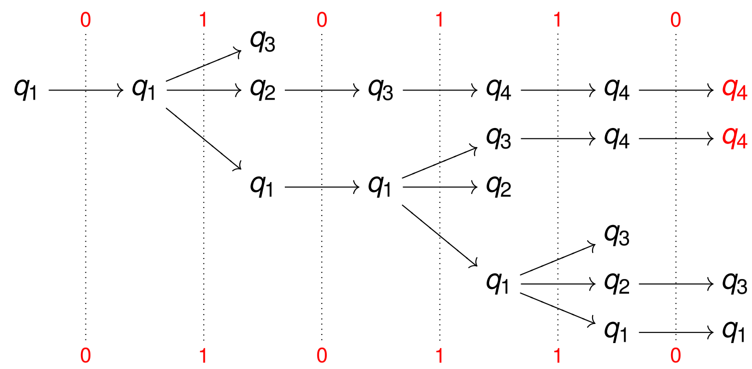
Idé: Tillad hvad vi ikke kan undgå!

- tillad at der er flere end én transition med samme label fra en tilstand
- tillad at der er ingen transitioner med et bestemt label fra en tilstand
- tillad transitioner der ikke læser input-symboler



- ved flere end én mulige transitioner: gå til alle mulige tilstande *samtidigt*
- hvis ingen mulige transitioner: dø
- ved ε-transitioner: bliv i tilstanden, men gå *også* hen til den anden
- acceptér hvis en accept-tilstand *kan nås*





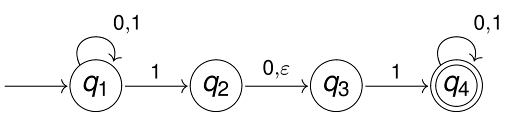
Definition 1.37: En nondeterministisk endelig automat er en 5-tupel $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, hvor delene er

1. Q : en endelig mængde af tilstande
2. Σ : input-alfabetet
3. $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$: transitions-funktionen
4. $q_0 \in Q$: starttilstanden
5. $F \subseteq Q$: mængden af accepttilstande

Transitions-funktionen:

- deterministisk automat (fra sidste lektion): $\delta : Q \times \Sigma \to Q$
  input: tilstand + tegn
  output: ny tilstand
- nondeterministisk automat: $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$
  input: tilstand + tegn eller ε
  output: en mængde af nye tilstande
- $\mathcal{P}(Q)$: potensmængden af Q; mængden af alle delmængder af Q: $\mathcal{P}(Q) = \{S \mid S \subseteq Q\}$

Eksempel 1.38:



$$Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\} \qquad \Sigma = \{0, 1\}$$
$$q_0 = q_1 \qquad F = \{q_4\}$$

δ	0	1	ε
q_1	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$
q_2	$\{q_3\}$	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_3	$\emptyset$	$\{q_4\}$	$\emptyset$
q_4	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$	$\emptyset$

Terminologi: Fra nu af:

- deterministisk endelig automat (DFA): dem fra sidste lektion med $\delta : Q \times \Sigma \to Q$
- nondeterministisk endelig automat (NFA): dem med $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$
- $\Sigma \cup \{\varepsilon\}$ skrives også Σ_ε
- Husk: $\mathcal{P}(Q)$ = potensmængden ("*power set*") af Q: $\mathcal{P}(Q) = \{S \mid S \subseteq Q\}$
- enhver DFA er også en NFA
- og enhver NFA kan laves om til en DFA! (bevis kommer lige om lidt)

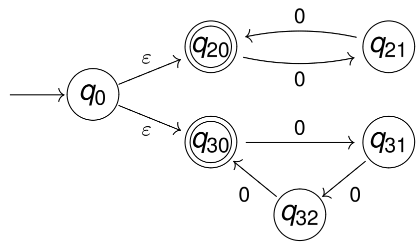
Definition: Lad $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ være en endelig automat og $w \in \Sigma^*$. Da siges M at acceptere w hvis der findes $m \in \mathbb{N}$ og $y_1, y_2, \dots, y_m \in \Sigma_\varepsilon$ (!) og $r_0, r_1, \dots, r_m \in Q$ således at $w = y_1 y_2 \dots y_m$ og

1. $r_0 = q_0$,
2. $r_{i+1} \in \delta(r_i, y_{i+1})$ for alle $i = 0, 1, \dots, m-1$, og
3. $r_m \in F$.

Sproget som genkendes af M er

$$[\![M]\!] = L(M) = \{w \mid M \text{ accepterer } w\}$$

Eksempel 1.33:



- $w = 00 = \varepsilon 00$:
  $q_0 \to \{q_{20}, q_{30}\} \to \{q_{21}, q_{31}\} \to \{q_{20}, q_{32}\} \quad \Rightarrow$ Jep.
- $w = 000 = \varepsilon 000$:
  $q_0 \to \{q_{20}, q_{30}\} \to \{q_{21}, q_{31}\} \to \{q_{20}, q_{32}\} \to \{q_{21}, q_{30}\} \Rightarrow$ Jep.
- $w = 0000 = \varepsilon 0000$:
  $q_0 \to q_{20} \to q_{21} \to q_{20} \to q_{21} \to q_{20} \quad \Rightarrow$ Jep.
  (Nok med *ét* accepterende *run*.)
- $w = 00000 = \varepsilon 00000$:
  $q_0 \to \{q_{20}, q_{30}\} \to \{q_{21}, q_{31}\} \to \{q_{20}, q_{32}\} \to \{q_{21}, q_{30}\} \to \{q_{20}, q_{31}\} \to \{q_{21}, q_{32}\} \quad \Rightarrow$ Nej.
  (*Alle* runs er ikke-accepterende.)

Vigtig sætning 1.39: Til enhver NFA N findes der en DFA M med $[\![M]\!] = [\![N]\!]$.

Eller: Til enhver NFA findes der en DFA der genkender samme sprog.

Eller: Til enhver NFA findes der en *ækvivalent* DFA.
(Hvis vi siger at to maskiner er ækvivalente hvis de genkender samme sprog.)

Eller: Enhver NFA kan determiniseres.

Vigtig sætning 1.39: Til enhver NFA N findes der en DFA M med $[\![M]\!] = [\![N]\!]$.

Bevisidé: Når vi ser efter om vores NFA N accepterer et ord, skal vi holde styr på mængder af tilstande.
Dvs. vi skal konstruere en DFA M der holder styr på mængder af tilstande i N. $\Rightarrow$ *Tilstandene* i M afspejler *mængder af tilstande* i N.

Vigtig sætning 1.39: Til enhver NFA N findes der en DFA M med $[\![M]\!] = [\![N]\!]$.

Bevis: Skriv $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Vi konstruerer en DFA $M = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$:

- $Q' = \mathcal{P}(Q)$ tilstande i M er mængder af tilstande i N
- $F' = \{R \subseteq Q \mid R \cap F \neq \emptyset\}$
  vi accepterer hvis én af Ns tilstande er accepterende
- $q_0' = \{q_0\}$ M starter i Ns starttilstand

Transitionsfunktionen: første forsøg: $\delta'(R, a) = \{\delta(r, a) \mid r \in R\}$

Virker ikke helt: mangler at tage ε-transitioner: $\delta'(R, a)$ skal være den mængde af tilstande vi kan nå fra tilstande i R ved at læse et a, *plus* alle de tilstande vi så kan nå via ε-transitioner!

Hovsa! der er også problemer med q_0': q_0' skal bestå af alle de tilstande i N der kan nås fra q_0 via ε-transitioner.

Vigtig sætning 1.39: Til enhver NFA N findes der en DFA M med $[\![M]\!] = [\![N]\!]$.

Bevis: Skriv $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Vi konstruerer en DFA $M = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$:

- $Q' = \mathcal{P}(Q)$
- $F' = \{R \subseteq Q \mid R \cap F \neq \emptyset\}$

For enhver delmængde $R \subseteq Q$ lad

$$E(R) = \{q \in Q \mid q \text{ kan nås fra } R \text{ ved 0 eller flere } \varepsilon\text{-transitioner}\}$$

– ε-aflukningen af R.

- $q_0' = E(\{q_0\})$
- $\delta'(R, a) = \{q \in Q \mid q \in E(\{\delta(r, a)\}) \text{ for et } r \in R\}$
  $= \bigcup_{r \in R} E(\{\delta(r, a)\})$

For at vise at $[\![M]\!] = [\![N]\!]$, skal vi vise at

- ethvert $w \in [\![N]\!]$ accepteres af M, og at
- ethvert $w \in [\![M]\!]$ accepteres af N.

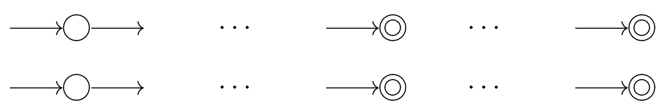
Sætning 1.45: (havde vi allerede, *men nu med nyt bevis!*)
Hvis A_1 og A_2 er regulære sprog over et alfabet Σ, da er også $A_1 \cup A_2$ et regulært sprog over Σ.

Bevis: Lad N_1 og N_2 være NFAs med $[\![N_1]\!] = A_1$ og $[\![N_2]\!] = A_2$.
Skriv $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$, $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$, og konstruér en ny NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ved

- $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0\}$, (en ekstra *ny* starttilstand)
- $F = F_1 \cup F_2$ og

$$\delta(q, a) = \begin{cases} \delta_1(q, a) & \text{hvis } q \in Q_1 \\ \delta_2(q, a) & \text{hvis } q \in Q_2 \\ \{q_1, q_2\} & \text{hvis } q = q_0 \text{ og } a = \varepsilon \\ \emptyset & \text{hvis } q = q_0 \text{ og } a \neq \varepsilon \end{cases}$$

Da er $[\![N]\!] = A_1 \cup A_2$.



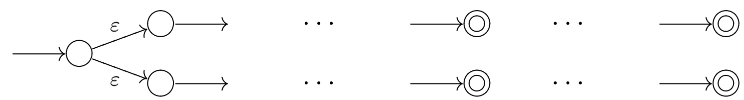
Sætning 1.45: (havde vi allerede, *men nu med nyt bevis!*)
Hvis A_1 og A_2 er regulære sprog over et alfabet Σ, da er også $A_1 \cup A_2$ et regulært sprog over Σ.

Bevis: Lad N_1 og N_2 være NFAs med $[\![N_1]\!] = A_1$ og $[\![N_2]\!] = A_2$.
Skriv $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$, $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$, og konstruér en ny NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ved

- $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0\}$, (en ekstra *ny* starttilstand)
- $F = F_1 \cup F_2$ og

$$\delta(q, a) = \begin{cases} \delta_1(q, a) & \text{hvis } q \in Q_1 \\ \delta_2(q, a) & \text{hvis } q \in Q_2 \\ \{q_1, q_2\} & \text{hvis } q = q_0 \text{ og } a = \varepsilon \\ \emptyset & \text{hvis } q = q_0 \text{ og } a \neq \varepsilon \end{cases}$$

Da er $[\![N]\!] = A_1 \cup A_2$.



Intuitivt!

Sætning 1.47: Hvis A_1 og A_2 er regulære sprog over et alfabet Σ, da er også $A_1 \circ A_2$ et regulært sprog over Σ.

Bevis: Lad N_1 og N_2 være NFAs med $[\![N_1]\!] = A_1$ og $[\![N_2]\!] = A_2$.
Skriv $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$, $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$, og konstruér en ny NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F_2)$ ved

- $Q = Q_1 \cup Q_2$
- (starttilstanden er q_1, accepttilstandene er F_2)
- $\delta(q, a) = \begin{cases} \delta_1(q, a) & \text{hvis } q \in Q_1 \text{ og } q \notin F_1 \\ \delta_1(q, a) & \text{hvis } q \in F_1 \text{ og } a \neq \varepsilon \\ \delta_1(q, a) \cup \{q_2\} & \text{hvis } q \in F_1 \text{ og } a = \varepsilon \\ \delta_2(q, a) & \text{hvis } q \in Q_2 \end{cases}$

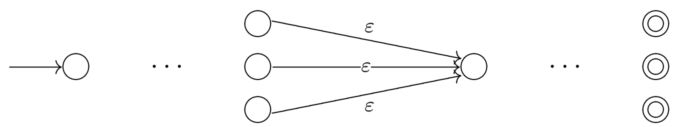
Da er $[\![N]\!] = A_1 \circ A_2$.

Sætning 1.47: Hvis A_1 og A_2 er regulære sprog over et alfabet Σ, da er også $A_1 \circ A_2$ et regulært sprog over Σ.

Bevis: Lad N_1 og N_2 være NFAs med $[\![N_1]\!] = A_1$ og $[\![N_2]\!] = A_2$. Skriv $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$, $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$, og konstruér en ny NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F_2)$ ved

- $Q = Q_1 \cup Q_2$
- (starttilstanden er q_1, accepttilstandene er F_2)
- $\delta(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a) & \text{hvis } q \in Q_1 \text{ og } q \notin F_1 \\ \delta_1(q,a) & \text{hvis } q \in F_1 \text{ og } a \neq \varepsilon \\ \delta_1(q,a) \cup \{q_2\} & \text{hvis } q \in F_1 \text{ og } a = \varepsilon \\ \delta_2(q,a) & \text{hvis } q \in Q_2 \end{cases}$

Da er $[\![N]\!] = A_1 \circ A_2$.

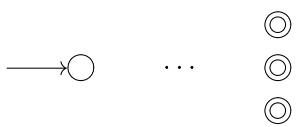


Sætning 1.49: Hvis A er et regulært sprog over et alfabet Σ, da er også A^* et regulært sprog over Σ.

Bevis: Lad $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ være en NFA med $[\![N_1]\!] = A$. Konstruér en ny NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ved

- $Q = Q_1 \cup \{q_0\}$,
- $F = F_1 \cup \{q_0\}$ og

$$\delta(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a) & \text{hvis } q \in Q_1 \text{ og } q \notin F_1 \\ \delta_1(q,a) & \text{hvis } q \in F_1 \text{ og } a \neq \varepsilon \\ \delta_1(q,a) \cup \{q_1\} & \text{hvis } q \in F_1 \text{ og } a = \varepsilon \\ \{q_1\} & \text{hvis } q = q_0 \text{ og } a = \varepsilon \\ \emptyset & \text{hvis } q = q_0 \text{ og } a \neq \varepsilon \end{cases}$$

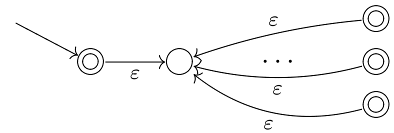


Sætning 1.49: Hvis A er et regulært sprog over et alfabet Σ, da er også A^* et regulært sprog over Σ.

Bevis: Lad $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ være en NFA med $[\![N_1]\!] = A$. Konstruér en ny NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ved

- $Q = Q_1 \cup \{q_0\}$,
- $F = F_1 \cup \{q_0\}$ og

$$\delta(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a) & \text{hvis } q \in Q_1 \text{ og } q \notin F_1 \\ \delta_1(q,a) & \text{hvis } q \in F_1 \text{ og } a \neq \varepsilon \\ \delta_1(q,a) \cup \{q_1\} & \text{hvis } q \in F_1 \text{ og } a = \varepsilon \\ \{q_1\} & \text{hvis } q = q_0 \text{ og } a = \varepsilon \\ \emptyset & \text{hvis } q = q_0 \text{ og } a \neq \varepsilon \end{cases}$$



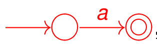
Sætning 1.54: Et sprog er regulært hvis og kun hvis det kan beskrives ved et regulært udtryk.

Eller: Givet et alfabet Σ og $L \subseteq \Sigma^*$, da er L et regulært sprog hvis og kun hvis der findes et regulært udtryk R over Σ således at $L = [\![R]\!]$.

(Bevis til første halvdel nu, til anden halvdel næste gang.)

Lemma 1.55: Givet et alfabet Σ og et sprog $L \subseteq \Sigma^*$. Hvis der findes et regulært udtryk R over Σ med $[\![R]\!] = L$, da er L regulært.

Bevis (ved strukturel induktion):

1. Hvis $L = [\![a]\!]$ for et $a \in \Sigma$: Lad $M =$ , da er $[\![M]\!] = \{a\} = L$.
2. Hvis $L = [\![\varepsilon]\!]$: Lad $M =$ , da er $[\![M]\!] = \{\varepsilon\} = L$.
3. Hvis $L = [\![\emptyset]\!]$: Lad $M =$ , da er $[\![M]\!] = \emptyset = L$.
4. Hvis $L = [\![R_1 \cup R_2]\!]$: Ved induktionsantagelsen har vi NFAs M_1 og M_2 således at $[\![M_1]\!] = [\![R_1]\!]$ og $[\![M_2]\!] = [\![R_2]\!]$. Derfor er $[\![R_1]\!]$ og $[\![R_2]\!]$ regulære sprog, med sætning 1.45 altså også $[\![R_1]\!] \cup [\![R_2]\!] = [\![R_1 \cup R_2]\!] = L$.
5. Hvis $L = [\![R_1 \circ R_2]\!]$ eller $L = [\![R_1^*]\!]$: Analogt til tilfælde 4, bortset fra at sætning 1.47 hhv. 1.49 skal benyttes.

Eksempel 1.56: Konvertér $(ab \cup a)^*$ til en NFA.

a

b

ab

$ab \cup a$

$(ab \cup a)^*$