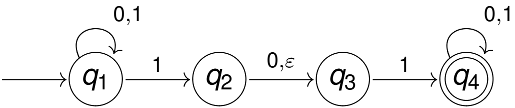
Syntaks og semantik

Lektion 4

20 februar 2007

Forord

- Der skulle nu være nok *Sipsere* i boghandelen
- Deadline for aflevering af syntaksopgave-erstatnings-opgavestilling (for PE-studerende) er *i dag*!
- næste gang: spørgetime!



Definition 1.37: En **nondeterministisk endelig automat** (**NFA**) er en 5-tupel $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, hvor delene er

1. Q : en endelig mængde af tilstande
2. Σ : input-alfabetet
3. $\delta : Q \times \big(\Sigma \cup \{\varepsilon\}\big) \to \mathcal{P}(Q)$: transitions-funktionen
4. $q_0 \in Q$: starttilstanden
5. $F \subseteq Q$: mængden af accepttilstande

M siges at **acceptere** et ord $w \in \Sigma^*$ hvis der findes $m \in \mathbb{N}$ og $y_1, y_2, \dots, y_m \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ og $r_0, r_1, \dots, r_m \in Q$ således at $w = y_1 y_2 \dots y_m$ og

1. $r_0 = q_0$,
2. $r_{i+1} \in \delta(r_i, y_{i+1})$ for alle $i = 0, 1, \dots, m-1$, og
3. $r_m \in F$.

- enhver DFA er også en NFA
- enhver NFA kan laves om til en DFA der genkender samme sprog (delmængdekonstruktionen)
- et sprog er defineret til at være regulært hvis der er en DFA der genkender det

$\Rightarrow$ et sprog er regulært hvis og kun hvis der er en NFA der genkender det

- regulære sprog er lukket under $\cup$, $\circ$, * (vises ved at konstruere en ny NFA ud fra de givne NFAs)
- regulære sprog er lukket under $\cap$ og $^-$ (komplement) (vises ved at konstruere en ny DFA ud fra de givne DFAs; konstruktionerne virker *kun* for DFAs!)
- NFAs er generelt mere simple at fremstille
- men nogen gange kan det være nødvendigt at arbejde med DFAs – eksempel: opgave 1.13

Lemma 1.55: Hvis et sprog beskrives ved et regulært udtryk, da er det regulært.

Bevises ved strukturel induktion:

1. konvertér de basale regulære udtryk til NFAs
2. brug lukningsegenskaber til at konvertere sammensætninger af regulære udtryk til sammensætninger af NFAs
3. Smart!

I dag: Lemma 1.60: Hvis et sprog er regulært, da kan det beskrives ved et regulært udtryk.

(Bevises ved at *generalisere* NFAs til GNFAs.)

$\Rightarrow$ Sætning 1.54: Et sprog er regulært hvis og kun hvis det kan beskrives ved et regulært udtryk.

Regulære og ikke-regulære sprog

4. Regulære sprog genereres af regulære udtryk
5. Ikke-regulære sprog

Lemma 1.60: Givet et alfabet Σ og et regulært sprog $L \subseteq \Sigma^*$, da findes et regulært udtryk R over Σ således at $L = [\![R]\!]$.

Nøgle til beviset: Ny slags maskiner der kombinerer NFA og regulære udtryk: generaliserede nondeterministiske endelige automater (GNFA)

Definition 1.64: En GNFA er en 5-tupel $(Q, \Sigma, \delta, q_0, q_f)$, hvor delene er

1. Q : en endelig mængde af tilstande
2. Σ : input-alfabetet
3. $\delta : (Q \setminus \{q_f\}) \times (Q \setminus \{q_0\}) \to \mathcal{R}$: transitions-funktionen
4. $q_0 \in Q$: starttilstanden
5. $q_f \in Q$: accepttilstanden

Notation: $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\Sigma) =$ mængden af alle regulære udtryk over et givet alfabet Σ.

(Bemærk at GNFAs introduceres kun for det her bevis. De bruges ikke til andet.)

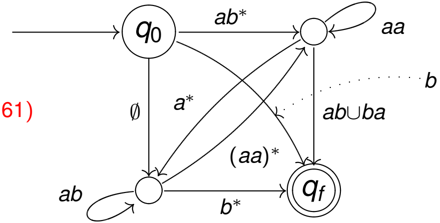
Definition 1.64: En GNFA er en 5-tupel $(Q, \Sigma, \delta, q_0, q_f)$, hvor delene er

3. $\delta : (Q \setminus \{q_f\}) \times (Q \setminus \{q_0\}) \to \mathcal{R}$: transitions-funktionen
5. $q_f \in Q$: accepttilstanden

Ligesom NFAs, men

- med kun én accepttilstand
- med regulære udtryk på transitionerne i stedet for tegn
- med transitioner fra enhver tilstand til enhver tilstand (også sig selv), bortset fra at
  - starttilstanden ikke har indgående transitioner, og at
  - accepttilstanden ikke har udgående transitioner

(1.61)



Definition 1.64: En GNFA er en 5-tupel $(Q, \Sigma, \delta, q_0, q_f)$, hvor delene er

1. Q : en endelig mængde af tilstande
2. Σ : input-alfabetet
3. $\delta : \big(Q \setminus \{q_f\}\big) \times \big(Q \setminus \{q_0\}\big) \to \mathcal{R}$: transitions-funktionen
4. $q_0 \in Q$: starttilstanden
5. $q_f \in Q$: accepttilstanden

GNFAen accepterer et ord $w \in \Sigma^*$ hvis der findes $m \in \mathbb{N}$ og $y_1, y_2, \dots, y_m \in \Sigma^*$ (!) og $r_0, r_1, \dots, r_m \in Q$ således at $w = y_1 y_2 \dots y_m$ og

1. $r_0 = q_0$,
2. $y_{i+1} \in [\![\delta(r_i, r_{i+1})]\!]$ for alle $i = 0, 1, \dots, m-1$, og
3. $r_m = q_f$.

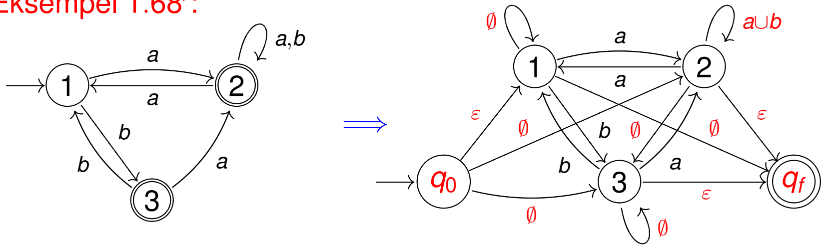
Bevisidé: konvertér en DFA til en GNFA og så GNFAen til et regulært udtryk ved at fjerne én tilstand ad gangen.

Lemma 1.60: Givet et alfabet Σ og et regulært sprog $L \subseteq \Sigma^*$, da findes et regulært udtryk R over Σ således at $L = [\![R]\!]$.

Bevis: Lad $M = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ være en DFA med $[\![M]\!] = L$.

1. Konvertér M til en GNFA $G = (Q, \Sigma, \delta, q_0, q_f)$:
   - (*a*) Lav en ny starttilstand q_0 og en ny accepttilstand q_f, med ε-transitioner fra q_0 til den gamle starttilstand og fra alle gamle accepttilstande til q_f.
   - (*b*) Erstat transitioner med flere end ét label med én transition der som label har foreningen af disse labels.
   - (*c*) Indsæt $\emptyset$-transitioner hvor der mangler pile.

Eksempel 1.68′:



Lemma 1.60: Givet et alfabet Σ og et regulært sprog $L \subseteq \Sigma^*$, da findes et regulært udtryk R over Σ således at $L = [\![R]\!]$.

Bevis: Lad $M = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ være en DFA med $[\![M]\!] = L$.

1. Konvertér M til en GNFA $G = (Q, \Sigma, \delta, q_0, q_f)$:
   (a) Lav en ny starttilstand q_0 og en ny accepttilstand q_f, med ε-transitioner fra q_0 til den gamle starttilstand og fra alle gamle accepttilstande til q_f.
   (b) Erstat transitioner med flere end ét label med én transition der som label har foreningen af disse labels.
   (c) Indsæt $\emptyset$-transitioner hvor der mangler pile.

$Q = Q_1 \cup \{q_0, q_f\}$

$$\delta(q, q') = \begin{cases} \varepsilon & \text{hvis } q = q_0 \text{ eller } q' = q_f \quad (a) \\ a_1 \cup a_2 \cup \cdots \cup a_k & \text{hvis } q, q' \in Q_1 \text{ og } \delta_1(q, a_i) = q' \\ & \qquad \text{for alle } i = 1, 2, \ldots, k \quad (b) \\ \emptyset & \text{hvis } q, q' \in Q_1 \text{ og } \delta_1(q, a) \neq q' \\ & \qquad \text{for alle } a \in \Sigma \quad (c) \end{cases}$$

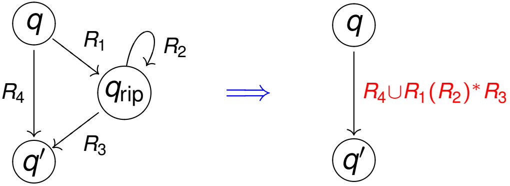
Lemma 1.60: Givet et alfabet Σ og et regulært sprog $L \subseteq \Sigma^*$, da findes et regulært udtryk R over Σ således at $L = [\![R]\!]$.

Bevis: Lad $M = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ være en DFA med $[\![M]\!] = L$.

1. Konvertér M til en GNFA $G = (Q, \Sigma, \delta, q_0, q_f)$
2. Konvertér G til et regulært udtryk R:

   CONVERT(G):

   1. Lad $k = |Q|$ – antallet af tilstande i G.
   2. Hvis $k = 2$, returnér $\delta(q_0, q_f)$.
   3. Vi har $k > 2$. Lad $q_{\text{rip}} \in Q \setminus \{q_0, q_f\}$.
      Lad $Q' = Q \setminus \{q_{\text{rip}}\}$, og definér
      $\delta' : (Q' \setminus \{q_f\}) \times (Q' \setminus \{q_0\}) \to \mathcal{R}$ på følgende måde:



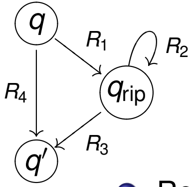
Lemma 1.60: Givet et alfabet Σ og et regulært sprog $L \subseteq \Sigma^*$, da findes et regulært udtryk R over Σ således at $L = [\![R]\!]$.

Bevis: Lad $M = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ være en DFA med $[\![M]\!] = L$.

1. Konvertér M til en GNFA $G = (Q, \Sigma, \delta, q_0, q_f)$
2. Konvertér G til et regulært udtryk R:

   CONVERT(G):

   1. Lad $k = |Q|$ – antallet af tilstande i G.
   2. Hvis $k = 2$, returnér $\delta(q_0, q_f)$.
   3. Vi har $k > 2$. Lad $q_{\text{rip}} \in Q \setminus \{q_0, q_f\}$.
      Lad $Q' = Q \setminus \{q_{\text{rip}}\}$, og definér
      $\delta' : (Q' \setminus \{q_f\}) \times (Q' \setminus \{q_0\}) \to \mathcal{R}$ på følgende måde:



For $q \in Q' \setminus \{q_f\}$ og $q' \in Q' \setminus \{q_0\}$ lad
$R_1 = \delta(q, q_{\text{rip}})$, $R_2 = \delta(q_{\text{rip}}, q_{\text{rip}})$,
$R_3 = \delta(q_{\text{rip}}, q')$ og $R_4 = \delta(q, q')$, og lad
$\delta'(q, q') = R_4 \cup R_1 (R_2)^* R_3$.

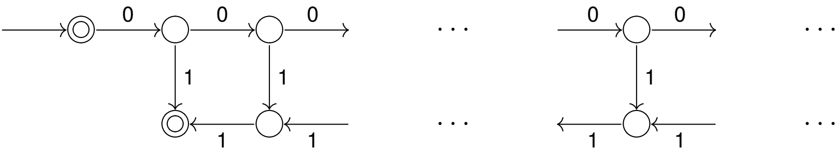
   4. Returnér CONVERT$(G' = (Q', \Sigma, \delta', q_0, q_f))$

Lemma 1.60: Givet et alfabet Σ og et regulært sprog $L \subseteq \Sigma^*$, da findes et regulært udtryk R over Σ således at $L = [\![R]\!]$.

Bevis: Lad $M = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ være en DFA med $[\![M]\!] = L$.

1. Konvertér M til en GNFA $G = (Q, \Sigma, \delta, q_0, q_f)$
2. Konvertér G til et regulært udtryk R.
3. Vis at $[\![M]\!] = [\![R]\!]$:
   1. Vis at $[\![M]\!] = [\![G]\!]$: nemt
   2. Vis at $[\![G]\!] = [\![R]\!]$:
      1. Hvis $k = |Q| = 2$: $Q = \{q_0, q_f\}$, og $R = \delta(q_0, q_f)$ $\Rightarrow \checkmark$
      2. Hvis $k > 2$: Vis at $[\![G]\!] = [\![G']\!]$
4. Done!

Ikke alle sprog er regulære. F.x. sproget $\{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$:



– en uendelig automat!

Pumping Lemma: en egenskab ved alle regulære sprog.

⇒ Hvis et sprog *ikke* har den egenskab, kan det ikke være regulært.

Sætning 1.70 (Pumpelemmaet): For ethvert regulært sprog A findes der et (naturligt) tal p således at ethvert ord $s \in A$ der har længde mindst p kan opsplittes i tre stykker, $s = xyz$, med

- $|y| > 0$ og $|xy| \leq p$,
- og således at ordene $xy^iz \in A$ for alle $i \in \mathbb{N}_0$.

En gang til:

For ethvert regulært sprog A
  findes $p \in \mathbb{N}_0$ således at
    for ethvert $s \in A$ med $|s| \geq p$
      findes en opsplitning $s = xyz$ således at
        $|y| > 0$ og $|xy| \leq p$ og
        for alle $i \in \mathbb{N}_0$
          $xy^iz \in A$.

Sætning 1.70 (Pumpelemmaet): For ethvert regulært sprog A findes der et (naturligt) tal p således at ethvert ord $s \in A$ der har længde mindst p kan opsplittes i tre stykker, $s = xyz$, med

- $|y| > 0$ og $|xy| \leq p$,
- og således at ordene $xy^iz \in A$ for alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Eksempel 1.73: Sproget $B = \{0^n1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ er ikke regulært.

Bevis (ved modstrid; kortere end i bogen!): *Antag* at B er regulært, og lad p være pumpelængden. Lad $s = 0^p1^p$, da er $|s| \geq p$.

Lad $s = xyz$ være en opsplitning af s som opfylder pumpelemmaets betingelser. Pga. $|xy| \leq p$ kan y kun indeholde 0er, og pga. $|y| > 0$ indeholder y mindst ét 0.

Sidste betingelse i lemmaet siger bl.a. at ordet $xyyz \in A$, men dette ord indeholder for mange 0er. Modstrid!

Sætning 1.70 (Pumpelemmaet): For ethvert regulært sprog A findes der et (naturligt) tal p således at ethvert ord $s \in A$ der har længde mindst p kan opsplittes i tre stykker, $s = xyz$, med

- $|y| > 0$ og $|xy| \leq p$,
- og således at ordene $xy^iz \in A$ for alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Bevis: Lad $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ være en DFA der genkender A, og lad $p = |Q|$. Lad $s = s_1 s_2 \dots s_n \in A$ med $|s| \geq p$.

Mens M læser s, kommer den igennem en følge af $n + 1$ tilstande. Men $n + 1 > p$, så der er flere tilstande i følgen end der er i M!

Dvs. der er en tilstand der optræder to gange i følgen – en løkke!

Hvis vi tager x til at være den del af s der læses *før* løkken, y den del der læses *i* løkken, og z den del der læses *efter* løkken, kan vi gennemløbe løkken i gange og genkende strengen xy^iz.

Sætning 1.70 (Pumpelemmaet): For ethvert regulært sprog A findes der et (naturligt) tal p således at ethvert ord $s \in A$ der har længde mindst p kan opsplittes i tre stykker, $s = xyz$, med

- $|y| > 0$ og $|xy| \leq p$,
- og således at ordene $xy^i z \in A$ for alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Bevis: Lad $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ være en DFA der genkender A, og lad $p = |Q|$. Lad $s = s_1 s_2 \dots s_n \in A$ med $|s| \geq p$.

Lad $r_1, r_2, \dots, r_{n+1} \in Q$ således at $r_1 = q_0$, $r_{n+1} \in F$, og $r_{i+1} = \delta(r_i, s_i)$ for alle i.

Vi har $n + 1 \geq p + 1$, og $|Q| = p$. Derfor findes indices j og ℓ således at $1 \leq j < \ell \leq p + 1$ og $r_j = r_\ell$.

Lad $x = s_1 \dots s_{j-1}$, $y = s_j \dots s_{\ell-1}$, $z = s_\ell \dots s_n$. Pga. $j < \ell$ har vi $|y| \geq 0$, og $\ell \leq p + 1$ medfører $|xy| \leq p$.

Eftersom $\delta(r_{\ell-1}, s_{\ell-1}) = r_j$, er enhver følge $(r_1, \dots, r_{j-1})(r_j, \dots, r_{\ell-1})^i(r_\ell, \dots, r_{n+1})$ en accepterende følge for M, og ordet den genkender er $xy^i z$.

Eksempel 1.74: Sproget
$C = \{w \mid \text{antallet af 0 i } w \text{ er lig med antallet af 1}\} \subseteq \{0,1\}^*$ er ikke regulært.

(Samme bevis som for eksempel 1.73)

Bemærkning (opgave 1.48): Sproget
$D = \{w \mid \text{antallet af 01 i } w \text{ er lig med antallet af 10}\} \subseteq \{0,1\}^*$
er regulært!
(Men *kun* over alfabetet $\{0,1\}$; hvis alfabetet f.x. er $\{0,1,2\}$, er D *ikke* regulært . . .)

Bevis: