

DM 2

Expressions rationnelles

Version du 24 juin 2021

Ce devoir à la maison est à rendre demain, mercredi, au début du TD.

Exercice 1 – Décodage de digicode

On a trouvé un digicode du même modèle que celui utilisé dans le précédent DM (c'est-à-dire 10 touches numérotées de « 0 » à « 9 » plus une touche « E » servant à valider la saisie).

Le digicode est déjà programmé, mais le code qui permet d'ouvrir la porte a été oublié. Il vous faut donc faire le travail inverse du DM précédent : retrouver le code secret à partir du programme. Attention, ce digicode accepte *plusieurs* codes !

Voici le programme extrait du micro-contrôleur :

```
/* Pour dissiper les doutes sur la lecture de ce tableau, on a tab[9][2] == 5. */
int tab[10][10] =
{
    /* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 */
    /* 0 */ { 0, 7, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 },
    /* 1 */ { 0, 7, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 },
    /* 2 */ { 1, 7, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 },
    /* 3 */ { 0, 8, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 },
    /* 4 */ { 0, 8, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 },
    /* 5 */ { 0, 7, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 },
    /* 6 */ { 0, 7, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0 },
    /* 7 */ { 6, 9, 5, 3, 2, 0, 0, 0, 0, 0 },
    /* 8 */ { 6, 9, 5, 3, 2, 0, 0, 0, 0, 0 },
    /* 9 */ { 6, 9, 5, 4, 2, 0, 0, 0, 0, 0 }
};

int pos = 0;
for (;;) /* boucle infinie */
{
    int key = get_key();
    if (key == -1) /* touche 'E' */
    {
        if (pos == 1 || pos == 4 || pos == 8)
        {
            open_door();
        }
        pos = 0;
    }
    else /* 0 <= key <= 9 */
    {
        pos = tab[pos][key];
    }
}
```

1. Que nous apprennent les colonnes 5 à 9 du tableau ?

2. Donnez deux séquences de touches permettant d'ouvrir la porte.
3. Justifiez que l'ensemble L des séquences qui ouvrent la porte est infini.
4. Donnez une expression rationnelle dénotant L . Note : utilisez l'alphabet $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, c'est-à-dire sans y faire apparaître le « E » qui ne nous sert en fait qu'à indiquer la fin d'un mot au digicode.

Exercice 2

Pour tout alphabet Σ , toute lettre $a \in \Sigma$, tous langages A , L et M sur Σ :

1. Justifiez que $\{a\}.L = \{a\}.M \implies L = M$.
2. Prouvez que $AL = AM \not\Rightarrow L = M$.
3. Prouvez que $L^* = M^* \not\Rightarrow L = M$.
4. Prouvez que $\forall n > 1, L^n \neq \{u^n \mid u \in L\}$.
5. Prouvez que $\forall n > 1, L^n = M^n \not\Rightarrow L = M$.

Exercice 3 – Expressions rationnelles

Donnez une expression rationnelle pour les langages suivants :

1. Les mots de $\{a, b\}^*$ contenant un nombre pair de a .
2. Les mots de $\{a, b, c\}^*$ contenant exactement 2 ou 3 fois la lettre c .
3. Les mots de $\{a, b, c\}^*$ qui n'ont pas cb comme facteur.