Faculté des Sciences d'Orsay — Université Paris-Saclay
Licence Informatique, LDD Informatique, Mathématiques, semestre 5 — 2023–24
Eléments de logique pour l'informatique (Info 315) — 8 novembre 2023

Partiel - 25 octobre 2023

L'examen dure 2 heures. L'énoncé est composé de 5 pages.
Toutes les réponses (sauf QCM) devront être clairement justifiées.
Le barème est indicatif et est un peu plus exigeant pour les LDD Informatique, Mathématiques (dont magistère) que pour les Licence Informatique (parcours informatique et Miage) et LDD MNSI.
Aucun document autorisé.
Ne pas cacheter les copies !

Exercice 1 *QCM (5 points)*

Le nom et le numéro d'étudiant doivent être reportés sur l'énoncé du QCM que vous rendrez avec votre copie (utiliser un stylo bleu ou noir pour cocher les cases). Sauf indication contraire, une bonne réponse rapporte $\frac{1}{4}$, une mauvaise réponse retire $\frac{1}{8}$ point, l'absence de réponse vaut 0 point.

Correction : *Voir correction individuelle des QCM.*

Exercice 2 *Tranformation de formules propositionnelles (5 points)*

On considère ici le calcul propositionnel sur un ensemble $\mathcal{X}$ de variables propositionnelles (symboles de prédicat d'arité 0). Dans la suite X, Y et Z sont des variables propositionnelles.

1. Donner les tables de vérité des formules $X \Rightarrow X$ et $\neg X \Rightarrow Y$.
2. En déduire des formules équivalentes à $\top$, $\bot$, $X \vee Y$ et $X \wedge Y$ qui n'utilisent que les symboles logiques de négation ($\neg$) et d'implication ($\Rightarrow$) et les variables propositionnelles.
3. Définir par des équations récursives un fonction `transf` qui prend en argument une formule du calcul propositionnel quelconque (qui utilise les variables propositionnelles et les connecteurs logiques $\top$, $\bot$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\vee$ et $\wedge$) et renvoie une formule équivalente qui n'utilise que les variables propositionnelles et les symboles logiques $\neg$ et $\Rightarrow$.
4. Soit une formule A avec n connecteurs logiques (en comptant également $\top$ et $\bot$ comme des connecteurs logiques), donner en fonction de n un majorant du nombre de connecteurs logiques $\neg$ et $\Rightarrow$ dans la formule $\texttt{transf}(A)$.
5. Donner un cas où cette borne est atteinte.
6. (pour les LDD IM) : donner une preuve par récurrence structurelle du fait que c'est un majorant.

Correction :

1.

X	$X \Rightarrow X$
V	V
F	V

X	Y	$\neg X \Rightarrow Y$
V	$*$	V
F	V	V
F	F	F

D'après les tables de vérité on a $X \Rightarrow X \equiv \top$ *et* $\neg X \Rightarrow Y \equiv X \vee Y$

2.

$$\top \equiv X \Rightarrow X \qquad \bot \equiv \neg\top \equiv \neg(X \Rightarrow X) \qquad X \vee Y \equiv \neg X \Rightarrow Y \qquad X \wedge Y \equiv \neg(\neg X \vee \neg Y) \equiv \neg(X \Rightarrow \neg Y)$$

3.

$$\begin{array}{ll}
\mathtt{transf}(\top) & = X \Rightarrow X \\
\mathtt{transf}(\bot) & = \neg(X \Rightarrow X) \\
\mathtt{transf}(p) & = p \qquad\qquad p \text{ variable propositionnelle} \\
\mathtt{transf}(\neg A) & = \neg\,\mathtt{transf}(A) \\
\mathtt{transf}(A \Rightarrow B) & = \mathtt{transf}(A) \Rightarrow \mathtt{transf}(B) \\
\mathtt{transf}(A \vee B) & = \neg\,\mathtt{transf}(A) \Rightarrow \mathtt{transf}(B) \\
\mathtt{transf}(A \wedge B) & = \neg(\mathtt{transf}(A) \Rightarrow \neg\,\mathtt{transf}(B))
\end{array}$$

4. *On voit que le cas le pire est celui de la conjonction qui remplace un connecteur par trois connecteurs (deux négations et une implication). On peut donc se dire que le nombre de connecteurs logiques de* $\texttt{transf}(A)$ *est majoré par trois fois le nombre de connecteurs de* A.

5. *On prend la formule* $A_n \stackrel{\text{def}}{=} (X_0 \wedge \ldots \wedge X_{n-1}) \wedge X_n$, *avec* X_i *des variables propositionnelles.*
On a $A_0 \stackrel{\text{def}}{=} X_0$ *et* $A_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} A_n \wedge X_n$. *La formule* A_n *a* n *connecteurs logiques.*
La formule $\texttt{transf}(A_n)$ *se calcule aussi de manière itérative.*
On a $\texttt{transf}(A_0) = X_0$ *et* $\texttt{transf}(A_{n+1}) = \neg(\texttt{transf}(A_n) \Rightarrow \neg X_n$
Chaque étape ajoute trois connecteurs et donc $\texttt{transf}(A_n)$ *a bien* $3n$ *connecteurs logiques.*

6. *On notera* $\texttt{nbc}$ *le nombre de connecteurs dans une formule. Cette fonction vérifie les équations suivantes :*

$$
\begin{array}{lll}
\texttt{nbc}(\top) & = 1 & \\
\texttt{nbc}(\bot) & = 1 & \\
\texttt{nbc}(p) & = 0 & p \text{ variable propositionnelle} \\
\texttt{nbc}(\neg A) & = 1 + \texttt{nbc}(A) & \\
\texttt{nbc}(A \circ B) & = 1 + \texttt{nbc}(A) + \texttt{nbc}(B) & o \in \{\Rightarrow, \vee, \wedge\}
\end{array}
$$

On note $\phi(A)$ *la propriété* $\texttt{nbc}(\texttt{transf}(A)) \leq 3 \times \texttt{nbc}(A)$ *qui dit que le nombre de connecteurs dans* $\texttt{transf}(A)$ *est au plus* 3 *fois le nombre de connecteurs dans* A.
On traite chacun des cas pour la formule A *et on établit à chaque fois que* $\phi(A)$ *est bien vérifié.*
— $\top$: $\texttt{nbc}(\texttt{transf}(\top)) = \texttt{nbc}(X \Rightarrow X) = 1$ *et* $\texttt{nbc}(\top) = 1$, *(définitions de* `transf` *et* `nbc`*)*
on a bien $1 \leq 3 \times 1$
— $\bot$: $\texttt{nbc}(\texttt{transf}(\bot)) = \texttt{nbc}(\neg(X \Rightarrow X)) = 2$ *et* $\texttt{nbc}(\bot) = 1$, *(définitions de* `transf` *et* `nbc`*)*
on a bien $2 \leq 3 \times 1$
— p *variable propositionnelle :* $\texttt{nbc}(\texttt{transf}(p)) = \texttt{nbc}(p) = 0$ *et* $\texttt{nbc}(p) = 0$, *(définitions de* `transf` *et* `nbc`*)*
on a bien $0 \leq 3 \times 0$
— $\neg A$: $\texttt{nbc}(\texttt{transf}(\neg A)) = \texttt{nbc}(\neg\texttt{transf}(A)) = 1 + \texttt{nbc}(\texttt{transf}(A))$ *et* $\texttt{nbc}(\neg A) = 1 + \texttt{nbc}(A)$, *(définitions de* `transf` *et* `nbc`*)*
Par hypothèse de récurrence, on a $\texttt{nbc}(\texttt{transf}(A)) \leq 3 \times \texttt{nbc}(A)$
Au final $\texttt{nbc}(\texttt{transf}(\neg A)) = 1 + \texttt{nbc}(\texttt{transf}(A)) \leq 1 + 3 \times \texttt{nbc}(A) \leq 3 \times (\texttt{nbc}(\neg A))$
— $A \Rightarrow B$, $A \vee B$ *et* $A \wedge B$:
$\texttt{nbc}(\texttt{transf}(A \Rightarrow B) = \texttt{nbc}(\texttt{transf}(A) \Rightarrow \texttt{transf}(B)) = 1 + \texttt{nbc}(\texttt{transf}(A)) + \texttt{nbc}(\texttt{transf}(B))$
$\texttt{nbc}(\texttt{transf}(A \vee B)) = \texttt{nbc}(\neg\texttt{transf}(A) \Rightarrow \texttt{transf}(B)) = 2 + \texttt{nbc}(\texttt{transf}(A)) + \texttt{nbc}(\texttt{transf}(B))$
$\texttt{nbc}(\texttt{transf}(A \wedge B) = \texttt{nbc}(\neg(\texttt{transf}(A) \Rightarrow \neg\texttt{transf}(B))) = 3 + \texttt{nbc}(\texttt{transf}(A)) + \texttt{nbc}(\texttt{transf}(B))$
Dans les trois cas ($\circ \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow\}$), *on a :*
$\texttt{nbc}(\texttt{transf}(A \circ B)) \leq 3 + \texttt{nbc}(\texttt{transf}(A)) + \texttt{nbc}(\texttt{transf}(B))$
et $\texttt{nbc}(A \circ B) = 1 + \texttt{nbc}(A) + \texttt{nbc}(B)$, *(définitions de* `transf` *et* `nbc`*)*
Par hypothèse de récurrence, on a $\texttt{nbc}(\texttt{transf}(A)) \leq 3 \times \texttt{nbc}(A)$ *et* $\texttt{nbc}(\texttt{transf}(B)) \leq 3 \times \texttt{nbc}(B)$
Au final $\texttt{nbc}(\texttt{transf}(A \circ B)) \leq 3 + \texttt{nbc}(\texttt{transf}(A)) + \texttt{nbc}(\texttt{transf}(B)) \leq 3 + 3 \times \texttt{nbc}(A) + 3 \times \texttt{nbc}(B) = 3 \times (\texttt{nbc}(A \circ B))$

On a couvert tous les cas et on a donc établi (par récurrence structurelle sur A*) que la propriété* $\texttt{nbc}(\texttt{transf}(A)) \leq 3 \times \texttt{nbc}(A)$ *était vérifiée pour toutes les formules propositionnelles* A.

Exercice 3 *Interprétation de formules propositionnelles (5 points)*

On considère le connecteur $\Leftrightarrow$ comme un connecteur logique primitif. Dans la suite la signature est formée des trois variables propositionnelles X, Y et Z.

1. Donner le nombre d'interprétations différentes pour la signature avec X, Y et Z.
Correction :
Avec trois variables il y a $2^3 = 8$ *interprétations différentes.*

2. Soient les formules $(X \Leftrightarrow Y) \Leftrightarrow Z$ et $(X \Leftrightarrow Y) \Leftrightarrow (Y \Leftrightarrow Z)$. Pour chacune de ces formules, donner une interprétation qui la rend vraie et une interprétation qui la rend fausse.

   Correction :
   - *Si on prend X, Y et Z vrais alors*
     - *$(X \Leftrightarrow Y)$ est vrai et donc $(X \Leftrightarrow Y) \Leftrightarrow Z$ est vraie.*
     - *$(X \Leftrightarrow Y)$ et $(Y \Leftrightarrow Z)$ sont vrais donc $(X \Leftrightarrow Y) \Leftrightarrow (Y \Leftrightarrow Z)$ est vraie.*
   - *Si on prend X, Y et Z faux alors $(X \Leftrightarrow Y)$ est vrai et donc $(X \Leftrightarrow Y) \Leftrightarrow Z$ est faux.*
   - *Si on prend X et Y vrais et Z faux alors $(X \Leftrightarrow Y)$ est vrai mais $(Y \Leftrightarrow Z)$ est faux donc $(X \Leftrightarrow Y) \Leftrightarrow (Y \Leftrightarrow Z)$ est fausse.*

3. On s'intéresse à des formules qui n'utilisent que des variables propositionnelles dans $\{X, Y, Z\}$ et les connecteurs logiques $\neg$ et $\Leftrightarrow$.

   Pour une telle formule A, on note $I(A)$, l'ensemble des interprétations qui rendent vraie la formule A. On notera I_3 l'ensemble de toutes les interprétations possibles des 3 variables.

   (a) En utilisant les notations ensemblistes (union, intersection et différence de deux ensembles), expliquer comment calculer $I(\neg A)$ et $I(A \Leftrightarrow B)$ à partir de $I(A)$, $I(B)$ et I_3.

   (b) Pour p une variable propositionnelle, quel est le cardinal de $I(p)$?

   (c) En utilisant les questions précédentes, montrer que $I(A)$ a toujours un nombre pair d'éléments. Pour le cas de $I(A \Leftrightarrow B)$ on pourra s'aider d'un graphique sur lequel seront matérialisés $I(A)$, $I(B)$ et $I(A \Leftrightarrow B)$.

   (d) Proposer une formule propositionnelle qui utilise les variables X, Y et Z et les connecteurs usuels qui n'a pas d'équivalent avec seulement les connecteurs de négation et d'équivalence. Justifier.

   Correction :

   (a) $\neg A$ est vrai si et seulement si A est faux et donc les interprétations qui rendent vrais $\neg A$ sont le complémentaire des interprétations qui rendent vrai A.

   $I(\neg A) = I_3 \setminus I(A)$

   les interprétations qui rendent vrais $A \Leftrightarrow B$ sont celles qui rendent vraies à la fois A et B (donc l'intersection de $I(A)$ et $I(B)$) ainsi que celles qui rendent fausses à la fois A et B (donc l'intersection des complémentaires de $I(A)$ et $I(B)$)

   $I(A \Leftrightarrow B) = (I(A) \cap I(B)) \cup ((I_3 \setminus I(A)) \cap (I_3 \setminus I(B))) = (I(A) \cap I(B)) \cup I_3 \setminus (I(A) \cup i(B))$

   (b) Soit une formule réduite à une variable propositionnelle p. Elle est vraie pour toutes les interprétations qui rendent vrai p soit $2^2 = 4$ interprétations puisqu'on a trois variables au total, l'une p qui est forcément vraie et les deux autres qui peuvent prendre toutes les valeurs.

   (c)
   - *C'est vrai pour une variable propositionnelle*
   - *L'ensemble de toutes les interprétations I_3 a un nombre pair d'éléments, si on lui retire $I(A)$ qui a aussi un nombre pair d'éléments, il reste un nombre pair d'éléments*
   - *Le cardinal de l'union de deux ensembles est la somme des cardinaux des ensembles moins le cardinal de leur intersection. On en déduit que le cardinal de $I(A \Leftrightarrow B)$ est égal au cardinal de I_3 moins le cardinal de $I(A)$ moins le cardinal de $I(B)$ + 2 fois le cardinal de $I(A) \cap I(B)$. Comme on additionne et on soustrait des nombres pairs, on obtient au final un nombre pair d'éléments.*

   (d) La formule $X \wedge Y \wedge Z$ est vraie sur une seule interprétation, elle ne peut donc être représentée par une formule qui n'utilise que $\Leftrightarrow$ et $\neg$ qui devrait être vraie sur un nombre pair d'interprétations.

Exercice 4 *Modélisation en logique du premier ordre (5 points)*

On introduit un langage dont la signature contient :

- une constante `moi` qui représente la personne qui parle ;

— deux symboles de prédicat unaires `personne` et `legume` : $\texttt{personne}(t)$ est vrai si t est une personne et $\texttt{legume}(t)$ est vrai si t est un légume.

— trois symboles de relations binaires `mange`, `aime` et $=$:
$\texttt{mange}(p, a)$ représente la propriété "p mange a", $\texttt{aime}(p, a)$ le fait que "p aime a" et $p = q$ la relation d'égalité (entre personnes ou aliments).
On pourra supposer implicitement dans les formules et traductions ci-dessous que si $\texttt{mange}(p, a)$ ou $\texttt{aime}(p, a)$ sont vrais alors p est une personne et a est un aliment (légume ou autre objet qui n'est pas une personne).

1. Donner des formules logiques qui correspondent aux expressions suivantes :
Attention à bien respecter la syntaxe des formules de la logique. Pour les phrases complexes, penser à les décomposer en morceaux plus simples.
   (a) J'aime tous les légumes
   (b) Il y a des légumes que je n'aime pas mais que je mange quand même.
   (c) Il est faux que les personnes qui n'aiment pas les légumes ne mangent rien.
   (d) Je suis la seule personne à manger tous les légumes.

   Correction :
   (a) $\forall a, \texttt{legume}(a) \Rightarrow \texttt{aime}(\texttt{moi}, a)$
   (b) $\exists a, \texttt{legume}(a) \wedge \texttt{mange}(\texttt{moi}, a) \wedge \neg \texttt{aime}(\texttt{moi}, a)$
   (c) on peut ou non insérer le prédicat `personne`. Le fait que $\texttt{mange}(p, a)$ et $\texttt{aime}(p, a)$ est faux si p n'est pas une personne fait que c'est équivalent.
   $\neg(\forall p, \texttt{personne}(p) \wedge (\forall a, \texttt{legumes}(a) \Rightarrow \neg \texttt{aime}(p, a)) \Rightarrow \forall a, \neg \texttt{mange}(p, a))$
   ou $\neg(\forall p, (\forall a, \texttt{legumes}(a) \Rightarrow \neg \texttt{aime}(p, a)) \Rightarrow \forall a, \neg \texttt{mange}(p, a))$
   ou de manière équivalente, il existe un personne qui n'aime pas les légumes mais qui mange quelque-chose :
   $\exists p, \texttt{personne}(p) \wedge (\forall a, \texttt{legume}(a) \Rightarrow \neg \texttt{aime}(p, a)) \wedge \exists a, \texttt{mange}(p, a)$
   ou $\exists p, (\forall a, \texttt{legume}(a) \Rightarrow \neg \texttt{aime}(p, a)) \wedge \exists a, \texttt{mange}(p, a)$
   (d) $(\forall a, \texttt{legume}(a) \Rightarrow \texttt{mange}(\texttt{moi}, a)) \wedge (\forall p, \texttt{personne}(p) \wedge (\forall a, \texttt{legume}(a) \Rightarrow \texttt{mange}(p, a)) \Rightarrow p = \texttt{moi})$

2. Exprimer sous forme de phrase en langage naturel les propriétés correspondant aux formules suivantes :
On pourra utiliser le français ou l'anglais mais en faisant des phrases bien formées et compréhensibles, on évitera également de nommer les variables quantifiées.
   (a) $\forall x, \exists y, \texttt{legume}(y) \wedge (\texttt{personne}(x) \Rightarrow \texttt{aime}(x, y))$
   (b) $\exists y, \forall x, \texttt{legume}(y) \wedge (\texttt{personne}(x) \Rightarrow \texttt{aime}(x, y))$
   (c) $\exists y, \texttt{legume}(y) \wedge \forall x, \texttt{aime}(x, y) \Rightarrow \texttt{mange}(x, y)$
   (d) $\neg(\forall x, \forall y, \texttt{aime}(x, y) \Rightarrow \texttt{mange}(x, y))$

   Correction :
   (a) Toutes les personnes aiment au moins un légume.
   (b) Il existe un légume que toutes les personnes aiment
   (c) Il existe un aliment qui est mangé par tous ceux qui l'aime.
   (d) Il est faux que tout le monde mange ce qu'il aime ou de manière équivalente, il existe une personne qui mange un aliment mais qui ne l'aime pas.

3. On considère un ensemble D avec quatre éléments $\{carotte, navet, toto, moi\}$ et une interprétation de domaine D dans laquelle la constante `moi` est interprétée par l'élément moi, l'égalité est interprétée par l'égalité sur D, le prédicat `personne` est interprété par $\{toto, moi\}$ et le prédicat `legume` est interprété par $\{carotte, navet\}$.
Dans la suite, les interprétations de `mange` et `aime` devront respecter la contrainte de relier des personnes à des aliments (c'est-à-dire que ces interprétations ne peuvent pas contenir de paires comme $(carotte, navet)$).
On considère les formules de la question 2.

(a) Donner une interprétation de `mange` et `aime` qui rend vraie la formule 2a et fausse la formule 2b. Est-il possible de faire l'inverse (construire une interprétation qui rend vraie la formule 2b et fausse la formule 2a) ?

Correction :

Il suffit de définir une interprétation de `aime` puisque les formules ne mentionnent que ce prédicat. On peut choisir une interprétation de `mange` arbitraire, par exemple l'ensemble vide (personne ne mange rien) ou bien au contraire une interprétation vraie sur tous les couples de personne et aliment (tout le monde mange de tout).

On représente la relation dans un tableau avec une ligne pour chaque personne et une colonne pour chaque aliment : on met une croix dans le tableau lorsque la relation est vraie, elle est fausse partout ailleurs.

`aime`	*carotte*	*navet*
moi		*X*
toto	*X*	

Cette interprétation rend vraie la formule 2a (toutes les personnes à savoir moi et toto aiment au moins un légume : j'aime les navets et toto aime les carottes) et la formule 2b est fausse puisque quelque soit le légume, il y a une personne au moins qui ne l'aime pas (je n'aime pas les carottes et toto n'aime pas les navets).

Dans l'autre sens la formule 2a est conséquence logique de la formule 2b et est donc forcément vraie dans toute interprétation qui rend vraie la formule 2b.

(b) On prend pour interprétation de `mange` l'ensemble vide. Donner deux interprétations de `aime` dans lesquelles toutes les personnes aiment les carottes et telles que la formule 2c est vraie dans une des interprétations et fausse dans l'autre.

Correction :

i. *interprétation de `aime`*

L'interprétation ci-dessous rend vraie la formule 2c. En effet, dans cette interprétation, personne n'aime les navets donc en prenant pour y la valeur navet et pour x n'importe quelle valeur, $\texttt{aime}(x, y)$ est faux donc $\forall x, \texttt{aime}(x, y) \Rightarrow \texttt{mange}(x, y)$

`aime`	*carotte*	*navet*
moi	*X*	
toto	*X*	

ii. *Si on choisit une interprétation dans laquelle il y a au moins une personne qui aime chaque légume (par exemple celle ci-dessous où toutes les personnes aiment tous les légumes) alors, puisque personne ne mange, la formule $\forall x, \texttt{aime}(x, y) \Rightarrow \texttt{mange}(x, y)$ sera fausse pour n'importe quel légume y. Et donc la formule 2c est fausse dans cette interprétation.*

`aime`	*carotte*	*navet*
moi	*X*	*X*
toto	*X*	*X*