Faculté des Sciences d'Orsay — Université Paris-Saclay
Licence Informatique, LDD Informatique, Mathématiques, semestre 5 — 2022–23
Eléments de logique pour l'informatique (Info 315) — 21 novembre 2022
`http://www.lri.fr/~paulin/Logique`

Partiel - 26 octobre 2022

L'examen dure 2 heures. L'énoncé est composé de 6 pages.
Toutes les réponses (sauf QCM) devront être clairement justifiées.
Le barème est indicatif et est un peu plus exigeant pour les LDD Informatique, Mathématiques (dont magistère) que pour les Licence Informatique (parcours informatique et Miage) et LDD MNSI.
Le seul document autorisé est une page A4 manuscripte recto-verso.
Ne pas cacheter les copies !

Exercice 1 *QCM (LDD IM 4 points, Licence 5 points)*
Le nom et le numéro d'étudiant doivent être reportés sur l'énoncé du QCM que vous rendrez avec votre copie (utiliser un stylo bleu ou noir pour cocher les cases). Sauf indication contraire, une bonne réponse rapporte $\frac{1}{4}$, une mauvaise réponse retire $\frac{1}{8}$ point, l'absence de réponse vaut 0 point.
Correction : *Voir correction individuelle des QCM.*

Exercice 2 *Calcul propositionnel (LDD IM 3 points, Licence 4 points)*
D'après une énigme de R. Smullyan.
L'inspecteur Craig a établi les faits suivants concernant trois individus A, B et C qui sont les seuls suspects pour une affaire de vol.

1. Si A est coupable et B est innocent alors C est coupable
2. C n'agit jamais seul
3. A n'opère jamais avec C
4. un des trois au moins est coupable

L'objet de cet exercice est de traiter cette énigme par la logique.
On introduit 3 variables propositionnelles a, b et c. La variable a est vraie lorsque A est coupable et fausse sinon, de même, b est vraie exactement lorsque B est coupable, et c est vraie exactement lorsque C est coupable.

Questions

1. Transcrire chacune des 4 affirmations de l'énoncé en une formule propositionnelle portant sur les variables a, b et c.
   Correction :
   (a) $a \wedge \neg b \Rightarrow c$
   (b) $c \Rightarrow a \vee b$
   (c) $a \Rightarrow \neg c$ *(ou de manière équivalente* $c \Rightarrow \neg a$ *ou encore* $\neg(a \wedge c)$
   (d) $a \vee b \vee c$
2. Faire une table de vérité qui donne la valeur de vérité de chacune des quatre formules précédentes en fonction de a, b et c.
   Correction :

	a	b	c	$(a \wedge \neg b) \Rightarrow c$	$c \Rightarrow (a \vee b)$	$a \Rightarrow \neg c$	$a \vee b \vee c$
1	V	V	V	V	V	F	V
2	V	V	F	V	V	V	V
3	V	F	V	V	V	F	V
4	V	F	F	F	V	V	V
5	F	V	V	V	V	V	V
6	F	V	F	V	V	V	V
7	F	F	V	V	F	V	V
8	F	F	F	V	V	V	F

3. Expliquer à partir de la table ce que l'inspecteur peut déduire à partir des quatre affirmations : qui est coupable ? qui est innocent ? et qui reste possiblement suspect ?

   Correction :

   Il y a trois situations qui rendent vraies simultanément les quatre formules :

   (a) *ligne 2 : A, B coupables et C innocent*

   (b) *ligne 5 : A innocent et B, C coupables*

   (c) *ligne 6 : A, C innocents et B coupable*

   On sait donc que dans tous les cas B est coupable par contre A et C restent suspects (ils peuvent être innocents ou coupables).

Exercice 3 *Modélisation en logique du premier ordre (5 points)*

On reprend la problématique des enquêtes mais cette fois-ci avec une modélisation au premier ordre. On se donne un langage avec trois constantes `A`, `B` et `C`, trois symboles de prédicats unaires `coupable`, `innocent` et `suspect` et un symbole de relation binaire `complices` ainsi que le symbole binaire d'égalité noté de manière infixe.

1. Traduire les formules suivantes en langage naturel (français ou anglais mais en veillant à la qualité linguistique de la solution qui doit être compréhensible).

   (a) $\exists x, \texttt{innocent}(x) \Rightarrow \forall y, \texttt{innocent}(y)$

   (b) $\exists x, \texttt{innocent}(x) \wedge \forall y, \texttt{complices}(x, y) \Rightarrow \texttt{suspect}(y)$

   (c) $\forall x, \texttt{coupable}(x) \Rightarrow \exists y, \texttt{complices}(x, y)$

   (d) $\exists y, \forall x, \texttt{coupable}(x) \Rightarrow \texttt{complices}(x, y)$

   Correction : *Attention aux ordres de priorité des symboles logiques. Les quantificateurs ont la précédence la plus faible et donc toute formule qui s'écrit $\exists x, A$ ou $\forall x, A$ se parenthèse $\exists x, (A)$ et $\forall x, (A)$*

   (a) *parenthésage : $\exists x, (\texttt{innocent}(x) \Rightarrow \forall y, \texttt{innocent}(y))$*
   traduction : il existe une personne qui, si elle est innocente, alors tout le monde est innocent.

   (b) *parenthésage : $\exists x, (\texttt{innocent}(x) \wedge (\forall y, \texttt{complices}(x, y) \Rightarrow \texttt{suspect}(y)))$*
   traduction : il existe une personne qui est innocente et dont tous les complices sont suspects

   (c) *parenthésage :$\forall x, (\texttt{coupable}(x) \Rightarrow \exists y, \texttt{complices}(x, y))$*
   traduction : toutes les personnes coupables ont un complice

   (d) *il existe une personne qui est complice de tous les coupables*

2. Donner des formules logiques qui n'utilisent que les symboles de la signature et traduisent les affirmations suivantes :

   (a) Si `A` est coupable alors ses complices le sont aussi

   (b) `B` a deux complices

   (c) Si tous les complices de `C` sont suspects alors C est coupable.

   Correction :

   (a) $\texttt{coupable}(A) \Rightarrow \forall x, \texttt{complices}(x, A) \Rightarrow \texttt{coupable}(x)$

   (b) *La première partie de la formule exprime le fait qu'il y a au moins deux complices et la seconde le fait qu'il y en a au plus 2.*
   $\exists x, \exists y, \texttt{complices}(x, B) \wedge \texttt{complices}(y, B) \wedge x \neq y \wedge \forall z, \texttt{complices}(z, B) \Rightarrow (x = z \vee y = z)$

   (c) $(\forall x, \texttt{complices}(x, C) \Rightarrow \texttt{suspect}(x)) \Rightarrow \texttt{coupable}(C)$

3. Est-il possible de trouver une interprétation qui rend vraie les trois formules de la question 2 et dont le domaine est réduit à deux éléments ? justifier votre réponse.

   Correction :

   Oui on peut prendre une interprétation avec seulement deux éléments a et b et interpréter la constante A par a et les constantes B et C par b. On interprète le symbole $\texttt{complices}$ par la relation qui est toujours vraie. On a $\texttt{complices}(A,B)$ et $\texttt{complices}(B,B)$ qui sont vraies et $A \neq B$ est vrai.

   On peut choisir une interprétation où tout le monde est coupable ce qui rend vraies les deux autres formules.

4. On regarde maintenant les formules de la question 1, bien justifier chaque réponse.
   (a) La formule 1a est-elle valide ?
   (b) Tout modèle de 1c est-il un modèle de 1d ?
   (c) Réciproquement tout modèle de 1d est-il un modèle de 1c ?

   Correction :

   (a) Oui. Cette formule qui se parenthèse en $\exists x, (\texttt{innocent}(x) \Rightarrow \forall y, \texttt{innocent}(y))$ est un cas particulier du principe du buveur qui est valide.

$$\begin{aligned}\exists x, (\texttt{innocent}(x) \Rightarrow \forall y, \texttt{innocent}(y)) &\equiv \exists x, (\neg\texttt{innocent}(x) \lor \forall y, \texttt{innocent}(y))\\ &\equiv (\exists x, \neg\texttt{innocent}(x)) \lor \forall y, \texttt{innocent}(y))\\ &\equiv \neg(\forall x, \texttt{innocent}(x)) \lor (\forall y, \texttt{innocent}(y))\\ &\equiv \top\end{aligned}$$

   (b) Non. Il existe un modèle de 1c qui n'est pas un modèle de 1d. On prend une interprétation sur un domaine à deux éléments $\{a,b\}$ tel que tout le monde est coupable et a,b sont complices ($\texttt{complices}(x,y)$ est vrai si et seulement si $x = a$ et $y = b$ ou $x = b$ et $y = a$. Dans cette interprétation, la formule 1c est vraie. En effet il faut montrer que la formule $\texttt{coupable}(x) \Rightarrow \exists y, \texttt{complices}(x,y)$ est vraie pour $x \mapsto a$ et pour $x \mapsto b$. Dans les deux environnements on a que $\texttt{coupable}(x)$ est vrai donc il faut montrer $\exists y, \texttt{complices}(x,y)$. Dans l'environnement $x \mapsto a$ on choisit pour y la valeur b et dans l'environnement $x \mapsto b$ on choisit pour y la valeur a. Dans les deux cas on a bien $\texttt{complices}(x,y)$ qui est vrai.

   Par contre $\exists y, \forall x, \texttt{coupable}(x) \Rightarrow \texttt{complices}(x,y)$ est faux dans cette interprétation, en effet il faudrait que $\forall x, \texttt{coupable}(x) \Rightarrow \texttt{complices}(x,y)$ soit vraie soit pour $y \mapsto a$ soit pour $y \mapsto b$. Mais si on choisit pour x la même valeur que y, on a bien que $\texttt{coupable}(x)$ est vraie mais $\texttt{complices}(x,y)$ est faux donc $\forall x, \texttt{coupable}(x) \Rightarrow \texttt{complices}(x,y)$ est faux.

   On en déduit que $\exists y, \forall x, \texttt{coupable}(x) \Rightarrow \texttt{complices}(x,y)$ est faux dans cette interprétation.

   (c) Oui. Tout modèle de 1d est aussi un modèle de 1c. En effet si $\exists y, \forall x, \texttt{coupable}(x) \Rightarrow \texttt{complices}(x,y)$ est vraie alors il existe une valeur d dans le domaine telle que pour toute valeur e pour x on ait $\{x \mapsto e, y \mapsto d\} \models \texttt{coupable}(x) \Rightarrow \texttt{complices}(x,y)$ donc $\{x \mapsto e\} \models \texttt{coupable}(x) \Rightarrow \exists y, \texttt{complices}(x,y)$ et donc $\forall x, \texttt{coupable}(x) \Rightarrow \exists y, \texttt{complices}(x,y)$ est vraie.

Exercice 4 *Calcul des prédicats relationnel (LDD IM 8 points, Licence 6 points)*

Le but de cet exercice est de montrer des résultats pour des formules logiques qui ne comportent aucun symbole de fonction (en particulier pas de constante), uniquement des symboles de prédicat.

Les questions sont assez largement indépendantes (par exemple les questions 1 et 3 ne demandent aucune compréhension du reste du sujet).

Dans la suite, lorsque l'on parle de symbole de fonction, cela inclut les constantes (symboles de fonction d'arité 0). Nous considérons les langages suivants :

— une signature $\mathcal{F}$ qui contient une constante 0 et un symbole de fonction unaire S ;

— une signature $\mathcal{P}$ qui contient un symbole de prédicat unaire P_0 et un symbole de prédicat binaire P_S ;

— on ajoute dans les deux cas le symbole de prédicat binaire pour l'égalité noté de manière infixe $t = u$. On ne considère par la suite que des interprétations dans lesquelles le symbole d'égalité est interprété par l'égalité sur le domaine.

1. Soit R un symbole de prédicat binaire (en plus du symbole d'égalité),

   (a) Donner les axiomes de la théorie de l'égalité pour le prédicat R,

   (b) Montrer que les deux formules
   $(\exists x, x = y \wedge R(x, y)) \Leftrightarrow R(y, y)$ et $(\forall x, x = y \Rightarrow R(x, y)) \Leftrightarrow R(y, y)$
   sont conséquence logique des axiomes de l'égalité.

   Correction :

   (a) Les axiomes de la théorie de l'égalité comportent les axiomes d'équivalence et la préservation de R
   — *Reflexivité :* $\forall x, x = x$
   — *Symétrie :* $\forall x\, y, x = y \Rightarrow y = x$
   — *Transitivité :* $\forall x\, y\, z, x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$
   — *Préservation de R :* $\forall x_1\, x_2\, y_1\, y_2, x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \Rightarrow R(x_1, y_1) \Rightarrow R(x_2, y_2)$

   (b) On montre d'abord $(\exists x, x = y \wedge R(x, y)) \Leftrightarrow R(y, y)$.
   — *La formule $R(y, y) \Rightarrow (\exists x, x = y \wedge R(x, y))$ est conséquence logique de la reflexivité de l'égalité. En effet si $R(y, y)$ est vrai dans une interprétation comme on a également $y = y$ vrai, en choisissant pour x la valeur de y on a bien $(\exists x, x = y \wedge R(x, y))$ est vrai*
   — *Dans l'autre sens, la préservation de R ainsi que la réflexivité ($y = y$) permet de déduire que la formule $\forall x, (x = y \Rightarrow (R(x, y) \Rightarrow R(y, y)))$ est vraie.*
   On utilise ensuite des transformations de formules par équivalence :

$$\begin{aligned}\forall x, (x = y \Rightarrow (R(x, y) \Rightarrow R(y, y))) &\equiv \forall x, ((x = y \wedge R(x, y)) \Rightarrow R(y, y)) \\ &\equiv (\exists x, (x = y \wedge R(x, y))) \Rightarrow R(y, y)\end{aligned}$$

   On montre $(\forall x, x = y \Rightarrow R(x, y)) \Leftrightarrow R(y, y)$ de manière symétrique.
   — *La formule $(\forall x, x = y \Rightarrow R(x, y)) \Rightarrow R(y, y)$ est conséquence logique de la reflexivité de l'égalité. En effet si $(\forall x, x = y \Rightarrow R(x, y))$ est vrai dans une interprétation comme on a également $y = y$ vrai, en choisissant pour x la valeur de y on a bien $R(y, y)$ est vrai.*
   — *Dans l'autre sens, la préservation de R ainsi que la symétrie ($x = y \Rightarrow y = x$) et la reflexivité ($y = y$) permet de déduire que la formule $\forall x, (x = y \Rightarrow (R(y, y) \Rightarrow R(x, y)))$ est vraie.*
   On utilise ensuite des transformations de formules par équivalence :

$$\begin{aligned}\forall x, (x = y \Rightarrow (R(y, y) \Rightarrow R(x, y))) &\equiv \forall x, (R(y, y) \Rightarrow (x = y \Rightarrow R(x, y)) \\ &\equiv R(y, y) \Rightarrow \forall x, (x = y \Rightarrow R(x, y))\end{aligned}$$

2. On ajoute à la théorie de l'égalité pour $\mathcal{F}$ et $\mathcal{P}$ les axiomes suivants :

   N_1 : $\forall x, (x = 0 \Leftrightarrow P_0(x))$

   N_2 : $\forall x\, y, (y = S(x) \Leftrightarrow P_S(x, y))$

   On appelle $\mathcal{E}$ l'ensemble des axiomes ainsi obtenus (théorie de l'égalité plus N_1,N_2).
   On souhaite montrer que pour toute formule A construite sur la signature $\mathcal{F}$ on peut construire une formule B écrite sur la signature $\mathcal{P}$ (qui n'utilise donc aucun symbole de fonction, les seuls termes sont des variables) et telle que les deux formules sont équivalentes lorsque les axiomes sont vérifiés, c'est-à-dire que $\mathcal{E} \models A \Leftrightarrow B$

   Par exemple, la formule $\forall x, 0 \neq S(x)$ peut se traduire en $\forall x\, y\, z, P_0(z) \wedge P_S(x, y) \Rightarrow y \neq z$ ou encore $\forall x\, y, P_S(x, y) \Rightarrow \neg P_0(y)$. En effet, par les axiomes de la théorie $\mathcal{E}$ on a $P_S(x, y) \Leftrightarrow y = S(x)$ et $P_0(y) \Leftrightarrow y = 0$ donc $(P_S(x, y) \Rightarrow \neg P_0(y)) \Leftrightarrow (y = S(x) \Rightarrow \neg y = 0)$ et $(y = S(x) \Rightarrow \neg y = 0) \Leftrightarrow (\neg 0 = S(x))$ on a donc bien $\mathcal{E} \models (\forall x, 0 \neq S(x)) \Leftrightarrow (\forall x\, y, P_S(x, y) \Rightarrow \neg P_0(y))$

(a) En utilisant un procédé analogue donner des formules équivalentes aux deux formules suivantes qui n'utilisent que les prédicats de la signature $\mathcal{P}$ (donc qui ne contiennent plus les symboles 0 et S, la justification peut rester succinte).

i. $\forall x, x = 0 \lor \exists y, x = S(y)$

ii. $\forall x\, y, S(x) = S(y) \Rightarrow x = y$

Correction :

i. $(\forall x, x = 0 \lor \exists y, x = S(y)) \Leftrightarrow (\forall x, P_0(x) \lor \exists y, P_S(y, x))$

ii. $(\forall x\, y, S(x) = S(y) \Rightarrow x = y) \Leftrightarrow (\forall x\, x'\, y\, y', P_S(x, x') \land P_S(y, y') \land x' = y' \Rightarrow x = y)$
on peut simplifier cette formule en utilisant la même variable pour x' et y' et on obtient $\forall x\, y\, z, P_S(x, z) \land P_S(y, z) \Rightarrow x = y$

(b) Soit Q un symbole de prédicat unaire, et t un terme quelconque sur la signature $\mathcal{F}$, donner des formules équivalentes à $Q(0)$ et $Q(S(t))$ qui n'utilisent que Q et les symboles des signatures $\mathcal{P}$ et $\mathcal{F}$ et qui contiennent un symbole 0 ou S de moins que la formule initiale.

Correction : $Q(0) \Leftrightarrow (\forall z, P_0(z) \Rightarrow Q(z))$ *ou* $Q(0) \Leftrightarrow (\exists z, P_0(z) \land Q(z))$
$Q(S(t)) \Leftrightarrow (\forall z, P_S(t, z) \Rightarrow Q(z))$ *ou* $Q(S(t)) \Leftrightarrow (\exists z, P_S(t, z) \land Q(z))$

(c) On peut itérer le processus ci-dessus (en remplaçant le prédicat Q par n'importe quelle formule paramétrée) pour supprimer toutes les utilisations des symboles de fonction dans n'importe quelle formule A sur la signature $\mathcal{F}$ et obtenir une formule B sur la signature $\mathcal{P}$ telle que $\mathcal{E} \models A \Leftrightarrow B$.

i. Montrer que si A est satisfiable alors B l'est aussi. On fera attention au fait que les deux formules utilisent des symboles différents et donc que la satisfiabilité de A ne dit rien sur l'interprétation des symboles P_0 et P_S.

ii. Soit la formule $\forall x, \neg P_0(x)$ cette formule est-elle satisfiable dans une interprétation quelconque de la signature $\mathcal{P}$ (sans supposer les axiomes N_1 et N_2 La formule $\forall x, \neg x = 0$ est-elle satisfiable dans une interprétation qui satisfait les axiomes de l'égalité ?

Correction :

Un point délicat de cette question est que les formules A et B sont construites sur deux signatures différentes. La formule A utilise les symboles de fonction 0 et S alors que la formule B utilise les symboles de prédicat P_0 et P_S. Les deux formules utilisent le symbole d'égalité. La satisfiabilité d'une de ces formules ne dépend que de l'interprétation des symboles qui apparaissent dans la formule.

Pour utiliser l'équivalence montrée précédemment $A \Leftrightarrow B$ il faut se placer dans une interprétation qui définit tous les symboles 0, S, P_0 et P_S et qui de plus satisfait les axiomes N_1 et N_2. Si on a des interprétations de 0 et S, il est facile de construire des interprétations de P_0 et P_S qui vérifient les axiomes (première partie de la question) par contre dans l'autre sens, si on a des interprétations de P_0 et P_S quelconques, il n'est pas forcément possible d'en déduire des interprétations de 0 et S qui vérifient les axiomes N_1 et N_2 (deuxième partie de la question).

i. Si A est satisfiable pour une interprétation I des symboles de $\mathcal{F}$ alors on peut construire une interprétation de P_0 qui ne contient que l'interprétation de 0 et une interprétation de P_S qui correspond au graphe de l'interprétation de S. Les axiomes de $\mathcal{E}$ sont satisfaits et comme $\mathcal{E} \models A \Leftrightarrow B$, on en déduit que B est aussi vrai dans cette interprétation et donc B est aussi satisfiable.

ii. La formule $\forall x, \neg P_0(x)$ est satisfiable en choisissant une interprétation de P_0 qui est toujours fausse. Par contre $\forall x, \neg x = 0$ n'est pas satisfiable dans une interprétation qui vérifie les axiomes de la théorie de l'égalité car on aurait que $0 \neq 0$ est vrai dans cette interprétation ce qui est contraire aux axiomes de l'égalité.

3. Donner des équations récursives d'une fonction `transf` qui prend en argument une formule du calcul des prédicats et renvoie une formule équivalente qui n'utilise pas de quantificateur universel, ni d'implication ni de disjonction (on utilisera les lois de de Morgan).

Correction :

$$\begin{array}{ll} \texttt{transf}(p) & = p \quad \textit{si } p \textit{ est atomique} \\ \texttt{transf}(\neg A) & = \neg\texttt{transf}(A) \\ \texttt{transf}(A \wedge B) & = \texttt{transf}(A) \wedge \texttt{transf}(B) \\ \texttt{transf}(A \vee B) & = \neg(\neg\texttt{transf}(A) \wedge \neg\texttt{transf}(B)) \\ \texttt{transf}(A \Rightarrow B) & = \neg(\texttt{transf}(A) \wedge \neg\texttt{transf}(B)) \\ \texttt{transf}(\forall x, A) & = \forall x, \texttt{transf}(A) \\ \texttt{transf}(\exists x, A) & = \neg\forall x, \neg\texttt{transf}(A) \end{array}$$

4. **Pour les LDD IM** On suppose maintenant que l'on a une formule qui ne contient pas de symbole de fonction et dont les seuls connecteurs sont la négation, la conjonction et la quantification existentielle.

   On se donne une interprétation I dont le domaine est $\mathcal{D}$. On ne va ici considérer qu'un langage avec deux symboles de prédicats Q d'arité 1 et R d'arité 2. L'interprétation I est donc composée d'un sous-ensemble $Q_I \subseteq \mathcal{D}$ des objets qui vérifient Q et une relation $R_I \subseteq \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ des couples de valeurs qui vérifient R.

   À toute formule A sur ce langage qui a pour variables libres $x_1, \ldots, x_n$ on va associer l'ensemble des n-uplets $(u_1, \ldots, u_n)$ tels que $I, \{x_1 \mapsto u_1, \ldots, x_n \mapsto u_n\} \models A$ c'est-à-dire l'ensemble des valeurs pour les variables libres qui rendent vraies la formule dans l'interprétation. On notera cet ensemble $[A]_I$.

   (a) Quelles sont les différentes formes possibles d'une formule atomique dans ce langage et pour chacune d'entre elles, calculer l'ensemble $[A]_I$ en utilisant Q_I et R_I et les notations ensemblistes usuelles.

   (b) Soit A la formule $R(x, y) \wedge R(y, x) \wedge \neg R(x, x)$, dont les variables libres sont x, y, calculer l'ensemble $[A]_I$ en fonction de R_I.

   (c) Si la formule B a pour variables libres $x, x_1, \ldots, x_n$, soit A la formule $\exists x, B$. Exprimer l'ensemble des éléments de $[A]_I$ en fonction de ceux de $[B]_I$.

   (d) Si la formule A est close, quelles sont les valeurs possibles pour $[A]_I$? Dans quel cas la formule A est-elle vraie dans l'interprétation I ?

   Correction :

   (a) Une formule atomique peut être de la forme $\top$, $\bot$, $P(x)$, $R(x, x)$, $R(x, y)$ avec les variables x et y différentes.

   On a

   — $[\top]_I = \{()\}$ *(ensemble qui contient un élément, le n-uplet de taille* 0 *noté* $()$*),*
   — $[\bot]_I = \emptyset$,
   — $[P(x)]_I = P_I$,
   — $[R(x, x)]_I = \{d \in \mathcal{D} | R_I(d, d)\}$,
   — *si les variables* x *et* y *sont différentes :* $[R(x, y)]_I = R_I$

   (b) On a $[R(x, y) \wedge R(y, x) \wedge \neg R(x, x)]_I = \{(u, v) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D} | R_I(u, v) \text{ et } R_I(v, u) \text{ et non } R_I(u, u)\}$,

   (c) $$\begin{aligned}[\exists x, B]_I &= \{(u_1, \ldots, u_n) | \text{il existe } u \text{ tel que } (u, u_1, \ldots, u_n) \in [B]_I\} \;, \\ &= \bigcup_{u \in \mathcal{D}} \{(u_1, \ldots, u_n) | (u, u_1, \ldots, u_n) \in [B]_I\}\end{aligned}$$

   (d) Si la formule A *est close alors le seul élément possible de* $[A]_I$ *est un* 0*-uplet* $()$*. Il y a donc deux valeurs possibles : l'ensemble vide (correspond à une formule fausse) ou l'ensemble réduit à un élément (correspond à une formule vraie).*

   Pour aller plus loin. De manière générale, si l'interprétation des symboles de prédicat est suffisament régulière, il sera possible de calculer $[A]_I$ de manière récursive sur la structure de la formule $[A]$ en utilisant les propriétés précédentes et donc de déterminer mécaniquement la valeur d'une formule close quelconque.