Eléments de logique pour l'informatique
Exercices II

Uli Fahrenberg
`uli@lmf.cnrs.fr`

d'après Christine Paulin

28 novembre 2025

6 Systèmes de déduction

Exercice 6.1 On s'intéresse ici à des formules qui contiennent le symbole d'équivalence $p \Leftrightarrow q$. On rappelle que $p \Leftrightarrow q$ est défini comme $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$. Dans la suite x, y et z désignent trois variables propositionnelles.

1. Donner la forme normale conjonctive des formules $(x \Leftrightarrow y)$ et $\neg(x \Leftrightarrow y)$.
2. Construire la table de vérité de la formule $(x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z))$. Cette formule est-elle valide ? satisfiable ?
3. On considère maintenant des séquents avec des formules contenant le symbole d'équivalence. Soit les deux règles dans lesquelles Γ et Δ sont des ensembles de formules et p et q sont des formules :
$$\frac{\Gamma, p \vdash \Delta, q \qquad \Gamma, q \vdash \Delta, p}{\Gamma \vdash \Delta, p \Leftrightarrow q} \qquad\qquad \frac{\Gamma, p, q \vdash \Delta \qquad \Gamma \vdash \Delta, p, q}{\Gamma, p \Leftrightarrow q \vdash \Delta}$$
   (a) Montrer que ces deux règles sont correctes (si une interprétation satisfait les deux prémisses alors elle satisfait la conclusion de la règle).
   (b) Montrer qu'elles sont inversibles (si une interprétation satisfait la conclusion de la règle alors elle satisfait les deux prémisses).
   (c) Construire en utilisant ces règles un arbre de preuve pour le séquent $\vdash x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow y))$.
   (d) La formule $x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow y))$ est-elle valide ?

Exercice 6.2 *Symbole d'équivalence* Soit $\mathcal{X}$ un ensemble de variables propositionnelles.

1. Montrer que toute formule propositionnelle qui utilise les constructeurs logiques $\top, \bot, \neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$ est équivalente à une formule qui n'utilise que les connecteurs $\neg, \Rightarrow$.
2. On considère le connecteur $\Leftrightarrow$ comme un connecteur primitif.
   (a) Proposer des formules équivalentes à $\bot$ et $\top$ qui n'utilisent que les connecteurs $\Leftrightarrow$ et $\neg$.
   (b) Soit une formule A qui n'utilise possiblement que deux variables propositionnelles x, y et les connecteurs $\Leftrightarrow$ et $\neg$. Montrer que l'ensemble des interprétations des variables x, y qui rendent la formule A vraie contient toujours un nombre pair d'éléments.
   (c) En déduire qu'il existe des formules de la logique du premier ordre qui n'ont pas de formulation équivalente qui utilise uniquement les connecteurs $\Leftrightarrow$ et $\neg$.