Range Queries Con Updates

Segment Tree y otras variantes

Ulises López Pacholczak

September 17, 2023

Introducción

Ya sabemos como responder queries de suma en rango, en $O(n)$ tiempo de procesamiento ($O(n * m)$ si es una tabla) y $O(1)$ tiempo de consulta.

Introducción

Ya sabemos como responder queries de suma en rango, en $O(n)$ tiempo de procesamiento ($O(n * m)$ si es una tabla) y $O(1)$ tiempo de consulta.

También, se pueden resolver queries de máximo o mínimo en rangos con $O(n \log n)$ tiempo de procesamiento y $O(1)$ tiempo de consulta.

Introducción

Ya sabemos como responder queries de suma en rango, en $O(n)$ tiempo de procesamiento ($O(n * m)$ si es una tabla) y $O(1)$ tiempo de consulta.

También, se pueden resolver queries de máximo o mínimo en rangos con $O(n \log n)$ tiempo de procesamiento y $O(1)$ tiempo de consulta.

¿Pero esto es suficiente para todos los problemas?

Suma en Rangos con Updates

CSES 1648 - Dynamic Range Sum Queries

Dado un arreglo de n enteros, tu tarea es procesar q queries de los siguientes tipos:

1. Actualizar el valor en la posición k a un valor u
2. Cual es la suma de los valores en el rango $[a, b]$?

Tanto q y n pueden ser como máximo $2 * 10^5$

`https://cses.fi/problemset/task/1648`

Con lo que ya sabemos...

Por cada query de tipo 1, debemos realizar un reprocesamiento de $O(n)$. Por ende, la complejidad del problema nos quedaría $O(n^2)$, lo mismo que hacerlo con fuerza bruta.

Con lo que ya sabemos...

Por cada query de tipo 1, debemos realizar un reprocesamiento de $O(n)$. Por ende, la complejidad del problema nos quedaría $O(n^2)$, lo mismo que hacerlo con fuerza bruta.

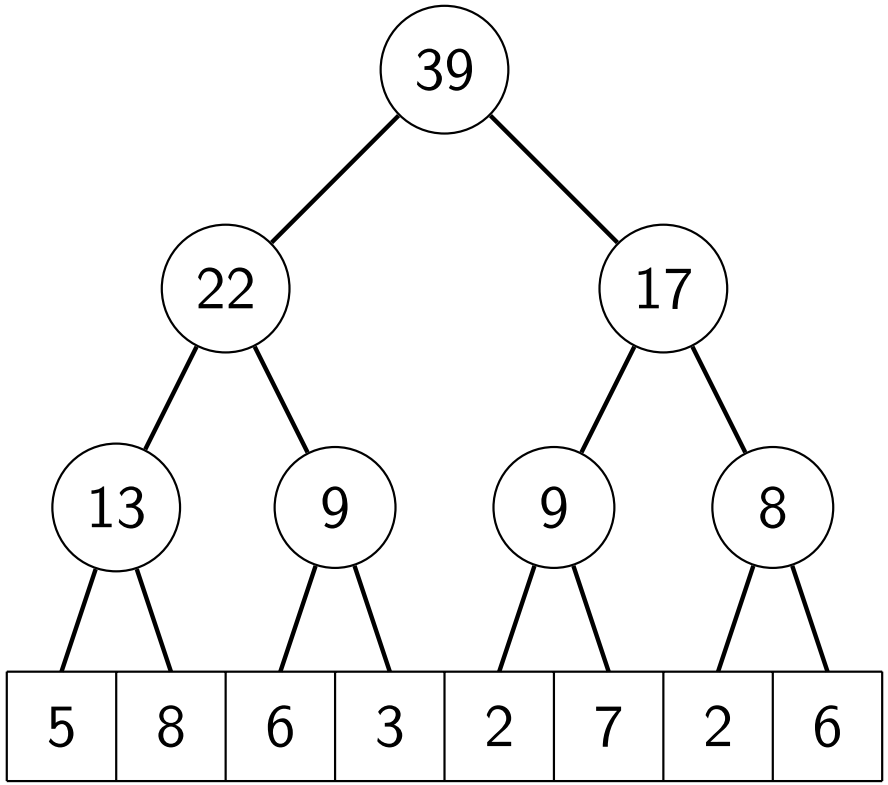
Es claro que necesitamos otra estructura de datos para poder manejar los updates de forma eficiente...

Segment Tree

El Segment Tree es una estructura de datos que nos permite realizar queries en rangos y updates en $O(log\ n)$.

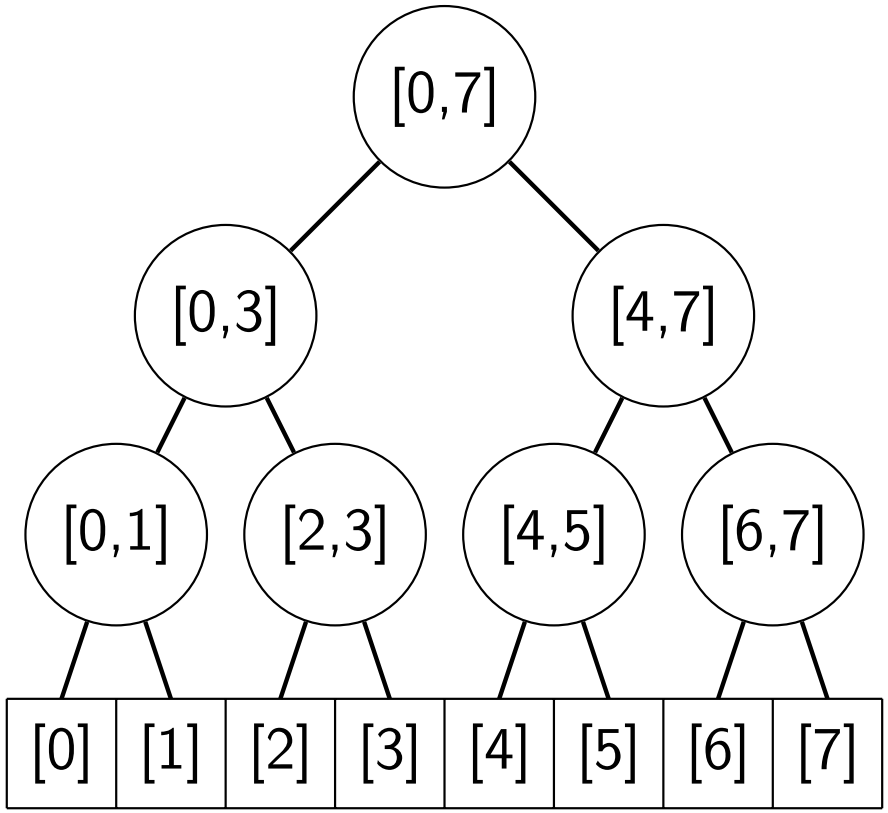
Segment Tree

El Segment Tree es una estructura de datos que nos permite realizar queries en rangos y updates en $O(log\ n)$.



Funcionamiento

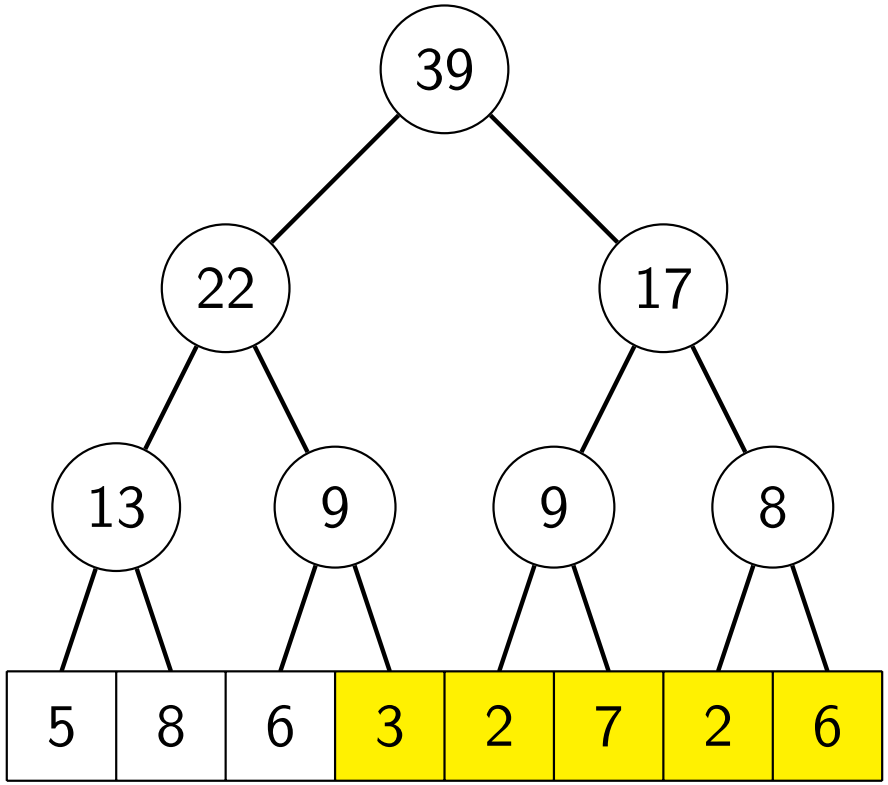
Cada nodo representa el valor de realizar una operación (en el caso del problema original, la suma) en un rango del arreglo.



Guardado de Segment Tree en Memoria

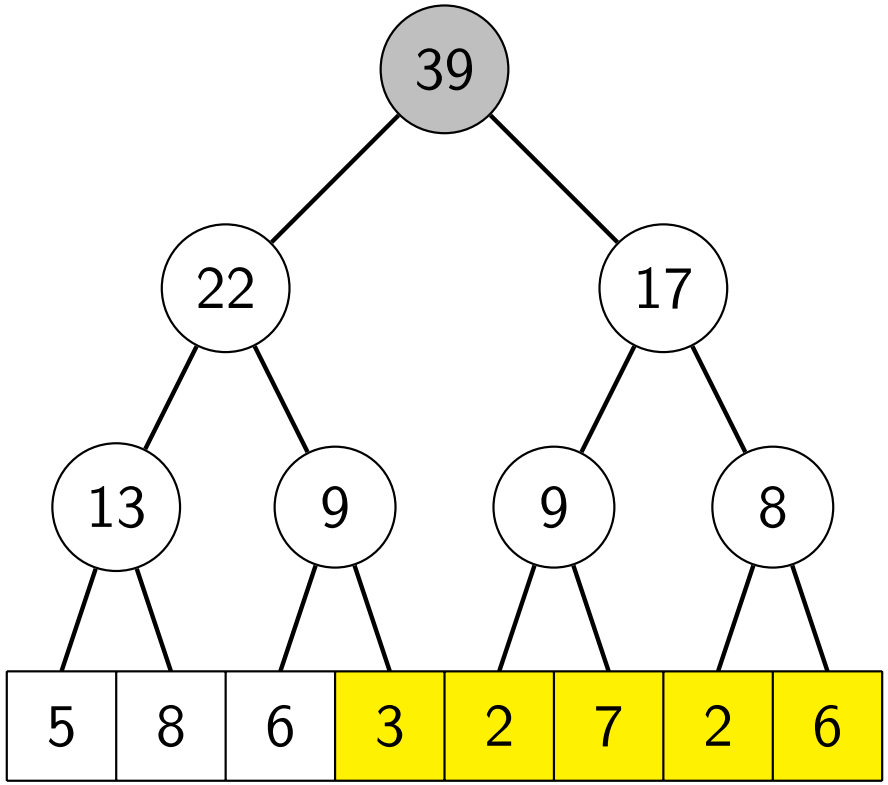
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
39	22	17	13	9	9	8	5	8	6	3	2	7	2	6

Ejemplo de Query



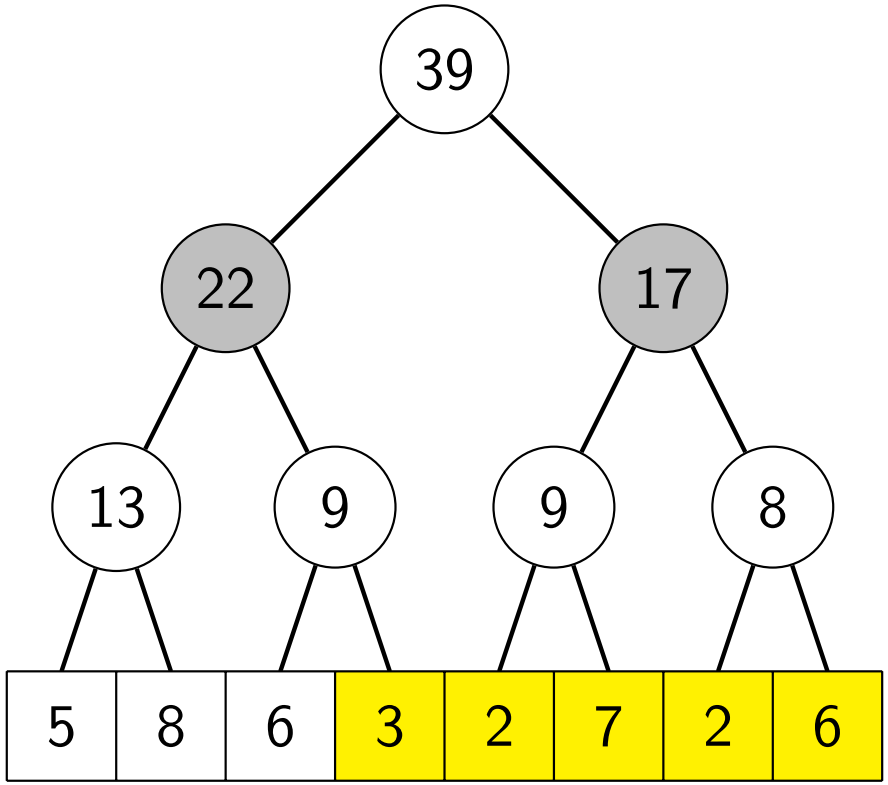
Suma total $= 0$

Ejemplo de Query



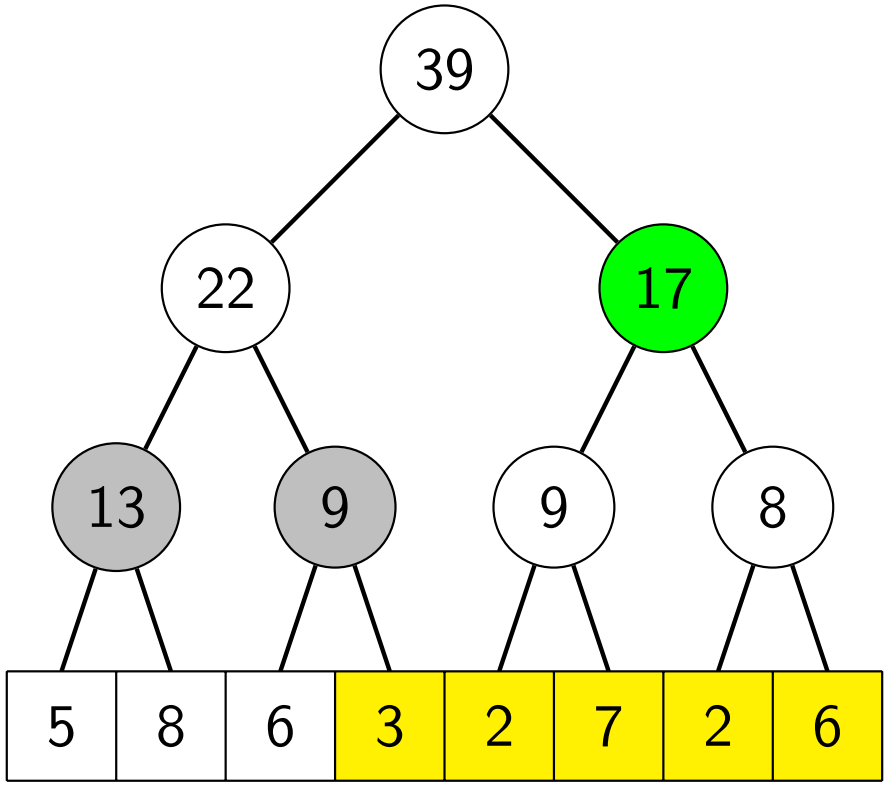
Suma total $= 0$

Ejemplo de Query



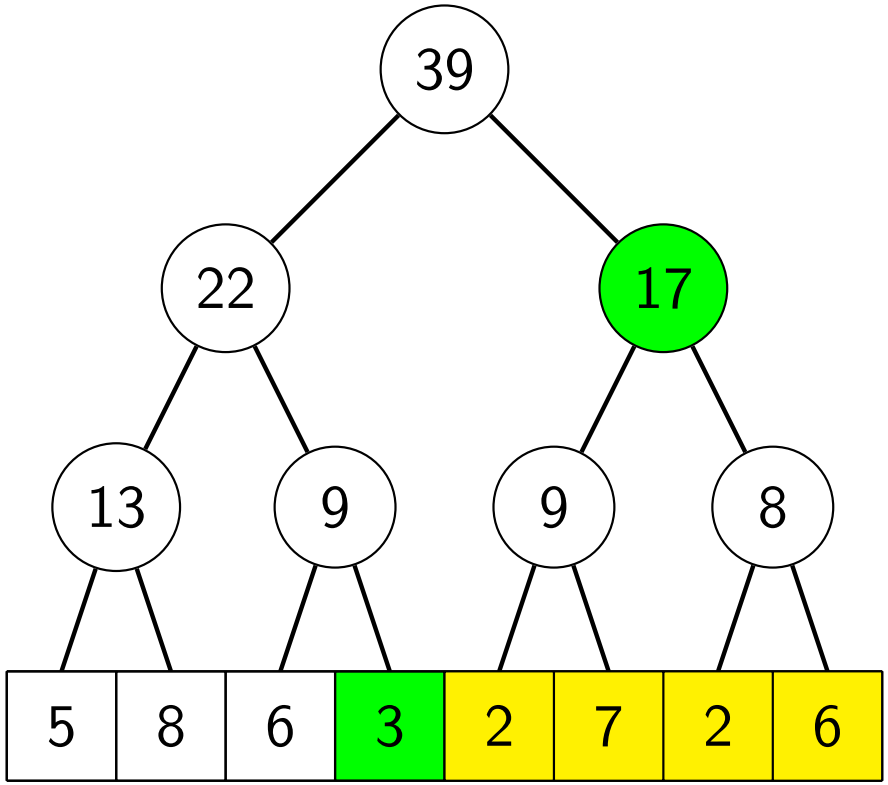
Suma total $= 0$

Ejemplo de Query



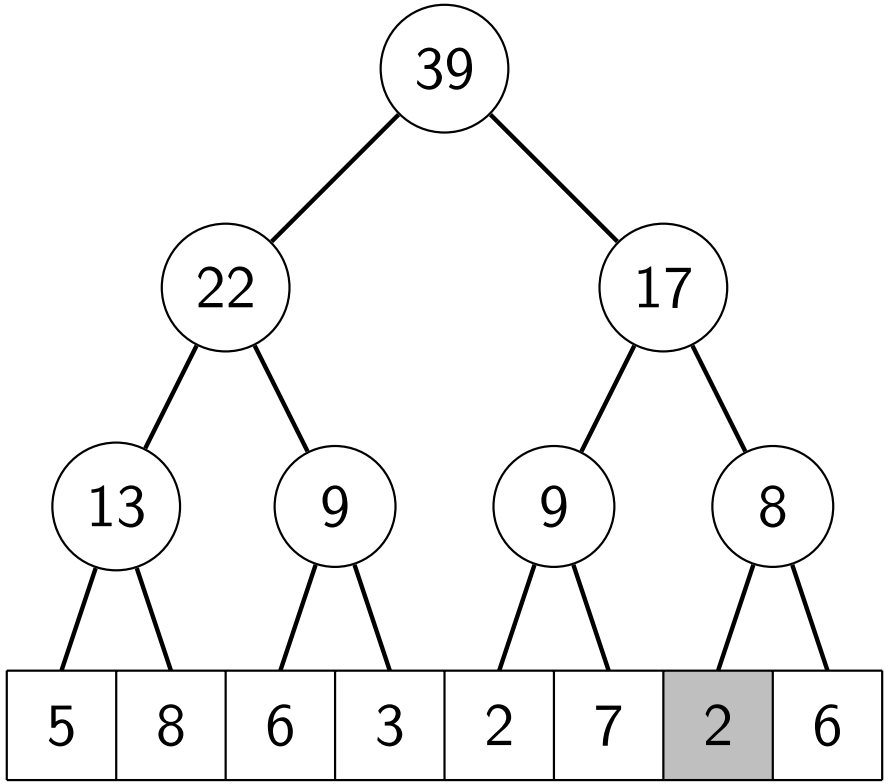
Suma total $= 17$

Ejemplo de Query



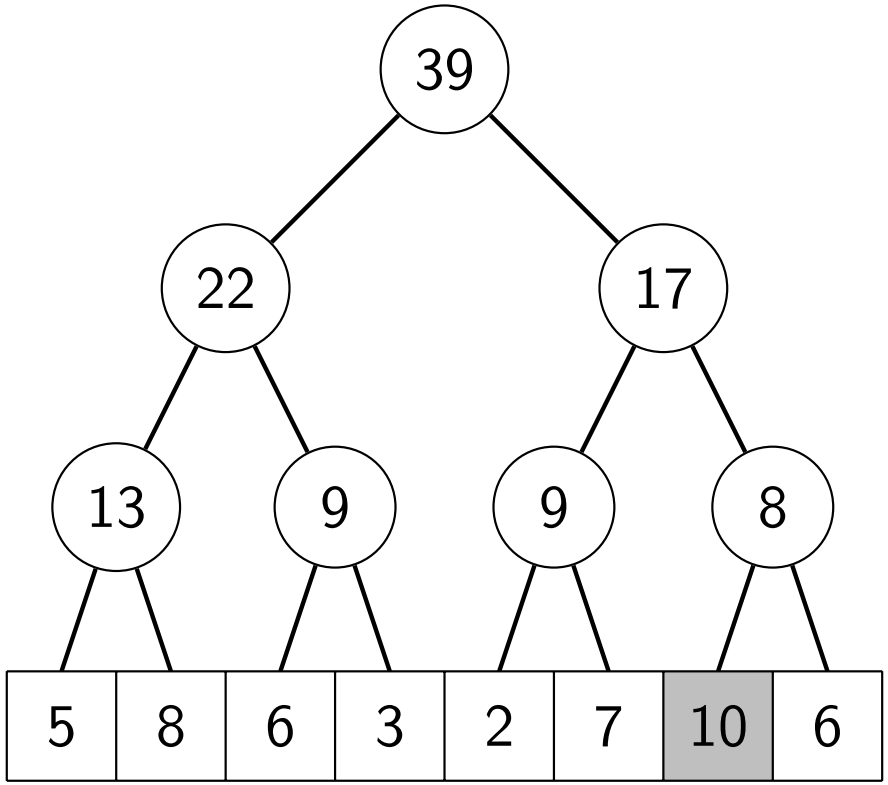
Suma total $= 20$

Ejemplo de Update



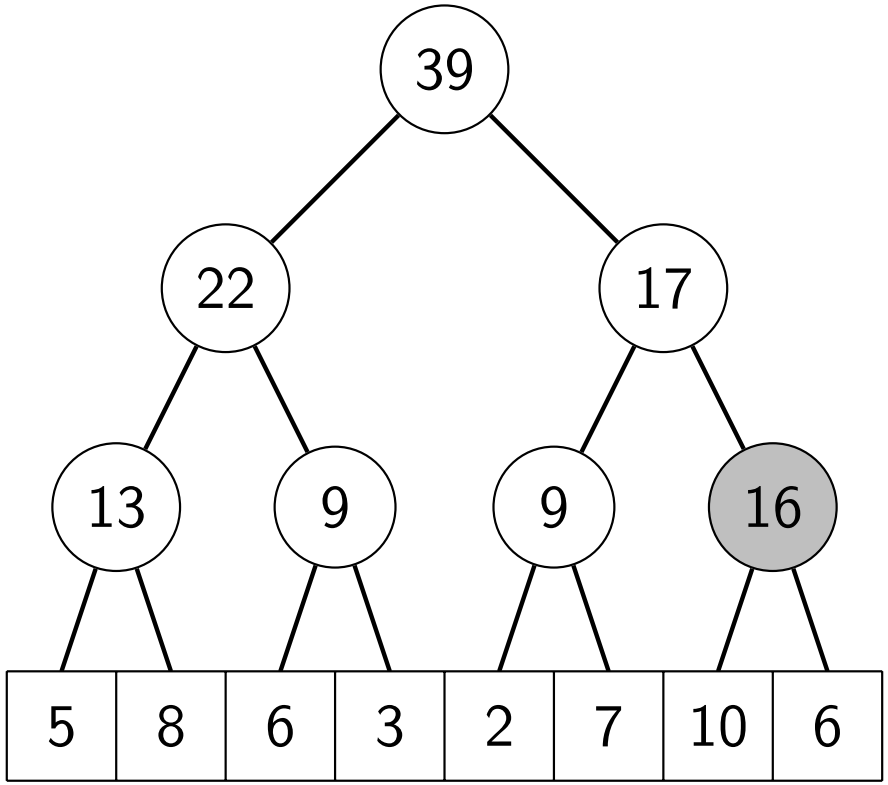
Actualizaremos la posición 6 del arreglo con el valor 10.

Ejemplo de Update



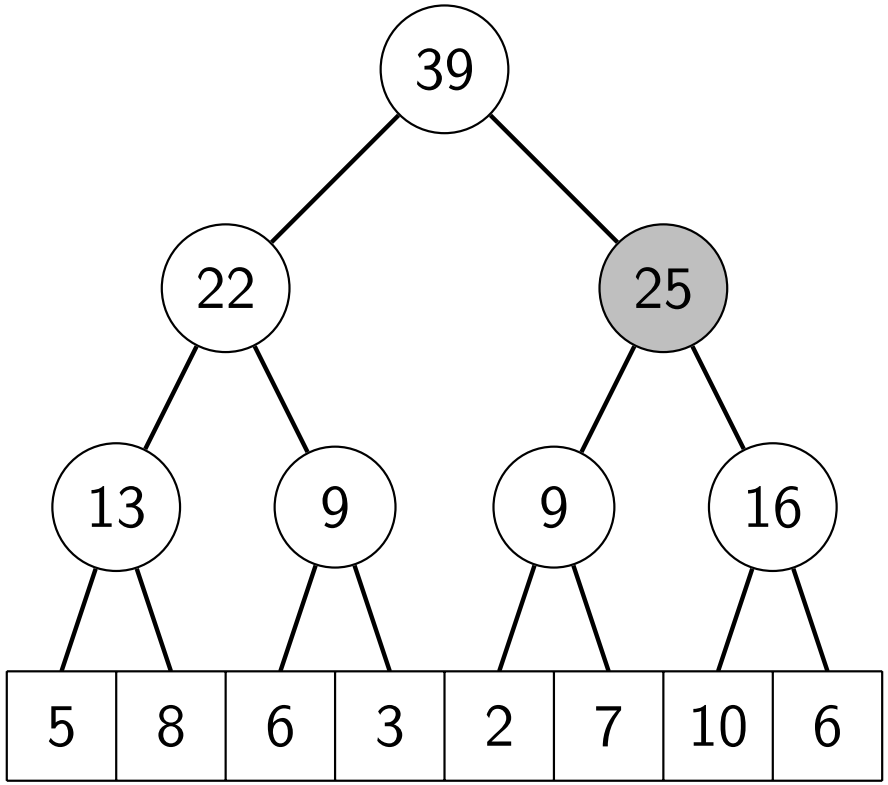
Actualizamos nodo 14

Ejemplo de Update



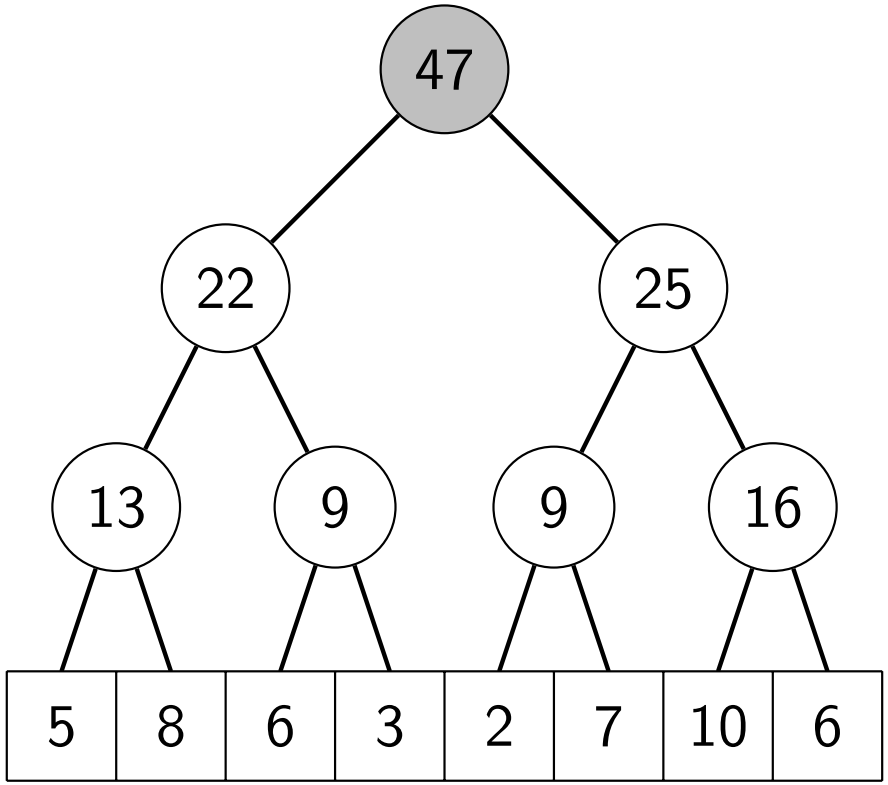
Actualizamos nodo 7 $\lfloor 14/2 \rfloor$

Ejemplo de Update



Actualizamos nodo 3 $\lfloor 7/2 \rfloor$

Ejemplo de Update



Actualizamos nodo 1 $\lfloor 3/2 \rfloor$

Version Iterativa

```
int retrieve(int a, int b) {
    a += n; b += n;
    int s = 0;
    while (a <= b) {
        if (a%2 == 1) s += tree[a++];
        if (b%2 == 0) s += tree[b--];
        a /= 2; b /= 2;
    }
    return s;
}

void update(int k, int x) {
    k += n, tree[k] += x;
    for (k /= 2; k >= 1; k /= 2) {
        tree[k] = tree[2*k]+tree[2*k+1];
    }
}
```

Version Recursiva

```
int sum(int a, int b, int k, int x, int y) {
    if (b < x || a > y) return 0;
    if (a <= x && y <= b) return tree[k];
    int d = (x+y)/2;
    return sum(a,b,2*k,x,d) + sum(a,b,2*k+1,d+1,y);
}

void update(int pos, int k, int x, int y, int val) {
    if (x == y) { segTree[k] = val; return; }
    int d = (x + y) / 2;
    if (pos <= d) update(pos, k*2, x, d, val);
    else update(pos, k*2+1, d+1, y, val);
    segTree[k] = segTree[k*2] + segTree[k*2+1];
}
```

Complejidad

- Construcción: $O(n)$ (De todas formas, solemos construirlo usando la operación update)
- Query: $O(log\ n)$
- Update: $O(log\ n)$
- Memoria: $O(2n)$

Puede notarse que el árbol que construimos es un árbol binario completo, por lo que la cantidad de nodos es $2n - 1$, y tiene una profundidad de $log_2(n)$.

Entendiendo la Complejidad de Query

Es fácil creer que la complejidad de query es mayor a $O(log\ n)$, ya que en cada nivel del árbol se podría llamar a los dos nodos hijos. Pero, en total, notemos que en cada nivel solo se van a estar llamando como máximo 4 nodos en su versión recursiva, y 2 en la versión iterativa. Veamos el caso recursivo, que es el más confuso.

- El nodo está afuera del rango: no se llama a ningún hijo.
- El nodo está completamente dentro del rango: no se llama a ningún hijo.
- El nodo está parcialmente dentro del rango: se llama a los dos hijos. Esto puede ocurrir hasta dos veces por paso, ya que el intervalo es contiguo.

Resolución del Problema

Veamos el Código de "Dynamic Range Sum Queries".

`https://cses.fi/problemset/task/1648`

Pregunta Motivadora

La estructura de datos que trabajamos anteriormente, ¿sólo nos permite trabajar con la suma?

Pregunta Motivadora

La estructura de datos que trabajamos anteriormente, ¿sólo nos permite trabajar con la suma?

¡No! Podemos generalizarla para cualquier operación que sea asociativa y tenga un elemento neutro. A este tipo de operaciones las llamamos **monoides**.

Definición de Monoide

Un Monoide es una estructura algebraica con una operación binaria, que es asociativa y tiene elemento neutro. Un Monoide se lo puede denotar como $(A, \oplus)$ y en lenguaje formal se define como:

- $\forall a, b, c \in A, (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ (es asociativa)
- $\exists! e \in A, \forall a \in A, a \oplus e = e \oplus a = a$ (existe neutro)
- $\forall a, b \in A, a \oplus b \in A$ (operación cerrada)

Ejemplos de Monoide

Estos son algunos ejemolos de Monoides, que pueden ser interesantes para resolver problemas de Programación Competitiva:

- $(\mathbb{N}, +)$
- $(\mathbb{N}, \times)$
- $(\mathbb{N}, min)$
- $(\mathbb{N}, max)$
- $(\mathbb{N}, gcd)$
- $(\mathbb{N}, lcm)$
- $(\mathbb{N}, \wedge)$
- $(\mathbb{N}, \vee)$
- $(\mathbb{N}, \oplus)$, donde $\oplus$ es el XOR
- $(\text{string}, +)$, donde $+$ es la concatenación

Implementación Generalizada

Ahora, vamos a ver en C++ una implementación generalizada del Segment Tree, que nos permita trabajar con cualquier Monoide. Esta idea es gran cortesía de Tarche, que hizo que esté en nuestro Notebook para ICPC.

Resolviendo Más Problemas

Resolvamos los siguientes problemas de CSES con la implementación de Monoide:

- `https://cses.fi/problemset/task/1649`
- `https://cses.fi/problemset/task/1650`

Hotel Queries

CSES 1143 - Hotel Queries

Hay n hoteles en una calle. Para cada hotel conoces el número de habitaciones libres. Tu tarea es asignar habitaciones de hotel para grupos de turistas. Todos los miembros de un grupo quieren alojarse en el mismo hotel.
Los grupos llegarán a usted uno tras otro y usted sabrá para cada grupo la cantidad de habitaciones que necesita. Siempre asignas un grupo al primer hotel que tenga suficientes habitaciones. Después de esto, el número de habitaciones libres en el hotel disminuye.
Para cada grupo de turistas, imprima el número del hotel al que fueron asignados.

`https://cses.fi/problemset/task/1143`

Recorriendo Alternativamente el Segment Tree

Para resolver el problema, vamos a usar el Segment Tree de máximos como una estructura para hacer Binary Search. La idea es encontrar el primer hotel que tenga suficientes habitaciones para el grupo de turistas en $O(log\ n)$.

Recorriendo Alternativamente el Segment Tree

Para resolver el problema, vamos a usar el Segment Tree de máximos como una estructura para hacer Binary Search. La idea es encontrar el primer hotel que tenga suficientes habitaciones para el grupo de turistas en $O(log\ n)$.

Partimos del primer nodo (la raíz), y recorremos el de la izquierda si el nodo contiene un número mayor o igual a la cantidad de habitaciones que necesitamos, o el de la derecha si el nodo contiene un número menor.

Recorriendo Alternativamente el Segment Tree

Para resolver el problema, vamos a usar el Segment Tree de máximos como una estructura para hacer Binary Search. La idea es encontrar el primer hotel que tenga suficientes habitaciones para el grupo de turistas en $O(log\ n)$.

Partimos del primer nodo (la raíz), y recorremos el de la izquierda si el nodo contiene un número mayor o igual a la cantidad de habitaciones que necesitamos, o el de la derecha si el nodo contiene un número menor.

Luego, actualizamos el Segment Tree para que tenga menos habitaciones libres. ¡Veamos el código!

Salary Queries

CSES 1144 - Salary Queries

Una compañía tiene n empleados con ciertos salarios. Tu tarea es procesar salarios, pudiendo preguntar cuales eran los salarios de los empleados en un rango, y actualizar el salario de un empleado.

`https://cses.fi/problemset/task/1144`

Solución 1 - Segment Tree Dinámico

El gran problema que tiene este ejercicio es que los salarios pueden ser hasta $1e9$, por lo que si queremos guardar un Segment Tree en el que cada posición guarde cuántas personas tienen ese salario (para hacer una query de rangos) requeriríamos muchísima memoria.

Solución 1 - Segment Tree Dinámico

El gran problema que tiene este ejercicio es que los salarios pueden ser hasta $1e9$, por lo que si queremos guardar un Segment Tree en el que cada posición guarde cuántas personas tienen ese salario (para hacer una query de rangos) requeriríamos muchísima memoria.

Para resolver esto, podemos usar un Segment Tree Dinámico, que solo guarde los nodos que necesitemos. De esta forma, la complejidad de memoria es $O(n \log n)$ en la cantidad de updates, y la complejidad de tiempo es $O(n \log n)$ para construirlo, $O(\log n)$ para cada query y $O(\log n)$ para cada update.

Solución 2 - Compresión de Coordenadas

Otra forma de resolverlo (que es una idea muy común en programación competitiva cuando los problemas son offline) es utilizar compresión de coordenadas.

Solución 2 - Compresión de Coordenadas

Otra forma de resolverlo (que es una idea muy común en programación competitiva cuando los problemas son offline) es utilizar compresión de coordenadas.

Lo que se hace es guardar los salarios actuales y posibles a futuro (leyendo todas las queries) en un arreglo, y luego comprimirlos para que sean números del 0 al n, asignando a cada valor posible un número comprimido. De esta forma, vamos a tener como mucho $2n$ valores posibles, y podemos guardar en un Segment Tree tradicional.

Otros Problemas

1. Range Update Queries: `https://cses.fi/problemset/task/1651` (Updates en rango y queries en punto)
2. List Removals: `https://cses.fi/problemset/task/1749` (Búsqueda binaria en el segment tree)
3. Distinct Value Queries: `https://cses.fi/problemset/task/1734/` (Segment Tree dinámico o compresión de coordenadas)
4. Prefix Sum Queries: `https://cses.fi/problemset/task/2166/` (Operaciones con nodos más complejas)

Llevándolo un poco más lejos...

Ahora queremos realizar no solo queries en rangos, sino que también updates en rangos, de forma eficiente (sin hacer un nodo a la vez). ¿Cómo podemos hacerlo?

Lazy Segment Tree

La idea es usar un Segment Tree que tenga un arreglo de lazy updates, que nos permita guardar los updates que no se han propagado a los hijos. De esta forma, podemos hacer updates en rangos en $O(log\ n)$.

Lazy Segment Tree

La idea es usar un Segment Tree que tenga un arreglo de lazy updates, que nos permita guardar los updates que no se han propagado a los hijos. De esta forma, podemos hacer updates en rangos en $O(log\ n)$.

Para ello, vamos a hacer que la propagación sea "vaga", en el sentido de que una vez que llegue se llegue a un nodo que este totalmente contenido al intervalo a actualizar, no se va a propagar a sus hijos.

Lazy Segment Tree

La idea es usar un Segment Tree que tenga un arreglo de lazy updates, que nos permita guardar los updates que no se han propagado a los hijos. De esta forma, podemos hacer updates en rangos en $O(log\ n)$.

Para ello, vamos a hacer que la propagación sea "vaga", en el sentido de que una vez que llegue se llegue a un nodo que este totalmente contenido al intervalo a actualizar, no se va a propagar a sus hijos.

Veamos un ejemplo de problema para poder entender esto mejor...

Range Updates and Sums

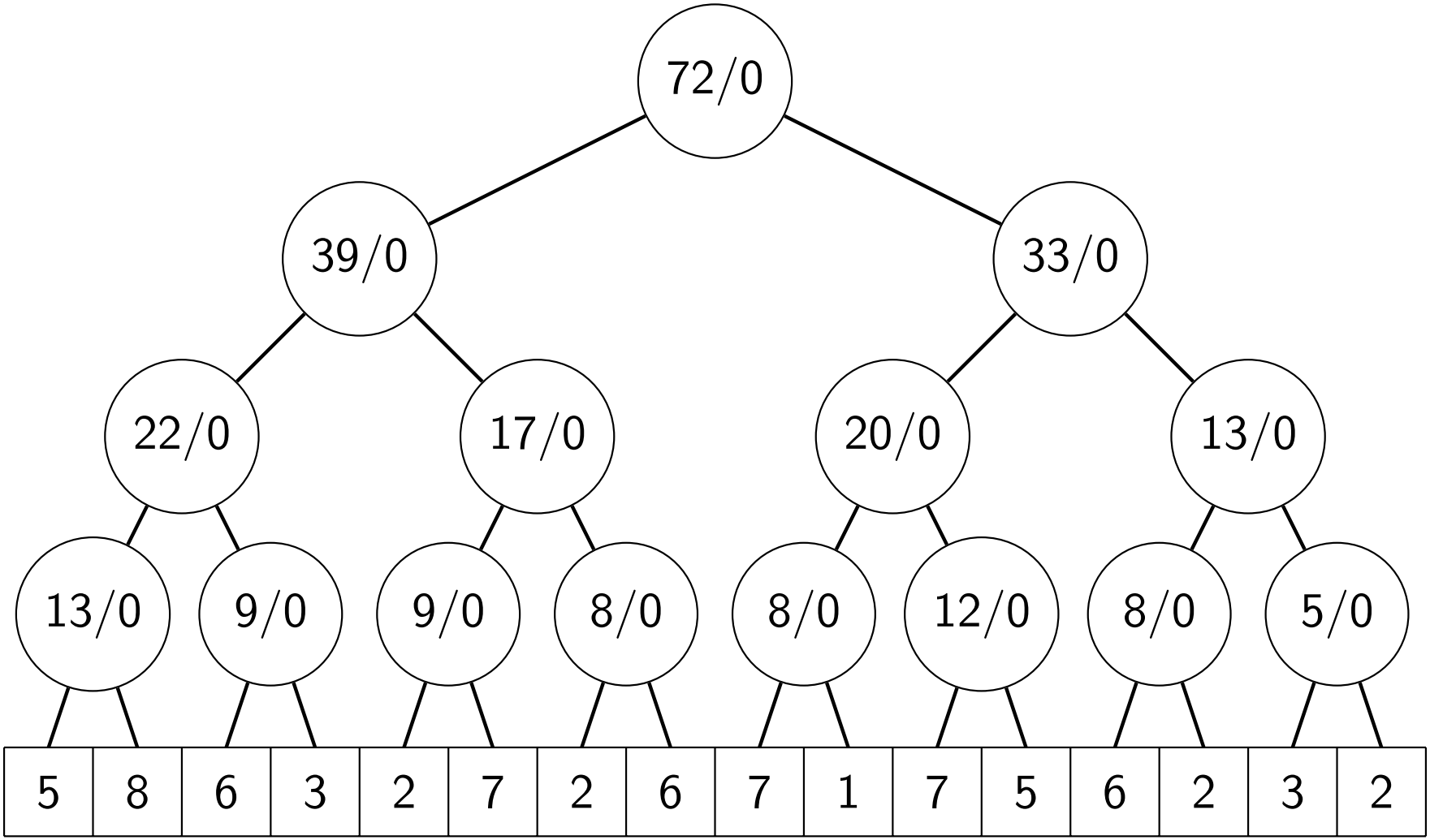
CSES 1735 - Range Updates and Sums

Su tarea es mantener una matriz de n valores y procesar eficientemente los siguientes tipos de consultas:

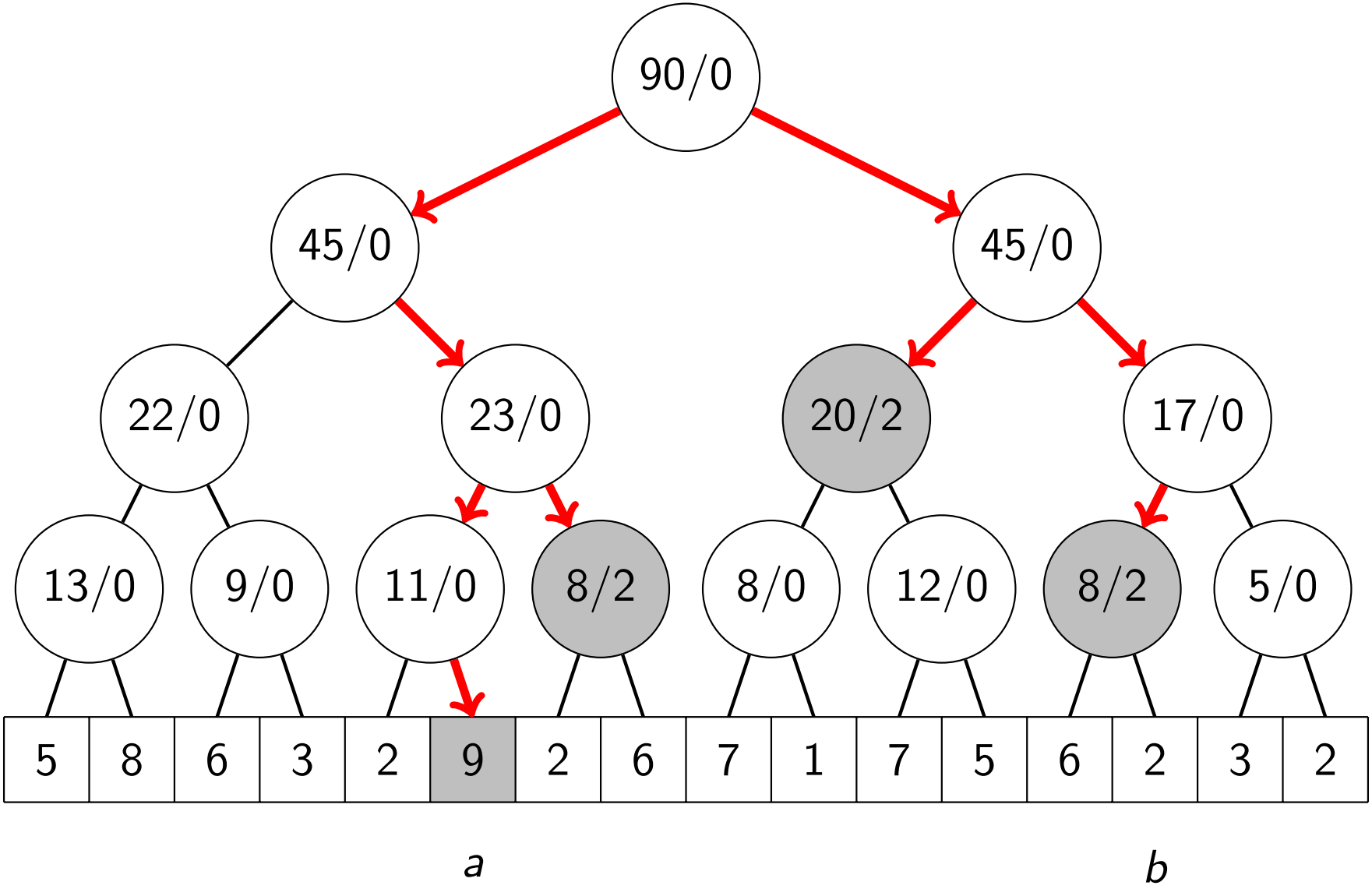
1. Aumente cada valor en el rango $[a, b]$ en x.
2. Establezca cada valor en el rango $[a, b]$ en x.
3. Calcule la suma de los valores en el rango $[a, b]$.

`https://cses.fi/problemset/task/1735`

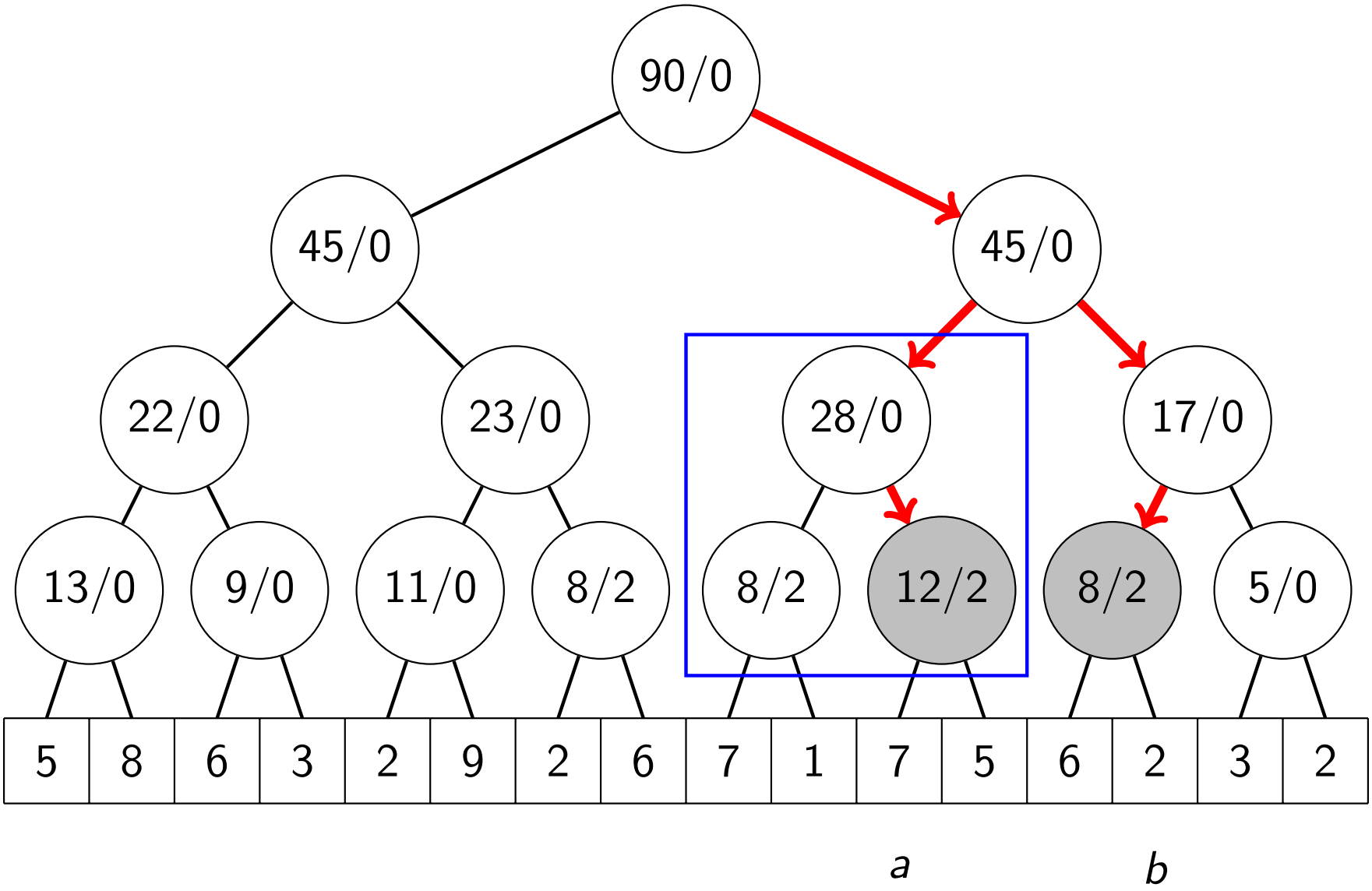
Ejemplo de Lazy Segment Tree



Update en Lazy Segment Tree



Propagando al hacer Query



¿Cómo pensar un problema de Lazy Segment Tree?

Para que un problema pueda realizarse con Lazy Segment Tree, debemos poder contar con una operación que calcule el valor de un nodo sin haber propagado los updates a sus hijos.

En este caso, lo podemos hacer guardando tres variables (*suma*, *sumaLazy* y *setValueLazy*), de la siguiente forma:

¿Cómo pensar un problema de Lazy Segment Tree?

1. Si no hay updates por hacer, el nodo vale *suma*: la suma de sus hijos.

¿Cómo pensar un problema de Lazy Segment Tree?

1. Si no hay updates por hacer, el nodo vale *suma*: la suma de sus hijos.
2. Si hay un update de seteo, el nodo vale $setValueLazy \times (r - l + 1)$: el valor que se seteo multiplicado por la cantidad de elementos en el rango.

¿Cómo pensar un problema de Lazy Segment Tree?

1. Si no hay updates por hacer, el nodo vale *suma*: la suma de sus hijos.
2. Si hay un update de seteo, el nodo vale $setValueLazy \times (r - l + 1)$: el valor que se seteo multiplicado por la cantidad de elementos en el rango.
3. Si hay un update de suma, el nodo vale $sumaLazy \times (r - l + 1) + suma$: lo que se le va a sumar a cada uno de sus hijos por la cantidad de elementos en el rango, más la suma de los hijos.

¿Cómo pensar un problema de Lazy Segment Tree?

1. Si no hay updates por hacer, el nodo vale *suma*: la suma de sus hijos.
2. Si hay un update de seteo, el nodo vale $setValueLazy \times (r - l + 1)$: el valor que se seteo multiplicado por la cantidad de elementos en el rango.
3. Si hay un update de suma, el nodo vale $sumaLazy \times (r - l + 1) + suma$: lo que se le va a sumar a cada uno de sus hijos por la cantidad de elementos en el rango, más la suma de los hijos.
4. Si hay un update de suma y un update de seteo, el nodo vale $setValueLazy \times (r - l + 1)$: el valor que se seteo multiplicado por la cantidad de elementos en el rango.