Clase de aplicaciones
Matemática I

ULISES J. CORNEJO FANDOS
Universidad Nacional de La Plata
September 22, 2017

Resumen

Este documento dispone un resumen del contenido de la clase dictada el día 10 de Julio del 2017. En dicha clase se presentan distintas aplicaciones de los temas dados en la materia, así como también una introducción a temas futuros, planteando de igual forma, utilidades y ventajas que permiten el razonamiento matemático para la resolución de problemas computables. Cabe destacar que cada uno de los ejemplos dispuestos a continuación fueron resueltos al momento de la clase, empleando un lenguaje de programación de conocimiento común entre los alumnos de la cátedra, *Pascal*.

Universo de discurso

Cuando empecé mis estudios en la facultad no tenía en claro cuál era la necesidad de las matemáticas en el campo de la informática. Si bien sabía que éstas son necesarias, no conocía la razón. El objetivo de ésta clase es responder la siguiente pregunta:

¿Cuál es el rol que toman las matemáticas dentro del mundo de la computación?

Ejes fundamentales de aplicación

Las carreras de la facultad están orientadas a la producción de Software, por lo que la siguiente lista refleja los ejes fundamentales respecto de éste ámbito.

- Sistemas Web
- Desarrollo de Video Juegos

- Inteligencia Artificial

En el desarrollo de la clase, se explica el porque de esta lista.

Sistemas Web

Éste es uno de los ejes más populares hoy en día dentro de lo que es la producción de software. En éste ámbito se ven reflejados algunos de los aspectos más básicos e importantes de la programación como lo son la lógica y persistencia de datos. Particularmente, el manejo de base de datos se basa fundamentalmente en la Teoría de Conjuntos y Estructuras Algebraicas.

Las relaciones y conjuntos son una forma de entender la información, donde las matemáticas toman un rol importante al momento de modelar una estrategia para la manipulación de la misma, entre otros aspectos importantes como son también validación de accesos a un determinado recurso.

Ejemplo

Supongamos que en un sistema web, un usuario del mismo desea acceder a sus datos. Para esto, el mismo debe loguearse en el sistema, por lo que se le solicita ingresar email y password.

Para este problema, podemos suponer que se dispone de una base de datos cargada con información de usuarios, es decir, disponemos de un conjunto de usuarios $\mathbb{U}$, y de cada usuario se conoce email y contraseña, entre otros datos. Luego, evaluando cual será la condición para que un usuario pueda iniciarse en el sistema, podemos decir que sea *user* el usuario que está pidiendo ser validado, será validado si $user \in \mathbb{U}$. Ésto nos dice que, el logueo será exitoso si:

$$\exists x \in \mathbb{U} : x = user$$

, donde la igualdad entre usuarios se define a partir de la comparación entre sus datos, esto es, si los mismos coinciden, entonces será el mismo usuario.

Esta representación del problema nos permite entonces utilizar algunos aspecto básicos de la lógica para reducir cómodamente nuestro problema a una sentencia *if* la cual presente una connotación lógica con la matemática.

Luego uno dispondrá de herramientas propias del lenguaje en el cual programe para acceder a cada uno de los datos, y buscará la forma de modelar un conjunto de usuarios de forma conveniente utilizando tal vez herramientas tales como la definición de registros, estructuras o tal vez clases.

Desarrollo de Video Juegos

En el desarrollo de videojuegos, las matemáticas se utilizan para la física de los mismos. No programamos física como tal. Las matemáticas permiten formalizar la física necesaria para la programación de videojuegos.

En este ámbito del desarrollo de software, entran en juego muchos de los aspectos matemáticos más comunes de la programación como pueden ser, lógica, conjuntos, análisis de funciones, entre otros. Sin embargo, más allá del fundamento matemático detrás de cada uno de los aspectos mencionados, podemos ver, en un ejemplo simple, la gran utilidad que nos permite el razonamiento matemático.

Ejemplo

Supongamos que queremos modelar una bola que se encuentra a 5m de altura. Se la deja caer en alguna dirección e impacta con el suelo, revotando hasta quedar en reposo.

Existen diversas formas de plantear el desarrollo de éste problema. A continuación se dispone una de ellas:

Se plantea el movimiento de la bola en 2D, describiendo su cinemática como un tiro oblicuo, quedando la posición de la misma de la siguiente forma:

$$\begin{cases} y(t) = y_0 + v_y t + \frac{1}{2} g t^2 \\ x(t) = x_0 + v_x t \end{cases}$$

, siendo x e y la posición de la bola respecto de un tiempo t. Para esto se busca conocer un vector posición de la forma:

$$\vec{r} = (x, y)$$

Teniendo en cuenta esto, se puede modelar una bola 2D, la cual cuente con propiedades tales como una posición (x,y), podría incluso ser un radio, entre otras. Uno podría pensar también en propiedades tales como la masa del objeto, y modelar dicha bola como una partícula.

Posteriormente, el impacto contra el suelo se define a partir de sus propiedades, siendo estas un vector velocidad y su masa, aunque considero que por el momento no es necesario profundizar en este tema. Por ahora podemos analizar el impacto desde un punto de vista más simple. En Matemática II los alumnos aprenderán el análisis de funciones, particularmente, sabrán evaluar intersección entre funciones. Esto nos sirve para evaluar cuando existe una colisión y esto es, evaluar cuando la bola colisiona con el suelo.

Sin profundizar en el tema, podemos decir que existe una colisión entre dos partículas cuando las mismas se chocan, no? Bueno, esto puede verse desde un aspecto un poco más matemático. Si dos partículas se chocan, y ambas tienen una posición, ¿como serán las mismas? Iguales. Entonces podemos afirmar que una colisión describe el momento en el que dos objetos coinciden en sus posiciones. Definir en que punto las posiciones coinciden, es definir el punto en el hay una intersección en sus funciones de posición.

Ya teniendo esto modelado, podemos modelar una solución computacional al problema.

Luego, podríamos aplicar éste caso a n bolas, si disponemos de una colección de las mismas, podríamos iterar actualizando la posición de cada una en función del tiempo.

Otras consideraciones

En el ejemplo anterior se modela el movimiento de una bola en dos dimensiones. Luego, no sería muy distinta la solución para describir el movimiento de una partícula en tres dimensiones, por lo que sería cuestión de encontrar una función para la posición en el eje z en función del tiempo, para encontrar una solución igual de simple.

Luego, podríamos querer que exista una interacción entre cada entidad en un juego. Supongamos un juego de autos chocadores, en el cual debemos saber si existe un choque entre dos autos. Para esto podríamos emplear el mismo razonamiento que se utiliza para la colisión de la bola con el suelo, igualando las posiciones de los mismos y, al mismo tiempo, ver como la posición y dirección de cada uno queda determinada por el momento del choque.

Resumen

Nuevamente, la matemática empleada no es determinante para la solución del problema. Claramente existen diversas formas de resolverlo, pero podemos afirmar que las matemáticas permiten abstraer el problema para luego poder encontrar una solución computacional de una forma más sencilla. Los aspectos mencionados anteriormente son aspectos básicos a tener en cuenta al momento de desarrollar, no solo vídeo juegos, sino cualquier software en el cual se necesiten las consideraciones anteriormente planteadas.

Particularmente, en la solución del ejercicio entran en juego los siguientes aspectos matemáticos los cuales se dan a lo largo de matemática I y II:

- Lógica
- Teoría de Conjuntos
- Análisis de Funciones
- Estructuras Algebraicas
- ...

Inteligencia Artificial

Particularmente, y dado el conocimiento medio con el que cuentan los alumnos del curso, prefiero no profundizar en el tema, por lo que voy a destacar pocos aspectos de éste campo de aplicaciones.

En éste ámbito se destaca a lo largo de la carrera lo que se conoce como *Machine Learning*, entre otros. Las matemáticas permiten el desarrollo de algoritmos los cuales le permitan a una máquina discriminar datos.

Se cuenta con un conjunto de entrada $\mathbb{A}$, se le aplica una función f y ésta retorna un conjunto de salida $\mathbb{B}$. Podemos entender entonces A como el dominio y B como el co-dominio de la función f, esto es:

$$f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$$

Luego, dicha función representa un algoritmo computable el cual es una correlación f entre los conjuntos A y B. Esta forma de entender la computación no solo afecta al desarrollo de sistemas inteligentes. Los programas computacionales se basan en esta idea, y se entiende cada programa como una relación entre un conjunto de entrada y un conjunto de salida.

Otros Ejemplos

El problema de la galería de arte

¿Cuantas cámaras hay que colocar para vigilar una casa?

Éste es un problema matemático que se conoce como *"El problema de la galería de arte"*. Es un problema que pertenece a una rama de las matemáticas denominada Geometría Computacional.

Enunciado

El problema de la galería de arte o problema del museo es un problema de visibilidad muy estudiado en la geometría computacional. La cuestión fue planteada por Victor Klee en 1973 en estos términos: Determinar el mínimo número de puntos de un polígono que son suficientes para ver a todos los restantes. Se puede interpretar también en términos de vigilancia de una sala poligonal.

La motivación de este problema se da por que las Galerías de Arte tienen que vigilar las costosas colecciones de pintores famosos de criminales que busquen robarlas. Estas galerías vigilan las colecciones con video cámaras durante las noches, se busca que el número de video cámaras sea lo más pequeño posible pero que cada parte de la galería pueda ser visible por al menos una de ellas. Por lo tanto, la colocación de las cámaras debe ser estratégica.

Resolución

Existen diversas alternativas para encontrar una solución a dicho problema. A continuación se explica una de ellas que, en mi opinión, es una de las más interesantes. En resumen, hay una forma de encontrar una solución con *Triangulaciones* y *Teoría de Grafos*.

Sea $\mathbb{P}$ un polígono simple de n vértices. Se procede a descomponer a $\mathbb{P}$ en triángulos, esto recibe el nombre de *Triangulación* de un polígono.

Si se coloca una cámara por cada triángulo de la triangulación se necesitarán $n-2$ cámaras, debido a un teorema de la triangulación de un polígono que menciona que cualquier triangulación de un polígono simple con n vértices contiene exactamente $n-2$ triángulos.

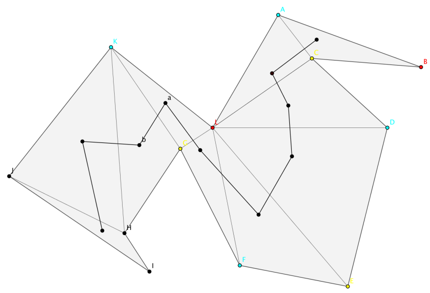

Figure 1: Polígono triangulado

Se triangula un polígono de n lados obteniendo $n-2$ triángulos. Luego, se construye un grafo dual con el centro de cada uno de ellos, siendo este siempre de un tipo específico, *Arboles*.

Es demostrable que, siendo n la cantidad de lados del polígono, la cantidad máxima de cámaras c será $c = \frac{n}{3}$.

Carreras de la facultad

A continuación se listan algunos de los temas matemáticos más utilizados a lo largo de las materias de las carreras de la facultad. Durante la clase se introducen cada uno de estos temas comentando sobre la importancia de los mismos y las materias en las cuales se presentan los mismos.

Se menciona además el contenido de las cátedras de matemáticas de la facultad así como también aquellas optativas las cuales se comparten con las carreras de ciencias de la facultad de ciencias exactas siendo estas Teoría de Grafos, Análisis Numérico I, Combinatoria y Aplicaciones, y por último, Investigación Operativa I.

- Lógica
- Recurrencia
- Estructuras Algebraicas
- Teoría de Números
- Congruencias
- Teoría de Conjuntos
  - Teoría de conjuntos de von Neumann-Bernays-Gödel
  - Teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel
  - ...
- Funciones
- Teoría de Grafos

- Optimización
- Álgebra Relacional
- Probabilidades y Estadística
- Geometría Computacional
- Análisis Numérico
- Números Complejos
- Espacios Vectoriales
- Álgebra Lineal
- ...

Durante la clase, se analiza cada una de las materias de los planes actuales de las carreras de la facultad, comentando el porqué de la importancia de cada uno de los temas planteados para el mejor entendimiento de los temas de las mismas.

Presentación de la clase

La clase tuvo lugar en el horario de cursada de la teoría de la primera comisión del turno 1. A lo largo de la presentación se expusieron ejemplos para introducir a los alumnos en cada uno de los temas. Dado el conocimiento supuesto de los alumnos, se busca presentar ejemplos simples de temas simples, esto es, ejemplos que puedan entender con el conocimiento provisto por cada una de las cátedras del primer cuatrimestre de primer año, comentando sobre temas que conozcan, o no, pero aún así, explicando la importancia de cada uno de ellos y recomendando fuentes de información para investigar más al respecto.

Se busca con la clase fomentar una capacidad de abstracción para la resolución de problemas a partir del razonamiento matemático.

Enlaces

Se puede acceder al contenido de la presentación en el siguiente *repositorio de github*.

ulises-jeremias.github.io/clase-de-aplicaciones