Métodos Numéricos - Clase 7

Ulises Bussi- Javier Portillo

1° cuatrimestre 2020

Ajustes de Curvas

Validación de Ajuste

¿Cómo elegimos modelo? Dado un conjunto de datos, ¿cuál los representa mejor?.

¿Por qué? Existen muchos modelos, vamos tratar de usar el mejor.

Validación de Ajuste

¿Cómo elegimos modelo? Dado un conjunto de datos, ¿cuál los representa mejor?.

¿Por qué? Existen muchos modelos, vamos tratar de usar el mejor.

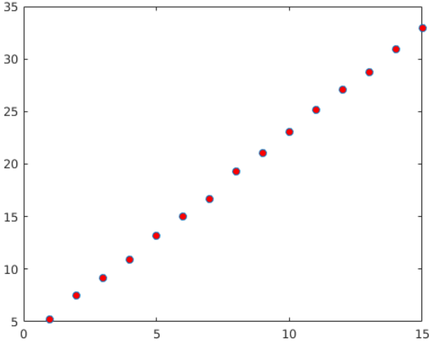
Validación

Dado un conjunto de pares ordenados $(x_i, y_i) \forall i = 1 \ldots n$ Vamos a crear dos subconjuntos disjuntos de datos $(x_i, y_i)_{\text{train}}$ y $(x_i, y_i)_{\text{validation}}$.

Realizaremos los ajustes sobre el conjunto de train. y calcularemos el r^2 sobre el otro conjunto.

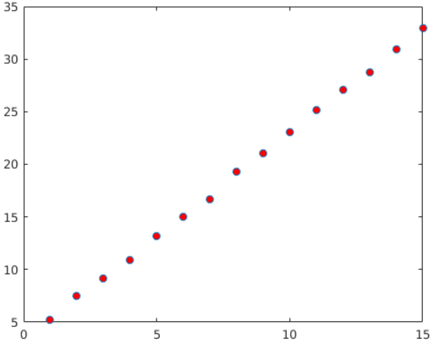
Validación: un Ejemplo

Supongamos que tenemos el conjunto de datos:



Validación: un Ejemplo

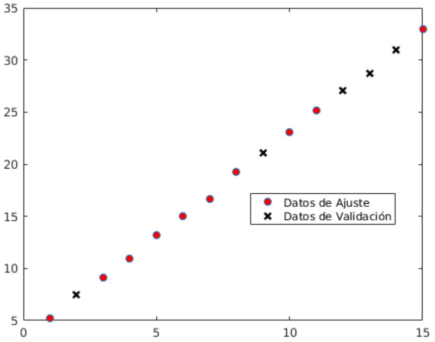
Supongamos que tenemos el conjunto de datos:



Primero debemos separar nuestro set de datos

Validación: un Ejemplo

Supongamos que tenemos el conjunto de datos:



Primero debemos separar nuestro set de datos

Validación: un Ejemplo

Realizamos el ajuste con polinomios hasta de grado 4 para ello, podemos generalizar el problema como: $A \underbrace{c}_{\text{coeficientes}} = b$

donde podemos escribir

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \sum x_i^5 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \sum x_i^5 & \sum x_i^6 \\ \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \sum x_i^5 & \sum x_i^6 & \sum x_i^7 \\ \sum x_i^4 & \sum x_i^5 & \sum x_i^6 & \sum x_i^7 & \sum x_i^8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \\ \sum y_i x_i^2 \\ \sum y_i x_i^3 \\ \sum y_i x_i^4 \end{bmatrix}$$

Validación: un Ejemplo

Realizamos el ajuste con polinomios hasta de grado 4 para ello, podemos generalizar el problema como: $A \underbrace{c}_{\text{coeficientes}} = b$

donde podemos escribir

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \sum x_i^5 \\ \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \sum x_i^5 & \sum x_i^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \\ \sum y_i x_i^2 \\ \sum y_i x_i^3 \end{bmatrix}$$

Validación: un Ejemplo

Realizamos el ajuste con polinomios hasta de grado 4 para ello, podemos generalizar el problema como: $A \underbrace{c}_{\text{coeficientes}} = b$

donde podemos escribir

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \\ \sum y_i x_i^2 \end{bmatrix}$$

Validación: un Ejemplo

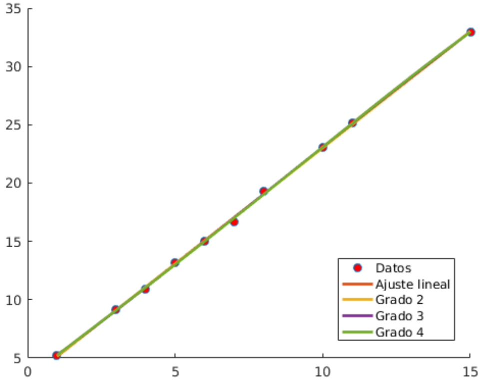
Realizamos el ajuste con polinomios hasta de grado 4 para ello, podemos generalizar el problema como: $A \underbrace{c}_{\text{coeficientes}} = b$

donde podemos escribir

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & & \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

Validación: un Ejemplo

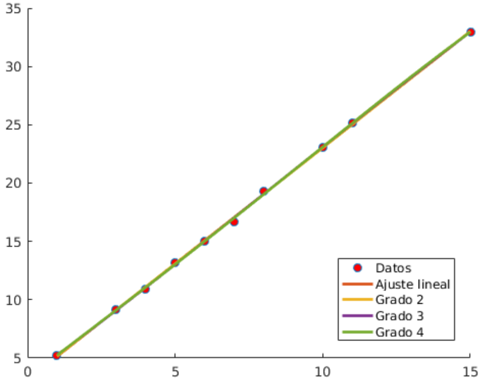
Una vez hallados los coeficientes para cada caso, es posible dibujar los distintos ajustes:



Si bien parecen todos similares miremos r^2

Validación: un Ejemplo

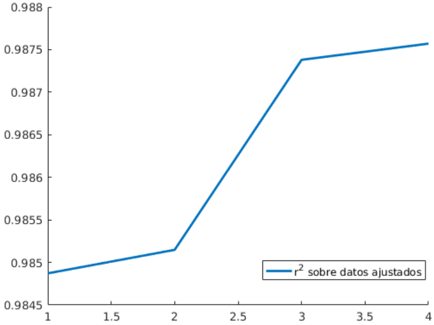
Una vez hallados los coeficientes para cada caso, es posible dibujar los distintos ajustes:



Si bien parecen todos similares miremos r^2

Validación: un Ejemplo

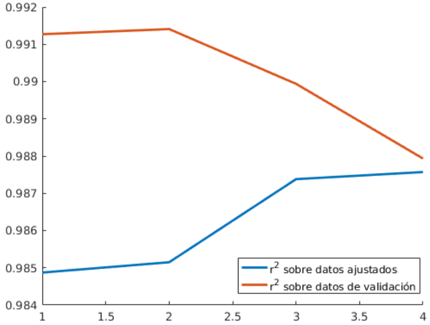
Los coeficientes de determinación



Conclusión: El mejor ajuste parece ser el cuadrático

Validación: un Ejemplo

Los coeficientes de determinación



Conclusión: El mejor ajuste parece ser el cuadrático

Ajustes de Curvas

Polinomios Interpoladores de Lagrange

Proponemos interpolar 2 puntos como un promedio pesado de estos:

$$f(x) = L_1 f(x_1) + L_2 f(x_2)$$

Si la interpolación es una linea, los pesos serán una función de x:

$$L_1 = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \qquad L_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Con lo que la fórmula quedará:

$$\boxed{f(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)}$$

Polinomios Interpoladores de Lagrange

Proponemos interpolar 2 puntos como un promedio pesado de estos:

$$f(x) = L_1 f(x_1) + L_2 f(x_2)$$

Si la interpolación es una linea, los pesos serán una función de x:

$$L_1 = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \qquad L_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Con lo que la fórmula quedará:

$$\boxed{f(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)}$$

Polinomios Interpoladores de Lagrange

Proponemos interpolar 2 puntos como un promedio pesado de estos:

$$f(x) = L_1 f(x_1) + L_2 f(x_2)$$

Si la interpolación es una linea, los pesos serán una función de x:

$$L_1 = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \qquad L_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Con lo que la fórmula quedará:

$$\boxed{f(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)}$$

Polinomios Interpoladores de Lagrange

Si en cambio, queremos unir 3 puntos con una parábola, Los pesos serán:

$$L_1 = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \quad L_2 = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \quad L_3 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

Con lo que el polinomio interpolador quedará cómo:

$$f(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} f(x_2) +$$

$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} f(x_3)$$

Polinomios Interpoladores de Lagrange

Si en cambio, queremos unir 3 puntos con una parábola, Los pesos serán:

$$L_1 = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \quad L_2 = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \quad L_3 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

Con lo que el polinomio interpolador quedará cómo:

$$f(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} f(x_2) +$$

$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} f(x_3)$$

Polinomios Interpoladores de Lagrange

Es posible generalizar los pesos, para cualquier polinomio de grado n:

$$L_i = \prod_{j=1, j \neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

El polinomio quedará:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} L_i(x) f(x_i)$$

Universidad Nacional de Quilmes

Polinomios Interpoladores de Lagrange

Es posible generalizar los pesos, para cualquier polinomio de grado n:

$$L_i = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

El polinomio quedará:

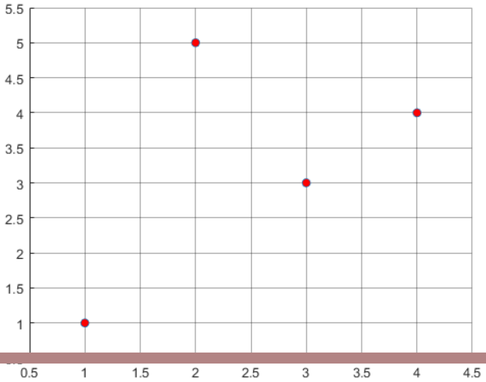
$$\boxed{f(x) = \sum_{i=1}^{n} L_i(x) f(x_i)}$$

Polinomios de Lagrange: un ejemplo

Supongamos que tenemos los valores $x = [1, 2, 3, 4]$ e $y = [1, 5, 3, 4]$. Queremos hallar el Polinomio interpolador de Lagrange en $x = 2{,}5$.

Polinomios de Lagrange: un ejemplo

Supongamos que tenemos los valores $x = [1, 2, 3, 4]$ e $y = [1, 5, 3, 4]$. Queremos hallar el Polinomio interpolador de Lagrange en $x = 2{,}5$.



Polinomios de Lagrange: un ejemplo

Supongamos que tenemos los valores $x = [1, 2, 3, 4]$ e $y = [1, 5, 3, 4]$. Queremos hallar el Polinomio interpolador de Lagrange en $x = 2{,}5$.

Lo primero que hay que hacer es calcular los L:

Polinomios de Lagrange: un ejemplo

Supongamos que tenemos los valores $x = [1, 2, 3, 4]$ e $y = [1, 5, 3, 4]$. Queremos hallar el Polinomio interpolador de Lagrange en $x = 2{,}5$.
Lo primero que hay que hacer es calcular los L:

$$L_1 = \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)}$$

Polinomios de Lagrange: un ejemplo

Supongamos que tenemos los valores $x = [1, 2, 3, 4]$ e $y = [1, 5, 3, 4]$. Queremos hallar el Polinomio interpolador de Lagrange en $x = 2,5$.
Lo primero que hay que hacer es calcular los L:

$$L_1 = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}$$

Polinomios de Lagrange: un ejemplo

Supongamos que tenemos los valores $x = [1, 2, 3, 4]$ e $y = [1, 5, 3, 4]$. Queremos hallar el Polinomio interpolador de Lagrange en $x = 2{,}5$.
Lo primero que hay que hacer es calcular los L:

$$L_1 = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}$$

$$L_2 = \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}$$

Polinomios de Lagrange: un ejemplo

Supongamos que tenemos los valores $x = [1, 2, 3, 4]$ e $y = [1, 5, 3, 4]$. Queremos hallar el Polinomio interpolador de Lagrange en $x = 2{,}5$.

Lo primero que hay que hacer es calcular los L:

$$L_1 = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}$$

$$L_2 = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}$$

Polinomios de Lagrange: un ejemplo

Supongamos que tenemos los valores $x = [1, 2, 3, 4]$ e $y = [1, 5, 3, 4]$. Queremos hallar el Polinomio interpolador de Lagrange en $x = 2{,}5$.
Lo primero que hay que hacer es calcular los L:

$$L_1 = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}$$

$$L_3 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}$$

$$L_2 = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}$$

Polinomios de Lagrange: un ejemplo

Supongamos que tenemos los valores $x = [1, 2, 3, 4]$ e $y = [1, 5, 3, 4]$. Queremos hallar el Polinomio interpolador de Lagrange en $x = 2{,}5$.
Lo primero que hay que hacer es calcular los L:

$$L_1 = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}$$

$$L_3 = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}$$

$$L_2 = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}$$

Polinomios de Lagrange: un ejemplo

Supongamos que tenemos los valores $x = [1, 2, 3, 4]$ e $y = [1, 5, 3, 4]$. Queremos hallar el Polinomio interpolador de Lagrange en $x = 2{,}5$.
Lo primero que hay que hacer es calcular los L:

$$L_1 = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} \quad L_3 = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}$$

$$L_2 = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} \quad L_4 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}$$

Polinomios de Lagrange: un ejemplo

Supongamos que tenemos los valores $x = [1, 2, 3, 4]$ e $y = [1, 5, 3, 4]$. Queremos hallar el Polinomio interpolador de Lagrange en $x = 2{,}5$.

Lo primero que hay que hacer es calcular los L:

$$L_1 = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} \qquad L_3 = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}$$

$$L_2 = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} \qquad L_4 = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}$$

Polinomios de Lagrange: un ejemplo

Supongamos que tenemos los valores $x = [1, 2, 3, 4]$ e $y = [1, 5, 3, 4]$. Queremos hallar el Polinomio interpolador de Lagrange en $x = 2{,}5$.
Ahora debemos evaluar los L_i en el punto de interés:

Polinomios de Lagrange: un ejemplo

Supongamos que tenemos los valores $x = [1, 2, 3, 4]$ e $y = [1, 5, 3, 4]$. Queremos hallar el Polinomio interpolador de Lagrange en $x = 2{,}5$.

Ahora debemos evaluar los L_i en el punto de interés:

$$L_1(2,5) = \frac{(2{,}5-2)(2{,}5-3)(2{,}5-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}$$

Polinomios de Lagrange: un ejemplo

Supongamos que tenemos los valores $x = [1, 2, 3, 4]$ e $y = [1, 5, 3, 4]$. Queremos hallar el Polinomio interpolador de Lagrange en $x = 2{,}5$.

Ahora debemos evaluar los L_i en el punto de interés:

$$L_1(2,5) = \frac{0{,}5 * (-0{,}5) * (-1{,}5}{(-1) * (-2) * (-3)} = -0{,}0625$$

Polinomios de Lagrange: un ejemplo

Supongamos que tenemos los valores $x = [1, 2, 3, 4]$ e $y = [1, 5, 3, 4]$. Queremos hallar el Polinomio interpolador de Lagrange en $x = 2,5$.
Ahora debemos evaluar los L_i en el punto de interés:

$$L_1(2,5) = \frac{0,5 * (-0,5) * (-1,5}{(-1) * (-2) * (-3)} = -0,0625$$

$$L_2(2,5) = \frac{(2,5-1)(2,5-3)(2,5-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}$$

Polinomios de Lagrange: un ejemplo

Supongamos que tenemos los valores $x = [1, 2, 3, 4]$ e $y = [1, 5, 3, 4]$. Queremos hallar el Polinomio interpolador de Lagrange en $x = 2{,}5$.
Ahora debemos evaluar los L_i en el punto de interés:

$$L_1(2,5) = \frac{0{,}5 * (-0{,}5) * (-1{,}5}{(-1) * (-2) * (-3)} = -0{,}0625$$

$$L_2(2,5) = \frac{1{,}5 * (-0{,}5) * (-1{,}5}{(1) * (-1) * (-2)} = 0{,}5625$$

Universidad Nacional de Quilmes

Polinomios de Lagrange: un ejemplo

Supongamos que tenemos los valores $x = [1, 2, 3, 4]$ e $y = [1, 5, 3, 4]$. Queremos hallar el Polinomio interpolador de Lagrange en $x = 2{,}5$.
Ahora debemos evaluar los L_i en el punto de interés:

$$L_1(2,5) = \frac{0{,}5 * (-0{,}5) * (-1{,}5}{(-1) * (-2) * (-3)} = -0{,}0625$$

$$L_2(2,5) = \frac{1{,}5 * (-0{,}5) * (-1{,}5}{(1) * (-1) * (-2)} = 0{,}5625$$

$$L_3(2,5) = \frac{(2{,}5-1)(2{,}5-2)(2{,}5-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}$$

Polinomios de Lagrange: un ejemplo

Supongamos que tenemos los valores $x = [1, 2, 3, 4]$ e $y = [1, 5, 3, 4]$. Queremos hallar el Polinomio interpolador de Lagrange en $x = 2{,}5$.
Ahora debemos evaluar los L_i en el punto de interés:

$$L_1(2,5) = \frac{0{,}5 * (-0{,}5) * (-1{,}5}{(-1) * (-2) * (-3)} = -0{,}0625$$

$$L_2(2,5) = \frac{1{,}5 * (-0{,}5) * (-1{,}5}{(1) * (-1) * (-2)} = 0{,}5625$$

$$L_3(2,5) = \frac{1{,}5 * (0{,}5) * (-0{,}5}{(2) * (1) * (-2)} = 0{,}5625$$

Polinomios de Lagrange: un ejemplo

Supongamos que tenemos los valores $x = [1, 2, 3, 4]$ e $y = [1, 5, 3, 4]$. Queremos hallar el Polinomio interpolador de Lagrange en $x = 2{,}5$.
Ahora debemos evaluar los L_i en el punto de interés:

$$L_1(2,5) = \frac{0{,}5 * (-0{,}5) * (-1{,}5}{(-1) * (-2) * (-3)} = -0{,}0625$$

$$L_2(2,5) = \frac{1{,}5 * (-0{,}5) * (-1{,}5}{(1) * (-1) * (-2)} = 0{,}5625$$

$$L_3(2,5) = \frac{1{,}5 * (0{,}5) * (-0{,}5}{(2) * (1) * (-2)} = 0{,}5625$$

$$L_4(2,5) = \frac{(2{,}5 - 1)(2{,}5 - 2)(2{,}5 - 3)}{(4 - 1)(4 - 2)(4 - 3)}$$

Polinomios de Lagrange: un ejemplo

Supongamos que tenemos los valores $x = [1, 2, 3, 4]$ e $y = [1, 5, 3, 4]$. Queremos hallar el Polinomio interpolador de Lagrange en $x = 2{,}5$.
Ahora debemos evaluar los L_i en el punto de interés:

$$L_1(2,5) = \frac{0{,}5 * (-0{,}5) * (-1{,}5}{(-1) * (-2) * (-3)} = -0{,}0625$$

$$L_2(2,5) = \frac{1{,}5 * (-0{,}5) * (-1{,}5}{(1) * (-1) * (-2)} = 0{,}5625$$

$$L_3(2,5) = \frac{1{,}5 * (0{,}5) * (-0{,}5}{(2) * (1) * (-2)} = 0{,}5625$$

$$L_4(2,5) = \frac{1{,}5 * (0{,}5) * (-0{,}5}{(3) * (2) * (1)} = 0{,}0625$$

Polinomios de Lagrange: un ejemplo

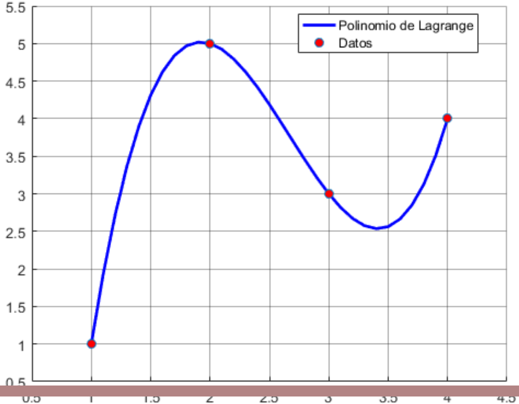
Supongamos que tenemos los valores $x = [1, 2, 3, 4]$ e $y = [1, 5, 3, 4]$. Queremos hallar el Polinomio interpolador de Lagrange en $x = 2{,}5$.
Por último, reemplazamos en el polinomio:

$$f(2{,}5) = -0{,}0625 * 1 + 0{,}5625 * 5 + 0{,}5625 * 3 - 0{,}0625 * 4$$

$$\boxed{f(2{,}5) = 4{,}1875}$$

Polinomios de Lagrange: un ejemplo

Es posible dibujar el polinomio completo si evaluamos punto a punto en matlab:



Ajustes de Curvas

Extrapolación

¿Que sucede si queremos predecir valores fuera del rango de datos?

Newton y Lagrange, sirven para interpolación pero presentan riesgos para valores externos (extrapolación). Tendencia es

desconocida fuera del rango de datos.

Extrapolación

¿Que sucede si queremos predecir valores fuera del rango de datos?

Newton y Lagrange, sirven para interpolación pero presentan riesgos para valores externos (extrapolación). Tendencia es

desconocida fuera del rango de datos.

Extrapolación

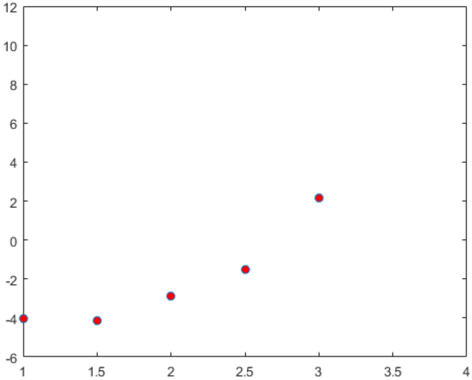
¿Que sucede si queremos predecir valores fuera del rango de datos?

Newton y Lagrange, sirven para interpolación pero presentan riesgos para valores externos (extrapolación). Tendencia es

desconocida fuera del rango de datos.

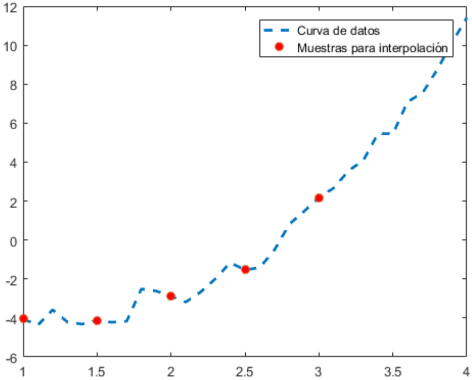
Extrapolación: un Ejemplo

Supongamos que tengo los datos:



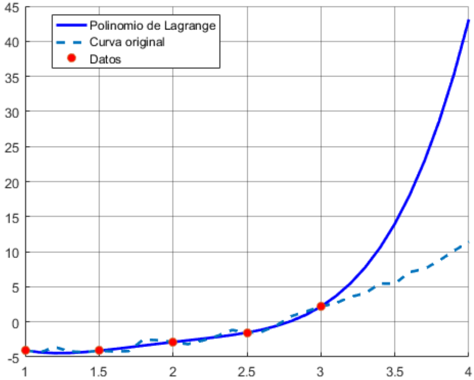
Extrapolación: un Ejemplo

Supongamos que tengo los datos: $x = 1 : ,5 : 5$ e $y = @(x)2 * x.^2 - 5 * x - 1 + \varepsilon$



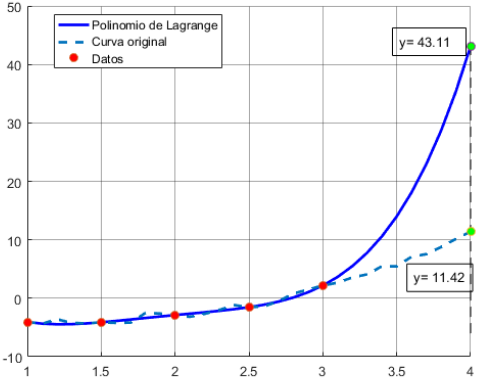
Extrapolación: un Ejemplo

Supongamos que tengo los datos: $x = 1 : ,5 : 5$ e $y = @(x)2 * x.^2 - 5 * x - 1 + \varepsilon$



Extrapolación: un Ejemplo

Supongamos que tengo los datos: $x = 1 : ,5 : 5$ e $y = @(x)2 * x.^{2} - 5 * x - 1 + \varepsilon$



Ajustes de Curvas

Splines

Hasta ahora: ajustabamos polinomios de grado $n-1$ a n puntos.

Ahora Buscaremos aplicar funciones de orden menor.

¿Por qué?

Evitar oscilaciones.

Splines

Hasta ahora: ajustabamos polinomios de grado $n-1$ a n puntos.

Ahora Buscaremos aplicar funciones de orden menor.

¿Por qué?

Evitar oscilaciones.

Splines

Hasta ahora: ajustabamos polinomios de grado $n-1$ a n puntos.

Ahora Buscaremos aplicar funciones de orden menor.

¿Por qué?

Evitar oscilaciones.

Splines: Lineal

Propuesta:

- tenemos n puntos,
- separamos en $n-1$ intervalos de 2 puntos.
- unimos los puntos de cada intervalo con rectas.

Veamos un Ejemplo

Splines: Lineal

Propuesta:

- tenemos n puntos,
- separamos en $n - 1$ intervalos de 2 puntos.
- unimos los puntos de cada intervalo con rectas.

Veamos un Ejemplo

Splines: Lineal

Propuesta:

- tenemos n puntos,
- separamos en $n-1$ intervalos de 2 puntos.
- unimos los puntos de cada intervalo con rectas.

Veamos un Ejemplo

Splines: Lineal

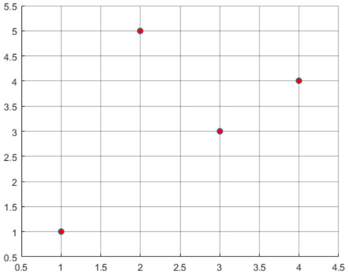
Propuesta:

- tenemos n puntos,
- separamos en $n-1$ intervalos de 2 puntos.
- unimos los puntos de cada intervalo con rectas.

> Veamos un Ejemplo

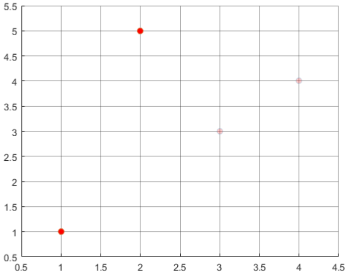
Spline Lineal: un ejemplo

$$x = [1, 2, 3, 4] \quad y = [1, 5, 3, 4]$$



Spline Lineal: un ejemplo

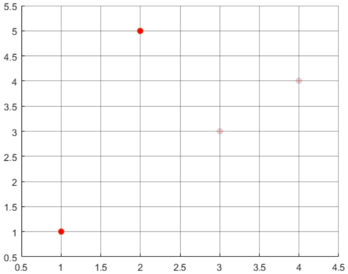
$$x = [1, 2, 3, 4] \quad y = [1, 5, 3, 4]$$



$$s_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1)$$

Spline Lineal: un ejemplo

$$x = [1, 2, 3, 4] \quad y = [1, 5, 3, 4]$$

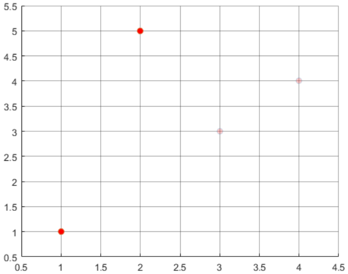


$$s_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1)$$

$$a_1 = y_1$$

Spline Lineal: un ejemplo

$$x = [1, 2, 3, 4] \quad y = [1, 5, 3, 4]$$



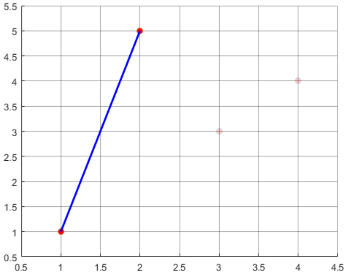
$$s_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1)$$

$$a_1 = y_1$$

$$b_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Spline Lineal: un ejemplo

$$x = [1, 2, 3, 4] \quad y = [1, 5, 3, 4]$$



$$s_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1)$$

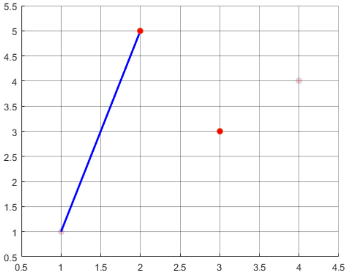
$$a_1 = y_1$$

$$b_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\boxed{s_1(x) = 1 + 4(x - 1)}$$

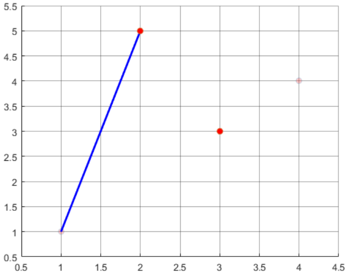
Spline Lineal: un ejemplo

$$x = [1, 2, 3, 4] \quad y = [1, 5, 3, 4]$$



Spline Lineal: un ejemplo

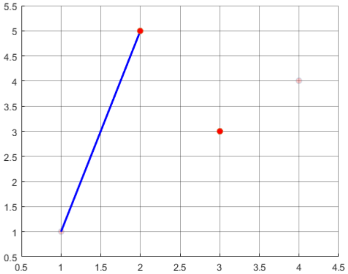
$$x = [1, 2, 3, 4] \quad y = [1, 5, 3, 4]$$



$$s_2(x) = a_2 + b_2(x - x_2)$$

Spline Lineal: un ejemplo

$$x = [1, 2, 3, 4] \quad y = [1, 5, 3, 4]$$



$$s_2(x) = a_2 + b_2(x - x_2)$$

$$a_2 = y_2$$

Spline Lineal: un ejemplo

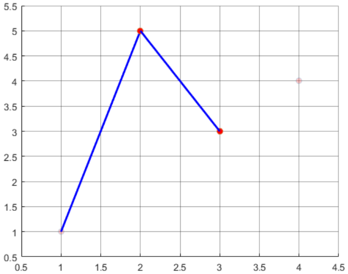
$$x = [1, 2, 3, 4] \quad y = [1, 5, 3, 4]$$
$$s_2(x) = a_2 + b_2(x - x_2)$$

$$a_2 = y_2$$

$$b_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$$

Spline Lineal: un ejemplo

$$x = [1, 2, 3, 4] \quad y = [1, 5, 3, 4]$$



$$s_2(x) = a_2 + b_2(x - x_2)$$

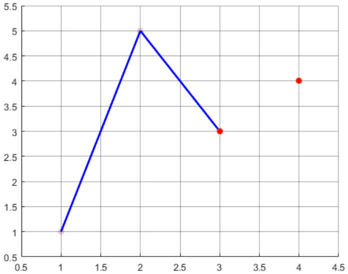
$$a_2 = y_2$$

$$b_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$$

$$\boxed{s_2(x) = 5 - 2(x - 2)}$$

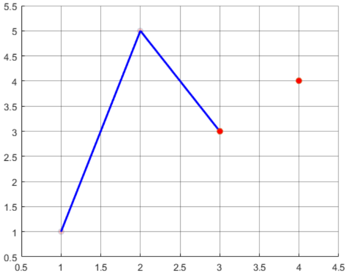
Spline Lineal: un ejemplo

$$x = [1, 2, 3, 4] \quad y = [1, 5, 3, 4]$$



Spline Lineal: un ejemplo

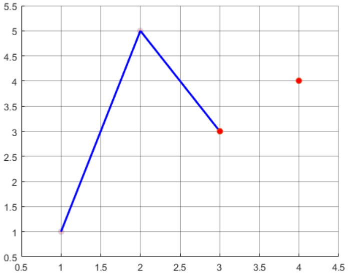
$$x = [1, 2, 3, 4] \quad y = [1, 5, 3, 4]$$



$$s_3(x) = a_3 + b_3(x - x_3)$$

Spline Lineal: un ejemplo

$$x = [1, 2, 3, 4] \quad y = [1, 5, 3, 4]$$



$$s_3(x) = a_3 + b_3(x - x_3)$$

$$a_3 = y_3$$

Spline Lineal: un ejemplo

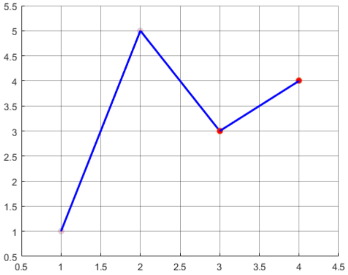
$$x = [1, 2, 3, 4] \quad y = [1, 5, 3, 4]$$
$$s_3(x) = a_3 + b_3(x - x_3)$$

$$a_3 = y_3$$

$$b_3 = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$$

Spline Lineal: un ejemplo

$$x = [1, 2, 3, 4] \quad y = [1, 5, 3, 4]$$



$$s_3(x) = a_3 + b_3(x - x_3)$$

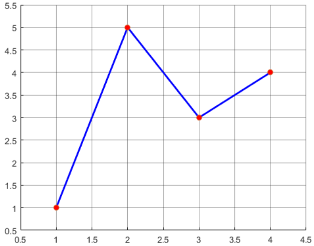
$$a_3 = y_3$$

$$b_3 = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$$

$$\boxed{s_3(x) = 3 + 1(x - 3)}$$

Spline Lineal: un ejemplo

$$x = [1, 2, 3, 4] \quad y = [1, 5, 3, 4]$$



$$S(x) = \begin{cases} 1 + 4(x-1), & \text{si } x \in [1,2) \\ 5 - 2(x-2), & \text{si } x \in [2,3) \\ 3 + (x-3), & \text{si } x \in [3,4] \end{cases}$$

Spline Lineal: resumiendo

- Tomamos los n puntos y dividimos en $n-1$ intervalos.
- Calculamos la recta que va en cada intervalo:

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i)$$

$$\boxed{a_i = y_i} \quad \boxed{b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}}$$

- Creamos la función partida $S(x)$.

Spline Lineal: resumiendo

- Tomamos los n puntos y dividimos en $n-1$ intervalos.
- Calculamos la recta que va en cada intervalo:

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i)$$

$$\boxed{a_i = y_i} \quad \boxed{b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}}$$

- Creamos la función partida $S(x)$.

Spline Lineal: resumiendo

- Tomamos los n puntos y dividimos en $n-1$ intervalos.
- Calculamos la recta que va en cada intervalo:

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i)$$

$$\boxed{a_i = y_i} \quad \boxed{b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}}$$

- Creamos la función partida $S(x)$.

Spline Lineal: resumiendo

- Tomamos los n puntos y dividimos en $n-1$ intervalos.
- Calculamos la recta que va en cada intervalo:

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i)$$

$$\boxed{a_i = y_i} \quad \boxed{b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}}$$

- Creamos la función partida $S(x)$.

Spline Lineal: resumiendo

- Tomamos los n puntos y dividimos en $n-1$ intervalos.
- Calculamos la recta que va en cada intervalo:

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i)$$

$$\boxed{a_i = y_i} \quad \boxed{b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}}$$

- Creamos la función partida $S(x)$.

Spline Cuadrático

Ahora propondremos ajustar funciones cuadráticas a los pares de puntos. Para esto agregaremos una condición:

La derivada en cada punto debe ser continua

Nuestros s_i tendrán la forma

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2$$

Es inmediato ver que $s_i(x_i) = a_i = y_i$.

Spline Cuadrático

Ahora propondremos ajustar funciones cuadráticas a los pares de puntos. Para esto agregaremos una condición:

La derivada en cada punto debe ser continua

Nuestros s_i tendrán la forma

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2$$

Es inmediato ver que $s_i(x_i) = a_i = y_i$.

Spline Cuadrático

Ahora propondremos ajustar funciones cuadráticas a los pares de puntos. Para esto agregaremos una condición:

La derivada en cada punto debe ser continua

Nuestros s_i tendrán la forma

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2$$

Es inmediato ver que $s_i(x_i) = a_i = y_i$.

Spline Cuadrático

Ahora propondremos ajustar funciones cuadráticas a los pares de puntos. Para esto agregaremos una condición:

La derivada en cada punto debe ser continua

Nuestros s_i tendrán la forma

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2$$

Es inmediato ver que $s_i(x_i) = a_i = y_i$.

Spline Cuadrático

Para asegurar la continuidad hasta la primer derivada tomemos s_i y s_{i+1}:

$$\begin{aligned}
s_i(x) &= y_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 \\
s_{i+1}(x) &= y_{i+1} + b_{i+1}(x - x_{i+1}) + c_{i+1}(x - x_{i+1})^2
\end{aligned}$$

Spline Cuadrático

Para asegurar la continuidad hasta la primer derivada tomemos s_i y s_{i+1}:

$$\begin{aligned} s_i(x) &= y_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 \\ s_{i+1}(x) &= y_{i+1} + b_{i+1}(x - x_{i+1}) + c_{i+1}(x - x_{i+1})^2 \end{aligned}$$

Tendremos que: $s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1})$ (continuidad)

$$y_i + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i(x_{i+1} - x_i)^2 = y_{i+1} + 0 + 0$$

Universidad Nacional de Quilmes

Spline Cuadrático

Tendremos que: $s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1})$ (continuidad)

$$y_i + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i(x_{i+1} - x_i)^2 = y_{i+1} + 0 + 0$$

Tendremos que $s_i'(x_{i+1}) = s_{i+1}'(x_{i+1})$ (derivada continua)

$$b_i + 2c_i \underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{h_i} = b_{i+1} + 0$$

Spline Cuadrático

Vamos a escribir las ecuaciones, supongamos que son 4 puntos:

$$
\begin{aligned}
y_i + b_1 h_1 + c_1 h_1^2 &= y_2 \\
b_1 + 2c_1 h_1 &= b_2 \\
y_2 + b_2 h_2 + c_2 h_2^2 &= y_3 \\
b_2 + 2c_2 h_2 &= b_3 \\
y_3 + b_3 h_3 + c_3 h_3^2 &= y_4
\end{aligned}
$$

Tenemos 6 incógnitas y 5 ecuaciones! $\rightarrow$ Pidamos $c_1 = 0$

Universidad Nacional de Quilmes

Spline Cuadrático

Vamos a escribir las ecuaciones, supongamos que son 4 puntos:

$$
\begin{aligned}
y_i + b_1 h_1 + c_1 h_1^2 &= y_2 \\
b_1 + 2c_1 h_1 &= b_2 \\
y_2 + b_2 h_2 + c_2 h_2^2 &= y_3 \\
b_2 + 2c_2 h_2 &= b_3 \\
y_3 + b_3 h_3 + c_3 h_3^2 &= y_4
\end{aligned}
$$

Tenemos 6 incógnitas y 5 ecuaciones! $\rightarrow$ Pidamos $c_1 = 0$

Spline Cuadrático

Vamos a escribir las ecuaciones, supongamos que son 4 puntos:

$$
\begin{aligned}
y_i + b_1 h_1 + c_1 h_1^2 &= y_2 \\
b_1 + 2c_1 h_1 &= b_2 \\
y_2 + b_2 h_2 + c_2 h_2^2 &= y_3 \\
b_2 + 2c_2 h_2 &= b_3 \\
y_3 + b_3 h_3 + c_3 h_3^2 &= y_4
\end{aligned}
$$

Tenemos 6 incógnitas
y 5 ecuaciones!

$\rightarrow$ Pidamos $c_1 = 0$

Spline Cuadrático

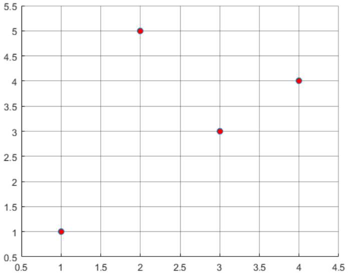
Vamos a escribir las ecuaciones, supongamos que son 4 puntos:

$$\begin{aligned}
y_i + b_1 h_1 + c_1 h_1^2 &= y_2 \\
b_1 + 2c_1 h_1 &= b_2 \\
y_2 + b_2 h_2 + c_2 h_2^2 &= y_3 \\
b_2 + 2c_2 h_2 &= b_3 \\
y_3 + b_3 h_3 + c_3 h_3^2 &= y_4
\end{aligned}$$

Tenemos 6 incógnitas y 5 ecuaciones! $\rightarrow$ Pidamos $c_1 = 0$

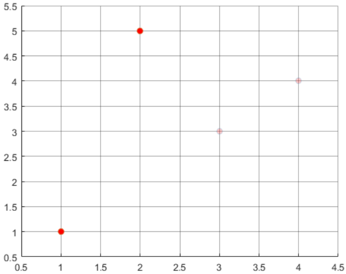
Spline Cuadrático: un ejemplo

$$x = [1, 2, 3, 4] \quad y = [1, 5, 3, 4]$$



Spline Cuadrático: un ejemplo

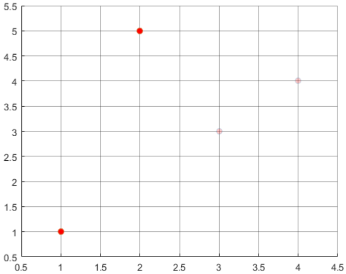
$$x = [1, 2, 3, 4] \quad y = [1, 5, 3, 4]$$



$$s_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2$$

Spline Cuadrático: un ejemplo

$$x = [1, 2, 3, 4] \quad y = [1, 5, 3, 4]$$

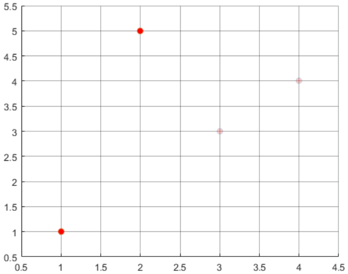


$$s_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2$$

$$a_1 = y_1 = 1$$

Spline Cuadrático: un ejemplo

$$x = [1, 2, 3, 4] \quad y = [1, 5, 3, 4]$$



$$s_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2$$

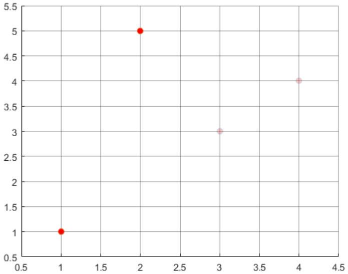
$$a_1 = y_1 = 1$$

$$c_1 = 0$$

$$y_1 + b_1 h = y_2$$

Spline Cuadrático: un ejemplo

$$x = [1, 2, 3, 4] \quad y = [1, 5, 3, 4]$$



$$s_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2$$

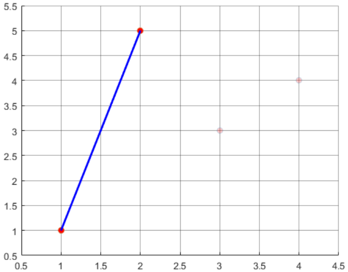
$$a_1 = y_1 = 1$$

$$c_1 = 0$$

$$b_1 = \frac{y_2 - y_1}{h}$$

Spline Cuadrático: un ejemplo

$$x = [1, 2, 3, 4] \quad y = [1, 5, 3, 4]$$



$$s_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2$$

$$a_1 = y_1 = 1$$

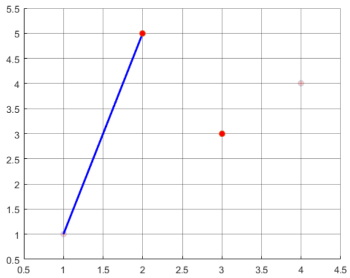
$$c_1 = 0$$

$$b_1 = \frac{y_2 - y_1}{h}$$

$$\boxed{s_1(x) = 1 + 4(x - 1)}$$

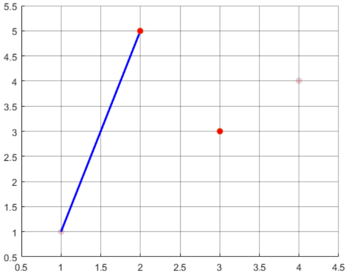
Spline Cuadrático: un ejemplo

$$x = [1, 2, 3, 4] \quad y = [1, 5, 3, 4]$$



Spline Cuadrático: un ejemplo

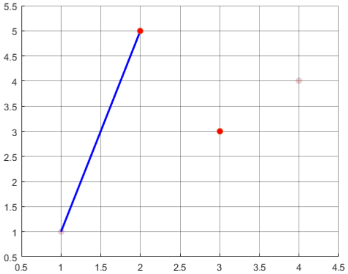
$$x = [1, 2, 3, 4] \quad y = [1, 5, 3, 4]$$



$$s_2(x) = a_2 + b_2(x - x_2) + c_2(x - x_2)^2$$

Spline Cuadrático: un ejemplo

$$x = [1, 2, 3, 4] \quad y = [1, 5, 3, 4]$$

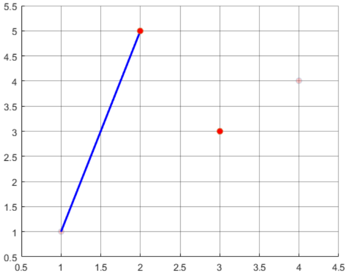


$$s_2(x) = a_2 + b_2(x - x_2) + c_2(x - x_2)^2$$

$$a_2 = y_2 = 5$$

Spline Cuadrático: un ejemplo

$$x = [1, 2, 3, 4] \quad y = [1, 5, 3, 4]$$



$$s_2(x) = a_2 + b_2(x - x_2) + c_2(x - x_2)^2$$

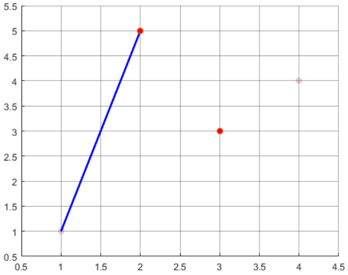
$$a_2 = y_2 = 5$$

$$b_2 = b_1 + 2c_1 h_1 = 4$$

$$c_2 = \frac{y_3 - y_2 - b_2 * h_2}{h_2^2}$$

Spline Cuadrático: un ejemplo

$$x = [1, 2, 3, 4] \quad y = [1, 5, 3, 4]$$



$$s_2(x) = a_2 + b_2(x - x_2) + c_2(x - x_2)^2$$

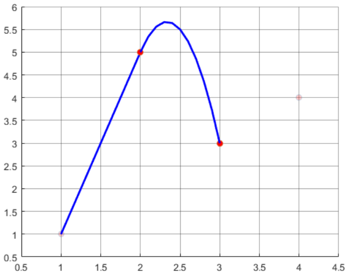
$$a_2 = y_2 = 5$$

$$b_2 = b_1 + 2c_1 h_1 = 4$$

$$c_2 = \frac{-2 - 4}{1} = -6$$

Spline Cuadrático: un ejemplo

$$x = [1, 2, 3, 4] \quad y = [1, 5, 3, 4]$$



$$s_2(x) = a_2 + b_2(x - x_2) + c_2(x - x_2)^2$$

$$a_2 = y_2 = 5$$

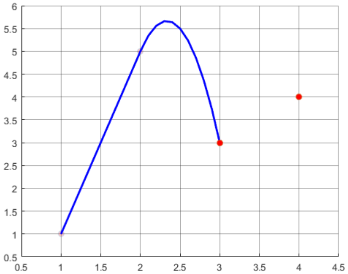
$$b_2 = b_1 + 2c_1h_1 = 4$$

$$c_2 = \frac{-2 - 4}{1} = -6$$

$$\boxed{s_2(x) = 5+4(x-2)-6(x-2)^2}$$

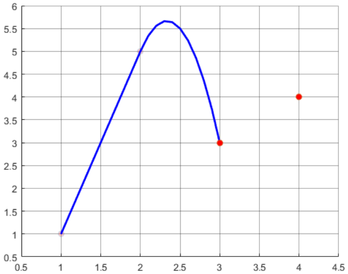
Spline Cuadrático: un ejemplo

$$x = [1, 2, 3, 4] \quad y = [1, 5, 3, 4]$$



Spline Cuadrático: un ejemplo

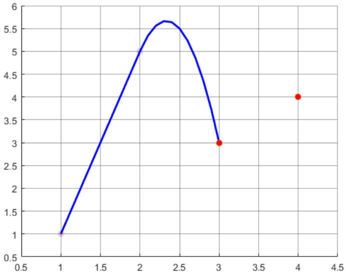
$$x = [1, 2, 3, 4] \quad y = [1, 5, 3, 4]$$



$$s_3(x) = a_3 + b_3(x - x_3) + c_3(x - x_3)^2$$

Spline Cuadrático: un ejemplo

$$x = [1, 2, 3, 4] \quad y = [1, 5, 3, 4]$$

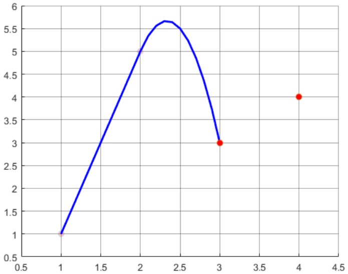


$$s_3(x) = a_3 + b_3(x - x_3) + c_3(x - x_3)^2$$

$$a_3 = y_3 = 3$$

Spline Cuadrático: un ejemplo

$$x = [1, 2, 3, 4] \quad y = [1, 5, 3, 4]$$



$$s_3(x) = a_3 + b_3(x - x_3) + c_3(x - x_3)^2$$

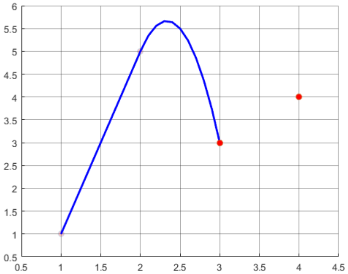
$$a_3 = y_3 = 3$$

$$b_3 = b_2 + 2c_2 h_2 = -8$$

$$c_3 = \frac{y_4 - y_3 - b_3 * h_3}{h_3^2}$$

Spline Cuadrático: un ejemplo

$$x = [1, 2, 3, 4] \quad y = [1, 5, 3, 4]$$



$$s_3(x) = a_3 + b_3(x - x_3) + c_3(x - x_3)^2$$

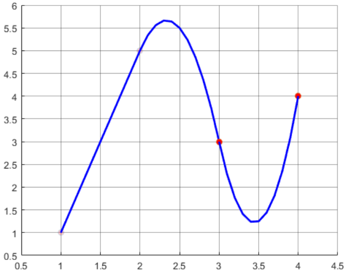
$$a_3 = y_3 = 3$$

$$b_3 = b_2 + 2c_2h_2 = -8$$

$$c_3 = \frac{1+8}{1} = 9$$

Spline Cuadrático: un ejemplo

$$x = [1, 2, 3, 4] \quad y = [1, 5, 3, 4]$$



$$s_3(x) = a_3 + b_3(x - x_3) + c_3(x - x_3)^2$$

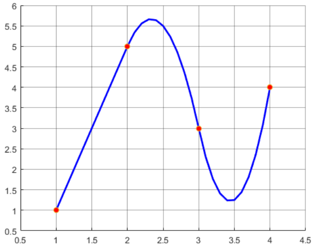
$$a_3 = y_3 = 3$$

$$b_3 = b_2 + 2c_2h_2 = -8$$

$$c_3 = \frac{1+8}{1} = 9$$

$$\boxed{s_3(x) = 3 - 8(x-3) + 9(x-3)^2}$$

Spline Cuadrático: un ejemplo



$$x = [1, 2, 3, 4] \quad y = [1, 5, 3, 4]$$

$$S(x) = \begin{cases} 1 + 4(x-1), & \text{si } x \in [1,2) \\ 5 + 4(x-2) - 6(x-2)^2, & \text{si } x \in [2,3) \\ 3 - 8(x-3) + 9(x-3)^2, & \text{si } x \in [3,4] \end{cases}$$

Spline Cuadrático: resumiendo

- Tomamos los n puntos y dividimos en $n-1$ intervalos.
- Calculamos la parabola que va en cada intervalo:

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2$$

$$\boxed{a_i = y_i} \quad \boxed{b_i = b_{i-1} + 2c_{i-1}h_{i-1}}$$

$$\boxed{c_i = \frac{y_{i+1} - y_i - b_i h_i}{h_i^2}}$$

- Creamos la función partida $S(x)$.

Spline Cuadrático: resumiendo

- Tomamos los n puntos y dividimos en $n-1$ intervalos.
- Calculamos la parabola que va en cada intervalo:

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2$$

$$\boxed{a_i = y_i} \quad \boxed{b_i = b_{i-1} + 2c_{i-1}h_{i-1}}$$

$$\boxed{c_i = \frac{y_{i+1} - y_i - b_i h_i}{h_i^2}}$$

- Creamos la función partida $S(x)$.

Spline Cuadrático: resumiendo

- Tomamos los n puntos y dividimos en $n-1$ intervalos.
- Calculamos la parabola que va en cada intervalo:

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2$$

$$\boxed{a_i = y_i} \quad \boxed{b_i = b_{i-1} + 2c_{i-1}h_{i-1}}$$

$$\boxed{c_i = \frac{y_{i+1} - y_i - b_i h_i}{h_i^2}}$$

- Creamos la función partida $S(x)$.

Spline Cuadrático: resumiendo

- Tomamos los n puntos y dividimos en $n-1$ intervalos.
- Calculamos la parabola que va en cada intervalo:

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2$$

$$\boxed{a_i = y_i} \quad \boxed{b_i = b_{i-1} + 2c_{i-1}h_{i-1}}$$

$$\boxed{c_i = \frac{y_{i+1} - y_i - b_i h_i}{h_i^2}}$$

- Creamos la función partida $S(x)$.

Spline Cuadrático: resumiendo

- Tomamos los n puntos y dividimos en $n-1$ intervalos.
- Calculamos la parabola que va en cada intervalo:

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2$$

$$\boxed{a_i = y_i} \quad \boxed{b_i = b_{i-1} + 2c_{i-1}h_{i-1}}$$

$$\boxed{c_i = \frac{y_{i+1} - y_i - b_i h_i}{h_i^2}}$$

- Creamos la función partida $S(x)$.