Métodos Numéricos - Clase 2

Ulises Bussi- Javier Portillo

1° cuatrimestre 2020

Antes de empezar

Definición

Un método numérico es un procedimiento que permite obtener, **de forma aproximada**, solución a un problema, por medio de la aplicación de algoritmos.

Bracketing Methods.

Métodos para encontrar raices de funciones de forma numérica.

brackets $\rightarrow$ [ ]

" Encuentra" raices en un intervalo cerrado definido.

Bracketing Methods.

Métodos para encontrar raices de funciones de forma numérica.

$$\boxed{\text{brackets} \rightarrow [\ ]}$$

"Encuentra" raices en un intervalo cerrado definido.

Bracketing Methods.

Consideraciones:

- Encuentran aproximadamente el valor de la raiz.
- Requieren definir el intervalo.
- Requieren que haya solo una raiz en el intervalo.

Método de la bisección

Basado en el teorema de Bolsano:

Teorema

Dada $f(x)$ una función continua en el cerrado $[a, b]$ Si $f(a).f(b) < 0 \rightarrow c \in [a, b] \,/\, f(c) = 0$

1. Se propone $\hat{c} = \frac{a+b}{2}$ como candidato a raiz.
2. Se evalúa $f(\hat{c})$ si $f(\hat{c}).f(a) > 0 \rightarrow a = \hat{c}$ (idem b).
3. Se repite hasta llegar a una tolerancia aceptable.

Método de la bisección

Error relativo en la iteración i: $e_i = \frac{|\hat{c}_i - \hat{c}_{i-1}|}{\hat{c}_i} \rightarrow \boxed{e_i = \frac{b_i - a_i}{b_i + a_i}}$

Consideraciones:

- El intervalo de busqueda se reduce a la mitad en cada iteración.
- El error relativo también!
- Podemos calcular el error en cualquier paso i a *priori*.
- El error absoluto en un paso i será: $E_i = \frac{b-a}{2^i}$

Método de la bisección

Error relativo en la iteración i: $e_i = \frac{|\hat{c}_i - \hat{c}_{i-1}|}{\hat{c}_i} \rightarrow \boxed{e_i = \frac{b_i - a_i}{b_i + a_i}}$

Consideraciones:

- El intervalo de busqueda se reduce a la mitad en cada iteración.
- El error relativo también!
- Podemos calcular el error en cualquier paso i a *priori*.
- El error absoluto en un paso i será: $E_i = \frac{b-a}{2^i}$

Método de la bisección

Error relativo en la iteración i: $e_i = \frac{|\hat{c}_i - \hat{c}_{i-1}|}{\hat{c}_i} \rightarrow \boxed{e_i = \frac{b_i - a_i}{b_i + a_i}}$

Consideraciones:

- El intervalo de busqueda se reduce a la mitad en cada iteración.
- El error relativo también!
- Podemos calcular el error en cualquier paso i a *priori*.
- El error absoluto en un paso i será: $E_i = \frac{b-a}{2^i}$

Método de la bisección

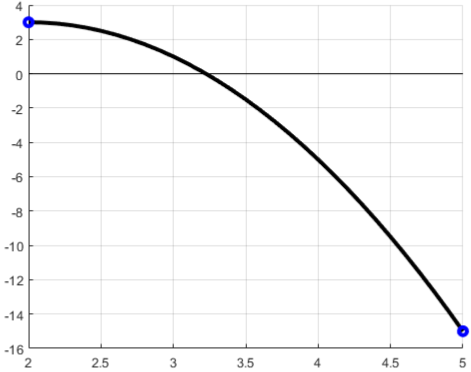
Error relativo en la iteración i: $e_i = \frac{|\hat{c}_i - \hat{c}_{i-1}|}{\hat{c}_i} \rightarrow \boxed{e_i = \dfrac{b_i - a_i}{b_i + a_i}}$

Consideraciones:

- El intervalo de busqueda se reduce a la mitad en cada iteración.
- El error relativo también!
- Podemos calcular el error en cualquier paso i a *priori*.
- El error absoluto en un paso i será: $E_i = \frac{b-a}{2^i}$

Bisección: un ejemplo

Tomemos $f(x) = -2x^2 + 8x - 5,\ a = 2,\ b = 5$

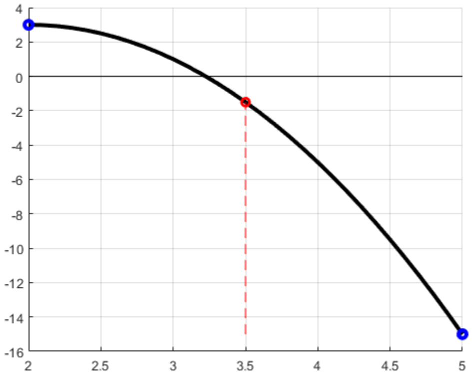


$$f(2) = 3\,,\ f(5) = -15$$

$$f(2).f(5) = -45$$

Bisección: un ejemplo

Tomemos $f(x) = -2x^2 + 8x - 5$, $a = 2$, $b = 5$



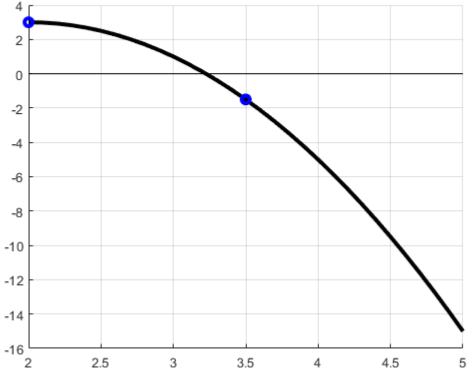
$$c_1 = \frac{2+5}{2} = 3{,}5$$

$$f(c_1) = -1{,}5$$

$$b = c_1$$

Bisección: un ejemplo

Tomemos $f(x) = -2x^2 + 8x - 5,\ a = 2,\ b = 5$

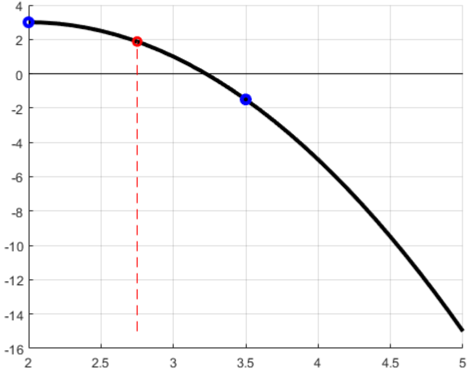


$$f(2) = 3\,,\ f(3{,}5) = -1{,}5$$

$$f(2).f(1{,}5) = -4{,}5$$

Bisección: un ejemplo

Tomemos $f(x) = -2x^2 + 8x - 5,\ a = 2,\ b = 5$



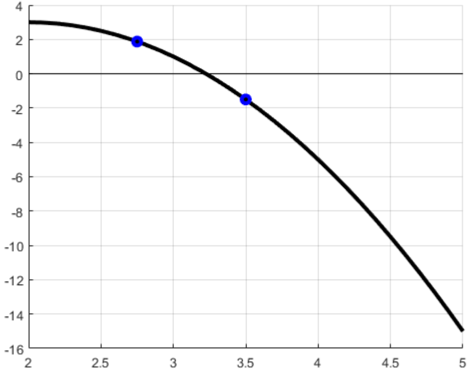
$$c_2 = \frac{2 + 3,5}{2} = 2,75$$

$$f(c_2) = 1,875$$

$$a = c_2$$

Bisección: un ejemplo

Tomemos $f(x) = -2x^2 + 8x - 5,\ a = 2,\ b = 5$

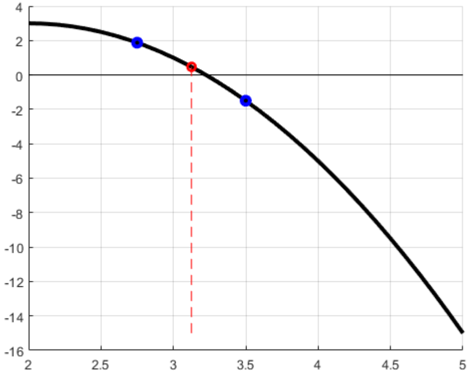


$$f(2{,}75) = 1{,}875\,,\ f(3{,}5)$$

$$f(2).f(1{,}5) = -2{,}81$$

Bisección: un ejemplo

Tomemos $f(x) = -2x^2 + 8x - 5,\ a = 2,\ b = 5$



$$c_3 = \frac{2{,}75 + 3{,}5}{2} = 3{,}125$$

$$f(c_3) = 0{,}46$$

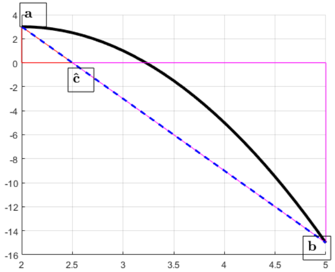
$$a = c_3$$

Método de la Falsa Posición

Basado en el teorema de Bolsano.

1. Se propone $\hat{c}$ uniendo $f(a)$ y $f(b)$ con una recta y encontrando la raiz de la recta.
2. Se evalúa $f(\hat{c})$ si $f(\hat{c}).f(a) > 0 \rightarrow a = \hat{c}$ (idem b).
3. Se repite hasta llegar a una tolerancia aceptable.

Método de la Falsa Posición



Se forman dos triangulos semejantes!

$$\frac{f(a)}{c-a} = \frac{f(b)}{c-b}$$

$$f(a)(c-b) = f(b)(c-a)$$

$$c[f(a)-f(b)] = f(a)b - f(b)a$$

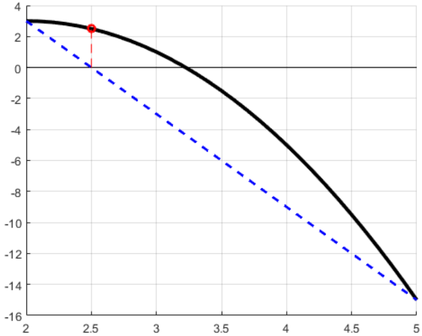
$$c = \frac{f(a)b-f(b)a}{f(a)-f(b)}$$

$$c = \frac{f(a)b-f(b)a+f(a)a-f(a)a}{f(a)-f(b)}$$

$$\boxed{c = a + f(a)\frac{b-a}{f(a)-f(b)}}$$

Falsa Posición: un ejemplo

Tomemos $f(x) = -2x^2 + 8x - 5$, $a = 2$, $b = 5$



$$f(2) = 3\,,\ f(5) = -15$$

$$f(2).f(5) = -45$$

$$c_1 = 2{+}3\frac{5-2}{3-(-15)}$$

$$c_1 = 2{,}5$$

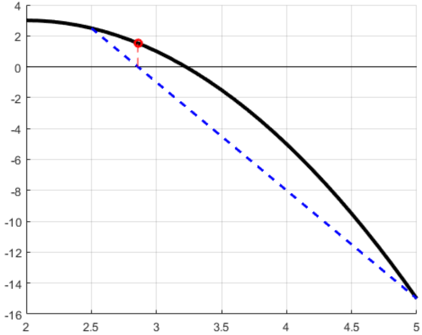
$$f(c_1) = 2{,}5$$

$$a = c_1$$

Todos los numeros truncados a dos decimales para que se vean las cuentas!

Falsa Posición: un ejemplo

Tomemos $f(x) = -2x^2 + 8x - 5$, $a = 2$, $b = 5$



$$f(2{,}5) = 2{,}5\ ,\ f(5) = -15$$

$$c_2 = 2{,}5 + 2{,}5\frac{5 - 2{,}5}{2{,}5 - (-15)}$$

$$c_2 = 2{,}86$$

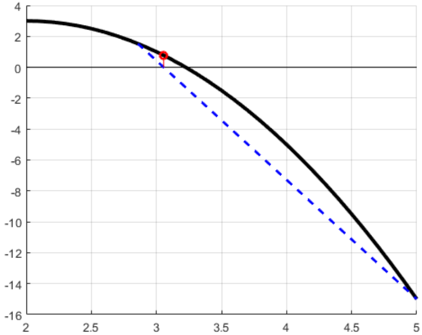
$$f(c_2) = 1{,}53$$

$$a = c_2$$

Todos los numeros truncados a dos decimales para que se vean las cuentas!

Falsa Posición: un ejemplo

Tomemos $f(x) = -2x^2 + 8x - 5,\ a = 2,\ b = 5$



$$\begin{aligned} f(2{,}85) &= 1{,}53 \\ f(5) &= -15 \\ c_3 &= 2{,}85+ \\ & +1{,}53\frac{5-2{,}85}{1{,}53-(-15)} \end{aligned}$$

$$c_3 = 3{,}05$$

$$f(c_3) = 0{,}77$$

$$a = c_3$$

Todos los numeros truncados a dos decimales para que se vean las cuentas!

Falsa Posición

Error relativo en la iteración i: $e_i = \frac{|\hat{c}_i - \hat{c}_{i-1}|}{\hat{c}_i}$

Consideraciones:

- El intervalo de busqueda **NO** se reduce a la mitad en cada iteración.
- La convergencia de este método suele ser más rápida aunque el intervalo de busqueda no reduce acorde con esto.
- Con determinadas funciones la convergencia es lenta.

Falsa Posición

Error relativo en la iteración i: $e_i = \frac{|\hat{c}_i - \hat{c}_{i-1}|}{\hat{c}_i}$

Consideraciones:

- El intervalo de busqueda **NO** se reduce a la mitad en cada iteración.
- La convergencia de este método suele ser más rápida aunque el intervalo de busqueda no reduce acorde con esto.
- Con determinadas funciones la convergencia es lenta.

Falsa Posición

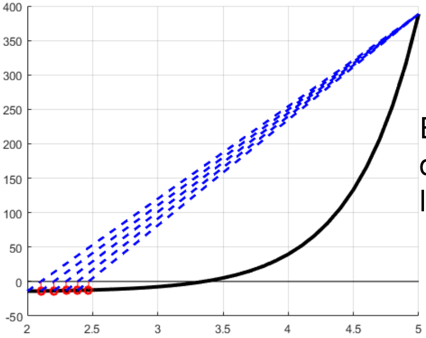
Error relativo en la iteración i: $e_i = \frac{|\hat{c}_i - \hat{c}_{i-1}|}{\hat{c}_i}$

Consideraciones:

- El intervalo de busqueda **NO** se reduce a la mitad en cada iteración.
- La convergencia de este método suele ser más rápida aunque el intervalo de busqueda no reduce acorde con esto.
- Con determinadas funciones la convergencia es lenta.

Falsa Posición

$$f(x) = e^{(x-2)^2} - 15$$



Este es un ejemplo de donde pude ocurrir la mala convergencia.

Criterios de parada

¿Cuándo nos detenemos?

- El error absoluto llega a un valor aceptable (el intervalo en el cual busco la raiz se achicó x. ej. a $1e-4$).
- El error relativo del paso deja de ser significante (x. ej. el error relativo disminuye menos de $0{,}1\,\%$ en cada iteración).
- El numero de iteraciones supera un número máximo (x. ej. 1000 iteraciones).

Criterios de parada

¿Cuándo nos detenemos?

- El error absoluto llega a un valor aceptable (el intervalo en el cual busco la raiz se achicó x. ej. a $1e-4$).
- El error relativo del paso deja de ser significante (x. ej. el error relativo disminuye menos de $0{,}1\,\%$ en cada iteración).
- El numero de iteraciones supera un número máximo (x. ej. 1000 iteraciones).

Criterios de parada

¿Cuándo nos detenemos?

- El error absoluto llega a un valor aceptable (el intervalo en el cual busco la raiz se achicó x. ej. a $1e-4$).
- El error relativo del paso deja de ser significante (x. ej. el error relativo disminuye menos de $0{,}1\,\%$ en cada iteración).
- El numero de iteraciones supera un número máximo (x. ej. 1000 iteraciones).

Criterios de parada

¿Cuándo nos detenemos?

- El error absoluto llega a un valor aceptable (el intervalo en el cual busco la raiz se achicó x. ej. a $1e-4$).
- El error relativo del paso deja de ser significante (x. ej. el error relativo disminuye menos de $0{,}1\,\%$ en cada iteración).
- El numero de iteraciones supera un número máximo (x. ej. 1000 iteraciones).