

Métodos Numéricos - Clase 3

Ulises Bussi- Javier Portillo

1° cuatrimestre 2020

Sistemas de ecuaciones Lineales (SELs).

Resolver problemas de la forma

$$Ax = b$$

con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, b y $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$

¿Por qué? La mayoría de los problemas de ingeniería pueden llevarse a esta forma.

Sistemas de ecuaciones Lineales (SELs).

Resolver problemas de la forma

$$Ax = b$$

con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, b y $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$

¿Por qué? La mayoría de los problemas de ingeniería pueden llevarse a esta forma.

SEs

Muchas veces $x = A^{-1}b$ no es viable (costoso, matriz casi singular, etc).

Existen 2 tipos de algoritmos:

- Métodos Directos.
- Métodos Indirectos.

SELS

Muchas veces $x = A^{-1}b$ no es viable (costoso, matriz casi singular, etc).

Existen 2 tipos de algoritmos:

- Métodos Directos.
- Métodos Indirectos.

Matriz Triangular

Si nuestro problema tiene una matriz A de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Podremos aplicar el algoritmo de remonte

Algoritmo de remonte

Cómo el sistema tiene la forma:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Podemos comenzar mirando desde la ultima fila hacia arriba:

$$a_{n,n}x_n = b_n \rightarrow \boxed{x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}}$$

Algoritmo de remonte

Luego miramos la fila $n - 1$

$$a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \rightarrow x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

Si seguimos con la fila $n - 2$

$$a_{n-2,n-2}x_{n-2} + a_{n-2,n-1}x_{n-1} + a_{n-2,n}x_n = b_{n-2} \rightarrow$$

$$x_{n-2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2,n-1}x_{n-1} - a_{n-2,n}x_n}{a_{n-2,n-2}}$$

Algoritmo de remonte

Para cualquier fila j podremos hallar el valor de x cómo:
for $j = [n, n - 1, n - 2, \dots, 1]$

$$x_j = \frac{b_j - \sum_{i=j+1}^n a_{j,i} x_i}{a_{j,j}}$$

Existe una versión similar cuando la matriz A es triangular inferior llamada **Algoritmo de descenso**.

Ejemplo: Algoritmo de Remonte

Supongamos que tenemos el problema:

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \bar{x} = \begin{bmatrix} 19 \\ 17 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Podemos calcular

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{6}{2} \\ x_2 &= \frac{17 - 5 \times 3}{2} \\ x_1 &= \frac{19 - 7 \times 1 - 2 \times 3}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow x_3 &= 3 \\ \rightarrow x_2 &= 1 \\ \rightarrow x_1 &= 2 \end{aligned}$$

con lo que la solución será:

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Algoritmo de Remonte

Supongamos que tenemos el problema:

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \bar{x} = \begin{bmatrix} 19 \\ 17 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Podemos calcular

$$x_3 = \frac{6}{2}$$

→

$$x_3 = 3$$

$$x_2 = \frac{17 - 5 \times 3}{2}$$

→

$$x_2 = 1$$

$$x_1 = \frac{19 - 7 \times 1 - 2 \times 3}{3}$$

→

$$x_1 = 2$$

con lo que la solución
será:

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Algoritmo de Remonte

Supongamos que tenemos el problema:

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \bar{x} = \begin{bmatrix} 19 \\ 17 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Podemos calcular

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{6}{2} \\ x_2 &= \frac{17 - 5 \times 3}{2} \\ x_1 &= \frac{19 - 7 \times 1 - 2 \times 3}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow x_3 &= 3 \\ \rightarrow x_2 &= 1 \\ \rightarrow x_1 &= 2 \end{aligned}$$

con lo que la solución será:

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Algoritmo de Remonte

Supongamos que tenemos el problema:

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \bar{x} = \begin{bmatrix} 19 \\ 17 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Podemos calcular

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{6}{2} & \rightarrow & \boxed{x_3 = 3} \\ x_2 &= \frac{17 - 5 \times 3}{2} & \rightarrow & \boxed{x_2 = 1} \\ x_1 &= \frac{19 - 7 \times 1 - 2 \times 3}{3} & \rightarrow & \boxed{x_1 = 2} \end{aligned}$$

con lo que la solución
será:

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Algoritmo de Remonte

Supongamos que tenemos el problema:

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \bar{x} = \begin{bmatrix} 19 \\ 17 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Podemos calcular

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{6}{2} \\ x_2 &= \frac{17 - 5 \times \textcolor{red}{3}}{2} \\ x_1 &= \frac{19 - 7 \times \textcolor{red}{1} - 2 \times \textcolor{red}{3}}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} \rightarrow x_3 = 3 \\ \rightarrow x_2 = 1 \\ \rightarrow x_1 = 2 \end{array}$$

con lo que la solución
será:

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Eliminación Gaussiana

Proponemos $Ax = b \rightarrow A'x = b'$ donde A' es triangular, podemos resolver el sistema!.

Gauss-Jordan en

$$\tilde{A} = [A \mid B]$$

Luego Remonte o Descenso

Eliminación Gaussiana

Proponemos $Ax = b \rightarrow A'x = b'$ donde A' es triangular, podemos resolver el sistema!.

Gauss-Jordan en

$$\tilde{A} = [A \mid B]$$

Luego Remonte o Descenso

Eliminación Gaussiana

Proponemos $Ax = b \rightarrow A'x = b'$ donde A' es triangular, podemos resolver el sistema!.

Gauss-Jordan en

$$\tilde{A} = [A \mid B]$$

Luego Remonte o Descenso

Eliminación Gaussiana: un ejemplo

Sea el sistema:

$$\begin{bmatrix} 3 & -0,1 & -0,2 \\ 0,1 & 7 & -0,3 \\ 0,3 & -0,2 & 10 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 7,85 \\ -19,3 \\ 71,4 \end{bmatrix}$$

construimos \tilde{A} :

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -0,1 & -0,2 & 7,85 \\ 0,1 & 7 & -0,3 & -19,3 \\ 0,3 & -0,2 & 10 & 71,4 \end{array} \right]$$

Eliminación Gaussiana: un ejemplo

$$\begin{bmatrix} 3 & -0,1 & -0,2 & 7,85 \\ 0,1 & 7 & -0,3 & -19,3 \\ 0,3 & -0,2 & 10 & 71,4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_2 - \frac{0,1}{3} F_1 \\ F_3 - \frac{0,3}{3} F_1 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 3 & -0,1 & -0,2 & 7,85 \\ 0 & 7,0033 & -0,2933 & -19,5617 \\ 0 & -0,19 & 10,02 & 70,615 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 - \frac{-0,19}{7,0033} F_2} \begin{bmatrix} 3 & -0,1 & -0,2 & 7,85 \\ 0 & 7,0033 & -0,2933 & -19,5617 \\ 0 & 0 & 10,012 & 70,0843 \end{bmatrix}$$

Remonte!

Eliminación Gaussiana: un ejemplo

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -0,1 & -0,2 & 7,85 \\ 0,1 & 7 & -0,3 & -19,3 \\ 0,3 & -0,2 & 10 & 71,4 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} F_2 - \frac{0,1}{3} F_1 \\ F_3 - \frac{0,3}{3} F_1 \end{array}} \\
 & \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -0,1 & -0,2 & 7,85 \\ 0 & 7,0033 & -0,2933 & -19,5617 \\ 0 & -0,19 & 10,02 & 70,615 \end{array} \right] \xrightarrow{F_3 - \frac{-0,19}{7,0033} F_2} \\
 & \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -0,1 & -0,2 & 7,85 \\ 0 & 7,0033 & -0,2933 & -19,5617 \\ 0 & 0 & 10,012 & 70,0843 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Remonte!

Eliminación Gaussiana: un ejemplo

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -0,1 & -0,2 & 7,85 \\ 0,1 & 7 & -0,3 & -19,3 \\ 0,3 & -0,2 & 10 & 71,4 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} F_2 - \frac{0,1}{3} F_1 \\ F_3 - \frac{0,3}{3} F_1 \end{array}} \\
 & \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -0,1 & -0,2 & 7,85 \\ 0 & 7,0033 & -0,2933 & -19,5617 \\ 0 & -0,19 & 10,02 & 70,615 \end{array} \right] \xrightarrow{F_3 - \frac{-0,19}{7,0033} F_2} \\
 & \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -0,1 & -0,2 & 7,85 \\ 0 & 7,0033 & -0,2933 & -19,5617 \\ 0 & 0 & 10,012 & 70,0843 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Remonte!

Eliminación Gaussiana: un ejemplo

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -0,1 & -0,2 & 7,85 \\ 0,1 & 7 & -0,3 & -19,3 \\ 0,3 & -0,2 & 10 & 71,4 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} F_2 - \frac{0,1}{3} F_1 \\ F_3 - \frac{0,3}{3} F_1 \end{array}} \\
 & \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -0,1 & -0,2 & 7,85 \\ 0 & 7,0033 & -0,2933 & -19,5617 \\ 0 & -0,19 & 10,02 & 70,615 \end{array} \right] \xrightarrow{F_3 - \frac{-0,19}{7,0033} F_2} \\
 & \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -0,1 & -0,2 & 7,85 \\ 0 & 7,0033 & -0,2933 & -19,5617 \\ 0 & 0 & 10,012 & 70,0843 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Remonte!

Eliminación Gaussiana: un ejemplo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -0,1 & -0,2 & 7,85 \\ 0,1 & 7 & -0,3 & -19,3 \\ 0,3 & -0,2 & 10 & 71,4 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{70,0843}{10,012} & \rightarrow & \boxed{x_3 = 7,00003} \\ x_2 &= \frac{-19,5617 - 0,2933 \times 7,00003}{7,0033} & \rightarrow & \boxed{x_2 = -2,5} \\ x_1 &= \frac{7,85 - 0,1 \times (-2,5) - (-0,2) \times 7,00003}{3} & \rightarrow & \boxed{x_1 = 3} \end{aligned}$$

Eliminación Gaussiana: Consideraciones

Consideraciones

- El proceso realizado es el mismo que cuando se resuelve "a mano".
- El algoritmo es de orden $O(n) = \frac{2}{3}n^3$
- Se rompe si en la operación el elemento principal es 0!

Eliminación Gaussiana: Consideraciones

Consideraciones

- El proceso realizado es el mismo que cuando se resuelve "a mano".
- El algoritmo es de orden $O(n) = \frac{2}{3}n^3$
- Se rompe si en la operación el elemento principal es 0!

Eliminación Gaussiana: Consideraciones

Consideraciones

- El proceso realizado es el mismo que cuando se resuelve "a mano".
- El algoritmo es de orden $O(n) = \frac{2}{3}n^3$
- Se rompe si en la operación el elemento principal es 0!

Pivoteo Parcial

- Puede solucionar el problema del 0 en el elemento principal.
- Mejora la estabilidad numérica.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} F_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} \\ \text{Elemento Principal} \\ F_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} \\ \text{Elemento Principal} \end{array}
 \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array}
 \end{array}
 \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right]
 \rightarrow
 \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a_{23} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & a_{33} & b'_3 \end{array} \right]$$

Pivoteo Parcial

- Puede solucionar el problema del 0 en el elemento principal.
- Mejora la estabilidad numérica.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & | & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & | & b_3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{Elemento Principal}]{\begin{array}{c} F_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} \\ F_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} \end{array}} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & | & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a_{23} & | & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & a_{33} & | & b'_3 \end{bmatrix}$$

Pivoteo Parcial

Tomamos la columna principal y se intercambian filas para quedarnos con el elemento principal de mayor valor.

Supongamos que $a_{21} > a_{11} > a_{31}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \rightleftharpoons F_2}$$

Esto se repetirá siempre antes de cada operación principal.
con los elementos restantes:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & b'_3 \end{bmatrix}$$

Pivoteo Parcial

Tomamos la columna principal y se intercambian filas para quedarnos con el elemento principal de mayor valor.

Supongamos que $a_{21} > a_{11} > a_{31}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \rightleftharpoons F_2}$$

Esto se repetirá siempre antes de cada operación principal. con los elementos restantes:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & b'_3 \end{bmatrix}$$

Consideraciones

Consideraciones

- Soluciona 0 en elemento principal.
- Aumenta el numero de operaciones.
- No afecta el resultado.
- Hay que guardar los cambios de filas para recuperar el resultado original.

Consideraciones

Consideraciones

- Soluciona 0 en elemento principal.
- Aumenta el numero de operaciones.
- No afecta el resultado.
- Hay que guardar los cambios de filas para recuperar el resultado original.

Descomposición LU

¿Debemos volver a aplicar el algoritmo si cambia mi vector b ?

Existen otros métodos.

Factorización LU

Descomposición LU

¿Debemos volver a aplicar el algoritmo si cambia mi vector b ?

Existen otros métodos.

Factorización LU

Descomposición LU

$A = LU$ donde L es triangular inferior y U es triangular superior.
Convertimos el problema:

$$Ax = b \rightarrow LUx = b$$

Si aplicamos el cambio de variables $y = Ux$ entonces tenemos 2 problemas

$$\underbrace{Ly = b}_{\text{Sustitución hacia adelante}} \quad (1)$$

$$\underbrace{Ux = y}_{\text{Sustitución hacia atrás}} \quad (2)$$

¿Cómo realizamos este cambio?

Descomposición LU

$A = LU$ donde L es triangular inferior y U es triangular superior.
Convertimos el problema:

$$Ax = b \rightarrow LUx = b$$

Si aplicamos el cambio de variables $y = Ux$ entonces tenemos 2 problemas

$$\underbrace{Ly = b}_{\text{Sustitución hacia adelante}} \quad (1)$$

$$\underbrace{Ux = y}_{\text{Sustitución hacia atrás}} \quad (2)$$

¿Cómo realizamos este cambio?

Descomposición LU

$A = LU$ donde L es triangular inferior y U es triangular superior.
Convertimos el problema:

$$Ax = b \rightarrow LUx = b$$

Si aplicamos el cambio de variables $y = Ux$ entonces tenemos 2 problemas

$$\underbrace{Ly = b}_{\text{Sustitución hacia adelante}} \quad (1)$$

$$\underbrace{Ux = y}_{\text{Sustitución hacia atrás}} \quad (2)$$

¿Cómo realizamos este cambio?

Descomposición LU

$A = LU$ donde L es triangular inferior y U es triangular superior.
Convertimos el problema:

$$Ax = b \rightarrow LUx = b$$

Si aplicamos el cambio de variables $y = Ux$ entonces tenemos 2 problemas

$$\underbrace{Ly = b}_{\text{Sustitución hacia adelante}} \quad (1)$$

$$\underbrace{Ux = y}_{\text{Sustitución hacia atrás}} \quad (2)$$

¿Cómo realizamos este cambio?

Matrices Elementales

Cada operación de Gauss-Jordan puede escribirse como una matriz elemental.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} F_1 \\ F_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} F_1 \end{matrix}} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} & a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{13} \\ 0 & a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{12} & a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{13} \end{bmatrix}$$

Puede expresarse cómo $E_1 A$, con

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 \\ -\frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrices Elementales

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 \\ -\frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} & a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{13} \\ 0 & a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{12} & a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{13} \end{bmatrix}$$

Matrices Elementales

- Son Matrices triangular inferior.
- el producto de 2 matrices triangular inferior da otra matriz triangular inferior.
- el producto de 2 matrices elementales no es necesariamente otra matriz elemental.

La inversa de una matriz elemental se puede calcular cambiando los signos de todos los elementos fuera de la diagonal.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f_{21} & 1 & 0 \\ f_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -f_{21} & 1 & 0 \\ -f_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Descomposición LU

Aplicar Gauss-Jordan, equivale a transformar la matriz A en una matriz del tipo U aplicando operaciones E_i :

$$E_i * E_{i-1} * \dots * E_2 * E_1 A = U$$

Si multiplicamos por la inversa de E_i :

$$\underbrace{E_i^{-1} * E_i}_{I} * E_{i-1} * \dots * E_2 * E_1 A = E_i^{-1} * U$$

Si realizamos esto para todas las matrices E :

$$A = \underbrace{E_1^{-1} * E_2^{-1} * \dots * E_i^{-1}}_L * U$$

$$A = L * U$$

Descomposición LU

En el caso de Gauss Jordan las matrices e tendrán la forma:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ f_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ f_{31} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ f_{n1} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & f_{n2} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \dots$$

Queda a cargo del estudiante Probar para matrices de 4×4 que

$$E_1 * E_2 * E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ f_{21} & 1 & 0 & 0 \\ f_{31} & f_{32} & 1 & 0 \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & 1 \end{bmatrix}$$

Descomposición LU: un ejemplo

Supongamos que tenemos el problema:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Descomposición LU: un ejemplo

Supongamos que tenemos el problema:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Descomposición LU: un ejemplo

Supongamos que tenemos el problema:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 - \frac{1}{2}F_1 \\ F_3 - \frac{3}{2}F_1}]{\phantom{F_2 - \frac{1}{2}F_1}} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

Descomposición LU: un ejemplo

Supongamos que tenemos el problema:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 - \frac{1}{2}F_1 \\ F_3 - \frac{3}{2}F_1}]{\phantom{F_2 - \frac{1}{2}F_1}} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

$$E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Descomposición LU: un ejemplo

Supongamos que tenemos el problema:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{F_3 - \frac{3}{2}F_1}]{\substack{F_2 - \frac{1}{2}F_1}} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{9}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 - 5F_2} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$$E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Descomposición LU: un ejemplo

Supongamos que tenemos el problema:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{F_3 - \frac{3}{2}F_1}]{\substack{F_2 - \frac{1}{2}F_1}} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{9}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 - 5F_2} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$$E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Descomposición LU: un ejemplo

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$$L = E_1^{-1} * E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 5 & 1 \end{bmatrix}}_L$$

Veamos que $L * U = A$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Descomposición LU: un ejemplo

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$$L = E_1^{-1} * E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 5 & 1 \end{bmatrix}}_L$$

Veamos que $L * U = A$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Descomposición LU: un ejemplo

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$$L = E_1^{-1} * E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 5 & 1 \end{bmatrix}}_L$$

Veamos que $L * U = A$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Descomposición LU: un ejemplo

Ahora son 2 problemas:

$$Ly = b \quad (3)$$

$$Ux = y \quad (4)$$

Para la ec. 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 5 & 1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = 10, y_2 + \frac{1}{2}y_1 = 5 \rightarrow y_2 = 0, \\ y_3 + \frac{3}{2}y_1 + 5y_2 = 8 \rightarrow y_3 = -7$$

$$y = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Descomposición LU: un ejemplo

Ahora son 2 problemas:

$$Ly = b \quad (3)$$

$$Ux = y \quad (4)$$

Para la ec. 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 5 & 1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = 10, y_2 + \frac{1}{2}y_1 = 5 \rightarrow y_2 = 0, \\ y_3 + \frac{3}{2}y_1 + 5y_2 = 8 \rightarrow y_3 = -7$$

$$y = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Descomposición LU: un ejemplo

Ahora son 2 problemas:

$$Ly = b \quad (3)$$

$$Ux = y \quad (4)$$

Para la ec. 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 5 & 1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = 10, y_2 + \frac{1}{2}y_1 = 5 \rightarrow y_2 = 0, \\ y_3 + \frac{3}{2}y_1 + 5y_2 = 8 \rightarrow y_3 = -7$$

$$y = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Descomposición LU: un ejemplo

Ahora son 2 problemas:

$$Ly = b \quad (3)$$

$$Ux = y \quad (4)$$

Para la ec. 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 5 & 1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = 10, y_2 + \frac{1}{2}y_1 = 5 \rightarrow y_2 = 0, \\ y_3 + \frac{3}{2}y_1 + 5y_2 = 8 \rightarrow y_3 = -7$$

$$y = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Descomposición LU: un ejemplo

Ahora son 2 problemas:

$$Ly = b \quad (3)$$

$$Ux = y \quad (4)$$

Para la ec. 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 5 & 1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = 10, y_2 + \frac{1}{2}y_1 = 5 \rightarrow y_2 = 0,$$

$$y_3 + \frac{3}{2}y_1 + 5y_2 = 8 \rightarrow y_3 = -7$$

$$y = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Descomposición LU: un ejemplo

Ahora son 2 problemas:

$$Ly = b \quad (3)$$

$$Ux = y \quad (4)$$

Para la ec. 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 5 & 1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = 10, y_2 + \frac{1}{2}y_1 = 5 \rightarrow y_2 = 0,$$

$$y_3 + \frac{3}{2}y_1 + 5y_2 = 8 \rightarrow y_3 = -7$$

$$y = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Descomposición LU: un ejemplo

Para la ec. 4

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = 1, -\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \rightarrow x_2 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10 \rightarrow x_1 = 1$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Descomposición LU: un ejemplo

Para la ec. 4

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = 1, -\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \rightarrow x_2 = 1,$$

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10 \rightarrow x_1 = 1$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Descomposición LU: un ejemplo

Para la ec. 4

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = 1, -\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \rightarrow x_2 = 1,$$

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10 \rightarrow x_1 = 1$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Descomposición LU: un ejemplo

Para la ec. 4

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = 1, -\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \rightarrow x_2 = 1,$$

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10 \rightarrow x_1 = 1$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Descomposición LU: un ejemplo

Para la ec. 4

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = 1, -\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \rightarrow x_2 = 1,$$

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10 \rightarrow x_1 = 1$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$