Ejemplos Errores

Ulises Bussi

25 de marzo de 2020

1. Ejemplo: Tiro oblicuo

Supongamos que se tira un proyectil con un ángulo de 45° con una velocidad inicial de $50m/s$. Calcular la distancia máxima recorrida.

- Utilizando todas las cifras significativas.
- Redondeando a la primer cifra y usando $g = 10m/s^2$ (redondeo)

Lo primero que debemos hacer es calcular el tiempo de vuelo. Si consideramos despreciable los rozamientos con el aire, el tiempo de vuelo vendrá dado por la condición de que la altura del proyectil vuelva a ser 0. La velocidad vertical se puede calcular como $v_{y0} = v_0 \cos(45°)$

- $v_0 = 50$
- $\theta = 45° \rightarrow \cos 45 = 0{,}707...$
- $g = 9{,}81m/s^2$

$$v_{y0} = 50 * \cos 45° = 35{,}355339...$$

utilizando la ecuación horaria para la altura y:

$$0 = v_{y0} * t - \frac{1}{g}t^2$$

donde despejando se llega a:

$$t = \frac{50 * \cos 45}{g/2} = \boxed{7{,}208..}$$

- $v_0 = 50$
- $\theta = 45° \rightarrow \cos 45 = 0{,}7$
- $g = 10m/s^2$

$$v_{y0} = 50 * \cos 45° = 35$$

utilizando la ecuación horaria para la altura y:

$$0 = v_{y0} * t - \frac{1}{g}t^2$$

donde despejando se llega a:

$$t = \frac{50 * \cos 45}{g/2} = \boxed{7}$$

Hasta acá, podemos ver que ya hay una diferencia importante en los tiempos. Al final vamos a comparar los errores en cada caso.

Ahora que ya tenemos el tiempo de vuelo, solo tenemos que reemplazar en la ecuación horaria para x hallando la posición final.

- $v_{x0} = 50 * \operatorname{sen} 45 = 0{,}707...$

$$x_f = v_{x0} t$$

$$\boxed{x_f = 254{,}841...}$$

- $v_{x0} = 50 * \operatorname{sen} 45 = 0{,}7$

$$x_f = v_{x0} t$$

$$\boxed{x_f = 245}$$

Si calculamos el error cometido en el tiempo de vuelo:

$$E_a = |7 - 7{,}208| = 0{,}208 \quad , \quad E_r = \frac{|7 - 7{,}208|}{7{,}208} = 0{,}029 \approx 3\,\%$$

Si calculamos el error cometido en la posición:

$$E_a = |245 - 254{,}841| = 9{,}84 \quad , \quad E_r = \frac{|7 - 7{,}208|}{7{,}208} = 0{,}0386 \approx 4\,\%$$

---

2. Ejemplo: capitalización de intereses de un plazo fijo

Supongamos que quiero invertir \$1000 en un plazo fijo. Me meto en el *homebanking* y veo que me dice que la tasa de interés es del 27,7 % T.N.A. Si yo decido invertir a 5 años en periodos de 30 dias, ¿Cuál será el monto al final de ese intervalo de tiempo?

- calcular el monto utilizando la tasa de interés tal como figura.
- Calcular utilizando truncando la suma a 27 % (truncamiento).

2.1. Cifra exacta

Para el primer caso, el monto que tendré luego de un mes será:

$$x_1 = 1000 \times (1 + \underbrace{\frac{0{,}277}{12}}_{\text{cantidad de meses}}) = \$1023{,}08$$

Al cabo de dos meses :

$$x_1 = 1023{,}08 \times (1 + \frac{0{,}277}{12}) = 1000 \times (1 + \frac{0{,}277}{12}) \times (1\frac{0{,}277}{12}) = \$1046{,}69$$

si seguimos la cuenta, al cabo de 5 años (60 meses):

$$\boxed{x_{60} = 1000 \times (1 + \frac{0{,}277}{12})^{60} = \$3932{,}426}$$

2.2. Truncamiento

En este caso, el monto que tendré luego de un mes será:

$$x_1 = 1000 \times (1 + \underbrace{\frac{0{,}27}{12}}_{\text{cantidad de meses}}) = \$1022{,}5$$

No Parece haber tanta diferencia, pero si miramos lo que pasa al cabo de 60 meses:

$$\boxed{x_{60} = 1000 \times (1 + \frac{0{,}27}{12})^{60} = \$3800{,}131}$$

Miremos los errores cometidos, absolutos y relativos en 3 momentos, con el truncamiento inicial, después del primer mes y después del mes 60:

Inicialmente:

$$E_a = |0{,}27 - 0{,}277| = 0{,}007 \quad , \quad E_r = \frac{|0{,}27 - 0{,}277|}{0{,}277} = 0{,}0253 \approx 2{,}5\,\%$$

En el primer mes:

$$E_a = |1022{,}5 - 1023{,}08| = 0{,}58 \quad , \quad E_r = \frac{|1022{,}5 - 1023{,}08|}{1023{,}08} = 0{,}00057 \approx 0{,}057\,\%$$

En el último mes:

$$E_a = |3800{,}131 - 3932{,}426| = 132{,}29 \quad , \quad E_r = \frac{|3800{,}131 - 3932{,}426|}{1023{,}08} = 0{,}034 \approx 3{,}4\,\%$$

Charla, ¿Qué paso? por que es tan bajo en el primer mes comparado con el error inicial? por qué tan alto en el último?

3. Condicionamiento

Dado el sistema $Ax = b$ encontrar x para los siguientes datos :

$$A = \begin{bmatrix} 15 & 11 \\ 20 & 15 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} \quad , \quad \delta b = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Si invertimos la matriz A para resolver el sistema con la inversa obtendremos:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 15 & 11 & 1 & 0 \\ 20 & 15 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F2-\frac{20}{15}F1} \left[\begin{array}{cc|cc} 15 & 11 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{20}{15} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[F1-11F2]{F2\leftarrow 3F2} \left[\begin{array}{cc|cc} 15 & 0 & 45 & -33 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F1\leftarrow F1/15} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \multirow{2}{*}{$\underbrace{\begin{array}{cc} 3 & -2{,}2 \\ -4 & 3 \end{array}}_{A^{-1}}$} \\ 0 & 1 & \end{array}\right]$$

Teniendo A^{-1} resta calcular x como $x = A^{-1}b$

$$x = \begin{bmatrix} 3 & -2{,}2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

por ultimo si queremos calcular el x^* tomando $b^* = b + \delta b$

$$x^* = \begin{bmatrix} 3 & -2{,}2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}$$

¿Que sucedió? La solución se alejó mucho comparado con la variación de b (usé un δb grande para que sean más redondas las cuentas).

$$\delta x = x^* - x = \begin{bmatrix} 3{,}6 \\ -5 \end{bmatrix}$$

si miramos la variación de los deltas como si fueran errores, podemos hacerlo mirando la norma de los vectores:

$$||b|| = \sqrt{36 + 64} = 10 \quad , \quad ||\delta b|| = \sqrt{(1 + 9)} \approx 3{,}16$$
$$||x|| = \sqrt{0{,}16 + 0} = 0{,}4 \quad , \quad ||\delta x|| = \sqrt{(12{,}96 + 25)} \approx 6{,}16$$

el error en b:

$$E_a = ||\delta b|| = 3{,}16 \quad , \quad E_r = \frac{||\delta b||}{||b||} = 0{,}316 \approx 31{,}6\,\%$$

el error en x:

$$E_a = ||\delta x|| = 6{,}16 \quad , \quad E_r = \frac{||\delta x||}{||x||} = 15{,}4 \approx 1540\,\%$$

El error relativo en x es 15 veces mayor que el valor real de x!!!!
¿Qué pasó? miremos el número de condicionamiento de la matriz:

$$\mathrm{Cond}(A) = 194{,}19$$

¿Conclusiones?