# Métodos Numéricos - Clase 3

Ulises Bussi- Javier Portillo

$1^\circ$ cuatrimestre 2020

# Métodos Abiertos.

Métodos para encontrar raices de funciones de forma numérica (sí, también).

Más efectivos computacionalmente.

"Encuentra" raices sin necesidad de un intervalo cerrado.


Universidad Nacional de Quilmes

# Métodos Abiertos.

Métodos para encontrar raices de funciones de forma numérica (sí, también).

Más efectivos computacionalmente.

"Encuentra" raices sin necesidad de un intervalo cerrado.

# Métodos Abiertos.

**Consideraciones:**

- Encuentran aproximadamente el valor de la raiz.
- Requieren una condición inicial.
- Pueden tener problemas de convergencia.

**Metodos:**

- Punto fijo.
- Newton-Raphson.
- Método de la Secante.

# Métodos Abiertos.

**Consideraciones:**

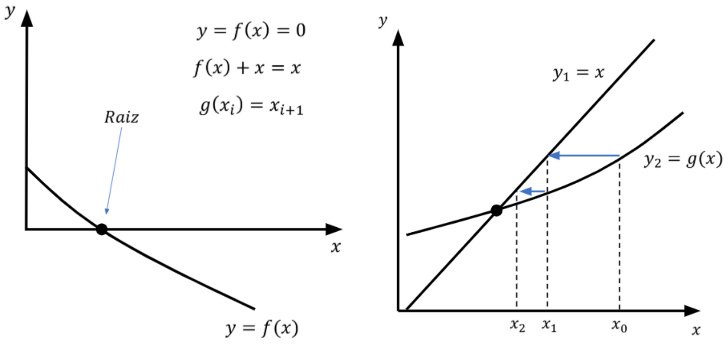
- Encuentran aproximadamente el valor de la raiz.
- Requieren una condición inicial.
- Pueden tener problemas de convergencia.

**Metodos:**

- Punto fijo.
- Newton-Raphson.
- Método de la Secante.

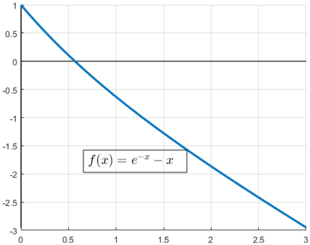
# Iteración de Punto Fijo

**Idea** Dada $f(x) = 0$ convertirlo a la forma $g(x) = x$ y dado un $x_0$ calcular $x_1 = g(x_0)$

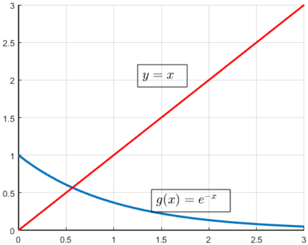


# Ejemplo: Punto Fijo

Supongamos que queremos hallar la raiz de $f(x) = e^{-x} - x$



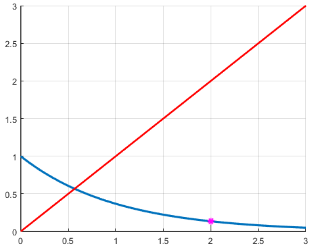

$\rightarrow$




$$g(x) = e^{-x}$$

# Ejemplo: Punto Fijo

Supongamos que queremos hallar la raiz de $f(x) = e^{-x} - x$, damos una condición inicial $x_0 = 2$

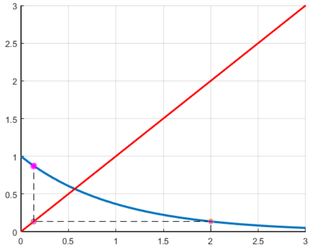



$$x_1 = g(2) = e^{-2} = 0{,}1353$$

$$e_r = \frac{|0{,}1353 - 2|}{|0{,}1353|} = 13{,}78$$

# Ejemplo: Punto Fijo

Supongamos que queremos hallar la raiz de $f(x) = e^{-x} - x$, damos una condición inicial $x_0 = 2$

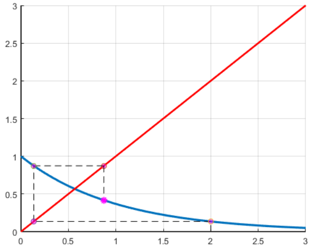



$$x_2 = g(0{,}1353) = 0{,}8734$$

$$e_r = \frac{|0{,}8734 - 0{,}1353|}{|0{,}8734|} = 0{,}8451$$

# Ejemplo: Punto Fijo

Supongamos que queremos hallar la raiz de $f(x) = e^{-x} - x$, damos una condición inicial $x_0 = 2$

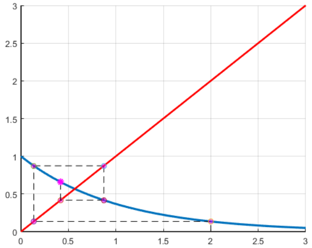



$$x_3 = g(0{,}8734) = 0{,}4175$$

$$e_r = \frac{|0{,}4175 - 0{,}8734|}{|0{,}4175|} = 1{,}0919$$

# Ejemplo: Punto Fijo

Supongamos que queremos hallar la raiz de $f(x) = e^{-x} - x$, damos una condición inicial $x_0 = 2$



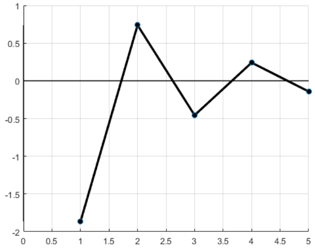

$$x_4 = g(0{,}4175) = 0{,}6587$$

$$e_r = \frac{|0{,}4175 - 0{,}6587|}{|0{,}6587|} = 0{,}3661$$

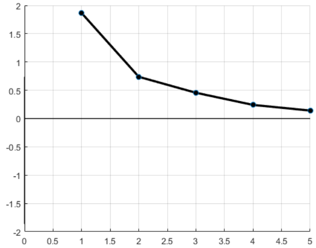
# Ejemplo: Punto Fijo

No perdamos de vista que lo que nos interesa es saber que pasó con la $f(x)$ que es a la que le estamos buscando la raíz!

Si miramos $f(x)$ en nuestras propuestas de raices:

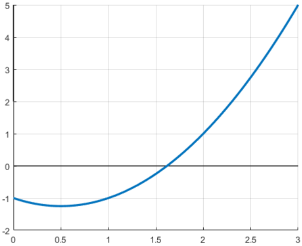


Si miramos $|f(x)|$ en nuestras propuestas de raices:

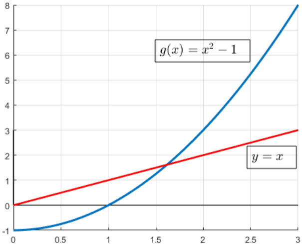


# Otro ejemplo: Punto Fijo

Supongamos que queremos hallar la raiz de $f(x) = x^2 - x - 1$



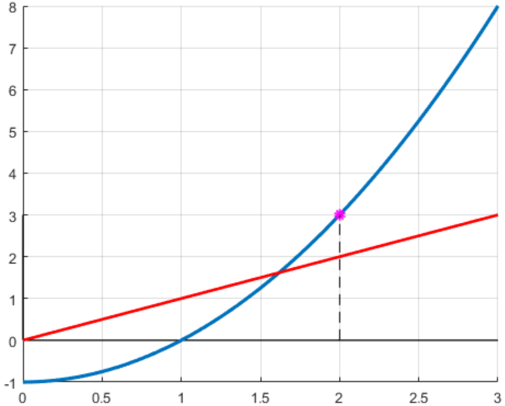
$\rightarrow$




$$g(x) = x^2 - 1$$

# Ejemplo: Punto Fijo

Supongamos que queremos hallar la raiz de $f(x) = x^2 - x - 1$, damos una condición inicial $x_0 = 2$

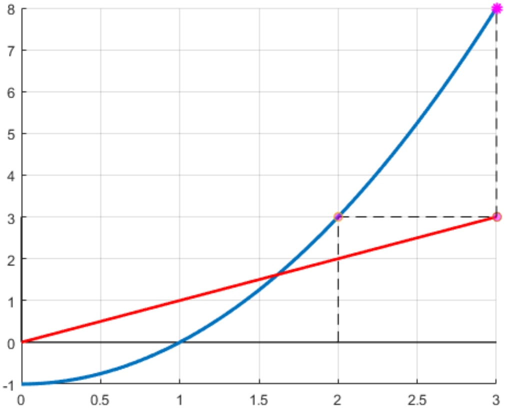



$$x_1 = (-2)^2 - 1$$

$$x_1 = 3$$

# Ejemplo: Punto Fijo

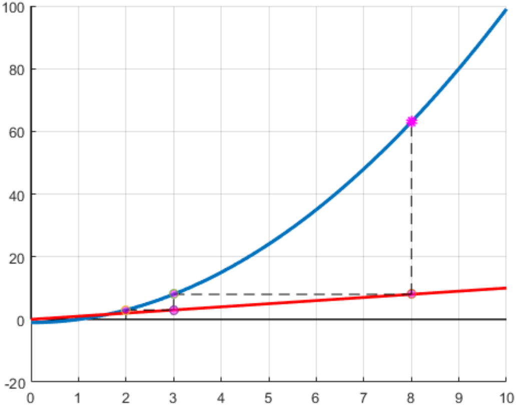
Supongamos que queremos hallar la raiz de $f(x) = x^2 - x - 1$, damos una condición inicial $x_0 = 2$




$$x_2 = g(3) = 8$$

# Ejemplo: Punto Fijo

Supongamos que queremos hallar la raiz de $f(x) = x^2 - x - 1$, damos una condición inicial $x_0 = 2$




$$x_3 = g(8) = 63$$

# Convergencia de Punto Fijo

Es posible demostrar (no lo vamos a hacer) que el error real en cada iteración se comporta como:

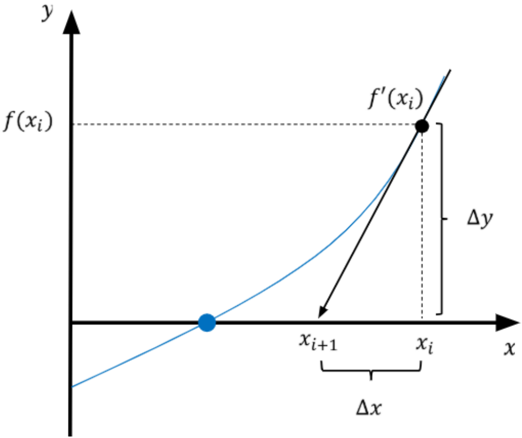
$$E_{i+1} = g'(\xi)E_i$$

Para algún $\xi \in [x_{root}, x_i]$
De esto puede concluirse que el problema convergerá a la raíz siempre que:

$$\boxed{|g'(\xi)| < 1}$$

# Newton-Raphson

Es uno de los métodos más usados.

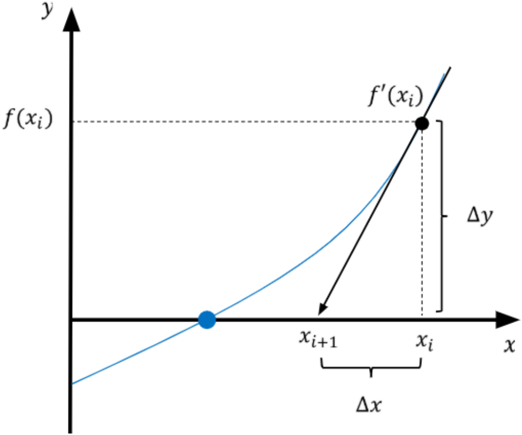



$$f'(x_i) = \frac{f(x_i)}{x_i - x_{i+1}}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (1)$$

# Newton-Raphson

Es uno de los métodos más usados.

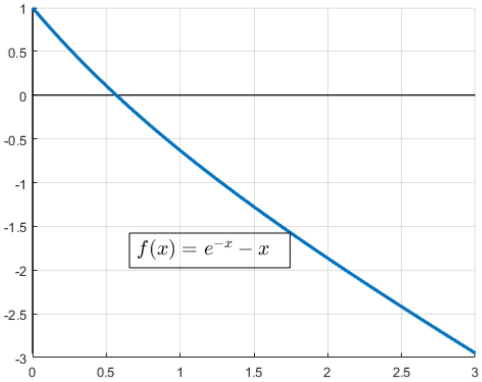



$$f'(x_i) = \frac{f(x_i)}{x_i - x_{i+1}}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (1)$$

# Newton-Raphson: un ejemplo

Supongamos que queremos hallar la raiz de $f(x) = e^{-x} - x$

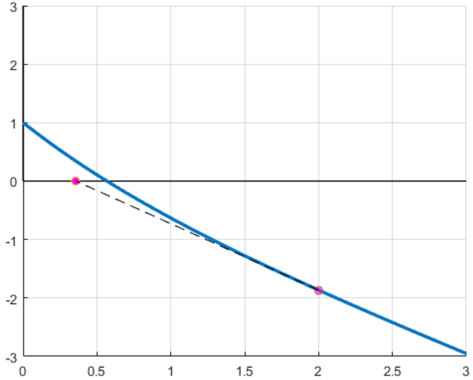



**La derivada:**

$$f'(x) = -e^{-x} - 1$$

# Newton-Raphson: un ejemplo

Supongamos que queremos hallar la raiz de $f(x) = e^{-x} - x$, damos una condición inicial $x_0 = 2$

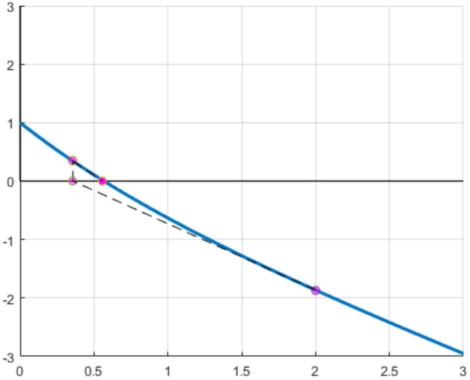



$$x_1 = x_0 - \frac{f(2)}{f'(2)}$$

$$x_1 = 0{,}3576$$

# Newton-Raphson: un ejemplo

Supongamos que queremos hallar la raiz de $f(x) = e^{-x} - x$, damos una condición inicial $x_0 = 2$



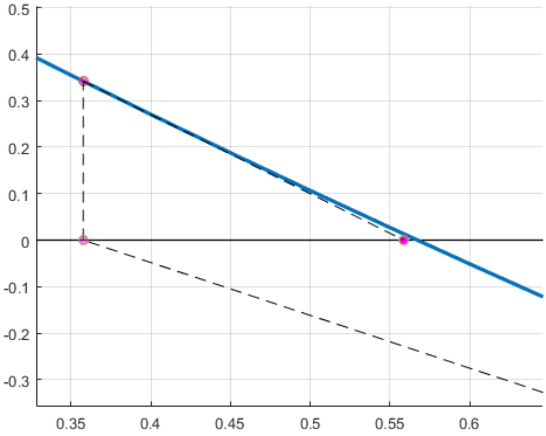

$$x_1 = 0{,}3576$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_1 = 0{,}5587$$

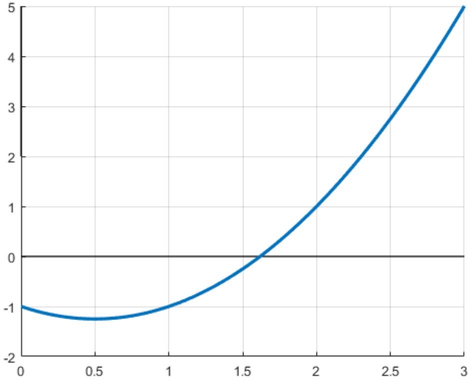
# Newton-Raphson: un ejemplo

Si hacemos un zoom:



# Otro ejemplo: Newton-Raphson

Supongamos que queremos hallar la raiz de $f(x) = x^2 - x - 1$

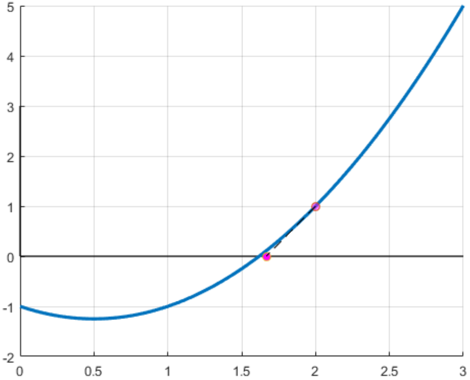



**La derivada:**

$$f'(x) = 2x - 1$$

# Otro ejemplo: Newton-Raphson

Supongamos que queremos hallar la raiz de $f(x) = x^2 - x - 1$, damos una condición inicial $x_0 = 2$

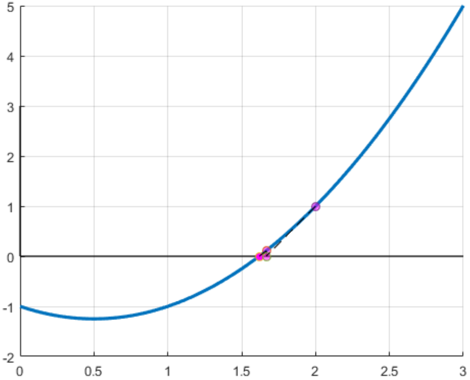



$$x_1 = x_0 - \frac{f(2)}{f'(2)}$$

$$x_1 = 1{,}6667$$

# Otro ejemplo: Newton-Raphson

Supongamos que queremos hallar la raiz de $f(x) = x^2 - x - 1$, damos una condición inicial $x_0 = 2$



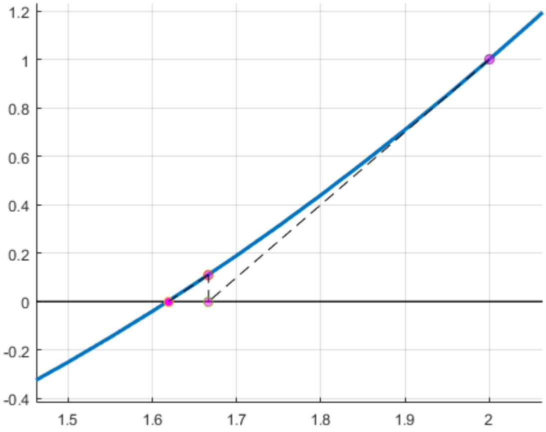

$$x_1 = 1{,}6667$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_2 = 1{,}6190$$

# Otro ejemplo: Newton-Raphson

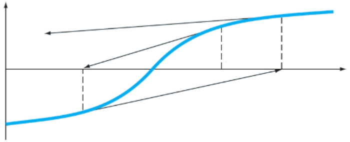
Si hacemos un zoom:



# Newton-Raphson: Consideraciones

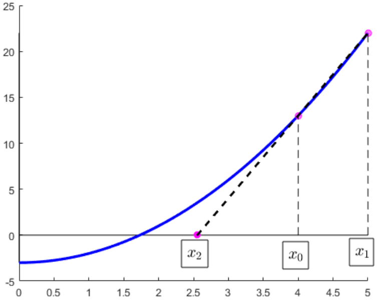
- Es un método poderoso.
- No siempre converge.
- Requiere poder computar la derivada de la función (costoso).

**Ejemplo de no convergencia**



# Método de la Secante

Deriva de Newton-Raphson, aproximando la derivada:



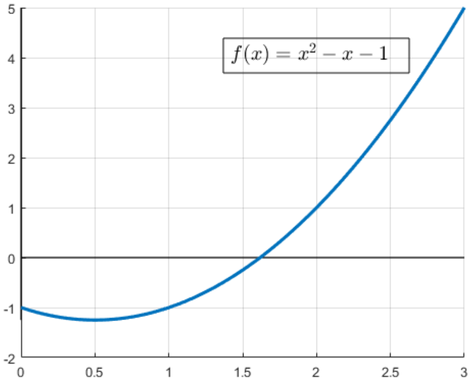

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i}$$

Si utilizamos esto en la ecuación 1 obtendremos:

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}}$$

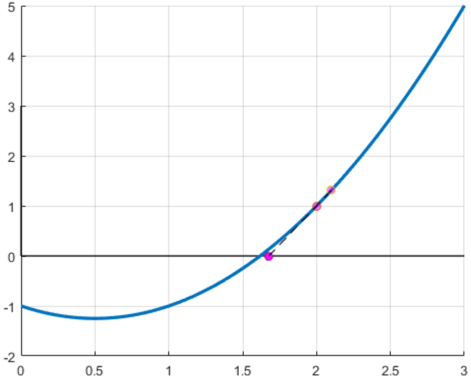
# Método de la secante: un ejemplo

Supongamos que queremos hallar la raiz de $f(x) = x^2 - x - 1$



# Método de la secante: un ejemplo

Supongamos que queremos hallar la raiz de $f(x) = x^2 - x - 1$, damos una condición inicial $x_{-1} = 2{,}1$, $x_0 = 2$

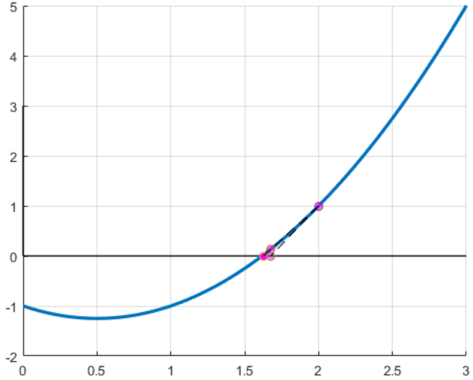



$$x_1 = 2 - \frac{f(2)(2{,}1 - 2)}{f(2{,}1) - f(2)}$$

$$x_1 = 1{,}6774$$

# Método de la secante: un ejemplo

Supongamos que queremos hallar la raiz de $f(x) = x^2 - x - 1$, damos una condición inicial $x_{-1} = 2{,}1$, $x_0 = 2$




$$x_1 = 1{,}6667$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_0 - x_1)}{f(x_0) - f(x_0)}$$

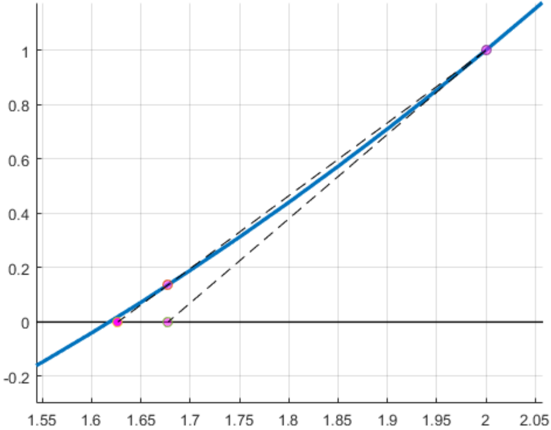
$$x_2 = 1{,}6265$$



Universidad Nacional de Quilmes

# Método de la secante: un ejemplo

Si hacemos un zoom:



# Método de la secante: Consideraciones

- El método no utiliza el cálculo de la derivada.
- Requiere de 2 condiciones iniciales.
- Estas 2 condiciones iniciales pueden estar en el mismo lado de la raiz (a diferencia de *bracketing methods*).