Métodos Numéricos - Clase 3

Ulises Bussi- Javier Portillo

1° cuatrimestre 2020

Métodos Iterativos

Sistemas de ecuaciones Lineales (SELs).

Resolver problemas de la forma

$$Ax = b$$

con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, b y $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

¿Por qué? La mayoría de los problemas de ingeniería pueden llevarse a esta forma.

Sistemas de ecuaciones Lineales (SELs).

Resolver problemas de la forma

$$Ax = b$$

con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, b y $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$

¿Por qué? La mayoría de los problemas de ingeniería pueden llevarse a esta forma.

Universidad Nacional de Quilmes

Métodos iterativos

- Aproximar la solución iterando.
- Útil para sistemas grandes.

Métodos iterativos

- Aproximar la solución iterando.
- Útil para sistemas grandes.

Métodos Iterativos

Método de Gauss-Seidel

Transformar el sistema:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a_{1,1}} \left(b_1 - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq 1}}^{n} a_{1,i} x_i \right) \\ x_2 &= \frac{1}{a_{2,2}} \left(b_2 - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq 2}}^{n} a_{2,i} x_i \right) \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{1}{a_{n,n}} \left(b_n - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq n}}^{n} a_{n,i} x_i \right) \end{aligned}$$

Método de Gauss-Seidel

Con el sistema de la forma:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
x_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&\vdots \\
x_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)
\end{aligned}
$$

1. Proponemos una condición inicial para todos los estados $X^0 = [x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0]$
2. encontramos $x_1^1 = f_1(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$,
3. encontramos $x_2^1 = f_2(x_1{}^1, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, y así sucesivamente.

Repetimos los pasos [2] y [3].

Método de Gauss-Seidel

Con el sistema de la forma:

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ x_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ x_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

1. Proponemos una condición inicial para todos los estados $X^0 = [x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0]$
2. encontramos $x_1^1 = f_1(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$,
3. encontramos $x_2^1 = f_2(x_1{}^{1}, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, y así sucesivamente.

Repetimos los pasos [2] y [3].

Método de Gauss-Seidel

Podemos escribir el error para cada una de las incógnitas x_i en el paso j cómo:

$$e_i^j = \frac{|x_i^j - x_i^{j-1}|}{x_i^j}$$

Ejemplo: Gauss-Seidel

Supongamos que tenemos el problema:

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 12 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} x_1 &= \frac{12-3x_2-1x_3}{8} \\ x_2 &= \frac{9-1x_1-3x_3}{5} \\ x_3 &= \frac{9-3x_1-1x_2}{5} \end{aligned}$$

Tomemos como condición inicial $X^0 = [x_1^0, x_2^0, x_2^0] = [0, 0, 0]$

$$\begin{aligned} x_1^1 &= \frac{12-3*0-1*0}{8} & \rightarrow \quad & \boxed{x_1^1 = 1{,}5} \\ x_2^1 &= \frac{9-1*1{,}5-3*0}{5} & \rightarrow \quad & \boxed{x_2^1 = 1{,}5} \\ x_3^1 &= \frac{9-3*1{,}5-1*1{,}5}{5} & \rightarrow \quad & \boxed{x_3^1 = 0{,}6} \end{aligned}$$

con lo que mi nuevo candidato será:

$$x = \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 0{,}6 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Gauss-Seidel

Supongamos que tenemos el problema:

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 12 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} x_1 &= \frac{12-3x_2-1x_3}{8} \\ x_2 &= \frac{9-1x_1-3x_3}{5} \\ x_3 &= \frac{9-3x_1-1x_2}{5} \end{aligned}$$

Tomemos como condición inicial $X^0 = [x_1^0, x_2^0, x_2^0] = [0,0,0]$

$$\begin{aligned} x_1^1 &= \frac{12-3*0-1*0}{8} & \rightarrow & \boxed{x_1^1 = 1{,}5} \\ x_2^1 &= \frac{9-1*1{,}5-3*0}{5} & \rightarrow & \boxed{x_2^1 = 1{,}5} \\ x_3^1 &= \frac{9-3*1{,}5-1*1{,}5}{5} & \rightarrow & \boxed{x_3^1 = 0{,}6} \end{aligned}$$

con lo que mi nuevo candidato será:

$$x = \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 0{,}6 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Gauss-Seidel

Supongamos que tenemos el problema:

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 12 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} x_1 &= \frac{12-3x_2-1x_3}{8} \\ x_2 &= \frac{9-1x_1-3x_3}{5} \\ x_3 &= \frac{9-3x_1-1x_2}{5} \end{aligned}$$

Tomemos como condición inicial $X^0 = [x_1^0, x_2^0, x_2^0] = [0, 0, 0]$

$$\begin{aligned} x_1^1 &= \frac{12-3*0-1*0}{8} && \rightarrow \boxed{x_1^1 = 1{,}5} \\ x_2^1 &= \frac{9-1*1{,}5-3*0}{5} && \rightarrow \boxed{x_2^1 = 1{,}5} \\ x_3^1 &= \frac{9-3*1{,}5-1*1{,}5}{5} && \rightarrow \boxed{x_3^1 = 0{,}6} \end{aligned}$$

con lo que mi nuevo candidato será:

$$x = \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 0{,}6 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Gauss-Seidel

El problema:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{12-3x_2-1x_3}{8} \\ x_2 &= \frac{9-1x_1-3x_3}{5} \\ x_3 &= \frac{9-3x_1-1x_2}{5} \end{aligned}$$

mi estado actual $X^1 = [1{,}5,\ 1{,}5,\ 0{,}6]$

Errores

$$e_1^1 = \frac{|1{,}5-0|}{1{,}5} = 1$$

$$e_2^1 = 1$$

$$e_3^1 = 1$$

$$x_1^2 = \frac{12-3*1{,}5-1*0{,}6}{8} \rightarrow \boxed{x_1^2 = 0{,}86}$$

$$x_2^2 = \frac{9-1*0{,}86-3*0{,}6}{5} \rightarrow \boxed{x_2^2 = 1{,}26}$$

$$x_3^2 = \frac{9-3*0{,}86-1*1{,}26}{5} \rightarrow \boxed{x_3^2 = 1{,}02}$$

con lo que mi nuevo candidato será:

$$x = \begin{bmatrix} 0{,}86 \\ 1{,}26 \\ 1{,}02 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Gauss-Seidel

El problema:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{12-3x_2-1x_3}{8}\\
x_2 &= \frac{9-1x_1-3x_3}{5}\\
x_3 &= \frac{9-3x_1-1x_2}{5}
\end{aligned}
$$

mi estado actual $X^1 = [1{,}5,\ 1{,}5,\ 0{,}6]$

Errores

$$e_1^1 = \frac{|1{,}5-0|}{1{,}5} = 1$$

$$e_2^1 = 1$$

$$e_3^1 = 1$$

$$x_1^2 = \frac{12-3*1{,}5-1*0{,}6}{8} \rightarrow \boxed{x_1^2 = 0{,}86}$$

$$x_2^2 = \frac{9-1*0{,}86-3*0{,}6}{5} \rightarrow \boxed{x_2^2 = 1{,}26}$$

$$x_3^2 = \frac{9-3*0{,}86-1*1{,}26}{5} \rightarrow \boxed{x_3^2 = 1{,}02}$$

con lo que mi nuevo candidato será:

$$x = \begin{bmatrix} 0{,}86 \\ 1{,}26 \\ 1{,}02 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Gauss-Seidel

El problema:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{12-3x_2-1x_3}{8} \\ x_2 &= \frac{9-1x_1-3x_3}{5} \\ x_3 &= \frac{9-3x_1-1x_2}{5} \end{aligned}$$

mi estado actual $X^1 =$ $[1{,}5, 1{,}5, 0{,}6]$

Errores

$$e_1^1 = \frac{|1{,}5 - 0|}{1{,}5} = 1$$

$$e_2^1 = 1$$

$$e_3^1 = 1$$

$$x_1^2 = \frac{12-3*1{,}5-1*0{,}6}{8} \rightarrow \boxed{x_1^2 = 0{,}86}$$

$$x_2^2 = \frac{9-1*0{,}86-3*0{,}6}{5} \rightarrow \boxed{x_2^2 = 1{,}26}$$

$$x_3^2 = \frac{9-3*0{,}86-1*1{,}26}{5} \rightarrow \boxed{x_3^2 = 1{,}02}$$

con lo que mi nuevo candidato será:

$$x = \begin{bmatrix} 0{,}86 \\ 1{,}26 \\ 1{,}02 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Gauss-Seidel

El problema:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{12-3x_2-1x_3}{8} \\ x_2 &= \frac{9-1x_1-3x_3}{5} \\ x_3 &= \frac{9-3x_1-1x_2}{5} \end{aligned}$$

mi estado actual $X^2 = [0,86, 1,26, 1,02]$

Errores

$$e_1^2 = \frac{|0,86-1,5|}{0,86} = 0,73$$

$$e_2^2 = 0,18$$

$$e_3^2 = 0,41$$

$$x_1^3 = \frac{12-3*1,26-1*1,02}{8} \rightarrow \boxed{x_1^3 = 0,89}$$

$$x_2^3 = \frac{9-1*0,89-3*1,02}{5} \rightarrow \boxed{x_2^3 = 1,00}$$

$$x_3^3 = \frac{9-3*0,89-1*1,0}{5} \rightarrow \boxed{x_3^3 = 1,06}$$

con lo que mi nuevo candidato será:

$$x = \begin{bmatrix} 0,89 \\ 1,00 \\ 1,06 \end{bmatrix}$$

Universidad Nacional de Quilmes

Ejemplo: Gauss-Seidel

El problema:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{12-3x_2-1x_3}{8} \\ x_2 &= \frac{9-1x_1-3x_3}{5} \\ x_3 &= \frac{9-3x_1-1x_2}{5} \end{aligned}$$

mi estado actual $X^2 =$ $[0,86, 1,26, 1,02]$

Errores

$$e_1^2 = \frac{|0,86-1,5|}{0,86} = 0,73$$

$$e_2^2 = 0,18$$

$$e_3^2 = 0,41$$

$$x_1^3 = \frac{12-3*1,26-1*1,02}{8} \rightarrow \boxed{x_1^3 = 0,89}$$

$$x_2^3 = \frac{9-1*0,89-3*1,02}{5} \rightarrow \boxed{x_2^3 = 1,00}$$

$$x_3^3 = \frac{9-3*0,89-1*1,0}{5} \rightarrow \boxed{x_3^3 = 1,06}$$

con lo que mi nuevo candidato será:

$$x = \begin{bmatrix} 0,89 \\ 1,00 \\ 1,06 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Gauss-Seidel

El problema:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{12-3x_2-1x_3}{8}\\
x_2 &= \frac{9-1x_1-3x_3}{5}\\
x_3 &= \frac{9-3x_1-1x_2}{5}
\end{aligned}
$$

mi estado actual $X^2 = [0,86, 1,26, 1,02]$

Errores

$$e_1^2 = \frac{|0,86 - 1,5|}{0,86} = 0,73$$

$$e_2^2 = 0,18$$

$$e_3^2 = 0,41$$

$$x_1^3 = \frac{12-3*1,26-1*1,02}{8} \rightarrow \boxed{x_1^3 = 0,89}$$

$$x_2^3 = \frac{9-1*0,89-3*1,02}{5} \rightarrow \boxed{x_2^3 = 1,00}$$

$$x_3^3 = \frac{9-3*0,89-1*1,0}{5} \rightarrow \boxed{x_3^3 = 1,06}$$

con lo que mi nuevo candidato será:

$$x = \begin{bmatrix} 0,89 \\ 1,00 \\ 1,06 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Gauss-Seidel

El problema:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{12-3x_2-1x_3}{8} \\
x_2 &= \frac{9-1x_1-3x_3}{5} \\
x_3 &= \frac{9-3x_1-1x_2}{5}
\end{aligned}
$$

mi estado actual $X^3 = [0,89, 1,00, 1,06]$

Errores

$$e_1^3 = \frac{|0,89-0,86|}{0,89} = 0,03$$

$$e_2^3 = 0,26$$

$$e_3^3 = 0,03$$

$$x_1^4 = \frac{12-3*1,00-1*1,02}{8} \rightarrow \boxed{x_1^4 = 0,99}$$

$$x_2^4 = \frac{9-1*0,99-3*1,06}{5} \rightarrow \boxed{x_2^4 = 0,96}$$

$$x_3^4 = \frac{9-3*0,99-1*0,96}{5} \rightarrow \boxed{x_3^4 = 1,01}$$

con lo que mi nuevo candidato será:

$$x = \begin{bmatrix} 0,99 \\ 1,96 \\ 1,01 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Gauss-Seidel

El problema:

$$x_1 = \frac{12 - 3x_2 - 1x_3}{8}$$
$$x_2 = \frac{9 - 1x_1 - 3x_3}{5}$$
$$x_3 = \frac{9 - 3x_1 - 1x_2}{5}$$

mi estado actual $X^3 =$ $[0,89, 1,00, 1,06]$

Errores

$$e_1^3 = \frac{|0,89 - 0,86|}{0,89} = 0,03$$
$$e_2^3 = 0,26$$
$$e_3^3 = 0,03$$

$$x_1^4 = \frac{12 - 3*1,00 - 1*1,02}{8} \rightarrow \boxed{x_1^4 = 0,99}$$
$$x_2^4 = \frac{9 - 1*0,99 - 3*1,06}{5} \rightarrow \boxed{x_2^4 = 0,96}$$
$$x_3^4 = \frac{9 - 3*0,99 - 1*0,96}{5} \rightarrow \boxed{x_3^4 = 1,01}$$

con lo que mi nuevo candidato será:

$$x = \begin{bmatrix} 0,99 \\ 1,96 \\ 1,01 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Gauss-Seidel

El problema:

$$x_1 = \frac{12-3x_2-1x_3}{8}$$
$$x_2 = \frac{9-1x_1-3x_3}{5}$$
$$x_3 = \frac{9-3x_1-1x_2}{5}$$

mi estado actual $X^3 =$ $[0,89, 1,00, 1,06]$

Errores

$$e_1^3 = \frac{|0,89-0,86|}{0,89} = 0,03$$

$$e_2^3 = 0,26$$

$$e_3^3 = 0,03$$

$$x_1^4 = \frac{12-3*1,00-1*1,02}{8} \rightarrow \boxed{x_1^4 = 0,99}$$

$$x_2^4 = \frac{9-1*0,99-3*1,06}{5} \rightarrow \boxed{x_2^4 = 0,96}$$

$$x_3^4 = \frac{9-3*0,99-1*0,96}{5} \rightarrow \boxed{x_3^4 = 1,01}$$

con lo que mi nuevo candidato será:

$$x = \begin{bmatrix} 0,99 \\ 1,96 \\ 1,01 \end{bmatrix}$$

Universidad Nacional de Quilmes

Convergencia de Gauss-Seidel

Puede demostrarse que el algoritmo de Gauss-Seidel es convergente si la matriz A es **diagonal dominante**.

Definición: se dice que una Matriz $A in \mathbb{R}^{n\times n}$ es diagonal dominante si cumple que:

$$\forall i, j = 1, 2, ..n : \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|$$

Convergencia de Gauss-Seidel

Puede demostrarse que el algoritmo de Gauss-Seidel es convergente si la matriz A es **diagonal dominante**.

Definición: se dice que una Matriz $A in \mathbb{R}^{n\times n}$ es diagonal dominante si cumple que:

$$\forall i, j = 1, 2, ..n : \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|$$

Convergencia de Gauss-Seidel

Veamos que la matriz A del ejemplo es Diagonal Dominante:

$$|a_{1,1}| : 8 < |a_{1,2}| + |a_{1,3}| = 3 + 1$$

$$|a_{2,2}| : 5 < 1 + 3$$

$$|a_{3,3}| : 5 < 1 + 3$$

IMPORTANTE: Esta condición es suficiente pero no necesaria!

Universidad Nacional de Quilmes

Convergencia de Gauss-Seidel

Veamos que la matriz A del ejemplo es Diagonal Dominante:

$$|a_{1,1}| : 8 < |a_{1,2}| + |a_{1,3}| = 3 + 1$$

$$|a_{2,2}| : 5 < 1 + 3$$

$$|a_{3,3}| : 5 < 1 + 3$$

IMPORTANTE: Esta condición es suficiente pero no necesaria!

Consideraciones

- Es un método iterativo.
- Sirve para aplicar en grandes sistemas.
- Es posible de antemano saber su convergencia.

Métodos Iterativos

Gauss-Seidel con Relajación

Se propone una modificación al algoritmo, para mejorar la convergencia:

Se calcula el valor de una incógnita x_i^j y se propone utilizar como candidato a valor un promedio ponderado con el valor anterior:

$$\hat{x}_i^j = \alpha x_i^j + (1 - \alpha) x_i^{j-1}$$

Donde α es un parámetro a definir.

Gauss-Seidel con Relajación

Se propone una modificación al algoritmo, para mejorar la convergencia:

Se calcula el valor de una incógnita x_i^j y se propone utilizar como candidato a valor un promedio ponderado con el valor anterior:

$$\hat{x}_i^j = \alpha x_i^j + (1-\alpha) x_i^{j-1}$$

Donde α es un parámetro a definir.

Ejemplo: Gauss-Seidel Con relajación

Supongamos que tenemos el problema:

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 12 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} x_1 &= \frac{12-3x_2-1x_3}{8} \\ x_2 &= \frac{9-1x_1-3x_3}{5} \\ x_3 &= \frac{9-3x_1-1x_2}{5} \end{aligned}$$

Tomemos $X^0 = [x_1^0, x_2^0, x_3^0] = [0, 0, 0]$ y $\alpha = 0{,}8$

$$\begin{aligned} x_1^1 &= \frac{12-3*0-1*0}{8} & \rightarrow \quad & \boxed{x_1^1 = 1{,}5} \\ x_2^1 &= \frac{9-1*1{,}2-3*0}{5} & \rightarrow \quad & \boxed{x_2^1 = 1{,}56} \\ x_3^1 &= \frac{9-3*1{,}2-1*1{,}25}{5} & \rightarrow \quad & \boxed{x_3^1 = 0{,}83} \end{aligned}$$

con lo que mi nuevo candidato será:

$$x = \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}56 \\ 0{,}83 \end{bmatrix} \alpha + (1-\alpha) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}2 \\ 1{,}25 \\ 0{,}66 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Gauss-Seidel Con relajación

Supongamos que tenemos el problema:

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 12 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} x_1 &= \frac{12-3x_2-1x_3}{8} \\ x_2 &= \frac{9-1x_1-3x_3}{5} \\ x_3 &= \frac{9-3x_1-1x_2}{5} \end{aligned}$$

Tomemos $X^0 = [x_1^0, x_2^0, x_3^0] = [0, 0, 0]$ y $\alpha = 0{,}8$

$$\begin{aligned} x_1^1 &= \frac{12-3*0-1*0}{8} \rightarrow \boxed{x_1^1 = 1{,}5} \\ x_2^1 &= \frac{9-1*1{,}2-3*0}{5} \rightarrow \boxed{x_2^1 = 1{,}56} \\ x_3^1 &= \frac{9-3*1{,}2-1*1{,}25}{5} \rightarrow \boxed{x_3^1 = 0{,}83} \end{aligned}$$

con lo que mi nuevo candidato será:

$$x = \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}56 \\ 0{,}83 \end{bmatrix} \alpha + (1-\alpha) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}2 \\ 1{,}25 \\ 0{,}66 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Gauss-Seidel

El problema:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{12-3x_2-1x_3}{8}\\
x_2 &= \frac{9-1x_1-3x_3}{5}\\
x_3 &= \frac{9-3x_1-1x_2}{5}
\end{aligned}
$$

mi estado actual $X^1 = [1{,}2, 1{,}25, 0{,}66]$

Errores

$$e_1^1 = \frac{|1{,}2-0|}{1{,}2} = 1$$

$$e_2^1 = 1$$

$$e_3^1 = 1$$

$$x_1^2 = \frac{12-3*1{,}25-1*0{,}66}{8} \rightarrow \boxed{x_1^2 = 0{,}95}$$

$$x_2^2 = \frac{9-1*1{,}00-3*0{,}66}{5} \rightarrow \boxed{x_2^2 = 1{,}20}$$

$$x_3^2 = \frac{9-3*1-1*1{,}21}{5} \rightarrow \boxed{x_3^2 = 0{,}96}$$

con lo que mi nuevo candidato será:

$$x = \begin{bmatrix} 0{,}95\\ 1{,}20\\ 0{,}96 \end{bmatrix} 0{,}8 + 0{,}2 \begin{bmatrix} 1{,}2\\ 1{,}25\\ 0{,}66 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}00\\ 1{,}21\\ 0{,}90 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Gauss-Seidel

El problema:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{12-3x_2-1x_3}{8} \\ x_2 &= \frac{9-1x_1-3x_3}{5} \\ x_3 &= \frac{9-3x_1-1x_2}{5} \end{aligned}$$

mi estado actual $X^1 = [1{,}2, 1{,}25, 0{,}66]$

$$x_1^2 = \frac{12-3*1{,}25-1*0{,}66}{8} \rightarrow \boxed{x_1^2 = 0{,}95}$$

$$x_2^2 = \frac{9-1*1{,}00-3*0{,}66}{5} \rightarrow \boxed{x_2^2 = 1{,}20}$$

$$x_3^2 = \frac{9-3*1-1*1{,}21}{5} \rightarrow \boxed{x_3^2 = 0{,}96}$$

Errores

$$e_1^1 = \frac{|1{,}2-0|}{1{,}2} = 1$$

$$e_2^1 = 1$$

$$e_3^1 = 1$$

con lo que mi nuevo candidato será:

$$x = \begin{bmatrix} 0{,}95 \\ 1{,}20 \\ 0{,}96 \end{bmatrix} 0{,}8 + 0{,}2 \begin{bmatrix} 1{,}2 \\ 1{,}25 \\ 0{,}66 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}00 \\ 1{,}21 \\ 0{,}90 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Gauss-Seidel

El problema:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{12-3x_2-1x_3}{8}\\
x_2 &= \frac{9-1x_1-3x_3}{5}\\
x_3 &= \frac{9-3x_1-1x_2}{5}
\end{aligned}
$$

mi estado actual $X^2 = [1{,}00, 1{,}21, 0{,}90]$ y $\alpha = 0{,}8$

Errores

$$e_1^2 = \frac{|1{,}00 - 1{,}2|}{1{,}00} = 0{,}2$$

$$e_2^2 = 0{,}03$$

$$e_3^2 = 0{,}26$$

$$
\begin{aligned}
x_1^2 &= \frac{12-3*1{,}21-1*0{,}9}{8} \rightarrow \boxed{x_1^2 = 0{,}93}\\
x_2^2 &= \frac{9-1*0{,}95-3*0{,}9}{5} \rightarrow \boxed{x_2^2 = 1{,}07}\\
x_3^2 &= \frac{9-3*0{,}95-1*1{,}10}{5} \rightarrow \boxed{x_3^2 = 1{,}01}
\end{aligned}
$$

con lo que mi nuevo candidato será:

$$x = \begin{bmatrix}0{,}93\\1{,}07\\1{,}01\end{bmatrix} 0{,}8+0{,}2 \begin{bmatrix}1{,}00\\1{,}21\\0{,}90\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0{,}95\\1{,}10\\0{,}99\end{bmatrix}$$

Ejemplo: Gauss-Seidel

El problema:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{12-3x_2-1x_3}{8} \\ x_2 &= \frac{9-1x_1-3x_3}{5} \\ x_3 &= \frac{9-3x_1-1x_2}{5} \end{aligned}$$

mi estado actual $X^2 = [1{,}00, 1{,}21, 0{,}90]$ y $\alpha = 0{,}8$

$$\begin{aligned} x_1^2 &= \frac{12-3*1{,}21-1*0{,}9}{8} \rightarrow \boxed{x_1^2 = 0{,}93} \\ x_2^2 &= \frac{9-1*0{,}95-3*0{,}9}{5} \rightarrow \boxed{x_2^2 = 1{,}07} \\ x_3^2 &= \frac{9-3*0{,}95-1*1{,}10}{5} \rightarrow \boxed{x_3^2 = 1{,}01} \end{aligned}$$

Errores

$$e_1^2 = \frac{|1{,}00 - 1{,}2|}{1{,}00} = 0{,}2$$

$$e_2^2 = 0{,}03$$

$$e_3^2 = 0{,}26$$

con lo que mi nuevo candidato será:

$$x = \begin{bmatrix} 0{,}93 \\ 1{,}07 \\ 1{,}01 \end{bmatrix} 0{,}8 + 0{,}2 \begin{bmatrix} 1{,}00 \\ 1{,}21 \\ 0{,}90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}95 \\ 1{,}10 \\ 0{,}99 \end{bmatrix}$$

Elección de α

La elección es empírica entre $(0, 2)$.

- Si $\alpha = 1$ se trata de Gauss-Seidel Clásico.

Típicamente:

$\alpha \in (0, 1)$: (sub-relajación)
$\hat{x}^j \in (x^{j-1}, x^j)$, es decir un promedio.
Ayuda si el sistema original no converge.

$\alpha \in (1, 2)$ (sobre-relajación)
$\hat{x}^j \notin (x^{j-1}, x^j)$.

Ayuda si converge lento.

Elección de α

La elección es empírica entre $(0,2)$.

- Si $\alpha = 1$ se trata de Gauss-Seidel Clásico.

Típicamente:

$\alpha \in (0,1)$: (sub-relajación)
$\hat{x}^j \in (x^{j-1}, x^j)$, es decir un promedio.
Ayuda si el sistema original no converge.

$\alpha \in (1,2)$ (sobre-relajación)
$\hat{x}^j \notin (x^{j-1}, x^j)$.
Ayuda si converge lento.

Elección de α

La elección es empírica entre $(0, 2)$.

- Si $\alpha = 1$ se trata de Gauss-Seidel Clásico.

Típicamente:

$\alpha \in (0, 1)$: (sub-relajación)
$\hat{x}^j \in (x^{j-1}, x^j)$, es decir un promedio.
Ayuda si el sistema original no converge.

$\alpha \in (1, 2)$ (sobre-relajación)
$\hat{x}^j \notin (x^{j-1}, x^j)$.
Ayuda si converge lento.

Elección de α

La elección es empírica entre $(0, 2)$.

- Si $\alpha = 1$ se trata de Gauss-Seidel Clásico.

Típicamente:

$\alpha \in (0, 1)$: (sub-relajación)
$\hat{x}^j \in (x^{j-1}, x^j)$, es decir un promedio.
Ayuda si el sistema original no converge.

$\alpha \in (1, 2)$ (sobre-relajación)
$\hat{x}^j \notin (x^{j-1}, x^j)$.

Ayuda si converge lento.

Elección de α

La elección es empírica entre $(0, 2)$.

- Si $\alpha = 1$ se trata de Gauss-Seidel Clásico.

Típicamente:

$\alpha \in (0, 1)$: (sub-relajación) $\hat{x}^j \in (x^{j-1}, x^j)$, es decir un promedio. Ayuda si el sistema original no converge.	$\alpha \in (1, 2)$ (sobre-relajación) $\hat{x}^j \notin (x^{j-1}, x^j)$. Ayuda si converge lento.

Elección de α

La elección es empírica entre $(0, 2)$.

- Si $\alpha = 1$ se trata de Gauss-Seidel Clásico.

Típicamente:

$\alpha \in (0, 1)$: (sub-relajación) $\hat{x}^j \in (x^{j-1}, x^j)$, es decir un promedio. Ayuda si el sistema original no converge.	$\alpha \in (1, 2)$ (sobre-relajación) $\hat{x}^j \notin (x^{j-1}, x^j)$. Ayuda si converge lento.

Métodos Iterativos

Sistemas de Ecuaciones no lineales

Es posible extender métodos vistos a SENL.

Cuidado, estos sistemas son más sensibles a condiciones iniciales.

Ejemplo Sea el sistema:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_1 x_2 &= 10 \\ x_2 + 3x_1 x_2^2 &= 57 \end{aligned}$$

tomando $X = [1, 4]$

Sistemas de Ecuaciones no lineales

Es posible extender métodos vistos a SENL.

Cuidado, estos sistemas son más sensibles a condiciones iniciales.

Ejemplo Sea el sistema:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_1 x_2 &= 10 \\ x_2 + 3x_1 x_2^2 &= 57 \end{aligned}$$

tomando $X = [1, 4]$

Sistemas de Ecuaciones no lineales

Es posible extender métodos vistos a SENL.

Cuidado, estos sistemas son más sensibles a condiciones iniciales.

Ejemplo Sea el sistema:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_1 x_2 &= 10 \\ x_2 + 3x_1 x_2^2 &= 57 \end{aligned}$$

tomando $X = [1, 4]$

SENL: ejemplo

Podemos despejar:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt{10 - x_1 x_2} \\
x_2 &= \sqrt{\frac{57 - x_2}{3x_1}}
\end{aligned}
$$

Si aplicamos Gauss-Seidel

$$
\begin{aligned}
x_1^1 &= \sqrt{10 - 1 * 4} = 2{,}44 \qquad & x_1^2 &= \sqrt{10 - 2{,}44 * 2{,}68} = 1{,}84 \\
x_2^1 &= \sqrt{\frac{57 - 4}{3 * 2{,}44}} = 2{,}68 \qquad & x_2^2 &= \sqrt{\frac{57 - 2{,}68}{3 * 1{,}84}} = 3{,}12
\end{aligned}
$$

SENL: ejemplo

Podemos despejar:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt{10 - x_1 x_2} \\
x_2 &= \sqrt{\frac{57 - x_2}{3x_1}}
\end{aligned}
$$

Si aplicamos Gauss-Seidel

$$
\begin{array}{lcl|lcl}
x_1^1 = \sqrt{10 - 1 * 4} & = & 2{,}44 & x_1^2 = \sqrt{10 - 2{,}44 * 2{,}68} & = & 1{,}84 \\
x_2^1 = \sqrt{\frac{57-4}{3*{\color{red}2{,}44}}} & = & 2{,}68 & x_2^2 = \sqrt{\frac{57-2{,}68}{3*{\color{red}1{,}84}}} & = & 3{,}12
\end{array}
$$