Métodos Numéricos - Clase 8

Ulises Bussi- Javier Portillo

1° cuatrimestre 2020

Aproximaciones simples
- Interpretación geométrica
- Ejemplo
- Derivada Segunda

Aproximaciones superiores
- Interpretación geométrica
- Ejemplo
- Aumentando la precisión

Inestabilidad y Amplificación de Ruido

Derivación Numérica

Derivación Numérica

¿Qué vamos a hacer? Muchas veces, queremos derivar una señal o conjunto de datos del que no tenemos una expresión analítica.

Las derivadas que veremos hoy serán suponiendo que el vector de variable independiente está equiespaciado

Derivación Numérica

¿Qué vamos a hacer? Muchas veces, queremos derivar una señal o conjunto de datos del que no tenemos una expresión analítica.

Las derivadas que veremos hoy serán suponiendo que el vector de variable independiente está equiespaciado

Derivada hacia adelante

Supongamos que conocemos la expresión analítica.

Calculamos el polinomio de Taylor enx_i para aproximar $f(x_{i+1})$:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2}(x_{i+1} - x_i)^2 + \dots$$

Derivada hacia adelante

Supongamos que conocemos la expresión analítica.

Calculamos el polinomio de Taylor en x_i para aproximar $f(x_{i+1})$:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2}h^2 + \ldots$$

Derivada hacia adelante

Supongamos que conocemos la expresión analítica.

Calculamos el polinomio de Taylor en x_i para aproximar $f(x_{i+1})$:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2}h^2 + \ldots$$

Si despejamos $f'(x_i)$:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + \underbrace{\frac{f''(x_i)}{2}h + \ldots}_{O(h)}$$

Derivada hacia adelante

Supongamos que conocemos la expresión analítica.
Calculamos el polinomio de Taylor enx_i para aproximar $f(x_{i+1})$:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2}h^2 + \dots$$

Si despejamos $f'(x_i)$:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + \underbrace{\frac{f''(x_i)}{2}h + \dots}_{O(h)}$$

Derivada hacia adelante:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$$

Derivada hacia atras

Supongamos que conocemos la expresión analítica.
Calculamos el polinomio de Taylor enx_i para aproximar $f(x_{i-1})$:

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i-1} - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2}(x_{i-1} - x_i)^2 + \dots$$

Derivada hacia atras

Supongamos que conocemos la expresión analítica.
Calculamos el polinomio de Taylor enx_i para aproximar $f(x_{i-1})$:

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2}h^2 + \dots$$

Derivada hacia atras

Supongamos que conocemos la expresión analítica.
Calculamos el polinomio de Taylor enx_i para aproximar $f(x_{i-1})$:

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2}h^2 + \dots$$

Si despejamos $f'(x_i)$:

$$f'(x_i) = -\frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{h} + \underbrace{\frac{f''(x_i)}{2}h + \dots}_{O(h)}$$

Derivada hacia atras

Supongamos que conocemos la expresión analítica.
Calculamos el polinomio de Taylor enx_i para aproximar $f(x_{i-1})$:

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2}h^2 + \dots$$

Si despejamos $f'(x_i)$:

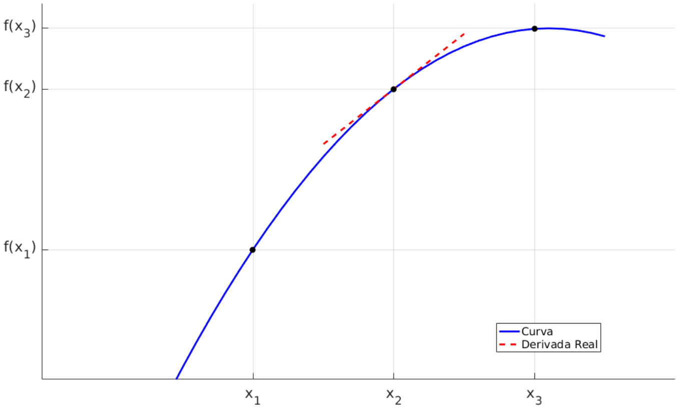
$$f'(x_i) = -\frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{h} + \underbrace{\frac{f''(x_i)}{2}h + \dots}_{O(h)}$$

Derivada hacia atrás:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$$

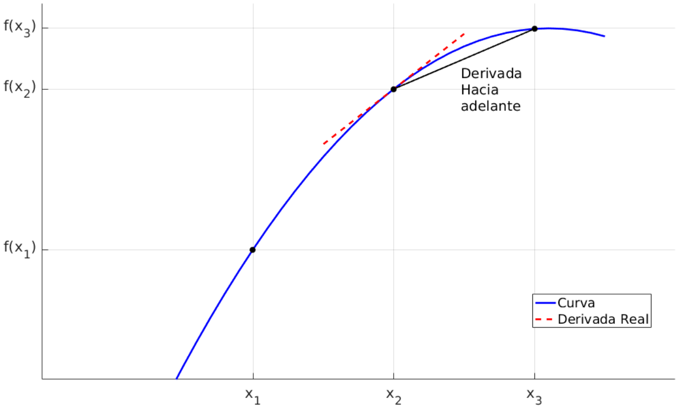
Interpretación geométrica

Miremos un gráfico:



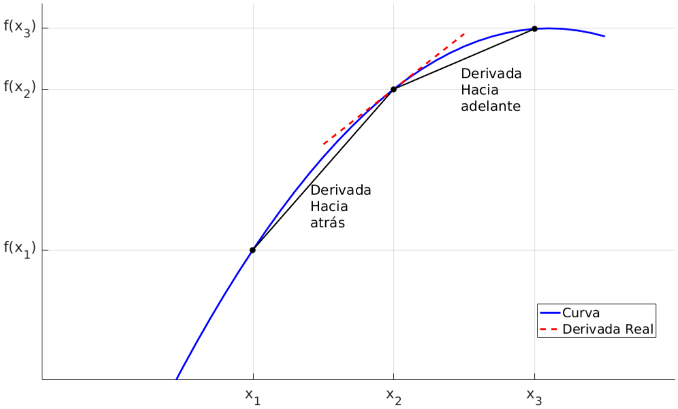
Interpretación geométrica

Miremos un gráfico:

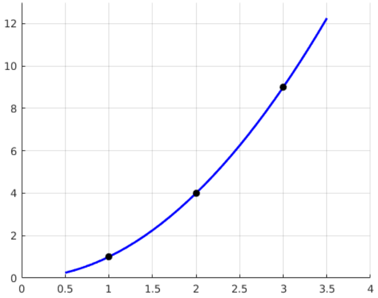


Interpretación geométrica

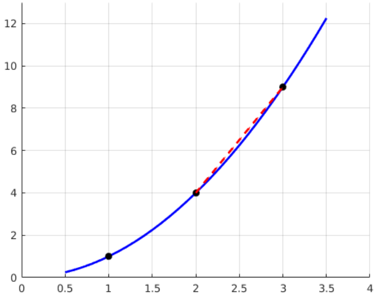
Miremos un gráfico:



Supongamos que tenemos $x = [1, 2, 3]$, $y = [1, 4, 9]$ generados de la parábola $y = x^2$ y queremos encontrar la derivada en $x = 2$:



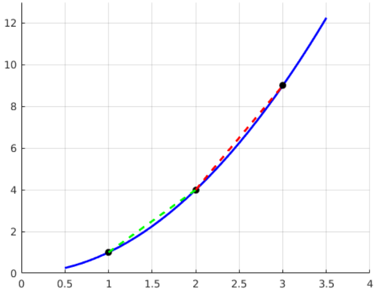
Supongamos que tenemos $x = [1, 2, 3]$, $y = [1, 4, 9]$ generados de la parábola $y = x^2$ y queremos encontrar la derivada en $x = 2$:



En avance:

$$f'(x = 2) \approx \frac{9 - 4}{3 - 2} = 5$$

Supongamos que tenemos $x = [1, 2, 3]$, $y = [1, 4, 9]$ generados de la parábola $y = x^2$ y queremos encontrar la derivada en $x = 2$:



En avance:

$$f'(x = 2) \approx \frac{9 - 4}{3 - 2} = 5$$

En retroceso:

$$f'(x = 2) \approx \frac{4 - 1}{2 - 1} = 3$$

Derivada Segunda

Planteamos Taylor :

$$f(x_{i+2}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+2} - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2}(x_{i+2} - x_i)^2 + \ldots$$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i}{2}(x_{i+1} - x_i)^2 + \ldots$$

Derivada Segunda

Planteamos Taylor :

$$f(x_{i+2}) = f(x_i) + f'(x_i)2h + \frac{f''(x_i)}{2}(2h)^2 + \dots$$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(h) + \frac{f''(x_i}{2}(h)^2 + \dots$$

Derivada Segunda

Planteamos Taylor :

$$f(x_{i+2}) = f(x_i) + f'(x_i)2h + \frac{f''(x_i)}{2}(2h)^2 + \ldots$$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(h) + \frac{f''(x_i}{2}(h)^2 + \ldots$$

tomamos la segunda, la multiplicamos x2 y las restamos:

$$f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) = -f(x_i) + 2\frac{f''(x_i)}{2}h^2 + \ldots$$

Derivada Segunda

$$f(x_{i+2}) - f(x_{i+1}) = -f(x_i) + 2\frac{f''(x_i)}{2}h^2 + \ldots$$

Despejamos $f''(x_i)$:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h^2)$$

Derivada Segunda:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$$

Derivada Segunda

$$f(x_{i+2}) - f(x_{i+1}) = -f(x_i) + 2\frac{f''(x_i)}{2}h^2 + \ldots$$

Despejamos $f''(x_i)$:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h^2)$$

Derivada Segunda:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$$

Derivada Segunda

$$f(x_{i+2}) - f(x_{i+1}) = -f(x_i) + 2\frac{f''(x_i)}{2}h^2 + \ldots$$

Despejamos $f''(x_i)$:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h^2)$$

Derivada Segunda:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$$

Derivación Numérica

Derivada Centrada

Hasta acá, es sencillo el cálculo de derivadas, pero no del todo preciso.

Tomemos Taylor hacia atrás y hacia adelante:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2}h^2 + \frac{f'''(x_i)}{6}h^3$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2}h^2 - \frac{f'''(x_i)}{6}h^3$$

y las restemos:

$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) = 2f'(x_i)h + 2\frac{f'''(x_i)}{6}h^3$$

Derivada Centrada

Hasta acá, es sencillo el cálculo de derivadas, pero no del todo preciso.
Tomemos Taylor hacia atrás y hacia adelante:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2}h^2 + \frac{f'''(x_i)}{6}h^3$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2}h^2 - \frac{f'''(x_i)}{6}h^3$$

y las restemos:

$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) = 2f'(x_i)h + 2\frac{f'''(x_i)}{6}h^3$$

Derivada Centrada

Hasta acá, es sencillo el cálculo de derivadas, pero no del todo preciso.
Tomemos Taylor hacia atrás y hacia adelante:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2}h^2 + \frac{f'''(x_i)}{6}h^3$$
$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2}h^2 - \frac{f'''(x_i)}{6}h^3$$

y las restemos:

$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) = 2f'(x_i)h + 2\frac{f'''(x_i)}{6}h^3$$

Derivada Centrada

$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) = 2f'(x_i)h + 2\frac{f'''(x_i)}{6}h^3$$

Si despejamos la derivada de esta expresión:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} + \underbrace{\frac{f'''(x_i)}{6}h^2 + \dots}_{O(h^2)}$$

Derivada Centrada:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$$

Derivada Centrada

$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) = 2f'(x_i)h + 2\frac{f'''(x_i)}{6}h^3$$

Si despejamos la derivada de esta expresión:

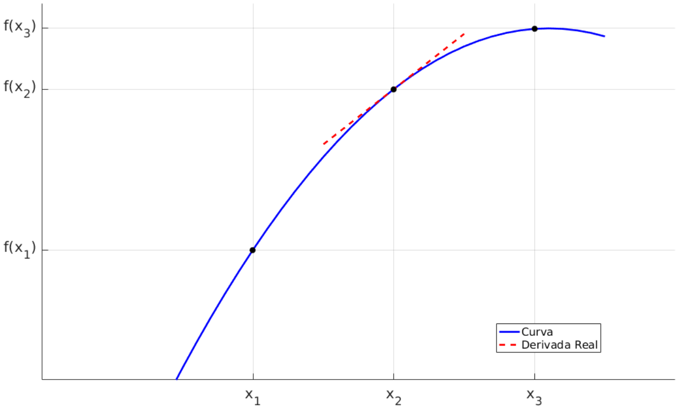
$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} + \underbrace{\frac{f'''(x_i)}{6}h^2 + \dots}_{O(h^2)}$$

Derivada Centrada:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$$

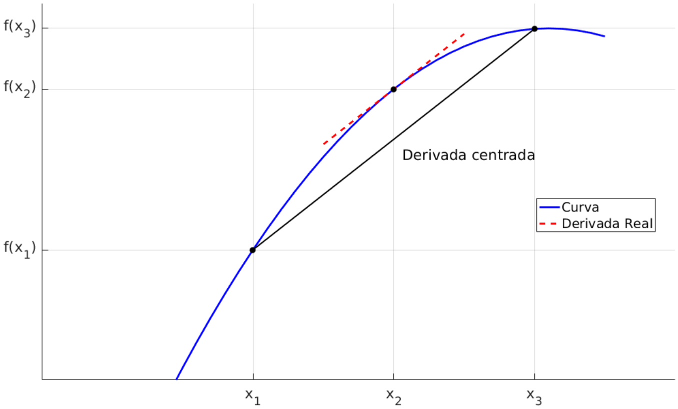
Interpretación geométrica

Miremos un gráfico:

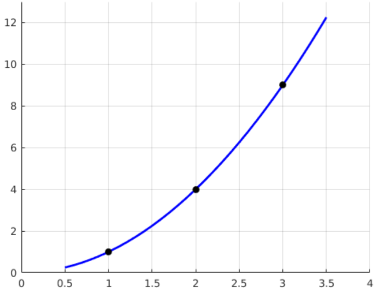


Interpretación geométrica

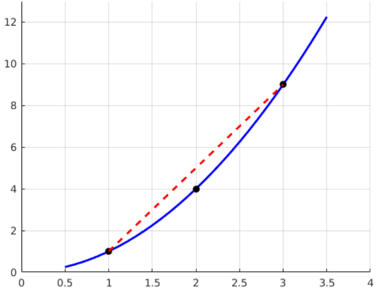
Miremos un gráfico:



Supongamos que tenemos $x = [1, 2, 3]$, $y = [1, 4, 9]$ generados de la parábola $y = x^2$ y queremos encontrar la derivada en $x = 2$:



Supongamos que tenemos $x = [1, 2, 3]$, $y = [1, 4, 9]$ generados de la parábola $y = x^2$ y queremos encontrar la derivada en $x = 2$:



Centrada:

$$f'(x = 2) \approx \frac{9 - 1}{3 - 1} = 4$$

Derivada segunda centrada

Es posible realizar un procedimiento similar para el planteo de una derivada segunda centrada cuya expresión será:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2}$$

Aumentando la precisión

Anteriormente vimos expresiones de la derivada primera partiendo del Taylor.
Donde descartamos los términos de orden 2 o superiores. Si en vez de descartar la derivada segunda la reemplazamos por la expresión que vimos antes:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$$

Obtendremos:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2h^2}h^2 + \ldots$$

Aumentando la precisión

Anteriormente vimos expresiones de la derivada primera partiendo del Taylor.
Donde descartamos los términos de orden 2 o superiores. Si en vez de descartar la derivada segunda la reemplazamos por la expresión que vimos antes:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$$

Obtendremos:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2h^2}h^2 + \dots$$

Aumentando la precisión

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2h^2}h^2 + \dots$$

Si despejamos la primer derivada desde aquí:

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h}$$

Aumentando la precisión

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2h^2}h^2 + \dots$$

Si despejamos la primer derivada desde aquí:

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h}$$

Derivación Numérica

Inestabilidad y Amplificación de Ruido

Al calcular derivadas numéricamente hay que tener **Cuidado**.

Si los **datos** tienen **Ruido**. $\rightarrow$ Se amplifica.

A veces el ruido oculta el comportamiento de la derivada.

Inestabilidad y Amplificación de Ruido

Al calcular derivadas numéricamente hay que tener **Cuidado**.

Si los **datos** tienen **Ruido**. → Se amplifica.

A veces el ruido oculta el comportamiento de la derivada.

Inestabilidad y Amplificación de Ruido

Al calcular derivadas numéricamente hay que tener **Cuidado**.

Si los **datos** tienen **Ruido**. $\rightarrow$ Se amplifica.

A veces el ruido oculta el comportamiento de la derivada.

Inestabilidad y Amplificación de Ruido

Al calcular derivadas numéricamente hay que tener **Cuidado**.

Si los **datos** tienen **Ruido**. $\rightarrow$ Se amplifica.

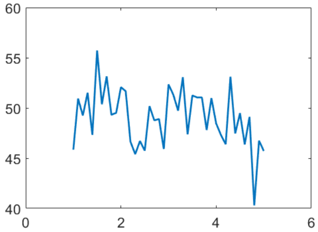
A veces el ruido oculta el comportamiento de la derivada.

Amplificación de Ruido

Supongamos que tenemos el conjunto de datos
$x = 1 : ,1 : 5, y = 50 + 3\text{randn}(\text{length}(x), 1)$

Amplificación de Ruido

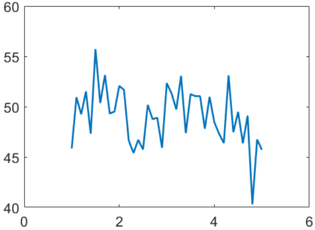
Supongamos que tenemos el conjunto de datos
$x = 1 : ,1 : 5, y = 50 + 3\text{randn}(\text{length}(x), 1)$

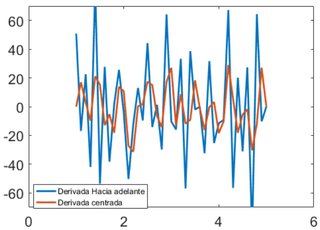


Amplificación de Ruido

Supongamos que tenemos el conjunto de datos

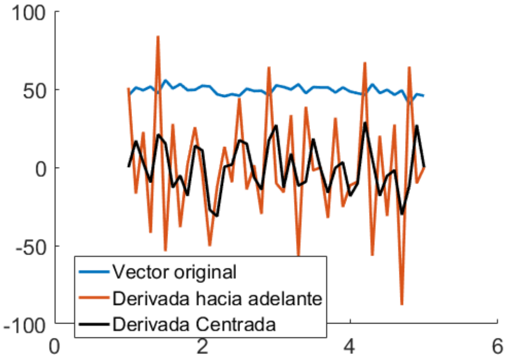
$x = 1 : ,1 : 5, y = 50 + 3\mathrm{randn}(\mathrm{length}(x), 1)$





Amplificación de Ruido

Supongamos que tenemos el conjunto de datos
$x = 1 : ,1 : 5, y = 50 + 3\text{randn}(\text{length}(x), 1)$



$std(y) = 2{,}88$

$std(y'_{forward}) = 38{,}41$

$std(y'_{center}) = 15{,}77$