Métodos Numéricos - Clase 6

Ulises Bussi- Javier Portillo

1° cuatrimestre 2020

Universidad Nacional de Quilmes

Ajustes de Curvas

Modelado y Datos experimentales.

Predecir comportamiento Dado un conjunto de datos, predecir nuevos valores.

¿Por qué? Es imposible medir todos los posibles valores de un modelo físico $\rightarrow$ Modelamos y predecimos.

Modelado y Datos experimentales.

Predecir comportamiento Dado un conjunto de datos, predecir nuevos valores.

¿Por qué? Es imposible medir todos los posibles valores de un modelo físico → Modelamos y predecimos.

Modelado y Datos experimentales.

Predecir comportamiento Dado un conjunto de datos, predecir nuevos valores.

¿Por qué? Es imposible medir todos los posibles valores de un modelo físico $\rightarrow$ Modelamos y predecimos.

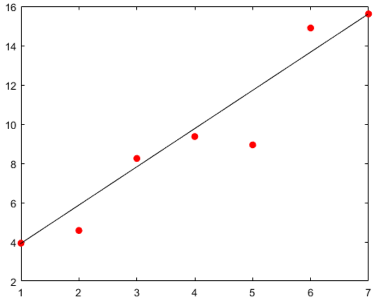
Ajustes de Curvas

Regresión Lineal

Dado un conjunto de pares ordenados $\rightarrow$ Encontrar la recta que mejor los representa.

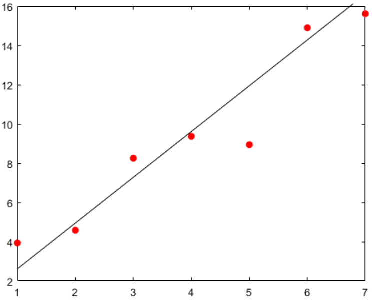
Regresión Lineal

Dado un conjunto de pares ordenados $\rightarrow$ Encontrar la recta que mejor los representa.



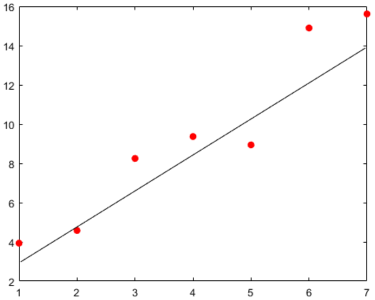
Regresión Lineal

Dado un conjunto de pares ordenados $\rightarrow$ Encontrar la recta que mejor los representa.



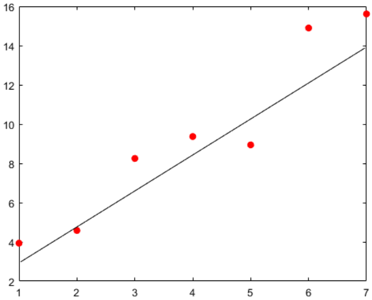
Regresión Lineal

Dado un conjunto de pares ordenados $\rightarrow$ Encontrar la recta que mejor los representa.



Regresión Lineal

Dado un conjunto de pares ordenados $\rightarrow$ Encontrar la recta que mejor los representa.



Hay que definir un criterio

Regresión Lineal

Podemos usar el Residual:

Dado $\{x_i, y_i\}$, $i = 1, 2, ..., 3$ y la recta $\hat{y} = ax + b$ el residual S se calcula cómo:

$$S = \sum_{i=1}^{n} y_i - \hat{y}_i = \sum_{i=1}^{n} y_i - (a * x_i + b)$$

E intentar minimizarlo $\rightarrow$ Encontrar $\{a, b\}$ para que el " error " sea lo más pequeño posible (S cercano a cero).

No es buena idea!

Regresión Lineal

Podemos usar el Residual:
Dado $\{x_i, y_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, 3$ y la recta $\hat{y} = ax + b$ el residual S se calcula cómo:

$$S = \sum_{i=1}^{n} y_i - \hat{y}_i = \sum_{i=1}^{n} y_i - (a * x_i + b)$$

E intentar minimizarlo $\rightarrow$ Encontrar $\{a, b\}$ para que el " error " sea lo más pequeño posible (S cercano a cero).

No es buena idea!

Regresión Lineal

Podemos usar el Residual:
Dado $\{x_i, y_i\}$, $i = 1, 2, ..., 3$ y la recta $\hat{y} = ax + b$ el residual S se calcula cómo:

$$S = \sum_{i=1}^{n} y_i - \hat{y}_i = \sum_{i=1}^{n} y_i - (a * x_i + b)$$

E intentar minimizarlo $\rightarrow$ Encontrar $\{a, b\}$ para que el " error " sea lo más pequeño posible (S cercano a cero).

No es buena idea!

Regresión Lineal

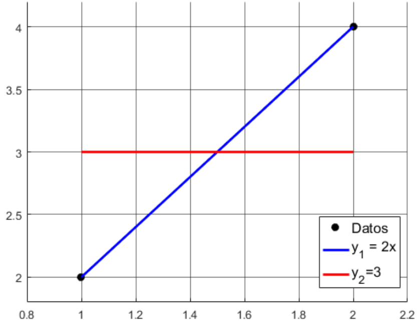
Podemos usar el Residual:
Dado $\{x_i, y_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, 3$ y la recta $\hat{y} = ax + b$ el residual S se calcula cómo:

$$S = \sum_{i=1}^{n} y_i - \hat{y}_i = \sum_{i=1}^{n} y_i - (a * x_i + b)$$

E intentar minimizarlo $\rightarrow$ Encontrar $\{a, b\}$ para que el " error " sea lo más pequeño posible (S cercano a cero).

No es buena idea!

Regresión Lineal



Para la recta y_1:

$$S = (2-2*1)+(4-2*2) = 0$$

Para la recta y_2:

$$S = (2-3)+(4-3) = 0$$

Cuadrados Mínimos

Propuesta: minimizar

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (a * x_i + b)\right]^2$$

O sea, encontrar a y b que hagan a S lo más chico posible.
¿Cómo? Busco donde:

$\frac{\partial S}{\partial b} = 0 \leftarrow$ valor de b que minimiza S

$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \leftarrow$ valor de a que minimiza S

Cuadrados Mínimos

Propuesta: minimizar

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a * x_i + b)]^2$$

O sea, encontrar a y b que hagan a S lo más chico posible.

¿Cómo? Busco donde:

$\frac{\partial S}{\partial b} = 0 \leftarrow$ valor de b que minimiza S

$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \leftarrow$ valor de a que minimiza S

Cuadrados Mínimos

Propuesta: minimizar

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a * x_i + b)]^2$$

O sea, encontrar a y b que hagan a S lo más chico posible.
¿Cómo? Busco donde:

$\frac{\partial S}{\partial b} = 0 \leftarrow$ valor de b que minimiza S

$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \leftarrow$ valor de a que minimiza S

Cuadrados Mínimos

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \frac{\partial \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a * x_i + b)]^2}{\partial b}$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} [y_i - (a * x_i + b)] = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} (a * x_i) - \sum_{i=1}^{n} b = 0$$

$$\boxed{n{\color{red}b} + [\sum_{i=1}^{n} x_i]{\color{red}a} = [\sum_{i=1}^{n} y_i]}$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{\partial \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a * x_i + b)]^2}{\partial a}$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n} [(y_i - (a * x_i + b))(x_i)] = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i * y_i - \sum_{i=1}^{n} a * x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i * b = 0$$

$$\boxed{[\sum_{i=1}^{n} x_i]{\color{red}b} + [\sum_{i=1}^{n} x_i^2]{\color{red}a} = [\sum_{i=1}^{n} x_i * y_i]}$$

Universidad Nacional de Quilmes

Cuadrados mínimos

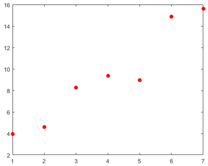
Ahora tenemos este sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas que se puede resolver:

$$a = \frac{n \sum (x_i * y_i) - \sum x_i * \sum y_i}{n * \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \bar{y} - a * \bar{x}$$

Ejemplo: cuadrados mínimos

Dado $x = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]$ e $y = [3{,}93, 4{,}58, 8{,}25, 9{,}36, 8{,}94, 14{,}89, 15{,}61]$ encontrar la recta que mejor ajusta por cuadrados mínimos.



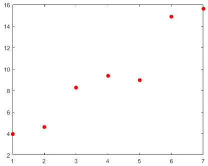
Calculemos valores que necesitamos:

$$\begin{array}{llll}
\sum x_i = 28 & & \sum y_i = 65{,}56 \\
\sum x_i * y_i = 318{,}59 & & \sum x_i^2 = 140 \\
\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = 4 & & \bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = 9{,}37
\end{array}$$

Universidad Nacional de Quilmes

Ejemplo: cuadrados mínimos

Dado $x = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]$ e $y = [3{,}93, 4{,}58, 8{,}25, 9{,}36, 8{,}94, 14{,}89, 15{,}61]$ encontrar la recta que mejor ajusta por cuadrados mínimos.

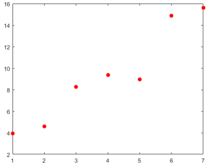


Calculemos valores que necesitamos:

$$
\begin{array}{llll}
\sum x_i = 28 & & \sum y_i = 65{,}56 \\
\sum x_i * y_i = 318{,}59 & & \sum x_i^2 = 140 \\
\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = 4 & & \bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = 9{,}37
\end{array}
$$

Universidad Nacional de Quilmes

Dado $x = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]$ e $y = [3{,}93, 4{,}58, 8{,}25, 9{,}36, 8{,}94, 14{,}89, 15{,}61]$ encontrar la recta que mejor ajusta por cuadrados mínimos.

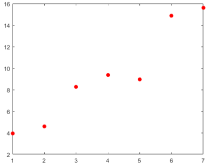


$$a = \frac{7 * 318{,}59 - 28 * 65{,}56}{7 * 140 - 28^2} = 2{,}0125$$

$$b = 9{,}37 - 2{,}0125 * 4 = 1{,}32$$

$$\boxed{\hat{y} = 2{,}0125x + 1{,}32}$$

Dado $x = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]$ e $y = [3{,}93, 4{,}58, 8{,}25, 9{,}36, 8{,}94, 14{,}89, 15{,}61]$ encontrar la recta que mejor ajusta por cuadrados mínimos.

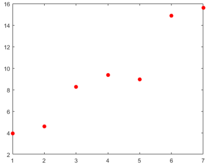


$$a = \frac{7 * 318{,}59 - 28 * 65{,}56}{7 * 140 - 28^2} = 2{,}0125$$

$$b = 9{,}37 - 2{,}0125 * 4 = 1{,}32$$

$$\hat{y} = 2{,}0125x + 1{,}32$$

Dado $x = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]$ e $y = [3{,}93, 4{,}58, 8{,}25, 9{,}36, 8{,}94, 14{,}89, 15{,}61]$ encontrar la recta que mejor ajusta por cuadrados mínimos.



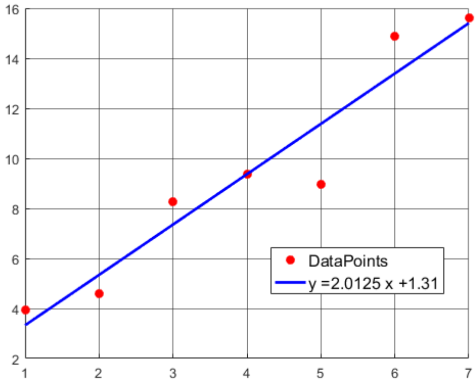
$$a = \frac{7 * 318{,}59 - 28 * 65{,}56}{7 * 140 - 28^2} = 2{,}0125$$

$$b = 9{,}37 - 2{,}0125 * 4 = 1{,}32$$

$$\hat{y} = 2{,}0125x + 1{,}32$$

Ejemplo: cuadrados mínimos

Dado $x = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]$ e $y = [3{,}93, 4{,}58, 8{,}25, 9{,}36, 8{,}94, 14{,}89, 15{,}61]$ encontrar la recta que mejor ajusta por cuadrados mínimos.



Coeficiente de Determinación.

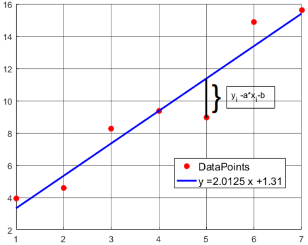
Una vez realizado el ajuste podemos calcular:

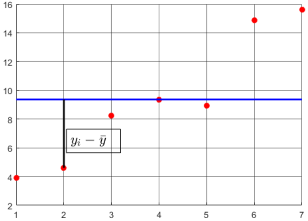
El cuadrado de residual para todos los puntos:

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a * x_i - b)^2$$

Y el residual respecto de la media:

$$S_t = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$





Universidad Nacional de Quilmes

Coeficiente de Determinación.

Se llama coeficiente de determinación a la variable $r \in [0, 1]$ que se calcula cómo:

$$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t}$$

Nos dice cuanto mejor es ajustar la recta a los datos que simplemente usar el promedio.

Coeficiente de Determinación.

Se llama coeficiente de determinación a la variable $r \in [0, 1]$ que se calcula cómo:

$$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t}$$

Nos dice cuanto mejor es ajustar la recta a los datos que simplemente usar el promedio.

Universidad Nacional de Quilmes

Ajustes de Curvas

Relaciones no lineales.

Muchas veces, nos encontramos con relaciones No Lineales:

$$y = a * e^{b*x}$$

Modelo Exponencial

$$y = a * x^b$$

Modelo de potencia

$$y = a * \frac{x}{x + b}$$

Modelo de crecimiento con saturación

Es posible encontrar una transformación tal que se pueda expresar como un modelo lineal!

Relaciones no lineales.

Muchas veces, nos encontramos con relaciones No Lineales:

$$y = a * e^{b*x}$$

Modelo Exponencial

$$y = a * x^b$$

Modelo de potencia

$$y = a * \frac{x}{x+b}$$

Modelo de crecimiento con saturación

Es posible encontrar una transformación tal que se pueda expresar como un modelo lineal!

Relaciones no lineales.

Muchas veces, nos encontramos con relaciones No Lineales:

$$y = a * e^{b*x}$$

Modelo Exponencial

$$y = a * x^b$$

Modelo de potencia

$$y = a * \frac{x}{x+b}$$

Modelo de crecimiento con saturación

Es posible encontrar una transformación tal que se pueda expresar como un modelo lineal!

Relaciones no lineales.

Muchas veces, nos encontramos con relaciones No Lineales:

$$y = a * e^{b*x}$$

Modelo Exponencial

$$y = a * x^b$$

Modelo de potencia

$$y = a * \frac{x}{x + b}$$

Modelo de crecimiento con saturación

Es posible encontrar una transformación tal que se pueda expresar como un modelo lineal!

Relaciones no lineales.

Muchas veces, nos encontramos con relaciones No Lineales:

$$y = a * e^{b*x}$$

Modelo Exponencial

$$y = a * x^b$$

Modelo de potencia

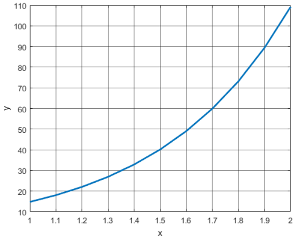
$$y = a * \frac{x}{x + b}$$

Modelo de crecimiento con saturación

Es posible encontrar una transformación tal que se pueda expresar como un modelo lineal!

Linealización y ajuste

Tomemos el modelo exponencial. Si trabajamos con el $\ln y$:



$$\underbrace{\ln y}_{y^*} = \ln(a * e^{b*x})$$

$$y^* = \ln(a) + \ln(e^{b*x})$$

$$y^* = \ln(a) + b * x$$

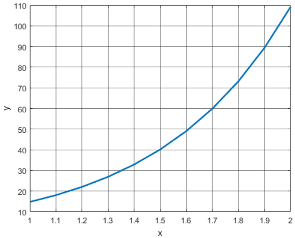
Linealización y ajuste

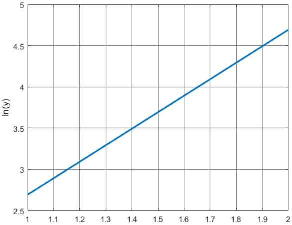
Tomemos el modelo exponencial. Si trabajamos con el $\ln y$:

$$\underbrace{\ln y}_{y^*} = \ln(a * e^{b*x})$$

$$y^* = \ln(a) + \ln(e^{b*x})$$

$$y^* = \ln(a) + b * x$$





Linealización y ajuste

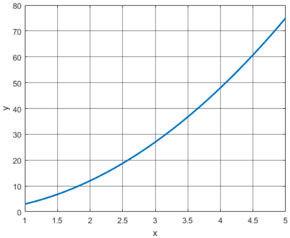
Tomemos el modelo de potencia. Si trabajamos con el $\ln y$:

$$\underbrace{\ln y}_{y*} = \ln(a * x^b)$$

$$y^* = \ln(a) + \ln(x^b)$$

$$y^* = \ln(a) + b * \underbrace{\ln(x)}_{x^*}$$

$$y^* = \ln(a) + bx^*$$



Linealización y ajuste

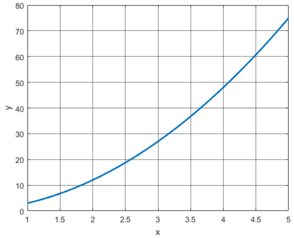
Tomemos el modelo de potencia. Si trabajamos con el $\ln y$:

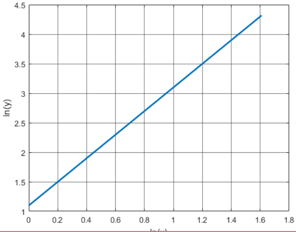
$$\underbrace{\ln y}_{y*} = \ln(a * x^b)$$

$$y^* = \ln(a) + \ln(x^b)$$

$$y^* = \ln(a) + b * \underbrace{\ln(x)}_{x^*}$$

$$y^* = \ln(a) + bx^*$$





Ajustes de Curvas

Ajuste Polinomial

¿Que sucede si quisieramos ajustar por ejemplo un polinomio de grado 2?

El mismo procedimiento de cuadrados mínimos podría ajustarse con un polinomio de la forma:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

A la hora de plantear el residual tendríamos:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a_0 - a_1 * x_i - a_2 x_i^2\right)^2$$

Ajuste Polinomial

¿Que sucede si quisieramos ajustar por ejemplo un polinomio de grado 2?
El mismo procedimiento de cuadrados mínimos podría ajustarse con un polinomio de la forma:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

A la hora de plantear el residual tendríamos:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a_0 - a_1 * x_i - a_2 x_i^2 \right)^2$$

Ajuste Polinomial

Debemos ahora derivar respecto a los 3 coeficientes para minimizar:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i + a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2\right)$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = -2\sum_{i=1}^{n}\left[\left(y_i + a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2\right) x_i\right]$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_2} = -2\sum_{i=1}^{n}\left[\left(y_i + a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2\right) x_i^2\right]$$

Ajuste Polinomial

Operando y despejando como se realizó antes:

$$n * a_0 + a_1 * \sum x_i + a_2 * \sum x_i^2 = \sum y_i$$

$$a_0 * \sum x_i + a_1 * \sum x_i^2 + a_2 * \sum x_i^3 = \sum y_i * x_i$$

$$a_0 * \sum x_i^2 + a_1 * \sum x_i^3 + a_2 * \sum x_i^4 = \sum y_i * x_i^2$$

Un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas!!!

Ajuste Polinomial

Operando y despejando como se realizó antes:

$$n * a_0 + a_1 * \sum x_i + a_2 * \sum x_i^2 = \sum y_i$$

$$a_0 * \sum x_i + a_1 * \sum x_i^2 + a_2 * \sum x_i^3 = \sum y_i * x_i$$

$$a_0 * \sum x_i^2 + a_1 * \sum x_i^3 + a_2 * \sum x_i^4 = \sum y_i * x_i^2$$

Un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas!!!

Ajuste Polinomial

En general, este método puede aplicarse a:

- sistemas con varias variables:
  $S = \sum_{i=1}^{n} z_i - a_0 - a_1 * x_i - a_2 * y_i$
- sistemas no lineales: $S = \sum_{i=1}^{n} y_i - f(x_i)$

En el último caso hay que tener cuidado, el problema puede convertirse en un sistema de ecuaciones no lineal.

Ajuste Polinomial

En general, este método puede aplicarse a:

- sistemas con varias variables:
  $S = \sum_{i=1}^{n} z_i - a_0 - a_1 * x_i - a_2 * y_i$
- sistemas no lineales: $S = \sum_{i=1}^{n} y_i - f(x_i)$

En el último caso hay que tener cuidado, el problema puede convertirse en un sistema de ecuaciones no lineal.

Ajustes de Curvas

Interpolación Polinómica

En general, si queremos predecir valores intermedios a valores dados, proponemos interpolar.

Aproximar el valor utilizando los valores conocidos.

Para un conjuntos de n puntos existe un único polinomio de orden $n-1$ que pase por todos esos puntos.

Interpolación Polinómica

En general, si queremos predecir valores intermedios a valores dados, proponemos interpolar.

> Aproximar el valor utilizando los valores conocidos.

Para un conjuntos de n puntos existe un único polinomio de orden $n-1$ que pase por todos esos puntos.

Interpolación Polinómica

En general, si queremos predecir valores intermedios a valores dados, proponemos interpolar.

> Aproximar el valor utilizando los valores conocidos.

Para un conjuntos de n puntos existe un único polinomio de orden $n-1$ que pase por todos esos puntos.

Interpolación Polinómica

Supongamos que tenemos 3 puntos conocidos (x_i, y_i).
Si queremos ajustar una parábola tenemos que buscar los 3 coeficientes a_0, a_1, a_2 que cumplen

$$a_0 + a_1 * x_i + a_2 * x_i^2 = y_i, \ \forall i \in [1, 2, 3]$$

Es posible llevar esto a la forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Esta matriz A se conoce como matriz de Vandermonde. y son conocidas por ser muy mal condicionadas. $\rightarrow$ El sistema será muy sensible.

Se puede usar esta solución pero no es aconsejable

Interpolación Polinómica

Supongamos que tenemos 3 puntos conocidos (x_i, y_i).
Si queremos ajustar una parábola tenemos que buscar los 3 coeficientes a_0, a_1, a_2 que cumplen

$$a_0 + a_1 * x_i + a_2 * x_i^2 = y_i, \ \forall i \in [1, 2, 3]$$

Es posible llevar esto a la forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Esta matriz A se conoce como matriz de Vandermonde. y son conocidas por ser muy mal condicionadas. $\rightarrow$ El sistema será muy sensible.

Se puede usar esta solución pero no es aconsejable

Interpolación Polinómica

Supongamos que tenemos 3 puntos conocidos (x_i, y_i).
Si queremos ajustar una parábola tenemos que buscar los 3 coeficientes a_0, a_1, a_2 que cumplen

$$a_0 + a_1 * x_i + a_2 * x_i^2 = y_i, \ \forall i \in [1, 2, 3]$$

Es posible llevar esto a la forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Esta matriz A se conoce como matriz de Vandermonde. y son conocidas por ser muy mal condicionadas. $\rightarrow$ El sistema será muy sensible.

Se puede usar esta solución pero no es aconsejable

Interpolación Polinómica

Supongamos que tenemos 3 puntos conocidos (x_i, y_i).
Si queremos ajustar una parábola tenemos que buscar los 3 coeficientes a_0, a_1, a_2 que cumplen

$$a_0 + a_1 * x_i + a_2 * x_i^2 = y_i, \ \forall i \in [1, 2, 3]$$

Es posible llevar esto a la forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

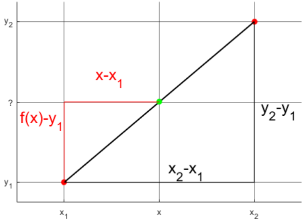
Esta matriz A se conoce como matriz de Vandermonde. y son conocidas por ser muy mal condicionadas. $\rightarrow$ El sistema será muy sensible.

Se puede usar esta solución pero no es aconsejable

Interpolación de Newton

Si queremos interpolar utilizando 2 puntos, los unimos con una recta y buscamos el valor que nos interesa relacionando las pendientes:

$$\frac{f(x)-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$



Interpolación de Newton

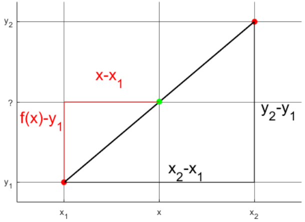
Si queremos interpolar utilizando 2 puntos, los unimos con una recta y buscamos el valor que nos interesa relacionando las pendientes:

$$\frac{f(x) - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Despejando:

$$f(x) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Polinomio interpolador de Newton de grado 1



Interpolación de Newton

Si queremos interpolar utilizando 3 puntos proponemos el polinomio de grado 3:

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_1) + b_2(x - x_1)(x - x_2)$$

Si reemplazamos por los puntos conocidos tendremos:

$$f(x_1) = b_0 + b_1\underbrace{(x_1 - x_1)}_{0} + b_2\underbrace{(x_1 - x_1)}_{0}(x_1 - x_2) = b_0$$

Con lo que $\boxed{b_0 = f(x_1) = y_1}$

Interpolación de Newton

Si queremos interpolar utilizando 3 puntos proponemos el polinomio de grado 3:

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_1) + b_2(x - x_1)(x - x_2)$$

Si reemplazamos por los puntos conocidos tendremos:

$$f(x_1) = b_0 + b_1 \underbrace{(x_1 - x_1)}_{0} + b_2 \underbrace{(x_1 - x_1)}_{0}(x_1 - x_2) = b_0$$

Con lo que $\boxed{b_0 = f(x_1) = y_1}$

Interpolación de Newton

Si queremos interpolar utilizando 3 puntos proponemos el polinomio de grado 3:

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_1) + b_2(x - x_1)(x - x_2)$$

Si reemplazamos por los puntos conocidos tendremos:

$$f(x_2) = b_0 + b_1(x_2 - x_1) + b_2(x_2 - x_1)\underbrace{(x_2 - x_2)}_{0}$$

con lo que si a $f(x_2)$ le restamos b_0 y dividimos por $(x_2 - x_1)$:

$$\boxed{b_1 = \frac{f(x_2) - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Interpolación de Newton

Si queremos interpolar utilizando 3 puntos proponemos el polinomio de grado 3:

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_1) + b_2(x - x_1)(x - x_2)$$

Si reemplazamos por los puntos conocidos tendremos:

$$f(x_2) = b_0 + b_1(x_2 - x_1) + b_2(x_2 - x_1)\underbrace{(x_2 - x_2)}_{0}$$

con lo que si a $f(x_2)$ le restamos b_0 y dividimos por $(x_2 - x_1)$:

$$\boxed{b_1 = \frac{f(x_2) - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Interpolación de Newton

Si queremos interpolar utilizando 3 puntos proponemos el polinomio de grado 3:

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_1) + b_2(x - x_1)(x - x_2)$$

Si reemplazamos por los puntos conocidos tendremos:

$$f(x_2) = b_0 + b_1(x_2 - x_1) + b_2(x_2 - x_1)\underbrace{(x_2 - x_2)}_{0}$$

con lo que si a $f(x_2)$ le restamos b_0 y dividimos por $(x_2 - x_1)$:

$$\boxed{b_1 = \frac{f(x_2) - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Interpolación de Newton

Por último:

$$f(x_3) = b_0 + b_1(x_3 - x_1) + b_2(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

Restando b_0, dividiendo por $(x_3 - x_1)$:

$$\frac{f(x_3) - b_0}{x_3 - x_1} = b_1 + b_2(x_3 - x_2)$$

Si restamos el valor hallado de b_1 y dividimos por $(x_3 - x_2)$:

$$\frac{\frac{f(x_3)-b_0}{x_3-x_1} - b_1}{x_3 - x_2} = b_2 \quad \rightarrow \quad \boxed{b_2 = \frac{\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1} - \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3 - x_2}}$$

Interpolación de Newton

Por último:

$$f(x_3) = b_0 + b_1(x_3 - x_1) + b_2(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

Restando b_0, dividiendo por $(x_3 - x_1)$:

$$\frac{f(x_3) - b_0}{x_3 - x_1} = b_1 + b_2(x_3 - x_2)$$

Si restamos el valor hallado de b_1 y dividimos por $(x_3 - x_2)$:

$$\frac{\frac{f(x_3)-b_0}{x_3-x_1} - b_1}{x_3 - x_2} = b_2 \quad \rightarrow \quad \boxed{b_2 = \frac{\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1} - \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3 - x_2}}$$

Interpolación de Newton

Por último:

$$f(x_3) = b_0 + b_1(x_3 - x_1) + b_2(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

Restando b_0, dividiendo por $(x_3 - x_1)$:

$$\frac{f(x_3) - b_0}{x_3 - x_1} = b_1 + b_2(x_3 - x_2)$$

Si restamos el valor hallado de b_1 y dividimos por $(x_3 - x_2)$:

$$\frac{\frac{f(x_3)-b_0}{x_3-x_1} - b_1}{x_3 - x_2} = b_2 \quad \rightarrow \quad \boxed{b_2 = \frac{\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1} - \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3 - x_2}}$$

Universidad Nacional de Quilmes

Interpolación de Newton

Por último:

$$f(x_3) = b_0 + b_1(x_3 - x_1) + b_2(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

Restando b_0, dividiendo por $(x_3 - x_1)$:

$$\frac{f(x_3) - b_0}{x_3 - x_1} = b_1 + b_2(x_3 - x_2)$$

Si restamos el valor hallado de b_1 y dividimos por $(x_3 - x_2)$:

$$\frac{\frac{f(x_3)-b_0}{x_3-x_1} - b_1}{x_3 - x_2} = b_2 \qquad \rightarrow \qquad \boxed{b_2 = \frac{\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1} - \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3 - x_2}}$$

Interpolación de Newton

Resumiendo el de orden 2:

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_1) + b_2(x - x_1)(x - x_2)$$

donde:

$$b_0 = y_1$$

$$b_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$b_2 = \frac{\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x1} - \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}}{x_3 - x_2}$$