# Métodos Numéricos - Clase 3

Ulises Bussi- Javier Portillo

$1^\circ$ cuatrimestre 2020

# Sistemas de ecuaciones Lineales (SELs).

**Resolver problemas de la forma**

$$Ax = b$$

con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b$ y $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$

**¿Por qué?** La mayoría de los problemas de ingeniería pueden llevarse a esta forma.

# Sistemas de ecuaciones Lineales (SELs).

**Resolver problemas de la forma**

$$Ax = b$$

con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b$ y $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

**¿Por qué?** La mayoría de los problemas de ingeniería pueden llevarse a esta forma.

# SELs

Muchas veces $x = A^{-1}b$ no es viable (costoso, matriz casi singular, etc).
Existen 2 tipos de algoritmos:

- Métodos Directos.
- Métodos Indirectos.

# SELs

Muchas veces $x = A^{-1}b$ no es viable (costoso, matriz casi singular, etc).
Existen 2 tipos de algoritmos:

- Métodos Directos.
- Métodos Indirectos.

# Matriz Triangular

Si nuestro problema tiene una matriz $A$ de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Podremos aplicar el algoritmo de remonte

# Algoritmo de remonte

Cómo el sistema tiene la forma:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Podemos comenzar mirando desde la ultima fila hacia arriba:

$$a_{n,n}x_n = b_n \rightarrow \boxed{x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}}$$

# Algoritmo de remonte

Luego miramos la fila $n-1$

$$a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \rightarrow \boxed{x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}}$$

Si seguimos con la fila $n-2$

$$a_{n-2,n-2}x_{n-2} + a_{n-2,n-1}x_{n-1} + a_{n-2,n}x_n = b_{n-2} \rightarrow$$

$$\boxed{x_{n-2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2,n-1}x_{n-1} - a_{n-2,n}x_n}{a_{n-2,n-2}}}$$

# Algoritmo de remonte

Para cualquier fila $j$ podremos hallar el valor de $x$ cómo:
for $j = [n, n-1, n-2, ..., 1]$

$$x_j = \frac{b_j - \sum_{i=j+1}^{n} a_{j,i} x_i}{a_{j,j}}$$

Existe una versión similar cuando la matriz $A$ es triangular inferior llamada **Algoritmo de descenso**.


Universidad Nacional de Quilmes

# Ejemplo: Algoritmo de Remonte

Supongamos que tenemos el problema:

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \bar{x} = \begin{bmatrix} 19 \\ 17 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Podemos calcular

$$x_3 = \frac{6}{2} \rightarrow \boxed{x_3 = 3}$$

$$x_2 = \frac{17 - 5 \times 3}{2} \rightarrow \boxed{x_2 = 1}$$

$$x_1 = \frac{19 - 7 \times 1 - 2 \times 3}{3} \rightarrow \boxed{x_1 = 2}$$

con lo que la solución será:

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

# Ejemplo: Algoritmo de Remonte

Supongamos que tenemos el problema:

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \bar{x} = \begin{bmatrix} 19 \\ 17 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Podemos calcular

$$x_3 = \frac{6}{2} \rightarrow \boxed{x_3 = 3}$$

$$x_2 = \frac{17 - 5 \times 3}{2} \rightarrow \boxed{x_2 = 1}$$

$$x_1 = \frac{19 - 7 \times 1 - 2 \times 3}{3} \rightarrow \boxed{x_1 = 2}$$

con lo que la solución será:

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

# Ejemplo: Algoritmo de Remonte

Supongamos que tenemos el problema:

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \bar{x} = \begin{bmatrix} 19 \\ 17 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Podemos calcular

$$x_3 = \frac{6}{2} \rightarrow \boxed{x_3 = 3}$$

$$x_2 = \frac{17 - 5\times 3}{2} \rightarrow \boxed{x_2 = 1}$$

$$x_1 = \frac{19 - 7\times 1 - 2\times 3}{3} \rightarrow \boxed{x_1 = 2}$$

con lo que la solución será:

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

# Ejemplo: Algoritmo de Remonte

Supongamos que tenemos el problema:

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \bar{x} = \begin{bmatrix} 19 \\ 17 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Podemos calcular

$$x_3 = \frac{6}{2} \rightarrow \boxed{x_3 = 3}$$

$$x_2 = \frac{17-5\times 3}{2} \rightarrow \boxed{x_2 = 1}$$

$$x_1 = \frac{19-7\times 1-2\times 3}{3} \rightarrow \boxed{x_1 = 2}$$

con lo que la solución será:

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

# Ejemplo: Algoritmo de Remonte

Supongamos que tenemos el problema:

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \bar{x} = \begin{bmatrix} 19 \\ 17 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Podemos calcular

$$x_3 = \frac{6}{2} \rightarrow \boxed{x_3 = 3}$$

$$x_2 = \frac{17-5\times 3}{2} \rightarrow \boxed{x_2 = 1}$$

$$x_1 = \frac{19-7\times 1-2\times 3}{3} \rightarrow \boxed{x_1 = 2}$$

con lo que la solución será:

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

# Eliminación Gaussiana

Proponemos $Ax = b \rightarrow A'x = b'$ donde $A'$ es triangular, podemos resolver el sistema!.

**Gauss-Jordan** en

$$\tilde{A} = [A \mid B]$$

**Luego Remonte o Descenso**

# Eliminación Gaussiana

Proponemos $Ax = b \to A'x = b'$ donde $A'$ es triangular, podemos resolver el sistema!.

**Gauss-Jordan** en

$$\tilde{A} = [A \mid B]$$

**Luego Remonte o Descenso**

# Eliminación Gaussiana

Proponemos $Ax = b \to A'x = b'$ donde $A'$ es triangular, podemos resolver el sistema!.

**Gauss-Jordan** en

$$\tilde{A} = [A \mid B]$$

**Luego Remonte o Descenso**

# Eliminación Gaussiana: un ejemplo

Sea el sistema:

$$\begin{bmatrix} 3 & -0{,}1 & -0{,}2 \\ 0{,}1 & 7 & -0{,}3 \\ 0{,}3 & -0{,}2 & 10 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 7{,}85 \\ -19{,}3 \\ 71{,}4 \end{bmatrix}$$

construimos $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc:c} 3 & -0{,}1 & -0{,}2 & 7{,}85 \\ 0{,}1 & 7 & -0{,}3 & -19{,}3 \\ 0{,}3 & -0{,}2 & 10 & 71{,}4 \end{array}\right]$$

# Eliminación Gaussiana: un ejemplo

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 3 & -0,1 & -0,2 & 7,85 \\ 0,1 & 7 & -0,3 & -19,3 \\ 0,3 & -0,2 & 10 & 71,4 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3 - \frac{0,3}{3} F_1]{F_2 - \frac{0,1}{3} F_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 3 & -0,1 & -0,2 & 7,85 \\ 0 & 7,0033 & -0,2933 & -19,5617 \\ 0 & -0,19 & 10,02 & 70,615 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 - \frac{-0,19}{7,0033} F_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 3 & -0,1 & -0,2 & 7,85 \\ 0 & 7,0033 & -0,2933 & -19,5617 \\ 0 & 0 & 10,012 & 70,0843 \end{array}\right]$$

**Remonte!**

# Eliminación Gaussiana: un ejemplo

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 3 & -0{,}1 & -0{,}2 & 7{,}85 \\ 0{,}1 & 7 & -0{,}3 & -19{,}3 \\ 0{,}3 & -0{,}2 & 10 & 71{,}4 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3 - \frac{0{,}3}{3}F_1]{F_2 - \frac{0{,}1}{3}F_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 3 & -0{,}1 & -0{,}2 & 7{,}85 \\ 0 & 7{,}0033 & -0{,}2933 & -19{,}5617 \\ 0 & -0{,}19 & 10{,}02 & 70{,}615 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 - \frac{-0{,}19}{7{,}0033}F_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 3 & -0{,}1 & -0{,}2 & 7{,}85 \\ 0 & 7{,}0033 & -0{,}2933 & -19{,}5617 \\ 0 & 0 & 10{,}012 & 70{,}0843 \end{array}\right]$$

**Remonte!**

# Eliminación Gaussiana: un ejemplo

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 3 & -0{,}1 & -0{,}2 & 7{,}85 \\ 0{,}1 & 7 & -0{,}3 & -19{,}3 \\ 0{,}3 & -0{,}2 & 10 & 71{,}4 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3-\frac{0{,}3}{3}F_1]{F_2-\frac{0{,}1}{3}F_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 3 & -0{,}1 & -0{,}2 & 7{,}85 \\ 0 & 7{,}0033 & -0{,}2933 & -19{,}5617 \\ 0 & -0{,}19 & 10{,}02 & 70{,}615 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3-\frac{-0{,}19}{7{,}0033}F_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 3 & -0{,}1 & -0{,}2 & 7{,}85 \\ 0 & 7{,}0033 & -0{,}2933 & -19{,}5617 \\ 0 & 0 & 10{,}012 & 70{,}0843 \end{array}\right]$$

**Remonte!**

# Eliminación Gaussiana: un ejemplo

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 3 & -0{,}1 & -0{,}2 & 7{,}85 \\ 0{,}1 & 7 & -0{,}3 & -19{,}3 \\ 0{,}3 & -0{,}2 & 10 & 71{,}4 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3-\frac{0,3}{3}F_1]{F_2-\frac{0,1}{3}F_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 3 & -0{,}1 & -0{,}2 & 7{,}85 \\ 0 & 7{,}0033 & -0{,}2933 & -19{,}5617 \\ 0 & -0{,}19 & 10{,}02 & 70{,}615 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3-\frac{-0,19}{7,0033}F_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 3 & -0{,}1 & -0{,}2 & 7{,}85 \\ 0 & 7{,}0033 & -0{,}2933 & -19{,}5617 \\ 0 & 0 & 10{,}012 & 70{,}0843 \end{array}\right]$$

**Remonte!**

# Eliminación Gaussiana: un ejemplo

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 3 & -0{,}1 & -0{,}2 & 7{,}85 \\ 0{,}1 & 7 & -0{,}3 & -19{,}3 \\ 0{,}3 & -0{,}2 & 10 & 71{,}4 \end{array}\right]$$

$$x_3 = \frac{70{,}0843}{10{,}012} \quad \rightarrow \quad \boxed{x_3 = 7{,}00003}$$

$$x_2 = \frac{-19{,}5617-0{,}2933\times 7{,}00003}{7{,}0033} \quad \rightarrow \quad \boxed{x_2 = -2{,}5}$$

$$x_3 = \frac{7{,}85-0{,}1\times(-2{,}5)-(-0{,}2)\times 7{,}00003}{3} \quad \rightarrow \quad \boxed{x_1 = 3}$$

# Eliminacion Gaussiana: Consideraciones

## Consideraciones

- El proceso realizado es el mismo que cuando se resuelve ''a mano''.
- El algoritmo es de orden $O(n) = \frac{2}{3}n^3$
- Se rompe si en la operación el elemento principal es 0!


Universidad Nacional de Quilmes

# Eliminacion Gaussiana: Consideraciones

## Consideraciones

- El proceso realizado es el mismo que cuando se resuelve ''a mano''.
- El algoritmo es de orden $O(n) = \frac{2}{3}n^3$
- Se rompe si en la operación el elemento principal es 0!

# Eliminacion Gaussiana: Consideraciones

## Consideraciones

- El proceso realizado es el mismo que cuando se resuelve ''a mano''.
- El algoritmo es de orden $O(n) = \frac{2}{3}n^3$
- Se rompe si en la operación el elemento principal es 0!

# Pivoteo Parcial

- Puede solucionar el problema del 0 en el elemento principal.
- Mejora la estabilidad numérica.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3 - \frac{a_{31}}{\underbrace{a_{11}}_{\text{Elemento Principal}}}]{F_2 - \frac{a_{21}}{\underbrace{a_{11}}_{\text{Elemento Principal}}}} \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a_{23} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & a_{33} & b'_3 \end{array}\right]$$

# Pivoteo Parcial

- Puede solucionar el problema del 0 en el elemento principal.
- Mejora la estabilidad numérica.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3 - \frac{a_{31}}{\underbrace{a_{11}}_{\text{Elemento Principal}}}]{F_2 - \frac{a_{21}}{\underbrace{a_{11}}_{\text{Elemento Principal}}}} \left[\begin{array}{ccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a_{23} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & a_{33} & b'_3 \end{array}\right]$$

# Pivoteo Parcial

Tomamos la columna principal y se intercambian filas para quedarnos con el elemento principal de mayor valor.

Supongamos que $a_{21} > a_{11} > a_{31}$

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{matrix} & \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix} \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \rightleftharpoons F_2}$$

Esto se repetira siempre antes de cada operación principal. con los elementos restantes:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} a'_{22} \\ a'_{32} \end{matrix}} & \begin{matrix} a'_{23} \\ a'_{33} \end{matrix} & \begin{matrix} b'_2 \\ b'_3 \end{matrix} \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

# Pivoteo Parcial

Tomamos la columna principal y se intercambian filas para quedarnos con el elemento principal de mayor valor.

Supongamos que $a_{21} > a_{11} > a_{31}$

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{matrix} & \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix} \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \rightleftharpoons F_2}$$

Esto se repetira siempre antes de cada operación principal. con los elementos restantes:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} a'_{22} \\ a'_{32} \end{matrix}} & \begin{matrix} a'_{23} \\ a'_{33} \end{matrix} & \begin{matrix} b'_2 \\ b'_3 \end{matrix} \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

# Consideraciones

## Consideraciones

- Soluciona 0 en elemento principal.
- Aumenta el numero de operaciones.
- No afecta el resultado.
- Hay que guardar los cambios de filas para recuperar el resultado original.

# Consideraciones

## Consideraciones

- Soluciona 0 en elemento principal.
- Aumenta el numero de operaciones.
- No afecta el resultado.
- Hay que guardar los cambios de filas para recuperar el resultado original.

# Descomposición LU

¿Debemos volver a aplicar el algoritmo si cambia mi vector b?
Existen otros métodos.
**Factorización LU**

# Descomposición LU

¿Debemos volver a aplicar el algoritmo si cambia mi vector b?

Existen otros métodos.

**Factorización LU**

# Descomposición LU

$A = LU$ donde $L$ es triangular inferior y $U$ es triangular superior. Convertimos el problema:

$$Ax = b \rightarrow LUx = b$$

Si aplicamos el cambio de variables $y = Ux$ entonces tenemos 2 problemas

$$\underbrace{Ly = b}_{\text{Sustitución hacia adelante}} \qquad (1)$$

$$\underbrace{Ux = y}_{\text{Sustitución hacia atrás}} \qquad (2)$$

# Matrices Elementales

Cada operación de Gauss-Jordan puede escribirse como una matriz elemental.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} F_1]{F_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} F_1} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} & a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{13} \\ 0 & a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{12} & a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{13} \end{bmatrix}$$

Puede expresarse cómo $E_1 A$, con

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 \\ -\frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Matrices Elementales

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 \\ -\frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} & a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{13} \\ 0 & a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{12} & a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{13} \end{bmatrix}$$

# Matrices Elementales

- Son Matrices triangular inferior.
- el producto de 2 matrices triangular inferior da otra matriz triangular inferior.
- el producto de 2 matrices elementales no es necesariamente otra matriz elemental.

La inversa de una matriz elemental se puede calcular cambiando los signos de todos los elementos fuera de la diagonal.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f_{21} & 1 & 0 \\ f_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -f_{21} & 1 & 0 \\ -f_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Descomposición LU

Aplicar Gauss-Jordan, equivale a transformar la matriz $A$ en una matriz del tipo $U$ aplicando operaciones $E_i$:

$$E_i * E_{i-1} * .... * E_2 * E_1 A = U$$

Si multiplicamos por la inversa de $E_i$:

$$\underbrace{E_i^{-1} * E_i}_{I} * E_{i-1} * .... * E_2 * E_1 A = E_i^{-1} * U$$

Si realizamos esto para todas las matrices E:

$$A = \underbrace{E_1^{-1} * E_2^{-1} * ... * E_i^{-1}}_{L} * U$$

$$\boxed{A = L * U}$$

# Descomposición LU

En el caso de Gauss Jordan las matrices e tendrán la forma:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \dots & 0 & \\ f_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ f_{31} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \\ f_{n1} & 0 & 0 \dots & 1 & \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & f_{n2} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \dots.$$

Queda a cargo del estudiante Probar para matrices de $4 \times 4$ que

$$E_1 * E_2 * E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ f_{21} & 1 & 0 & 0 \\ f_{31} & f_{32} & 1 & 0 \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & 1 \end{bmatrix}$$