Trabajo Práctico No. 5: Vectores y rectas en el espacio

1. *a*) Dados los puntos $A(3, -1, 2)$ y $B(-1, 2, 1)$, halle las componentes de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$. Represente gráficamente.

   b) Halle las coordenadas del origen A del vector $\mathbf{u} = (3, -1, 4)$, si su extremo coincide con $B(1, 2, -3)$.

   c) Halle las coordenadas del extremo B del vector $\mathbf{u} = (3, -1, 2)$, si su origen es $A(1, 1, 1)$.

   d) Si $\mathbf{u} = (4, -12, z)$, hallar z, sabiendo que $\|\mathbf{u}\| = 13$.

2. Dados los puntos $A(-1, 3, -7)$, $B(2, -1, 5)$, $C(0, 1, -5)$ y los vectores $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$ y $\mathbf{w} = \overrightarrow{BC}$, calcule:

   a) $\langle (2\mathbf{u} + \mathbf{w}); (2\mathbf{w} - \mathbf{u}) \rangle$

   b) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$ y $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$

   c) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle\, \mathbf{w}$ y $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle\, \mathbf{u}$

   d) Los ángulos interiores del triángulo formado por los vértices A, B y C.

3. *a*) Halle un valor de k para que $\mathbf{u} = (1, k, 3)$ y $\mathbf{v} = (2, 1, k)$ sean ortogonales. ¿Este valor es único?

   b) Halle un vector de módulo 2 que tenga la misma dirección que el vector $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$. ¿Cuántos vectores existen en estas condiciones?

   c) Halle un vector de módulo 2 que sea perpendicular al vector $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$. ¿Cuántos vectores existen en estas condiciones?

4. Dados los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$:

   a) $\mathbf{a} = (-3t, 24, -1)$ y $\mathbf{b} = (-1, 8, -t)$

   b) $\mathbf{a} = (2t, -6, 1)$ y $\mathbf{b} = (-1, 3t, \frac{1}{2})$

   Halle, en caso de ser posible, los valores de t para que los vectores sean paralelos y/o perpendiculares.

5. *a*) Los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ forman entre sí un ángulo de 45° y $\|\mathbf{u}\| = 3$. Determine el módulo de $\mathbf{v}$ de modo tal que el vector $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ sea ortogonal al vector $\mathbf{u}$.

   b) Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores que verifican $\|\mathbf{u} + 5\mathbf{v}\|^2 - 10\|\mathbf{u}\| \operatorname{proy\ esc}_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = 26\|\mathbf{u}\|^2$, pruebe que $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$.

   c) Sean $\mathbf{w} = (3, 0, -1)$ y $\mathbf{v}$ un vector arbitrario perpendicular a $\mathbf{u}$. Halle $\operatorname{proy\ esc}_{\mathbf{w}} \mathbf{u}$, sabiendo que $\langle 3\mathbf{v} + 2\mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle = 14$.

d) Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, vectores tales que $\mathbf{u}$ es perpendicular a $\mathbf{w}$ y el ángulo que forman $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es de $30°$. Halle $\|\mathbf{w}\|$, sabiendo que $\mathbf{v} = (2, -2, 2)$ y $\langle \mathbf{v} - \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 18$.

6. *a*) Calcule $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}\times\mathbf{u}$ y represente gráficamente, siendo $\mathbf{u} = (4, -2, 0)$ y $\mathbf{v} = (0, 3, 0)$.
   b) Calcule $(2\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{v}$ y $(2\mathbf{u} - \mathbf{v}) \times (2\mathbf{u} + \mathbf{v})$, siendo $\mathbf{u} = (1, -2, 3)$ y $\mathbf{v} = (-3, 3, 1)$.
   c) Halle un vector de módulo 5, perpendicular a ambos vectores $\mathbf{u} = (1, -2, 3)$ y $\mathbf{v} = (0, 1, 4)$.
   d) Halle el área del triángulo cuyos vértices son $P = (3, 5, 2)$, $Q = (1, -1, 6)$ y $R = (-2, 1, 4)$.

7. *a*) Calcule el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\mathbf{u} = (1, -2, 3)$, $\mathbf{v} = (0, 1, 4)$ y $\mathbf{w} = (1, 1, 1)$.
   b) Sean $\mathbf{u} = (1, 2, -3)$, $\mathbf{v} = (2, 1, 5)$ y $\mathbf{w} = (1, 2, -1)$. Halle todos los vectores $\mathbf{r}$, paralelos a $\mathbf{w}$, tales que el volumen determinado por $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{r}$ sea 40.

8. Encontrar una ecuación vectorial, paramétrica y, si existen, las ecuaciones simétricas de la recta r en cada uno de los siguientes casos.

   a) $A(-1, 3, 2) \in r$ y $\mathbf{v} = (2, 2, -1) \parallel r$.
   b) $B(1, -3, 4) \in r$ y $\mathbf{v} = (0, 2, 3) \parallel r$.
   c) $C(0, 1, 3) \in r$ y $\mathbf{v} = (0, 5, 2) \parallel r$.
   d) $D(1, -1, 1) \in r$ y $\mathbf{v} = (0, 0, -1) \parallel r$.
   e) $P_0(7, 6, 6) \in r$ y $P_1(5, 2, 4) \in r$.
   f) $P_0(-1, 0, 4) \in r$ y $P_1(1, 0, 2) \in r$.

9. Hallar la intersección con los planos coordenados de las rectas obtenidas en el inciso anterior, y graficar.

10. Halle una ecuación paramétrica de las siguientes rectas y, si existen, sus ecuaciones simétricas:

    a) Que pase por el punto $P(2, -1, 3)$ y es paralela al vector $\mathbf{v} = (-1, 6, 5)$.
    b) Que pase por el punto $P_0(-5, 0, 1)$ y es paralela a la recta L:

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

    c) Que pase por los puntos $A(1, -3, 2)$ y $B(4, -2, 6)$.