Индивидуальное домашнее задание №2 Малышев Н. А.

1

Задание

Исследовать ряд на сходимость.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n^{n+3/2}} \cdot e^n \cdot \ln \frac{2^n+1}{2^n}$$

Решение

$$\frac{(2n)!!}{n^{n+3/2}} \cdot e^n \cdot \ln \frac{2^n+1}{2^n} = \frac{(2n)!!}{n^{n+3/2}} \cdot e^n \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \sim$$

Так как $\frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то

$$\sim \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}{n^{n+3/2}} \cdot e^n \cdot \frac{1}{2^n} = n! \cdot \frac{e^n}{n^{n+3/2}} \sim$$

По [Теорема Стирлинга](),

$$\sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \frac{e^n}{n^{n+3/2}} = \frac{\sqrt{2\pi n}}{n^{3/2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{n}$$

Сравним наш ряд с гармоническим рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Из материала лекций мы знаем, что он расходится.
Так как обе последовательности больше нуля и существуют в $\mathbb{R}$, то мы можем воспользоваться [Теорема о признаках сравнения в предельной форме](),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!!}{n^{n+3/2}} \cdot e^n \cdot \ln \frac{2^n+1}{2^n} : \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{n} \cdot n = \sqrt{2\pi} \in (0; +\infty]$$

Значит, из расходимости гармоничного ряда следует, что расходится и наш исходный ряд.

2

Задание

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin^2(n/4)}{n-\ln n}$$

Решение