Индивидуальное домашнее задание №1 Малышев Н. А.

1

Задание

Исследовать данную функцию на равномерную непрерывность на данном множестве, пользуясь определением.

$$f(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$$

Решение

а)

$$X = [1, +\infty)$$

По определению Равномерная непрерывность функции,

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x, x' \in X : |x - x'| < \delta \quad |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

Зафиксируем произвольный положительный ε_0.
Теперь попробуем подобрать δ_0. Пусть $x, x' \in X$ такие, что $|x - x'| < \delta_0$.

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon_0$$
$$\left|2x - \frac{1}{x^2} - 2x' + \frac{1}{(x')^2}\right| = \left|2(x - x') + \frac{x^2 - (x')^2}{x^2 (x')^2}\right| < \varepsilon_0$$

$$x \in [1, +\infty) \iff x \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{x} \leq 1$$

$$\frac{x^2 - (x')^2}{x^2 (x')^2} = (x - x') \cdot \frac{x + x'}{x^2 (x')^2} \leq (x - x') \cdot \frac{x + x'}{x x'} =$$
$$= (x - x') \left(\frac{1}{x'} + \frac{1}{x}\right) \leq (x - x')(1 + 1) = 2(x - x') < 2\delta_0$$

$$\left|2(x - x') + \frac{x^2 - (x')^2}{x^2 (x')^2}\right| < |2\delta_0 + 2\delta_0| = 4\delta_0 = \varepsilon_0$$
$$\delta_0 = \frac{\varepsilon_0}{4}$$

Тем самым, мы смогли подобрать нужный δ_0.
Тогда получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \frac{\varepsilon}{4} : \forall x, x' \in X : |x - x'| < \delta \quad |f(x) - f(x')| < 4\delta = \varepsilon$$

Значит, функция f равномерно непрерывна на промежутке $X = [1, +\infty)$.

б)

$$X = (0, 1)$$

Рассмотрим отрицание определения Равномерная непрерывность функции,

$$\exists \varepsilon : \forall \delta > 0 \; \exists x, x' \in X : |x - x'| < \delta \quad |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon$$

Пусть $\varepsilon_0 = 1$. Имеем произвольное δ_0. Нам нужно для этого произвольного δ_0 найти некоторые x, x' такие, что $|x - x'| < \delta$ и $|f(x) - f(x')| \geq \varepsilon$.
Пусть

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad x'_n = \frac{1}{2n}$$

Тогда $x_n, x'_n \in (0, 1)$ при $n \geq 2$ и $(x_n - x'_n) = \frac{1}{2n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, но

$$|f(x_n) - f(x'_n)| = \left| 2x_n - \frac{1}{x_n^2} - 2x'_n + \frac{1}{(x'_n)^2} \right| = \left| \frac{1}{n} - n^2 + 4n^2 \right| = \frac{1}{n} + 3n^2 \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$$

Тем самым для произвольного δ_0 мы сможем подобрать такие $x = x_n$ и $x' = x'_n$, что $|x - x'| < \delta_0$ и $|f(x) - f(x')| \geq \varepsilon$.
Значит, функция f не является равномерно непрерывной на промежутке $X = (0, 1)$.

2

Задание

Преобразовать выражение к интегральной сумме, доказать существование соответствующего интеграла и найти предел.

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - n^2}} \right)$$

Решение

$$\frac{1}{\sqrt{4n^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - n^2}} =$$
$$= \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{4 - \left(\frac{1}{n}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{4 - \left(\frac{2}{n}\right)^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{4 - \left(\frac{n}{n}\right)^2}} \right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4 - \left(\frac{i}{n}\right)}}$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

Введём для функции f разбиение τ на отрезке $[0,1]$, такое что $\Delta x_i = \Delta x = \frac{1}{n}$, где $i \in \{1, \ldots, n\}$, и оснащение ξ, такое что $\xi_i = \frac{i}{n}$, где $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Функция f непрерывна на отрезке $[0,1]$, а значит, интегрируема, по Теорема об интегрируемости непрерывной функции.
Введём интегральную сумму для функции f по оснащённому разбиению (τ, ξ) на отрезке $[0,1]$.

$$\sigma_\tau(f,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4 - \left(\frac{i}{n}\right)^2}} \cdot \frac{1}{n}$$

По определению Интеграл Римана и по Теорема (таблица неопределённых интегралов),

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}} \right) = \lim_{\lambda(\tau)\to 0} \sigma_\tau(f,\xi) = \int_0^1 f(x)\,dx =$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1 = \arcsin\frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}$$

3

Аналитический этап

Задание

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad [a,b] = [1,2].$$

- составить верхнюю и нижнюю суммы Дарбу, доказать интегрируемость функции (разбиение использовать такое, что его мелкость будет стремиться к 0)
- для интеграла Римана данной функции по данному промежутку составить интегральную сумму (можно использовать результат из предыдущего пункта), найти предел этой суммы
- сравнить полученный результат с ответом по формуле Ньютона-Лейбница

Решение

Введём разбиение τ_n такое, что оно разбивает отрезок $[1,2]$ на n равных частей, где $\Delta x_i = \Delta x = \frac{1}{n}$ при $i \in \{1, \ldots, n\}$. Заметим, что $\lambda(\tau_n) = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Посчитаем верхнюю и нижнюю суммы Дарбу.

$$S_{\tau_n}(f) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in\Delta_i} f(x)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f\left(1 + \frac{i}{n}\right)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{n^2}{(n+i)^2} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{(n+i)^2} =$$
$$= n\left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(2n)^2} \right)$$

Давайте посчитаем верхний интеграл Дарбу. Для этого, по Теорема о связи интегралов Дарбу и предела, нам нужно найти предел $S_{\tau_n}(f)$ при $n \to \infty$.
Чтобы этот предел найти воспользуемся Теорема о сжатой переменной.
Оценим снизу.

$$n\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{1}{2n(2n+1)}\right) \le$$
$$\le n\left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(2n)^2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{2n(2n+1)}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n^2+3n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

Оценим сверху.

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(2n)^2} \le \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n)}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n)}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

Следовательно,

$$I^*(f) = \lim_{\lambda(\tau_n)\to 0} S_{\tau_n}(f) = \frac{1}{2}$$

Повторим те же действия, чтобы посчитать нижний интеграл Дарбу.
Найдём нижнюю сумму Дарбу при разбиении τ_n.

$$s_{\tau_n}(f) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in\Delta_i} f(x)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f\left(1+\frac{i-1}{n}\right)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{n^2}{(n+i-1)^2}\cdot\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{(n+i-1)^2} =$$
$$= n\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2}\right)$$

Оценим снизу.

$$n\left(\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n)}\right)\leq n\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n)}\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2}=\frac{1}{2}$$

Оценим сверху.

$$n\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}\right)\leq n\left(\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots+\frac{1}{(2n-2)(2n-1)}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots+\frac{1}{(2n-2)(2n-1)}\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n-2}-\frac{1}{2n-1}\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{2n-1}\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2-3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$$

По Теорема о сжатой переменной,

$$I_*(f)=\lim_{\lambda(\tau_n)\to 0} s_{\tau_n}(f)=\frac{1}{2}$$

Значит,

$$I^*(f)=I_*(f)$$

Тем самым, по четвёртому критерию из Теорема о критериях интегрируемости функции, $f\in R[1,2]$.
Давайте вычислим Интеграл Римана функции f, используя интегральные суммы. Для этого введём оснащение ξ_n такое, что $\xi_i\in\Delta_i$ при $i\in\{1,\ldots,n\}$.

$$\int\limits_1^2\frac{dx}{x^2}=\lim_{\lambda(\tau)\to 0}\sigma_{\tau_n}(f,\xi_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(\xi_i)^2 n}$$

Оценим интегральную сумму.

$$\sum_{i=1}^{n}\inf_{x\in\Delta_i}f(x)\cdot\frac{1}{n}\leq\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\frac{1}{n}\leq\sum_{i=1}^{n}\sup_{x\in\Delta_i}f(x)\cdot\frac{1}{n}$$
$$I_*(f)\leq\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\frac{1}{n}\leq I^*(f)$$

По [Теорема о сжатой переменной](),

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2} = I^*(f) = I_*(f) = \frac{1}{2}$$

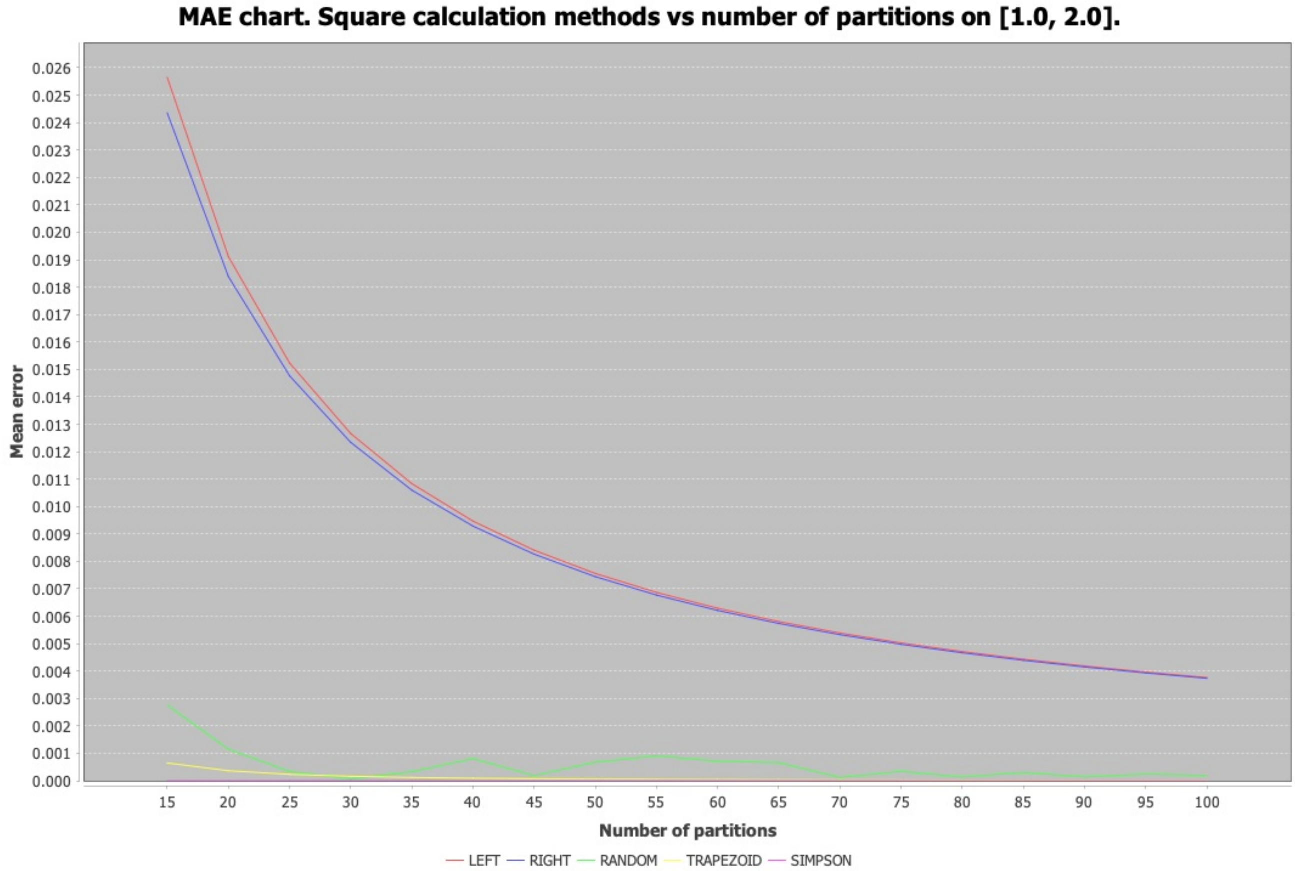
Посчитаем интеграл другим способом. Воспользуемся [Теорема (усиленная формула Ньютона-Лейбница)]().

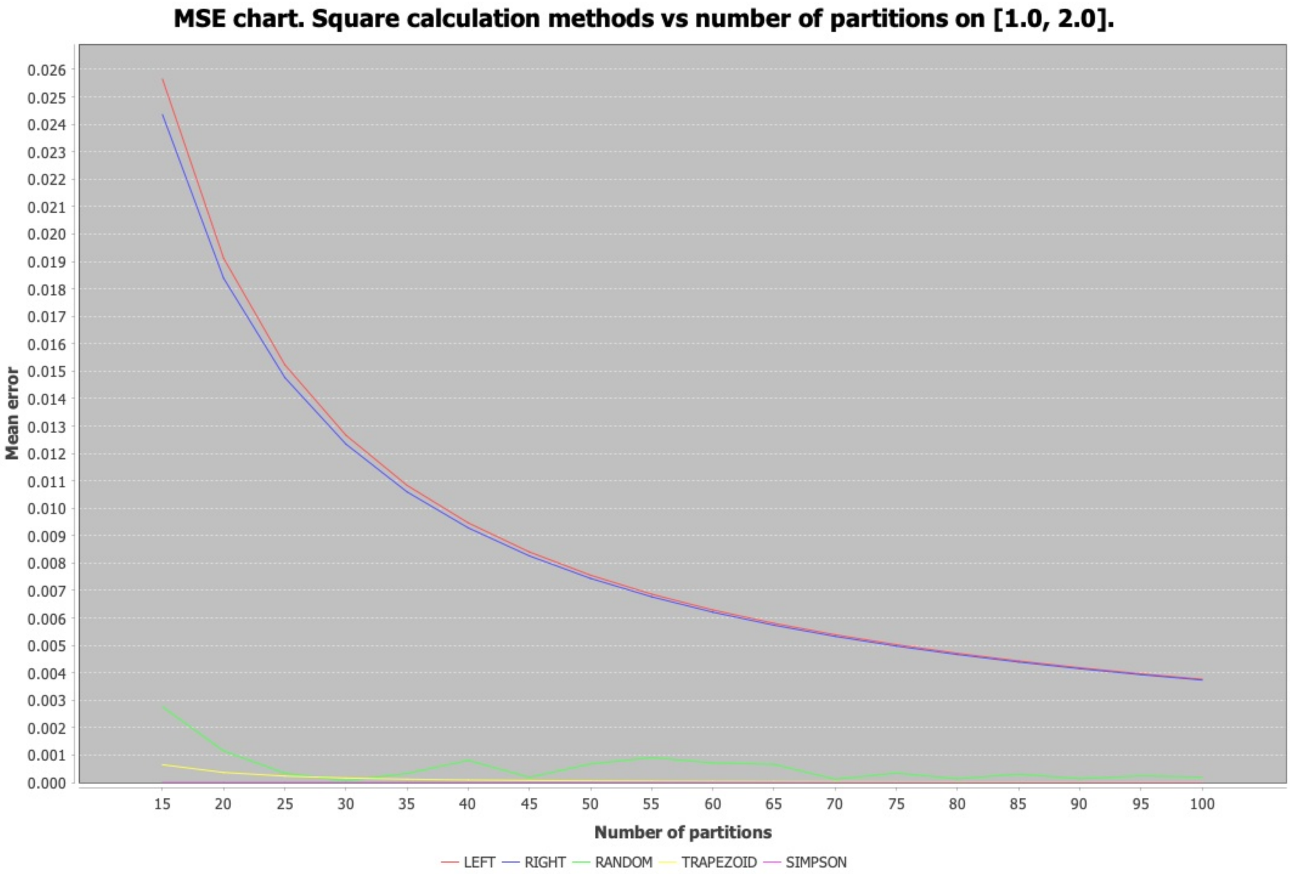
$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

Как мы видим, результаты получились одинаковыми.

Практический этап

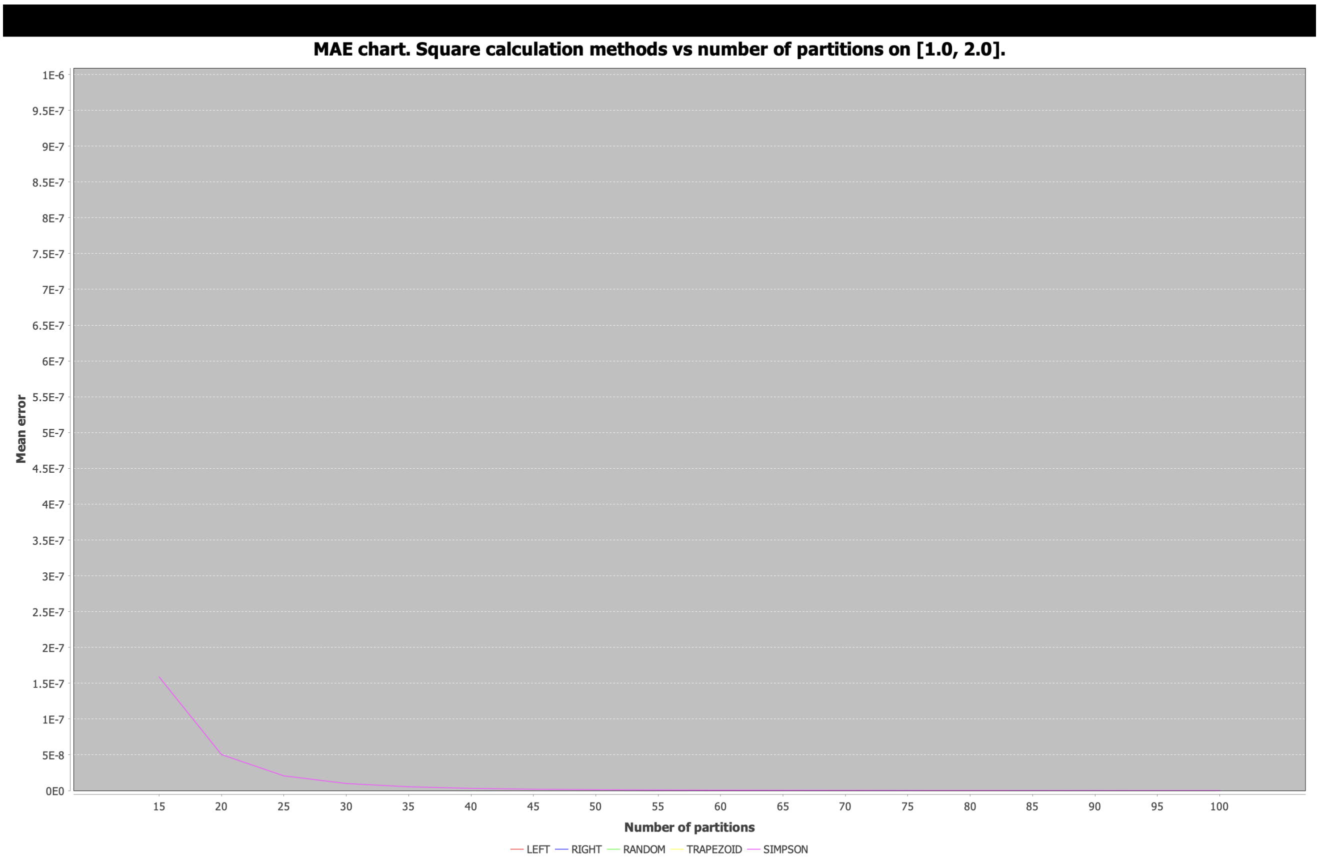
Я написал программу (https://github.com/ulitsaRaskolnikova/IntegralApp) на языке Java. Составил два графика MAE и MSE, которые показывают зависимость точности методов вычисления площади от количества точек в равномерном разбиении.





Как мы видим, самым точным способом посчитать площадь для интеграла является метод Симпсона. Методы "взять самую левую точку" и "взять самую правую точку" самые неточные, но их проще и быстрее всего считать. Метод рандома справляется гораздо лучше предыдущих способов, но не так точно, как оставшиеся способы. Также для компьютера задача выдать случайное число не самая простая. Метод трапеции повышает точность по сравнению с методом рандома. Погрешность меньше 0,001. Но для этого метода нужно будет 2 раза посчитать значение функции, что повышает сложность вычислений. Остаётся метод Симпсона, который является самым точным. Погрешность крайне мала, она меньше 1,6E-7. Но для этого метода придётся посчитать значение функции аж три раза. На самом деле, в современном мире с современными мощностями компьютеров смешно говорить о сложности арифметических вычислений, поэтому я советую всегда использовать метод

Симпсона.



4

Задание

Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной параметрически. Сделать рисунок.

$$x = \frac{\sin^2 t}{2 + \sin t}, \quad y = \cos t.$$

Решение

Рассмотрим, как ведёт себя функция от заданных x и y.

$$x'(t) = \frac{2\sin t \cos t(2 + \sin t) - \sin^2 t \cos t}{(2 + \sin t)^2} =$$
$$= \frac{4\sin t \cos t + \sin^2 t \cos t}{(2 + \sin t)^2} = \frac{\sin t \cos t(4 + \sin t)}{(2 + \sin t)^2}$$

$x'(t) = 0$ при $t = \frac{\pi k}{2}$, где $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

t	$\operatorname{sign} x'(t)$	**Характер функции**	$x(t)$
$[-\pi; -\pi/2]$	+	возрастает	$[0; 1]$
$[-\pi/2; 0]$	-	убывает	$[0; 1]$
$[0; \pi/2]$	+	возрастает	$[0; 1/3]$

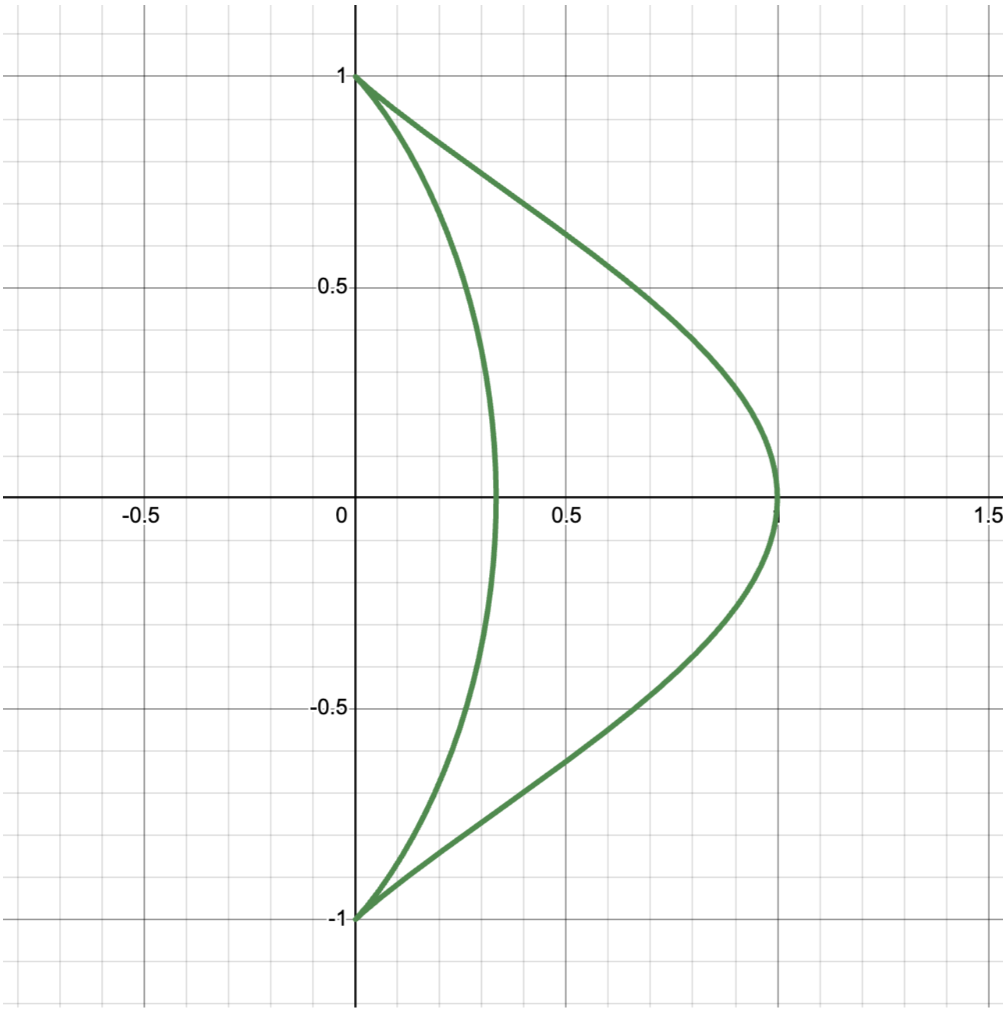
t	$\operatorname{sign} x'(t)$	**Характер функции**	$x(t)$
$(\pi/2; \pi]$	-	убывает	$[0; 1/3]$

$$y'(t) = -\sin t$$

$x'(t) = 0$ при $t = \pi k$, где $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

t	$\operatorname{sign} y'(t)$	**Характер функции**	$y(t)$
$[-\pi; 0]$	+	возрастает	$[-1; 1]$
$[0; \pi]$	-	убывает	$[-1; 1]$

Функция $y(x)$ имеет следующий вид.



Посчитаем площадь фигуры, график которой расположен в координатах $x(y)$. Если мы будем считать площадь в координатах $y(x)$, то площадь может "занулиться", потому что часть графика находится ниже оси абсцисс.

$$S = \int_{-\pi}^{\pi} xy' dt = -\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^3 t}{2 + \sin t} dt = -\int_{-\pi}^{\pi} \left(-\frac{8}{2 + \sin t} + \sin^2 t - 2\sin t + 4 \right) dt =$$

$$= \frac{16}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2\tan(t/2) + 1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{\sin 2t}{4} - 2\cos t - \frac{9t}{2} \Bigg|_{-\pi}^{\pi} \approx 0.7464559454393527$$

Найдём первообразные слагаемых.

$$\int \frac{dt}{2+\sin t} = \left| \begin{array}{c} \sin t = \frac{2r}{r^2+1} \\ dt = \frac{2dr}{r^2+1} \\ r = \tan(t/2) \end{array} \right| = \int \frac{2dr}{(r^2+1)(2+\frac{2r}{r^2+1})} =$$
$$= \int \frac{2dr}{2r^2+2r+2} = \int \frac{dr}{r^2+r+1} = \int \frac{dr}{(r+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2r+1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2\tan(t/2)+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$\int \sin^2 t \, dt = \int \frac{1-\cos 2t}{2} dt = \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} + C$$

$$\int -2\sin t = 2\cos t + C$$

Посчитаем.

```
import math
def F(t):
    return 16/3**(0.5) * math.atan((2*math.tan(t/2) + 1)/3**(0.5)) +
math.sin(2*t)/4 - 2*math.cos(t) - 9*t / 2
print(F(math.pi) - F(-math.pi))
```

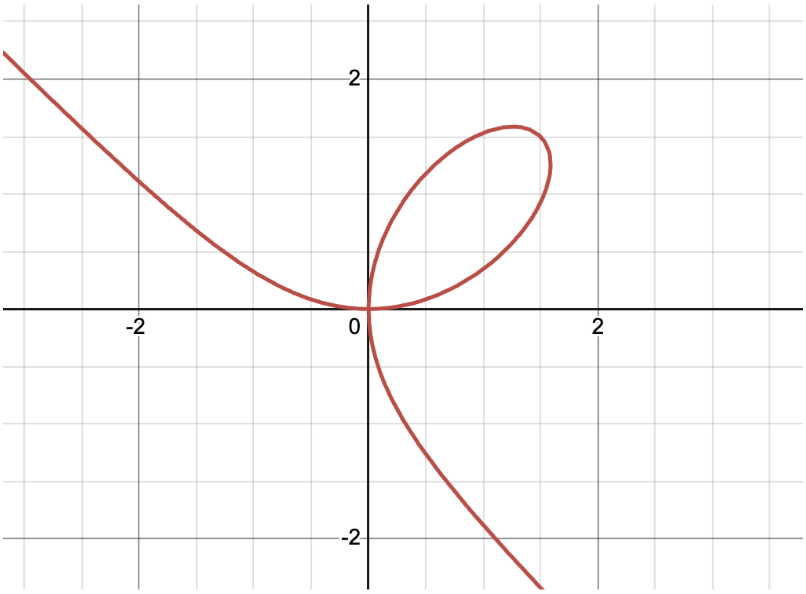
5

Задание

Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной уравнением

$$x^3 + y^3 = 3axy.$$

Решение



Перейдём в полярную систему координат.

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$x^3 + y^3 = 3axy \iff r^3\cos^3\varphi + r^3\sin^3\varphi = 3ar^2\sin\varphi\cos\varphi$$

$$r(\varphi) = \frac{3a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi}$$

Как мы видим, $r(\pi k) = 0$ и $r(\pi/2 + \pi k) = 0$, где $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.
В точке $\varphi = -\pi/4 + \pi k$ значение функции устремляется в бесконечность. Тем самым, можно сделать вывод, что замкнутая фигура находится на отрезке $\varphi \in [0; \pi/2]$.

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} r^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{3a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi}\right)^2 d\varphi = \frac{9a^2}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(\sin^3\varphi + \cos^3\varphi)^2}d\varphi =$$

$$= \lim_{\omega\to\pi/2}\frac{9a^2}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3(\tan^3\varphi + 1)}\right)\Bigg|_0^\omega = \lim_{\omega\to\pi/2}\left(-\frac{3a^2}{2\tan^3\varphi + 2}\right)\Bigg|_0^\omega = \frac{3a^2}{2}$$

Найдём первообразную.

$$\int\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(\sin^3\varphi + \cos^3\varphi)^2}d\varphi = \int\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\sin^6 + 2\sin^3\varphi\cos^3\varphi + \cos^6\varphi}d\varphi = \int\frac{\tan^2\varphi\, d\varphi}{\cos^2\varphi(\tan^6\varphi + 2\tan^3\varphi + 1)} =$$

$$= \left| d(\tan\varphi) = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\right| = \int\frac{\tan^2\varphi\, d(\tan\varphi)}{\tan^6\varphi + 2\tan^3\varphi + 1} = \left|\begin{matrix} t = \tan^3\varphi \\ dt = d(\tan^3\varphi) = 3\tan^2\varphi\, d(\tan\varphi)\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2 + 2t + 1} = \frac{1}{3}\int\frac{dt}{(t+1)^2} = \frac{1}{3}\int\frac{d(t+1)}{(t+1)^2} = -\frac{1}{3(t+1)} + C = -\frac{1}{3(\tan^3\varphi + 1)} + C$$

6

Задание

Кривая задана как пересечение поверхностей, заданных данными уравнениями в декартовых координатах. Задайте кривую параметрически и найдите её длину.

$$2(y^2 + z^2) = x, \quad z\cos 2x - y\sin 2x = 0, \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{4}$$

Решение