Построение ЖНФ Малышева Н. А.

Вариант №45

0. Поиск собственных чисел

t=3 - собственное число кратности 6.

1. Построение ядер W_i

Пусть $\psi=arphi-3\,\mathrm{id}$, тогда его матрица $B=A-3E_6$. Введём обозначения $W_0=\{0\}$, $W_i=\ker(arphi^i)$ для $i\in\mathbb{N}$.

Найдём W_1 . Пусть $x=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)^T$.

Значит,

$$W_1 = B_1 = \{(0,0,0,0,0,1)^T, (1,1,0,0,0,0)^T, (0,0,-1,1,0,0)^T\}$$

Имеем

$$\dim W_1=6-\mathrm{rank}(B)=3$$

Найдём W_2 .

$$B^2x=0=egin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\ 0&0&0&0&0&0\ 0&0&0&0&0&0\ -3&3&0&0&0&0\ 0&0&3&3&0&0 \end{pmatrix} egin{pmatrix} x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6 \end{pmatrix}=egin{pmatrix} 0\ 0\ 0\ 0\ 3x_2-3x_1\ 3x_3+3x_4 \end{pmatrix} \Rightarrow egin{pmatrix} x_2=x_1\ x_3=-x_4\ x_5,x_6\in\mathbb{R} \end{pmatrix}$$

Значит,

$$B_2 = \{(0,0,0,0,1,0)^T\}$$

 $x = (x_1, x_1, -x_4, x_4, x_5, x_6)^T$

Имеем

$$W_2 = \{(0,0,0,0,0,1)^T, (1,1,0,0,0,0)^T, (0,0,-1,1,0,0)^T, (0,0,0,0,1,0)^T\}$$

$$\dim W_2 = 6 - \operatorname{rank}(B^2) = 4$$

Найдём W_3 .

Значит,

$$B_3 = \{(0, 0, 1, 0, 0, 0)^T\}$$

Имеем

$$W_3 = \{(0,0,0,0,0,1)^T, (1,1,0,0,0,0)^T, (0,0,-1,1,0,0)^T, (0,0,0,0,1,0)^T, (0,0,1,0,0,0)^T\}$$
$$\dim W_3 = 6 - \operatorname{rank}(B^3) = 5$$

Найдём W_4 .

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T$$

Значит,

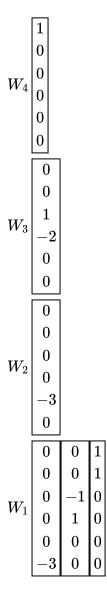
$$B_4 = \{(1,0,0,0,0,0)^T\}$$

Имеем

$$egin{aligned} W_4 &= \{(0,0,0,0,0,1)^T, (1,1,0,0,0,0)^T, (0,0,-1,1,0,0)^T, \ &(0,0,0,0,1,0)^T, (0,0,1,0,0,0)^T, (1,0,0,0,0,0)^T \} \ & \dim W_4 = 6 - \operatorname{rank}(B^4) = 6 \end{aligned}$$

2. Построение лестницы

$$egin{aligned} r_4 &= \dim W_4 - \dim W_3 = 6 - 5 = 1 \ r_3 &= \dim W_3 - \dim W_2 = 5 - 4 = 1 \ r_2 &= \dim W_2 - \dim W_1 = 4 - 3 = 1 \ r_1 &= \dim W_1 - \dim W_0 = 3 - 0 = 3 \end{aligned}$$



3. ЖНФ и Жорданов базис

Получившийся базис имеет вид

Столбцы лестницы имеют высоты 4, 1, 1. Следовательно, ЖНФ будет иметь следующий вид

$$J = egin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$