# Построение ЖНФ Малышева Н. А.

# Вариант №45

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

# 0. Поиск собственных чисел

$$\chi_\varphi(t) = \det(A - tE) = \begin{vmatrix} 3-t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3-t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3-t & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 3-t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3-t \end{vmatrix} = (3-t)^6$$

$$\operatorname{Spec}(\varphi) = \{3\}$$

$t = 3$ - собственное число кратности 6.

# 1. Построение ядер $W_i$

Пусть $\psi = \varphi - 3\,\mathrm{id}$, тогда его матрица $B = A - 3E_6$. Введём обозначения $W_0 = \{0\}$, $W_i = \ker(\varphi^i)$ для $i \in \mathbb{N}$.
Найдём $W_1$. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T$.

$$Bx = 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1 - x_2 \\ 2x_2 - 2x_1 \\ 3x_3 + 3x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 \\ x_3 = -x_4 \\ x_5 = 0 \\ x_6 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$x = (x_1, x_1, -x_4, x_4, 0, x_6)^T$$

Значит,

$$W_1 = B_1 = \{(0,0,0,0,0,1)^T, (1,1,0,0,0,0)^T, (0,0,-1,1,0,0)^T\}$$

Имеем

$$\dim W_1 = 6 - \operatorname{rank}(B) = 3$$

Найдём $W_2$.

$$B^2x = 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3x_2 - 3x_1 \\ 3x_3 + 3x_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 \\ x_3 = -x_4 \\ x_5, x_6 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$x = (x_1, x_1, -x_4, x_4, x_5, x_6)^T$$

Значит,

$$B_2 = \{(0,0,0,0,1,0)^T\}$$

Имеем

$$W_2 = \{(0,0,0,0,0,1)^T, (1,1,0,0,0,0)^T, (0,0,-1,1,0,0)^T, (0,0,0,0,1,0)^T\}$$

$$\dim W_2 = 6 - \operatorname{rank}(B^2) = 4$$

Найдём $W_3$.

$$B^3x = 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3x_2 - 3x_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 \\ x_3, x_4, x_5, x_6 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$x = (x_1, x_1, x_3, x_4, x_5, x_6)^T$$

Значит,

$$B_3 = \{(0,0,1,0,0,0)^T\}$$

Имеем

$$W_3 = \{(0,0,0,0,0,1)^T, (1,1,0,0,0,0)^T, (0,0,-1,1,0,0)^T, (0,0,0,0,1,0)^T, (0,0,1,0,0,0)^T\}$$

$$\dim W_3 = 6 - \operatorname{rank}(B^3) = 5$$

Найдём $W_4$.

$$B^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \mathbb{R}$$

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T$$

Значит,

$$B_4 = \{(1,0,0,0,0,0)^T\}$$

Имеем

$$\begin{aligned} W_4 = \{&(0,0,0,0,0,1)^T, (1,1,0,0,0,0)^T, (0,0,-1,1,0,0)^T, \\ &(0,0,0,0,1,0)^T, (0,0,1,0,0,0)^T, (1,0,0,0,0,0)^T\} \end{aligned}$$

$$\dim W_4 = 6 - \operatorname{rank}(B^4) = 6$$

# 2. Построение лестницы

$$\begin{aligned} r_4 &= \dim W_4 - \dim W_3 = 6 - 5 = 1 \\ r_3 &= \dim W_3 - \dim W_2 = 5 - 4 = 1 \\ r_2 &= \dim W_2 - \dim W_1 = 4 - 3 = 1 \\ r_1 &= \dim W_1 - \dim W_0 = 3 - 0 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rl}
W_4 & \boxed{\begin{matrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{matrix}} \\
W_3 & \boxed{\begin{matrix}0\\0\\1\\-2\\0\\0\end{matrix}} \\
W_2 & \boxed{\begin{matrix}0\\0\\0\\0\\-3\\0\end{matrix}} \\
W_1 & \boxed{\begin{matrix}0\\0\\0\\0\\0\\-3\end{matrix}}\boxed{\begin{matrix}0\\0\\-1\\1\\0\\0\end{matrix}}\boxed{\begin{matrix}1\\1\\0\\0\\0\\0\end{matrix}}
\end{array}$$

# 3. ЖНФ и Жорданов базис

Получившийся базис имеет вид

$$V(3) = \operatorname{lin}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\-3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

Столбцы лестницы имеют высоты 4, 1, 1. Следовательно, ЖНФ будет иметь следующий вид

$$J = \left(\begin{array}{cccc|c|c} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$