Ondes électromagnétique dans un plasma

I - Propagation d'une onde ELM dans le plasma

1 – Modélisation du plasma

Définition

Milieu ionisé constitué **d'ions** + et d'**électrons** de masses respectives **M et m**

Le plasma est électriquement neutre. Dans le programme il est considéré peu dense , pas d'interaction entre les particules.

2 – Détermination de $\vec{j}$ et ρ

On envisage la propagation d'une onde plane dans le sens des x croissants

$$(1)\ \underline{\vec{E}} = \overrightarrow{E_0} \times e^{i(wt-kx)}$$
$$(2)\ \underline{\vec{B}} = \overrightarrow{B_0} \times e^{i(wt-kx)}$$

Méthode : Grâce à l'approximation

$$\|\overrightarrow{\mathrm{F}_{\mathrm{mag}}}\| \ll \|\overrightarrow{\mathrm{F}_{\mathrm{elec}}}\|$$

On peut, en appliquant le PFD avec la force de Lorentz établir la relation

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e \times \vec{E}$$

Ou encore en complexe

$$iwm\underline{\vec{v}} = -e \times \vec{E} \Leftrightarrow \underline{\vec{v}} = \frac{-e \times \vec{E}}{iwm}$$

On sait de plus que $\vec{j} = -n_0 \times e^2\underline{\vec{v}}$

Ainsi cela conduit à

Propriété

La loi d'Ohm locale est donnée par la relation

$$\vec{j} = \gamma\,\vec{E}$$

En notant la conductivité

$$\gamma = \frac{n_0 e^2}{iwm}$$

On peut également déterminer la pulsation plasma w_p grâce à l'équation locale de conservation de la charge

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\underline{\vec{j}}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma div(\vec{\mathrm{E}}) = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma\frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$
$$\Leftrightarrow iw\underline{\rho} + \gamma\underline{\rho} \times \frac{1}{\varepsilon_0} = 0$$
$$\Leftrightarrow \underline{\rho}\ i\left(w - \frac{n_0 e^2}{wm\epsilon_0}\right) = 0$$

Propriété

On admet que

$$\forall w \neq w_p = \frac{n_0 e^2}{wm\epsilon_0}$$

Alors $\boldsymbol{\rho = 0}$

3 – Relation de dispersion

Méthode : On détermine l'équation de propagation grâce à la méthode du rotationnel (On applique deux fois l'opérateur $\overrightarrow{rot}$ au champ E) Puis on injecte dans l'expression (1) pour obtenir

Propriété

La relation de dispersion liée a l'onde ELM dans un plasma donne

$$k^2 = \frac{w^2 - w_p^2}{c}$$

- Dans le cas ou $w > w_p$ l'onde est progressive et sinusoïdale d'après l'expression (1) ,

$$\underline{\vec{E}} = \overrightarrow{E_0} \times\ e^{i(wt-kx)}$$

$$\vec{\mathrm{E}} = Re(\underline{\vec{E}}) = \overrightarrow{E_0} \times\ \cos(wt - kx)$$

On peut facilement déterminer $\vec{B}$ alors :

$$\vec{B} = \frac{\sqrt{w^2 - w_p^2}\ \overrightarrow{u_x} \wedge \vec{E}}{cw}$$

- Dans le cas ou $w < w_p$ le coefficient k devient complexe et on a **une onde évanescente.**

On l'exprime de cette façon

$$\vec{E} = \overrightarrow{E_0} \times e^{-\frac{x}{\delta}} \cos(wt)$$

En posant la grandeur delta :

$$\delta = \frac{1}{k'} = \frac{c}{\sqrt{w_p^2 - w^2}}$$

Le temps et l'espace sont découplés il n'y a donc pas de propagation.

Propriété

Une onde peut se propager dans le plasma uniquement si $w > w_p$. Le plasma joue un rôle de **passe haut**.

II – Phénomène de dispersion

1 – Le paquet d'onde

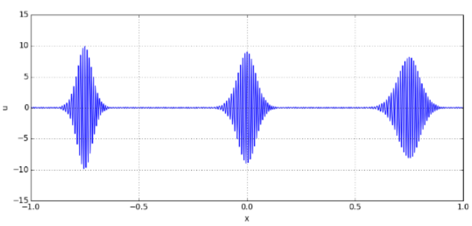
Définition

L'OPPH est un modèle elle ne représente pas la réalité. Une onde réelle ψ est la somme d'OPPH à répartitions continues de fréquences : **c'est un paquet d'onde**

Propriété

Le paquet d'onde est donné par la fonction

$$\psi(x,t) = \int_0^{+\infty} A(w) exp\big(j(wt - kx)\big) dw$$



L'amplitude $A(\omega)$ prend des valeurs non nulles entre $w_0 - \frac{\Delta w}{2}$ et $w_0 + \frac{\Delta w}{2}$

On peut calculer la fonction d'onde pour obtenir une expression analytique :

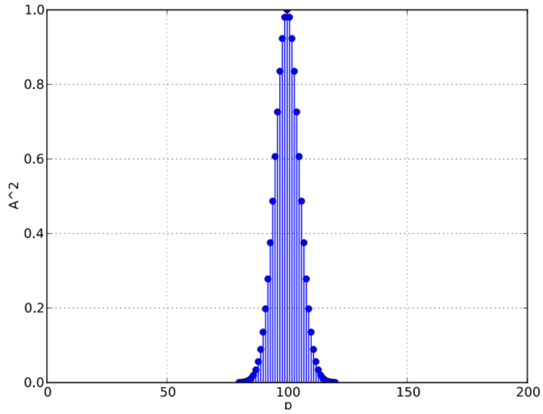


Fig.2 – Amplitude A(ω) avec pic centré en ω_0

On sait que $k(\omega)$ est une fonction de ω alors on peut $\forall\ \omega \in \nu(\omega_0)$ faire un developpement limité à l'ordre 1 :

$$k(\omega) = k(\omega_0) + \frac{dk}{d\omega}(\omega - \omega_0) + o(\omega - \omega_0)$$

Le dernier terme étant négligeable on le néglige en physique (conditions réelles).

On remplace dans l'intégrale du paquet d'onde et on montre que

$$\psi(x,t) = e^{j\left(\omega_0\left(t - \frac{x}{v_\varphi}\right)\right)} \times \underline{A}\left(t - \frac{x}{\frac{d\omega}{dk}}\right)$$

On dit que la partie exponentielle est l'onde moyenne centrée en ω_0 et la partie restante est l'enveloppe du paquet d'onde.

Définition

On définit deux vitesses, qui représentent respectivement la vitesse de l'onde moyenne et la vitesse de propagation de l'enveloppe :

- Vitesse de phase : (vitesse de l'onde)

$$v_\varphi = \frac{\omega_0}{k_0}$$

- Vitesse de groupe (vitesse du paquet)

$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)$$

2 - Vitesse de phase et vitesse de groupe dans le plasma

Pour une OPPH de pulsation ω la vitesse de phase est

$$\frac{\omega}{k}$$

Comme l'OPPH n'existe pas cette vitesse n'a pas de réalité physique en revanche la vitesse de groupe elle en à une : c'est la vitesse de propagation de l'information.

→ *Dans le vide on peut écrire*

$$k = \frac{\omega}{c} \Rightarrow \omega = kc$$

Alors $v_g = \frac{d\omega}{dk} = c = \frac{\omega}{k} = v_\varphi$

Propriété

Dans le vide on a $v_g = v_\varphi = c$

→ *Dans le plasma*

Propriété

Dans le plasma on a

$$v_\varphi > c$$

Donc elle n'a aucune réalité physique

De plus on a

$$v_g < c$$

On a de plus la relation suivante dans le plasma

Propriété

$$v_\varphi \times v_g = c^2$$

Vecteur de Poynting

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{kE_0^2}{\omega\mu_0}\cos^2(wt - kx)\,\overrightarrow{u_x}$$

D'où

$$\boxed{\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{kE_0^2}{2\omega\mu_0}}$$

On détermine de même

$$u_{EB} = \frac{1}{4}\varepsilon_0 E^2\left(1 + \frac{k^2c^2}{\omega^2}\right)$$

On peut de même calculer la densité volumique d'énergie cinétique dans le matériau

$$\langle u_c\rangle = n_0\left\langle\frac{1}{2}mv^2\right\rangle = \frac{1}{2}mn_0\langle v^2\rangle$$

Mais on à déterminé plus tôt que

$$\vec{v} = -\frac{e\vec{E}}{i\omega m} \Rightarrow \langle\vec{v}^2\rangle = \frac{e^2E_0^2}{2m^2\omega^2}$$

D'où finalement

$$\langle u_c\rangle = \frac{n_0e^2E_0^2}{4m\omega^2}$$

Ainsi

$$\langle u_{tot}\rangle = \langle u_{EB}\rangle + \langle u_c\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2$$

On retrouve l'expression du vide.

On peut calculer la vitesse de propagation de l'énergie :

$$\overrightarrow{v_e} = \frac{\langle\vec{\Pi}\rangle}{\langle u_{tot}\rangle}$$

On parvient à partir des calculs précédents à calculer que

$$\overrightarrow{v_e} = \frac{c^2}{v_\varphi}\overrightarrow{u_x} = v_g\overrightarrow{u_x}$$

Remarque : Dans le cas ou $\omega < \omega_p$ on n'auras pas de propagation d'énergie dans le plasma, l'onde est réfléchie dans le plasma qui joue le rôle d'un miroir

$$\langle\vec{\Pi}\rangle = 0$$