

Fragen

Funktionen mit hoher Frequenz müssen mit hoher Auflösung dargestellt werden, das sagt das **Abtasttheorem** (nach MW99):

Ein Zeitsignal $x(t)$, das mit f_g bandbegrenzt ist und mit einer Abtastfrequenz $1/T_a \geq 2f_g$ abgetastet wird, kann aus dem Abtastsignal [...] fehlerfrei wiedergewonnen werden.

Wir betrachten hier eine Funktion

$$h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$h(x, y) \mapsto (c_1, c_2)$$

sowie gegebene Auflösungen res_x und res_y und wollen entscheiden, ob die Funktion angemessen darstellbar ist.

Eigentlich soll JavaView ja komplexe Funktionen darstellen. Ich sehe aber keinen Grund, \mathbb{C} hier nicht mit dem $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zu identifizieren. **Frage Nr. 1** ist, ob ich dabei etwas übersehe.

Die Funktion h ist genau dann nicht angemessen darstellbar, wenn der Anteil an hohen Frequenzen groß ist, d.h. dass ein großer Fehler ε übrigbleibt, wenn man nur die ersten k Glieder der zweidimensionalen Fourier-Reihe $F_h(x, y)$ betrachtet. (Es wird dabei k so gewählt, dass $F_{h,k}(x, y)$ gerade noch mit $f_g = \frac{1}{2T_a}$ bandbegrenzt ist).

Zum Restglied von mehrdimensionalen Fourier-Reihen (d.h. nicht von \mathbb{R} nach $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, sondern von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$) sind kaum Abschätzungen zu finden. Oder, das wäre **Frage Nr. 2**, sind Ihnen welche bekannt?

Konstantin hat mich auf die Idee gebracht, stattdessen zunächst die Variable y festzuhalten, dann die Fourier-Reihe der Funktion $h_y(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ aufzustellen und dort den Fehler $\varepsilon_x(y)$ in Abhängigkeit von y zu berechnen. Da wir in JavaView immer nur einen Ausschnitt der Funktion betrachten können wir das Maximum von $\varepsilon_x(y)$ über alle y bestimmen und so zu einem maximalen Fehler $\varepsilon_x = \max_y \{\varepsilon_x(y)\}$ kommen. Analog gehen wir vor, um ε_y zu bestimmen.

Frage Nr. 3 Was halten Sie von diesem Vorgehen? Sind die Abschätzungen, die wir so bekommen, zu grob, so dass wir zu viele korrekt darstellbare Funktionen verlieren? Welche Funktion hat mein Entscheidungsautomat überhaupt, findet er irgendwo praktische Anwendung? Wenn ja, worauf muss ich dabei achten?

Frage Nr. 4 Gilt $\varepsilon = \max\{\varepsilon_x, \varepsilon_y\}$?

Frage Nr. 5 Was könnte man tun, wenn h eine Funktion ist, die zum Beispiel

Unstetigkeitsstellen hat und daher durch eine Fourier-Reihe gar nicht gleichmäßig approximierbar ist?

Frage Nr. 6 Wie soll der Computer feststellen, ob die Fourier-Reihe gleichmäßig konvergiert? Ich denke, dass es nicht so einfach ist, automatisch Stetigkeit oder sogar Differenzierbarkeit zu überprüfen.

Frage Nr. 7 Angenommen, die Fourier-Reihe von $h_y(x)$ konvergiert gleichmäßig gegen die Funktion. Was ist eine gute Abschätzung für das Restglied bzgl. der Maximumsnorm? Überall finde ich nur Aussagen über die Konvergenzgeschwindigkeit, aber nichts über den konkreten Wert des Restglieds.

Frage Nr. 8 Wenn ich einen Filter implementiere, muss ich die Fourier-Reihe konkret berechnen können. Dazu muss ich integrieren. Auch das ist am Computer nicht so leicht. Oder stellt das srcBase-Paket etwas zur Verfügung?

Frage Nr. 9 Soll der Filter bei JavaView oder im ImageSource-Applet oder in beidem eingesetzt werden?

Literatur

[MW99] Dieter Müller-Wichards. *Transformationen und Signale*. B.G.Teubner, 1999.