Ergebnisse der Besprechung vom 3. April 2014

Ullika Scholz

Meine Bachelorarbeit wird aus zwei Teilen bestehen. Das Thema sind weiterhin Moiré-Effekte beim Domain-Coloring (siehe Proposal vom 26.2.). Im ersten Teil werde ich einen Entscheidungsautomaten entwickeln, der zu gegebener Funktion $h^* : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und gegebenen Pixel-Auflösungen res_x und res_y entscheidet, ob die Funktion angemessen darstellbar ist. Im zweiten Teil soll, falls dafür noch Zeit ist, die Entstehung der Wellenmuster erklärt werden.

In der Besprechung vom 3. April ging es nur um den ersten Teil, also um die Entwicklung des Automaten. Um die Sache zu vereinfachen, nehme ich in dieser Übersicht an, dass es sich bei h^* um eine Funktion auf $\mathbb{R}$ handelt und wir nur die Auflösung in x-Richtung res_x betrachten müssen.

Bislang steht fest (vgl. MW99):

Für jede abschnittsweise stetige Funktion $h(t)$ auf einem Intervall $[a, b]$ existiert eine Darstellung als Fourier-Reihe, also:

$$h(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(h)(t), \text{ wobei}$$

$$f_n(h)(t) = \sum_{-n}^{n} c_n e^{in\omega t}.$$

Die Koeffizienten $c_n \in \mathbb{C}$ werden dabei u.a. aus dem Integral der Funktion h berechnet.

Falls die Funktion h^* aus dem Raum $\mathcal{F} = \{h \in C[a, b] : h \equiv f_{res_x}(h)\}$, also aus dem Raum derjenigen Funktionen stammt, deren Fourier-Reihenentwicklung bei $n = res_x$ abbricht, ist die Sache klar. Denn dann ist h^* mit res_x bandbegrenzt und folgender Satz kann unmittelbar angewendet werden:

Satz (Abtasttheorem) (nach MW99)

Ein Zeitsignal $x(t)$, das mit f_g bandbegrenzt ist und mit einer Abtastfrequenz $1/T_a \geq 2f_g$ abgetastet wird, kann aus dem Abtastsignal [...] fehlerfrei wiedergewonnen werden.

Wir können also unseren Automaten ein sicheres „Ja“ ausgeben lassen.

Die meisten Funktionen wie z.B. Polynome haben allerdings eine Fourier-Reihenentwicklung, die nie abbricht. Trotzdem lassen sich viele dieser Funktionen weitgehend fehlerfrei darstellen. Angenommen h^* ist so eine Funktion. Was soll der Entscheidungsautomat machen?

Idee: Wir suchen im Funktionenraum $\mathcal{F}$ nach derjenigen korrekt darstellbaren Funktion f^*, die sich von unserer Funktion h^* am wenigsten unterscheidet. Je nachdem, ob der Fehler $\varepsilon = \|h^* - f^*\|_\infty$ groß oder klein ist, entscheiden wir, ob wir die Funktion h^* akzeptieren. Diese Vorgehensweise soll zur Folge haben, dass wir Funktionen, deren Frequenzanteile ab res_x gering sind, akzeptieren (Abb.1), während wir Funktionen, bei denen gerade diese Frequenzen eine Rolle spielen, ablehnen (Abb.2).

In diesem Beispiel wurden für h^* zwei verschiedene reelle Polynome auf dem Intervall $[-1, 1]$ und eine Auflösung von 2,5 Pixeln pro Einheit gewählt.

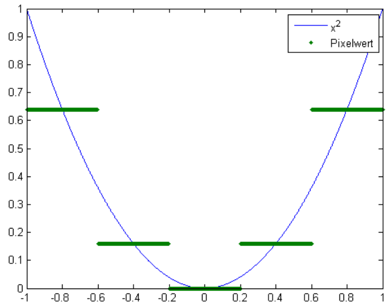

Abbildung 1: Abtastung einer Parabel

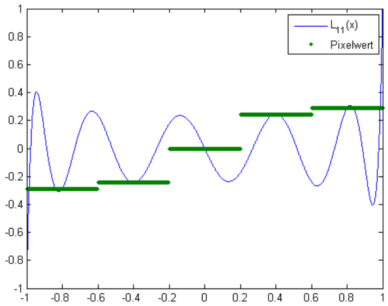

Abbildung 2: Abtastung des elften Legendre-Polynoms

Warum $\varepsilon = \|h^* - f^*\|_\infty$ in Abb.2 nicht bloß zufällig größer als in Abb.1 ist, werde ich in den nächsten Wochen ebenso zeigen, wie dass es sich bei der Funktion f^* um $f_{res_x}(h^*)$ handelt, also um die Reihenentwicklung von h^*, die nach res_x Gliedern abgeschnitten wird.

Weitere Literatur: (Ach78) sowie (Sch78).

Literatur

[Ach78] Dietmar Achilles. *Die Fourier-Transformation in der Signalverarbeitung.* Springer-Verlag, 1978.

[MW99] Dieter Müller-Wichards. *Transformationen und Signale.* B.G.Teubner, 1999.

[Sch78] Heinrich Schröder. *Elektrische Nachrichtentechnik*. Hüthig und Pflaum Verlag GmbH & Co.KG, 1978.