

Théorème d'Escher et théorème de Napoléon

Pavages par hexagones

Parmi ses oeuvres multiples, M. C. Escher s'est intéressé à un pavage du plan par un type particulier d'hexagone. C'est ce que J. F. Rigby a appelé le *théorème d'Escher*, dans son article intitulé *Napoleon, Escher and Tessellations*,¹ où il fait notamment le lien entre le théorème de Napoléon et celui d'Escher. C'est cette idée que nous allons développer ici. Précisons que M. C. Escher ne prétend pas avoir inventé ce genre d'hexagone qu'il a trouvé dans un article de F. Haag publié en 1923. Et en 1918, K. Reinhardt a montré dans sa thèse qu'il existe trois types d'hexagones susceptibles de paver le plan, l'hexagone de type 3 étant justement celui étudié par Escher.

1. L'hexagone d'Escher

D'abord voici comment construire un tel hexagone, en notant les points par des numéros. Prenons un triangle équilatéral 024 orienté dans le sens direct (on parcourt 024 dans le sens contraire des aiguilles d'une montre), de centre O . Puis prenons un point 1 quelconque. A partir de ce point, construisons le triangle 123 isocèle en 2 et tel que l'angle orienté $(\mathbf{21}, \mathbf{23}) = -2\pi/3$, puis le triangle 345 isocèle en 4 et tel que l'angle orienté $(\mathbf{43}, \mathbf{45}) = -2\pi/3$. On constate alors que le triangle 501 est aussi isocèle en 0 , avec l'angle $(\mathbf{50}, \mathbf{51}) = -2\pi/3$, comme on va le prouver ci-dessous. On obtient ainsi l'hexagone 012345 qui a ses côtés successifs égaux en longueur deux à deux, ainsi que des angles de $-2\pi/3$ en $0, 2$ et 4 ² (figure 1).

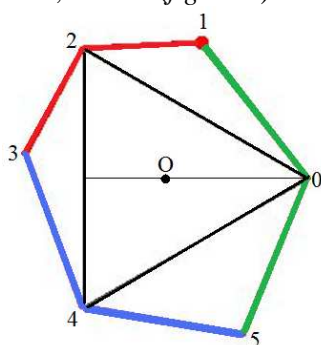


Figure 1 : Hexagone 012345

1.1. Démonstration de la propriété

Plaçons-nous dans le plan complexe, en introduisant un repère orthonormé direct d'origine O , centre du triangle équilatéral, et tel que le sommet 0 de ce triangle ait pour coordonnées $(1, 0)$ ou pour affixe 1 . Donnons-nous le point 1 quelconque, puis construisons la ligne brisée 1234507 avec les longueurs égales $12 = 23$, $34 = 45$, $50 = 07$, avec entre eux des angles de 120° . Il s'agit de prouver que cette ligne brisée se referme sur elle-même, c'est-à-dire que le point 7 n'est autre que le point 1 .

¹ Dans *Mathematical Magazine* 64, 1991, article disponible sur Internet.

² Inversement, en partant d'un hexagone 012345 caractérisé par ses côtés successifs égaux deux à deux ($12 = 23$, etc.) faisant entre eux des angles de $-2\pi/3$, on peut déduire, en faisant le calcul, que le triangle 024 est équilatéral.

On passe du point 1 au point 3 par une rotation de centre 2 et d'angle $-2\pi/3$, ce qui revient à faire tourner le vecteur **21** de $-2\pi/3$ pour arriver au vecteur **31**, soit en complexes : $z_3 - z_2 = a (z_1 - z_2)$ avec $a = e^{-i 2\pi/3} = j^2$, ou encore $z_3 = a z_1 + (1 - a) z_2$. En faisant de même avec les rotations de centres 4 et 0, on a les égalités :

$$\begin{array}{l|l} a^2 & z_3 = a z_1 + (1 - a) z_2 \\ a & z_5 = a z_3 + (1 - a) z_4 \\ 1 & z_7 = a z_5 + (1 - a) z_0 \end{array}$$

En multipliant chaque équation par les nombres 1, a, a2 en remontant, leur addition donne après simplifications en cascade :

$$z_7 = a^3 z_1 + (1 - a)(a^2 z_2 + a z_4 + z_0)$$

Avec ici $a^3 = 1$ et $a^2 z_2 + a z_4 + z_0 = j^5 + j^4 + 1 = j^2 + j + 1 = 0$, on trouve $z_7 = z_1$ et la boucle est bouclée.

1.2. Conditions pour avoir un hexagone simple

Encore convient-il, pour pouvoir construire ultérieurement un pavage, que l'hexagone soit simple, c'est-à-dire que ses côtés ne se recoupent pas. Reprenons le triangle équilatéral 024, en choisissant maintenant un repère d'origine O, centre du triangle, avec le point 2 de coordonnées (0, 1) ou d'affixe *i* (figure 1 bis).

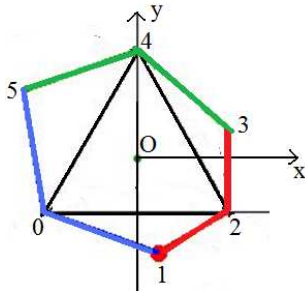


Figure 1 bis : L'hexagone avec son nouveau repère.

Nous allons faire varier le point 1 (x, y), point de départ de l'hexagone comme auparavant, sur des horizontales à ordonnée y constante, et en faisant varier x . On pourra supposer x positif ou nul, pour des raisons de symétrie par rapport à (Oy) , la même forme d'hexagone étant obtenue pour x négatif. On distingue plusieurs cas.

- $y > 1$. Le point D est situé sur une demi-horizontale au-dessus du point 4 (figure 2).

Sans entrer dans les détails, on distingue deux cas (figure 2). Pour les petites valeurs de x , les segments [12] et [34] se coupent. Pour les grandes valeurs de x , celles au-delà du point H (figure 2 à droite), les segments [01] et [34] se coupent. On n'a jamais un polygone simple.

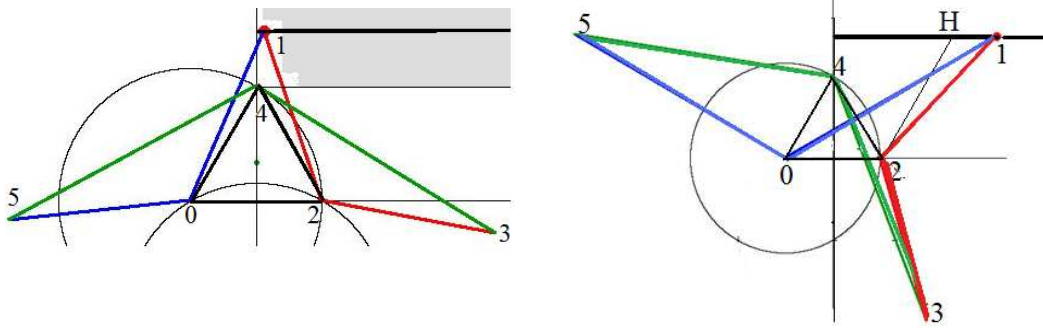


Figure 2 : Cas où l'ordonnée y du point 1 est supérieure à 1.

- $-0,5 \leq y \leq 1$. Le point 1 a son ordonnée comprise entre celles de 4 et de 0 . Pour $x = 0$, on a bien un hexagone simple, mais lorsque x augmente, on arrive à un cas limite où le point 1 tombe sur $[34]$ (figure 3). Au-delà on n'aura plus d'hexagone simple.

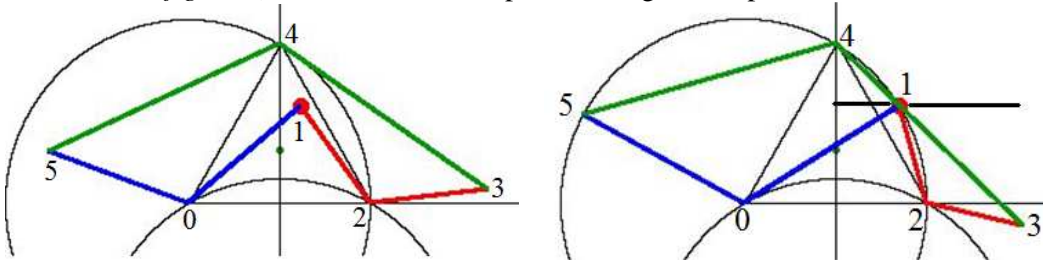


Figure 3 : A gauche un hexagone simple, à droite le cas limite au-delà duquel on n'a plus de polygone simple.

Cherchons ce cas limite. Le vecteur **41** a pour coordonnées $(x, y - 1)$. En appelant z l'affixe du point 1 , on a $z_3 = j^2 z + (1 - j^2) z_2$, avec le point 2 de coordonnées $(\sqrt{3}/2, -1/2)$ ou d'affixe $z_2 = i j^2$. et le point 4 d'affixe i , le vecteur **43** a pour affixe $j^2 z + (1 - j^2) i j^2 - i = j^2 z + i(j^2 - j - 1) = j^2 z + 2 i j^2$,

ce qui fait pour les coordonnées du vecteur **43**
$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \sqrt{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - 1 \end{cases}$$

Exprimons que les vecteurs **41** et **43** sont colinéaires, en prenant le déterminant des coordonnées. Le calcul aboutit à l'équation d'un cercle : $x^2 + y^2 + \sqrt{3}x + y - 2 = 0$. Ce cercle a pour centre le point 0 et pour rayon $\sqrt{3}$: il passe par les points 2 et 4 . Tant qu'on est à l'intérieur strict de ce cercle, l'hexagone est simple, et au-delà il ne l'est plus.

- $-2 \leq y \leq -0,5$. Le point 1 a son ordonnée comprise entre celles des points 0 et du point $4'$ symétrique de 4 par rapport à (02) .

Pour $x = 0$, on a un hexagone simple, et même convexe, mais lorsque x augmente, il arrive un moment où le point 3 tombe sur $[01]$, ce qui constitue le cas limite (figure 4). Exprimons cette condition :

Le vecteur **01** a pour coordonnées $(x + \frac{\sqrt{3}}{2}, y + \frac{1}{2})$, avec z_0 d'affixe ij .

Le vecteur **03** a pour affixe $z_3 - z_0 = j^2 z + (1 - j^2) i j^2 - ij = j^2 z + i j(j - 2)$, et pour coordonnées :

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \end{cases}$$

En exprimant l'alignement de $0, 3, 1$, on tombe sur l'équation d'un cercle :

$x^2 + y^2 + 4y + 1 = 0$, cercle de centre $4'$ et de rayon $\sqrt{3}$: il passe par les points 0 et 2 . Lorsque le point 1 est à l'intérieur de ce cercle, l'hexagone est simple, au-delà il ne l'est plus.

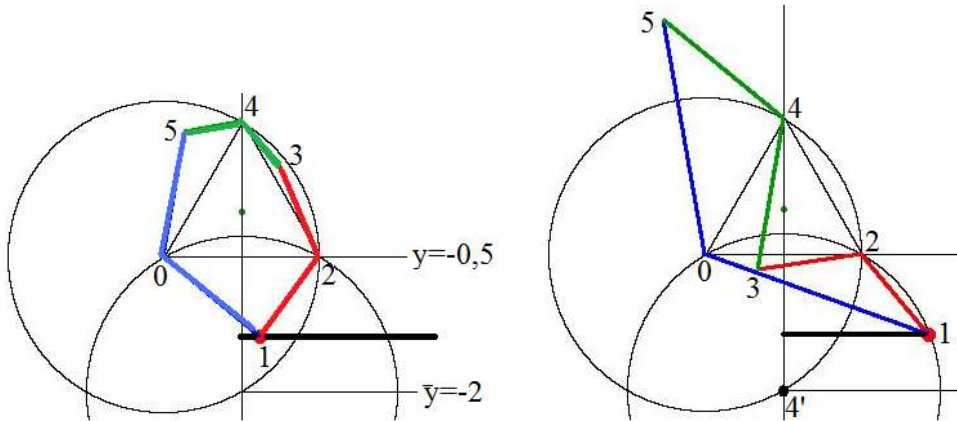


Figure 4 : A gauche un hexagone simple, à droite le cas limite au-delà duquel le polygone n'est plus simple

• $y < -2$. Le point 1 a son ordonnée inférieure à celle de $4'$. Les cas qui se produisent sont illustrés sur les figures 5 et 6. Lorsque y est compris entre $-2,23$ et -2 , l'hexagone est simple entre deux cas limites qui ont lieu lorsque les points $0, 3, 5$ sont alignés. Exprimons cet alignement :

Le vecteur **03** a pour affixe $j^2 z + i j (j - 2)$ comme on l'a vu. On a d'autre part $z_5 = j z_1 + (1 - j) z_0 = j z + (1 - j) i j$, et le vecteur **05** a pour affixe $j z + (1 - j) i j - i j = j z - i j^2$, soit en coordonnées :

$$\mathbf{03} \begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \end{cases} \text{ et } \mathbf{05} \begin{cases} -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \end{cases}$$

La condition d'alignement de $0, 3, 5$ aboutit à l'équation d'un cercle : $x^2 + y^2 - \sqrt{3}x + y - 2 = 0$. Son centre est le point 2 et son rayon $\sqrt{3}$: il passe par $0, 4$ et $4'$. Notamment lorsque l'ordonnée y du point 1 est inférieure à celle du point le plus bas du cercle, soit $-0,5 - \sqrt{3} \approx -2,23$, l'hexagone n'est jamais simple.

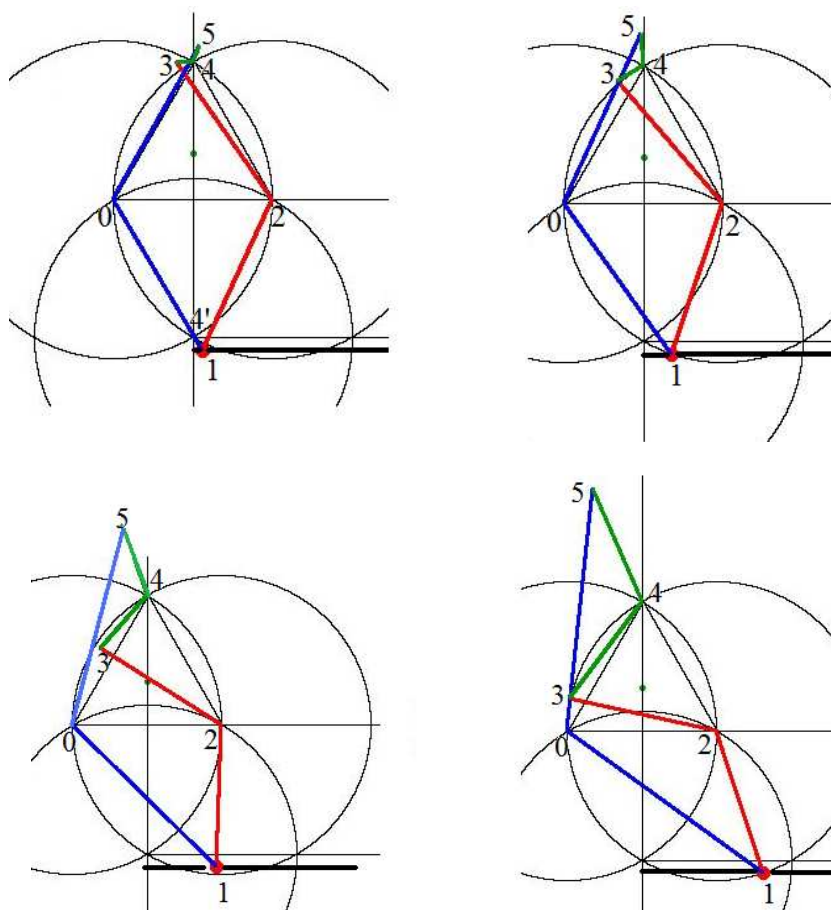


Figure 5 : Cas où le point I a une ordonnée légèrement inférieure à celle de $4'$ ($-2,23 < y < -2$). Pour x proche de 0, *en haut à gauche*, il y a croisement d'arêtes. Puis après un premier alignement de $1, 3$ et 5 (*en haut à droite*), on a un hexagone simple (*en bas à gauche*). Puis se produit un deuxième cas limite, où $1, 3, 5$ sont alignés (*en bas à droite*). Au-delà l'hexagone n'est plus simple.

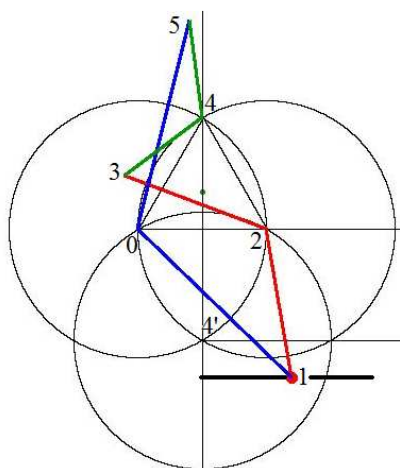


Figure 6 : Lorsque le point I' a une ordonnée inférieure à $-2,23$, l'hexagone n'est jamais simple.

Ce que l'on a fait pour une abscisse x du point I positive vaut aussi pour une abscisse négative. Finalement on trouve trois cercles limites, qui se déduisent par des rotations d'ordre trois autour du centre O' du triangle $024'$, ce qui est logique puisque le rôle joué par le point I que nous avons privilégié est aussi bien joué par les points 3 ou 5 . Les intersections des trois disques deux à deux constitue la zone du point I qui donne un hexagone simple, tandis que les points I extérieurs à cette zone donnent des hexagones dont les côtés se recoupent (figure 7).

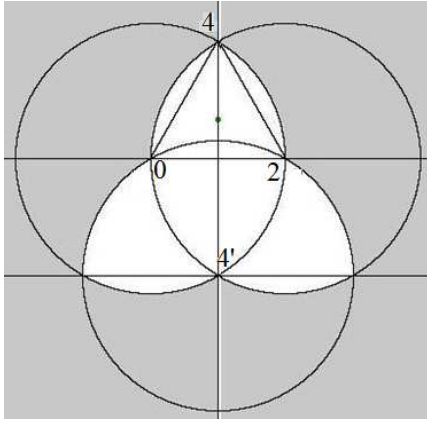


Figure 7 : Lorsque le point 1 est dans la zone en blanc, l'hexagone est simple. Dans la zone grise, il ne l'est pas.

1.3. Pavage par ce type d'hexagone

Nous allons maintenant vérifier qu'un tel hexagone permet de paver le plan. Partons d'un hexagone 012345, et faisons lui subir une rotation de $-2\pi/3$ autour du centre O de 024, ce qui donne un hexagone $0'1'2'3'4'5'$ (figure 8). On constate que non seulement $2'1' = 23$, mais que les vecteurs 23 et $2'1'$ font le même angle avec l'horizontale (l'axe des x , ou 01).³ Cela permet d'accoler les deux hexagones sur ce côté commun, avec le point $2'$ en 2 et les points $0, 2, 4'$ alignés. Faisons encore une rotation supplémentaire de $-2\pi/3$, d'où l'hexagone $0''1''2''3''4''5''$. Pour les mêmes raisons que précédemment, les côtés $4''3''$ et $4'5'$ ont la même longueur, et font le même angle avec l'horizontale. Cela permet d'accoler ces deux hexagones en faisant en sorte que les points $2', 4', 0''$ soient alignés.

Les trois hexagones accolés sont tels que les triangles équilatéraux qui leur sont associés ont leurs bases portées par la même horizontale. Et l'on constate que les côtés extrêmes $0''1''$ et 0 ont même longueur et même direction. Un nouveau bloc de trois hexagones peut être accolé au précédent, et ainsi de suite, avec une succession de triangles équilatéraux ABC dont les bases sont dans le prolongement l'une de l'autre. On réussit ainsi à construire une frise d'hexagones (figure 8 en bas).

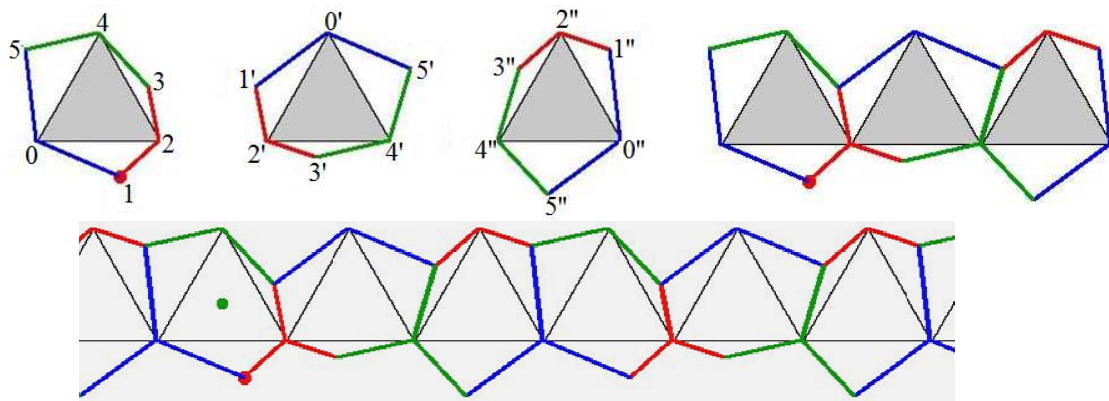


Figure 8 : En haut à gauche les trois hexagones se déduisant par rotations de $-2\pi/3$, et à droite ces trois hexagones accolés. En bas une frise d'hexagones.

La frontière basse d'un bloc de trois hexagones s'écrit $BRRVVB$ en notant les côtés par leur couleur (B pour bleu, R pour rouge, V pour vert suivant la figure 8). La frise a comme frontière basse le bloc

³ En effet $(2'4', 2'1') = (02, 2'1') = \pi/3 + (2'0', 2'1') = \pi/3 + (20, 21)$ et $(02, 23) = 2\pi/3 - (24, 23)$.

D'autre part :

$(24, 23) = 2\pi/3 - (20, 21) - \pi/3 = \pi/3 - (20, 21)$. Finalement :

$(02, 23) = \pi/3 + (20, 21) = (2'4', 2'1')$.

$BRRVVB$ répété indéfiniment. Quant à la frontière haute, il s'agit de la répétition périodique de $VVBBRR$, le même que le bloc $BRRVVB$ à un décalage d'un cran près. Cela signifie que l'on peut accoler une frise sur une autre, et cela indéfiniment, ce qui donne un pavage du plan. Remarquons que les triangles équilatéraux 024 sous-jacents forment aussi un pavage du plan (*figure 9*). En faisant ressortir les triangles 135 , on voit bien les symétries rotationnelles d'ordre 3 du pavage (*figure 10*). Des résultats de pavages sont donnés sur les *figures 11 et 12*.

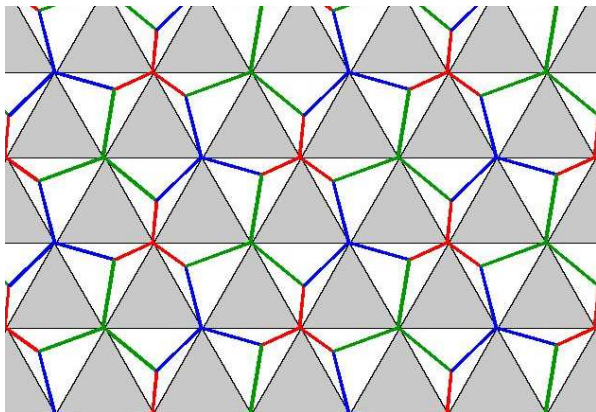


Figure 9 : Le pavage du plan par les hexagones, avec les triangles équilatéraux sous-jacents

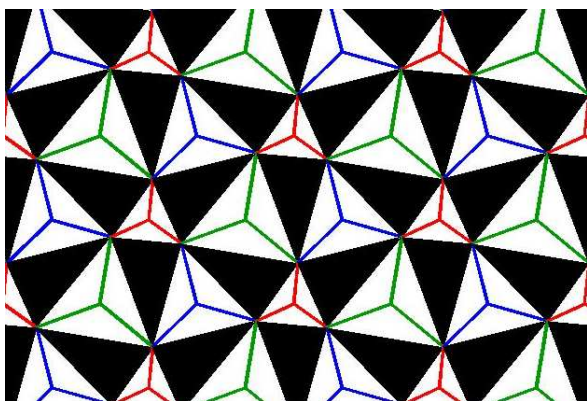


Figure 10 : Le même pavage, en faisant ressortir les triangles DEF

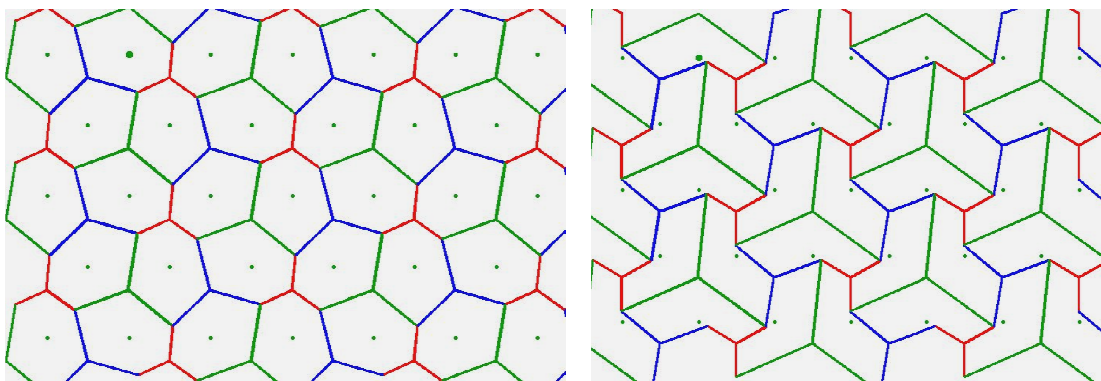


Figure 11 : A gauche, pavage avec des hexagones convexes. Les points ajoutés correspondent aux centres de gravité O des hexagones. A droite, pavage avec des hexagones non convexes.

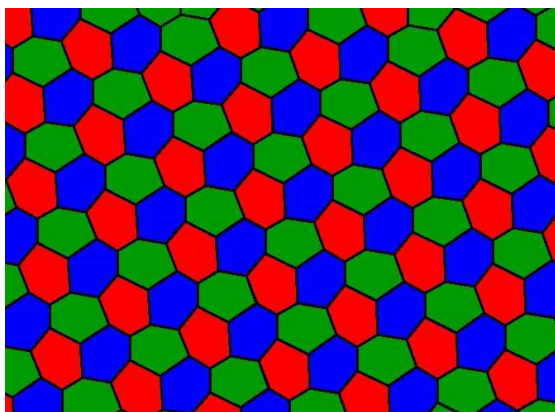


Figure 12 : Un exemple de pavage.

1.4. Programmation

/ On est dans la zone calcul, avec des coordonnées en flottants. Ces coordonnées $x[i][j]$ et $y[i][j]$ ont deux indices : le premier est le numéro du point, les points A B C D E F étant numérotés de 0 à 5. Le deuxième indice est le numéro de la rotation. Au départ, cet indice est 0. On se donne le point D (numéro 3) puis on détermine les coordonnées des points A B C, avec l'origine en O centre du triangle. On détermine enfin les points E et F */*

```
x[3][0]=0.4; y[3][0]=-0.9; /* le point D */
```

```
x[0][0]=0.; y[0][0]=1.;
x[1][0]=-0.5*sqrt(3.); y[1][0]=-0.5;
x[2][0]=-x[1][0]; y[2][0]=y[1][0];
x[4][0]=-0.5*x[3][0]+0.5*sqrt(3.)*y[3][0]+sqrt(3.); y[4][0]=-0.5*sqrt(3.)*x[3][0]-0.5*y[3][0];
x[5][0]=-0.5*x[3][0]-0.5*sqrt(3.)*y[3][0]-sqrt(3.); y[5][0]=0.5*sqrt(3.)*x[3][0]-0.5*y[3][0];
```

/ On effectue les deux rotations numérotées 1 et 2 de -120° sur les six points */*

```
for(i=0;i<6;i++)
{ x[i][1]=-0.5*x[i][0]+sqrt(3.)*0.5*y[i][0]; y[i][1]=-0.5*sqrt(3.)*x[i][0]-0.5*y[i][0];
  x[i][2]=-0.5*x[i][0]-sqrt(3.)*0.5*y[i][0]; y[i][2]=0.5*sqrt(3.)*x[i][0]-0.5*y[i][0];
}
```

/ On passe au pavage. Pour cela on commence par se donner les coordonnées écran de l'origine O de l'hexagone initial, soit $xorig[0]$ et $yorig[0]$. Les coordonnées des centres des hexagones du pavage sont notées $xorig$, $yorig$ et elles sont calculées dans une double boucle indexée par i et j . A chaque étape on détermine les coordonnées écran (x_{ea} , y_{ea}), (x_{eb} , y_{eb}), etc. des 6 points de chaque hexagone, et on les relie par des traits. */*

```
xorig[0]=200;yorig[0]=80; /* point central à partir duquel est construit la première frise */
xorig[1]=xorig[0]-1.5*sqrt(3.)*zoom; yorig[1]=yorig[0]-1.5*zoom; /* point central pour la frise
                                                                    voisine */

yorig=yorig[0];
for(j=0;j<6;j++)
{ for(i=0;i<10;i++)
  { xorig=xorig[0]+(i-3)*sqrt(3.)*zoom;
    if (xorig>50 && xorig<750 && yorig>50 && yorig<530) /* pour rester dans les limites d'écran */
    { filldisc(xorig,yorig,2,green);
      xea=xorig+zoom*x[0][i%3]; yea=yorig-zoom*y[0][i%3];
      xeb=xorig+zoom*x[1][i%3]; yeb=yorig-zoom*y[1][i%3];
      xec=xorig+zoom*x[2][i%3]; yec=yorig-zoom*y[2][i%3];
      xed=xorig+zoom*x[3][i%3]; yed=yorig-zoom*y[3][i%3];
      xee=xorig+zoom*x[4][i%3]; yee=yorig-zoom*y[4][i%3];
      xef=xorig+zoom*x[5][i%3]; yef=yorig-zoom*y[5][i%3];
      linewidth(xec,yec,xed,yed,1,red); linewidth(xec,yec,xee,yee,1,red);
      linewidth(xeb,yeb,xed,yed,1,blue); linewidth(xeb,yeb,xef,yef,1,blue);
      linewidth(xea,yea,xee,yee,1,green); linewidth(xea,yea,xef,yef,1,green);
```



```

    }
  }
  yorig+=1.5*zoom;
}

```

1.5. Variante avec des carrés et des octogones

Partons maintenant d'un carré $ACEG$ (figure 13), puis à partir d'un point H quelconque, construisons le point B se déduisant de H par la rotation de centre A et d'angle $-\pi/2$. Puis prenons le point D se déduisant de B par la rotation de centre C et d'angle $-\pi/2$. Faisons de même autour de points E et G . On obtient un octogone $ABCDEFGH$ dont les côtés successifs pris deux par deux à partir de H ont même longueur et font un angle droit.

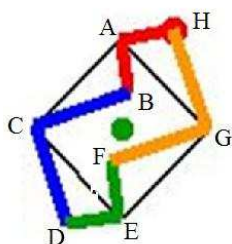


Figure 13 : L'octogone $ABCDEFGH$

Cet octogone a aussi comme particularité d'avoir ses côtés opposés de même longueur et parallèles, en l'occurrence HA et ED , AB et FE , BC et GF , CD et HG , comme on le vérifie aisément. Effectuons des rotations successives de $-\pi/2$ autour du centre du carré, ce qui donne un bloc de quatre octogones que l'on peut accoler l'un l'autre par un côté commun (figure 14). Par répétitions, on peut former une frise d'octogones, puis un pavage avec ces octogones (figure 15). On observe que ce pavage a les symétries rotationnelles d'ordre 4. Sur la figure 16, nous avons ajouté un quadrillage de carrés (dont les sommets sont les centres des rotations d'angle droit laissant invariant le pavage), afin d'obtenir un pavage avec deux types de pavés. Chacun de ces carrés est le générateur du pavage par deux translations dont les vecteurs sont les côtés de ce carré.

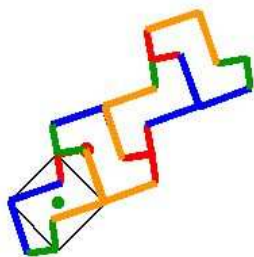


Figure 14 : Bloc de quatre octogones accolés, tournés d'un angle droit à chaque fois

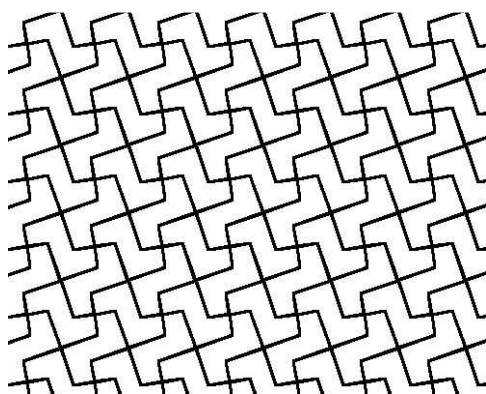


Figure 15 : Pavage avec ce type d'octogone

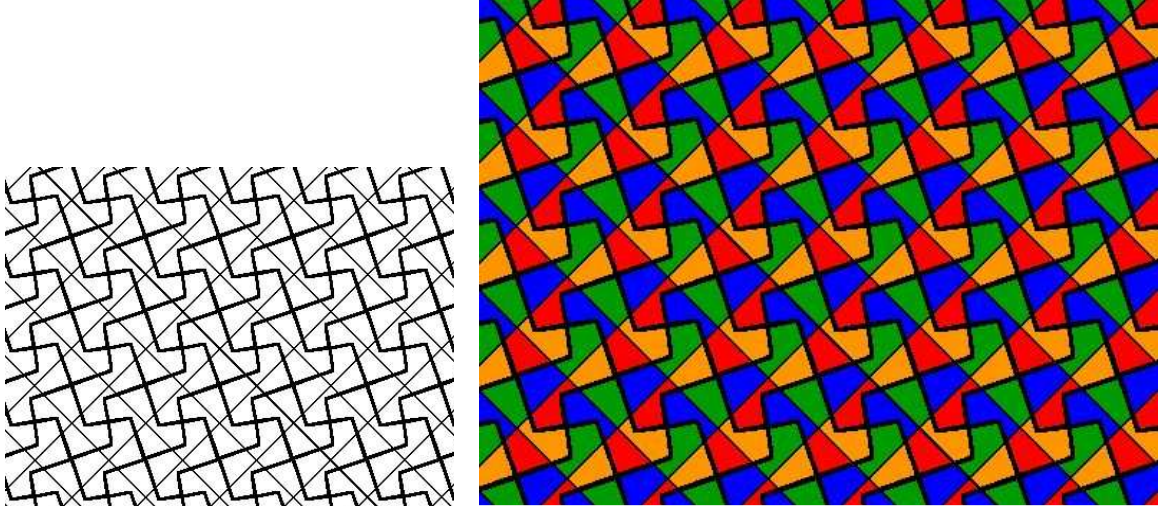


Figure 16 : A gauche rajout d'un quadrillage carré sur le pavage, à droite le nouveau pavage avec deux types de pavés. Le coloriage est d'ordre esthétique.

1.6. Variante avec des hexagones réguliers et des dodécagones

Partons d'un hexagone régulier de sommets notés 0 2 4 6 8 et 10, et donnons-nous un point 1 quelconque. A partir de là construisons des triangles isocèles avec un angle de $-2\pi/3$, soit les triangles 123, 345, 567, 789, 910 11 (figure 17). On constate alors que le triangle 11 0 1 est aussi isocèle avec l'angle de $-2\pi/3$. La ligne brisée obtenue se referme sur elle-même et donne un dodécagone.

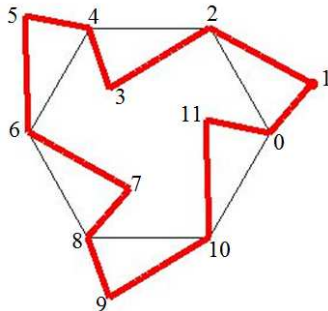


Figure 17 : Le dodécagone avec ses sommets allant de 0 à 11, avec l'hexagone régulier sous-jacent 0 2 4 6 8 et 10.

Démontrons que la ligne brisée ainsi fabriquée se referme bien sur elle-même. On passe des points 1 à 3 par rotation de centre 2 et d'angle $-2\pi/3$. Comme le nombre complexe j^2 a pour module 1 et pour argument $-2\pi/3$, cela s'écrit :

$z_3 - z_2 = j^2 (z_1 - z_2)$. On en déduit la suite d'égalités :

$$\begin{array}{l|l} j^2 & z_3 = j^2 z_1 + (1 - j^2) z_2 \\ 1 & z_5 = j^2 z_3 + (1 - j^2) z_4 \\ j & z_7 = j^2 z_5 + (1 - j^2) z_6 \\ j^2 & z_9 = j^2 z_7 + (1 - j^2) z_8 \\ & z_{11} = j^2 z_9 + (1 - j^2) z_{10} \end{array}$$

En remontant à partir de la dernière équation, passons de l'une à la précédente en la multipliant par j^2 , ce qui donne les coefficients multiplicateurs indiqués ci-dessus dans la colonne de gauche. Grâce à ces multiplications sur les égalités, il se produit des simplifications en cascade lorsqu'on les ajoute membre à membre, et il reste :

$z_{11} = j z_1 + (1 - j^2)(j^2 z_2 + z_4 + j z_6 + j^2 z_8 + z_{10})$. Comme $z_2 + z_8 = 0$ ainsi que $z_4 + z_{10} = 0$, avec $z_6 = -1$, il reste :

$z_{11} = j z_1 - j + 1$. Multiplions par j^2 :

$$j^2 z_{11} = z_1 - 1 + j^2$$

$z_1 = z_{11} + 1 - j^2$. On passe bien du point 11 au point 1 par la rotation de centre 0 (d'affixe 1) et d'angle $-2\pi/3$.

Par sa construction même, le dodécagone obtenu présente des symétries de rotations d'ordre 3 : il reste invariant par des rotations de centre O , centre de l'hexagone régulier initial, et d'angle 120° .

On constate que ce dodécagone peut paver le plan de façon périodique. Son parallélogramme générateur, défini par les deux vecteurs de translation, possède des symétries de rotation d'ordre 3. On dit que le pavage est du type $p3$ (figure 18). La reproduction infinie de ce parallélogramme, en fait un losange formé de deux triangles équilatéraux, remplit le plan.

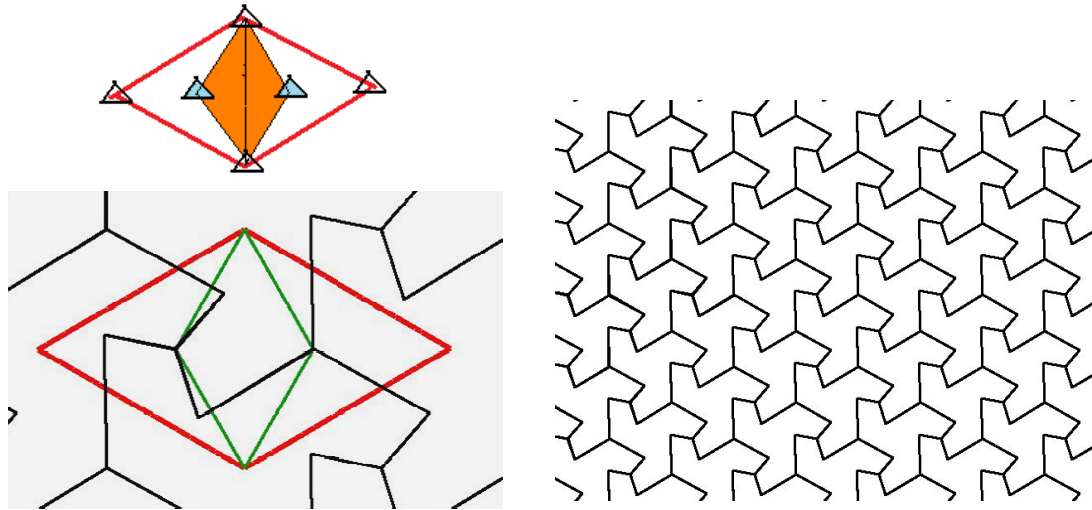


Figure 18 : En haut, les symétries présentes dans le parallélogramme générateur associé au pavage $p3$: les centres des rotations de 120° laissent invariant le pavage sont indiqués par de petits triangles. La cellule minimale génératrice est dessinée en couleur ocre : en pratiquant les rotations autour de deux de ses sommets (en bleu sur le dessin), son motif intérieur remplit le parallélogramme. En bas à gauche le parallélogramme générateur du pavage par translations en rouge, avec son motif intérieur, et en vert la cellule minimale génératrice. A droite, un exemple de pavage par un dodécagone.

Ce que nous venons de faire pour passer d'un triangle équilatéral à un hexagone, d'un carré à un octogone ou d'un hexagone régulier à un dodécagone se généralise.⁴ A condition de distinguer deux cas :

- Un polygone à n côtés avec n pair peut toujours être entouré d'un polygone à $2n$ côtés, où les côtés successifs pris deux à deux forment un triangle isocèle avec un angle égal à celui du polygone initial. Mais les polygones ainsi obtenus par cette méthode à la Escher ne pavent pas le plan (figure 19), sauf dans le cas du carré et de l'hexagone régulier, pour $n = 4$ et $n = 6$.

⁴ D'autres généralisations sont possibles, que l'on appelle les polygones de Haag. On pourra consulter [VIL2014].

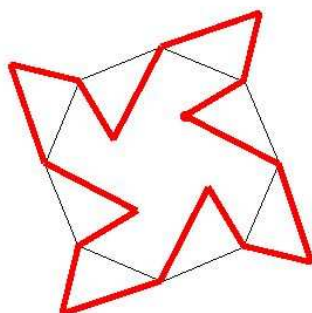


Figure 19 : Construction d'un polygone à 16 côtés à partir d'un octogone régulier.

- Un polygone à n côtés avec n impair peut toujours être entouré d'un polygone à $2n$ côtés, où les côtés successifs pris deux à deux forment un triangle isocèle avec un angle égal au double de celui du polygone initial. Mais les polygones ainsi obtenus ne pavent pas le plan, sauf dans le cas du triangle équilatéral pour $n = 3$.

Exemple : $n = 5$. Un pentagone régulier 02468 a ses angles égaux à $3\pi/5$. A partir d'un point 1 quelconque, on construit le point 3 tel que $12 = 23$ avec l'angle $(\mathbf{21}, \mathbf{23}) = -6\pi/5 = 4\pi/5$. Et l'on continue de même, en constatant que la ligne brisée se referme pour donner un décagone (figure 20). La démonstration se fait comme précédemment.

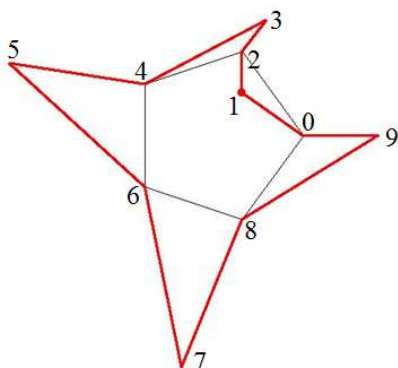


Figure 20 : Décagone à côtés successifs de même longueur deux à deux et faisant entre eux un angle de $4\pi/5$.

2. Le théorème de Napoléon

Partons d'un triangle quelconque de sommets numérotés 0, 2, 4 et entourons-le extérieurement avec trois triangles équilatéraux ayant chacun un côté du triangle 024 initial (figure 21). Dans ces conditions, les centres 1, 3, 5 de ces trois triangles forment toujours un triangle équilatéral. Cette propriété est traditionnellement appelée *théorème de Napoléon*, même si ce dernier n'a vraisemblablement que peu à voir avec le théorème qui porte son nom. Nous allons redémontrer cette propriété par le biais de l'hexagone 012345 qui n'est autre que l'hexagone étudié par M.C. Escher.

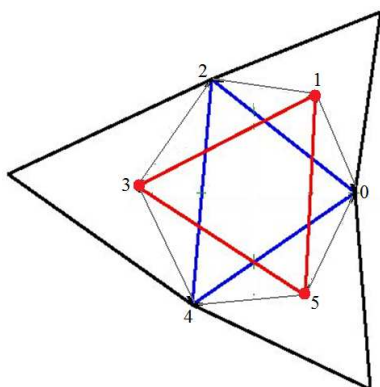


Figure 21 : Triangle quelconque initial 024 (en bleu) entouré des trois triangles équilatéraux, ainsi que de trois triangles isocèles 012, 234, 450 avec un angle de 120° , ce qui donne un triangle équilatéral 135 (en rouge).

En effet, au lieu d'entourer le triangle initial par des triangles équilatéraux, il revient au même d'entourer le triangle par trois triangles isocèles 012, 234, 450, chacun avec un angle de 120° , et de montrer que le triangle 135 est équilatéral (figure 21). On retrouve ainsi l'hexagone d'Escher par une méthode inversée. Dans le cas présent on part d'un triangle quelconque pour obtenir un triangle équilatéral et l'hexagone associé, tandis que par la méthode d'Escher on part d'un triangle équilatéral pour arriver à l'hexagone.

2.1. Démonstration du théorème

Traisons cela sous forme d'exercice.

Considérons un triangle ABC quelconque, de centre de gravité O . Appelons z_0, z_2, z_4 les affixes de ABC dans le plan complexe avec O pour origine, les points ABC étant numérotés 0 2 4. Sans perte de généralité, on peut supposer que A est sur l'axe des x , avec $\overline{OA} = 1$, d'où $z_0 = 1$. On se donne B d'affixe z_2 quelconque dans le plan.

1) Montrer qu'il existe un point C unique tel que le triangle ABC ait son centre de gravité en O .

Dans ce contexte, le triangle quelconque ABC dépend uniquement du paramètre z_2 , avec ses sommets d'affixe 1, z_2 et $-1 - z_2$.

Le centre de gravité O est tel que l'on a l'égalité vectorielle $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$, $z_0 + z_2 + z_4 = 0$, d'où $z_4 = -1 - z_2$. Le point C est unique.

2) On accole trois triangles semblables dans le sens direct sur les trois côtés, soit 012, 234, 450. Cela signifie qu'ils ont les mêmes angles. Cela signifie aussi qu'une similitude directe de centre 0 fait passer de $[02]$ à $[01]$, une autre de centre 2 fait passer de $[24]$ à $[23]$ et une troisième de centre 4 de $[40]$ à $[41]$, et que ces trois similitudes ont même rapport k et même angle θ , avec θ tel que $-\pi < \theta < 0$.⁵ On pose $a = k e^{i\theta}$. Montrer que le triangle 135 a aussi pour centre de gravité O , et donner z_1, z_3, z_5 en fonction de z_2 .

Posons $a = k e^{i\theta}$. On a alors :

$$z_1 - z_0 = a (z_2 - z_0)$$

$$z_3 - z_2 = a (z_4 - z_2)$$

$$z_5 - z_4 = a (z_0 - z_4)$$

⁵ Le fait de prendre θ négatif exprime que les triangles accolés sont extérieurs au triangle initial 024. Le théorème serait aussi valable avec des triangles accolés intérieurs, mais dans ce cas la figure obtenue est moins intéressante pour ce qui nous concerne ici.

Par addition membre à membre, il reste seulement $z_1 + z_3 + z_5 = 0$, ce qui signifie que O est aussi le centre de gravité du triangle 123 .

Plus précisément :

$$z_1 = 1 + a(z_2 - 1) = a z_2 + 1 - a$$

$$z_3 = z_2 + a(-1 - z_2 - z_2) = (1 - 2a) z_2 - a$$

$$z_5 = z_4 + a(1 - z_4) = (1 - a) z_4 + a = (a - 1) z_2 + 2a - 1$$

3) Calculer $z_3 - z_1$ et $z_5 - z_1$

$$z_3 - z_1 = (1 - 3a) z_2 - 1$$

$$z_5 - z_1 = -z_2 + 3a - 2$$

4) Montrer qu'il existe une valeur unique de a (nombre qui définit le rapport et l'angle des similitudes), telle que pour un triangle 024 quel qu'il soit, le triangle 135 est toujours équilatéral.

Le triangle 135 sera équilatéral de sens direct si et seulement si $z_5 - z_1 = -j^2(z_3 - z_1)$. En effet, $-j^2$ est un nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi / 3$. L'égalité précédente signifie que les vecteurs **15** et **13** ont même longueur et font un angle de $\pi / 3$, ce qui caractérise un triangle équilatéral. L'égalité devient :

$$\begin{aligned} -z_2 + 3a - 2 &= -j^2((1 - 3a)z_2 - 1) \\ (-j^2 + 3j^2 a + 1) z_2 &= 3a - 2 - j^2 \end{aligned}$$

Imposons que $3a - 2 - j^2 = 0$ et aussi $-j^2 + 3j^2 a + 1 = 0$. Si une valeur de a vérifie ces deux équations, cela prouvera que l'on a un triangle équilatéral quel que soit z_2 , c'est-à-dire quel que soit le triangle initial 024 .

L'équation $3a - 2 - j^2 = 0$ donne $a = (j^2 + 2) / 3$. On constate alors que pour cette valeur de a la deuxième équation est aussi vérifiée, en effet

$$-j^2 + 3j^2 a + 1 = -j^2 + j^2(j^2 + 2) + 1 = -j^2 + j^4 + 2j^2 + 1 = j^2 + j + 1 = 0$$

La valeur de a s'écrit aussi $a = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{6}$. Il a pour module $1/\sqrt{3}$ et pour argument $-\pi / 6$.

Finalement les triangles 012 , 234 , 450 sont isocèles et leurs côtés égaux font un angle de 120° (figure 22).

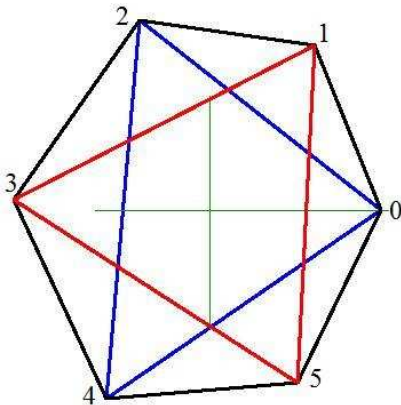


Figure 22 : Triangle initial quelconque 024 en bleu, triangles accolés isocèles avec un angle de 120° en noir, triangle équilatéral 135 en rouge.

4) Lorsque l'on n'est pas dans le cas du 3° , montrer que pour chaque forme de triangle accolé comme 012, caractérisé par le rapport de similitude $k = [01]/[02]$ et l'angle orienté $\theta = (01, 02)$, cette similitude faisant passer de [02] à [01] (et c'est la même pour les trois triangles accolés), il existe un unique triangle initial 024 qui rend le triangle 135 équilatéral.

Cela revient à déterminer la relation entre a et z_2 qui rend le triangle 135 équilatéral direct. Nous l'avons déjà vue au 3° :

$(-j^2 + 3j^2a + 1)z_2 = 3a - 2 - j^2$
 $z_2 = \frac{3a - 2 - j^2}{-j^2 + 1 + 3aj^2}$ lorsque l'on n'est pas dans le cas où les triangles accolés sont isocèles avec un angle de 120° comme au 3° .

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{3aj - 2j - 1}{-1 + j + 3a} \text{ en multipliant en haut et en bas par } j. \\ &= \frac{3aj - j - j - 1}{-1 + j + 3a} = \frac{3aj - j + j^2}{-1 + j + 3a} = \frac{j(3a - 1 + j)}{-1 + j + 3a} \quad \text{sachant que } 1 + j + j^2 = 0 \\ &= j \end{aligned}$$

Cela signifie que le triangle 024 est équilatéral, et seul ce triangle accepte des triangles accolés semblables mais quelconques qui rendent le triangle 135 équilatéral (figure 23).

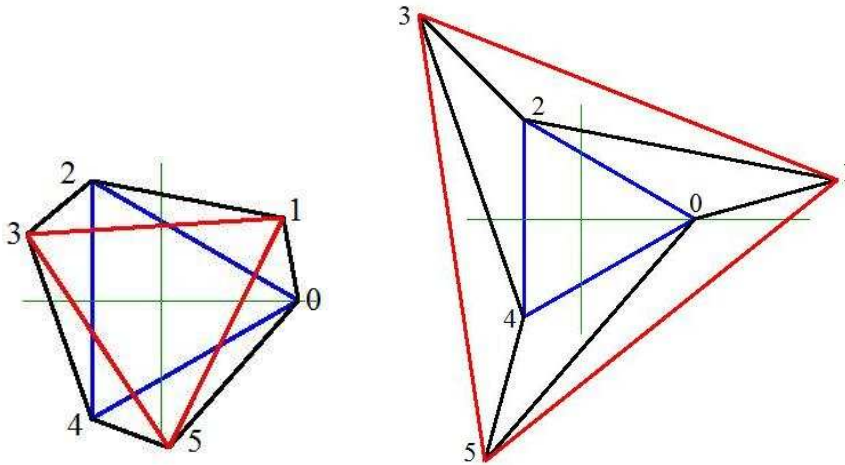


Figure 23 : Triangle initial 024 équilatéral, triangles accolés semblables quelconques 012, 234, 450, et triangle 135 équilatéral, dans deux cas de figure.

2.2. Conclusion

- Seul des triangles accolés isocèles et avec un angle de 120° donnent un triangle équilatéral 135 quel que soit le triangle initial 024.
- Avec des triangles accolés autres que les précédents, seul un triangle équilatéral initial 024 donne un triangle équilatéral 135.

Finalement, le théorème de Napoléon traite un cas qui est exceptionnel, celui du triangle quelconque qui, avec des triangles équilatéraux accolés sur ses côtés, donne un triangle équilatéral ayant comme sommets les centres de ces triangles accolés.

2.3. Droites concourantes

La configuration associée au théorème de Napoléon dispose d'une autre propriété remarquable : les droites joignant les sommets du triangle quelconque $0, 2, 4$ aux sommets $0'', 2'', 4''$ des sommets extrêmes des triangles équilatéraux sont concourantes (figure 24).⁶

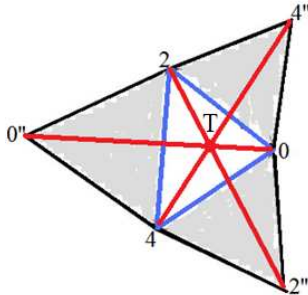


Figure 24 : Avec les triangles équilatéraux accolés au triangle quelconque 024 , les droites $(00'')$, $(22'')$, $(44'')$ sont concourantes.

Valable avec des triangles équilatéraux accolés, cette situation se généralise si les triangles accolés sont isocèles et semblables (avec les mêmes angles). D'où la propriété :

A partir d'un triangle quelconque ABC et des triangles isocèles AKB , BIC , CJA ayant les mêmes angles, les droites (AI) , (BJ) et (CK) sont concourantes (figure 25).

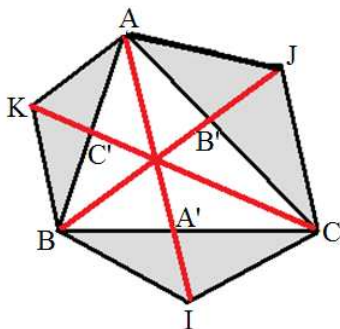


Figure 25 : Triangle quelconque 024 et trois triangles isocèles semblables accolés AKB , BIC et CJA .

Pour le démontrer, appelons A' , B' , C' les points d'intersection de ces droites avec les côtés du triangle initial (figures 25 et 26). Nous allons démontrer que $\frac{A'B}{A'C} \frac{B'C}{B'A} \frac{C'A}{C'B} = -1$, ce qui permettra, grâce à la réciproque du théorème de Ceva, de conclure que les droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes. Comme le point A' est entre B et C , de même que les deux autres, cela revient à montrer que $\frac{A'B}{A'C} \frac{B'C}{B'A} \frac{C'A}{C'B} = 1$.

Les points B et C se projetant en H et H' sur (AI) , on a $\frac{A'B}{A'C} = \frac{BH}{CH'}$. Comme $[BH]$ et $[CH']$ sont les hauteurs des deux triangles ABI et ACI , et que ces deux triangles ont comme base commune $[AI]$, on en déduit, en utilisant les aires de ces triangles :

⁶ Le point d'intersection est aussi appelé point de Fermat-Torricelli, et il possède la propriété d'être le point T du plan pour lequel la somme des distances aux sommets du triangle 024 , $T0 + T2 + T4$, est minimale.

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{\text{Aire}(ABI)}{\text{Aire}(ACI)} = \frac{BA \cdot BI \sin(B + \alpha)}{CA \cdot CI \sin(C + \alpha)} = \frac{BA \sin(B + \alpha)}{CA \sin(C + \alpha)} \quad (\text{car } BI = CI)$$

où l'on a utilisé la formule donnant l'aire, soit $\text{Aire}(ABI) = (1/2) BA \cdot BI \sin(B + \alpha)$ où B est l'angle dans le triangle ABC et α l'un des deux angles égaux dans chacun des triangles isocèles accolés (figure 26).

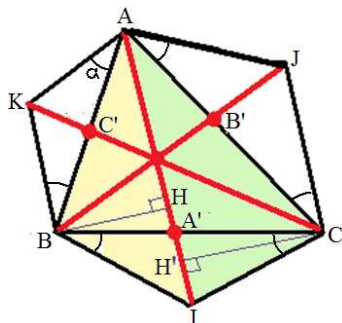


Figure 26 : Aires associées à $A'B$ et $A'C$.

En faisant de même avec B' et C' , on a :

$$\frac{A'B}{A'C} \frac{B'C}{B'A} \frac{C'A}{C'B} = \frac{BA \sin(B + \alpha)}{CA \sin(C + \alpha)} \frac{CB \sin(C + \alpha)}{AB \sin(A + \alpha)} \frac{AC \sin(A + \alpha)}{BC \sin(B + \alpha)} = 1$$

Bibliographie (en PDF sur Internet)

[BOT2008] O. Bottema, *Topics in Elementary Geometry*, Springer 2008.

[RIG1991] J.F. Rigby, *Napoleon, Escher and Tessellations*, *Mathematical Magazine* 64, 1991.

[VIL2014] M. De Villiers, *An Investigation of Some Properties of the General Haag Polygon*, *Mathematics in School*, vol 43, 2014.