

## VI. Le pendule et ses variantes chaotiques

Nous passons ici aux équations différentielles du second ordre, où l'accélération  $a$  intervient. Celle-ci est par définition la dérivée de la vitesse  $v$  par rapport au temps  $t$  :  $a = dv/dt$ , lorsque le mouvement se fait sur un axe, ou encore  $a = x''$ , dérivée seconde de la position  $x$ , et il s'agit là d'un nombre, positif ou négatif. Plus précisément, l'accélération est un vecteur. C'est le vecteur qui est la dérivée du vecteur vitesse :  $\mathbf{A} = d\mathbf{V} / dt$ , son amplitude étant le nombre  $a$ . Quand une particule de masse  $m$  est soumise à une force  $\mathbf{F}$ , celle-ci est reliée à l'accélération  $\mathbf{A}$  grâce à la loi fondamentale de la dynamique  $\mathbf{F} = m \mathbf{A}$ . L'exemple typique est le mouvement d'un pendule.

### 1. Le pendule

Un pendule est une masse  $m$  placée à l'extrémité d'une tige rigide de longueur  $l$ , dont l'autre extrémité est accrochée à un pivot  $O$ . La seule force agissante est la force de la pesanteur d'amplitude  $F = m g$  qui est verticale, car nous négligeons dans un premier temps les problèmes de frottement. Disposé verticalement vers le bas, le pendule reste en équilibre stable. Déplacé d'un côté ou d'un autre, et lâché à vitesse nulle, il se met à osciller suivant un mouvement circulaire dans un plan.

Appelons  $\theta$  l'angle du pendule avec la verticale. L'objectif est de connaître  $\theta$  en fonction du temps  $t$ . La seule composante de la force  $\mathbf{F}$  qui agit sur le mouvement est celle qui est tangente au cercle, soit la composante tangentielle du poids :  $m g \sin \theta$ , tandis que la composante radiale du poids ainsi que la réaction de la tige exercent un travail qui est nul, étant perpendiculaires à la trajectoire (*figure 1*). Comme la vitesse  $v$  est égale à  $l \theta'$ , l'accélération tangentielle est  $l \theta''$ , où  $\theta''$  est la dérivée seconde de l'angle  $\theta$  par rapport au temps<sup>1</sup>. Grâce à la loi fondamentale de la dynamique  $m l \theta'' = -m g \sin \theta$ . Ce signe  $-$  provient du fait que lorsque  $\theta$  augmente en étant positif et inférieur à  $\pi$ , le sinus est positif mais l'accélération est négative et tend à faire diminuer la vitesse elle-même positive. On dit que la force agissante est une force de rappel.

Posons  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ . On obtient finalement l'équation différentielle du second ordre :

$$\theta'' + \omega^2 \sin \theta = 0$$

---

<sup>1</sup> En effet,  $v = ds / dt = l d\theta / dt = l \theta'$ , où  $ds$  est la petite variation sur l'arc de la trajectoire pendant le temps  $dt$ , et l'accélération tangentielle est  $dv / dt = l \theta''$ . Plus précisément, pour un mobile en position  $M$  à l'instant  $t$ , le vecteur vitesse est  $\mathbf{V} = d\mathbf{OM} / dt$ , avec  $O$  origine d'un repère orthonormé  $Oxy$  fixe. Ses coordonnées dans ce repère sont  $(x', y')$ , et le vecteur  $\mathbf{V}$  est tangent à la trajectoire. En effet le point  $M$  à l'instant  $t$  devient  $M'$  à l'instant  $t + dt$ , et  $\mathbf{V} = \mathbf{MM}' / dt$ . Quand  $dt$  tend vers 0, la sécante  $(MM')$  tend à devenir la tangente en  $M$ , et d'autre part  $[MM']$  est assimilable à  $ds$ , petite variation de l'arc parcouru sur la trajectoire. D'où  $d\mathbf{OM}/dt = (\mathbf{MM}'/ds) (ds/dt) = ds/dt \mathbf{T}$ ,  $\mathbf{T}$  étant le vecteur unitaire porté par la tangente en  $M$ . On a bien  $\mathbf{V} = v \mathbf{T}$ , avec  $v = ds/dt$ .

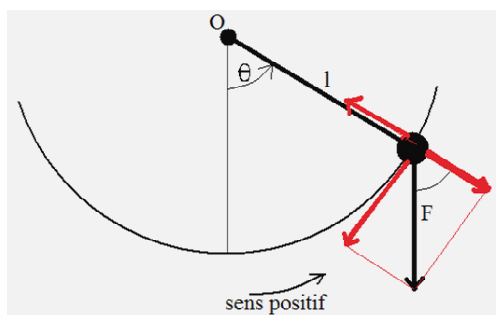


Figure 1 : Trajectoire circulaire du pendule, avec comme seule force agissante la composante tangentielle du poids  $\mathbf{F}$ .

Signalons que l'on ne sait pas résoudre complètement cette équation, c'est-à-dire avoir une formule explicite donnant  $\theta$  en fonction du temps  $t$ . Aussi commence-t-on par faire une simplification supplémentaire, en ne pratiquant que de petites oscillations autour de la position d'équilibre.

## 2. Petites oscillations : le pendule simple ou l'oscillateur harmonique

Quand un angle est petit, on peut l'assimiler à son sinus :  $\sin\theta = \theta$ . L'équation devient :  $\theta'' + \omega^2\theta = 0$ , ou encore en assimilant le mouvement circulaire à un mouvement rectiligne horizontal avec  $x = l\theta$  :

$$x'' + \omega^2 x = 0$$

Connaissant cette équation différentielle, ainsi que les conditions initiales, par exemple pour  $t = 0$   $x = x_0$  (élongation maximale) et  $v = 0$ , la solution unique obtenue par intégration est  $x = x_0 \cos\omega t$ .<sup>2</sup> Les oscillations sont sinusoïdales, et la période est

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Notamment, quand la longueur  $l$  de la tige augmente, la période du pendule simple augmente aussi, la masse n'ayant aucun effet. On parle plus généralement d'oscillateur harmonique lorsque l'équation différentielle est de cette forme  $x'' + \omega^2 x = 0$ .

### Exercice 1 : Mouvements d'un pendule

1) Programmer pour visualiser le pendule simple en mouvement dans un plan vertical, pour nous l'écran de l'ordinateur. Tracer aussi la courbe donnant la position  $x$  en fonction du temps.

Le programme va utiliser la méthode d'Euler améliorée pour tracer la courbe donnant  $x$  en fonction de  $t$ . On trouve une sinusoïde, comme on peut le vérifier en traçant la courbe d'équation  $x = \cos\omega t$ , solution théorique de l'équation différentielle, confondue avec la courbe expérimentale (figure 2).

```
on se donne dt = 0,0001 et omega2 = 1
x=1.; vx=0.; /* conditions initiales */
for(t=0;t<9.*M_PI;t+=dt) /* boucle du temps */
{ ax=-omega2*x; /* accélération donnée par l'équation différentielle */
  x+=vx*dt+0.5*ax*dt*dt; /* méthode d'Euler améliorée */
  vx+=ax*dt;
  te=torig+zoomt*t; xe=xxorig-zoomx*x; /* point dans le repère (t,x) avec zoom sur l'écran */
}
```

<sup>2</sup> La solution générale de l'équation différentielle  $x'' + \omega^2 x = 0$  est  $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ , et les conditions initiales permettent de déterminer  $A$  et  $\varphi$ .

```

    putpixel(te,xe,black);
}

```

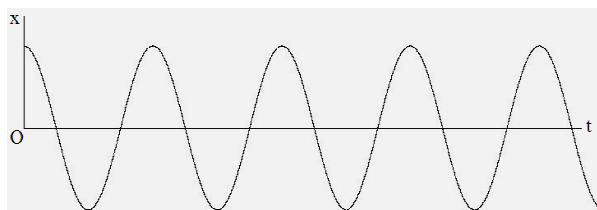


Figure 2 : Sinusoïde donnant le mouvement du pendule simple dans le temps.

2) Faire de même avec un pendule pouvant avoir de grandes oscillations.

Le programme est analogue au précédent, seule l'équation différentielle change. On a pris une position initiale du pendule presque verticale vers le haut, avec  $\theta = 49\pi / 50$ . La courbe obtenue a une forme nettement différente de celle d'une sinusoïde, mais le mouvement demeure périodique (figure 3).

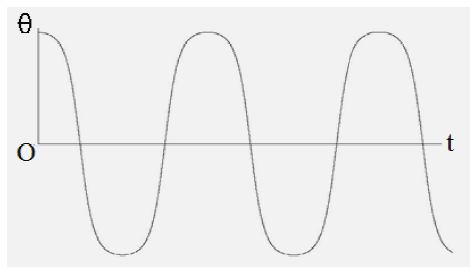


Figure 3 : Pendule soumis à de grandes oscillations, avec la courbe donnant  $\theta$  en fonction de  $t$ .

3) Revenons aux petites oscillations. Mais maintenant on lâche le pendule écarté de sa position d'équilibre avec une vitesse perpendiculaire au plan vertical dans lequel il se trouve. La masse décrit maintenant une courbe dans le plan horizontal  $x, y$ , plus précisément une ellipse (figure 4). Pourquoi? Programmer pour avoir le mouvement dans ce plan  $x, y$ . A partir de conditions initiales données, observer comment change la trajectoire elliptique lorsque l'on modifie  $\omega$ . A quelle condition l'ellipse devient-elle un cercle? Indication : sur chacun des axes  $x$  et  $y$ , la projection du mouvement est celui d'un oscillateur harmonique, c'est-à-dire que l'on a  $x'' + \omega^2 x = 0$  et  $y'' + \omega^2 y = 0$ , avec comme conditions initiales un point de départ  $x_0 = 1$  et  $y_0 = 0$ , et un vecteur vitesse  $v_{x0} = 0$  et  $v_{y0} = 1$ .

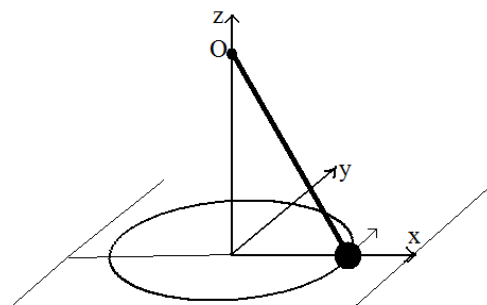


Figure 4 : Pendule décrivant une trajectoire elliptique.

En projection sur l'axe des  $x$ , le mouvement obéit à  $x'' + \omega^2 x = 0$  avec au départ  $x_0 = 1$  et  $v_{x0} = 0$ , d'où la solution  $x = \cos \omega t$ . En projection sur l'axe des  $y$ , on a  $y'' + \omega^2 y = 0$  avec au départ  $y_0 = 0$  et  $v_{y0} = 1$ , ayant comme solution  $y = (1 / \omega) \sin \omega t$ . La courbe décrite par le pendule a comme équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = \cos \omega t \\ y = \frac{1}{\omega} \sin \omega t \end{cases}$$

Il s'agit d'une ellipse de demi-axes 1 et  $1/\omega$ , et en particulier d'un cercle lorsque  $1 = 1/\omega$ , soit  $\omega = 1$ . Avec le programme suivant, on obtient les résultats de la *figure 5*, avec des ellipses de demi-grand axe 1, et un cercle pour  $\omega = 1$ .

```
for(omega2=1.;omega2<=10.;omega2+=1.) /* on fait varier  $\omega^2$  de 1 à 10 */
{ x=1.; y=0.; vx=0.; vy=1.;
  do
  { ax=-omega2*x; ay=-omega2*y;
    x+=vx*dt+0.5*ax*dt*dt; y+=vy*dt+0.5*ay*dt*dt;
    vx+=ax*dt; vy+=ay*dt;
    xe=xorig+zoom*x; ye=yorig-zoom*y;
    putpixel(xe,ye,black);
  }
  while(x<1.);
```

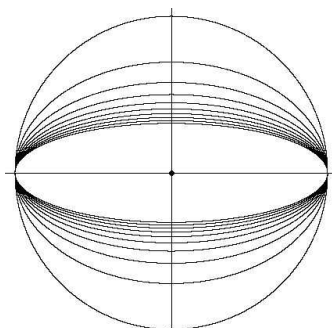


Figure 5 : Plusieurs trajectoires du pendule dans le plan  $x, y$ .

### 3. Energie cinétique et énergie potentielle

Revenons au cas général des oscillations quelconques avec l'équation différentielle qui s'écrit :

$$m l \theta'' + m g \sin \theta = 0$$

On peut pratiquer une première intégration :

$$m l (d\theta' / dt) + m g \sin \theta = 0$$

$$m l (d\theta' / d\theta)(d\theta / dt) + m g \sin \theta = 0$$

$$m l (d\theta' / d\theta) \theta' + m g \sin \theta = 0$$

$$m l \theta' (d\theta' / dt) = -m g \sin \theta (d\theta / dt), \text{ d'où en intégrant :}$$

$$m l \theta'^2 / 2 = m g \cos \theta + K, \text{ ou encore } m l^2 \theta'^2 / 2 - m g l \cos \theta = K, \text{ } K \text{ étant une constante.}$$

Le terme  $m l \theta'^2 / 2$  s'écrit aussi  $mv^2 / 2$ , et il correspond à l'énergie cinétique du pendule, tandis que  $-m g l \cos \theta$  s'écrit aussi  $-m g h$ , avec  $h$  qui est la hauteur à laquelle se trouve la masse du pendule, cette hauteur étant orientée vers le bas, avec une origine en  $O$ , et  $-m g h$  représente l'énergie potentielle du pendule.<sup>3</sup> Plus celui-ci est haut, plus  $h$  est petit, plus l'énergie potentielle  $-m g h$  est

<sup>3</sup> Dans ce contexte, on considère que l'énergie potentielle est nulle lorsque le pendule est à la hauteur de  $O$ , soit pour  $\theta = \pi/2$ . Lorsqu'il descend à partir de là, son énergie potentielle diminue, et elle atteint son minimum lorsque le pendule est vertical vers le bas.

Pour comprendre ce qu'est l'énergie potentielle, imaginons l'exemple d'un barrage rempli avec un certain niveau d'eau. Son énergie potentielle est alors maximale. Lorsque l'on ouvre les vannes, le niveau baisse, l'énergie potentielle diminue, et la différence d'énergie est donnée aux turbines qui fournissent un travail positif.

grande. La formule trouvée indique que la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle reste constante au fil du temps. Cette somme n'est autre que l'énergie totale du pendule. Ce résultat était prévisible puisque le pendule est un système conservatif : son énergie totale reste constante, puisqu'il n'y a aucune perte ni gain d'énergie vis-à-vis du monde extérieur.

Pour les petites oscillations du pendule, avec  $x'' + \omega^2 x = 0$ , on trouve de même  $\frac{x'^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} = cte$ , l'énergie potentielle étant proportionnelle à  $x^2/2$ .

Maintenant l'énergie potentielle va nous aider à tracer les trajectoires dans l'espace de configuration  $x, v$ .

#### 4. Lignes de niveau d'énergie et trajectoires dans le plan $x, v$

Traçons la courbe représentative du potentiel, dans le cas des petites oscillations du pendule. Il s'agit d'une parabole. Coupons-la par une horizontale représentant un certain niveau d'énergie potentielle  $U$ , et supposons que pour les abscisses  $x_1$  et  $x_2$  des points d'intersection la vitesse soit nulle. Cela donne deux points correspondants  $(x_1, 0), (x_2, 0)$  dans l'espace de configuration  $x, v$ . Partons du point d'abscisse  $x_1$ . Comme l'énergie totale reste constante, et que l'énergie cinétique, nulle au départ et positive ensuite, va augmenter, l'énergie potentielle va diminuer. Tout se passe comme s'il y avait une bille, partie à vitesse nulle du point  $(x_1, U)$  sur la parabole du potentiel, et qui descend vers la vallée du potentiel avant de remonter de l'autre côté jusqu'au point  $(x_2, U)$  où sa vitesse redevient nulle. Puis elle redescend dans l'autre sens, et le mouvement de va-et-vient se poursuit indéfiniment, puisqu'il n'y a aucune perte d'énergie (*figure 6 à gauche*).

Ce mouvement traduit le fait que l'énergie totale reste constante, la vitesse de la bille étant d'autant plus grande (énergie cinétique croissante) que l'on est bas sur la courbe du potentiel (énergie potentielle décroissante). Sur le plan de configuration  $(x, v)$ , cela donne une courbe ovale qui est la courbe de niveau de l'énergie totale constante  $E$ , et qui est aussi, si l'on ajoute une flèche indiquant le sens du mouvement sur cette courbe, une trajectoire dans le plan de configuration  $(x, v)$ . Comme la vitesse est toujours la même, au signe près, à l'aller et au retour en chaque point de la parabole du potentiel, cela entraîne que la trajectoire dans le plan de phase est symétrique par rapport à l'axe des  $x$ . Grâce à la seule connaissance de la courbe du potentiel  $U(x)$ , nous pouvons ainsi dessiner les trajectoires dans le plan de phase  $x, v$ , ce que l'on appelle l'écoulement (*figure 6 à droite*). Cela se généralise à n'importe quel fonction potentiel  $U(x)$ .

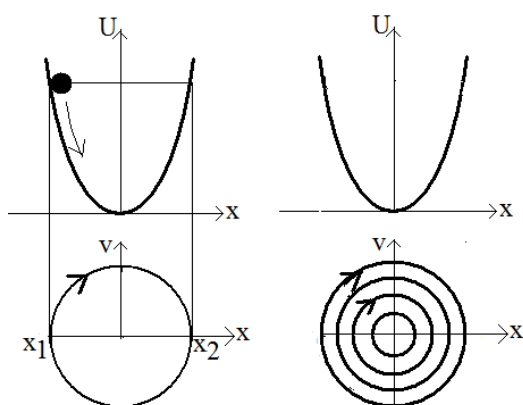


Figure 6 : Pendule simple. A gauche courbe du potentiel et trajectoire à partir du mouvement de va-et-vient d'une bille sur la courbe du potentiel. A droite, écoulement avec des trajectoires dans le plan de configuration  $(x, v)$ .

---

L'énergie potentielle est une sorte d'énergie emmagasinée et susceptible d'être restituée, et d'autant plus grande que le niveau d'eau est élevé. Elle est minimale lorsque le niveau est au plus bas.

## 5. Cas général où la force dérive d'un potentiel

L'équation du mouvement s'écrit  $x'' = F(x)$  à un facteur près, avec la force  $F = -dU/dx$ , où  $U(x)$  représente un certain potentiel donné, ce qui exprime que la force dérive du potentiel. En effet  $F dx$  est le travail de la force pendant le temps  $dt$ . S'il est moteur (positif), l'énergie potentielle diminue d'autant, et s'il est résistant, l'énergie potentielle augmente, d'où  $dU = -F dx$ .

Dans le cas particulier du pendule on avait pour les petites oscillations du pendule simple  $U(x) = x^2/2$ , et pour le pendule quelconque  $U(x) = -\cos x$ , à une constante près. La courbe représentative du potentiel, avec ses vallées et ses sommets, permet de tracer les courbes de niveau d'énergie, c'est-à-dire aussi les trajectoires dans le repère  $(x, v)$ . La présence d'une vallée de potentiel se traduit par un point elliptique, et celle d'une bosse de potentiel par un point hyperbolique.

Appliquons cela aux oscillations quelconques du pendule. A partir de la sinusoïde du potentiel  $U(\theta) = -\cos\theta$ , on déduit les trajectoires dans le plan de phase  $(\theta, \theta')$ . Deux cas se présentent : soit la trajectoire se referme sur elle-même, comme pour le pendule simple, soit elle s'en va à l'infini. Quand on part d'une position verticale basse avec une petite vitesse initiale, le pendule oscille, ce qui donne une ellipse dans le plan de configuration. Quand on lui donne une grande vitesse initiale, il se met à tourner en rond comme une fronde, et cela se traduit par une courbe ondulante autour de l'horizontale dans le plan de configuration. Cela correspond exactement au mouvement d'une bille sur une sinusoïde qui peut soit rester bloquée dans une vallée de potentiel, soit parcourir les montagnes russes de la sinusoïde. Entre ces deux cas, se trouvent les séparatrices, cas extrêmes et purement théorique où le pendule finit par arriver en position verticale haute instable (au bout d'un temps infini), sans retomber ni d'un côté ni de l'autre. Dans le plan de configuration, ces séparatrices joignent les points hyperboliques successifs, et englobent les courbes en forme d'ellipses.

Finalement, à défaut de connaître  $\theta$  en fonction de  $t$ , les trajectoires dans le plan de configuration donnent les indications principales sur le mouvement dans tous les cas de figure (figure 7).

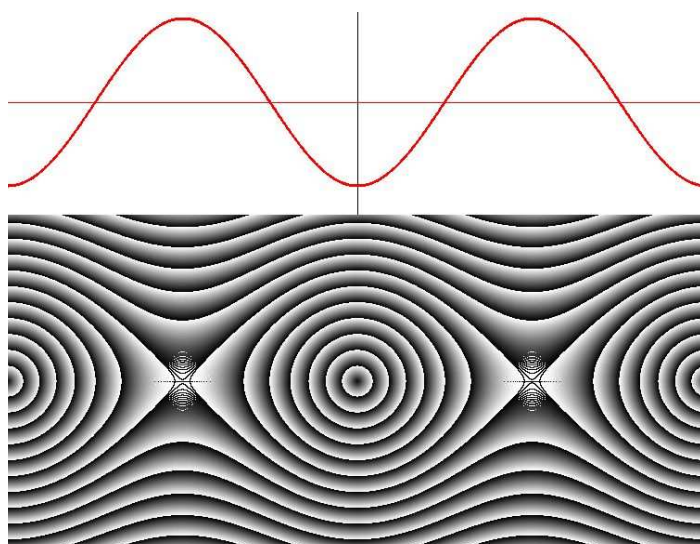


Figure 7 : En haut la courbe du potentiel sinusoïdal  $U(\theta)$  correspondant au pendule quelconque. En bas, l'écoulement dans le plan de configuration  $(\theta, \theta')$ .

### Exercice 2 : Ellipses et hyperboles des lignes de niveau du potentiel

Démontrer que si l'énergie potentielle est de la forme  $U(x) = k x^2/2$ , comme pour le pendule simple (avec  $k > 0$ ), les trajectoires dans le plan de phase  $x, v$  sont des ellipses dans les creux de potentiel, ce qui se produit pour  $k > 0$ , et des hyperboles autour des bosses du potentiel quand  $k < 0$ .

L'énergie totale  $E$ , constante, est de la forme  $x'^2/2 + kx^2/2$  (pour  $m = 1$ ), d'où  $kx^2 + v^2 = 2E$ . Il s'agit de l'équation d'une conique dans le repère  $x, v$ . Si  $k$  est positif, la parabole de l'énergie potentielle est tournée vers le haut, et l'on a des ellipses. Inversement, sur une bosse de potentiel, avec la parabole tournée vers le bas,  $k$  est négatif, et l'on obtient des hyperboles.

## 6. Un autre oscillateur harmonique, le ressort

### 6.1. Ressort horizontal

Considérons un ressort disposé horizontalement avec une masse  $m$  posée sur le sol à une de ses extrémités. A l'autre extrémité, il est accroché à un mur vertical. Faisons-lui subir une élongation égale à  $x_0$ , avec comme origine sur l'axe horizontal la position du ressort au repos. Dans cette position d'équilibre, la force avec laquelle on tire sur lui est compensée par la force opposée  $F_0$  exercée sur le mur (*figure 8*), tout comme le poids  $P$  associé à la masse est compensé par la réaction du sol. Pour ce ressort élastique, on considère que la force  $F_0$  est proportionnelle à l'élongation, soit  $F_0 = -kx_0$ ,  $k$  étant un coefficient positif lié à la raideur du ressort. Lâchons le ressort, seule la force  $F_0$  va jouer à cet instant initial, provoquant la diminution de l'élongation, et le pendule va subir des oscillations qui le compriment et le dilatent alternativement sous l'effet d'une force proportionnelle à l'élongation, soit  $F = -kx$ .<sup>4</sup> Lorsque le ressort a une élongation positive et que le ressort est dilaté, la force est négative, et lorsque l'élongation est négative et que le ressort se comprime, la force est positive.

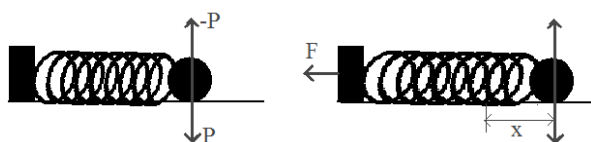


Figure 8 : Ressort horizontal, posé sur le sol, le poids  $P$  étant compensé par la réaction du sol. A gauche ressort au repos, à droite ressort avec une élongation positive  $x$  et une force de rappel  $F$ , force avec laquelle il faudrait tirer sur le mur vertical pour l'empêcher de bouger s'il était posé sur roulettes.

La loi fondamentale de la dynamique donne l'équation différentielle  $m x'' = -kx$ , identique à celle du pendule simple. En partant à l'instant 0 d'une élongation positive  $x_0$  avec une vitesse nulle, l'équation du mouvement est  $x = x_0 \cos(\sqrt{\frac{k}{m}} t)$ , d'où un mouvement sinusoïdal de période  $2\pi / \sqrt{\frac{m}{k}}$ .

L'énergie cinétique est  $E_c = (1/2) m v^2$ . D'autre part le travail de la force pendant le temps  $dt$  est  $F dx = -dU$ , où  $U$  désigne l'énergie potentielle, d'où  $dU = kx dx$ , et  $U = (1/2) k x^2$ , en prenant une énergie potentielle nulle pour le pendule au repos. L'énergie totale  $E$  est donc :

$$E = (1/2) m v^2 + (1/2) k x^2, \text{ et cette quantité est constante puisque le système est conservatif.}$$

### 6.2. Ressort vertical

Un ressort est accroché verticalement sous un mur d'appui. Sa longueur est alors  $l_0$  quand il n'est soumis à aucune force. Puis on lui applique un poids  $P = mg$  qui le dilate. A l'équilibre, sa longueur devient  $l_e$ , et la force agissante, somme du poids et de la force de rappel, est nulle, soit  $mg - k(l_e - l_0) = 0$ . A partir de là on le soumet à des oscillations, et sa longueur variable dans le temps est  $l = l_e + x$ ,  $x$  désignant l'élongation par rapport à sa position d'équilibre. Notons que l'axe des  $x$  est vertical et orienté vers le bas (*figure 9*). La force de rappel associée à la tension du ressort est proportionnelle à son allongement, et de la forme  $-k(l - l_0)$ . La force agissante fait intervenir le poids et la force de rappel, soit  $mg - k(l - l_0)$ . La loi fondamentale de la dynamique s'écrit :

<sup>4</sup> Cette force  $F$  est celle que l'on devrait exercer sur le mur vertical si celui-ci était posé sur des roulettes, et qu'on voulait l'empêcher de bouger.

$$m x'' = mg - k(l - l_0) = k(l_e - l_0) - k(l - l_0) = k(l_e - l_0) - k(l_e + x - l_0) = -kx.$$

On retrouve la même équation différentielle que pour le ressort horizontal, sauf que l'élongation est rapportée à la position d'équilibre en présence du poids  $P$ , et non à la position de repos.

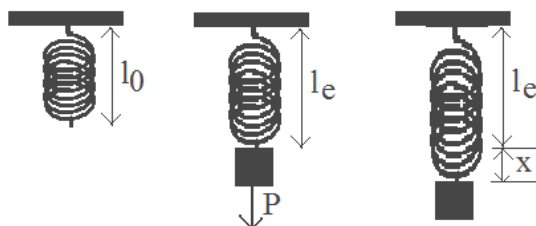


Figure 9 : Ressort vertical, à gauche au repos, au centre à l'équilibre avec un poids  $P$  qui lui a été accroché, à droite avec une élongation positive  $x$  au cours de ses oscillations.

Dans ce qui suit, nous allons compliquer graduellement le mouvement de l'oscillateur en introduisant des influences extérieures. L'aspect théorique va se raréfier, au profit d'une richesse luxuriante dans les résultats.

## 7. L'oscillateur amorti

Reprenons le pendule, et ajoutons une force de frottement (frottement du pivot, ou résistance de l'air). Cette force est proportionnelle à la vitesse, de la forme  $-b\theta'$ , où le nombre positif  $b$  est le coefficient de frottement. Cela donne comme équation différentielle pour les petites oscillations du pendule

$$\theta'' + b\theta' + \omega^2\theta = 0$$

L'énergie totale  $E$  du pendule n'est plus constante, elle diminue, comme on peut le vérifier par le calcul :  $E = 1/2 (\theta'^2 + \omega^2 \theta^2)$ ,  $dE/dt = \theta'(\theta'' + \omega^2 \theta) = -b\theta'^2 < 0$ , ce qui signifie que  $E$  décroît. Au lieu de trajectoires elliptiques dans les vallées de potentiel, on assiste à un tournoisement en spirale dans le plan de phase  $(\theta, \theta')$ . La bille qui roule dans la vallée de potentiel perd de son énergie et ne remonte plus aussi haut à chaque va-et-vient (figure 10).

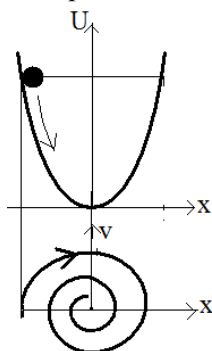


Figure 10 : Pendule simple amorti, avec trajectoire en spirale.

### Exercice 3 : Trajectoires dans le plan de phase pour le pendule quelconque

Programmer la construction des trajectoires dans le plan de configuration  $(\theta, \theta')$  pour le pendule quelconque.

L'équation différentielle s'écrit maintenant  $\theta'' + b\theta' + \omega^2 \sin \theta = 0$ . Avec l'image de la bille circulant sur la sinusoïde, aucune trajectoire ne s'en va plus à l'infini à cause de l'amortissement. Les



trajectoires finissent toujours par s'enrouler en spirale dans une des vallées de potentiel. Ce que confirme le programme suivant et son résultat sur la figure 11.

```

On se place dans un rectangle écran de centre xorig = 400 et yorig = 400, et on lance les trajectoires à
partir des deux côtés horizontaux en haut et en bas
dt=0.0005;
for(xe0=-300.;xe0<800;xe0+=1) /* points de départ des trajectoires en haut sur l'écran */
{ x0=(xe0-xorig)/zoom; x=x0;v=3.; /* coordonnées calcul, x est  $\theta$ , v est  $\theta'$  */
  for(i=1;i<100000;i++)
  { dv=(-sin(x)-b*v)*dt;
    dx=(v+0.5*dv)*dt;
    x+=dx;v+=dv;
    xe=xorig+zoom*x;ve=yorig-zoom*v;
    if(xe<800 && xe >0 && ve>100)
      putpixel(xe,ve,color[((int)(300.*(x0+50))%256)]; /* on a pris une palette de gris entre 0 et 255 */
  }
  SDL_Flip(screen);
}
for(xe0=0;xe0<1200;xe0+=1) /* points de départ sur l'horizontale du bas */
{ x0=(xe0-xorig)/zoom; x=x0;v=-3.;
  for(i=1;i<100000;i++)
  { dv=(-sin(x)-b*v)*dt;
    dx=(v+0.5*dv)*dt;
    x+=dx;v+=dv;
    xe=xorig+zoom*x;ve=yorig-zoom*v;
    if(xe<800 && xe >0 && ve<600)
      putpixel(xe,ve,color[((int)(300.*(x0+50))%256)];
  }
  SDL_Flip(screen);
}

```

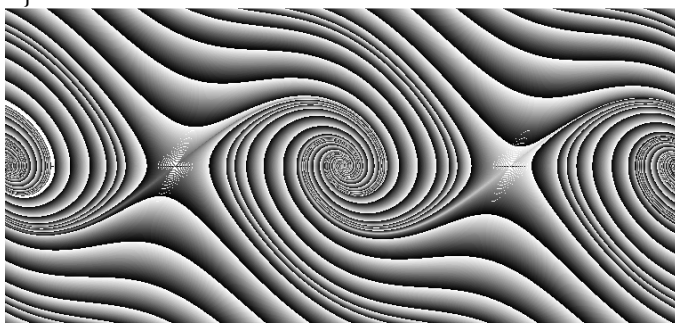


Figure 11 : Pendule amorti, trajectoires dans le plan de configuration  $(\theta, \theta')$ .

#### Exercice 4 : Puits et bosse de potentiel

Considérons un potentiel  $U$  dont la courbe présente une vallée et une bosse, ce qui correspondant à un polynôme du 3<sup>ème</sup> degré. Prenons  $U = x^2 / 2 - x^3 / 3$  (figure 12). Quand la force dérive de ce potentiel, l'équation différentielle est  $x'' = -dU / dx = -x + x^2$ . Ajoutons une force de frottement, d'où

$$x'' = -bx' - x + x^2, \text{ ou } x'' + bx' - x + x^2 = 0.$$



Figure 12 : Courbe du potentiel  $U(x) = x^2/2 - x^3/3$ .

1) Prendre  $b = 0$  (pas de frottement). Tracer à la main les trajectoires dans le plan de phase  $x, v$ , puis programmer pour vérifier ce résultat.

Le minimum de la courbe du potentiel donne un point elliptique avec des trajectoires ovales tout autour. Le maximum donne un point hyperbolique. Au-delà des séparatrices, les trajectoires partent à l'infini, ce qui se produit notamment lorsqu'on lance une bille à gauche d'assez haut sur la courbe du potentiel pour qu'elle dépasse la bosse et dévale la pente (figure 13).

Dans le programme, on peut lancer les trajectoires dans le plan  $(x, v)$  à partir de l'horizontale avec  $v = 0$ . En prenant un  $dt$  positif, on dessine les parties de trajectoires situées au-dessus de l'horizontale. Puis en prenant le même  $dt$  mais négatif, ce qui revient à faire marche arrière, on dessine les parties situées au-dessous.

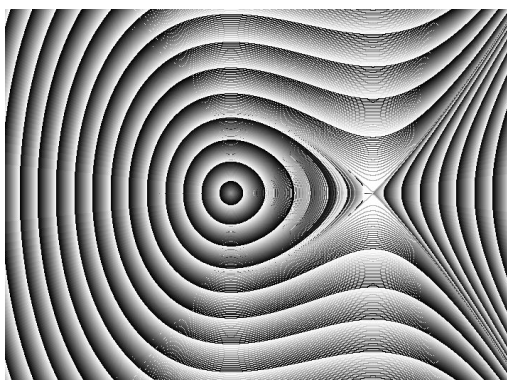


Figure 13 : Ecoulement en absence de frottement.

2) Prendre  $b$  positif. Programmer pour voir les deux types de trajectoires, celle qui s'enroulent en spirale dans la vallée du potentiel, et celles qui s'en vont à l'infini.

Dans le programme qui suit, on lance toutes les trajectoires à partir d'une horizontale basse, avec une ordonnée sur l'écran de l'ordre de 800, c'est-à-dire en dehors de la fenêtre d'écran, mais on dessine les points des trajectoires seulement lorsqu'ils sont situés à l'intérieur de la fenêtre de l'écran. On obtient ainsi la figure 14.

```
dt=0.0002; ve0=800;
for(xe0=700;xe0<1100;xe0+=1) /* points de départ sur l'écran des trajectoires */
{ x0=(xe0-xorig)/zoom; x=x0;v=(yorig-ve0)/zoom;;
  for(i=1;i<200000;i++)
  { dv=(-b*v-x+x*x)*dt;
    dx=(v+0.5*dv)*dt;
    x+=dx;v+=dv;
    xe=xorig+zoom*x;ve=yorig-zoom*v;
    if(xe<800 && xe >0 && ve>0 && ve<600 && getpixel(xe,ve)==white)
```

```

        putpixel(xe,ve,color[((int)(25.*xe0))%256]);
    }
    SDL_Flip(screen);
}

```

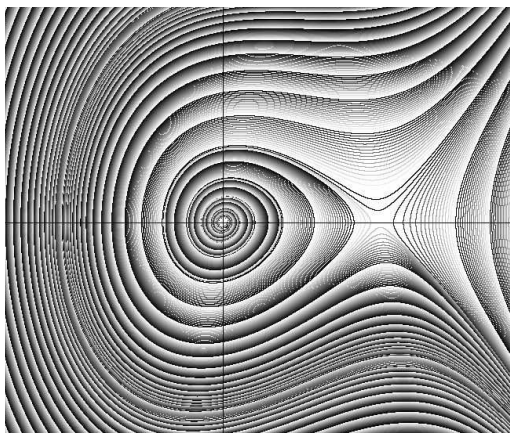


Figure 14 : Ecoulement en présence de frottement ( $b = 0,17$ ).

## 8. L'oscillateur entretenu : équation de Van der Pol

La force de frottement  $-b \theta'$  introduite ci-dessus supposait  $b$  positif, d'où la perte d'énergie du pendule. Par contre, avec  $b$  négatif, cela revient à injecter de l'énergie au pendule. Pour obtenir un mouvement entretenu, comme le fait un ressort ou une pile dans une montre, l'idée est de prendre tantôt  $b$  positif et tantôt négatif, de part et d'autre d'un certain seuil  $\theta_0$  d'amplitude des oscillations. Lorsque celles-ci sont de faible amplitude, on apporte de l'énergie au système pour amplifier le mouvement, grâce à  $b < 0$ . Lorsque les oscillations sont grandes, on freine le mouvement avec  $b > 0$ . Cela invite à prendre  $b$  dépendant de  $\theta$ , ou plutôt de  $|\theta|$  ou de  $\theta^2$ , car le signe de  $\theta$  ne doit pas intervenir. En prenant  $b = -b_0 (1 - \theta^2 / \theta_0^2)$ , les contraintes sur  $b$  sont satisfaites, et l'on obtient l'équation dite de Van der Pol :

$$\theta'' - b_0 (1 - \theta^2 / \theta_0^2) \theta' + \omega^2 \theta = 0$$

Cette équation est parfois écrite plus simplement, avec un seul paramètre  $e$  :

$$\theta'' - (e - \theta^2) \theta' + \theta = 0$$

On assiste alors à un phénomène nouveau. Dans le plan de configuration  $(\theta, \theta')$ , les trajectoires convergent vers une courbe fermée. Cet attracteur est appelé cycle limite. Il constitue une frontière entre une zone extérieure où les trajectoires tournent suivant des spirales décroissantes, et une zone intérieure où les trajectoires, à partir de petites oscillations, tournent en spirales qui s'élargissent.

### Exercice 5 : Cycle limite de Van der Pol

Programmer l'équation de Van der Pol pour avoir son cycle limite, et faire varier  $e$  de 0,05 à 2 pour observer ses modifications de forme.

```

dt=0.003;
for(e=0.05;e<=2.;e=2.*e) /* e double à chaque étape */
{
    zoom=30./sqrt(e);
    th=0.05;thp=0.05; filldisc(xorig+zoom*th,yorig-zoom*thp,2,black); /* premier point de départ */
    for(compteur=0;compteur<100000;compteur++)
    {
        putpixel(xorig+zoom*th,yorig-zoom*thp,blue);
        ths=(e-th*th)*thp-th; /* ths est θ'' */
        th+=thp*dt+0.5*ths*dt*dt; /* th est θ, thp est θ' */
        thp+=ths*dt;
    }
}

```

```

}
th=0.;thp=4.*sqrt(e);filldisc(xorig+zoom*th,yorig-zoom*thp,2,red); /* deuxième point de départ */
for(compteur=0;compteur<100000;compteur++)
{ if (getpixel(xorig+zoom*th,yorig-zoom*thp)!=white && compteur>50000)
  filldisc(xorig+zoom*th,yorig-zoom*thp,1,black); /* cercle limite en noir */
  else putpixel(xorig+zoom*th,yorig-zoom*thp,red); /* trajectoire en rouge */
  ths=(e-th*th)*thp-th;th+=thp*dt+0.5*ths*dt*dt;thp+=ths*dt;
}
rectangle(xorig-115,yorig-155,xorig+115,yorig+110,black);SDL_Flip(screen);
xorig+=250; if (xorig>700) {yorig+=270; xorig=120;}
}

```

Les résultats sont donnés sur la figure 15.

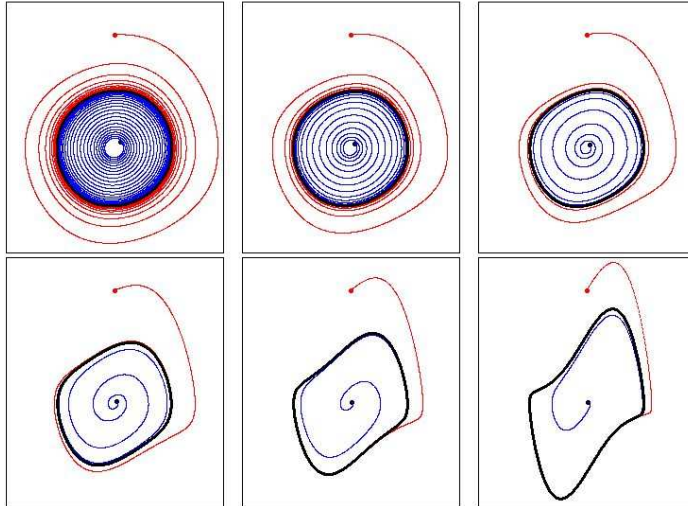


Figure 15 : Cycle limite de l'équation de Van der Pol pour  $e = 0,05, 0,1, 0,2, 0,4, 0,8, \text{ et } 1,6$ .

### Exercice 6 : Oscillateur forcé par un autre

#### 1) Pendule dont le pivot subit un déplacement sinusoïdal vertical

Ajoutons maintenant au pendule simple un mouvement sinusoïdal du pivot dans le sens vertical, de la forme  $A \sin \alpha$ . Cette nouvelle oscillation va se coupler à celle du pendule. Tout se passe comme si à l'accélération  $g$  de la pesanteur s'ajoutait l'accélération verticale créée par le mouvement du pivot, de la forme  $-A \alpha^2 \sin \alpha$ . L'équation du pendule simple s'écrivait  $\theta'' + (g/l) \theta = 0$ . Il suffit de remplacer  $g$  par  $g - A \alpha^2 \sin \alpha$ , elle devient  $\theta'' + (g/l - (A \alpha^2/l) \sin \alpha) \theta = 0$ . Elle est de la forme

$$\theta'' + \omega^2 (1 - h \sin \alpha) \theta = 0$$

En posant  $\varphi(t) = h \sin \alpha$  comme étant le mouvement du pivot à un facteur près, on arrive si l'on préfère à un système de deux équations différentielles

$$\begin{cases} \varphi'' + \alpha^2 \varphi = 0 \\ \theta'' + \omega^2 (1 - \varphi) \theta = 0 \end{cases}$$

où le premier oscillateur  $\varphi$  n'est nullement influencé par l'autre  $\theta$ , tandis que le deuxième est forcé par le premier, d'où un couplage à sens unique. Programmer le phénomène précédent de couplage, qui donne lieu à des phénomènes chaotiques, dans le plan de configuration  $(\theta, \theta')$ .

```

th0=0;the0=xorig; thp0=0.2; phi0=0.;phip0=0.4;
th=th0; thp=thp0; phi=phi0;phip=phip0;
for(i=1;i<30000000;i++)
{ phis=-alpha2*phi; ths=-omega2*(1.-phi)*th;
  phi+=phip*dt+0.5*phis*dt*dt; th+=thp*dt+0.5*ths*dt*dt;
}

```

```

    phip+=phis*dt; thp+=ths*dt;
    the=xorig+zoom*th; thpe=yorig-zoom*thp;
    if(the<800 && the >0 && thpe>10 && thpe<580) putpixel(the,thpe,black);
}

```

Un exemple de trajectoire est donné sur la figure 16.

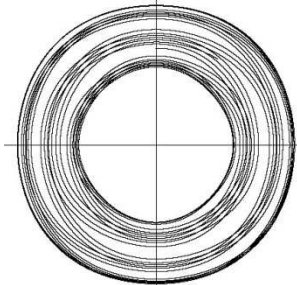


Figure 16 : Trajectoire pour  $\omega = 1$  et  $\alpha = 4,7$ .

## 2) Pendule accroché à une roue qui tourne

Un pendule de longueur  $L$  a son pivot  $A$  accroché au bord d'une roue de rayon  $R$ . La roue tourne à vitesse constante, avec une vitesse angulaire  $\alpha$  (figure 17). Dans le repère orthonormé direct  $xOy$  où  $O$  est le centre de la roue et  $Ox$  vertical orienté vers le bas, le point  $(x, y)$  où se trouve la masse du pendule est tel que  $x = R \cos \alpha t + L \cos \theta$  et  $y = R \sin \alpha t + L \sin \theta$ , avec  $\theta$  qui est l'angle du pendule avec la verticale descendante, et  $\alpha t$  celui de  $[OA]$ . On admettra que l'équation du mouvement permettant de connaître l'angle  $\theta$  en fonction du temps  $t$  est :

$\theta'' + (g/L) \sin \theta - (R\alpha^2/L) \cos(\theta - \alpha t) = 0$ . Ici aussi le mouvement du pendule est forcé par le mouvement tournant de la roue. Programmer.

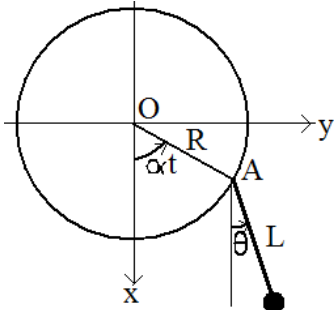


Figure 17 : Pendule dont le point de suspension  $A$  est accroché à une roue qui tourne à vitesse constante.

Le programme suivant visualise le mouvement du pendule, et il permet d'assister, suivant la valeur des paramètres, à des mouvements chaotiques.

```

R=1; L=1; alpha=0.3; g=0.098; alpha2=alpha*alpha; dt=0.0002; t=0;
th0=0; the0=xorig; thp0=0.;
th=th0; thp=thp0;
for(i=1; i<1000000; i++)
{
    ths=-g/L*sin(th)+R*alpha2/L*cos(th-alpha*t);
    th+=thp*dt+0.5*ths*dt*dt;
    thp+=ths*dt;
    x=R*cos(alpha*t)+L*cos(th);
    y=R*sin(alpha*t)+L*sin(th);
    xe=xorig+zoom*x; ye=yorig+zoom*y;
    xea=xorig+zoom*R*sin(alpha*t); yea=yorig+zoom*R*cos(alpha*t);
    filldisc(xe,ye,3,black); line(xea,yea,xe,ye,black); circle(xorig,yorig,zoom*R,black);
    if(i%200==0) {SDL_Flip(screen); SDL_FillRect(screen,0,white);}
}

```

$t += dt;$   
 $\}$

### 3) Vibrations d'une voiture sur une piste de tôle ondulée

Assimilons les amortisseurs de la voiture à un simple ressort. A l'arrêt, ce ressort est surmonté par la masse  $m$  de la voiture. Dans cette position d'équilibre on considère que son extrémité est à la hauteur 0 sur l'axe vertical des  $x$ . Si l'on comprime le ressort par rapport à cette position d'équilibre, il se met à osciller, et l'on sait que la force est proportionnelle à l'allongement  $x$  du ressort. L'équation différentielle du ressort est  $m x'' = -kx$ , avec un signe  $-$  puisqu'il s'agit d'une force de rappel. Ajoutons-y un effet de frottement, cela donne  $m x'' = -kx - bx'$ .

Maintenant faisons rouler la voiture à vitesse constante sur une piste présentant des oscillations sinusoïdales, de hauteur  $f(t)$  à l'instant  $t$  par rapport à l'axe moyen de la sinusoïde. En gardant la même origine verticale 0 que précédemment, l'allongement du ressort n'est plus  $x$  mais  $x - f(t)$ , et sa vitesse devient  $x' - f'(t)$  (figure 18). L'équation différentielle du mouvement vertical  $x$  devient

$mx'' = -k(x - f(t)) - b(x' - f'(t))$ . En posant  $p = b/m$ ,  $q = k/m$  et  $g(t) = (b f'(t) + k f(t))/m$ , où  $g(t)$  est sinusoïdale puisque  $f(t)$  l'est déjà, on trouve l'équation :

$$x'' + px' + qx = g(t)$$

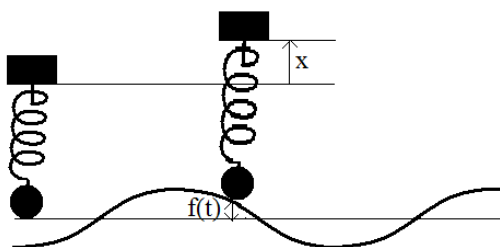


Figure 18 : Schéma d'amortisseur d'une voiture roulant sur de la tôle ondulée.

1) Etudier le cas où  $g(t) = 0$ , en prenant  $q = 1$  et en faisant varier  $p$ , cela dans le repère  $t, x$ . Puis en prenant  $q = 1$  et  $p = 0,1$ , ce qui correspond à des oscillations amorties, rajouter l'effet de  $g(t) = \sin 8t$ , pour constater les perturbations qui en résultent sur la courbe.

L'équation différentielle s'écrit  $x'' + p x' + q x = 0$ . On constate deux types de trajectoires (figure 19) : pour  $p$  inférieur à 2, on assiste à des oscillations amorties, et pour  $p$  supérieur à 2, l'amortissement se fait sans aucune oscillation.<sup>5</sup>

Puis pour  $p = 0,1$  et  $q = 1$ , rajoutons l'effet de  $\sin(8t)$  dans le second membre. On a toujours des oscillations amorties, mais celles-ci sont perturbées par les vibrations de la route (figure 19 à droite). Le programme ne présente pas de difficultés.

<sup>5</sup> Cela correspond à la théorie des équations différentielles du second ordre à coefficients constants et sans second membre, soit  $x'' + p x' + q x = 0$ . On forme ce que l'on appelle l'équation caractéristique  $X^2 + pX + q = 0$ . Si le discriminant  $\Delta = p^2 - 4q$  est positif, elle admet deux solutions réelles  $r_1$  et  $r_2$ , et l'équation différentielle a pour solutions  $x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$ , tandis que si  $\Delta$  est négatif, elle admet deux solutions complexes conjuguées  $\alpha \pm i\beta$ , et l'équation différentielle a pour solutions  $x = e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)$ . D'où les deux comportements différents, observés expérimentalement.

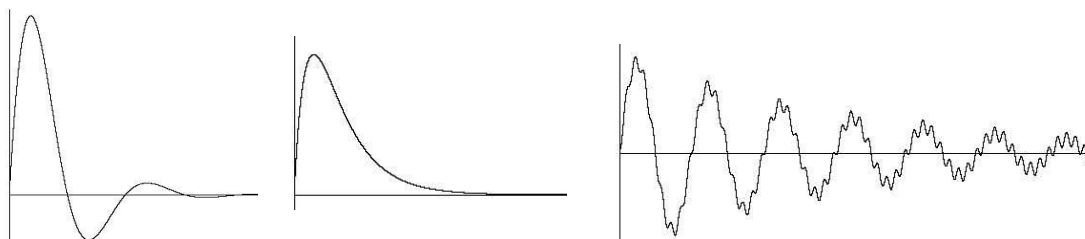


Figure 19 : A gauche et au centre,  $g(t) = 0$ , oscillations pour  $p = 0,8$  et  $q = 1$ , amortissement sans oscillations pour  $p = 2,2$  et  $q = 1$ . A droite,  $g(t) = \sin 8t$ , oscillations du ressort perturbées par les petites vibrations de la route.

```
torig=30;xorig=300;zoomt=12.; zoomx=450.;line(torig,xorig,torig+740,xorig,black);
line(torig,xorig-200,torig,xorig+200,black); /* repère */
t=0; dt=0.0001; vo=0.1; xo=0.; x=xo;v=vo ; te=torig ; /* conditions initiales */
while(te<750)
{ putpixel(te,xo,black);
  a=-p*v-q*x+sin(8*t); /* accélération */
  x+=v*dt+0.5*a*dt*dt; v+=a*dt; t+=dt;
  te=torig+zoomt*t; xo=xorig-zoomx*x;
}
```

3) Etudier le phénomène de résonance : lorsque la période des oscillations libres du ressort est proche de celles de la route, l'amplitude des oscillations augmente fortement. Dans le cas présent, cela a lieu en gros pour  $g(t) = \sin t$  (figure 20). Signalons que ce phénomène de résonance est une cause majeure de rupture d'ouvrages de travaux publics comme les ponts. Lorsque les oscillations propres de la structure du pont et celles provenant de tourbillons de vent ou de tourbillons dans l'eau ou de mouvements cadencés de véhicules ou de troupes sont en harmonie, les vibrations s'amplifient et peuvent aller jusqu'à détruire le pont. Un exemple est la rupture d'un pont construit dans les années 1820 sur la Seine par Louis Navier, ce dernier étant réputé pour ce que l'on appelle les équations de Navier-Stokes, l'un des piliers de la mécanique des fluides.

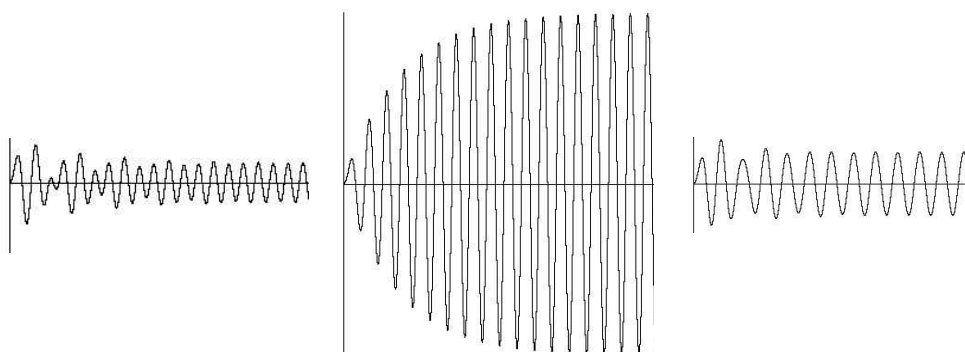


Figure 20 : Développement des oscillations. Celles-ci augmentent jusqu'à la résonance, où  $g(t) = \sin t$ , avant de diminuer.

### Exercice 7 : Pendule attiré par plusieurs aimants

On est en trois dimensions, avec un pendule dont la masse  $M$  bouge dans un plan horizontal  $xOy$  (d'équation  $z = 0$ ) car l'on néglige les petites variations verticales. Deux aimants, ou plus, sont placés un peu en-dessous, dans le plan  $z = -d$  (figure 21). Écarté de sa position verticale d'équilibre, et lancé à vitesse nulle, la masse  $M$  ne va plus seulement se livrer à des oscillations amorties, mais elle va bouger en étant tour à tour attirée par l'un ou l'autre des aimants, avant que son mouvement ne se stabilise en s'arrêtant dans la direction de l'un d'eux précisément.

Ainsi, selon la position de départ du point  $M$ , la trajectoire va se figer sur un des aimants ou un autre. Chaque point de départ sera colorié selon l'aimant que sa trajectoire finit par privilégier. On

obtient ainsi un partage du plan  $xOy$  suivant des zones qui correspondent aux bassins d'attraction de chaque aimant. On constatera une grande sensibilité aux conditions initiales. Deux points extrêmement proches peuvent avoir des trajectoires qui convergent vers des aimants différents.

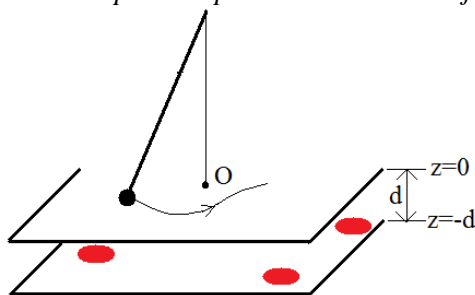


Figure 21 : Pendule en mouvement, soumis à l'attraction de trois aimants (en rouge).

Pour la programmation, il s'agit d'avancer progressivement et bien régler les paramètres: On considère que l'écran correspond au plan  $xy$ .

1) Prendre le pendule seulement soumis à son poids, sans frottement et sans aimants. Tracer la trajectoire de  $M$  dans le plan  $xOy$  en prenant au départ  $x = 1$ ,  $y = 0$ , et le vecteur vitesse de coordonnées  $v_x = 0$ ,  $v_y = 1$ . Vérifier que les équations différentielles du mouvement sont  $x'' = -Cx$ ,  $y'' = -Cy$ , où  $C$  est une constante liée au poids et à la longueur de la tige du pendule. Régler  $C$ .

On est dans le cas de petites oscillations, et l'on retrouve les équations différentielles du pendule simple.

2) Rajouter un frottement. Les équations différentielles deviennent  $x'' = -Cx - Rx'$ , et  $y'' = -Cy - Ry'$ . Visualiser une trajectoire de  $M$ . Régler la constante  $R$  de frottement pour que le mouvement en spirale autour de  $O$  ne soit ni trop amorti ni trop peu.

```
C=4.; R=0.4; dt = 0.0001;
x=1.; y=0.; vx=0.;vy=1.;
filldisc(xorig,yorig,3,black);
for (compteur=0;compteur<1000000;compteur++)
{
  ax=-C*x-R*vx; ay=-C*y-R*vy;
  x+=vx*dt+0.5*ax*dt*dt; y+=vy*dt+0.5*ay*dt*dt;
  vx+=ax*dt;vy+=ay*dt;
  xe=xorig+zoom*x; ye=yorig-zoom*y;
  putpixel(xe,ye,black); if (compteur%10000==0) SDL_Flip(screen);
}
```

Avec la constante de frottement choisie, assez faible ( $R = 0,4$ ), on trouve une trajectoire en spirale qui finit par converger vers le point d'équilibre (figure 22).

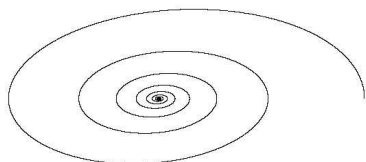


Figure 22 : Mouvement amorti du pendule vers son point d'équilibre.

3) Rajouter un aimant au point  $x_1 = 0.5$ ,  $y_1 = 0$  par exemple. Pour le calcul de la force d'attraction en 3 dimensions, l'aimant est en  $A(x_1, y_1, z_1 = -d)$  (figure 23 à gauche). Avec le point  $M(x, y, 0)$ , le vecteur  $\overrightarrow{MA}$  a pour composantes  $(x_1 - x, y_1 - y, -d)$ . En posant longueur  $MA = D$ , le vecteur unitaire est  $\overrightarrow{MA} / D$ , de coordonnées  $(x_1 - x) / D$ ,  $(y_1 - y) / D$ ,  $-h / D$ , et la force d'attraction  $F$  est portée par ce vecteur avec une amplitude proportionnelle à  $1 / D^2$ , d'où, en ne gardant que sa projection sur  $xOy$  :  $F((x_1 - x) / D^3, (y_1 - y) / D^3)$ . Plus on prend  $h$  petit, plus l'attraction sera importante. Les équations



différentielles deviennent  $x'' = -Cx - Rx' + (x_l - x)/D^3$ ,  $y'' = -Cy - Ry' + (y_l - y)/D^3$ . Visualiser une trajectoire et régler  $d$ , afin d'obtenir un mouvement suffisamment complexe, mais qui se stabilise en direction de l'aimant sans trop attendre.

```
d=0.2; C=4.; R=0.2; dt=0.0001;
x1=-0.5; y1=0.;
x=1.; y=0.; vx=0.; vy=1.; filldisc(xorig+zoom*x,yorig-zoom*y,3,black);
for (compteur=0;compteur<200000;compteur++)
{ D=sqrt((x-x1)*(x-x1)+(y-y1)*(y-y1)+d*d); D3=D*D*D;
  ax=-C*x-R*vx+(x1-x)/D3; ay=-C*y-R*vy+(y1-y)/D3;
  x+=vx*dt+0.5*ax*dt*dt; y+=vy*dt+0.5*ay*dt*dt;
  vx+=ax*dt; vy+=ay*dt;
  xe=xorig+zoom*x; ye=yorig-zoom*y;
  putpixel(xe,ye,black);if (compteur%100==0) SDL_Flip(screen);
}
filldisc(xorig+zoom*x1,yorig-zoom*y1,5,red);
```

Un exemple de trajectoire est donné sur la figure 23 à droite.

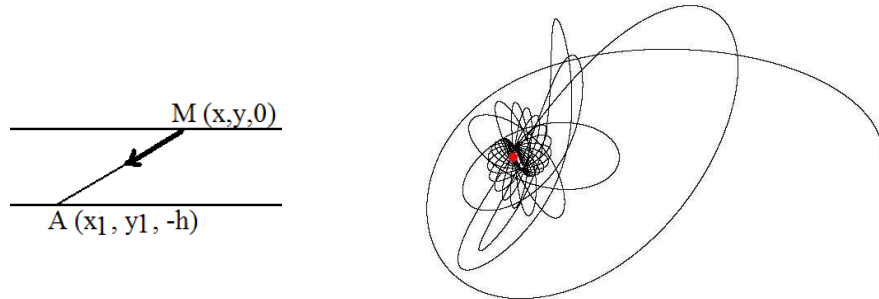


Figure 23 : A gauche, les deux plans et la force d'attraction exercée par l'aimant A sur la masse M du pendule. A droite trajectoire de la masse du pendule avec amortissement et attraction vers l'aimant.

4) Prendre plusieurs aimants, chacun apportant sa force d'attraction. Visualiser quelques trajectoires.

Dans le programme qui suit, on a pris trois aimants. Une trajectoire est visualisée sur la figure 24.

```
d=0.2; C=4.; R=0.2; dt=0.0001;
xx[0]=0.5; yy[0]=0.; xx[1]=-0.25;yy[1]=0.433; xx[2]=-0.25; yy[2]=-0.433;
x=1.; y=0.; vx=0.; vy=1.;filldisc(xorig+zoom*x,yorig-zoom*y,3,black);
for (compteur=0;compteur<200000;compteur++)
{ D0=sqrt((x-xx[0])*(x-xx[0])+(y-yy[0])*(y-yy[0])+d*d); D03=D0*D0*D0;
  D1=sqrt((x-xx[1])*(x-xx[1])+(y-yy[1])*(y-yy[1])+d*d); D13=D1*D1*D1;
  D2=sqrt((x-xx[2])*(x-xx[2])+(y-yy[2])*(y-yy[2])+d*d); D23=D2*D2*D2;
  ax=-C*x-R*vx+(xx[0]-x)/D03+(xx[1]-x)/D13+(xx[2]-x)/D23;
  ay=-C*y-R*vy+(yy[0]-y)/D03+(yy[1]-y)/D13+(yy[2]-y)/D23;
  x+=vx*dt+0.5*ax*dt*dt; y+=vy*dt+0.5*ay*dt*dt;
  vx+=ax*dt; vy+=ay*dt;
  xe=xorig+zoom*x; ye=yorig-zoom*y;
  putpixel(xe,ye,black);if (compteur%100==0) SDL_Flip(screen);
}
filldisc(xorig+zoom*xx[0],yorig-zoom*yy[0],5,red);
filldisc(xorig+zoom*xx[1],yorig-zoom*yy[1],5,red);
filldisc(xorig+zoom*xx[2],yorig-zoom*yy[2],5,red);
```

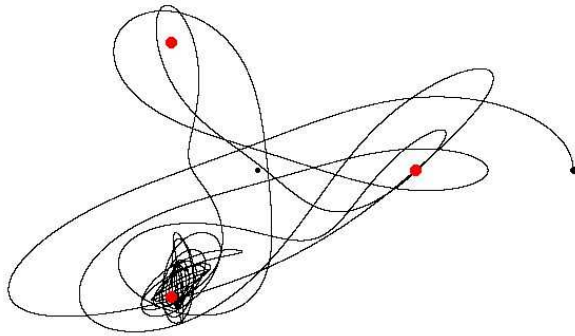


Figure 24 : Trajectoire qui finit par converger vers un des trois aimants (en rouge).

5) Prendre les trajectoires de chaque point de l'écran, et les colorier selon que leur trajectoire vers l'un ou l'autre des aimants.

Toujours avec trois aimants, on considère les trajectoires des points situés dans un carré de l'écran. Pour chaque trajectoire, au terme de 40 000 itérations (avec  $dt = 0,0001$ ), on se contente de regarder dans quelle zone se trouve le point final de la trajectoire, en déterminant quel est l'aimant le plus proche de lui. Puis on colorie le point de départ de la trajectoire avec la couleur associée à l'aimant concerné. Le résultat donné sur la figure 25 indique un certain comportement chaotique, où des points de départ voisins donnent des trajectoires qui ne convergent pas vers le même aimant.

```
d=0.1; C=4.; R=0.2;
xx[0]=0.5; yy[0]=0.; xx[1]=-0.25; yy[1]=0.433; xx[2]=-0.25; yy[2]=-0.433;
for(xe=xorig-250; xe<=xorig+250; xe++) for(ye=yorig-250; ye<=yorig+250; ye++) /* parcours du carré sur
{ compteur=0;                                                                    l'écran */
  x0=(float)(xe-xorig)/zoom; x=x0; y0=(float)(yorig-ye)/zoom; y=y0; vx=0.; vy=0.;
  do
  { D0=sqrt((x-xx[0])*(x-xx[0])+(y-yy[0])*(y-yy[0])+d*d); D03=D0*D0*D0;
    D1=sqrt((x-xx[1])*(x-xx[1])+(y-yy[1])*(y-yy[1])+d*d); D13=D1*D1*D1;
    D2=sqrt((x-xx[2])*(x-xx[2])+(y-yy[2])*(y-yy[2])+d*d); D23=D2*D2*D2;
    ax=-C*x-R*vz+(xx[0]-x)/D03+(xx[1]-x)/D13+(xx[2]-x)/D23;
    ay=-C*y-R*vy+(yy[0]-y)/D03+(yy[1]-y)/D13+(yy[2]-y)/D23;
    x+=vx*dt+0.5*ax*dt*dt; y+=vy*dt+0.5*ay*dt*dt; vx+=ax*dt; vy+=ay*dt;
    compteur++;
  }
  while(compteur<40000);
  if(y<-rac3*x && y>-rac3*x) putpixel(xe,ye,blue); /* coloration du point initial (xe, ye) avec la couleur
  else if( y>0.) putpixel(xe,ye,red);                de l'aimant concerné */
  else putpixel(xe,ye,green);
  if (ye==yorig+200) SDL_Flip(screen);
}
filldisc(xorig+zoom*xx[0],yorig-zoom*yy[0],5,black);
filldisc(xorig+zoom*xx[1],yorig-zoom*yy[1],5,black);
filldisc(xorig+zoom*xx[2],yorig-zoom*yy[2],5,black);
```

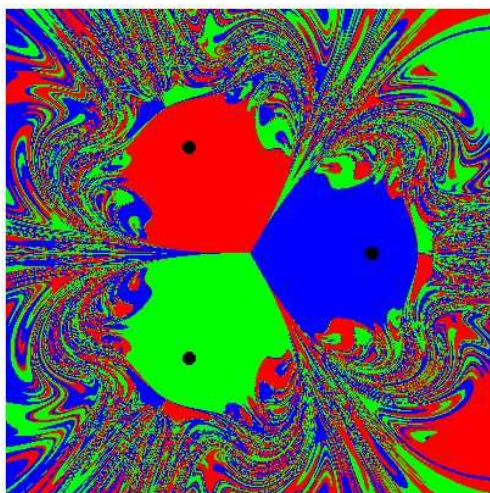


Figure 25 : Bassins d'attraction des trois aimants.

### Exercice 8 : Noria

De l'eau coule à la verticale d'une roue qui contient sur son pourtour des cuvettes qui pendent verticalement, leur fond plat étant horizontal. Celles-ci se remplissent en passant sous le filet d'eau à débit constant. Cela provoque un mouvement de rotation de la roue (figure 26). Selon les forces en présence, à savoir les poids de l'eau emmagasinée dans les cuvettes, la roue tourne dans un sens ou dans l'autre. Pour obtenir un mouvement perpétuel d'apparence chaotique, on vide les cuvettes quand elles sont pleines, et l'on rajoute une légère évaporation. Précisons que pour l'équation différentielle du mouvement, où intervient l'angle  $\theta$  de rotation de la roue en fonction du temps, il suffit d'ajouter les accélérations angulaires provoquées par les poids de l'eau en projection tangentielle sur le cercle de la roue. Programmer pour visualiser le mouvement de la roue.

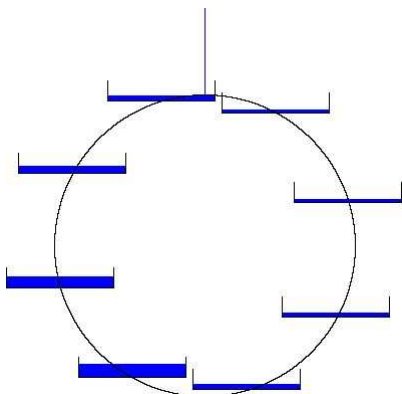


Figure 26 : La roue en mouvement sous l'effet du poids de l'eau dans les 8 cuvettes, avec le filet d'eau qui tombe en haut de la roue.

Chaque cuvette se comporte comme un pendule, et l'on sait que la seule force agissante est la projection du poids tangentielle au cercle. C'est la somme des accélérations tangentielles causées par les poids des cuvettes qui donne une accélération tangentielle provoquant la rotation de la roue.

Dans notre programme, nous avons pris 8 cuvettes régulièrement espacées. Pour la roue de longueur unité, chaque cuvette a une longueur horizontale égale à 0,7 et une hauteur de  $2 / 15 = 0,133$ , correspondant à 20 pixels sur l'écran pour un zoom de 150. On considère que pour chaque intervalle de temps  $dt = 0,001$ , la cuvette placée sous le filet d'eau voit sa hauteur d'eau monter de  $1 / 40 = 0,025$ , et la masse d'eau augmenter de  $1 / 9$ , le rapport masse/hauteur d'eau étant toujours égal à  $40 / 9$ .

La position d'une cuvette  $i$  à chaque instant est connue par l'angle  $\theta[i]$  entre elle et la verticale, comme pour un pendule, et la force agissante est  $F_i = m[i] \sin(\theta[i])$ , la masse  $m[i]$  étant celle de l'eau dans la cuvette  $i$ . La loi fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\left(\sum_{i=0}^7 m_i\right) \theta'' = -k \sum_{i=0}^7 F_i$$

où  $\theta''$  est l'accélération de l'angle de la roue, et l'on y ajoute un terme d'amortissement de la forme  $-\gamma \theta'$ ,  $k$  et  $\gamma$  étant des coefficients que l'on se donne.

```
for(i=0;i<8;i++) {theta[i]=i*M_PI/4.+0.15; h[i]=0.;m[i]=0.;} /* conditions initiales */
dt=0.001; thprime=0.;
for(compteur=0;compteur < 30000; compteur++) /* boucle du temps */
{ sommemasses=0.; sommeforces=0.;
  for(i=0;i<8;i++)
  { sommemasses+=m[i]; sommeforces+=m[i]*sin(theta[i]); }
  if (sommemasses>0.0005) /* on a pris k = 50 et gamma = 75 */
  { thacc=-k*sommeforces/sommemasses-gamma*thprime/sommemasses; /* accélération de la roue */
    thprime+=thacc*dt; /* vitesse angulaire de rotation */
  }
  else thprime=0.;
  for(i=0;i<8;i++) /* calcul des nouvelles positions pour chaque cuvette */
  { theta[i]+=thprime*dt;
    if (theta[i]>=deuxpi) theta[i]-=deuxpi; if (theta[i]<0.) theta[i]+=deuxpi;
    xe=xorig+zoom*sin(theta[i]); ye=yorig+zoom*cos(theta[i]);
    extremg=xe-0.3535*zoom; extremd=xe+0.3535*zoom; /* dessin d'un cuvette */
    line(extremg,ye,extremd,ye,black);
    line(extremg,ye,extremg,ye-20,black);line(extremd,ye,extremd,ye-20,black);
    if (theta[i]<M_PI+0.35 && theta[i]>M_PI-0.35) /* cuvette remplie par le filet d'eau */
    { touche=i;
      h[i]+=1./40.; m[i]+=1./9.; if (h[i]>20.) {h[i]=0.;m[i]=0.;}
      line(xorig,0,xorig,ye-h[i],blue);
    }
    line(extremg+1,ye-h[i],extremd-1,ye-h[i],blue);
    for(j=1;j<h[i];j++) line(extremg+1,ye-j,extremd-1,ye-j,blue);
  }
  circle(xorig,yorig,zoom,black);
  SDL_Flip(screen);SDL_FillRect(screen,0,white);
  for(j=0;j<8;j++) if (j!=touche) if (h[j]>0.5) {h[j]-=1./800.; m[j]-=1./180.;} /* évaporation */
}
```

## 9. Mouvement de planètes

Il ne s'agit plus à proprement parler d'oscillateurs. Mais deux planètes qui s'attirent mutuellement ont chacune un mouvement périodique, comme on va le constater. Selon la loi d'attraction universelle, deux objets  $P_1$  et  $P_2$  de masses  $M_1$  et  $M_2$ , de coordonnées  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  dans un repère plan, et séparés par une distance  $d$ , s'attirent mutuellement avec une force d'amplitude  $F = k M_1 M_2 / d^2$ . Comme une force  $\mathbf{F}$  est reliée à l'accélération  $\mathbf{A}$  par la relation  $\mathbf{F} = M \mathbf{A}$ , l'objet  $P_1$  est soumis à l'accélération vectorielle  $\mathbf{A}_1 = (k M_2 / d^2) \mathbf{i}_{12}$ ,  $\mathbf{i}_{12}$  étant le vecteur unitaire dirigé de  $P_1$  vers  $P_2$ , et l'objet  $P_2$  est soumis à l'accélération  $\mathbf{A}_2 = (k M_1 / d^2) \mathbf{i}_{21}$ , avec  $\mathbf{i}_{12}$  de coordonnées  $(x_2 - x_1) / d$  et  $(y_2 - y_1) / d$ , et  $\mathbf{i}_{21}$  de coordonnées  $(x_1 - x_2) / d$ ,  $(y_1 - y_2) / d$ . Finalement l'accélération  $\mathbf{A}_1$  a pour coordonnées  $a_{1x} = k M_2 (x_2 - x_1) / d^3$ ,  $a_{1y} = k M_2 (y_2 - y_1) / d^3$ , et de même pour  $\mathbf{A}_2$ . Connaissant ces relations entre les accélérations et les positions, il suffit d'ajouter les conditions initiales au temps  $t = 0$  sur les positions et les vitesses, pour obtenir les trajectoires des objets.

Remarquons que si les vitesses initiales étaient prises nulles ou portées par  $P_1P_2$ , les deux objets auraient une trajectoire rectiligne jusqu'au choc final. On choisira de prendre des vitesses perpendiculaires à  $P_1P_2$ . Si ces deux vitesses sont de sens opposé et telles que  $M_1 \mathbf{V}_1 + M_2 \mathbf{V}_2 = \mathbf{0}$ , le centre de gravité de  $P_1$  et  $P_2$  reste fixe au cours du mouvement, ce qui facilite la visualisation sur écran. Plus généralement, la vitesse  $\mathbf{V}$  du centre de gravité est telle que  $(M_1 + M_2) \mathbf{V} = M_1 \mathbf{V}_1 + M_2 \mathbf{V}_2$ . Si l'on veut éviter de voir les deux objets tourner chacun autour de l'autre tout en s'éloignant vers l'infini – pour nous hors de l'écran, il suffit de forcer le centre de gravité à rester au centre de l'écran.

Ce qui vaut pour deux objets peut se généraliser à  $N$  objets, chaque objet étant alors soumis à l'accélération provoquée par tous les autres, avec addition des vecteurs correspondants.

### Exercice 9 : Le problème des trois corps

1) Commencer par programmer le mouvement de deux planètes  $P_1$  et  $P_2$ , en se plaçant dans un repère relatif où leur centre de gravité est l'origine. Leur donner des vitesses initiales perpendiculaires à la ligne  $P_1P_2$ , et de sens opposé. A cause du repère choisi, il suffit de donner à l'une une vitesse nulle et à l'autre une vitesse non nulle. Par un choix judicieux des paramètres, s'arranger pour obtenir des trajectoires elliptiques stables. Remarquer que si l'une des planètes a une masse forte par rapport à l'autre, elle reste presque immobile dans le repère du centre de gravité.

Dans le programme qui suit, le nombre de planètes est  $N = 2$ , et l'une a une masse dix fois plus grande que l'autre. En fixant le centre de gravité (xg, yg) des deux planètes au centre de l'écran, la planète la plus lourde a une trajectoire ovale très petite par rapport à celle de la planète la plus légère. Pour éviter une accumulation de petites erreurs, on a pris un intervalle de temps  $dt$  très petit, soit  $dt = 0,000001$ . Au terme de 200 000 000 d'itérations, on ne peut cependant pas éviter une légère variation de la trajectoire planète la plus légère, dans certaines conditions initiales (figure 27).

```

m[0]=10.; m[1]=1.;
x[0]=-1.; y[0]=0.; x[1]=1.; y[1]=0.;
vx[0]=0.; vy[0]=1.8/m[1]; vx[1]=0.; vy[1]=-1.8/m[0]; /* trajectoires presque circulaires dans ce cas */
dt=0.000001; /* si l'on prend vx[1]=0.8/m[1] et vy[1]=-0.8/m[1] */
for (compteur=0; compteur < 200000000; compteur++) /* la trajectoire elliptique de la planète 1 */
{
  xg=(m[0]*x[0] + m[1]*x[1] + m[2]*x[2]) / (m[0]+m[1]+m[2]); /* dévie légèrement */
  yg=(m[0]*y[0] + m[1]*y[1] + m[2]*y[2]) / (m[0]+m[1]+m[2]);
  for(i=0; i<N; i++)
  {
    xe=xorig+zoom*(x[i]-xg); ye=yorig-zoom*(y[i]-yg);
    putpixel(xe,ye,black);
  }
  for(i=0; i<N; i++)
  {
    ax[i]=0.; ay[i]=0.;
    for(j=0; j<N; j++) if (j!=i)
    {
      distx=x[j]-x[i]; disty=y[j]-y[i]; dist2=distx*distx+disty*disty;
      dist=sqrt(dist2); dist3=dist*dist*dist;
      ax[i]+=k*m[j]*distx/dist3; ay[i]+=k*m[j]*disty/dist3;
    }
  }
  for(i=0; i<N; i++) /* nouvelle position */
  {
    x[i]+=vx[i]*dt+0.5*ax[i]*dt*dt; y[i]+=vy[i]*dt+0.5*ay[i]*dt*dt;
  }
  for(i=0; i<N; i++) /* nouvelle vitesse */
  {
    vx[i]+=ax[i]*dt; vy[i]+=ay[i]*dt;
  }
}

```

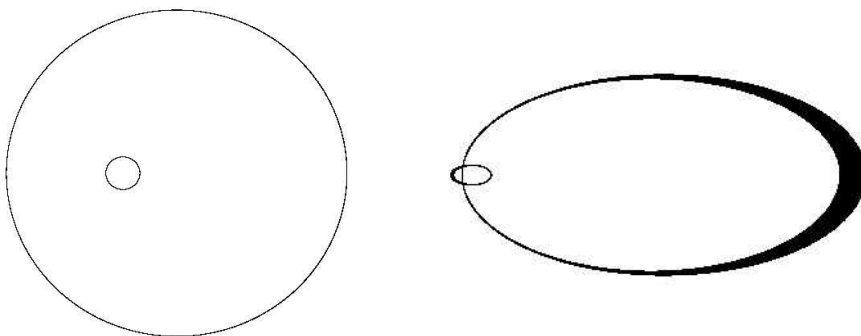


Figure 27 : Mouvement de deux planètes. Selon le choix des conditions initiales, on constate au bout d'un certain temps que la trajectoire de la petite planète reste immuable (à gauche), ou subit une légère variation (à droite) à cause de l'accumulation de petites erreurs dues à la discrétisation du mouvement.

2) Programmer le mouvement relatif de trois planètes. On leur donnera des masses nettement différentes, de façon que la plus petite ait tendance à tourner autour de la planète moyenne, celle-ci tournant à son tour autour de la grosse. Dans certains cas, on pourra observer une relative stabilité du mouvement, tandis que dans de nombreux autres, on assiste rapidement à une catastrophe : la déstabilisation du mouvement de la plus petite, qui va partir à l'infini. Pour se rassurer, précisons que ce phénomène, observé dans l'univers de fantaisie qu'est l'écran de l'ordinateur, est certes lié à la théorie du chaos, mais qu'il est aussi provoqué par le cumul des petites erreurs dans la résolution des équations différentielles du mouvement, ainsi que par la vitesse très grande de rotation de la petite planète (quelques secondes) par rapport à ce qui se passe dans l'univers réel.

Dans le programme, qui ressemble au précédent, le mouvement de la grosse planète est dessiné en noir, celui de la planète moyenne est en bleu et celui de la petite en rouge. Avec les conditions initiales choisies, le mouvement reste stable, la petite planète tournant autour de la planète moyenne (figure 28 en haut).

```

m[0]=100.; m[1]=1.;m[2]=0.01;
x[0]=-1.; y[0]=0.; x[1]=1.; y[1]=0.; x[2]=1.1; y[2]=0.;
vx[0]=0.;vy[0]=6./m[1]; vx[1]=0.;vy[1]=-6./m[0]; vx[2]=0.;vy[2]=vy[1]+2.5;
dt=0.000001;
for (compteur=0; compteur < 24000000; compteur++)
{ if (compteur==1200000) {SDL_Flip(screen);pause();}
  xg=(m[0]*x[0] +m[1]*x[1] +m[2]*x[2] )/(m[0]+m[1]+m[2]);
  yg=(m[0]*y[0] +m[1]*y[1] +m[2]*y[2] )/(m[0]+m[1]+m[2]);
  for(i=0;i<N;i++)
  { xe=xorig+zoom*(x[i]-xg); ye=yorig-zoom*(y[i]-yg);
    if (i==0)circle(xe,ye,1,black); else if(i==1)circle(xe,ye,1,blue); else putpixel(xe,ye,red);
  }
  for(i=0;i<N;i++)
  { ax[i]=0.;ay[i]=0.;
    for(j=0;j<N;j++) if (j!=i)
    { distx=x[j]-x[i];disty=y[j]-y[i]; dist2=distx*distx+disty*disty;
      dist= sqrt(dist2); dist3=dist*dist*dist;
      ax[i]+=k*m[j]*distx/dist3; ay[i]+=k*m[j]*disty/dist3;
    }
  }
  for(i=0;i<N;i++) /** nouvelle position */
  { x[i]+=vx[i]*dt+0.5*ax[i]*dt*dt; y[i]+=vy[i]*dt+0.5*ay[i]*dt*dt;}
  for(i=0;i<N;i++) /** nouvelle vitesse */
  { vx[i]+=ax[i]*dt; vy[i]+=ay[i]*dt;}
}

```

Puis modifions les conditions initiales, soit :

```
m[0]=45.; m[1]=1.;m[2]=0.01;
x[0]=-1.; y[0]=0.; x[1]=1.; y[1]=0.; x[2]=1.2; y[2]=0.;
vx[0]=0.;vy[0]=6./m[1]; vx[1]=0.;vy[1]=-6./m[0]; vx[2]=0.;vy[2]=vy[1]+2.5;
```

Les trajectoires restent encore stables, mais si l'on prend ensuite  $x[2] = 1,21$  au lieu de 1,2, sans rien changer par ailleurs, la petite planète est très vite propulsée à l'infini, entraînant une déviation du mouvement de la planète moyenne (figure 28 en bas).

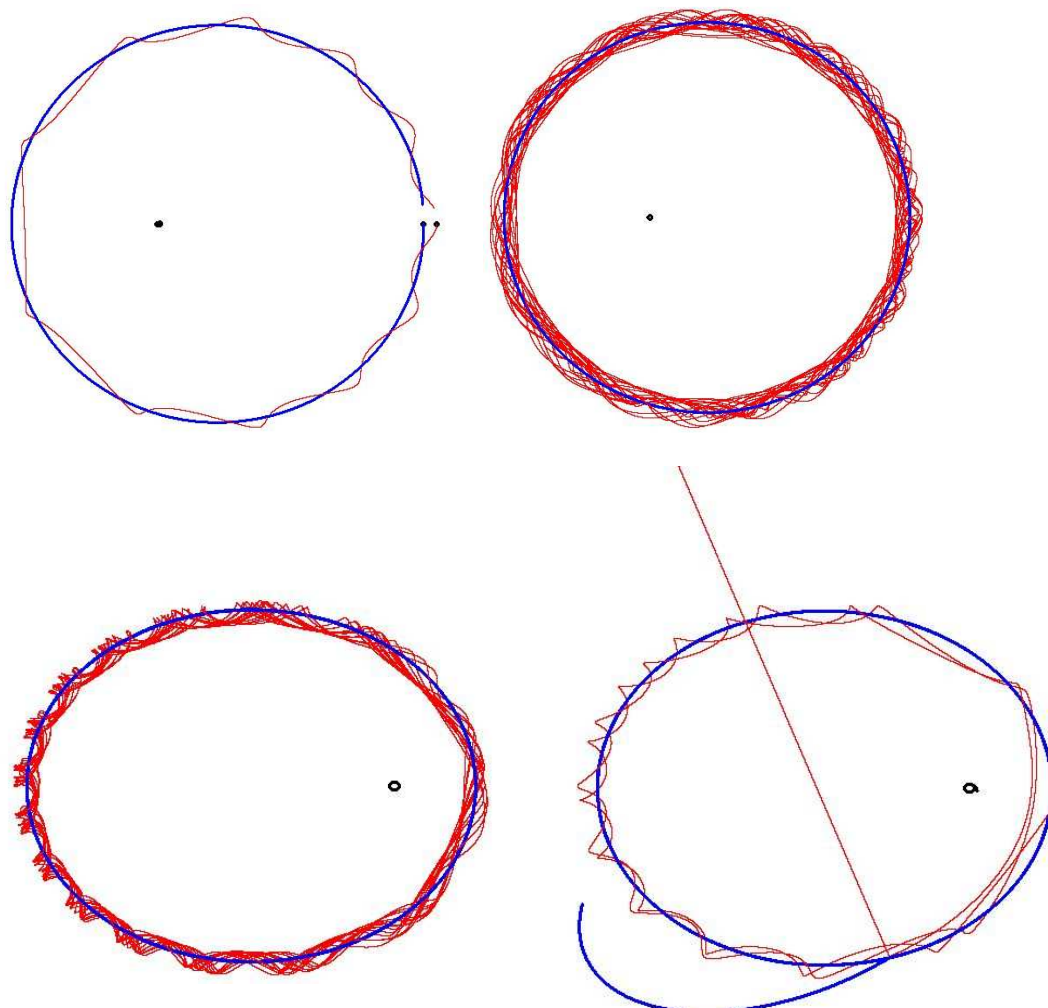


Figure 28 : Mouvement de trois planètes. En haut à gauche, les trajectoires après un tour, et à droite après de nombreux tours. En bas, une modification très légère de la vitesse initiale de la planète la plus légère, sans changer les autres conditions initiales, suffit pour passer d'un mouvement stable à un mouvement instable, la petite planète partant à l'infini.

### Exercice 10 : Désagrégation d'un amas galactique

Considérons deux planètes, l'une grosse  $P_0$  et l'autre petite  $P_1$ . Faisons en sorte que la petite planète décrive une trajectoire parabolique, en lui donnant une vitesse initiale suffisante, pour qu'après s'être rapprochée de la grosse sous l'effet de l'attraction, elle s'en éloigne ensuite irrémédiablement, l'attraction n'étant pas assez forte pour la retenir. Puis rajouter autour de la petite planète plusieurs dizaines d'astéroïdes  $p_i$ , de masse très faible. Faire en sorte que ceux-ci tournent autour de cette planète de façon régulière, lorsque l'influence de la grosse planète ne se fait pas sentir. Pour cela, il faudra accepter que ces astéroïdes n'exercent entre eux aucune force d'attraction. Ils sont seulement soumis à l'attraction de la petite et de la grosse planètes. Il faudra aussi éviter les phénomènes chaotiques obtenus dans le problème des trois corps. Cela réglé, on verra comment cet

*amas galactique, qui tourne autour de la petite planète, va se désagréger lorsque cette dernière se rapproche de la grosse planète, qui exerce ses effets attractifs.*

Dans le programme qui suit, nous avons placé 138 astéroïdes autour de la planète  $P_1$ .

```

masse[0]=100.; masse[1]=30.; absc[0]=-100.; ord[0]=0.; absc[1]=200.; ord[1]=220.;
vitx[0]=0.; vity[0]=0.; vitx[1]=-0.5; vity[1]=-0.8; /* les planètes P0 et P1 */
for(i=117;i<137;i++) { masse[i]=0.5; /* les astéroïdes, en couches circulaires autour de P1 */
    absc[i]=absc[1]+40.*cos(6.28*(i-2)/20.); ord[i]=ord[1]+40.*sin(6.28*(i-2)/20.);
    vitx[i]=vitx[1]+0.86*sin(6.28*(i-2)/20.); vity[i]=vity[1]-0.86*cos(6.28*(i-2)/20.); }
for(i=97;i<117;i++) { masse[i]=0.5;
    absc[i]=absc[1]+35.*cos(6.28*(i-2)/20.); ord[i]=ord[1]+35.*sin(6.28*(i-2)/20.);
    vitx[i]=vitx[1]+0.93*sin(6.28*(i-2)/20.); vity[i]=vity[1]-0.93*cos(6.28*(i-2)/20.); }
for(i=67;i<97;i++) { masse[i]=1.;
    absc[i]=absc[1]+30.*cos(6.28*(i-2)/20.); ord[i]=ord[1]+30.*sin(6.28*(i-2)/20.);
    vitx[i]=vitx[1]+1.*sin(6.28*(i-2)/20.); vity[i]=vity[1]-1.*cos(6.28*(i-2)/20.); }
for(i=47;i<67;i++) { masse[i]=0.5;
    absc[i]=absc[1]+25.*cos(6.28*(i-2)/20.); ord[i]=ord[1]+25.*sin(6.28*(i-2)/20.);
    vitx[i]=vitx[1]+1.1*sin(6.28*(i-2)/20.);
    vity[i]=vity[1]-1.1*cos(6.28*(i-2)/20.); }
for(i=32;i<47;i++) { masse[i]=1.;
    absc[i]=absc[1]+20.*cos(6.28*(i-2)/15.); ord[i]=ord[1]+20.*sin(6.28*(i-2)/15.);
    vitx[i]=vitx[1]+1.2*sin(6.28*(i-2)/15.); vity[i]=vity[1]-1.2*cos(6.28*(i-2)/15.); }
for(i=17;i<32;i++) { masse[i]=1.;
    absc[i]=absc[1]+10.*cos(6.28*(i-2)/15.); ord[i]=ord[1]+10.*sin(6.28*(i-2)/15.);
    vitx[i]=vitx[1]+1.7*sin(6.28*(i-2)/15.); vity[i]=vity[1]-1.7*cos(6.28*(i-2)/15.); }
for(i=2;i<17;i++) { masse[i]=1.;
    absc[i]=absc[1]+5.*cos(6.28*(i-2)/15.); ord[i]=ord[1]+5.*sin(6.28*(i-2)/15.);
    vitx[i]=vitx[1]+2.4*sin(6.28*(i-2)/15.); vity[i]=vity[1]-2.4*cos(6.28*(i-2)/15.); }

dt=0.01; compteur =0;
do { compteur++;
    if (compteur%10==9) {SDL_Flip(screen);SDL_FillRect(screen,0,white);}
    for(i=0;i<nombre;i++) /* dessin des points sur l'écran */
        { xe=xorig+absc[i]; ye=yorig+ord[i]; filldisc(xe,ye,1,black);
          if (i==1) filldisc (xe,ye,4,black); if (i==0) filldisc(xe,ye,5,black);
        }
    for(i=0;i<2;i++) /* accélération */
        { accx[i]=0.; accy[i]=0.;
          for(j=0;j<2;j++) if (j!=i)
              { distx=absc[j]-absc[i]; disty=ord[j]-ord[i]; dist2=distx*distx+disty*disty;
                dist[i]= sqrt(dist2); dist3=dist[i]*dist[i]*dist[i];
                accx[i]=accx[i]+masse[j]*distx/dist3; accy[i]=accy[i]+ masse[j]*disty/dist3;
              }
        }
    for(i=2;i<nombre;i++)
        { distx=absc[1]-absc[i]; disty=ord[1]-ord[i]; dist2=distx*distx+disty*disty; dist[i]= sqrt(dist2);
          dist3=dist[i]*dist[i]*dist[i];
          ddistx=absc[0]-absc[i]; ddisty=ord[0]-ord[i]; ddist2=ddistx*ddistx+ddisty*ddisty;
          ddist= sqrt(ddist2); ddist3=ddist*ddist*ddist;
          accx[i]=masse[1]*distx/dist3 +masse[0]*ddistx/ddist3 ;
          accy[i]=masse[1]*disty/dist3 +masse[0]*ddisty/ddist3 ;
        }
    for(i=0;i<nombre;i++) /* nouvelle position */
        { absc[i]=absc[i]+vitx[i]*dt+0.5*accx[i]*dt*dt; ord[i]=ord[i]+vity[i]*dt+0.5*accy[i]*dt*dt; }
    for(i=0;i<2;i++) /* nouvelle vitesse */
        { vitx[i]=vitx[i]+accx[i]*dt; vity[i]=vity[i]+accy[i]*dt; }
    for(i=2;i<nombre;i++)
        { vitx[i]=vitx[i]+(accx[1]+accx[i])*dt; vity[i]=vity[i]+(accy[1]+accy[i])*dt; }
    }
while (compteur<35000);

```



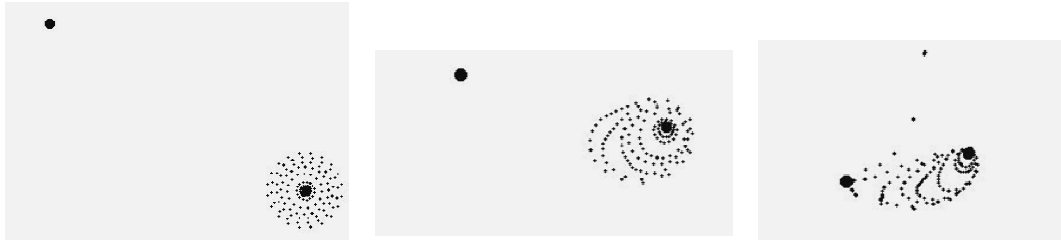


Figure 29 : Désagrégation d'un amas galactique.

## 9. Accélération dans un repère mobile

Nous donnons ici un appoint théorique qui va permettre d'aller plus loin dans l'étude des mouvements, en faisant intervenir un repère mobile. En effet, quand un point  $M$  parcourt une courbe, on peut lui associer à chaque instant un repère dont il est l'origine. Nous allons étudier deux des cas possibles, en deux dimensions dans un plan.

### 9.1. Repère de Frenet

A partir du point  $M$  à l'instant  $t$ , on prend le vecteur unité  $\mathbf{T}$  tangent à la trajectoire, ainsi que le vecteur normal  $\mathbf{N}$  qui se déduit de  $\mathbf{T}$  par une rotation de  $\pi/2$ . L'objectif est de déterminer les coordonnées du vecteur accélération  $\mathbf{A}$  dans ce repère qui bouge avec  $M$ . Pendant le temps  $dt$ , le point passe de  $M$  à  $M'$ , et l'arc ainsi parcouru sur la trajectoire est noté  $ds$ . Le vecteur vitesse est porté par  $\mathbf{T}$  et il est tel que :

$$\mathbf{V} = \frac{ds}{dt} \mathbf{T} = v \mathbf{T}$$

Pour avoir le vecteur accélération  $\mathbf{A}$ , dérivons le produit  $v\mathbf{T}$  par rapport au temps :

$$\mathbf{A} = d\mathbf{V} / dt = \frac{dv}{dt} \mathbf{T} + \frac{ds}{dt} \frac{d\mathbf{T}}{dt} \text{ avec } \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Il reste à calculer  $\frac{d\mathbf{T}}{dt}$  :

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{d\mathbf{T}}{ds}$$

Le petit arc  $ds$  est assimilable à un petit arc de cercle<sup>6</sup> de rayon  $R$  et de centre  $I$ , et il est vu sous un angle  $d\theta$  à partir de  $I$ , d'où

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = v \frac{d\mathbf{T}}{ds} = v \frac{d\mathbf{T}}{d\theta} \frac{d\theta}{ds}.$$

Or  $ds = R d\theta$  par définition d'un angle en radians, et comme on peut le vérifier sur la figure 30,  $\frac{d\mathbf{T}}{d\theta} = \mathbf{N}$ . Finalement

$$\mathbf{A} = \frac{dv}{dt} \mathbf{T} + \frac{v^2}{R} \mathbf{N}$$

<sup>6</sup> Ce cercle donne une indication sur la courbure de la trajectoire, il est appelé cercle de courbure ou cercle osculateur.

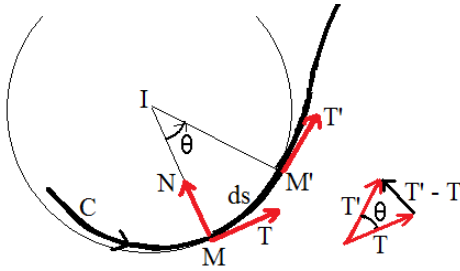


Figure 30 : Pendant le temps  $dt$ , l'arc parcouru sur la courbe  $C$  est  $MM'$  de longueur  $ds$ , la variation du vecteur tangent est  $\mathbf{T}' - \mathbf{T}$ , ce vecteur tendant à être porté par  $(IM)$  lorsque  $M'$  se rapproche de  $M$ , et l'angle  $d\theta$  se retrouve entre  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{T}'$ , la longueur du vecteur  $\mathbf{T}' - \mathbf{T}$  est donc  $d\theta$ .

### Exemple 1 : le pendule revisité

Prenons un repère de Frenet pour le pendule en mouvement. Les forces agissantes sont d'une part le poids  $\mathbf{P}$ , vecteur vertical dirigé vers le bas, et d'autre part la tension  $\mathbf{T}$  exercée sur la tige (ou encore la force à laquelle est soumise le pivot du pendule), celle-ci étant portée par  $\mathbf{N}$ , soit  $T\mathbf{N}$  (figure 31). Appliquons la loi fondamentale de la dynamique dans le repère de Frenet :

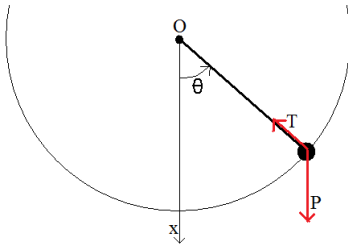


Figure 31 : Pendule avec ses deux forces.

$$m \mathbf{A} = \mathbf{P} + \mathbf{T}$$

$$m (dv/dt \mathbf{T} + v^2/l \mathbf{N}) = -m g \sin \theta \mathbf{T} - m g \cos \theta \mathbf{N} + T \mathbf{N} \text{ avec } v = l \theta' \text{ et } dv/dt = l \theta'' . \text{ On en déduit :}$$

$$\begin{cases} ml \theta'' = -m g \sin \theta \\ ml \theta'^2 = -m g \cos \theta + T \end{cases}$$

On retrouve la loi du mouvement de  $\theta$  dans le temps, mais aussi la tension du fil :

$$T = ml \theta'^2 + m g \cos \theta$$

On a vu précédemment que l'énergie totale du pendule est une constante, soit :

$$\frac{1}{2} ml^2 \theta'^2 - m g l \cos \theta = K$$

Appelons  $\theta_{\max}$  l'angle maximal que fait le pendule au cours de ses oscillations périodiques, ce qui suppose que  $\theta_{\max}$  est inférieur à  $\pi$  (il n'y a pas tournoiement du pendule). Pour cette valeur de l'angle, la vitesse est nulle, et l'énergie totale s'écrit :

$$-m g l \cos \theta_{\max} = K$$

Par différence, on trouve :

$$\frac{1}{2} ml^2 \theta'^2 - m g l (\cos \theta - \cos \theta_{\max}) = 0 \text{ ou } \frac{1}{2} ml \theta'^2 = m g (\cos \theta - \cos \theta_{\max}) . \text{ La tension devient :}$$

$$T = 2m g (\cos \theta - \cos \theta_{\max}) + m g \cos \theta = m g (3 \cos \theta - 2 \cos \theta_{\max})$$

Comme le cosinus croît lorsque  $\theta$  décroît de  $\theta_{\max}$  à la position verticale 0, la tension minimale est  $m g \cos \theta_{\max}$  et la tension maximale est  $m g (3 - \cos \theta_{\max})$ . Lorsque  $\theta_{\max}$  est inférieur à  $\pi/2$ , la tension reste toujours positive, tandis que pour  $\theta_{\max}$  entre  $\pi/2$  et  $\pi$ , la tension commence par être négative lorsque l'angle  $\theta$  diminue, autrement dit, si l'on remplaçait la tige rigide du pendule par un fil inextensible, il y aurait décrochage. Notamment pour la position extrême  $\theta_{\max} = \pi$ , la tension est d'abord négative puis positive, le changement de signe se produisant pour  $3 \cos \theta + 2 = 0$ , ou  $\cos \theta = -2/3$ , soit  $\theta = 131,8$  degrés.

### Exercice 11 : Tournoiement du pendule

1) La position initiale du pendule est supposée verticale vers le bas. Quelle est la vitesse angulaire initiale positive  $\theta'_0$  qu'il convient de lui donner pour qu'il se mette à tourner en rond. Utiliser pour cela la formule de l'énergie totale du pendule.

La formule de l'énergie totale est :  $\frac{1}{2} m l^2 \theta'^2 - m g l \cos \theta = K$ . A l'instant initial cela fait :

$$\frac{1}{2} m l^2 \theta'^2_0 - m g l = K$$

Notons  $\theta'_h$  la vitesse angulaire au point haut ( $\theta = \pi$ ), la formule devient :

$$\frac{1}{2} m l^2 \theta'^2_h + m g l = K \quad (\text{on doit avoir } K > m g l)$$

Par différence

$$\frac{1}{2} m l^2 (\theta'^2_0 - \theta'^2_h) - 2 m g l = 0$$

$$\theta'^2_0 - \theta'^2_h = 4 \frac{g}{l} \quad \text{ou} \quad \theta'^2_0 - \theta'^2_h = 4 \omega^2$$

Cela impose  $\theta'^2_0 > 4 \omega^2$ , soit  $\theta'_0 > 2\omega$ .

2) Quelle doit être la vitesse angulaire initiale  $\theta'_0$  pour que la tension exercée sur la tige soit toujours positive ? Autrement dit, on pourrait alors remplacer la tige rigide par un fil inextensible, avec le pendule fonctionnant un peu comme une fronde.

On a vu que l'amplitude de la force de tension était  $T = m l \theta'^2 + m g \cos \theta$ . Sa valeur minimale  $T_{\min}$  est obtenue au point haut ( $\theta = \pi$ ), soit  $T_{\min} = m l \theta'^2_h - m g$ . On a vu au 1° que  $\theta'^2_0 - \theta'^2_h = 4 \omega^2$ , d'où

$$T_{\min} = m l (\theta'^2_0 - 4 \omega^2) - m g$$

On veut que  $T_{\min} > 0$ , d'où

$$l (\theta'^2_0 - 4 \omega^2) > g \quad \text{ou} \quad \theta'^2_0 - 4 \omega^2 > \omega^2$$

$$\theta'^2_0 > 5 \omega^2 \quad \text{ou} \quad \theta'_0 > \omega \sqrt{5}$$

## 9.2. Repère polaire

A partir d'un point origine  $O$  et d'un axe  $Ox$  donnés, la position d'un point  $M$  quelconque est parfaitement déterminée par la distance  $r = OM$  et l'angle  $\theta = (\mathbf{Ox}, \mathbf{OM})$ ,  $\mathbf{Ox}$  désignant un vecteur porté par  $(Ox)$  et de sens positif. Prenons comme repère mobile d'origine  $M$  le vecteur unité  $\mathbf{R}$  porté par  $(OM)$  et dirigé dans le sens de  $O$  vers  $M$ , et le vecteur unité  $\mathbf{S}$  se déduisant de  $\mathbf{R}$  par la rotation d'angle  $\pi/2$  (figure 32). Le vecteur vitesse est tel que :

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{OM}}{dt} = \frac{d(r\mathbf{R})}{dt} = \frac{dr}{dt} \mathbf{R} + r \frac{d\mathbf{R}}{dt}, \quad \text{avec} \quad \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \theta' \mathbf{S}.$$

$$\mathbf{V} = r' \mathbf{R} + r \theta' \mathbf{S}$$

Dérivons pour avoir le vecteur accélération :

$$\mathbf{A} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = r''\mathbf{R} + r'\frac{d\mathbf{R}}{dt} + (r'\theta' + r\theta'')\mathbf{S} + r\theta'\frac{d\mathbf{S}}{dt}, \text{ avec } \frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{d\mathbf{S}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\theta'\mathbf{R}$$

$$\mathbf{A} = (r'' - r\theta'^2)\mathbf{R} + (2r'\theta' + r\theta'')\mathbf{S}$$

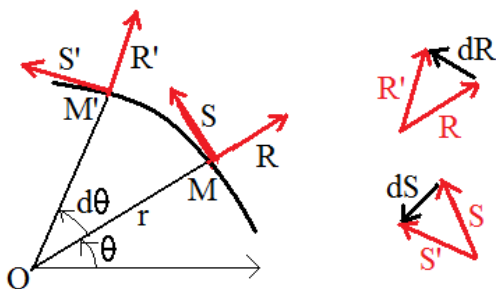


Figure 32 : Le repère polaire en M et en M' proche de M, avec les variations de  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{S}$ .

### Exemple 2 : Pendule avec ressort

La tige  $[OM]$  du pendule est maintenant remplacée par un ressort de raideur  $k$ . La longueur  $l = OM$  est variable. Les forces agissantes sont le poids  $\mathbf{P}$  et la force de rappel exercée par le ressort, portée par le vecteur unitaire radial  $\mathbf{R}$  et d'amplitude  $-k(l - l_e)$  comme on l'a vu au *paragraphe 6.2.* (figure 33). En appliquant la formule donnant l'accélération en polaires, la loi fondamentale de la dynamique donne :

$$m\mathbf{A} = \mathbf{P} - k(l - l_e)\mathbf{R}$$

$$m((l'' - l\theta'^2)\mathbf{R} + (2l'\theta' + l\theta'')\mathbf{S}) = (mg \cos \theta - k(l - l_e))\mathbf{R} - mg \sin \theta \mathbf{S}$$

$$\begin{cases} m(l'' - l\theta'^2) = mg \cos \theta - k(l - l_e) \\ 2l'\theta' + l\theta'' = -g \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} l'' = g \cos \theta - \frac{k}{m}(l - l_e) + l\theta'^2 \\ \theta'' = -\frac{g}{l} \sin \theta - \frac{2l'}{l} \theta' \end{cases}$$

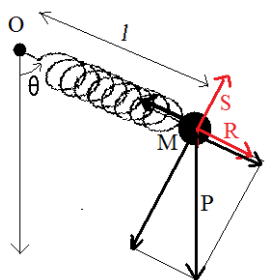


Figure 33 : Pendule à ressort et son repère polaire  $M$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{S}$ .

Passons au programme qui montre le mouvement du pendule à ressort, partant de sa position à la verticale à l'équilibre  $l_e$ , et lancé avec une vitesse initiale horizontale  $thp$ . Un mouvement assez désordonné s'ensuit (figure 33).

```
zoom=100.; m=0.2; g=0.098; k=0.1; dt=0.001;
le=1.; l=le; lp=0.;
th=0.; thp=0.7;
for(compteur=0;compteur<700;compteur++)
{ filldisc(xorig+zoom*l*sin(th),yorig+zoom*l*cos(th),5,black);
  line(xorig,yorig,xorig+zoom*l*sin(th),yorig+zoom*l*cos(th),black);
  ls=l*thp*thp+g*cos(th)-k/m*(l-le);
  ths=-g*sin(th)/l-2.*lp*thp/l; th+=thp*dt+0.5*ths*dt*dt; thp+=ths*dt;
```

```

l+=lp*dt+0.5*ls*dt*dt; lp+=ls*dt;
if (compteur%10==0) {SDL_Flip(screen);SDL_FillRect(screen,0,white);}
}

```

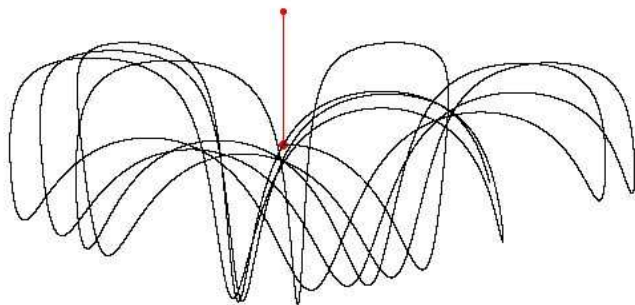


Figure 33 : Trajectoire de la masse du pendule avec en rouge la position initiale du pendule.

Nous étions partis du pendule simple avec ses petites oscillations parfaitement connues. Puis nous sommes passés au pendule réel, avec ses oscillations quelconques et l'intervention de forces de frottement, où l'aspect qualitatif des méthodes de résolution des équations a dû relayer la théorie pure. Ce n'est qu'avec les couplages d'oscillateurs que des phénomènes d'apparence désordonnée sont apparus. Nous allons développer cet aspect dans le chapitre suivant.