

V. Equations différentielles et évolution de populations

L'équation différentielle $x' = kx$ est une généralisation de l'équation $x' = x$ que nous avons traitée dans le chapitre précédent. Cette équation est censée modéliser l'évolution exponentielle d'une population comptant x individus, avec x fonction du temps t , lorsque sa vitesse de reproduction est proportionnelle à x , le coefficient de proportionnalité étant justement le nombre positif k .¹ En effet, si l'on rajoute comme condition initiale qu'à l'instant $t = 0$ la population compte x_0 individus, la résolution de l'équation conduit à l'exponentielle $x = x_0 e^{kt}$ (figure 1). Mais cette croissance exponentielle, correspondant au modèle défini par Malthus, n'est pas adaptée sur le long terme où des phénomènes de régulation se produisent.

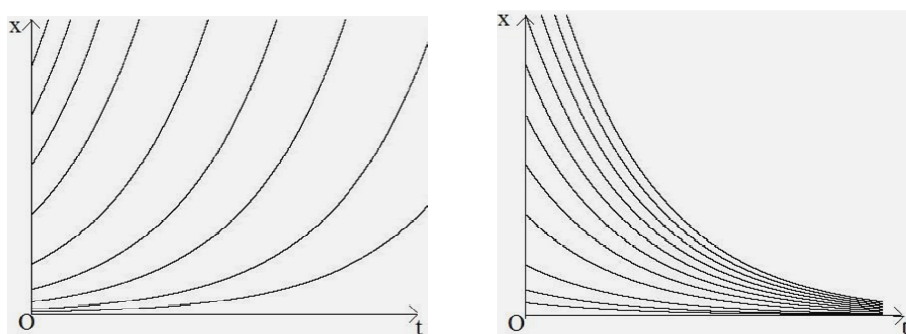


Figure 1 : Ecoulement de l'équation $x' = kx$ pour $k > 0$ à gauche et pour $k < 0$ à droite, dans le repère (t, x) avec $t \geq 0$ et $x > 0$.

1. L'équation différentielle logistique

Vers 1845, F. Verhulst propose un modèle de croissance où il ajoute un frein à l'évolution exponentielle. Il attribue le nom de « logistique » à son équation qui s'écrit :

$$x' = kx - kx^2 \text{ ou } x' = kx(1 - x)$$

Il s'agit simplement d'ajouter au terme en x du premier degré un terme x^2 du second degré, ce dernier étant pris négatif pour freiner la croissance de la population. Plus concrètement x^2 est approximativement le nombre possible de rencontres deux à deux entre les individus, ces couplages pouvant correspondre à une compétition pour la nourriture, ou à une propagation d'épidémies, ou à des guerres ...

Sans résoudre l'équation, on voit que pour $x = 0$ ou pour $x = 1$, la vitesse d'évolution est nulle, et la population reste constante. D'autre part, pour x inférieur à 1, la vitesse est positive et la population augmente, et pour x supérieur à 1 la population tend à diminuer. Cela se confirme si l'on dessine les courbes d'évolution dans le repère (t, x) (figure 2). Le tracé du champ des vecteurs vitesse $(1, x')$ tangent aux trajectoires indique aussi qu'en projetant ces vitesses sur l'axe vertical (Ox) le point $x = 0$ est un point fixe instable, puisque toute valeur $x > 0$, si proche de 0 soit-elle, tend à provoquer une

¹ Si l'on prend k négatif, l'équation différentielle modélise au contraire une population en cours d'extinction (figure 1 à droite). Signalons aussi que dans un contexte complètement différent, cette équation avec k négatif décrit la désintégration radioactive de l'uranium 238.

augmentation de la population, tandis que le point $x = 1$ est stable, puisque toute valeur voisine tend à rapprocher la population de cette valeur limite ².

Exercice 1

Résoudre théoriquement l'équation $x' = kx(1-x)$ par séparation des variables, en utilisant le fait que :

$$\frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$$

Avec $x' = dx/dt$, l'équation s'écrit :

$$\frac{dx}{x(1-x)} = k dt \quad (\text{avec } x \text{ différent de } 0 \text{ et } 1) \quad \text{ou} \quad dx\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) = k dt$$

$$\ln x - \ln(1-x) = kt + K$$

$$\ln \frac{x}{1-x} = kt + K$$

$$\frac{x}{1-x} = e^{kt} e^K$$

$$x(1 + e^K e^{kt}) = e^K e^{kt}$$

$$x(e^{-K} e^{-kt} + 1) = 1$$

$$x = \frac{1}{1 + e^{-K} e^{-kt}}$$

Avec la condition initiale $x = x_0$ pour $t = 0$, la constante K est telle que $x_0 = 1 / (1 + e^{-K})$, ou $e^{-K} = (1 - x_0) / x_0$. Finalement :

$$x = \frac{1}{1 + \frac{1-x_0}{x_0} e^{-kt}}$$

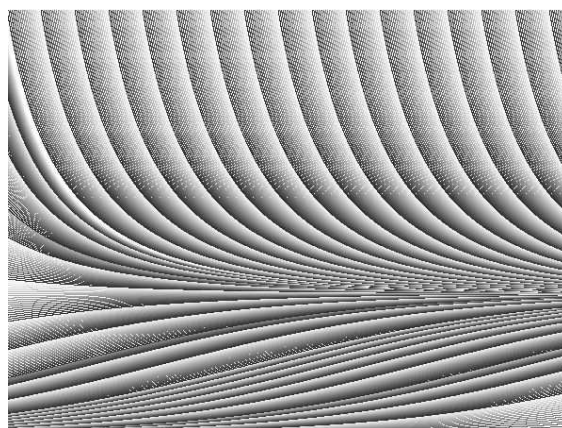
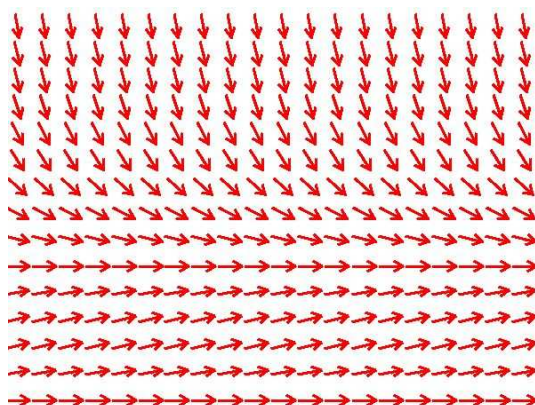


Figure 2 : Champ de vitesses et trajectoires de l'équation logistique dans le repère (t, x) .

Nous allons maintenant faire intervenir deux types de populations qui inter-agissent l'une avec l'autre.

² Le programme donnant le champ de vitesses et les trajectoires est analogue à celui utilisé dans le chapitre précédent pour traiter l'équation différentielle $x' = x$. Pour les trajectoires il suffit d'utiliser la méthode d'Euler.

2. Le modèle proies-prédateurs

Considérons deux populations dont les nombres d'individus sont x et y , qui varient dans le temps. Chacune de ces populations auraient une évolution de type exponentiel si elles vivaient indépendamment l'une de l'autre. Plus précisément, la population x , qui va être celle des proies, obéit à la loi $x' = ax$, avec un taux d'accroissement positif a , car elle dispose d'une nourriture à profusion, végétale par exemple, tandis que la population y , qui est celle des prédateurs, obéit à la loi $y' = -b y$, avec $-b$ négatif, car sans proies pour se nourrir, elle tend à décroître et disparaître.

Couplons maintenant ces deux populations, en constatant que le nombre de couples proies-prédateurs est $x y$, puisque chaque proie peut être couplée aux y prédateurs, et que les proies sont au nombre de x . La population des proies va subir un frein dans son essor puisqu'elle est mangée par les prédateurs, et celle des prédateurs va au contraire se développer lorsqu'elle a l'occasion de manger les proies. On aboutit à un système de deux équations différentielles :

$$\begin{cases} x' = ax - cxy \\ y' = -by + cxy \end{cases} \text{ en prenant pour simplifier le même coefficient de couplage } c.$$

Les proies en nombre x auraient une croissance exponentielle (terme ax) si elles ne subissaient l'attaque des prédateurs, le terme $-cxy$ provoquant leur baisse en nombre. De leur côté, les prédateurs au nombre de y seraient amenés à disparaître (terme $-by$) s'ils ne pouvaient pas se nourrir, mais le fait de manger les proies leur permet de se multiplier (terme cxy).³ C'est ce modèle proies-prédateurs qu'ont proposé vers 1925 A. Lotka et V. Volterra. Il a l'avantage d'être simple, tout en donnant des résultats qui ont été corroborés sur le terrain dans de nombreux cas concrets.

Exercice 2

1) Faire le programme donnant l'évolution des deux populations dans le temps. Que constate-t-on ?

Il suffit d'appliquer la méthode d'Euler. On constate une évolution périodique des deux populations, avec un décalage de phase entre elles (figure 3).

On se donne les coefficients a, b, c .

```
x0=2.;y0=1.; /* conditions initiales au temps t = 0 */
x=x0; y=y0;t=0.; dt=0.00005;
for(i=0;i<1000000;i++)
{ circle(torig+zoomt*t,yorig-zoomxy*x,1,black);
  circle(torig+zoomt*t,yorig-zoomxy*y,1,red);
  vx=a*x-c*x*y; vy=-b*y+c*x*y;
  x+=vx*dt; y+=vy*dt;
  t+=dt;
}
```

³ Par changement de variables, en posant $X = (c/b)x$ et $Y = (c/a)y$, on trouve les équations normalisées :

$$\begin{cases} X' = aX(1-Y) \\ Y' = -bY(1-X) \end{cases}$$

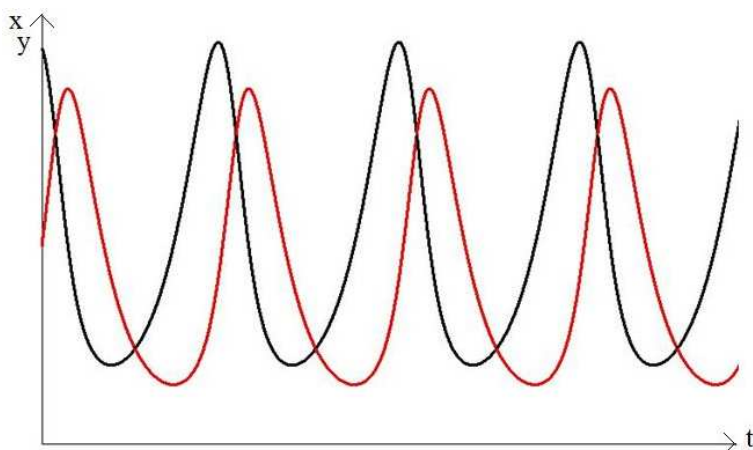


Figure 3 : Evolution des x proies (courbe noire) et des y prédateurs (courbe rouge), en fonction de temps t . Les paramètres choisis ici sont $a = 0,5$, $b = 0,6$ et $c = 0,6$.

2) Se placer dans l'espace de configuration (x, y) et faire le programme donnant les champ de vitesses et les trajectoires.

Pour les trajectoires, on trouve des courbes fermées formant des ovales autour d'un point fixe. Pour s'assurer que les courbes se referment bien sur elles-mêmes, on a intérêt à utiliser la méthode d'Euler améliorée (figure 4). Si l'on utilise la méthode d'Euler classique, il conviendrait de choisir un intervalle de temps dt très petit, sinon on obtiendrait des spirales au lieu de courbes fermées. Cette évolution d'apparence périodique confirme les résultats obtenus au 1°.

Programme donnant les trajectoires par la méthode d'Euler améliorée :

```
dt=0.005; y0=a/c;
for(x0=0.2;x0<0.95;x0+=0.1)
{ x=x0; y=y0; filldisc(xorig+zoom*x0, yorig-zoom*y0,2,black);
  for(i=0;i<100000;i++)
  { vx=a*x-c*x*y; vy=-b*y+c*x*y;
    xeuler=x+vx*dt; yeuler=y+vy*dt;
    nvx=a*xeuler-c*xeuler*yeuler; nvy=-b*yeuler+c*xeuler*yeuler;
    x+=0.5*(vx+nvx)*dt; y+=0.5*(vy+nvy)*dt;
    circle(xorig+zoom*x,yorig-zoom*y,1,black);
  }
}
```

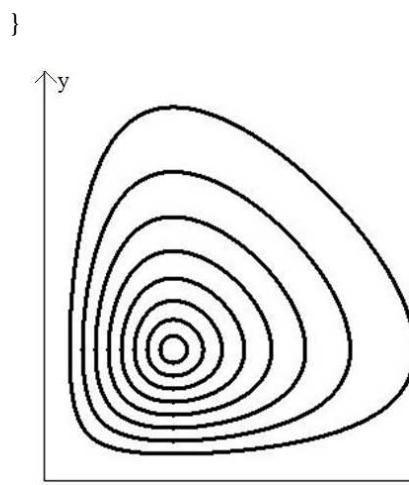
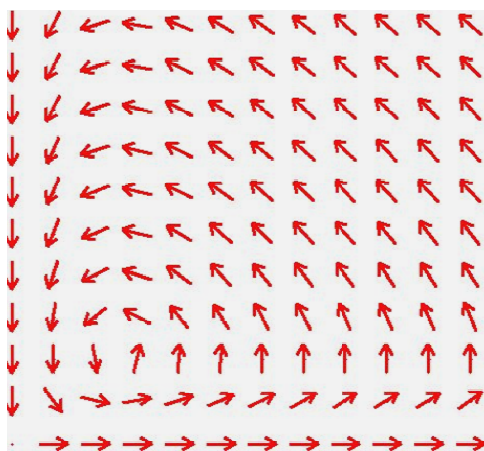


Figure 4 : A gauche le champ de vitesses, à droite les trajectoires, dans l'espace de configuration (x, y) .

Le traitement sur ordinateur ne suffit pas pour nous assurer que les trajectoires sont vraiment des courbes fermées. Au cours d'un intervalle de temps suffisamment long, on pourrait finir par avoir des courbes en spirales convergeant vers un point fixe, voire même convergeant vers un cycle limite. Seule la résolution théorique du système différentiel permettra de conclure.

Commençons par déterminer les points fixes dans l'espace de configuration. Cela revient à faire : $x' = 0$ et $y' = 0$. On trouve : $x(a - cy) = 0$ et $y(-b + cx) = 0$, ce qui donne deux points fixes : $(x = 0, y = 0)$ et $(x = b/c, y = a/c)$. C'est ce deuxième point qui est intéressant, car les trajectoires semblent tourner autour de lui.⁴

Maintenant résolvons les équations différentielles par séparation des variables, en utilisant pour simplifier leur forme normalisée (cf. note 3), soit $\begin{cases} X' = aX(1-Y) \\ Y' = -bY(1-X) \end{cases}$, le point fixe $(b/c, a/c)$ étant alors $(1, 1)$.

Par division, il reste $\frac{dY}{dX} = \frac{-bY(1-X)}{aX(1-Y)}$

$$a \frac{1-Y}{Y} dY = -b \frac{1-X}{X} dX$$

$$a(\ln Y - Y) = -b(\ln X - X) + K$$

$$a(\ln Y - Y) + b(\ln X - X) = K$$

Pour K donné, cette relation entre X et Y est l'équation d'une trajectoire.

Prenons maintenant la surface d'équation $Z = a(\ln Y - Y) + b(\ln X - X)$ en trois dimensions. Le fait de la couper par des plans horizontaux $Z = K$ redonne les trajectoires dans l'espace de configuration. Vérifions que cette surface a la forme d'une cuvette. En effet, si on la coupe par le plan vertical d'équation $Y = 1$, on obtient la courbe d'équation $Z = -a + b(\ln X - X)$, et l'on vérifie aisément que cette courbe a la forme d'une cuvette avec un minimum en $X = 1$. Et si l'on coupe la surface par le plan vertical d'équation $X = 1$, on obtient la courbe d'équation $Z = -b + a(\ln Y - Y)$, qui a aussi la forme d'une cuvette avec un minimum en $Y = 1$. Le point $(1, 1)$ étant un minimum pour la surface, on peut en déduire que la surface a bien une forme de cuvette. Lorsqu'on la coupe par des plans horizontaux, on trouve des courbes fermées, et l'on a vu que celles-ci sont justement les trajectoires. Cette variation périodique décalée des populations de proies et de prédateurs est le principal résultat du modèle de Lotka-Volterra⁵.

Maintenant que nous savons que les deux populations évoluent avec la même période T , nous pouvons déterminer les populations moyennes X_m et Y_m des proies et des prédateurs. Reprenons les équations différentielles :

$$\begin{cases} x' = ax - cxy \\ y' = -by + cxy \end{cases} \quad \text{ou encore :} \quad \begin{cases} \frac{x'}{x} = a - cy \\ \frac{y'}{y} = -b + cx \end{cases}$$

⁴ En posant $x_0 = b/c$, $y_0 = a/c$, la linéarisation des équations au voisinage de ce point donne la matrice jacobienne $\begin{pmatrix} a - cy_0 & -cx_0 \\ cy_0 & -b + cx_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ a & 0 \end{pmatrix}$. Ses valeurs propres λ vérifient $\lambda^2 + ab = 0$, soit $\lambda = \pm i\sqrt{ab}$. Comme les valeurs propres sont imaginaires et opposées, le point fixe est un centre.

⁵ Les deux populations ont une évolution de même période T . Toutefois, avec les coefficients a, b, c, d donnés, la période T change lorsque l'on modifie les conditions initiales. Autrement dit, les cycles de trajectoires de la figure 4 à droite ne font pas un tour complet dans le même temps, comme on peut le vérifier expérimentalement. La période est d'autant plus petite que l'on est près du centre.

et procédons à leur intégration par rapport au temps sur une longueur de période, soit de t_0 à $t_0 + T$.

$$\begin{cases} \ln(x_{t_0+T}) - \ln x_{t_0} = aT - c \int_{t_0}^{t_0+T} y \, dt \\ \ln(y_{t_0+T}) - \ln y_{t_0} = -bT + c \int_{t_0}^{t_0+T} x \, dt \\ 0 = aT - cT Y_m \\ 0 = -bT + cT X_m \end{cases}$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{cases} X_m = b / c \\ Y_m = a / c \end{cases} \text{ et l'on retrouve les coordonnées du point fixe central.}$$

Cela va nous conduire à un autre résultat intéressant du modèle de Lotka-Volterra.

Proies et prédateurs soumis à des prélèvements dus à la pêche

La pêche va provoquer une diminution des populations proportionnelle à leur nombre respectif, ce qui nous amène à un nouveau système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} x' = ax - cxy - ex \\ y' = -by + cxy - ey \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x' = (a-e)x - cxy \\ y' = -(b+e)y + cxy \end{cases}$$

où nous avons supposé que le coefficient e de prélèvement est le même pour les proies et les prédateurs, ce qui ne va pas modifier le résultat. On en déduit que les populations moyennes des proies et des prédateurs deviennent :

$$\begin{cases} X_m = (b+e) / c \\ Y_m = (a-e) / c \end{cases}$$

Ainsi, par rapport au système proies-prédateurs sans prélèvements, la pêche provoque une augmentation de la population moyenne des proies et une diminution de celle des prédateurs. La pêche profite aux proies au détriment des prédateurs. Ce résultat surprenant a été vérifié sur des zones de pêche, et sa vérification expérimentale sur ordinateur est donnée sur la *figure 5*.

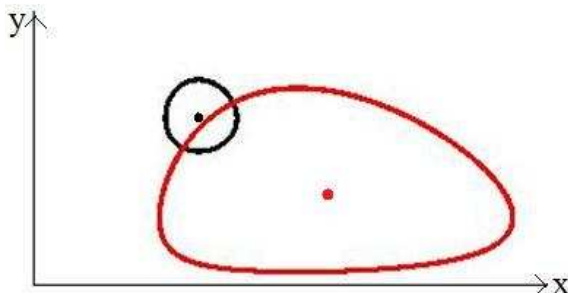


Figure 5 : En noir, une trajectoire du système proies-prédateurs sans prélèvements, en rouge une trajectoire du système avec prélèvements. On constate que le centre s'est déplacé vers la droite et vers le bas, d'où l'augmentation du nombre moyen des proies et la diminution de celui des prédateurs.

3. Populations en compétition

Voici un autre modèle classique de couplage entre deux populations 1 et 2, en nombre respectif x et y qui sont fonctions du temps, vérifiant le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = a x(1-x) - b x y \\ y' = c y(1-y) - d x y \end{cases} \text{ où } a, b, c, d \text{ sont des nombres donnés positifs.}$$

Ici les deux termes de couplage ($-b x y$ et $-d x y$) sont négatifs. Cela signifie que les deux populations sont en compétition, pour la nourriture par exemple, et qu'elles se battent pour l'obtenir, le terme $x y$ étant le nombre de couplages possibles entre les deux populations. Les autres termes, à savoir $a x (1-x)$ et $c y (1-y)$ correspondent à une évolution autonome de chaque population, correspondant à celle de l'équation logistique vue précédemment. Rappelons que chaque population converge alors vers la valeur limite 1.

Plaçons-nous dans l'espace de configuration (x, y) où les vecteurs vitesse $\mathbf{V}(x', y')$ en chaque point (x, y) vont donner une indication sur la forme des trajectoires, puisque celles-ci sont tangentes à ces vecteurs vitesse.

Commençons par chercher les points $M(x, y)$ tels que $x' = 0$, ce qui correspond à des vecteurs vitesse verticaux. L'équation $a x(1-x) - b x y = 0$ donne $x = 0$ ou $a(1-x) - b y = 0$. On obtient la demi-droite (Oy) ou le segment D d'équation $y = (-a/b)x + a/b$ d'extrémités $(1, 0)$ et $(0, a/b)$ car on est dans le quart de plan où x et y sont tous deux positifs ou nuls. On constate aussi que pour tout point $M(x, y)$ situé au-dessus du segment D , on a $y > (-a/b)x + a/b$, soit $a(1-x) - b y < 0$, $x' < 0$. Ainsi x' est négatif au-dessus de D et positif au-dessous (*figure 6 à gauche*).

Cherchons maintenant les points (x, y) tels que $y' = 0$, où les vecteurs vitesse sont horizontaux. L'équation $c y(1-y) - d x y = 0$ donne la demi-droite (Ox) ou le segment D' d'équation $y = (-d/c)x + 1$, d'extrémités $(c/d, 0)$ et $(0, 1)$. On vérifie aussi que y' est négatif au-dessous du segment D' et positif au-dessus (*figure 6 à droite*).

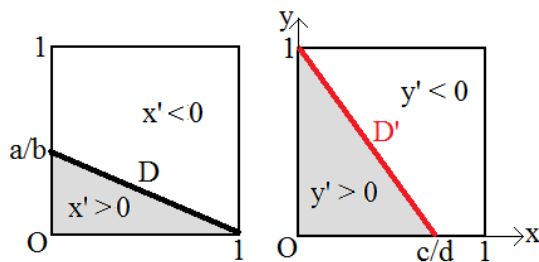


Figure 6 : Les segments D et D' dans le plan de configuration (x, y) , et les signes de x' et y' .

De ce qui précède on déduit les points fixes, vérifiant à la fois $x' = 0$ et $y' = 0$. On trouve les points $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ et un quatrième point à l'intersection des segments D et D' , du moins si ceux-ci se coupent. Comme l'on connaît aussi les signes de x' et y' selon la position des points $M(x, y)$, on peut avoir des indications sur l'allure des trajectoires dans le plan de configuration (x, y) , ainsi que sur la nature des points fixes. Plusieurs cas se présentent :

- $a/b < 1$ et $c/d < 1$. Les deux segments D et D' se coupent, et les résultats précédemment obtenus indiquent que selon les conditions initiales, les trajectoires convergent soit vers le point $(1, 0)$ soit vers le point $(0, 1)$ (*figure 7*). D'après la forme des trajectoires, le point O est une source, les points $(1, 0)$ et $(0, 1)$ sont des puits, et le point d'intersection de D et D' ⁶ est un point hyperbolique

⁶ Les coordonnées de ce point sont $x_f = (b-a)c / (bd-ac)$ et $y_f = (-a/b)x_f + a/b$.

instable. Ces résultats se confirment expérimentalement (*figure 8*). Ainsi, selon les conditions initiales, l'une des deux populations va disparaître, et l'autre atteindre sa valeur limite 1.

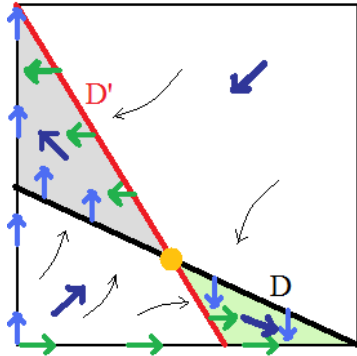


Figure 7 : Les trajectoires sont piégées soit dans la zone verte pour converger vers le point $(1, 0)$, soit dans la zone grise pour converger vers le point $(0, 1)$.

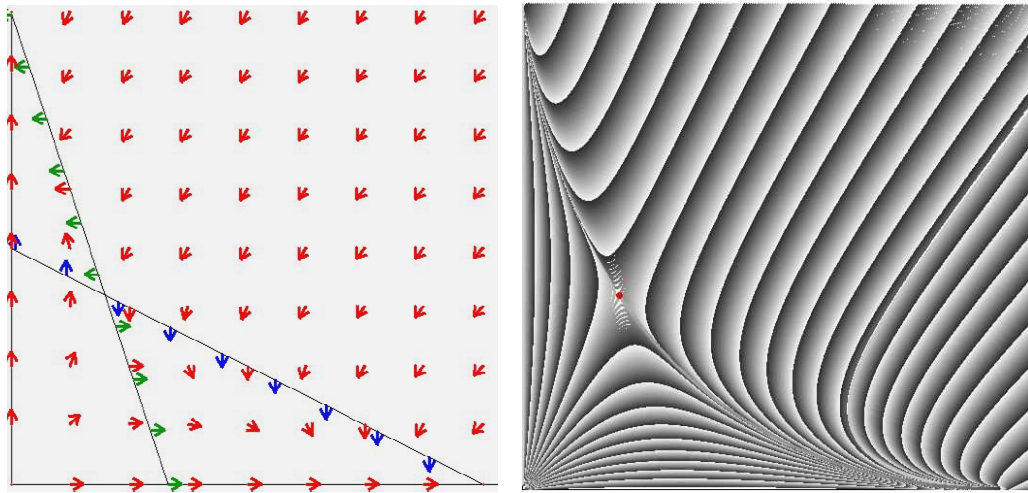


Figure 8 : Champ de vitesses et trajectoires dans le plan de configuration (x, y) pour $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$, $d = 3$.

- $a / b > 1$ et $c / d > 1$. Les segments D et D' se coupent, mais dans le cas présent, les trajectoires convergent toutes vers le point d'intersection de D et D' (*figure 9*). Les trois autres points fixes sont instables et repousseurs. Ce qui est confirmé expérimentalement (*figure 10*). Les deux populations atteignent un équilibre sans disparaître ni l'une ni l'autre.

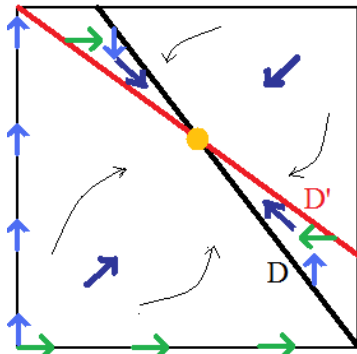


Figure 9 : Les trajectoires convergent vers le point d'intersection de D et D' .

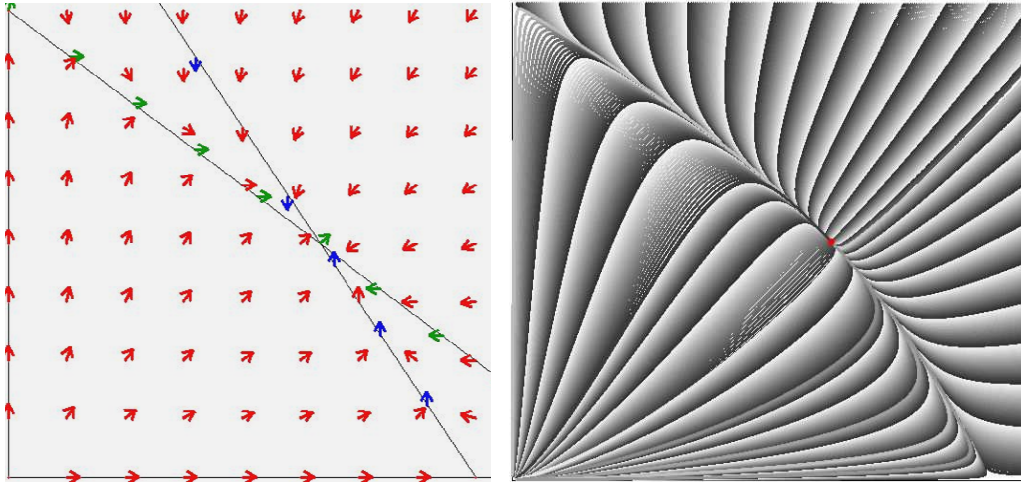


Figure 10 : Champ de vitesses et trajectoires dans le plan de configuration (x, y) pour $a = 3, b = 2, c = 4, d = 3$.

- $a / b > 1$ et $c / d < 1$. Les segments D et D' ne se coupent pas. Le dessin de quelques vecteurs vitesse indique que toutes les trajectoires convergent vers le point $(1, 0)$, ce qui signifie que la population 2 tend à disparaître, tandis que la population 1 atteint sa valeur limite 1 (figure 11). Ce résultat se retrouve expérimentalement (figure 12).

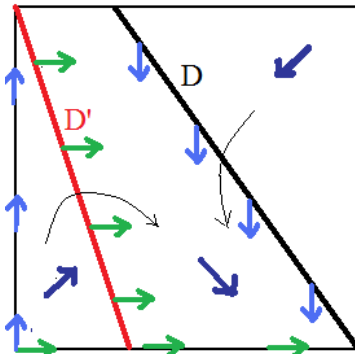


Figure 11 : Les trajectoires convergent vers le point $(1, 0)$.

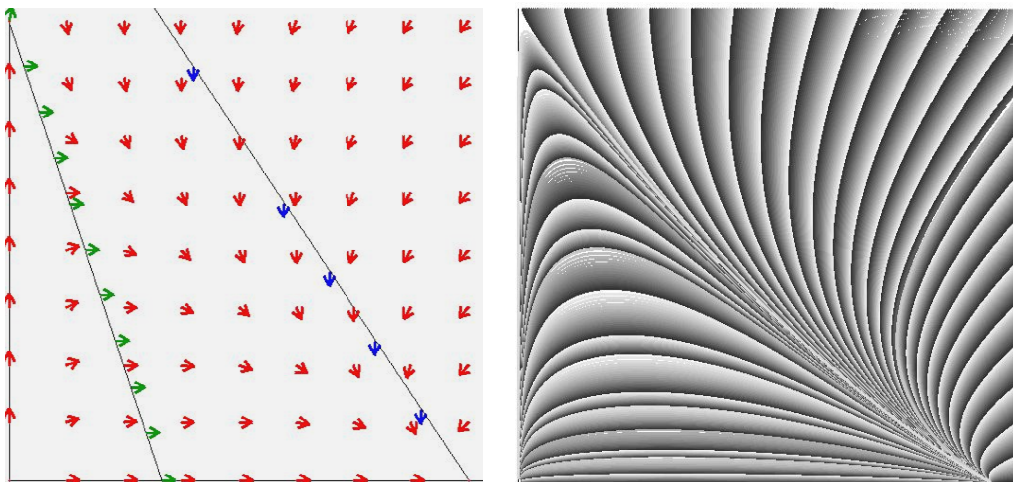


Figure 12 : Champ de vitesses et trajectoires dans le plan de configuration (x, y) pour $a = 3, b = 2, c = 1, d = 3$.

- $a/b < 1$ et $c/d > 1$. Les segments D et D' ne se coupent pas. Par rapport au cas précédent, cela revient à intervertir les deux populations 1 et 2. Les trajectoires convergent toutes vers le point $(0, 1)$, et la population 1 tend à disparaître, tandis que l'autre atteint son équilibre à 1.

Les autres cas limites où $a/b = 1$ ou $c/d = 1$ s'intègrent aux cas précédents, notamment lorsque les segments D et D' sont parallèles. Le seul cas spécial qui subsiste est celui où les deux segments sont confondus, ce qui fait l'objet de l'exercice suivant.

Exercice 3

Traiter le cas spécial où les deux segments D et D' sont confondus.

Ce cas se présente lorsque $a/b = 1$ et $c/d = 1$, soit $a = b$ et $c = d$. Il existe alors une infinité de points fixes, à savoir tous les points du segment D . Et le système différentiel devient :

$$\begin{cases} x' = a x ((1-x) - y) \\ y' = c y ((1-y) - x) \end{cases}$$

Réolvons ce système dans l'espace de configuration (x, y) :

$$\frac{y'}{x'} = \frac{c}{a} \frac{y}{x} \text{ avec } y' = dy/dt \text{ et } x' = dx/dt.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c}{a} \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{c}{a} \frac{dx}{x} \quad (x > 0 \text{ et } y > 0)$$

$\ln y = (c/a) \ln x + \text{cte}$, qui peut aussi s'écrire $\ln y = (c/a) \ln x + \ln K$, avec $K > 0$.

$$\ln y = \ln K x^{c/a}$$

$$y = K x^{c/a}.$$

Il s'agit de l'équation des trajectoires dans l'espace de configuration (x, y) . Notamment pour $c = a$, il s'agit de trajectoires rectilignes. Pour $c = 2a$, on obtient des trajectoires paraboliques, comme on le vérifie expérimentalement (*figure 13*).

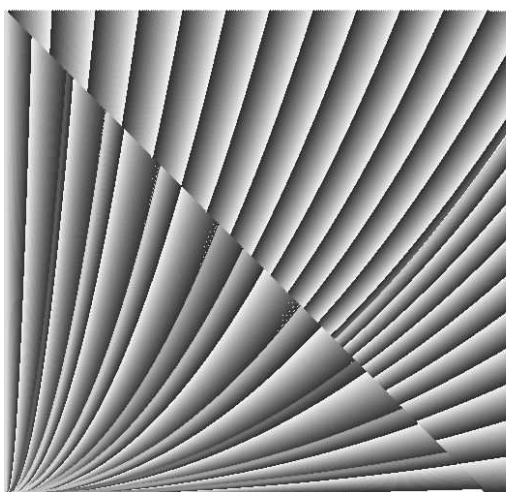


Figure 13 : Trajectoires dans l'espace de configuration (x, y) pour $a = b = 1$ et $c = d = 2$.

Sur la *figure 14*, nous avons pris un cas voisin, où $a = 1,1$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 2,2$, où les segments D et D' sont parallèles non confondus mais proches, avec une convergence vers le point fixe $(1, 0)$. Cela permet de voir comment l'on passe de ce cas au cas limite où les segments sont confondus.

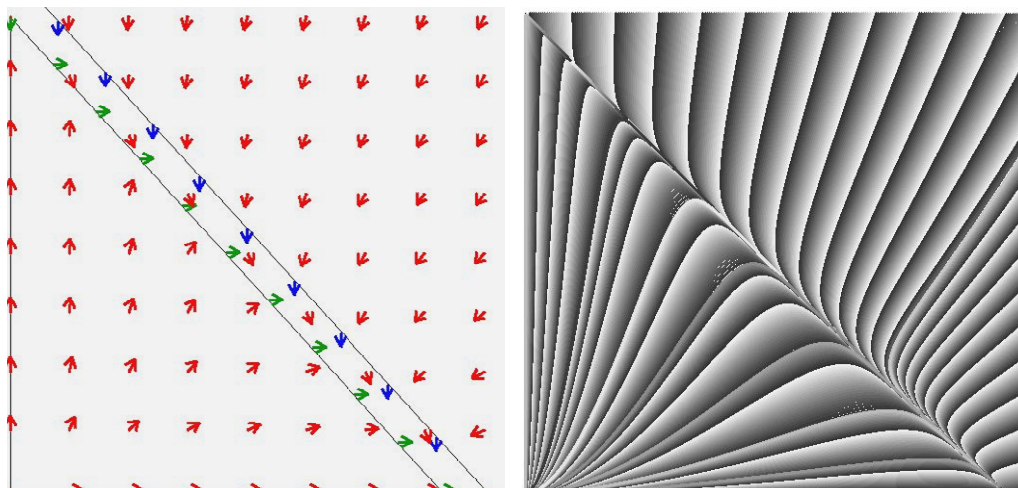


Figure 14 : Cas où les segments D et D' sont parallèles mais proches l'un de l'autre.

Exercice 4

Prendre le cas où $a = 5$, $b = 7$, $c = 3$, $d = 5$.

1) Déterminer les équations des segments D et D' , et en déduire les coordonnées du point fixe A à leur intersection.

On est dans le cas où $a/b < 1$ et $c/d < 1$, où l'on a vu que D et D' se coupent. Les équations associées à D et D' sont : $y = -(5/7)x + 5/7$ et $y = -(5/3)x + 1$. Les coordonnées de $A(x_f, y_f)$ vérifient ces deux équations, d'où l'équation donnant x_f : $-(5/7)x_f + 5/7 = -(5/3)x_f + 1$. On trouve $x_f = 0,3$, et l'on en déduit $y_f = 0,5$.

2) Montrer que ce point fixe A est un point hyperbolique (une selle), en linéarisant le système différentiel au voisinage de ce point. Déterminer les vecteurs propres en ce point.

Les dérivées partielles par rapport à x et y donnent comme matrice jacobienne :

$$\begin{pmatrix} a - 2ax - by & -bx \\ -dy & c - 2cy - dx \end{pmatrix}$$

En utilisant les valeurs des coefficients a , b , c , d , et en se plaçant au point fixe A , la matrice devient :

$$\begin{pmatrix} -1,5 & -2,1 \\ -2,5 & -1,5 \end{pmatrix}, \text{ ce qui correspond à la linéarisation du système différentiel au voisinage de } A.$$

Les valeurs propres λ vérifient $\begin{vmatrix} -1,5 - \lambda & -2,1 \\ -2,5 & -1,5 - \lambda \end{vmatrix} = 0$, soit $\lambda^2 + 3\lambda - 3 = 0$. On trouve :

$$\lambda = -1,5 \pm 0,5\sqrt{21}.$$

Les deux valeurs propres sont réelles et de signe contraire, ce qui prouve que le point fixe A est une selle. Les vecteurs propres (X, Y) associés sont tels que :

$$\begin{pmatrix} -1,5-\lambda & -2,1 \\ -2,5 & -1,5-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 0$$
 pour chacune des valeurs propres λ . On trouve comme pente des deux vecteurs propres $\pm \frac{5}{\sqrt{21}}$.

3) Montrer que les points fixes $(1, 0)$ et $(0, 1)$ sont stables et attracteurs.

Reprenons la matrice jacobienne en se plaçant au point fixe $(1, 0)$:

$\begin{pmatrix} -5 & -7 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, de valeurs propres évidentes $\lambda = -5$ ou -2 . Celles-ci étant toutes deux réelles et négatives, le point fixe est asymptotiquement stable, et c'est un puits.

Plaçons-nous maintenant au point fixe $(0, 1)$, avec comme matrice jacobienne :

$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$ de valeurs propres $\lambda = -2$ ou -3 . Étant toutes deux négatives, ce point fixe est aussi un puits.

4) Déterminer par programme les bassins d'attraction de ces deux points.

```
dt=0.005;
for(xe=xorig;xe<xorig+zoom;xe++)
for(ye=yorig-zoom;ye<yorig;ye++) /* parcours du carré de côté 1, pixel par pixel */
{ x0=(xe-xorig)/zoom; y0=(yorig-ye)/zoom; /* point initial de la trajectoire, en mode calcul */
  x=x0;y=y0; /* (x, y) est le point courant d'une trajectoire */
  for(i=0;i<100000;i++) /* évolution dans le temps */
  { vx=a*x*(1.-x)-b*x*y; vy=c*y*(1.-y)-d*x*y;
    x+=vx*dt; y+=vy*dt;
    if (fabs(x)<0.05 && fabs(y-1.)<0.05) { putpixel(xe,ye,red); break; } /*test d'arrêt selon que l'on tombe
    if (fabs(x-1.)<0.05 && fabs(y)<0.05) { putpixel(xe,ye,green); break; } sur le point (0, 1) ou (1, 0)*/
  }
}
```

Les résultats de ce programme sont donnés sur la figure 15.

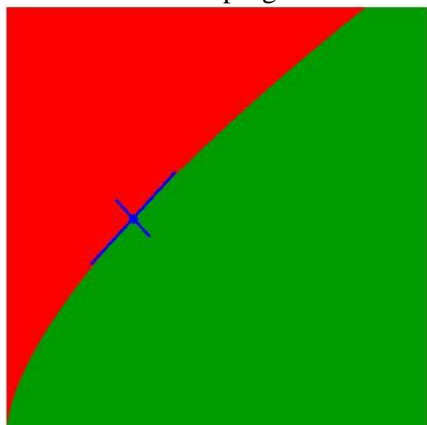


Figure 15 : Les deux bassins d'attraction, en rouge celui où les trajectoires aboutissent à $x = 0$, c'est-à-dire à la disparition de la population 1, en vert celui aboutissant à disparition de la population 2. En bleu le point hyperbolique et ses vecteurs propres.