

VIII. De deux à trois dimensions

Où en sommes-nous en matière d'équations différentielles ? Avec les couplages d'oscillateurs ainsi qu'avec les équations de Duffing et Ueda, nous avons observé des comportements chaotiques, et des attracteurs étranges en forme de bobine de fil emmêlée ou encore à structure fractale grâce aux sections de Poincaré. Cela était dû à la présence d'une force variant sinusoidalement dans le temps. Par contre, avec les équations différentielles autonomes, où la variable temps n'apparaissait pas explicitement, et que nous avons aussi rencontrées précédemment, nous n'avons assisté à aucune dérive chaotique de ce genre et les résultats obtenus à la limite étaient somme toute peu variés. Cette situation a son explication théorique, qui s'appelle le théorème de Poincaré-Bendixson.¹

1. Le théorème de Poincaré-Bendixson

Précisons d'abord que par équations différentielles autonomes, nous entendons précisément deux types d'équations :

- Les systèmes différentiels de deux équations du premier ordre, de la forme

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \quad \text{où les dérivées sont prises par rapport à la variable } t$$

- Une équation du second ordre de la forme $x'' + a(x) x' + b(x) x = 0$

En fait ces deux cas sont identiques, le deuxième se ramenant au premier en prenant $x' = v$, et $v' = -a(x) v + b(x) x$, qui est bien de la forme :

$$\begin{cases} x' = f(x, v) \\ v' = g(x, v) \end{cases} \quad \text{en se plaçant dans le plan de configuration } x, v.$$

Quels sont les seuls attracteurs de trajectoires que nous avons rencontrés ?

Soit nous avons trouvé une convergence vers un point fixe attracteur, aussi appelé puits, les trajectoires s'y rendant en ligne droite ou en spirale. Par contre, un point fixe qui est un centre (ou tourbillon), entouré par des trajectoires elliptiques tournant tout autour en empêchant tout rapprochement vers lui, n'est l'ensemble limite que d'une trajectoire, celle qui est issue de lui, et ce n'est pas un attracteur de trajectoires.

Soit nous avons assisté à une attraction des trajectoires vers un cycle limite, c'est-à-dire une courbe fermée ayant la forme simple d'un ovale, sur laquelle la trajectoire a un comportement périodique dans le temps, puisqu'elle repasse régulièrement en chaque point du cycle limite. Rappelons que nous avons assisté à ce phénomène pour la première fois avec les équations de Lotka-Volterra et le système proies-prédateurs.

¹ Théorème dû à H. Poincaré en 1881, dans son mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle, et complété par I. Bendixson en 1901.

Mais il existe un troisième cas, légèrement différent du précédent, qui fait l'objet de l'exercice suivant.

Exercice 1 : Mélange des équations de Duffing et Van der Pol, sans forçage périodique

Prendre comme équation différentielle $x'' + (0,4 - 0,5 x^2) x' - x + x^3 = 0$.² Programmer, et vérifier qu'à l'extérieur d'une certaine zone les trajectoires s'en vont à l'infini et qu'à l'intérieur de cette zone, les trajectoires ont tendance à venir se coller sur une courbe en forme de huit sans pour autant avoir un comportement périodique, tout point de cette courbe en huit ayant à son tour un attracteur point, l'origine.

Les résultats du programme confirment ce qui est annoncé (figure 1). Remarquons que pour tracer la courbe en forme de huit, il convient de prendre comme points de départ des points très proches de l'origine O , qui constitue le point de recoupement de cette courbe. On constate alors que tout point pris sur cette courbe, ou du moins le plus près possible, a une trajectoire qui tend à converger vers le point O , en un temps relativement long. Si l'on part d'un point extérieur à la courbe en huit, on vérifie que sa trajectoire a tendance à venir se coller sur la courbe en huit tout en tournant autour d'elle, mais cela se produit de plus en plus lentement, car le fait de se rapprocher du point O provoque un ralentissement. La courbe en huit ne joue pas au sens strict le rôle de cycle limite, qui suppose une périodicité du mouvement.

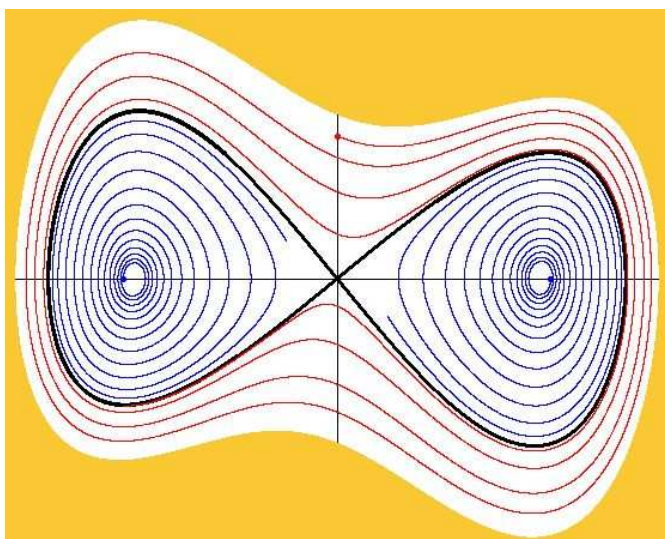


Figure 1 : En bleu, deux trajectoires partant de l'intérieur de la forme en huit, et qui viennent se coller sur elle, en rouge une trajectoire partant de l'extérieur et venant aussi se coller sur la forme en huit, en ocre, la zone où les trajectoires s'en vont à l'infini.

Ainsi il peut arriver que les trajectoires soient attirées vers une courbe qui se recoupe, une fois ou plusieurs fois, comme la courbe en forme de huit de l'exercice précédent. Celle-ci n'est pas un cycle limite car les trajectoires qui viennent se coller sur elle n'y ont pas un comportement périodique dans le temps. Cela est dû au fait que tout point de cette courbe elle-même a une trajectoire qui converge vers un point fixe attracteur situé sur elle, à savoir le point de recoupement de la courbe.

En fait, il n'existe pas d'autres cas que ceux-là, comme l'indique le théorème de Poincaré-Bendixson :

Considérons un système différentiel autonome en deux dimensions de la forme :

² Rappelons que l'équation de Van der Pol était de la forme $x'' - (e - x^2) x' + x = 0$. L'exercice 1 utilise bien un mélange de l'équation de Van der Pol et de celle de Duffing sans force sinusoïdale, à cause de la présence d'un terme en x^3 .

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}, \text{ les fonctions } f \text{ et } g \text{ étant supposées dérivables. Lorsque l'on prend la trajectoire d'un}$$

point dans le plan x, y , correspondant à une solution de ce système différentiel, on dit que celle-ci admet un ensemble limite formé de points, si chacun de ces points est approché de plus en plus près, et aussi près que l'on veut, par des points de la trajectoire à des instants précis. Alors, si la trajectoire est bornée, restant confinée dans une zone limitée, elle admet un ensemble limite qui est

- soit un point fixe (puits, centre),
- soit une orbite périodique (ovale autour d'un tourbillon, cycle limite),
- soit une courbe telle que tout point sur elle a une trajectoire dont l'ensemble limite est un point fixe.

En deux dimensions, les équations différentielles autonomes ne donnent comme attracteurs que des points ou des courbes fermées, et jamais d'*attracteurs étranges*. Pour obtenir de tels attracteurs, parfois à structure fractale, il faudra passer en trois dimensions, tout en ayant des termes non-linéaires. Mais en deux dimensions, malgré le nombre limité de cas limites, il est intéressant de voir comment passer d'un cas limite à un autre, ce que l'on appelle une bifurcation.

2. Bifurcation de Hopf³

Lorsque les équations différentielles dépendent d'un paramètre, il arrive que pour certaines valeurs particulières de ce paramètre il se produise un changement de nature des attracteurs des trajectoires. On dit alors qu'il y a bifurcation. Il existe plusieurs types de bifurcation, comme les exemples suivants le montrent.

Exercice 2 : Passage d'un point fixe à un cycle limite

On considère le système différentiel
$$\begin{cases} x' = a x - y - x(x^2 + y^2) \\ y' = x + a y - y(x^2 + y^2) \end{cases}.$$

On prendra des valeurs du paramètre a de part et d'autre de 0. Pour chaque valeur de a , tracer les trajectoires de quelques points dans le repère xOy . Que se passe-t-il quand le paramètre évolue? Quelle est la bifurcation, et quand a-t-elle lieu ?

Nous avons pris des valeurs du paramètre a comprises entre $-0,5$ et $0,5$. A chaque fois, nous avons choisi quelques trajectoires issues des points $(x_0, 0)$ avec x_0 compris entre $-0,8$ et $0,8$. On constate que pour les valeurs négatives de a les trajectoires convergent en spirale vers le point fixe origine O , mais d'autant plus lentement que a est proche de 0. La bifurcation se produit lorsque a change de signe. En effet, quand a devient positif, le point fixe laisse la place à un cercle limite de centre O , dont le rayon augmente lorsque a augmente (figure 2).

³ Aussi appelée bifurcation de Poincaré-Hopf-Andronov. Après H. Poincaré, le mathématicien allemand H. Hopf traita ce problème en 1925.

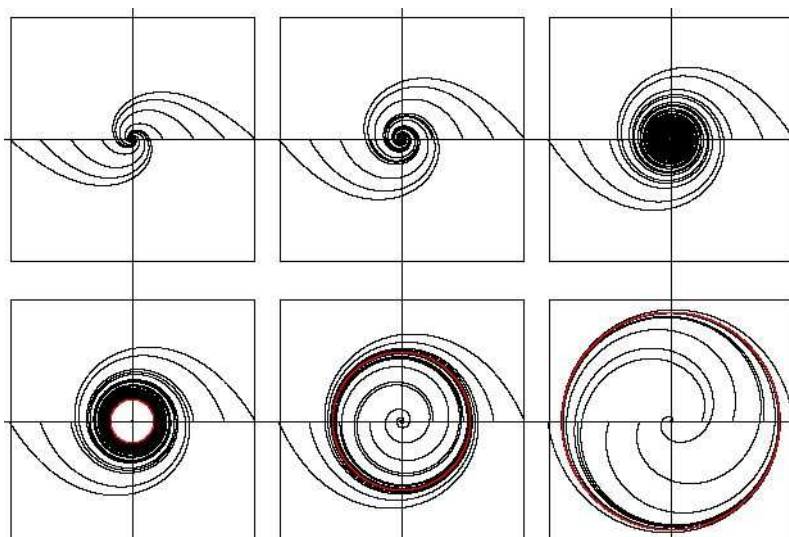


Figure 2 : En haut, pour a négatif, et prenant les valeurs $-0,5$, $-0,2$, $-0,02$, il y a convergence vers le point fixe O . En bas, avec a positif, soit $0,02$, $0,2$ et $0,5$, les trajectoires convergent vers un cercle limite de plus en plus grand.

Exercice 3 : Passage de deux ensembles limites à un seul

Prendre le système différentiel qui s'écrit en coordonnées polaires

$$\begin{cases} r' = ar + 2r^3 - r^5 \\ \theta' = 1 \end{cases} \quad \text{avec } r' = dr/dt, \theta' = d\theta/dt, a \text{ étant un paramètre réel.}$$

Choisir quelques valeurs du paramètre a , et à chaque fois prendre plusieurs trajectoires issues de points (r_0, θ_0) . Pour éviter les trajectoires s'en allant à l'infini, on se restreindra à des valeurs suffisamment faibles de r_0 permettant aux trajectoires de converger vers des ensembles limites. Rappelons que l'on passe de (r, θ) à (x, y) par $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Que se passe-t-il lorsque le paramètre a varie, et quelle est la différence entre les bifurcations actuelles et celles observées dans l'exercice précédent ?

On se place dans la zone où r_0 est inférieur à 2, en constatant que dans ce cas les trajectoires ne partent pas à l'infini, du moins pour des valeurs du paramètre a comprises entre -1 et 3 (figure 3). Lorsque a est négatif, on observe qu'une partie des trajectoires converge vers un cercle limite, tandis que les autres, plus proches de l'origine, convergent vers le point fixe O , origine du repère. La frontière entre les deux bassins d'attraction, celui du cercle et celui de O , est elle-même un cercle intermédiaire de centre O . Lorsque a négatif augmente, le bassin d'attraction de O rapetisse, et il tend à disparaître lorsque a s'approche de 0. Plus précisément, lorsque a devient positif, le point O n'est plus un point fixe attracteur, il devient instable, et il ne reste plus que le cercle limite pour attirer les trajectoires. Dans le cas présent, le phénomène de bifurcation correspond à la disparition de l'un des deux ensembles limites lors du passage du paramètre a du négatif au positif.

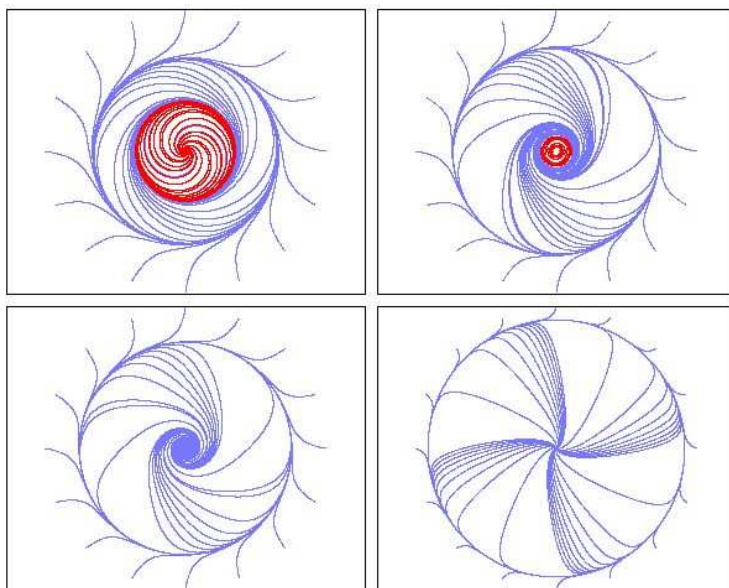


Figure 3 : En haut, pour a négatif, il existe deux ensembles limites, soit le point fixe O pour les trajectoires en rouge, soit un cercle limite de centre O pour les trajectoires en bleu, la frontière de séparation étant aussi un cercle. En bas, pour a positif, seul subsiste le cercle limite, le point O repoussant maintenant les trajectoires.

3. Passage en trois dimensions

Ce qui ne pouvait pas arriver pour les équations différentielles autonomes en deux dimensions, à savoir la présence de fluctuations chaotiques, va au contraire se produire en trois dimensions, avec les attracteurs étranges associés aux noms de Lorenz, Rossler et Chua. C'est en 1963 qu' E. Lorenz, météorologue, publie un papier sur les fluctuations thermiques dans l'atmosphère terrestre. Les équations du mouvement de ce système hydrodynamique conduisent à des comportements qui semblent irréguliers et imprévisibles. Lorenz fait tourner ses calculs sur une machine de l'époque. L'anecdote veut qu'un jour, s'étant arrêté au milieu d'un calcul pour aller boire un café, et ayant noté les résultats intermédiaires sur un papier, il relance le calcul en repartant des résultats qu'il avait obtenus avant l'arrêt, mais sans tenir compte de tous les chiffres derrière la virgule. Il s'aperçoit alors que les résultats finalement trouvés n'ont rien à voir avec ceux qu'il aurait obtenus sans s'arrêter au milieu du calcul. Lorenz vient de découvrir la sensibilité aux conditions initiales, que l'on appelle aussi l'effet papillon. Dans son article, il note « *l'instabilité de l'écoulement non périodique qui représente l'atmosphère. La prédiction est impossible, à moins que les conditions initiales ne soient exactement connues, mais cette condition ne peut pas être remplie* ». A l'époque, cet article passe inaperçu. Ce n'est qu'en 1977 que les étudiants-chercheurs de l'Université de Santa Cruz le sortent du placard, comme prototype de ce qu'ils vont appeler le chaos.

3.1. Attracteur étrange de Rossler

En 1976, treize ans après Lorenz, Rossler propose un système différentiel simple qui présente des effets chaotiques :

$$\begin{cases} x' = -y - z \\ y' = x + a y \\ z' = b + (x - c) z \end{cases}$$

avec la présence d'un seul terme non-linéaire xz , les valeurs des paramètres étant $a = 0,2$, $b = 0,2$ et $c = 5,7$.

Prenons la trajectoire d'un point, par exemple celui de coordonnées $(0, 1, 0)$. On constate qu'elle commence par rester dans le plan horizontal xOy , en s'enroulant en spirale autour de l'origine tout en s'en éloignant, puis elle se met à monter assez brusquement avant de retomber dans le plan horizontal, d'autant plus près de l'origine qu'elle était montée haut. Le mouvement se poursuit ainsi (*figure 4 à gauche*). Si l'on part d'un point quelconque, du moins avec des coordonnées qui ne dépassent pas quelques unités, et qu'on ne dessine pas le début de la trajectoire, celle-ci vient toujours s'enrouler sur la même forme, où s'opère un mouvement tournant dans le plan xOy , avec des bouffées de montées-descentes en altitude z , formant un attracteur étrange et chaotique (*figure 4 à droite*).

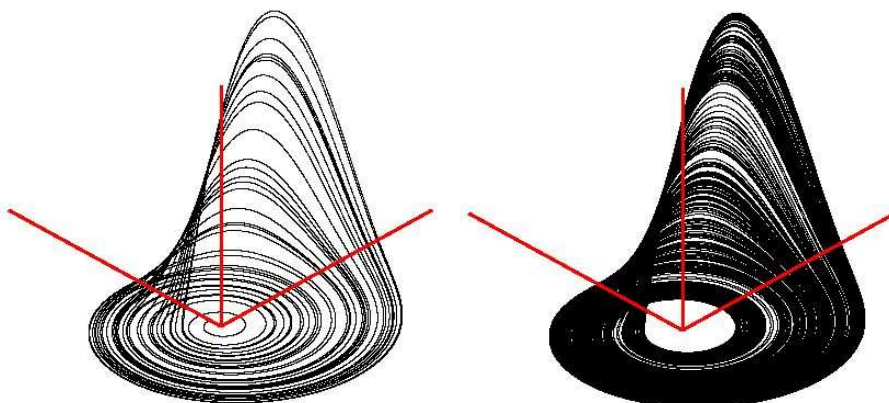


Figure 4 : A gauche, le début de la trajectoire du point $(0, 1, 0)$. A droite, l'attracteur chaotique et étrange, formé d'une courbe qui occupe de façon dense une zone complexe de l'espace en trois dimensions.

Une explication qualitative de ce phénomène peut être donnée. Lorsque l'on part d'un point du plan xOy avec x nettement inférieur à c , et z nul, les deux premières équations s'écrivent sous forme linéaire :

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x + a y \end{cases}$$

En dérivant la seconde, on trouve l'équation différentielle en y : $y'' - a y' + y = 0$, d'équation caractéristique $r^2 - a r + 1 = 0$, d'où deux solutions complexes conjuguées $r = a/2 \pm i\sqrt{4-a^2}/2$, puisque le paramètre a a été choisi nettement inférieur à 2. On sait qu'alors la solution générale est de la forme

$$y = e^{a/2 t} (A \cos(\sqrt{4-a^2} t) + B \sin(\sqrt{4-a^2} t))$$

La présence du cosinus et du sinus est le signe d'oscillations périodiques, et le fait de multiplier par l'exponentielle provoque une expansion de ces oscillations. Comme $x' = -y$, la composante x subit un mouvement du même type. Cela explique que la trajectoire commence par avoir une forme de spirale grossissante autour de O dans le plan xOy . Mais qu'en est-il de l'altitude z ? Au départ, $z' = b > 0$, et z a tendance à augmenter. Mais la vitesse z' est vite freinée par le terme négatif $(x - c) z$, et z a tendance à revenir à 0. Ainsi, tant que x reste inférieur à c , on obtient une spirale située quasiment dans le plan xOy . Mais l'augmentation de x va finir par le faire dépasser c . Alors tout change, car la vitesse z' est maintenant formé de l'addition des deux termes positifs b et $(x - c) z$. La courbe monte alors brusquement en altitude. A son tour, l'augmentation de z finit par rendre négative la vitesse $x' = -y - z$, et x va finir par diminuer. Lorsque x devient inférieur à c , la vitesse z' redevient négative, et l'altitude z tend à se rapprocher de 0, faisant retomber la trajectoire dans une trajectoire en spirale. Et ainsi de suite.

Exercice 4 : Attracteur de Rossler et cascade de bifurcations

1) Prendre maintenant comme paramètres $a = 0,2$, $b = 0,2$ et $c = 14$. On obtiendra un attracteur étrange et chaotique, tout comme précédemment. Puis dans le même programme qui donne cet attracteur, déterminer les valeurs minimales de x , quand la dérivée $x' = vx$ passe du signe moins au signe plus, ce qui est facile à avoir lorsque l'on utilise la méthode d'Euler améliorée. Ces valeurs minimales de x forment une suite x_n . Tracer dans un repère en deux dimensions la courbe des points (x_n, x_{n+1}) . On constatera la formation d'une forme parabolique, comme pour l'application logistique lorsque l'on atteignait le chaos ultime.

Pour passer des points (x, y, z) de l'espace en trois dimensions à leur projection (xe, ye) sur l'écran en deux dimensions, on utilise une perspective cavalière, en supposant que l'oeil de l'observateur est situé dans le plan bissecteur des plans xOz et yOz , et faisant un angle φ avec le plan horizontal. La formule de passage est alors :

$$\begin{cases} xe = x_{orig} + A(x - y) \\ ye = y_{orig} - B(x + y) - Cz \end{cases} \quad \text{avec } A = \text{zoom} / \sqrt{2}, B = \text{zoom} \times \sin \varphi / \sqrt{2}, C = \text{zoom} \times \cos \varphi$$

Rappelons aussi que dans la méthode d'Euler améliorée, on détermine à chaque étape la vitesse vx actuelle et la vitesse vvx à l'instant suivant, ce qui permet de savoir si x est minimal en faisant le test : $vx < 0$ et $vvx > 0$. Le programme s'ensuit, permettant de tracer l'attracteur (figure 6) et l'on observe aussi, dans le repère (x_n, x_{n+1}) des minima de x la formation d'une courbe ressemblant quelque peu à une parabole (figure 5).

```
cc=14.; /* valeur choisie du coefficient c, a et b étant donnés */
dt=0.0001; dtsur2=dt/2.;
phi=0.5; cosphi=cos(phi); sinphi=sin(phi); /* phi est l'angle d'inclinaison de l'oeil avec le sol xOy */
A=zoom/sqrt(2.); B=zoom*sinphi/sqrt(2.); C=zoom*cosphi;
x=0.;y=1.;z=0.; /* point de départ de la trajectoire */
for(i=0;i<20000000;i++) /* trajectoire aboutissant à l'attracteur étrange */
{ vx=-y-z; vy=x+a*y; vz=b+z*(x-cc); /* méthode d'Euler améliorée */
  xs=x+dt*vx; ys=y+dt*vy; zs=z+dt*vz;
  vvx=-ys-zs; vvy=xs+a*ys; vvz=b+zs*(xs-cc);
  x=x+dtsur2*(vx+vvx); y=y+dtsur2*(vy+vvv); z=z+dtsur2*(vz+vvz);
  if (vx<0. && vvx>0.) /* valeur minimale de x */
  { xmin=x;
    if (i>3000000)
      filldisc(950+20.*oldxmin,600+20.*xmin,2,black); /* point  $x_n, x_{n+1}$ , ici (oldxmin, xmin) */
    oldxmin=xmin;
  }
  if (i>3000000) putpixel(xorig+A*(x-y),yorig-B*(x+y)-C*z,black); /* point de l'attracteur */
  if (i%100000==0) SDL_Flip(screen);
}
```



Figure 5 : Courbe des minima de x dans le repère (x_n, x_{n+1})

2) Ayant entrevu un lien avec l'application logistique, nous allons garder les paramètres a et b fixes, et faire varier c de 4 à 14. Faire le programme donnant l'attracteur dans chaque cas. Constater, lorsque c augmente, la présence d'un phénomène de bifurcations, comme on l'avait déjà observé dans d'autres contextes.

Nous donnons, sur la *figure 6*, l'attracteur pour certaines valeurs remarquables de c .

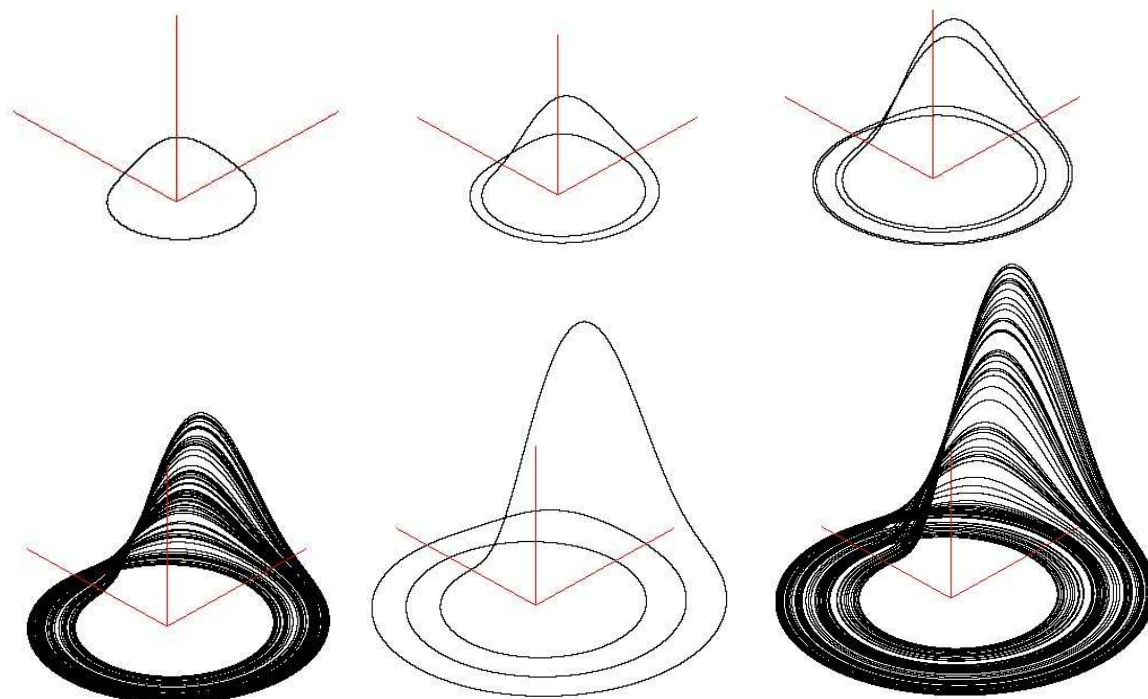


Figure 6 : Attracteur pour certaines valeurs de c , de gauche à droite et de haut en bas : $c = 4$ (cycle limite), $c = 6$ (cycle de période 2), $c = 8$ (cycle de période 4), $c = 10$ (chaos), $c = 12$ (cycle de période 3), $c = 14$ (chaos).

3) Pour chaque valeur de c , reprendre la suite x_n des minima de x , en prenant n suffisamment grand, et tracer les points ayant ces x_n en ordonnée et c en abscisse. On retrouvera le diagramme de bifurcations classique.

La courbe obtenue (*figure 7*) confirme les résultats d'attracteurs obtenus dans la question précédente pour les valeurs de c choisies.

```
for(cecran=60;cecran<=700;cecran++) /* valeurs de c sur l'écran après un zoom */
{ cc=((float)cecran+100.)/40.; /* c va de 4 à 20 */
  x=0.;y=1.;z=0.; /* point de départ d'une trajectoire */
  for(i=1;i<3000000;i++)
  { vx=-y-z; vy=x+a*y; vz=b+z*(x-cc);
    xs=x+dt*vx; ys=y+dt*vy; zs=z+dt*vz;
    vvz=-ys-zs; vvy=xs+a*ys; vvz=b+zs*(xs-cc);
    x=x+dtsur2*(vx+vvz); y=y+dtsur2*(vy+vvy); z=z+dtsur2*(vz+vvz);
    if (i>500000 && vx<0. && vvz>0.) putpixel(cecran,695+25.*x,black);
  }
  SDL_Flip(screen);
}
```

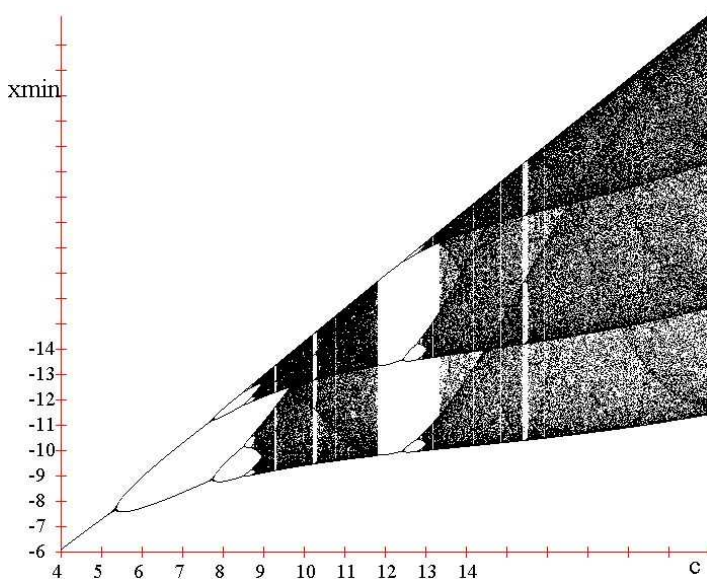



Figure 7 : Courbe des bifurcations.

Exercice 5 : Attracteur de Rossler et sensibilité aux conditions initiales

Partir de deux points très proches et tracer leurs deux trajectoires pour constater que celles-ci finissent par se séparer irrémédiablement, manifestant ce que l'on appelle la sensibilité aux conditions initiales.

Il suffit d'aménager les programmes précédents pour constater le phénomène.

3.2. Attracteur de Lorenz

Au départ, il s'agissait de simuler la convection thermique de l'atmosphère. Après simplifications, E. Lorenz aboutit à un système de trois équations différentielles du premier ordre :

$$\begin{cases} x' = s(y - x) \\ y' = r x - y - x z \\ z' = -b z + x y \end{cases}$$

où x, y, z sont des variables liées à ce mouvement convectif et à la température, x', y', z' étant les dérivées par rapport au temps t . Ce système est manifestement non-linéaire. Plus précisément Lorenz choisit comme paramètres $b = 8/3$, $s = 10$ et $r = 28$, pour se placer au-delà du seuil d'instabilité. On observe alors un comportement chaotique, avec des oscillations irrégulières dans le cadre d'un motif global, l'attracteur étrange, lui-même bien structuré, en forme de double spirale. Cela se vérifie en faisant un programme du même style que précédemment, ce qui donne la figure 8.

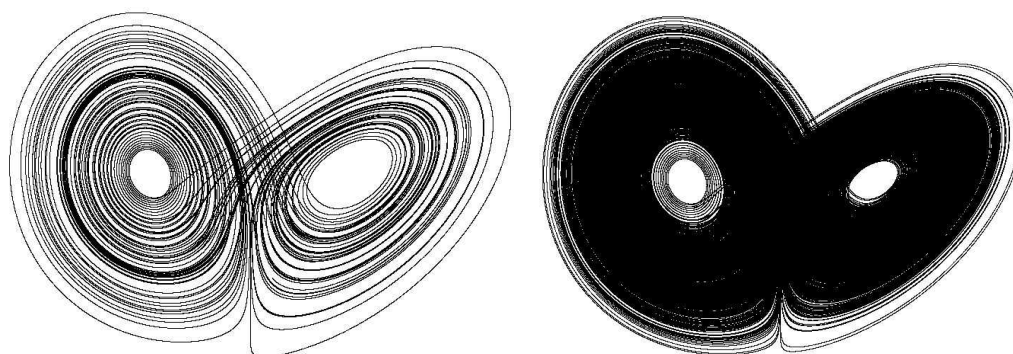


Figure 8 : Attracteur de Lorenz, à gauche au bout de 1 000 000 d'itérations , à droite au bout de 10 000 000 d'itérations, avec $dt = 0,0001$.

3.3. Attracteur de Chua

Au départ il s'agit d'un circuit électronique RLC conçu par L.O. Chua en 1983, susceptible de présenter des phénomènes chaotiques. La modélisation mathématique de ce circuit donne lieu à un système de trois équations différentielles :

$$\begin{cases} x' = a(y - x - f(x)) \\ y' = x - y + z \\ z' = -b y \end{cases}$$

avec $f(x) = m x + m - n$ si $x \leq -1$,

$f(x) = n x$ si $-1 \leq x \leq 1$,

$f(x) = m x + n - m$ si $x \geq 1$.

Le seul aspect non-linéaire provient de $f(x)$, qui est une fonction linéaire par morceaux (figure 9). On prend généralement comme valeurs des paramètres $a = 15,6$, $m = -5/7$, $n = -8/7$, et b variable.

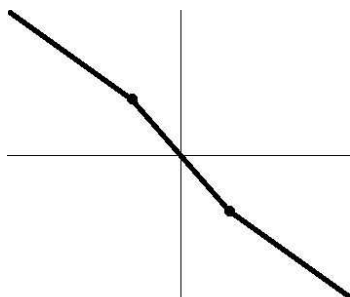


Figure 9 : Courbe en forme de ligne brisée d'équation $y = f(x)$.

Exercice 6 : Attracteur à double rouleau de Chua

Faire le programme en faisant varier b de 50 à 25 pour observer les évolutions de l'attracteur. On constatera qu'il existe d'abord un attracteur formé de deux rouleaux de forme ovale (il faudra prendre deux trajectoires de points pour les obtenir), puis ceux-ci fusionnent en un seul attracteur, dit du double rouleau. Ce changement qualitatif de la forme des attracteurs est appelé une crise.

Par un programme qui s'apparente à ceux qui précèdent, on constate que la crise se produit aux alentours de $b = 31$, où les deux rouleaux fusionnent en un seul. On observe aussi des phénomènes de bifurcations, avec dédoublements de période, et des fenêtres d'ordre à l'intérieur de la zone chaotique.

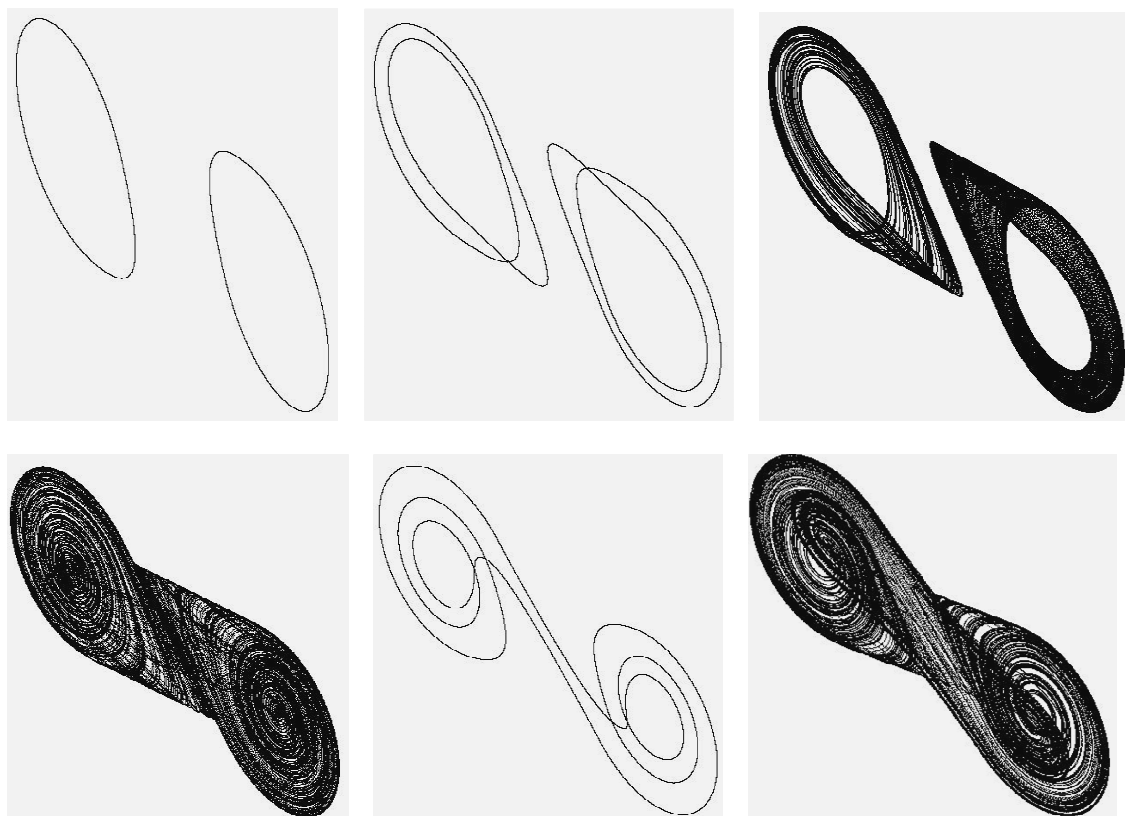


Figure 10 : Evolution de l'attracteur pour diverses valeurs de b . De gauche à droite et de haut en bas : $b = 50$ avec deux ovales, $b = 35$ avec les deux ovales qui se dédoublent, $b = 33$ avec deux ovales en forme d'enroulements, $b = 31$ avec les deux ovales chaotiques qui ne font plus qu'un, $b = 29$ avec une fenêtre où l'ordre gagne provisoirement sur le chaos, et $b = 25$ où l'on retrouve l'attracteur chaotique en double rouleau.

4. Le contrôle du chaos

Sur les attracteurs, le mouvement est souvent chaotique. Deux points de départ très voisins donnent des trajectoires qui vont se séparer et suivre chacune leur propre chemin sur l'attracteur. Ce genre de phénomène peut paraître malencontreux dans certaines circonstances, par exemple si le circuit électronique d'un appareil ménager ou un réseau électrique montrent des signes d'instabilité. Aussi cherche-t-on à minimiser ces perturbations chaotiques, ce que l'on appelle le contrôle du chaos.⁴

L'idée du contrôle consiste à coupler deux mécanismes chaotiques en faisant en sorte qu'ils se synchronisent et par là-même s'atténuent l'un l'autre. Nous allons d'abord traiter un cas simple, puis voir comment cela se généralise pour le circuit de Chua.

4.1. Couplage d'équations différentielles linéaires

Prenons comme exemple simple le système différentiel

⁴ Certains verront peut-être là nouvelle tentative pour enterrer le chaos, en mettant à l'ombre sa mécanique perturbatrice, mais la vie ne se réduit pas à celle des appareils ménagers. Dans un univers d'ordre se développent toujours des forces incontrôlables, et pas forcément maléfiques.

$$\begin{cases} x' = a x \\ y' = a y \end{cases} \text{ avec } a \text{ positif, } x' \text{ et } y' \text{ étant les dérivées par rapport au temps } t, \text{ avec comme conditions}$$

initiales pour $t=0$: $x = x_0$, $y = y_0$. Un couplage entre x et y est effectué en ajoutant un terme de diffusion, ce qui s'écrit

$$\begin{cases} x' = a x + c(y - x) \\ y' = a y + c(x - y) \end{cases}$$

Avec un couplage nul ($c = 0$), le système a pour solution $x = x_0 \exp(at)$, $y = y_0 \exp(at)$, et l'on constate que $x - y = (x_0 - y_0) \exp(at)$, ce qui indique qu'avec x_0 différent de y_0 , il y a divergence exponentielle entre x et y lorsque le temps augmente. Il peut en advenir autrement avec $c > 0$. Envisageons les deux cas suivants :

- Pour $c = 0,03$ et $a = 0,1$, on constate que les courbes de x et y par rapport au temps, avec au départ $x_0 > 0$ et $y_0 < 0$, se séparent de plus en plus, et il n'y a pas de synchronisation (figure 11 à gauche).

- Pour $c = 0,07$ et $a = 0,1$, les deux courbes tendent à se confondre, et la synchronisation se produit (figure 11 à droite).

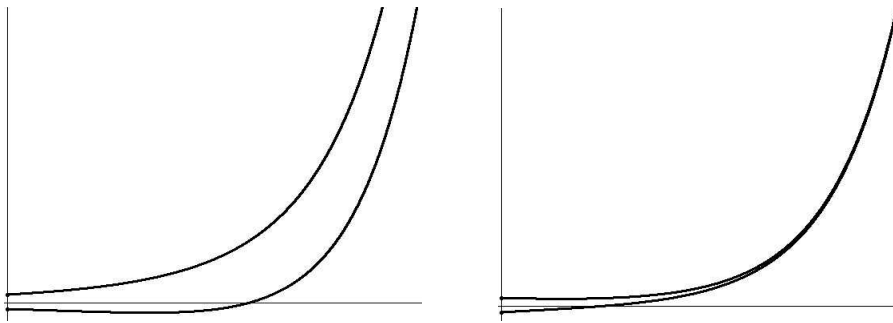


Figure 11 : A gauche divergence exponentielle pour $a = 0,1$ et $c = 0,03$, à droite synchronisation pour $a = 0,1$ et $c = 0,07$. Dans les deux cas pour $t = 0$, on a pris $x_0 = 5$ et $y_0 = -4$.

Il apparaît que la synchronisation a lieu dès que le couplage est assez fort. Cela se vérifie théoriquement. Reprenons le système différentiel qui s'écrit :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & c \\ c & a-c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

La matrice admet des valeurs propres λ vérifiant $\begin{vmatrix} a-c-\lambda & c \\ c & a-c-\lambda \end{vmatrix} = 0$, et l'on trouve les deux valeurs propres a et $a - 2c$. Les vecteurs propres associés sont $(1, 1)$ et $(1, -1)$. Dans le repère de ces vecteurs propres, le système devient :

$$\begin{cases} X' = a X \\ Y' = (a - 2c) Y \end{cases} \text{ ce qui donne } X = X_0 \exp(at), Y = Y_0 \exp((a - 2c)t).$$

La matrice P de passage de l'ancienne base à la nouvelle est formée des deux vecteurs propres rapportés à l'ancienne base, soit

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}. \text{ La formule de passage est } \begin{cases} x = X + Y \\ y = X - Y \end{cases}$$

$$\text{d'où } \begin{cases} x = X_0 e^{at} + Y_0 e^{(a-2c)t} \\ y = X_0 e^{at} - Y_0 e^{(a-2c)t} \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} x_0 = X_0 + Y_0 \\ y_0 = X_0 - Y_0 \end{cases}$$

$$\text{Finalement } \begin{cases} x = 0,5(x_0 + y_0)e^{at} + 0,5(x_0 - y_0)e^{(a-2c)t} \\ y = 0,5(x_0 + y_0)e^{at} - 0,5(x_0 - y_0)e^{(a-2c)t} \end{cases}$$

et $x - y = (x_0 - y_0)e^{(a-2c)t}$. Ainsi, dès que $a - 2c < 0$, ou $c > a/2$, il y a synchronisation des deux mouvements, les courbes devenant asymptotes l'une l'autre, puisque $x - y$ tend vers 0. Par contre pour $c < a/2$, il y a divergence exponentielle. C'est bien ce que nous avons trouvé précédemment.⁵

Ce qui vient d'être fait pour un système linéaire se généralise aux systèmes différentiels non linéaires, de la forme $\mathbf{X}' = f(\mathbf{X})$, \mathbf{X} étant un vecteur en dimension quelconque, par exemple $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en deux dimensions, et \mathbf{X}' le vecteur vitesse associé. Le couplage consiste à former le système

$$\begin{cases} \mathbf{X}'_1 = f(\mathbf{X}_1) + c(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1) \\ \mathbf{X}'_2 = f(\mathbf{X}_2) + c(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) \end{cases}$$

On démontre alors que si le coefficient de couplage c est supérieur à $\lambda/2$, λ étant le plus grand exposant de Liapounov, le système couplé se synchronise.

4.2. Synchronisation du circuit de Chua

Prenons les trois équations du système de Chua et doublons les en ajoutant le couplage. A partir de points de départ très légèrement différents pour l'un et l'autre des circuits, et lançons leurs deux trajectoires. Pour simplifier, on s'intéresse seulement à la composante x des points de ces deux trajectoires, soit x_1 et x_2 , et l'on trace dans un repère en deux dimensions les points (x_1, x_2) des deux trajectoires à chaque instant. On constate que pour un couplage faible de l'ordre de $c = 0,18$, le mouvement des points (x_1, x_2) est complètement désordonné, tandis que pour $c = 0,28$, la synchronisation se produit, et les points (x_1, x_2) restent proches du segment diagonal où $x_1 = x_2$, le coefficient de Liapounov le plus grand étant de l'ordre de 0,5 (figure 12).

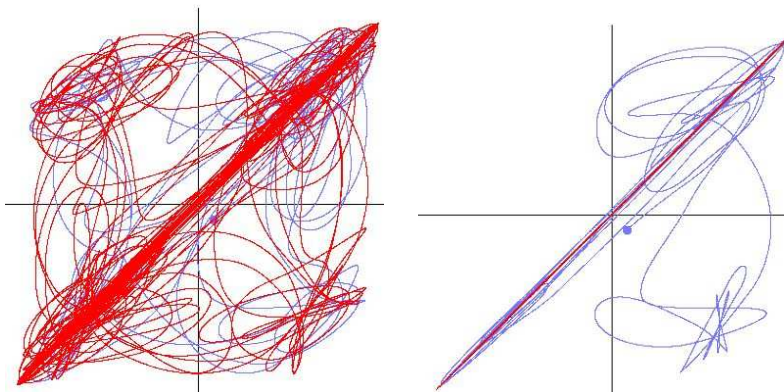


Figure 12 : Le début de la trajectoire est en bleu, la suite est en rouge. A gauche, pas de synchronisation pour $c = 0,18$, à droite synchronisation pour $c = 0,28$.

⁵ Nous avons aussi pris $x_0 = 5$ et $y_0 = -4$. Avec $x_0 + y_0 > 0$, les courbes de x et de y montent toutes deux vers $+\infty$.