

Groupe de Schottky et fractales

Ce qui suit est essentiellement une illustration du livre *Indra pearls* de D. Mumford, C. Series et D. Wright. Comme les éléments clés de ce sujet sont les transformations de Möbius et leur action sur des cercles, nous commençons par là, sous forme d'exercices, en rappelant qu'une transformation de Möbius est de la forme $z' = \frac{az+b}{cz+d}$ avec a, b, c, d complexes et $ad - bc \neq 0$.¹

Exercice 1 : Transformation de Möbius faisant passer d'un cercle donné à un cercle donné

On se donne deux cercles, de centres C et C' et de rayons R et R' . Il s'agit de déterminer des transformations de Möbius faisant passer de l'un à l'autre, l'intérieur de l'un devenant l'extérieur de l'autre.

1) En passant par l'intermédiaire du cercle unité, et en utilisant la transformation $z' = 1/z$, trouver une succession de transformations de Möbius faisant passer d'un cercle à l'autre, ce qui donnera une transformation de Möbius.

Partons du cercle de centre C , et soumettons-le à une translation amenant C en O . Puis faisons une homothétie de centre O et de rapport $1/R$, de façon à obtenir le cercle unité. Pratiquons ensuite la transformation $z' = 1/z$ laissant invariant le cercle unité, mais transformant son intérieur en son extérieur. Puis l'homothétie de centre O et de rapport R' donne un cercle centré en O et de rayon R' . Enfin la translation de vecteur C' nous amène au cercle de centre C' et de rayon R' . L'intérieur du cercle initial est devenu l'extérieur du cercle final (figure 1). Cela s'écrit :

$$z \mapsto z_1 = z - C \mapsto z_2 = \frac{1}{R} z_1 = \frac{z - C}{R} \mapsto z_3 = \frac{1}{z_2} = \frac{R}{z - C} \mapsto z_4 = \frac{RR'}{z - C} \mapsto z' = \frac{RR'}{z - C} + C'$$

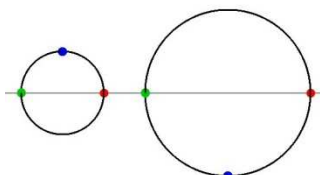


Figure 1 : La transformation avec trois points et leurs images respectives de la même couleur. L'intérieur d'un cercle devient l'extérieur de l'autre (ce qui est à gauche des trois points en succession reste à gauche).

2) Passer maintenant par l'intermédiaire de la transformation $z' = -1/z$, au lieu de $z' = 1/z$, pour trouver une autre transformation de Möbius répondant au problème.

On trouve de la même façon que précédemment $z' = -\frac{RR'}{z - C} + C'$ (figure 2).

¹ Les propriétés de ces transformations sont données dans le document *Géométrie inversive et transformations de Möbius* et appliquées dans les documents sur le demi-plan de Poincaré et sur le disque de Poincaré (www.pierreaudibert.fr/travauxexploratoires). Elles sont supposées être connues ici. Rappelons seulement que les transformations de la forme $z' = (az + b) / (cz + d)$ avec a, b, c, d réels et $ad - bc > 0$ (ou $ad - bc = 1$) conservent l'axe des x et le demi-plan supérieur, et que les transformations de la forme $z' = (az + b) / (cz + d)$ avec a, b, c, d complexes et $|a|^2 - |b|^2 > 0$ (ou $|a|^2 - |b|^2 = 1$) conservent le disque unité (de centre O et de rayon 1).

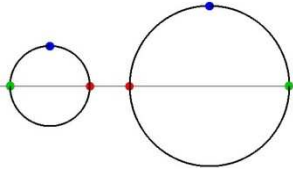


Figure 2 : La transformation avec trois points et leurs images respectives.

3) Le passage du 1^o au 2^o a consisté à intercaler en plus la transformation $z' = -z$ dans la chaîne des transformations. Remarquons que cette transformation conserve l'intérieur du cercle unité. On sait que les transformations conservant le disque unité sont de la forme $z' = \frac{u z + v}{\bar{v} z + \bar{u}}$ avec $|u|^2 - |v|^2 = 1$, la transformation $z' = -z$ n'étant qu'un cas très particulier (avec $u = i$ et $v = 0$). En déduire une infinité de transformations de Möbius faisant passer d'un cercle à l'autre.

On a la chaîne de transformations :

$$\begin{aligned} z \mapsto z_1 = z - C &\mapsto z_2 = \frac{1}{R} z_1 = \frac{z - C}{R} \mapsto z_3 = \frac{u z_2 + v}{\bar{v} z_2 + \bar{u}} = \frac{u(z - C) + Rv}{\bar{v}(z - C) + R\bar{u}} \\ \mapsto z_4 = \frac{1}{z_3} &= \frac{\bar{v}(z - C) + R\bar{u}}{u(z - C) + Rv} \mapsto z_5 = R' z_4 = \frac{R'\bar{v}(z - C) + R R' \bar{u}}{u(z - C) + Rv} \\ \mapsto z' = z_4 + C' &= \frac{R'\bar{v}(z - C) + R R' \bar{u}}{u(z - C) + Rv} + C' \end{aligned}$$

Transformations de Möbius faisant passer d'un cercle de centre C et de rayon R à un cercle de centre C' et de rayon R' :

$$z' = \frac{R'\bar{v}(z - C) + R R' \bar{u}}{u(z - C) + Rv} + C' \quad \text{avec } |u|^2 - |v|^2 = 1$$

Exercice 2 : Transformé d'un cercle par une transformation de Möbius

A partir d'un cercle C de centre p et de rayon r , déterminer le cercle transformé C' sous l'effet d'une transformation de Möbius donnée sous sa forme normalisée, soit $M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ avec $a d - b c = 1$. Utiliser pour cela la propriété de symétrie : sous l'effet de l'inversion de cercle C' , le point ∞ est envoyé en p' , centre du cercle C' , puis pratiquer la transformation M^{-1} , pour trouver finalement p' .

M^{-1} s'écrit $M^{-1}(z) = \frac{d z - b}{-c z + d}$. Sous l'effet de M^{-1} , le point ∞ devient le point $M^{-1}(\infty) = -d/c$, et le point p' devient un point $M^{-1}(p') = q$. Par la propriété de symétrie, ces points $-d/c$ et q sont inverses par l'inversion de cercle $M^{-1}(C') = C$, soit $q = \frac{r^2}{-d/c - \bar{p}} + p$. Alors $M(q) = M(M^{-1}(p')) = p'$, et l'on

trouve
$$p' = M\left(\frac{r^2}{-d/c - \bar{p}} + p\right).$$

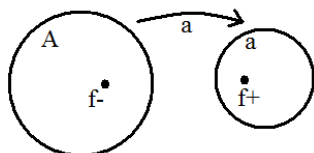
Pour avoir le rayon r' de C' , considérons le point $p + r$ situé sur le cercle C . Son image par M , soit $M(p + r)$, est sur le cercle C' , et

$$r' = |M(p + r) - p'|$$

Nous allons dorénavant travailler avec un nombre pair de cercles dans le plan, en les groupant deux par deux selon la méthode indiquée ci-dessous.

1. Appariement de deux cercles

Donnons-nous deux disques A et a de centres C_A et C_a et de rayons r_A et r_a .



On dit que les deux disques sont appariés par une transformation de Mobius notée a^2 si :

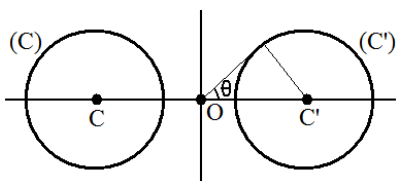
Les deux disques sont extérieurs l'un à l'autre, ou à la limite tangents extérieurement.

La transformation de Mobius a fait passer du cercle A au cercle a . Plus précisément elle fait passer de l'intérieur de l'un à l'extérieur de l'autre.

Le point fixe f_+ attracteur de la transformation de Mobius est dans le disque a , et le point fixe f_- repousseur est dans le disque A . La répétition de la transformation a va transformer le cercle a en des cercles de plus en plus petits entourant f_+ et emboîtés les uns dans les autres. De même pour la transformation A inverse de a , transformant le cercle A en des cercles emboîtés autour de f_- .

Remarquons que la transformation A inverse de a , transformant le cercle a en cercle A , transforme aussi l'intérieur de l'un en l'extérieur de l'autre.

1.1. Cas de deux cercles strictement extérieurs



Plaçons-nous dans le contexte le plus simple : les deux cercles (C) et (C') ont leurs centres C et C' situés sur l'axe des x , de part et d'autre de O , avec $OC = OC'$, et de même rayon R . Ces cercles sont aussi supposés orthogonaux au cercle unité. Appelons θ (entre 0 et 90°) l'angle entre Ox et une tangente menée par O à l'un des cercles. On a ce résultat, démontré dans l'exercice 3 qui suit.

Une transformation de Mobius particulièrement simple faisant passer de (C) à (C') tels qu'on les a définis s'écrit :

$$z' = -\frac{R^2}{z + C'} \quad \text{ou} \quad z' = \frac{(1/\sin \theta)z + 1/\tan \theta}{(1/\tan \theta)z + 1/\sin \theta}, \quad \text{avec comme points fixes } f_+ = 1 \text{ et } f_- = -1,$$

l'extérieur de (C) devenant l'intérieur de (C') .

Ou encore, une transformation de Mobius de la forme $z' = \frac{mz + n}{nz + m}$ avec m, n réels et $m^2 = n^2 + 1$

fait passer d'un cercle (C) à un cercle (C') de même rayon $R = 1/n$, avec leurs centres C et C' sur Ox d'abscisses $-m/n$ et m/n , l'extérieur de (C) devenant l'intérieur de (C') .

Exercice 3 : Transformations de Mobius et faisceau de cercles

1) Considérons le faisceau de cercles de points limites $z = \pm 1$. Déterminer les transformations de Mobius qui laisse l'axe des x invariants ainsi que le cercle de centre 0 et de rayon 1 , ce qui entraîne que les points $z = \pm 1$ sont les points fixes de ces transformations, en choisissant le point fixe 1 comme

² Pour simplifier, nous notons de la même façon le disque a (et le cercle a) et la transformation de Mobius a .

attracteur et -1 comme repousseur. Utiliser pour cela les transformations de Mobius associées au demi-plan de Poincaré et au disque de Poincaré. Constater que ces transformations transforment un cercle du faisceau en un cercle du faisceau.

On est censé savoir que dans le demi-plan de Poincaré, les transformations de Mobius qui le laissent invariant sont de la forme $z' = \frac{az+b}{cz+d}$ avec a, b, c, d réels et $ad - bc = 1$.³ Ces transformations laissent l'axe des x invariant. On sait aussi que dans le disque de Poincaré, les transformations de Mobius qui le laissent invariant sont de la forme $z' = \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$ avec $|a|^2 - |b|^2 = 1$. Ces transformations laissent le cercle de centre 0 et de rayon 1 invariant.

Choisissons une transformation qui possède ces deux formes, soit $z' = \frac{az+b}{bz+a}$ avec a, b, c, d réels et $a^2 - b^2 = 1$. Elle s'écrit aussi $z' = \frac{az + \sqrt{a^2 - 1}}{\sqrt{a^2 - 1}z + a}$ avec $a > 1$. Le point 0 est envoyé en $\sqrt{a^2 - 1} / a > 0$, cela prouve que le point -1 est repousseur et 1 attracteur. Cette transformation est hyperbolique (sa trace est supérieure à 2).

Pour chaque valeur de $a > 1$, on obtient une transformation. Chaque cercle du faisceau est alors transformé en un cercle du faisceau, l'un et l'autre étant centrés sur Ox et orthogonaux au cercle unité.

2) Prendre un cercle (C) du faisceau situé à gauche de l'axe radical, et contenant le point -1 . Il coupe l'axe des x en deux points d'abscisse négative. Appeler c l'abscisse du point le plus proche de 0, avec $0 > c > -1$. Puis prendre un autre cercle (C') du faisceau entourant le point fixe 1, qui coupe l'axe des x en deux points, avec c' abscisse du point le plus proche de 0, soit $0 < c' < 1$. Les données de c et c' déterminent deux cercles du faisceau. Montrer qu'il existe une transformation unique, parmi celles obtenues au 1°, faisant passer du cercle (C) au cercle (C') , l'intérieur de l'un devenant l'extérieur de l'autre.

Imposons que c aille en c' , soit $c' = \frac{ac + \sqrt{a^2 - 1}}{\sqrt{a^2 - 1}c + a}$,

$$c'(\sqrt{a^2 - 1}c + a) = ac + \sqrt{a^2 - 1}, (\sqrt{a^2 - 1})(1 - cc') = a(c' - c), (a^2 - 1)(1 - cc')^2 = a^2(c' - c)^2$$

$$a^2((1 - cc')^2 - (c' - c)^2) = (1 - cc')^2$$

$$a^2 = \frac{(1 - cc')^2}{(1 - cc')^2 - (c' - c)^2}$$

Cela impose que $(1 - cc')^2 > (c' - c)^2$, ce qui équivaut à $1 - cc' > c' - c$ (tout est positif), soit $c'(1 + c) < c + 1$, ou $c' < 1$, comme nous l'avons supposé. D'autre part, puisque $a > 1$,

$$a = \frac{(1 - cc')}{\sqrt{(1 - cc')^2 - (c' - c)^2}}$$

On a bien trouvé une valeur unique de a . D'autre part, le demi-plan supérieur est préservé par la transformation. Si l'on part de c dans le sens trigonométrique sur le cercle (C) , on part de c' dans le sens inverse sur le cercle (C') : ce qui est à gauche restant à gauche, l'intérieur de (C) devient l'extérieur de (C') .

3) Traiter le cas particulier où le cercle (C) et le cercle (C') , de part et d'autre de Oy , sont symétriques par rapport à Oy , en utilisant comme paramètre l'angle θ en O entre l'axe Ox et la

³ On aurait pu choisir les transformations laissant invariant le demi-plan inférieur, mais celles-ci donneraient le point -1 comme attracteur.

tangente à un cercle. Puis visualiser la transformation en traçant quelques cercles du faisceau et leurs images.

On sait qu'il existe une transformation de Möbius unique faisant passer de \odot à (C') parmi celles que nous avons trouvées précédemment. Appelons t et t' les points du contact de \odot et (C') avec les tangentes menées à partir de O du côté des y positifs. Il est nécessaire que t' soit l'image de t par la transformation cherchée, puisque le cercle unité est invariant. Or $t' = -e^{-i\theta}$ et $t = e^{i\theta}$. Cela s'écrit

$$e^{i\theta} = \frac{-ae^{-i\theta} + \sqrt{a^2 - 1}}{-e^{-i\theta}\sqrt{a^2 - 1} + a}$$

$$a(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = 2\sqrt{a^2 - 1}, \quad a \cos \theta = \sqrt{a^2 - 1}, \quad a^2 \cos \theta = a^2 - 1, \quad a^2 = 1 / \sin^2 \theta$$

$$a = 1 / \sin \theta$$

La transformation est $z' = \frac{(1 / \sin \theta) z + 1 / \tan \theta}{(1 / \tan \theta) z + 1 / \sin \theta}$ (figure 3).

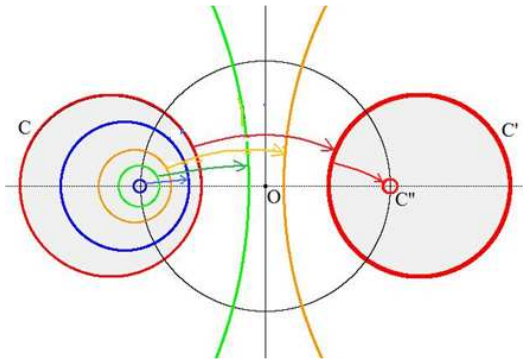


Figure 3 : Quelques cercles du faisceau et leurs images. A noter le cercle (C'') , image de (C') par la transformation, ou de (C) par la transformation répétée deux fois. Comme le cercle (C') est à l'extérieur du cercle (C) , son transformé est bien à l'intérieur de (C') .

4) Retrouver la transformation de l'exemple du 3° en faisant le produit de deux inversions

Appelons $-d$ l'affixe du centre de (C) et d celui du cercle (C') ($d > 0$), et r le rayon des cercles. On a $d = 1/\cos\theta$ et $r = \tan\theta$. L'inversion T' transformant Oy en (C') a pour cercle celui de centre $k = d + r = (1 + \sin\theta) / \cos\theta$ et pour rayon R , vérifiant : $2rk = R^2$. D'autre part l'inversion T transformant (C) en Oy a pour cercle celui de centre $-k$ et de même rayon R . Le produit $T' \circ T$ des deux inversions fait passer de (C) à (C') , soit :

$$z \rightarrow z_1 = \frac{R^2}{z+k} - k \rightarrow z' = \frac{R^2}{z_1 - k} + k = \frac{R^2(z+k)}{R^2 - 2k(z+k)} + d = \frac{R^2(z+k) + k(R^2 - 2k(z+k))}{R^2 - 2kz - 2k^2}$$

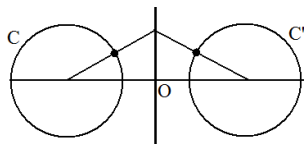
$$z' = \frac{(R^2 - 2k^2)z + 2kR^2 - 2k^3}{-2kz + R^2 - 2k^2}$$

$$\text{Avec } R^2 = 2kr, \quad z' = \frac{(2kr - 2k^2)z + 2k(2kr - k^2)}{-2kz + 2kr - 2k^2} = \frac{(r-k)z + k(2r-k)}{-z + r-k}$$

Or $r - k = -d = -1/\cos\theta$, $k(2r - k) = (d+r)(r-d) = r^2 - d^2 = \tan^2\theta - 1/\cos^2\theta = -1$. Finalement :

$$z' = \frac{(-1/\cos\theta)z - 1}{-z - 1/\cos\theta} = \frac{(1/\cos\theta)z + 1}{z + 1/\cos\theta} = \frac{z + \cos\theta}{\cos\theta z + 1}$$

$$= \frac{(1/\sin\theta)z + 1/\tan\theta}{(1/\tan\theta)z + 1/\sin\theta} \text{ en écriture normalisée}$$



Remarquons que tout point situé sur le cercle (C) a pour transformé son symétrique par rapport à l'axe des y . Cette remarque va s'avérer fondamentale par la suite.

5) Retrouver encore cette transformation en utilisant les résultats de l'exercice 1.

En reprenant les notations de l'exercice 1, on a $C = -1 / \cos \theta$, $C' = 1 / \cos \theta$ et $R = R' = \tan \theta$. Appliquons la transformation trouvée à la question 2 :

$$\begin{aligned} z' &= -\frac{RR'}{z-C} + C' = -\frac{\tan^2 \theta}{z+1/\cos \theta} + \frac{1}{\cos \theta} = -\frac{\tan^2 \theta \cos \theta}{\cos \theta z+1} + \frac{1}{\cos \theta} = \frac{-\sin^2 \theta + \cos \theta z+1}{\cos \theta (\cos \theta z+1)} \\ &= \frac{z+\cos \theta}{\cos \theta z+1} = \frac{z/\sin \theta + 1/\tan \theta}{(1/\tan \theta)z+1/\sin \theta} \end{aligned}$$

Cette transformation est aussi de la forme $z' = \frac{mz+n}{nz+m}$ avec m, n réels et $m^2 = n^2 + 1$, où $R = 1/n$,

les centres C et C' des cercles étant sur Ox d'abscisses $-m/n$ et m/n . Remarquons aussi que cela revient à faire $u = i$ et $v = 0$ dans la formule générale trouvée dans l'exercice 1.

1.2. Ensemble limite

Appelons A et a les deux cercles extérieurs de même rayon, avec la transformation a précédemment trouvée faissant passer de l'extérieur de A à l'intérieur de a , ainsi que son inverse A . En répétant la transformation a , on obtient le cercle $a(a)$ noté aa , puis le cercle $a(aa)$ noté aaa , etc. Les cercles sont ainsi notés avec des mots à base de la lettre a répétée un nombre quelconque de fois. Le cercle aa est à l'intérieur de a puisque a est à l'extérieur de A , et il contient le point $f_+ = 1$. A son tour le cercle aaa est à l'intérieur de aa et contient le point f_+ . Le rôle attracteur de f_+ fait qu'à la limite, le cercle $aaaa...$ devient le point f_+ . De même avec A qui admet comme point fixe attracteur f_- . Le mot infini $AAAA...$ est le point fixe f_- . L'ensemble limite obtenu à partir de la répétition infinie des transformations a et A est formé des deux points f_+ et f_- (figure 4).

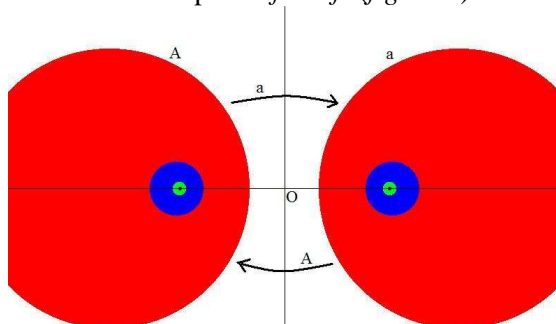


Figure 4 : Les cercles A et a en rouge, ainsi que les disques aa et aaa dans a , en bleu et en vert, et AA et AAA dans A , en bleu et en vert, convergeant vers les points limites 1 et -1 .

Le résultat sera le même si au lieu de prendre la transformation de Möbius a la plus simple, celle que nous avons choisie, on en prend une autre. Et si l'on conjugue cette transformation avec une autre transformation de Möbius, on aura d'autres points fixes et des cercles de rayon différent, mais l'ensemble limite sera toujours formé des deux points fixes.

Exercice 4 : Ensemble limite de deux cercles extérieurs l'un à l'autre, et de rayon différent

Prendre deux cercles de centres C et C' situés sur Ox , par exemple $OC = -1$, $OC' = 1,4$, et de rayon différent, par exemple $R = 0,6$ et $R' = 1,2$. On sait que les transformations de Möbius faisant passer de l'un à l'autre sont de la forme $z' = \frac{R'\bar{v}(z-C) + RR'\bar{u}}{u(z-C) + Rv} + C'$ avec $|u|^2 - |v|^2 = 1$. On suppose pour simplifier que $v = 0$, d'où $|u| = 1$. Traiter les cas où $u = i$, $u = 1$ et $u = e^{i\pi/6}$.

La transformation est de la forme $z' = \frac{RR'\bar{u}}{u(z-C)} + C' = \frac{C'u z + RR'\bar{u} - CC'u}{uz - uC}$. Les résultats obtenus à partir de cette transformation et de son inverse sont donnés sur la *figure 5*. On constate que l'ensemble limite est toujours formé des deux points fixes des transformations.

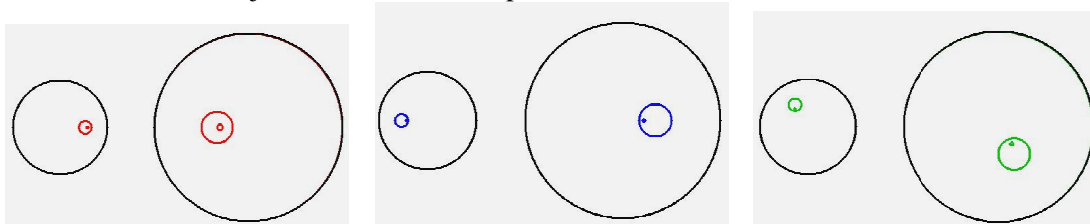


Figure 5 : Les deux cercles et leurs images convergeant vers les points fixes, pour $u = i$, $u = 1$ et $u = e^{i\pi/6}$.

1.3. Cas de deux cercles tangents

Dans le cas de deux cercles tangents extérieurement, si l'on veut qu'il y ait convergence vers le point de contact, on doit prendre une transformation de Möbius de type parabolique, qui admet un point fixe unique. Rappelons qu'une telle transformation est de la forme $z' = \frac{(1+f)t z - f^2 t}{t z + 1 - f t}$ où f est le point fixe, et t un paramètre. Si l'on prend les deux cercles tangents en 0 avec leurs centres sur Ox , la transformation devient : $z' = \frac{z}{t z + 1}$. Dans le cas où t est réel, cette transformation conserve l'axe des x . Avec les deux cercles a et A centrés sur Ox ⁴, leurs images répétées sont des cercles eux aussi centrés sur Ox , et ils convergent vers le point fixe O , qui constitue l'ensemble limite (*figure 6*).

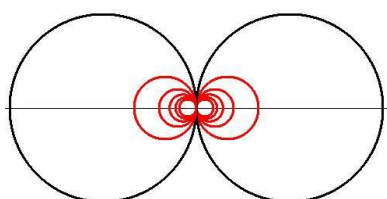


Figure 6 : Deux cercles tangents a et A , avec quelques-uns de leurs transformés aa, aaa, \dots ou AA, AAA, \dots en rouge.

On n'obtient plus le même phénomène si la transformation n'est pas parabolique, comme le montre l'exercice suivant.

Exercice 5 : Cercles tangents et transformation de Möbius hyperbolique

1) Comment s'écrivent les transformations de Möbius ayant pour points fixes $f_+ = 0$ attracteur, et $f_- = -1$ repousseur ? Parmi elles, déterminer la transformation unique a faisant passer du point -2 au point 2 , et vérifier qu'elle est hyperbolique.

On sait que la forme normale d'une transformation de Möbius à deux points fixes est $z' = \frac{(f_+ - \mu f_-)z + (\mu - 1)f_+ f_-}{(1 - \mu)z + \mu f_+ f_-}$ où μ est le multiplicateur. Dans le cas présent, les transformations de Möbius sont de la forme :

⁴ Le paramètre t est déterminé par la donnée des deux cercles a et A . Par exemple, si l'on prend deux cercles de rayon 1, le point -2 est envoyé en 2 , ce qui impose $t = 1$. Ou encore, en prenant deux cercles de rayon $1/2$ et 1 , le fait d'envoyer le point -1 en 2 impose $t = 3/2$.

$z' = \frac{\mu z}{(1-\mu)z+1}$. Avec en plus le point -2 transformé en 2 , on obtient : $z' = \frac{(1/3)z}{(2/3)z+1}$. Comme on a $\mu = 1/3$ réel, la transformation est hyperbolique.

2) Montrer que cette transformation de Mobius a fait passer du cercle A de centre -1 et de rayon 1 au cercle a de centre 1 et de rayon 1 . Vérifier que l'extérieur de A est transformé en l'intérieur de a .

Le cercle A passant par $f+ = 0$ et par le point -2 est transformé en un cercle a passant par 0 et par le point 2 . D'autre part, la transformation a dont tous les coefficients sont réels laisse invariant l'axe des x . Le cercle A étant orthogonal à Ox , il en est de même pour a . Les deux cercles A et a sont tangents en 0 , et le cercle a a pour centre 1 et pour rayon 1 . Le point -1 est à l'intérieur de A et à l'extérieur de a . Comme il est transformé en lui-même, on a bien l'extérieur de A qui devient l'intérieur de a .

3) Comment sont disposés les cercles $a(a) = aa$, $a(aa) = aaa$, etc ?

Le cercle a étant extérieur au cercle A , le cercle $a(a) = aa$ est à l'intérieur de a , et il est tangent à a en 0 . De même le cercle aaa est à l'intérieur de aa et tangent à a en 0 . On obtient une succession de cercles emboîtés tous tangents au cercle a en 0 , avec à la limite le point fixe attracteur 0 .

4) Ecrire la transformation A inverse de a . Qu'arrive-t-il aux cercles $A(A) = AA$, $A(AA) = AAA$, etc. ? Conclure.

L'écriture normalisée de la transformation a est $z' = \frac{(1/\sqrt{3})z}{(2/\sqrt{3})z + \sqrt{3}}$. On en déduit l'écriture de l'inverse A : $z' = \frac{\sqrt{3}z}{-(2/\sqrt{3})z + (1/\sqrt{3})} = \frac{3z}{-2z+1}$. Le cercle AA est situé à l'intérieur de A et il lui est tangent. Notamment le point -2 sur A devient le point $-6/5$ sur AA . A son tour, le cercle AAA est intérieur à AA et tangent en 0 , passant par le point diamétral $A(-6/5) = 18/17$. Lors de ces itérations, ce point diamétral est attiré vers le point fixe attracteur -1 de A . A la limite, on n'obtient plus un point mais le cercle de diamètre $[0 \ 1]$ (figure 7). Dans ces conditions, les deux cercles a et A ne sont plus appariés comme on l'aurait voulu.

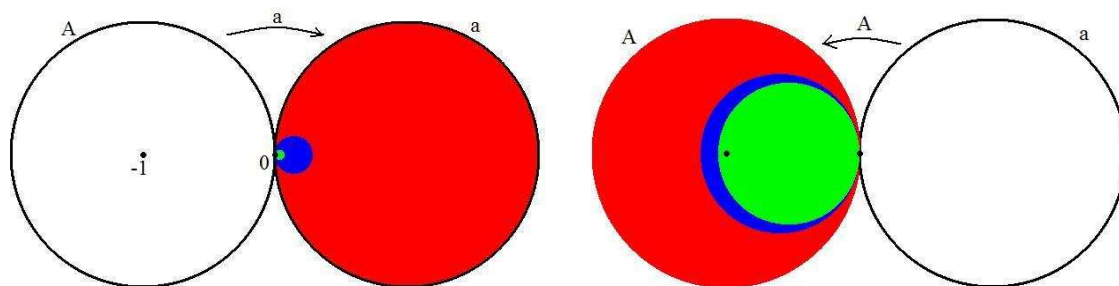


Figure 7 : A gauche la transformation a avec les disques a en rouge, aa en bleu et aaa en vert, à droite la transformation A avec les disques A , AA et AAA .

Ce que nous avons fait avec deux cercles, nous allons le généraliser. En prenant plusieurs cercles, en nombre pair, et extérieurs les uns aux autres, on peut les appairer deux à deux comme on vient de l'expliquer. Commençons par traiter le cas particulier de quatre cercles régulièrement disposés.

2. Quatre cercles régulièrement disposés

Considérons quatre cercles de même rayon, tous orthogonaux au cercle unité, avec leurs centres disposés sur les axes Ox et Oy , comme indiqué sur la figure 8. Leurs caractéristiques sont fonction du

paramètre θ , angle entre un axe et la tangente à un cercle. Cet angle est compris entre 0 et $\pi/4$. Les cercles sont appariés par les 2 transformations de Mobius \mathbf{a} et \mathbf{b} , \mathbf{a} faisant passer de A à a et \mathbf{b} de B à b .

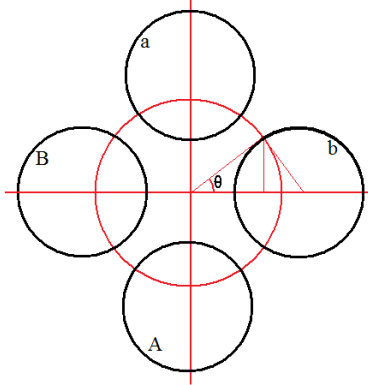


Figure 8 : Les quatre cercles de même rayon A, a, B, b , appariés de A vers a par la transformation \mathbf{a} , et de B vers b par la transformation \mathbf{b} .

Une transformation simple \mathbf{b} faisant passer de B à b s'écrit $z' = \frac{(1/\sin \theta)z + 1/\tan \theta}{(1/\tan \theta)z + 1/\sin \theta}$, comme cela a été expliqué dans l'exercice 3. La transformation \mathbf{a} , de A à a , s'en déduit en conjuguant \mathbf{b} avec la rotation R de centre O et d'angle $\pi/2$, soit :

$$A \xrightarrow{R^{-1}} B \xrightarrow{\mathbf{b}} b \xrightarrow{R} a$$

$$z \mapsto z_1 = -iz \mapsto z_2 = \frac{(1/\sin \theta)z_1 + 1/\tan \theta}{(1/\tan \theta)z_1 + 1/\sin \theta} = \frac{-i(1/\sin \theta)z + 1/\tan \theta}{-i(1/\tan \theta)z + 1/\sin \theta} \mapsto z' = \frac{(1/\sin \theta)z + i/\tan \theta}{(-i/\tan \theta)z + 1/\sin \theta}$$

On obtient ainsi deux transformations \mathbf{a} et \mathbf{b} , ainsi que leurs inverses \mathbf{A} et \mathbf{B} . Appliquons ces quatre transformations aux quatre cercles ou disques, et notons-les avec les lettres correspondantes. Par exemple, avec \mathbf{b} , on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(B) &= b \\ \mathbf{b}(b) &= bb \\ \mathbf{b}(A) &= bA \\ \mathbf{b}(a) &= ba \end{aligned}$$

Le cercle b étant déjà tracé, on obtient trois nouveaux cercles bb, bA, ba . Comme les trois cercles b, A, a sont extérieurs au cercle B , ces trois cercles sont intérieurs au cercle b , et extérieurs l'un à l'autre. En faisant de même avec les autres transformations, on trouve 12 nouveaux cercles numérotés comme sur la figure 9. A l'étape suivante, on trouve 36 nouveaux cercles correspondant à des mots de longueur 3. Et ainsi de suite, avec à chaque fois une multiplication des cercles par trois. A la limite, lorsque les mots ont une longueur infinie, les cercles se réduisent à des points. On obtient ce que l'on appelle l'ensemble limite. Comme tous les cercles restent tous orthogonaux au cercle unité, l'ensemble limite est une poussière de points tous situés sur ce cercle unité.

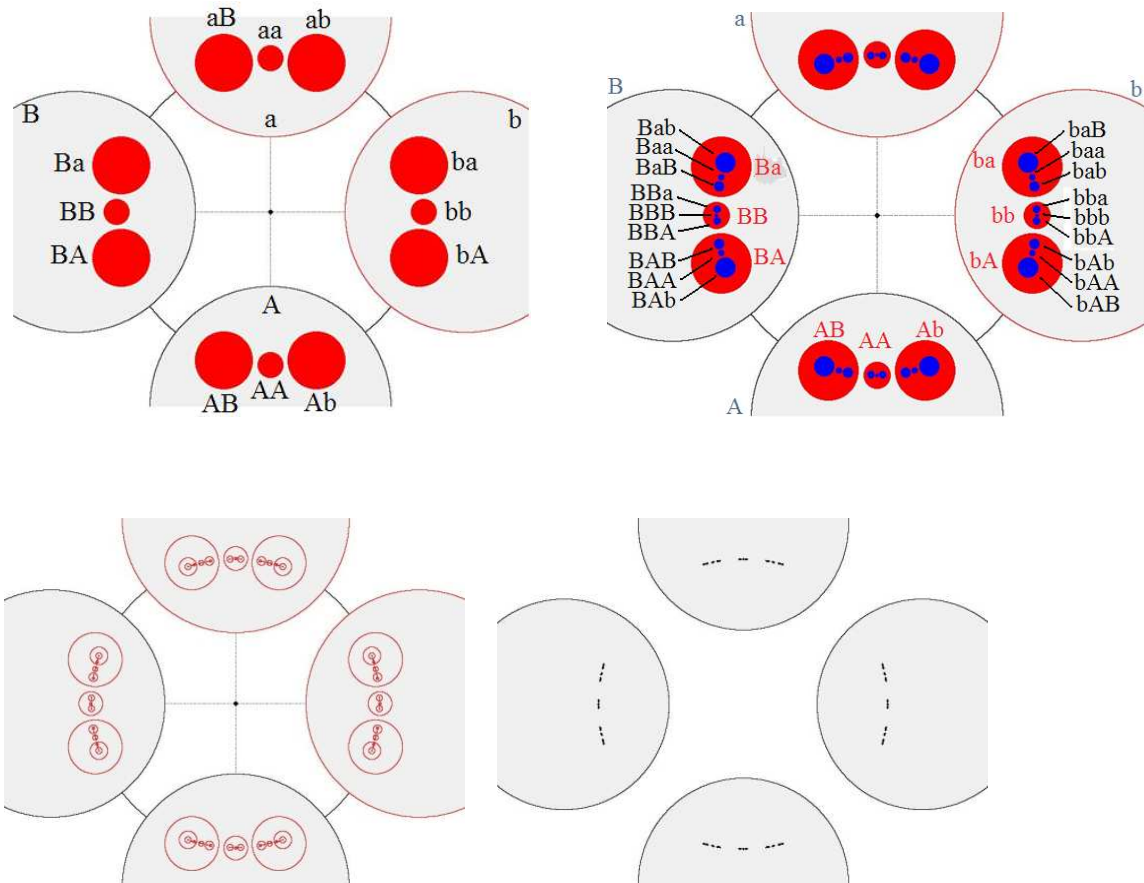


Figure 9 : En haut, les premiers cercles numérotés par des mots de longueur 1, 2 et 3. En bas, l'évolution vers l'ensemble limite, qui se réduit à une poussière de points, à droite.

2.1. Le groupe de Schottky de paramètre θ

Les transformations de Möbius a et b qui relient les cercles initiaux deux à deux engendrent un groupe appelé groupe de Schottky paramétré par l'angle θ , du nom de son précurseur dans les années 1890. Les mots associés aux cercles à toutes les étapes du processus, à base des deux lettres a et b , ainsi que de leurs inverses A et B , décrivent ce groupe. Et tout mot à base de a , b , A , B , où l'on a supprimé toutes les occurrences des couples entre inverses aA , Aa , bB , Bb , ce que l'on appelle un mot réduit, donne un cercle du groupe, ou encore une transformation de Möbius engendrée par a et b . Comme il n'existe aucune autre contrainte de réduction sur ces mots, on dit qu'il s'agit d'un groupe libre.

La règle de construction de ces mots est simple. À partir des quatre mots initiaux a , b , A , B de longueur 1, on passe d'un mot de longueur L à trois mots réduits de longueur $L + 1$. Par exemple si un mot se termine par a , ses successeurs s'obtiennent en lui ajoutant a , b ou B -il suffit d'éviter d'obtenir le couple aA .

2.2. Le groupe de Schottky avec les cercles tangents en succession

Prenons le cas extrême où l'on choisit les quatre cercles a , b , A , B tangents, toujours avec le même rayon. Cela revient à prendre $\theta = \pi/4$, la transformation b s'écrivant alors $z' = \frac{\sqrt{2}z + 1}{z + \sqrt{2}}$. On en déduit

la transformation a , grâce à la formule précédemment trouvée :

$$z' = \frac{(1/\sin \theta)z + i/\tan \theta}{(-i/\tan \theta)z + 1/\sin \theta} = \frac{\sqrt{2}z + i}{-iz + \sqrt{2}}$$

Les quatre cercles, tous orthogonaux au cercle unité, ont le même rayon rayon 1 et ils ont pour centres $(\pm\sqrt{2}, 0)$ et $(0, \pm\sqrt{2})$. Dans ce cas l'ensemble limite couvre tout le cercle unité (*figure 10*).

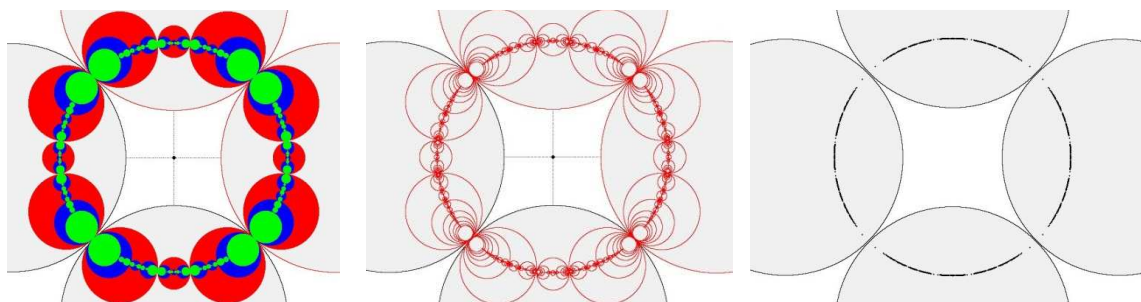


Figure 10 : Evolution vers l'ensemble limite, qui est le cercle unité.

Le dessin final de la *figure 10 à droite* montre que la vitesse de convergence est beaucoup plus faible aux abords des points de tangence des cercles. En fait dans le programme qui permet d'aboutir à ce dessin, nous avons fabriqué au hasard des mots d'une grande longueur pour avoir les points limites. Il se trouve que les points de contact des cercles correspondent à des mots périodiques de période 4. La difficulté pour les obtenir peut être due à certaines imperfections du générateur aléatoire de l'ordinateur. Mais surtout, comme on le verra plus tard, ces mots correspondent à des transformations paraboliques, qui ont tendance à évoluer plus lentement que les transformations loxodromiques ou hyperboliques.⁵ Par exemple le point de contact des cercles a et b est le mot périodique \overline{baBA} dans le disque b , et \overline{abAB} dans le disque a , ces deux mots venant se confondre au point de contact. Cela se vérifie en prenant les branches de gauche de l'arbre démarrant en b , et celles de droite à partir de a (*figure 11*).

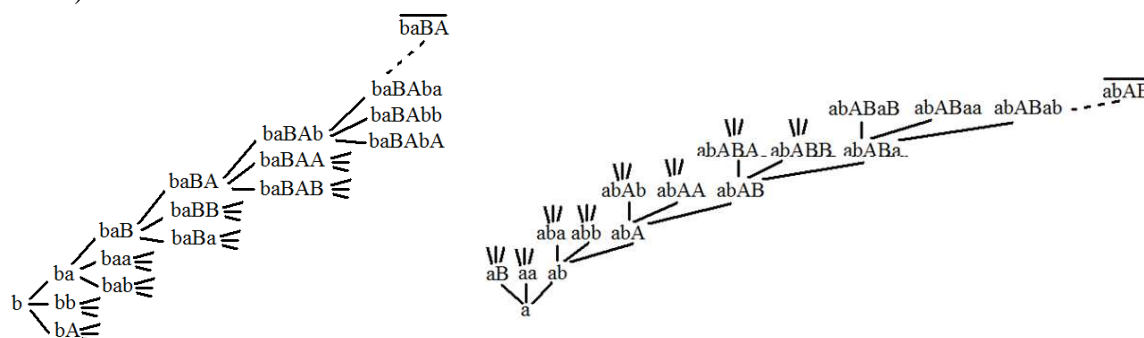
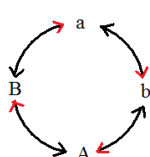


Figure 11 : Développement des branches gauches à partir de b , et des branches droites à partir de a , pour aboutir au point de contact des cercles a et b .



La règle du jeu pour passer d'un mot de longueur n se terminant par une lettre x à l'un de ses successeurs de longueur $n + 1$ est la suivante, selon que l'on va tout droit, ou à gauche, ou à droite dans l'arborescence : dans le premier cas, on répète la lettre x , dans le cas où l'on va à gauche, on ajoute la lettre qui suit x en tournant dans le sens trigonométrique sur le cercle ci-contre, et si l'on va à droite, on tourne en sens inverse sur ce cercle.

⁵ Les transformations paraboliques sont conjuguées avec les translations $z' = z + q$ qui évoluent linéairement vers l'infini, tandis que les transformations de type loxodromique sont conjuguées avec les transformations de la forme $z' = k z$, qui pour $|k| > 1$ évoluent exponentiellement vers l'infini.

Exercice 6 : Variante avec les cercles de rayons différents deux à deux mais orthogonaux au cercle unité

Prendre les deux cercles B et b de même rayon R , définis par un angle θ autre que $\pi/4$. Le cercle unité coupe ces cercles en T et T' . Prendre les cercles A et a centrés sur Oy et tangents aux cercles B et b en T et T' . On a alors $R' \neq R$. Quel est l'ensemble limite ?

On a $R = \tan\theta$ et $R' = \tan(\pi/2 - \theta) = 1/\tan\theta$. Le cercle unité reste orthogonal aux quatre cercles. Sous l'effet répété des transformations a, b, A, B , on obtient des cercles qui restent orthogonaux au cercle unité. L'ensemble limite reste le cercle unité (figure 12).

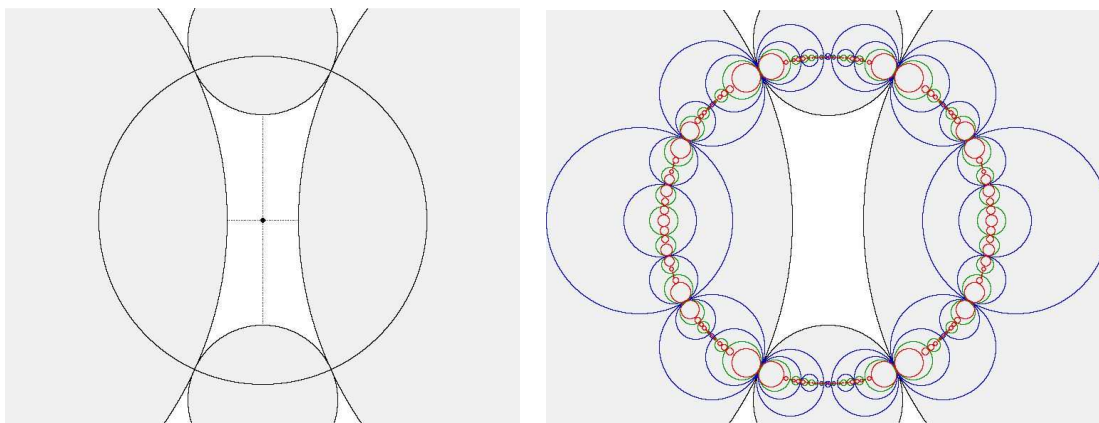


Figure 12 : Chaîne de quatre cercles tangents, orthogonaux au cercle unité, avec la formation d'un collier de cercles convergeant vers le cercle unité.

2.3. Groupe de Schottky fuchsien

Dans tout ce qui précède, nous avons trouvé un ensemble limite qui est situé sur le cercle unité, qu'il s'agisse d'une poussière de points -un ensemble totalement déconnecté, ou du cercle lui-même. On est alors dans le contexte d'un groupe de Schottky dit fuchsien. Rappelons qu'un groupe fuchsien est un sous-groupe discret de transformations de Möbius conservant le demi-plan de Poincaré ou encore le disque de Poincaré. Dans le contexte du disque de Poincaré, où les arcs de cercles sont des droites (des géodésiques) et où les transformations de Möbius concernées sont des isométries positives, la figure délimitée par les quatre arcs de cercles est un domaine fondamental, dont les images isométriques pavent le disque, avec un ensemble limite situé sur l'horizon -le cercle unité.

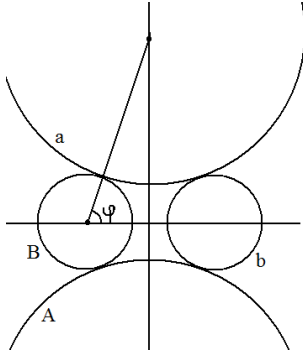
3. Chaînes de quatre cercles tangents et fractales

3.1. Le collier fractal

Jusqu'à présent, nous avons pris quatre cercles tangents dont les points de contact étaient situés sur le cercle unité qui leur est orthogonal. Dorénavant, il n'en sera plus ainsi. Reprenons les deux cercles B et b centrés en C_B et C_b sur Ox et de même rayon R , comme précédemment, avec un angle θ donné séparant l'axe Ox d'une tangente (OT). On rappelle que $R = \tan \theta$, et que $OC_b = OC_B = 1 / \cos \theta$.

Conservons la transformation simple b faisant passer de B à b , soit $z' = -\frac{R^2}{z - C_B} + C_b$, ce qui donne :

$$z' = \frac{(1/\sin \theta)z + 1/\tan \theta}{(1/\tan \theta)z + 1/\sin \theta}.$$



Puis prenons deux cercles A et a centrés en C_A et C_a sur Oy , de même rayon R' , et tangents aux cercles B et b en des points qui ne sont plus sur le cercle unité (autres que T notamment). Appelons φ l'angle de Ox avec $(C_B C_a)$. On a :

$$\tan \varphi = OC_a / OC_B$$

$$OC_a = \tan \varphi / \cos \theta$$

$$\cos \varphi = OC_B / (R + R') = 1 / (\cos \theta (\tan \theta + R'))$$

$$= 1 / (\sin \theta + \cos \theta R')$$

$$R' = \frac{1 - \cos \varphi \sin \theta}{\cos \varphi \cos \theta}$$

Choisissons une transformation de Möbius a faisant passer de A à a analogue à celle qui faisait passer de B à b . Pour cela procédons par conjugaison en commençant par envoyer le cercle A pour qu'il ait son centre sur Ox du côté négatif, grâce à la rotation de centre O et d'angle $-\pi/2$:

$z \mapsto z_1 = -iz$, puis faisons la transformation analogue à b :

$$z_1 \mapsto z_2 = -\frac{R'^2}{z_1 + \tan \varphi / \cos \theta} + \tan \varphi / \cos \theta \quad (\text{puisque } OC_a = \tan \varphi / \cos \theta)$$

$$= \frac{R'^2}{iz - \tan \varphi / \cos \theta} + \tan \varphi / \cos \theta$$

Enfin faisons la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$ pour remettre le cercle a à sa place :

$$z_2 \mapsto z' = iz_2 = \frac{iR'^2}{iz - \tan \varphi / \cos \theta} + i \tan \varphi / \cos \theta$$

$$= \frac{R'^2}{z + i \tan \varphi / \cos \theta} + i \tan \varphi / \cos \theta$$

$$= \frac{i(\tan \varphi / \cos \theta)z + R'^2 - (\tan \varphi / \cos \theta)^2}{z + i \tan \varphi / \cos \theta}$$

Avec $R' = \frac{1 - \cos \varphi \sin \theta}{\cos \varphi \cos \theta}$, on vient d'obtenir la transformation a faisant passer de A à a .

En fabriquant les mots à base des lettres a, b, A, B , on obtient encore un collier de cercles jointifs et imbriqués les uns dans les autres, mais avec à la limite une courbe fermée continue qui maintenant présente une allure fractale avec de multiples ruptures de pente⁶ (figure 13). Le groupe des transformations n'est plus fuchsien, mais comme la courbe obtenue est une certaine déformation d'un cercle, on dit que le groupe est quasi-fuchsien.

⁶ Il s'agit de ce que l'on appelle une courbe de Jordan. Celle-ci est une courbe fermée du plan qui ne se recoupe pas (elle n'a pas de points doubles). Elle sépare alors le plan en deux composantes connexes, son intérieur et son extérieur.

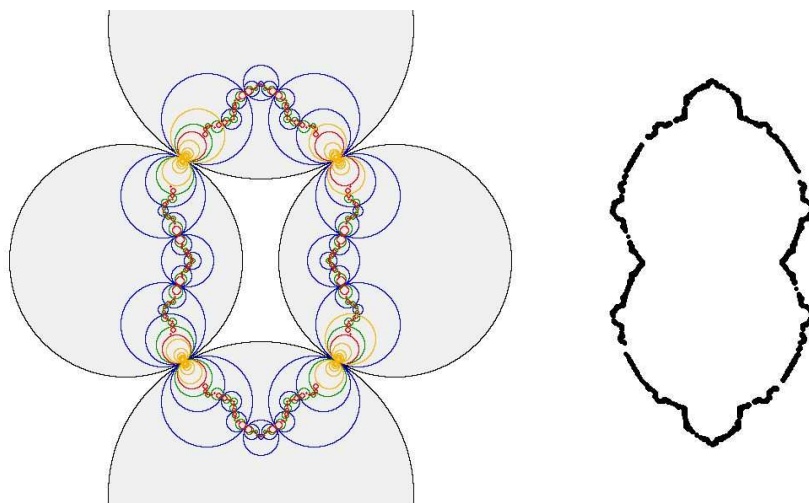
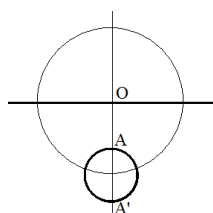


Figure 13 : Le collier de cercles et son ensemble limite.

Exercice 7 : Fractales à partir d'une chaîne de 4 cercles tangents, l'un étant une droite

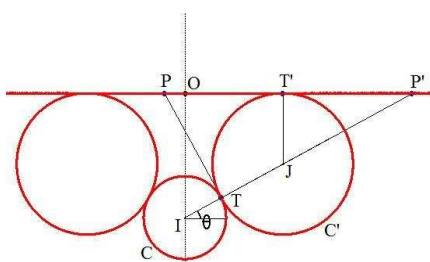
1) On a vu qu'une transformation de Mobius $a : z' = \frac{\sqrt{2}z + i}{-iz + \sqrt{2}}$ faisait passer d'un cercle centré

sur Oy à un autre cercle symétrique du précédent par rapport à Oy, ces cercles ayant pour rayon 1 et pour centres $(0, \pm\sqrt{2})$ (cf. paragraphe 2.2.). Ces cercles font partie du faisceau de cercles de points limites $\pm i$. On sait que la même transformation a fait passer d'un cercle du faisceau à un cercle du faisceau (cf. exercice 3). Déterminer le cercle C du faisceau qui a pour transformé l'axe radical Oy.



Le point A est envoyé en $O : A = -i/\sqrt{2}$. On a aussi $OA \cdot OA' = 1$, $OA' = \sqrt{2}$, $A' = -i\sqrt{2}$. Le cercle C a pour centre $I = (A + A')/2 = -i3\sqrt{2}/4$ et pour rayon $R_C = (OA' - OA)/2 = (\sqrt{2} - 1/\sqrt{2})/2 = \sqrt{2}/4$.

2) Prendre un point T d'abscisse positive sur le cercle C précédent, de centre I et de rayon R_C . Sa position est déterminée par l'angle θ entre l'horizontale et $[IT]$. Puis construire le cercle C' tangent à Ox ainsi qu'au cercle C en T . Appelons J son centre qui a une abscisse positive. Déterminer les coordonnées de J ainsi que le rayon $R_{C'}$ de ce cercle en fonction de θ .



Le point T a pour coordonnées $(R_C \cos\theta, y_I + R_C \sin\theta)$. La tangente en T aux deux cercles coupe l'axe des x en P , de coordonnées $(x_T + y_T \tan\theta, 0)$. La droite (IT) coupe Ox en P' sauf si $\theta = 0$. Ce point P' a pour coordonnées $(-y_I / \tan\theta, 0)$. Connaissant P et T , on calcule la distance PT . Le centre J du cercle C' se projette en T' sur Ox, et $PT' = PT$, ce qui permet d'avoir le point T' d'abscisse $x_P + PT$. On en déduit l'abscisse du centre J de C' : $x_J = x_{T'}$. On a aussi $P'T' / P'O = T'J / OI$, soit $R_{C'} = T'J = OI \times P'T' / OP' = -y_I \times P'T' / x_{P'}$ si $\theta > 0$ ou $y_I \times P'T' / x_{P'}$ si $\theta < 0$ (car P' est à gauche de O dans ce cas). Finalement $y_J = -R_{C'}$.

3) On appelle dorénavant A le cercle C et a l'axe des x , ainsi que b le cercle de centre J et B son symétrique par rapport à Oy. Traiter le cas particulier où $\theta = 0$, en écrivant les transformations a et b appariant les cercles deux à deux. Tracer l'ensemble limite.

On connaît déjà la transformation a . Pour l'autre on a :

$y_J = y_I = -3\sqrt{2}/4$, $x_I = R_C - y_I = 3\sqrt{2}/4 + \sqrt{2}/4 = \sqrt{2}$, et $R_J = 3\sqrt{2}/4$. Le cercle b a pour centre $C_b = \sqrt{2} - i3\sqrt{2}/4$ et pour rayon $R = 3\sqrt{2}/4$, tandis que le cercle B a pour centre $C_B = -\sqrt{2} - i3\sqrt{2}/4$ et le même rayon $3\sqrt{2}/4$. Comme transformation \mathbf{b} faisant passer de B à b , nous prenons comme on l'a fait jusqu'ici $z' = \frac{-R^2}{z - C_B} + C_b = \frac{C_b z - R^2 - C_B C_b}{z - C_B} = \frac{C_b z - R^2 + x_b^2 + y_b^2}{z - C_B}$

Cela donne dans le cas présent : $z' = \frac{(\sqrt{2} - i3\sqrt{2}/4)z + 2}{z + \sqrt{2} + i3\sqrt{2}/4}$. On aboutit alors à l'ensemble limite de la figure 14, en forme de fractale.

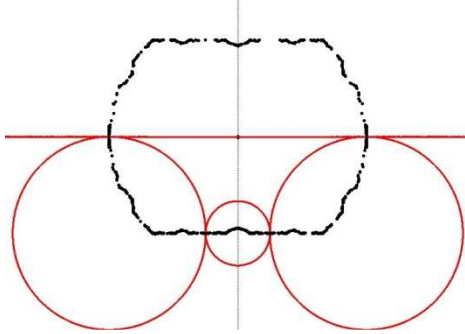


Figure 14 : La chaîne des quatre cercles tangents (l'un étant une droite), et son ensemble limite.

4) Déterminer pour quelle valeur de θ l'ensemble limite est un cercle.

Le cercle unité est orthogonal au cercle A et au cercle-droite a . On aura un ensemble limite qui sera ce cercle unité lorsque les cercles B et b sont aussi orthogonaux au cercle unité. Le point T de contact entre le cercle A et le cercle b doit être sur le cercle unité, d'où $\tan \theta = \sqrt{2}/4$ (ou encore $\sin \theta = 1/3$, et le point P est en O). On a alors le résultat escompté (figure 15).

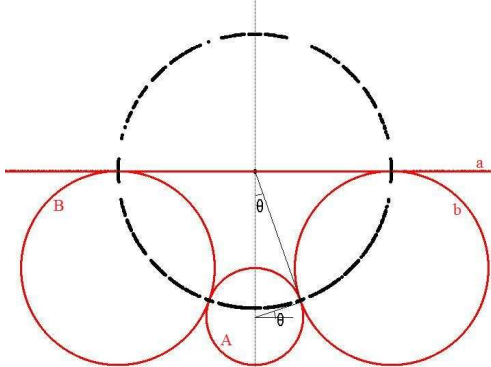


Figure 15 : Cas où l'ensemble limite est un cercle.

5) A partir des résultats trouvés au 2), en déduire les transformations \mathbf{a} et \mathbf{b} , et déterminer l'ensemble limite pour diverses valeurs de θ . Quelles sont les valeurs limites de θ ?

Connaissant les cercles a , b , A , B grâce aux calculs précédents, on en déduit les transformations \mathbf{a} et \mathbf{b} :

$$\mathbf{a}: z' = \frac{\sqrt{2}z + i}{-iz + \sqrt{2}}$$

$$\mathbf{b}: z' = \frac{-R^2}{z - C_B} + C_b = \frac{C_b z - R^2 + x_b^2 + y_b^2}{z - C_B} \quad (R \text{ étant le rayon des cercles } b \text{ et } B).$$

On constate que θ doit être compris entre $-0,5$ et 1 , valeurs pour lesquelles les cercles b et B deviennent tangents. Les figures 16 et 17 donnent quelques résultats d'ensembles limites.

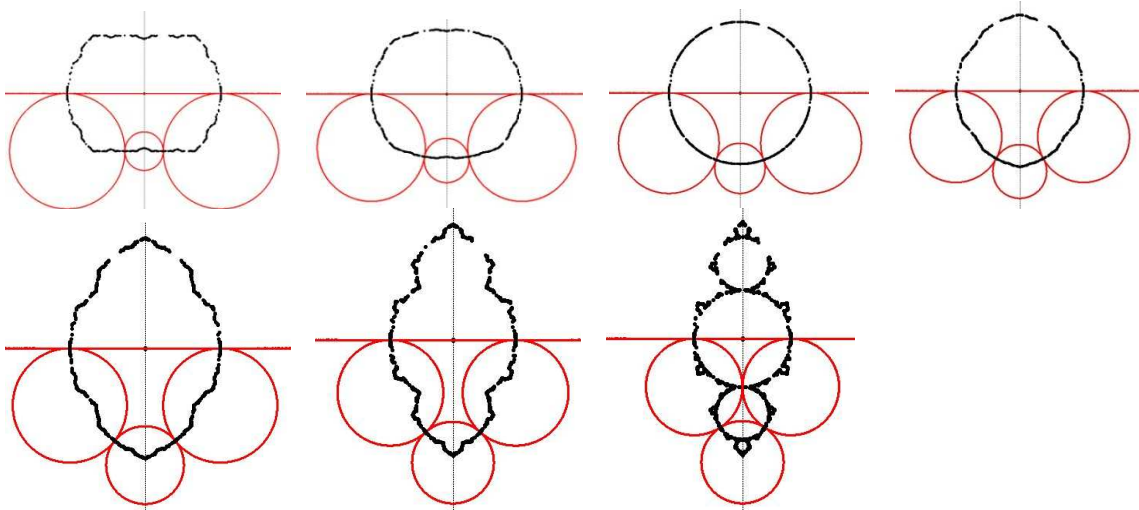


Figure 16 : Ensembles limites pour les valeurs croissantes positives $\theta = 0, \theta = 0,17, \theta = 0,34, \theta = 0,5, \theta = 0,67, \theta = 0,84, \theta = 1$.

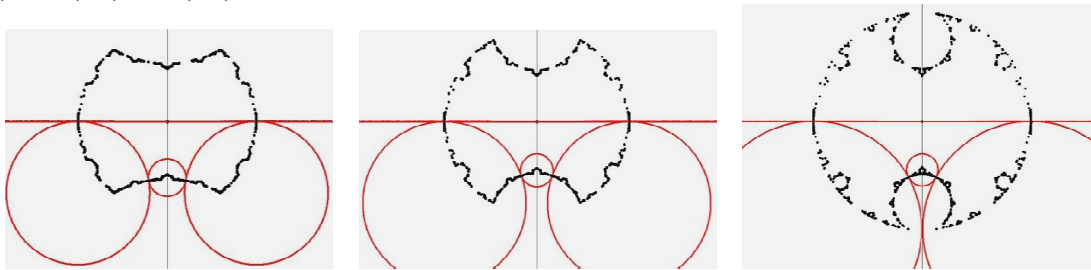


Figure 17 : Ensembles limites pour les valeurs négatives de $\theta : \theta = -0,17, \theta = -0,34, \theta = -0,5$.

A ce stade, faisons le point de la situation, celle d'une chaîne de cercles tangents en nombre pair. En utilisant des transformations de Mobius bien précises, nous avons trouvé des *colliers* de cercles et des ensembles limites sous forme de courbes fermées d'allure fractale. Mais que se passerait-il si l'on choisit d'autres transformations de Mobius appariant les cercles deux à deux ? En général rien ne va plus !

3.2. Le collier cassé

Reprenons la configuration des quatre cercles du *paragraphe 3.1.* précédent, et modifions la transformation **b** sans toucher à la transformation **a**. Au lieu de prendre $z' = -\frac{R^2}{z - C_B} + C_b =$

$z' = \frac{(1/\sin \theta)z + 1/\tan \theta}{(1/\tan \theta)z + 1/\sin \theta}$ correspondant aux paramètres $u = i$ et $v = 0$ de la formule générale, prenons

$u = i e^{i\alpha}$ et $v = 0$ pour **b**. Cela donne : $z' = \frac{(1/\sin \theta)z + 1/\tan \theta + \tan \theta(1 - e^{-i2\alpha})}{(1/\tan \theta)z + 1/\sin \theta}$. Les résultats obtenus,

même pour une valeur faible de α , montrent une cassure de l'ensemble limite de part et d'autre des points de tangence (*figure 18*). On observe notamment que les cercles *ba* et *baB* (*figure 18 à gauche*) ne sont plus tangents au point de contact des deux cercles *b* et *a*, et même la cassure grandit au fil des itérations, aboutissant à un ensemble limite non connecté.

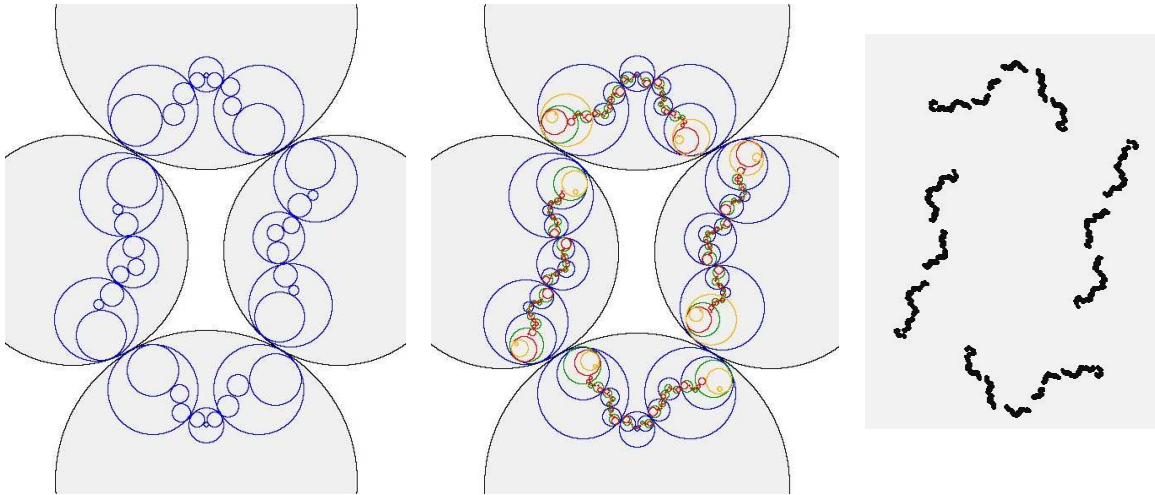
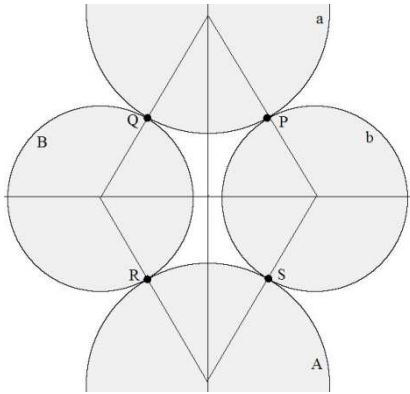


Figure 18 : A gauche les cercles après deux itérations pour $\alpha = 0,1$, au centre après une dizaine d'itérations, et à droite l'ensemble limite déconnecté.

3.3. Les contraintes pour avoir un collier



Appelons P, Q, R, S les points de contact entre les quatre cercles. Les transformations de Möbius a et b que nous avons choisies pour avoir un collier comme ensemble limite étaient telles que R soit envoyé en Q et S en P par a , et que Q soit envoyé en P et R en S par b . Comme nous venons de le voir, il y a cassure dès que Q n'est plus envoyé en P . On en déduit une condition nécessaire pour que l'ensemble limite soit d'un seul tenant :

$$a(R) = Q, a(S) = P, b(Q) = P, b(R) = S, \text{ ou inversement } A(Q) = R, A(P) = S, B(P) = Q, B(S) = R.$$

Il en découle notamment que $P \xrightarrow{A} S \xrightarrow{B} R \xrightarrow{a} Q \xrightarrow{b} P$, soit $baBA(P) = P$, ou encore en inversant $abAB(P) = P$.⁷ La transformation $abAB$ est appelée le commutateur de a et b . Cela signifie aussi que les cercles $baBA$ et $abAB$ passent par P .

Ce qui vaut pour P s'applique aussi aux autres points Q, R, S :

$$\begin{aligned} BabA(Q) &= Q \text{ ou } aBA b(Q) = Q \\ BAb a(R) &= R \text{ ou } AB a b(R) = R \\ bAB a(S) &= S \text{ ou } Ab a B(S) = S \end{aligned}$$

Revenons au commutateur $abAB$ qui fixe le point P . Deux cas sont à envisager :

* Soit ce point P est l'unique point fixe, et les cercles soumis à la transformation viennent s'agglutiner en ce point P . La transformation est parabolique.

* Soit il existe un deuxième point fixe, la transformation est alors hyperbolique ou loxodromique.⁸ Mais dans ce cas, comme on l'a vu dans l'exercice 5, il y a convergence vers un cercle et non plus vers le deuxième point fixe. Ce cas n'est pas possible.

⁷ On peut vérifier sur la figure 18 que, lorsqu'on n'a plus de collier, le cercle baB , et a fortiori le cercle $baBA$ ne passe pas par P .

⁸ Elle ne peut pas être elliptique car dans ce cas, il n'y a pas de point fixe attracteur.

Une deuxième condition nécessaire pour avoir un collier est donc que la transformation commutateur $abAB$ (ou $baBA$) soit parabolique. Sa trace vaut donc ± 2 . Il doit en être de même pour $BabA$, $BAbA$ et $bABa$. Mais on constate que $b(BabA)B = abAB$, $ba(BAbA)AB = baBA$, $a(bABa)A = abAB$. Ces transformations sont toutes conjuguées au commutateur. Or la conjugaison conserve la trace. Finalement, la condition $abAB$ parabolique entraîne que les autres commutateurs le sont aussi.

Ce n'est pas tout. Pour une transformation de Mobius, le fait de changer tous les signes de la matrice qui lui est associée change sa trace en son opposée, aussi la trace est-elle définie au signe près. Mais dans le cas du commutateur, le fait de changer les signes de la matrice de a provoque aussi le changement des signes de la matrice de A , et dans ce cas la trace de $abAB$ reste inchangée. Elle n'est pas au signe près. Nous allons maintenant montrer qu'elle doit être égale à -2 , et non pas à 2 .

Supposons que $\text{Tr}(abAB) = 2$, et distinguons deux cas selon la nature de la transformation a :

* a est hyperbolique ou loxodromique, ce qui signifie que l'on peut s'arranger par conjugaison de l'écrire plus simplement sous la forme $z' = k z$ avec $|k| \neq 1$, de matrice $\frac{1}{\sqrt{k}} \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dans ce nouveau

contexte, la transformation b s'écrit $z' = \frac{az+b}{cz+d}$ avec $a d - b c = 1$. Lorsque l'on calcule le produit, on trouve $\text{Tr}(abAB) = 2 - b c (k - 1)^2 / k$. La trace est égale à 2 lorsque $b = 0$ ou $c = 0$. Si $b = 0$, la transformation b a un point fixe qui est 0 , tout comme a . Et il en est de même si $c = 0$, les deux transformations a et b ayant un même point fixe ∞ . Ce point fixe devrait être à la fois à l'intérieur strict des disques a ou A et des disques b ou B , ce qui est impossible dans la configuration de Schottky.

* a est parabolique, et l'on s'arrange par conjugaison pour qu'elle prenne la forme $z' = z + q$ avec $q \neq 0$, sinon on aurait l'identité, ce qui n'est pas possible dans le contexte de Schottky. Lors de cette même conjugaison, la transformation b s'écrit $z' = \frac{az+b}{cz+d}$ avec $a d - b c = 1$. On trouve alors $\text{Tr}(abAB) = 2 + q^2 c^2$. On aura $\text{Tr}(abAB) = 2$ lorsque $c = 0$. Les transformations a et b paratagent alors un même point fixe ∞ , ce qui est impossible comme on l'a vu.

Finalement, on doit avoir $\text{Tr}(abAB) = -2$. En résumé :

Pour une chaîne de quatre cercles tangents, les cercles opposés étant appariés deux à deux, les conditions permettant d'avoir un collier et une courbe fermée comme ensemble limite sont :

- 1) Les points de contact se correspondent correctement par les transformations a et b .
- 2) Le commutateur $abAB$ est parabolique.
- 3) La trace de $abAB$ est égale à -2 .

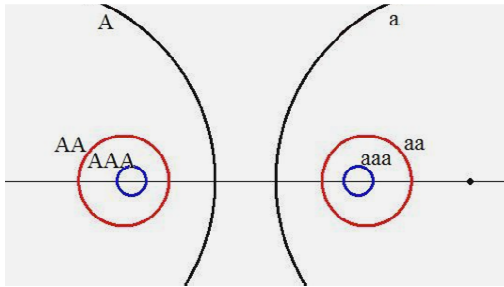
Toutes ces contraintes se vérifient aisément sur les transformations de Mobius que nous avons utilisées.

4. Inversion contre Mobius

Ici une mise au point s'impose. Tout ce que nous avons trouvé jusqu'ici aurait pu être fait beaucoup plus simplement en pratiquant des inversions. Avec des cercles C_1, C_2, \dots, C_n , il suffit de prendre à tour de rôle chaque cercle C_i (i de 1 à n) et d'inverser tous les autres cercles par rapport au cercle C_i , ce qui donne $n(n-1)$ cercles. Puis on recommence avec ces cercles... On arrive ainsi au même ensemble limite que celui trouvé en faisant les transformations de Mobius.

Pour le comprendre, reprenons le cas de deux cercles A et a de même rayon. On avait choisi comme transformation de Möbius $a : z' = -\frac{R^2}{z + C'} + C' = \frac{(1/\sin\theta)z + 1/\tan\theta}{(1/\tan\theta)z + 1/\sin\theta}$ (cf. paragraphe 1.1.).

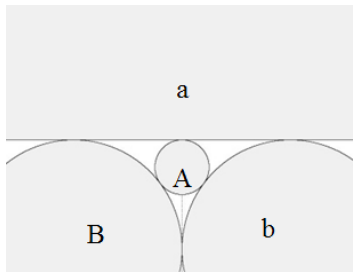
Toutes les transformations utilisées précédemment correspondaient à cette forme, et elles obéissaient à toutes les contraintes imposées. Mais on a vu que la transformation a transformait un point du cercle A en un point du cercle a symétrique par rapport à (Oy) . Appelons S cette symétrie. Il s'agit d'une transformation indirecte alors que a est une transformation directe. Alors composons S avec l'inversion J de cercle C_a (ou C'), elle aussi indirecte. Celle-ci conserve le cercle en transformant son intérieur en extérieur. La transformation a n'est autre que la composée $J \circ S$, et de même $A = S \circ J$.



On a alors $aa = a(a) = J \circ S(a) = J(A)$. Le cercle aa n'est autre que l'inverse du cercle A par rapport au cercle a .⁹ On a aussi $AA = A(A) = S \circ J(A) = S(aa)$. Le cercle AA est symétrique de aa par rapport à Oy . Passons maintenant à $aaa = a(aa) = a \circ J(A) = J \circ S \circ J(A) = J(AA)$. On passe aussi de AA à aaa par l'inversion J . Et ainsi de suite.

Alors tout ce que nous avons fait jusqu'ici avec les transformations de Möbius était-il d'une subtilité superflue ? Pas vraiment, car nous avons vu apparaître des groupes de transformations, des groupes fuchsien ou quasi-fuchsien, plus propices à des développements théoriques que ne le permettent les inversions. Et surtout, on sera en mesure de jouer avec les paramètres des transformations de Möbius pour qu'elles deviennent loxodromiques afin d'obtenir de nouveaux ensembles limites que les simples inversions sont incapables d'avoir.

5. Les cercles d'Apollonius



Nous avons vu dans l'exercice 7 le cas d'une chaîne de quatre cercles tangents dont l'un est une droite. Allons plus loin en faisant en sorte que le cercle A soit aussi tangent à la droite a , tout comme les cercles B et b . Chaque cercle est tangent aux trois autres. Choisissons un rayon égal à 1 pour les cercles B et b , avec leurs centres en $(-1, -1)$ et $(1, -1)$, de façon qu'ils soient tangents à a représenté par l'axe des x . On en déduit que le cercle A tangent à B , b et a a pour centre $(0, -1/4)$ et pour rayon $1/4$.

Avec les cercles A et a tangents en O , ainsi que B et b tangents en $(0, -1)$, les transformations a et b doivent être paraboliques, avec un point fixe unique, O pour la première, et $(0, -1)$ pour la deuxième.

On sait qu'une transformation parabolique est de la forme $z' = \frac{(1+f)t z - f^2 t}{t z + 1 - f t}$ où f est le point fixe.

Commençons par la transformation a , avec $f = 0$, soit $z' = \frac{z}{t z + 1}$, avec le point $-i/2$ envoyé à l'infini,

ce qui impose $t = -2i$, et

$$a : z' = \frac{z}{-2iz + 1}.$$

Passons à b avec $f = -i$, soit $z' = \frac{(1-it)z + t}{t z + 1 + it}$ et comme le point -1 est envoyé en 1 , on trouve

⁹ On peut vérifier que le centre du cercle aa , obtenu soit par transformation de Möbius soit par translation, a pour abscisse $(4 - 3 \sin^3 \theta) / (\cos \theta (4 - \sin^2 \theta))$.

$$b : z' = \frac{(1-i)z+1}{z+1+i}.$$

L'ensemble limite obtenu correspond à ce que l'on appelle les cercles d'Apollonius (figure 19).

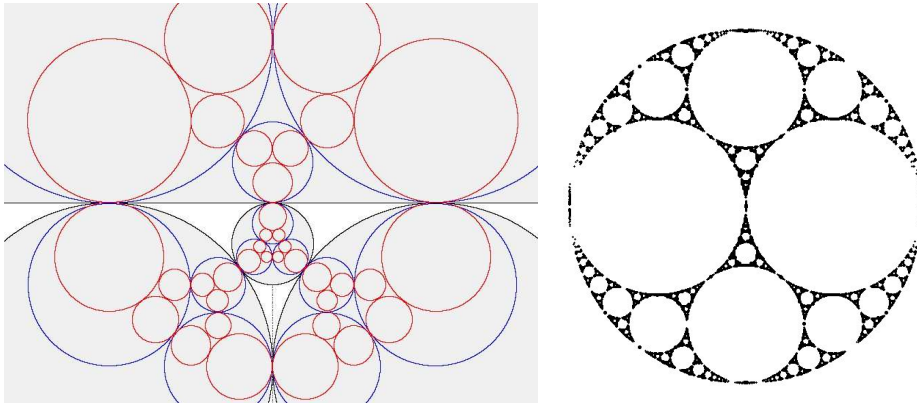
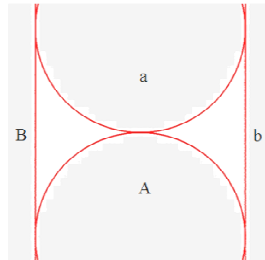
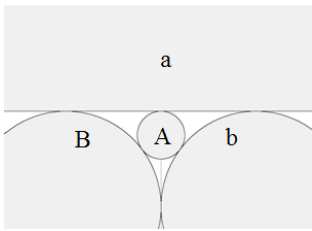


Figure 19 : A gauche, les cercles correspondant à des mots de longueur ≤ 3 . On remarquera que les cercles dont les mots associés ont pour longueur n au-dessus de Ox sont symétriques de ceux de longueur $n - 1$ au-dessous de Ox . A droite, l'ensemble limite.

Exercice 8 : La frise d'Apollonius



1) Déterminer la transformation M de Möbius faisant passer de la configuration précédemment utilisée à la configuration indiquée sur la figure ci-contre, où les cercles b et B deviennent des droites.

Prenons le repère dont l'origine 0 est le point de contact des cercles a et A dans les deux configurations. La transformation M cherchée fait passer de 0 à 0 , et aussi du point de contact $-i$ entre b et B au point ∞ , de façon que les cercles deviennent des droites parallèles. Elle est de la forme $z' = K \frac{z}{z+i}$. Enfin le point de contact 1 entre a et b est transformé en $1+i$, ce qui donne $K = 2i$. Finalement $z' = \frac{2iz}{z+i}$. On vérifie aussi que le point de contact -1 entre a et B devient bien le point $-1+i$.

2) Déterminer les transformations de Möbius a' et b' qui appartiennent les cercles dans la nouvelle configuration.

Les transformations a' et b' sont les conjuguées de a et b par le biais de M , soit :

$a'(z) = (M \circ a \circ M^{-1})(z)$ et $b'(z) = (M \circ b \circ M^{-1})(z)$. On trouve :

$$a'(z) = \frac{-z}{iz-1}$$

$$b'(z) = z+2$$

3) Construire l'ensemble limite correspondant.

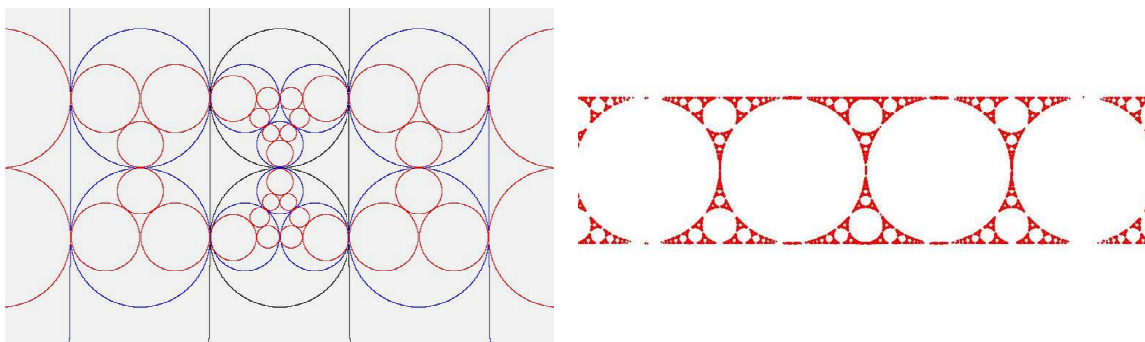


Figure 20 : A gauche premières itérations, à droite ensemble limite.

4) Montrer qu'à chaque étape, la figure constituée par les cercles situés entre les droites b et B ($-1 < x < 1$) sont symétriques par rapport à Ox et Oy .

Tous les cercles situés dans cette zone ont leurs mots qui commencent par a ou A .

Les cercles a et A sont manifestement symétriques par rapport à Ox et Oy . Plus précisément, avec un point z sur A , soit $z = -i + e^{i\theta}$, son image par a est $a(z) = -(-i + e^{i\theta}) / (i(-i + e^{i\theta}) - 1) = (i - e^{i\theta}) / (i e^{i\theta}) = e^{-i\theta} + i = \bar{z}$ qui est sur le cercle a .

La symétrie par rapport à Ox étant prouvée, passons à celle par rapport à Oy . Il suffit de se placer dans la zone des y positifs, où les cercles correspondent tous à des mots commençant par a . On vérifie en faisant le calcul que $a(-\bar{z}) = \overline{a(z)}$. Cela signifie que si deux points sont symétriques par rapport à Oy , leurs images par a le sont aussi. Le cercle a ayant pour axe de symétrie Oy , il s'ensuit qu'en prenant deux points symétriques sur a , leurs images sont aussi symétriques : les cercles aa , aaa , $aaaa$, etc. ont comme axe de symétrie Oy . D'autre part les cercles-droites b et B sont aussi symétriques par rapport à Oy . Deux points symétriques sur l'une et l'autre droite s'échangent, en faisant agir b sur celui qui est sur B et B sur celui qui est sur b . Les mots comme bb et BB , bbb et BBB , donnent des cercles symétriques, et comme on l'a vu avec a , les mots comme ab et aB , abb et aBB , aba et aBa , et deux mots quelconques où les b de l'un sont remplacés par des B pour avoir l'autre, et vice-versa, correspondent à des cercles symétriques.

5) On admettra ici que la partie de l'ensemble limite située entre -1 et 1 pour x est aussi délimitée par deux segments d'ordonnées ± 1 (on verra plus tard pourquoi). En déduire que l'ensemble limite est une frise ayant comme axes de symétrie Ox ainsi que Oy , et toutes les droites se déduisant de Oy par translations horizontales de ± 2 .

Comme la transformation b est une translation horizontale, le motif situé dans $-1 < x \leq 1$ se propage horizontalement, avec une période de longueur 2. De même la symétrie locale par rapport à Ox se propage à l'infini sur l'axe Ox . On a bien une frise délimitée par les droites $y = \pm 1$ avec Ox comme axe de symétrie ainsi que des axes verticaux séparés d'une distance égale à 2.

6. Cercles d'Apollonius et groupe modulaire

La question qui se pose, c'est de savoir pourquoi l'ensemble limite que nous venons d'obtenir est la configuration bien connue des cercles d'Apollonius, et notamment la frise précédente (cf. exercice 8), engendrée par les deux transformations a et b telles que

$$a(z) = \frac{-z}{iz - 1}$$

$$b(z) = z + 2$$

6.1. Sous-groupes engendrés par des chaînes de quatre cercles tangents

Pour comprendre, nous allons définir des sous-groupes du groupe engendré par a et b , en utilisant des ensembles de quatre cercles formant une chaîne de cercles tangents, ces cercles apparaissant lors de la construction de la frise. Donnons-en quelques exemples.

6.1.1. Premier exemple

Dès la deuxième étape du processus de construction, on constate que les cercles A , a , Ba , BA forment une chaîne de cercles tangents (*figure 21 à gauche*). On peut les appairer deux à deux,¹⁰ avec la transformation a faisant passer de A à a , et la transformation b_1 faisant passer de Ba à BA , avec $b_1 = BAb$. En effet $BAb(Ba) = BA(a)$ puisque $bB = Id$, et avec $A(a) = A$, $BA(a) = BA$, et l'on a bien $BAb(Ba) = BA$. Les cercles Ba et BA deviennent les cercles B_1 et b_1 . Le groupe engendré par a et b_1 fabrique un collier de cercles dont l'ensemble limite est le cercle orthogonal aux quatre cercles en leurs point de contact (*figure 21 à droite*), comme on le sait. On vient d'obtenir un cercle d'Apollonius de la frise.

Mieux encore : prenons le quadrilatère curviligne Q délimité par les quatre cercles initiaux A , a , Ba , $BA = B_1$, $BA = b_1$. Il est à l'intérieur du cercle limite d'Apollonius avec ses quatre sommets sur le cercle limite et des angles nuls (Q est en rouge sur la figure 21 à droite). Sous l'effet de B_1 , les quatre cercles deviennent les quatre cercles B_1a , B_1A , B_1B_1 , $B_1b_1 = B_1b_1(B_1) = B_1$, qui délimitent le quadrilatère image $B_1(Q)$ de Q , lui aussi intérieur au cercle limite avec ses quatre sommets sur lui. Il en est de même avec $b_1(Q)$, $a(Q)$ et $A(Q)$. En poursuivant le processus de construction, on obtient une infinité de quadrilatères tous intérieurs au cercle d'Apollonius, et qui forment un pavage du disque correspondant (*figure 21 à droite*).

Si l'on se place en géométrie hyperbolique, le disque devient le disque de Poincaré, et le quadrilatère idéal Q (avec ses sommets sur la bordure à l'infini) donne naissance à une infinité de quadrilatères tous isométriques, constituant un pavage du disque de Poincaré.

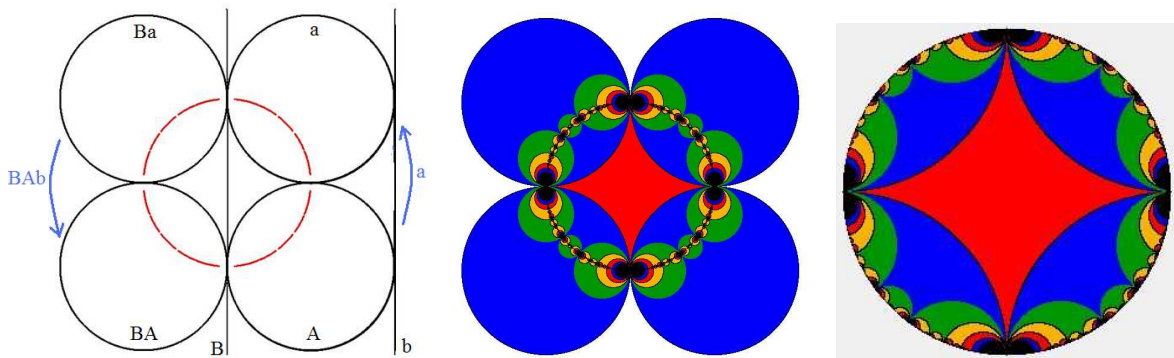


Figure 21 : A gauche la configuration de quatre cercles, avec leur appariement (en bleu) et le cercle limite en rouge. Au centre et à droite, le collier de cercles qui en découle et le pavage par des quadrilatères curvilignes à l'intérieur du cercle d'Apollonius.

La même méthode peut s'appliquer avec toute chaîne de quatre cercles tangents, que l'on apparie deux à deux, ce qui donnera un cercle d'Apollonius comme ensemble limite, et un pavage intérieur par des quadrilatères.

¹⁰ On remarque qu'à la différence de ce que nous avons fait jusqu'ici, ce sont des cercles adjacents, et non opposés, qui sont appariés.

6.1.2. Autre exemple

Traisons le cas particulier où deux cercles sont des droites. Les cercles concernés sont aB , ab , b et B (figure 22 à gauche). Le passage de ab à aB se fait par la transformation $a_2 = aBA$, et le passage de B à b par b . Les cercles obtenus sous l'effet de ces transformations sont tous portés par la droite d'équation $y = 1$, et celle-ci constitue l'ensemble limite. Le quadrilatère délimité par les quatre cercles initiaux (dont deux droites) et situé au-dessus (en rouge sur la figure 22 à droite) donne naissance à une succession de quadrilatères images situés au-dessus de la droite limite, et dont les sommets sont sur elle. Le motif situé entre les droites b et B se reproduit par translation tout au long de la droite. En géométrie hyperbolique, dans le demi-plan de Poincaré, cela correspond à un pavage par des quadrilatères idéaux isométriques. On reconnaît alors un dessin familier, lié à ce que l'on appelle le groupe modulaire.

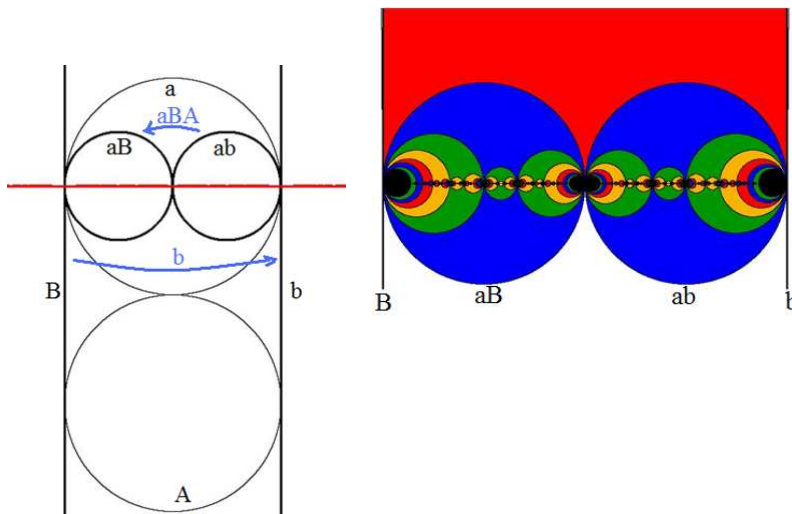
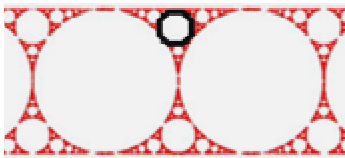


Figure 22 : A gauche les quatre cercles (dont deux droites) appariés par les transformations $a_2 = aBA$ et b , avec la droite limite $y = 1$ en rouge. A droite, le pavage du demi-plan supérieur par des quadrilatères curvilignes, à partir du quadrilatère en rouge.

Exercice 9 : Un autre cercle limite d'Apollonius



On a vu comment avoir les grands cercles de la frise d'Apollonius, ainsi que les deux droites limites. Comment obtenir le cercle limite, indiqué en noir sur la figure ci-contre ?

A partir des quatre cercles a , b , A , B (b et B étant des droites), on constate que la chaîne de quatre cercles tangents permettant d'avoir ce cercle limite est formée des cercles ab , aB , aab , aaB (figure 23). Il reste à les appairer. On passe du cercle ab au cercle aB par la transformation $a_3 = aBA$. Rappelons que

$$a(z) = \frac{-z}{iz-1}$$

$$b(z) = z + 2$$

$$\text{Le calcul donne } a_3(z) = \frac{(1-2i)z-2}{-2z+1+2i}$$

On passe du cercle aaB au cercle aab par la transformation $b_3 = aabAA$, et l'on trouve

$$b_3(z) = \frac{(1+4i)z+2}{8z+1-4i}$$

L'ensemble limite est le cercle orthogonal aux quatre cercles en leurs points de contact. C'est bien le cercle d'Apollonius cherché. Son pavage par des quadrilatères est indiqué sur la figure 23 à droite.

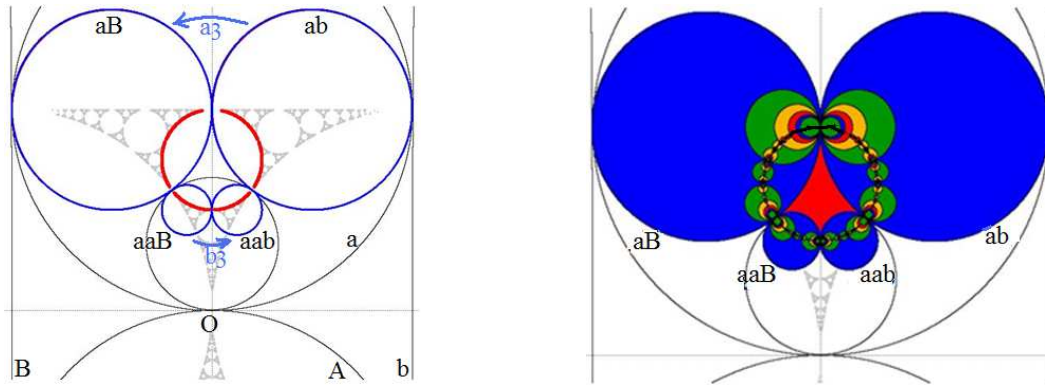


Figure 23 : A gauche les quatre cercles appariés en bleu, et l'ensemble limite en rouge. A droite, le pavage du disque par des quadrilatères.

6.2. Le petit groupe modulaire

D'abord quelques rappels. Par définition, le groupe modulaire est formé des matrices de la forme $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ avec p, q, r, s entiers et $ps - qr = 1$. Il contient un sous-groupe formé des matrices $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ avec p, s impairs et q, r pairs.¹¹ C'est lui qu'on appelle le petit groupe modulaire. Il est engendré par les deux matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En prenant les deux cercles A et a (ou les demi-cercles du demi-plan de Poincaré) centrés sur Ox et de diamètres $[0 \ 1]$ et $[-1 \ 0]$, on passe du premier au second par la transformation de Möbius a telle que $a(z) = \frac{z}{-2z+1}$ correspondant à la première matrice. De même, en prenant les deux cercles-droites B et b d'équations $x = -1$ et $x = 1$, on passe de l'un à l'autre par la transformation b telle que $b(z) = z + 2$ correspondant à la deuxième matrice. Le fait d'apparier ces quatre cercles deux à deux donne le dessin du petit groupe modulaire sous forme de cercles imbriqués, avec comme ensemble limite l'axe des x (figure 24 à gauche). Notons déjà l'air de famille qu'il présente avec les dessins précédents.

Maintenant prenons le quadrilatère délimité par les quatre cercles B, a, A, b , et coupons-le en deux par la droite c d'équation $x = 0$, afin d'avoir deux triangles T et T' (en rouge et en blanc sur la figure 24 à droite). Le triangle T est délimité par c, A et b et il a pour sommets $0, 1, \infty$. L'action du (petit) groupe modulaire va donner un pavage par des triangles bicolores. Voyons ce qu'il en est dans le cercle A , puisqu'il en sera de même partout ailleurs. Tous les mots associés aux cercles dans A commencent par A . Le triangle $A(T)$ est délimité par les cercles $A(c), AA$ et Ab qui touchent l'axe des x aux points $0, 1/3$ et $1/2$. Le triangle $AB(T)$ est délimité par les cercles $AB(c), ABA$ et $AB(b) = AB$, qui touchent l'axe des x en $1/2, 2/3$ et 1 . Plus généralement, sous l'action d'une matrice du groupe, soit $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ avec p, s impairs, q, r pairs et $ps - qr = 1$, les sommets $0, 1, \infty$ deviennent $q/s, (p+q)/(r+s)$ et p/r . Avec $ps - qr = 1$, les fractions p/r et q/s sont des fractions proches puisque $ps - qr = 1$ et elles sont irréductibles. On sait qu'alors leur médiane¹² $(p+q)/(r+s)$ s'intercale entre elles et qu'elle est aussi irréductible. Les cercles créés par le petit groupe modulaire coupent l'axe des x suivant tous les nombres rationnels, qui occupent de façon dense l'axe des x . L'ensemble limite est donc exactement l'axe des x .

¹¹ On vérifie aisément que le produit de deux matrices de cette forme donne une matrice de la même forme, tout comme l'inverse d'une telle matrice.

¹² Cette découverte est associée aux noms de Brocot et de Farey.

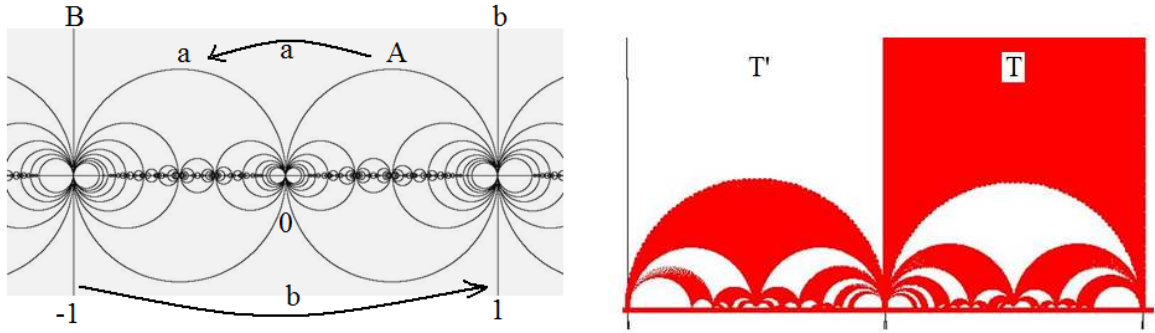


Figure 24: A gauche les cercles créés par le petit groupe modulaire engendré par les transformations a et b . A droite, les premières étapes du pavage entre -1 et 1 obtenu à partir des triangles T et T' .

6.3. Lien entre le petit groupe modulaire et les cercles d'Apollonius

Le petit groupe modulaire présente cette propriété : si a , b et ab sont des transformations de Möbius paraboliques, alors le groupe engendré par a et b est conjugué au petit groupe modulaire.

Rappelons qu'une transformation de Möbius parabolique admet un point fixe f unique, et que sa matrice (de déterminant 1) a une trace égale à ± 2 , sans être l'identité. Appelons f et f' les points fixes de a et b . On peut toujours trouver une transformation de Möbius M (et même une infinité) qui envoie f en 0 et f' en ∞ . Posons $a' = M a M^{-1}$ et $b' = M b M^{-1}$. Les transformations conjuguées a' et b' ont maintenant comme points fixes 0 et ∞ . Ce sont aussi des transformations paraboliques puisque la conjugaison préserve la nature d'une transformation. La transformation b' , de point fixe infini, est une translation de la forme $b'(z) = z + q$. On peut s'arranger avec la matrice M pour que $b'(z) = z + 2$. La transformation parabolique a' de point fixe 0 est de la forme $a'(z) = \frac{z}{tz+1}$. Il reste à déterminer le

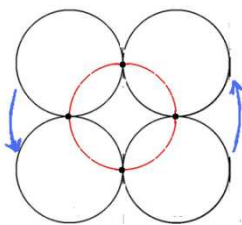
nombre t pour que $a'b'$ soit aussi une transformation parabolique, puisque ab en est une. Or

$$a'b' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ t & 2t+1 \end{pmatrix}, \text{ de trace } 2t+2. \text{ La contrainte } 2t+2 = \pm 2 \text{ impose } t=0 \text{ ou } t=$$

-2 . Comme $a'b'$ n'est pas l'identité, il reste $t = -2$, et $a'(z) = \frac{z}{-2z+1}$. Finalement le groupe engendré

par a et b est le conjugué du groupe engendré par a' et b' , c'est-à-dire le petit groupe modulaire dont la forme standard est engendrée par les deux matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il lui est identique, à une conjugaison près.

On peut maintenant faire le lien avec les cercles d'Apollonius. Reprenons le premier exemple du paragraphe 6.1.1. On avait pris le groupe engendré par a et $b_1 = BAb$, soit



$$a(z) = \frac{-z}{iz-1} \text{ et } b_1(z) = BAb(z) = \frac{(1-2i)z-4i}{iz+1+2i}. \text{ Calculons } ab_1 :$$

$$ab_1(z) = \frac{(-1+2i)z+4i}{2z+3-2i}. \text{ On a bien trois transformations paraboliques}$$

de trace ± 2 . Le groupe engendré par a et b_1 , associé à la figure ci-contre, n'est autre que le petit groupe modulaire à une conjugaison près.

L'exemple du paragraphe 6.1.2. est encore plus simple, avec les deux générateurs $a_2 = aBA$ et b , soit :

$a_2(z) = \frac{(1-2i)z-2}{-2z+1+2i}$ et $b(z) = z+2$. On trouve $a_2b(z) = \frac{(1-2i)z-4i}{-2z-3+2i}$. Les trois transformations

ont une trace égale à ± 2 . On vérifierait d'ailleurs aisément que ce groupe est le conjugué du groupe modulaire standard par le biais de la translation de vecteur i , les ensembles limites étant $y = 1$ pour l'un et $y = 0$ pour l'autre.

Enfin dans l'exercice 9, on a encore trois transformations paraboliques, avec

$$a_3(z) = \frac{(1-2i)z-2}{-2z+1+2i}, \quad b_3(z) = \frac{(1+4i)z+2}{8z+1-4i} \quad \text{et} \quad a_3b_3(z) = \frac{(-7+2i)z+4i}{(6+8i)z+5-2i}$$

En admettant que ces exemples se généralisent, chaque cercle d'Apollonius est l'ensemble limite d'un conjugué du petit groupe modulaire.

Ayant fait une incursion dans ce que permettent d'avoir des transformations de Mobius hyperboliques ou paraboliques, de nouvelles formes plus complexes vont apparaître avec les transformations loxodromiques.

7. Transformations loxodromiques

Jusqu'à présent, nous avons lié nos transformations de Mobius a et b à l'appariement de quatre cercles deux à deux. Mais que se passe-t-il si nous prenons des transformations a et b quelconques, et notamment loxodromiques, avec les traces des matrices devenant des nombres complexes ? Les ensembles limites vont en général devenir des nuages de points qui peuvent aller jusqu'à remplir le plan. Mais dans certains cas précis, de nouvelles courbes fractales vont apparaître, en forme de spirales, et il s'agit encore de courbes de Jordan, avec un intérieur et un extérieur. Un exemple est donné sur la figure 25, avec les transformations

$$a(z) = \frac{(0,975 + 0,01i)z - 0,0095 - 0,0245i}{(-0,0095 - 2,0245i)z + 0,975 + 0,01i}$$

$$b(z) = \frac{(0,975 - 0,99i)z + 0,975 + 0,01i}{(0,975 + 0,01i)z + 0,975 + 1,01i}$$

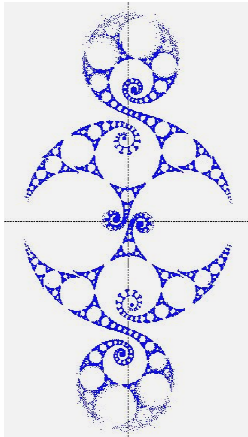


Figure 25 : Une fractale en spirale, à partir de transformations loxodromiques.