

Nombres complexes

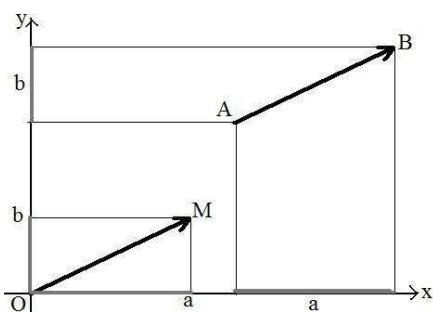
cours, exercices corrigés, programmation

Nous allons partir des nombres réels pour définir les nombres complexes. Au cours de cette construction, les nombres complexes vont être munis des opérations d'addition et de multiplication, et un élément clé va être introduit : le nombre i ayant pour carré -1 . En ajoutant cet intrus i parmi les nombres réels et en le combinant avec eux, nous obtiendrons les nombres complexes.

1. Première définition

Un nombre complexe z est un couple de deux nombres réels : $z = (a, b)$.

Dans un repère orthonormé direct Oxy qui définit ce que l'on appelle le plan complexe, le nombre complexe z a pour image le point de coordonnées (a, b) ou encore le vecteur de coordonnées (a, b) . Inversement, on dit que le vecteur (a, b) ou le point (a, b) a pour affixe z .



Dans le plan complexe, le nombre complexe z a aussi bien comme image le point M que le vecteur \mathbf{OM} ou le vecteur \mathbf{AB} , tous de mêmes coordonnées (a, b)

Etant assimilés à des vecteurs, les nombres complexes vont avoir les propriétés des vecteurs, essentiellement l'addition et la multiplication par un nombre réel.

2. Addition de deux nombres complexes

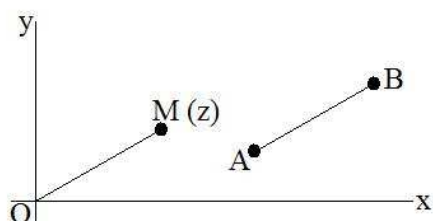
Sachant qu'à partir d'un vecteur $\mathbf{V}(a, b)$ et d'un vecteur $\mathbf{V}'(a', b')$ on a $\mathbf{V} + \mathbf{V}' = (a + a', b + b')$, la somme de deux nombres complexes $z(a, b)$ et $z'(a', b')$ est définie par $z + z' = (a + a', b + b')$.

Un vecteur $\mathbf{V}(a, b)$ ayant comme opposé le vecteur $-\mathbf{V}(-a, -b)$, l'opposé d'un nombre complexe $z = (a, b)$ est $-z = (-a, -b)$.

La formule de Chasles peut aussi s'appliquer. A partir d'un vecteur \mathbf{AB} , on peut intercaler un troisième point C quelconque dans le plan, et l'on a $\mathbf{AB} = \mathbf{AC} + \mathbf{CB}$. Cela s'écrit en complexes :

$z_{\mathbf{AB}} = z_{\mathbf{AC}} + z_{\mathbf{CB}}$. On peut aussi écrire que $\mathbf{AB} = \mathbf{AO} + \mathbf{OB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA}$, ce qui donne :

$z_{\mathbf{AB}} = z_{\mathbf{B}} - z_{\mathbf{A}}$. Ainsi, pour un nombre complexe z dont l'image est le vecteur \mathbf{AB} , on a $z = z_{\mathbf{B}} - z_{\mathbf{A}}$.



Avec $\mathbf{OM} = \mathbf{AB}$, et z affixe du point M , on a aussi $z = z_{\mathbf{B}} - z_{\mathbf{A}}$

3. Multiplication d'un nombre complexe par un nombre réel

On sait qu'avec $\mathbf{V}(a, b)$ le vecteur $a \mathbf{V}$ avec a réel a pour coordonnées $(a a, a b)$. De même : avec $z = (a, b)$ et a réel, on définit $a z = (a a, a b)$. Par exemple $2z = (2a, 2b)$ ou $z/2 = (a/2, b/2)$.

Appliquons cela au milieu I de $[AB]$. On sait que $\mathbf{OI} = (\mathbf{OA} + \mathbf{OB})/2$, d'où $z_I = (z_A + z_B)/2$.

Si l'on en restait là, avec les nombres complexes assimilés à des vecteurs, il serait inutile d'avoir défini les nombres complexes, puisque l'on a déjà les vecteurs à notre disposition. Mais maintenant va jouer l'aspect « nombre » des nombres complexes. On sait déjà les additionner. On va aller plus loin, au-delà de leur représentation vectorielle, en les multipliant, alors que l'on sait que la multiplication de deux vecteurs (qui donnerait un vecteur dans le même plan) n'existe pas.¹

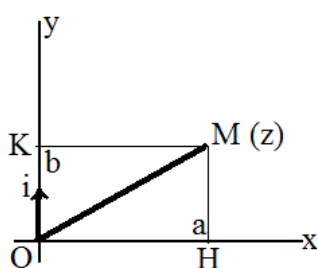
4. Multiplication de deux nombres complexes

Prenons comme définition que le produit de deux nombres complexes $z = (a, b)$ et $z' = (a', b')$ est $zz' = (aa' - bb', ab' + ba')$. Et nous allons voir le bien-fondé de cette définition.

Commençons par décider que les nombres complexes dont l'image est sur l'axe des x , de la forme $(a, 0)$ sont assimilables aux nombres réels, ce qui nous permet d'écrire $(a, 0) = a$. Dans ces conditions, l'axe des x est appelé l'axe réel, tandis que l'axe des y sera appelé axe imaginaire. Pour un nombre complexe $z = (a, b)$, on dit que a est la partie réelle de z et que b est sa partie imaginaire.

On avait vu précédemment le produit az d'un nombre réel avec un nombre complexe, ce qui donnait (aa, ab) . Maintenant faisons intervenir le fait que le nombre réel a est aussi le nombre complexe $(a, 0)$. Formons $(a, 0)(a, b)$ et appliquons la règle de multiplication des nombres complexes. On trouve encore (aa, ab) . Aucune contradiction n'est apparue, heureusement.

Après la partie réelle, passons à la partie imaginaire. Introduisons le vecteur unitaire $(0, 1)$ sur l'axe des y , et appelons i le nombre complexe associé, soit $i = (0, 1)$. Il est tel que : $i^2 = -1$, car par définition de la multiplication $i i = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$. La raison d'être des nombres complexes apparaît ici. Grâce à un nombre comme i , on peut avoir des carrés négatifs, ce qui n'était pas permis avec les nombres réels, dont tout carré est positif ou nul.



Prenons un point M d'affixe $z = (a, b)$. Il se projette en H et K sur les axes, et l'on a $\mathbf{OM} = \mathbf{OH} + \mathbf{OK}$ (Chasles), avec \mathbf{OH} qui est l'image du nombre complexe $(a, 0) = a$, et \mathbf{OK} qui est b fois le vecteur associé à i , ce qui correspond au nombre complexe $b i$ ou $i b$. Le nombre z s'écrit : $z = a + ib$

Il s'agit de ce que l'on appelle l'écriture cartésienne de z . Nous sommes passés de $z = (a, b)$ à $z = a + ib$, grâce à l'utilisation du nombre imaginaire i .

Ainsi, tout nombre complexe z ayant pour image le point (a, b) ou le vecteur (a, b) est $z = a + ib$.

Reprenons maintenant la multiplication de deux nombres complexes, et effectuons-la comme on le ferait avec des nombres réels, en utilisant la distributivité :

$z z' = (a + ib)(a' + ib') = aa' + iab' + iba' + i^2 bb' = aa' - bb' + i(ab' + ba')$. On retrouve ce que l'on avait pris comme définition de la multiplication. Autrement dit, il n'est pas utile d'apprendre par

¹ A fortiori, la division de deux vecteurs n'a aucun sens.

cœur la définition de la multiplication. Il suffit de la faire comme on en a l'habitude avec d'autres types de nombres. La boucle est bouclée.

Nous avons réussi à construire les nombres complexes, dotés d'une addition et d'une multiplication. Et grâce à leur écriture cartésienne $z = a + ib$, on peut faire avec eux des calculs analogues à ceux que l'on fait avec les nombres réels. Les résultats des calculs sont finalement ordonnés en séparant la partie réelle et la partie imaginaire.

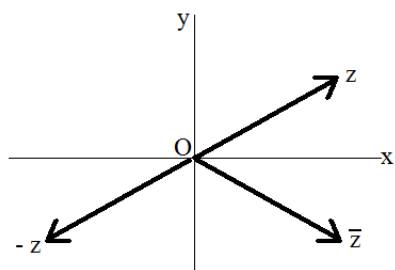
$z = a + ib$ avec $a = \text{Re}(z)$ et $b = \text{Im}(z)$ où Re et Im désignent la partie réelle et la partie imaginaire du nombre z , toutes deux étant des nombres réels.

$$z + z' = a + ib + a' + ib' = (a + a') + i(b + b')$$

$$zz' = (a + ib)(a + ib') = aa' - bb' + i(ab' + ba')$$
 après calcul.

5. Inverse d'un nombre complexe non nul

Commençons par définir le conjugué \bar{z} de $z = a + ib$, soit $\bar{z} = a - ib$.



Les vecteurs images de z et \bar{z} sont symétriques par rapport à l'axe des x . Il est important de ne pas confondre le conjugué de z et son opposé $-z$.

Calculons $z \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$, qui est un nombre réel, plus précisément le carré de la longueur du vecteur image de z .

Par définition, l'inverse z' d'un nombre z est tel que $z z' = 1$. Supposons z non nul, ce qui signifie que $a^2 + b^2 \neq 0$. Grâce au calcul précédent :

$\frac{1}{a^2 + b^2} z \bar{z} = 1$, ce qui signifie que $\frac{\bar{z}}{a^2 + b^2}$ est l'inverse de z . Ainsi tout nombre complexe z non nul admet un inverse. Cet inverse s'écrit z^{-1} ou $1/z$ puisque grâce à l'inverse on sait maintenant diviser. : diviser, c'est multiplier par l'inverse. Voici comment calculer concrètement l'inverse :

$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}$, où l'on a multiplié en haut et en bas par la quantité conjuguée du dénominateur.

6. Corps des nombres complexes

Appelons \mathbf{C} l'ensemble des nombres complexes, avec \mathbf{R} inclus dans \mathbf{C} . L'ensemble \mathbf{C} muni de l'addition et de la multiplication, possède une structure de corps (*field* en anglais), ce qui signifie que :

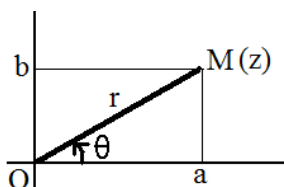
- \mathbf{C} muni de l'addition a une structure de groupe commutatif, ce qui veut dire que :
 - * la somme de deux nombres complexes est un nombre complexe.
 - * l'addition est associative et commutative.
 - * elle possède un élément neutre 0, tel que $0 + z = z + 0 = z$.
 - * tout nombre complexe z admet un opposé $-z$.
- \mathbf{C} sans 0, muni de la multiplication a une structure de groupe commutatif :
 - * le produit de deux nombres complexes est un nombre complexe

- * la multiplication est associative et commutative
- * elle possède un élément neutre 1 tel que $1z = z1 = z$.
- * tout nombre complexe z non nul admet un inverse z^{-1} .
- La multiplication est distributive par rapport à l'addition : $z(z' + z'') = z z' + z z''$.

A ce stade de l'étude, un mystère demeure. Si l'on sait faire une multiplication en utilisant l'écriture cartésienne $z = a + ib$, on ne sait pas comment cela se traduit géométriquement. Où se trouve le point d'affixe zz' ? Pour répondre à cette question, une autre écriture des nombres complexes est indispensable. Il s'agit de leur écriture sous forme trigonométrique.

7. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Prenons un nombre z dont l'image est le point $M(a, b)$ ou le vecteur $\mathbf{OM}(a, b)$. Ce vecteur est aussi bien défini par sa longueur r et par l'angle orienté $\theta = (\mathbf{Ox}, \mathbf{OM})$ qu'il fait avec l'axe des x . Il existe une relation bijective entre (a, b) et (r, θ) . On appelle r le module du nombre complexe z et θ son argument.



Comment passer de (r, θ) à (a, b) ? On trouve aussitôt : $a = r \cos \theta$ et $b = r \sin \theta$ par définition même du cosinus et du sinus d'un angle.

Comment passer de (a, b) à (r, θ) ? On a $r^2 = a^2 + b^2$, soit $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ puis θ est tel que $\cos \theta = a/r$ et $\sin \theta = b/r$. IL ne suffit pas de prendre $\cos \theta = a/r$, car dans ce cas l'angle θ n'est connu qu'au signe près, et si l'on ne prend que le sinus, l'angle aurait encore deux valeurs possibles. Remarquons que l'on a aussi $\tan \theta = b/a$, mais la connaissance de la tangente ne suffit pas non plus pour avoir l'angle (il est dans ce cas connu à $k\pi$ près).

Grâce aux relations précédentes, on peut écrire $z = a + ib = r \cos \theta + i r \sin \theta = r (\cos \theta + i \sin \theta)$. On vient d'obtenir ce que l'on appelle l'écriture trigonométrique d'un nombre complexe, soit pour un nombre z de module r et d'argument θ :

$z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$, ou sous forme concentrée $[r, \theta]$ avec des crochets pour se distinguer de l'écriture cartésienne (a, b) .

Reprenons la multiplication avec cette nouvelle écriture :

$$\begin{aligned} z z' &= [r, \theta] [r', \theta'] = r (\cos \theta + i \sin \theta) \cdot r' (\cos \theta' + i \sin \theta') \\ &= rr' (\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' + i (\sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta')) \\ &= rr' (\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')) \end{aligned}$$

car l'on est censé connaître les formules d'addition :

$$\cos(\theta + \theta') = \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' \text{ et } \sin(\theta + \theta') = \sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta'.$$

Cela signifie que le produit zz' a comme module rr' et comme argument $\theta + \theta'$: $zz' = [rr', \theta + \theta']$. D'où la règle simple, permettant de construire facilement l'image du produit zz' :

Pour multiplier deux nombres complexes, on multiplie leurs modules et l'on ajoute leurs arguments.

Il en est de même pour la division : on divise les modules et l'on soustrait les arguments.

On en déduit cette conséquence : a et z étant des nombres complexes, avec $a = [r, \theta]$, comment passe-t-on du vecteur \mathbf{V} d'affixe z au vecteur \mathbf{V}' d'affixe az ? Il suffit de faire tourner le vecteur \mathbf{V} de l'angle θ et de multiplier sa longueur par r .

8. Propriétés complémentaires des modules et des conjugués

Le module r de $z = [r, \theta]$ est aussi noté $|z|$. On a alors $|zz'| = |z| |z'|$ et $|z|^2 = z \bar{z}$. Comme il s'agit d'une longueur, le module obéit aussi à l'inégalité triangulaire, soit $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

Quant au conjugué de $z = a + ib$, soit $\bar{z} = a - ib$, il s'écrit sous forme trigonométrique, à partir de $z = [r, \theta]$, $\bar{z} = [r, -\theta]$. Remarquons que cela n'a rien à voir avec l'opposé de z soit $-z = [r, \theta + \pi]$. On a aussi, pour des raisons évidentes :

$$\begin{aligned}\overline{z + z'} &= \bar{z} + \bar{z}' \\ \overline{zz'} &= \bar{z} \bar{z}' \\ \overline{\bar{z}} &= z\end{aligned}$$

9. Formule de Moivre

Prenons le nombre complexe $\cos\theta + i \sin\theta$, qui a pour module 1 et pour argument θ . On en déduit, grâce à la règle de multiplication, que

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta, \text{ avec } n \text{ entier naturel (ou relatif) quelconque.}$$

C'est cela la formule de Moivre, qui permet de remplacer une puissance de nombre complexe par une forme linéarisée.

Enfin une variante de l'écriture trigonométrique est la forme exponentielle.

10. Forme exponentielle d'un nombre complexe

On va écrire $z = [r, \theta]$ sous la forme $z = r e^{i\theta}$. A défaut de pouvoir démontrer la validité de cette formule qui fait appel à une exponentielle complexe, hors programme, on se contentera de vérifier qu'elle est cohérente avec la multiplication, puisque :

$zz' = r e^{i\theta} r' e^{i\theta'} = rr' e^{i(\theta + \theta')}$ grâce à la règle des puissances. On retrouve bien le produit des modules et la somme des arguments.

11. Formules d'Euler

A partir des deux formules :

$$\cos\theta + i \sin\theta = e^{i\theta}$$

$$\cos\theta - i \sin\theta = e^{-i\theta}$$

on en déduit par addition puis soustraction :

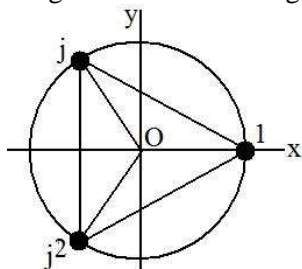
$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Ce sont les formules d'Euler.

12. Racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité

Les racines carrées z de 1 (l'unité) sont telles que $z^2 = 1$, ce qui donne aussitôt les deux solutions $z = \pm 1$.

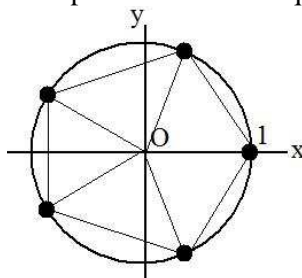
Passons aux racines cubiques de l'unité, vérifiant $z^3 = 1$. Sous forme trigonométrique, avec $z = [r, \theta]$, cela signifie que $[r^3, 3\theta] = [1, 0]$, soit $r^3 = 1$ et $3\theta = 0 + 2k\pi$, (surtout ne pas oublier que les angles sont définis modulo 2π), soit finalement $r = 1$ et $\theta = 2k\pi/3$. Pour $k = 0$, on trouve $[1, 0]$, pour $k = 1$, c'est le nombre appelé $j = [1, 2\pi/3]$, pour $k = 2$, c'est $j^2 = [1, 4\pi/3]$, puis pour les autres valeurs de k (entier relatif), on retrouve les mêmes nombres. Finalement, il existe trois racines cubiques de 1, dont les images forment un triangle équilatéral inscrit dans le cercle unité de centre O .



Passons au cas général. Les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité, de la forme $z = [r, \theta]$, vérifient $z^n = 1$, soit $[r^n, n\theta] = [1, 0]$, $r^n = 1$ et $n\theta = 2k\pi$, $r = 1$, $\theta = 2k\pi/n$. Il suffit de prendre k entre 0 et $n - 1$ pour avoir toutes les solutions : $z_0 = 1$, $z_1 = [1, 2\pi/n] = e^{i 2\pi/n}$, $z_2 = [1, 4\pi/n] = e^{i 4\pi/n}$, ..., $z_{n-1} = [1, (n-1) 2\pi/n] = e^{i (n-1) 2\pi/n}$. Pour passer d'une solution à la suivante, il suffit de tourner de $2\pi/n$ autour de O . Finalement,

Les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité sont au nombre de n , et leurs images sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle unité d'origine O , un sommet étant le point $(1, 0)$

Exemple des racines cinquièmes de l'unité :



On constate que si n est impair, il existe une seule racine réelle, à savoir $z = 1$, tandis que pour n impair, il en existe deux : $z = \pm 1$. A cause de la symétrie du polygone régulier par rapport à l'axe des x , les racines $n^{\text{èmes}}$ sont conjuguées deux à deux, soit :

$$z_1 = \overline{z_{n-1}}, z_2 = \overline{z_{n-2}}, \text{ etc., seules la ou les deux solutions réelles étant leur propre conjuguée.}$$

Enfin, puisque l'on passe d'une racine à la suivante en tournant de $2\pi/n$, les n racines $n^{\text{èmes}}$ sont les puissances successives de la racine z_1 , soit $z_1^0 = 1, z_1, z_1^2, z_1^3, \dots, z_1^{n-1}$.

13. Racines $n^{\text{èmes}}$ d'un nombre complexe A

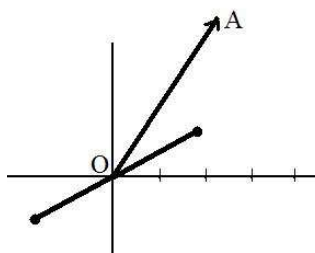
Posons $A = [R, \Phi]$. Les racines $n^{\text{èmes}}$ de A , soit $Z = [r, \theta]$, sont telles que $Z^n = A$, $[r^n, n\theta] = [R, \Phi]$. d'où $r^n = R$ et $n\theta = \Phi [2\pi]$:

$$\begin{cases} r = \sqrt[n]{R} \\ \theta = \Phi / n + 2k\pi / n \end{cases}$$

Pour k , il suffit de prendre les n valeurs de 0 à $n - 1$, d'où n solutions.

Les racines $n^{\text{èmes}}$ d'un nombre complexe $A = [R, \Phi]$ sont au nombre de n , et leurs images forment un polygone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{R}$, avec un sommet qui fait l'angle Φ/n avec l'axe des x .

Notamment les racines carrées d'un nombre $A = [R, \Phi]$ sont au nombre de deux, et elles sont opposées.



Dans le cas où l'on connaît une des n racines $n^{\text{èmes}}$ de A , soit Z_0 , on peut écrire :

$Z^n = A$, Z étant une racine $n^{\text{ème}}$ quelconque de A ,

$Z_0^n = A$, d'où par division :

$(Z/Z_0)^n = 1$, et Z/Z_0 est une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité.

Ainsi, toutes les racines $n^{\text{èmes}}$ de A se déduisent de l'une d'elles Z_0 en la multipliant par les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.

14. Equation du second degré à solutions dans \mathbf{C}

Rappelons la décomposition « canonique » du trinôme du second degré :

$$az^2 + bz + c = a \left((z + b/2a)^2 - \Delta/(4a^2) \right) \text{ avec } a \neq 0$$

1) Cas où les coefficients a, b et c sont tous réels

Dans ce cas, $\Delta = b^2 - 4ac$ est un nombre réel.

- Si Δ est positif ou nul, on sait qu'on peut factoriser le trinôme, puisque $\sqrt{\Delta}$ existe comme nombre réel, et l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions réelles (confondues pour $\Delta = 0$). Ces deux solutions sont aussi dans \mathbf{C} et il n'y en pas d'autres.

- Si Δ est un réel négatif, il admet deux racines carrées dans \mathbf{C} , soit $\pm i\sqrt{-\Delta}$, ce qui permet de factoriser le trinôme : $az^2 + bz + c = a \left((z + b/2a)^2 - \Delta/(4a^2) \right)$, en choisissant l'une des racines carrées :

$$\begin{aligned} &= a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right)^2 \right) \\ &= a \left(z - \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right) \left(z - \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right) \end{aligned}$$

L'équation admet deux solutions complexes conjuguées $\frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

2) Cas général avec $a (\neq 0)$, b et c complexes

Le nombre complexe Δ admet deux racines carrées complexes $\pm \delta$. Le trinôme peut s'écrire :

$az^2 + bz + c = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2$ et l'on peut le factoriser. L'équation du second degré admet deux solutions complexes qui sont $\frac{-b \pm \delta}{2a}$, avec δ qui est l'une des deux racines carrées de Δ .

15. Exercices

Exercice 1

1) Soit l'équation de la forme $P(z) = 0$ où P est un polynôme complexe à coefficients réels. Montrer que si z_0 est une solution, alors $\overline{z_0}$ est aussi solution.

L'équation s'écrit : $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 = 0$.

Avec z_0 solution, on a $a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + a_0 = 0$. Utilisons les propriétés de la conjugaison.

$$\overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + a_0} = 0.$$

$$\overline{a_n z_0^n} + \overline{a_{n-1} z_0^{n-1}} + \dots + \overline{a_0} = 0$$

$$\overline{a_n} \overline{z_0^n} + \overline{a_{n-1}} \overline{z_0^{n-1}} + \dots + \overline{a_0} = 0$$

$$\overline{a_n} \overline{z_0}^n + \overline{a_{n-1}} \overline{z_0}^{n-1} + \dots + \overline{a_0} = 0$$

$\overline{z_0}$ est bien solution.

Remarque : on connaissait déjà cette propriété pour l'équation du second degré.

2) Soit l'équation $z^4 - 6z^3 + z^2 + 10z - 18 = 0$. Vérifier que $1 + i$ est solution. Puis trouver toutes les solutions.

Posons $P(z) = z^4 - 6z^3 + z^2 + 10z - 18 = 0$, et calculons $P(1 + i)$.

Avec $(1 + i)^4 = 1 + 4i - 6 - 4i + 1 = -4$,

$(1 + i)^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i$

$(1 + i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$,

$P(1 + i) = -4 - 6(-2 + 2i) + 2i + 10(1 + i) - 18 = 0$. $1 + i$ est solution de l'équation. Alors $1 - i$ est aussi solution. On peut factoriser $P(z)$ avec $(z - (1 + i))(z - (1 - i)) = z^2 - 2z + 2$.

$P(z) = (z^2 - 2z + 2)(z^2 - 4z - 9)$

Le trinôme $z^2 - 4z - 9$ a pour racines $2 \pm \sqrt{13}$, qui sont réelles (et leur propre conjuguée).

Finalement l'équation initiale a quatre solutions : $1 \pm i, 2 \pm \sqrt{13}$.

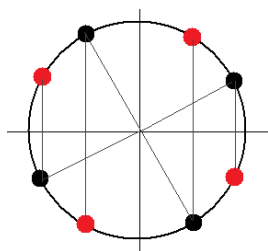
Exercice 2

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^8 + z^4 + 1 = 0$, et préciser le lien entre les solutions trouvées et les racines douzièmes de l'unité.

Procédons au changement d'inconnue $Z = z^4$. L'équation devient $Z^2 + Z + 1 = 0$, qui admet deux solutions. Sachant que $1 + j + j^2 = 0$, et par passage au conjugué $1 + \bar{j} + \bar{j}^2 = 0$, les deux solutions sont j et \bar{j} .

Revenons à z , en traitant d'abord $z^4 = j$. Avec $z = [r, \theta]$, cette équation devient $[r^4, 4\theta] = [1, 2\pi/3]$, d'où $r = 1$ et $4\theta = 2\pi/3 + 2k\pi$, soit $\theta = \pi/6 + 2k\pi/4$, d'où quatre solutions.

Traisons enfin $z^4 = \bar{j}$, ou encore $\bar{z}^4 = 1$, d'où quatre solutions qui sont les conjuguées des précédentes. Les 8 solutions sont représentées ainsi dans le plan complexe :



On constate qu'il s'agit des douze racines douzièmes de l'unité sauf les quatre qui sont présentes sur les axes, à savoir ± 1 et $\pm i$.

Exercice 3

Soit θ un nombre réel de l'intervalle $]0, 2\pi[$. On considère les deux nombres complexes $z = e^{i\theta}$ et $Z = \frac{1+z}{1-z}$.

1) Montrer que Z existe quel que soit z .

Z n'existe pas si et seulement si $z = 1$. Mais $z = 1$ signifie que $e^{i\theta} = 1$, c'est-à-dire $\theta = 2k\pi$. Avec θ dans $]0, 2\pi[$, cela n'arrive jamais. Finalement Z existe toujours.

2) Vérifier que $e^{i\pi} = -1$, et en déduire Z lorsque $\theta = \pi$.

$e^{i\pi}$ a pour module 1 et pour argument π . Il s'agit donc de -1 . Dans ce cas, $Z = 0$.

3) Montrer que $Z = i \frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$

$$Z = \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2})}{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2})} = \frac{e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}}{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}} = \frac{2\cos(\theta/2)}{-2i\sin(\theta/2)} = i \frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)},$$

cela grâce aux formules d'Euler, et au fait que $1/(-i) = i$.

Exercice 4

1) Résoudre l'équation $Z^5 = 1$ dans \mathbb{C} . Dessiner les images des solutions dans le plan complexe.

Les solutions de $Z^5 = 1$ sont les cinq racines cinquièmes de l'unité, soit $e^{i2k\pi/5}$ avec k de 0 à 4. Leurs images sont les sommets d'un pentagone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1, un sommet étant en $(1, 0)$, correspondant à la seule solution réelle.

2) En s'aidant du 1°, résoudre l'équation $(z-i)^5 = (z+i)^5$. Exprimer les solutions en utilisant des cotangentes d'angles, avec par définition $\cotan \theta = \cos \theta / \sin \theta$. Comment pouvait-on prévoir que les solutions sont toutes réelles (utiliser pour cela les modules) ?

Comme $z = i$ n'est manifestement pas solution, l'équation peut se re-écrire $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^5 = 1$. En faisant

le changement d'inconnue $Z = \frac{z+i}{z-i}$, on retombe sur $Z^5 = 1$ dont on connaît les 5 solutions. Revenons à z :

- $Z = 1, \frac{z+i}{z-i} = 1, z+i = z-i, 0z = 2i$, aucun z ne convient.
- $Z = a$ avec $a = e^{i2k\pi/5}$, avec k de 1 à 4, $\frac{z+i}{z-i} = a, z(1-a) = -i(1+a)$, soit, en utilisant les

formules d'Euler :

$$\begin{aligned} z &= -i \frac{1+a}{1-a} = -i \frac{1+e^{i2k\pi/5}}{1-e^{i2k\pi/5}} = -i \frac{e^{ik\pi/5}(e^{-ik\pi/5} + e^{ik\pi/5})}{e^{ik\pi/5}(e^{-ik\pi/5} - e^{ik\pi/5})} = -i \frac{2\cos(k\pi/5)}{-2i\sin(k\pi/5)} \\ &= \frac{\cos(k\pi/5)}{\sin(k\pi/5)} = \cotan(k\pi/5) \end{aligned}$$

L'équation admet quatre solutions toutes réelles : $\cotan(\pi/5)$, $\cotan(2\pi/5)$, $\cotan(3\pi/5)$, $\cotan(4\pi/5)$.

Prenons le point A d'affixe i et le point B d'affixe $-i$. Appelons M l'image d'une des solutions.

$z+i$ est l'affixe du vecteur \mathbf{BM} , et $z-i$ celui du vecteur \mathbf{AM} . En passant en modules, l'équation donne $(MB/MA)^5 = 1$, ce qui équivaut à $MB/MA = 1$ puisque tout est positif, $MA = MB$, M est sur la médiatrice de $[AB]$, qui n'est autre que l'axe des x . Les solutions sont toutes réelles.

3) En développant $(z-i)^5$ et $(z+i)^5$ grâce à la formule du binôme de Newton, résoudre à nouveau l'équation $(z-i)^5 = (z+i)^5$. Constaté que les solutions sont opposées deux à deux.

$$\begin{aligned} (z+i)^5 &= z^5 + 5iz^4 - 10z^3 - 10iz^2 + 5z + i \\ (z-i)^5 &= z^5 - 5iz^4 - 10z^3 + 10iz^2 + 5z - i \end{aligned}$$

Après simplifications, l'équation se réduit à $5z^4 - 10z^2 + 1 = 0$. Remarquons qu'il s'agit d'une équation du quatrième degré, et non pas du cinquième.

Pour la résoudre, faisons le changement d'inconnues : $Z = z^2$, l'équation devient

$5Z^2 - 10Z + 1 = 0$, avec deux solutions $Z = (5 \pm 2\sqrt{5})/5$, toutes deux réelles positives. Revenons à z dont le carré z^2 est égal à un nombre positif :

- $z^2 = (5 + 2\sqrt{5})/5, z = \pm\sqrt{5+2\sqrt{5}}/\sqrt{5}$
- $z^2 = (5 - 2\sqrt{5})/5, z = \pm\sqrt{5-2\sqrt{5}}/\sqrt{5}$

On a trouvé les quatre solutions de l'équation.

4) Dédurre des deux questions précédentes la valeur de $\cotan \pi/5$. Puis montrer que $\tan \pi/5 = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$.

La plus grande des quatre solutions est $\sqrt{5+2\sqrt{5}}/\sqrt{5}$. Il s'agit aussi de l'une des solutions de la forme $\cotan k\pi/5$. Mais laquelle ? Sur les quatre cotangentes, seules $\cotan \pi/5$ et $\cotan 2\pi/5$ sont positives, puisque la cotangente est l'inverse de la tangente. On sait aussi que la fonction tangente est croissante sur $[0, \pi/2[$, la cotangente est donc décroissante. Le plus grande est $\cotan \pi/5$. Ainsi :

$$\cotan \pi/5 = \sqrt{5+2\sqrt{5}}/\sqrt{5},$$

$\tan \pi/5 = \sqrt{5}/\sqrt{5+2\sqrt{5}} = \sqrt{5} \sqrt{5+2\sqrt{5}} / (5+2\sqrt{5}) = \frac{\sqrt{5} \sqrt{5+2\sqrt{5}} (5-2\sqrt{5})}{5}$ en utilisant la quantité conjuguée du dénominateur.

$$= \frac{\sqrt{5} \sqrt{(5+2\sqrt{5})(45-20\sqrt{5})}}{5} = \sqrt{(5+2\sqrt{5})(9-4\sqrt{5})} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

(autre méthode : on part de $\cotan \pi/5 = \sqrt{5+2\sqrt{5}}/\sqrt{5}$, et l'on multiplie par la quantité conjuguée, soit $\sqrt{5-2\sqrt{5}} \cotan \pi/5 = \sqrt{5-2\sqrt{5}} \sqrt{5+2\sqrt{5}}/\sqrt{5} = 1$, d'où $\tan \pi/5 = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$)

Exercice 5

A tout nombre complexe z différent de -2 on associe le nombre complexe z' tel que $z' = \frac{z}{z+2}$

1) Montrer que la fonction f faisant passer de z à z' est une bijection de $\mathbb{C} - \{-2\}$ dans un ensemble E que l'on précisera. Autrement dit, la fonction f qui à chaque z de $\mathbb{C} - \{-2\}$ fait correspondre une image z' unique dans E est aussi telle que tout élément z' de E admet un antécédent unique z dans $\mathbb{C} - \{-2\}$. Pour la démonstration, il conviendra de chercher z à partir de z' donné.

Cherchons à isoler z . On a $z'(z+2) = z$, $z'z + 2z' = z$, $z(z'-1) = -2z'$. Si $z' = 1$, on devrait avoir $z = z+2$, ce qui est impossible. Donc z est différent de -2 . On peut diviser : $z = -2z'/(z'-1)$. Chaque z' différent de 1 admet un antécédent z unique. On a bien une bijection de $\mathbb{C} - \{-2\}$ dans $\mathbb{C} - \{1\}$.

2) Déterminer les points invariants par f , c'est-à-dire tels que $z' = z$.

$z' = z$ s'écrit $z/(z+2) = z$, $z = (z+2)z$, $z^2 + z = 0$, $z(z+1) = 0$, soit $z = 0$ ou $z = -1$. Il existe deux points invariants, $O(0, 0)$ et $O'(-1, 0)$.

3) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Calculer x' et y' en fonction de x et y .

$$x' + iy' = \frac{x + iy}{x + 2 + iy} = \frac{(x + iy)(x + 2 - iy)}{(x + 2)^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2 + 2x + i2y}{(x + 2)^2 + y^2}$$

$$x' = \frac{x^2 + y^2 + 2x}{(x + 2)^2 + y^2} \text{ et } y' = \frac{2y}{(x + 2)^2 + y^2}$$

4) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit réel, c'est-à-dire tels que son image M' soit sur l'axe des x .

z' réel signifie que $y' = 0$, soit $2y = 0$, $y = 0$, et z est réel. Tout point de l'axe des x (sauf -2) admet un antécédent unique qui est un point de l'axe des x (sauf -2), et vice-versa. L'axe des x est globalement transformé en lui-même, à deux points près.

5) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z pour lesquels la partie réelle x' de z' est nulle (autrement dit M' est sur l'axe des y).

$x' = 0$ s'écrit $x^2 + y^2 + 2x = 0$, $(x + 1)^2 + y^2 = 1$. Il s'agit de l'équation d'un cercle de centre $(-1, 0)$ et de rayon 1 . Ainsi l'axe des y a comme antécédent ce cercle (auquel on enlève le point $(-2, 0)$).

6) Calculer $z' - 1$, et déterminer une relation entre les modules de $z' - 1$ et de $z + 2$. Déterminer aussi une relation entre leurs arguments.

$$z' - 1 = z/(z+2) - 1 = -2/(z+2)$$

En modules, cela donne $|z' - 1| = 2/|z+2|$ ou encore $|z' - 1| |z+2| = 2$.

En arguments : $\text{Arg}(z' - 1) = \pi - \text{Arg}(z + 2)$, ou $\text{Arg}(z' - 1) + \text{Arg}(z + 2) = \pi$.

7) Déterminer l'image (le transformé) C' d'un cercle C de centre $A(-2, 0)$ et de rayon R donné. Utiliser pour cela la définition géométrique du cercle C .

Tout point M du cercle C est caractérisé par $AM = R$. Avec le vecteur \mathbf{AM} d'affixe $z + 2$, cela s'écrit $|z + 2| = R$. Grâce à la relation du 6° , $|z' - 1| = 2/R$. Les points M' sont sur le cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon $2/R$. Mais le décrivent-ils en entier ? Quand M fait un tour complet sur C , $\text{Arg}(z + 2)$ décrit $[0, 2\pi[$, et grâce à la relation du 6° , $\text{Arg}(z' - 1)$ décrit aussi un intervalle de longueur 2π , M' fait aussi un tour complet. C' est le cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon $2/R$.

8) Déterminer l'image (la transformée) D' de la droite D passant par A et de vecteur directeur $(\cos a, \sin a)$, a étant un angle orienté donné, cette droite étant privée du point A . Pour la démonstration, utiliser la relation entre arguments du 6° .

M appartient à D ssi le vecteur \mathbf{AM} fait un angle a ou $a + \pi$ avec l'axe des x . Cela s'écrit $\text{Arg}(z + 2) = a \pmod{\pi}$. On en déduit que $\text{Arg}(z' - 1) = \pi - a \pmod{\pi} = -a \pmod{\pi}$. Cela signifie que le vecteur $\mathbf{BM'}$, avec $B(1, 0)$, fait un angle $-a$, ou $\pi - a$, constant avec l'axe des x . Le point M' se trouve sur la droite passant par B et de vecteur directeur $(\cos a, -\sin a)$. Grâce à la relation sur les modules, on peut affirmer que lorsque M décrit la droite D (privée de A) M' décrit la droite D' privée du point B .

Exercice 6

Dans un repère orthonormé (O, u, v) , on place le point A d'affixe $1 + i$ et le point B d'affixe $1 - 3i$. Soit M le point d'affixe z , avec z différent de $-2 + 3i$. À z on associe le nombre complexe z' tel que :

$$z' = \frac{z - 1 + 3i}{z + 2 - 3i}, \text{ d'image } M'.$$

1) Etablir une relation entre l'argument de z' et l'angle orienté de vecteurs $(\mathbf{MA}, \mathbf{MB})$.

Remarquons que chaque z de $\mathbb{C} - \{-2 + 3i\}$ admet une image (un transformé) z' dans \mathbb{C} . La relation faisant passer de z à z' est une application de $\mathbb{C} - \{-2 + 3i\}$ dans \mathbb{C} .

$z - 1 + 3i = z - (1 - 3i)$ est l'affixe du vecteur \mathbf{BM} , et $z + 2 - 3i = z - (-2 + 3i)$ est l'affixe de \mathbf{AM} . A cause du quotient de ces deux nombres, $\text{Arg } z' = (\mathbf{u}, \mathbf{BM}) - (\mathbf{u}, \mathbf{AM}) = (\mathbf{AM}, \mathbf{BM}) = (\mathbf{MA}, \mathbf{MB}) + \pi = (\mathbf{MA}, \mathbf{MB}) + 2\pi = (\mathbf{MA}, \mathbf{MB})$ puisque les angles sont modulo 2π .

2) Déterminer l'ensemble E_1 des points M du plan tels que z' ait pour argument $\pi/2$.

$\text{Arg } z' = \pi/2$ signifie $(\mathbf{MA}, \mathbf{MB}) = \pi/2 \pmod{2\pi}$. Cela signifie que M décrit le demi-cercle de diamètre $[AB]$ situé à droite de (AB) à cause de l'angle $+\pi/2$. L'ensemble E_1 est ce demi-cercle.

3) Déterminer et construire l'ensemble E_2 des points M tels que $|z'| = 2$.

$|z'| = 2$ signifie, grâce à la règle des modules pour un quotient, que $MB / MA = 2$. L'ensemble E_2 des points M est le cercle² de diamètre $[K_1 K_2]$ avec K_1 et K_2 sur (AB) et vérifiant $K_1A / K_1B = K_2A / K_2B = 2$: K_1 est aux $2/3$ de $[AB]$ à partir de B , et K_2 est tel que A est le milieu de $[K_2B]$.

4) Déterminer l'affixe du point commun K à E_1 et E_2 .

Comme K_1 est sur $[AB]$, le demi-cercle E_1 et le cercle E_2 se coupent effectivement en un point unique K . Appelons z l'affixe de K . On sait que z a pour image (transformé) z' tel que $z' = [2, \pi/2]$ sous forme trigonométrique, soit $z' = 2i$. Le nombre z vérifie :

$$\frac{z - 1 + 2i}{z + 2 - 3i} = 2i, \text{ ce qui donne, tous calculs faits, } z = \frac{7 + i}{1 - 2i} = \frac{(7 + i)(1 + 2i)}{1 + 4} = \frac{5 + 15i}{5} = 1 + 3i.$$

² Il s'agit d'une propriété liée à l'étude des barycentres et du produit scalaire.

Autre méthode : on cherche l'équation des deux cercles concernés, et l'on détermine leurs deux points d'intersection. Puis on enlève celui qui ne convient pas. Méthode très compliquée par rapport à la précédente.

Autre méthode : On voit sur le dessin (il est indispensable de le faire) que le point K a l'air d'être $(1, 3)$. Puis on démontre que c'est bien lui. Appelons K' le point $(1, 3)$. Profitons du fait que $(K'A)$ est horizontal et $(K'B)$ vertical. On a $(K'A)$ orthogonal à $(K'B)$ donc K' est sur E_1 . On a aussi $K'A = 3$ et $K'B = 6$, $K'B / K'A = 2$, K' est aussi sur E_2 , donc $K' = K$. Cette méthode est la meilleure, même si elle déplaît à ceux qui n'ont que mépris pour la géométrie.

Exercice 7

1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation de degré $n - 1$: $z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z^2 + z + 1 = 0$ avec $n \geq 2$. En déduire une factorisation du polynôme $P(z) = z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z^2 + z + 1$ en $n - 1$ facteurs du premier degré.

Constatons que 1 n'est pas solution de cette équation, et appliquons la formule sur la somme des termes d'une suite géométrique de raison $z \neq 1$, soit

$z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z^2 + z + 1 = \frac{1 - z^n}{1 - z}$, et l'équation devient $z^n = 1$. On trouve les n racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité, sauf 1, ce qui donne les $n - 1$ solutions de l'équation : $z = e^{i 2k\pi / n}$ pour k allant de 1 à $n - 1$. On en déduit la factorisation de $P(z)$:

$$P(z) = \prod_{k=1}^{n-1} (z - e^{i 2k\pi / n})$$

2) Exprimer $1 - e^{i 2k\pi / n}$ en faisant ressortir $\sin(k\pi/n)$.

$1 - e^{i 2k\pi / n} = e^{i k\pi / n} (e^{-i k\pi / n} - e^{i k\pi / n})$. Sachant que $\sin(k\pi / n) = \frac{e^{i k\pi / n} - e^{-i k\pi / n}}{2i}$ (formule d'Euler), on en déduit que $1 - e^{i 2k\pi / n} = -2i \sin(k\pi / n) e^{i k\pi / n}$

3) En calculant $P(1)$ de deux façons, montrer que $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$

En utilisant la définition de $P(z)$ et en faisant $z = 1$, $P(1) = n$. Grâce à la factorisation de $P(z)$ on a aussi :

$$\begin{aligned} P(1) &= \prod_{k=1}^{n-1} (-2i \sin(k\pi / n) e^{i k\pi / n}) = (-2)^{n-1} i^{n-1} e^{i\pi/n} e^{i 2\pi/n} e^{i 3\pi/n} \dots e^{i(n-1)\pi/n} \prod_{k=1}^{n-1} \sin(k\pi / n) \\ &= (-1)^{n-1} 2^{n-1} i^{n-1} e^{\frac{i\pi}{n}(1+2+3+\dots+(n-1))} \prod_{k=1}^{n-1} \sin(k\pi / n) \\ &= (-1)^{n-1} 2^{n-1} i^{n-1} e^{\frac{i\pi(n-1)n}{2n}} \prod_{k=1}^{n-1} \sin(k\pi / n) = (-1)^{n-1} 2^{n-1} i^{n-1} i^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin(k\pi / n) \\ &= (-1)^{n-1} 2^{n-1} i^{2n-2} \prod_{k=1}^{n-1} \sin(k\pi / n) = (-1)^{n-1} 2^{n-1} (-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin(k\pi / n) \\ &= 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin(k\pi / n) \end{aligned}$$

On en déduit la formule demandée.

Exercice 8

Dans le plan complexe, on considère trois points A , B et C d'affixes a , b et c . Montrer que le triangle ABC est un triangle équilatéral direct si et seulement si $c + ja + j^2 b = 0$.

Le fait que ABC soit un triangle équilatéral direct signifie que l'on passe du vecteur \overrightarrow{AB} au vecteur \overrightarrow{AC} en tournant de $\pi/3$, avec \overrightarrow{AB} d'affixe $b - a$ et \overrightarrow{AC} d'affixe $c - a$, ce qui veut dire que :

$$c - a = -j^2 (b - a)$$

puisque j^2 a pour argument $-2\pi/3$, et que son opposé a pour argument $-2\pi/3 + \pi = \pi/3$.

Cette formule s'écrit aussi $c - a (1 + j^2) + j^2 b = 0$, ou encore $c + ja + j^2 b = 0$, puisque $1 + j + j^2 = 0$.

16. Programmation des nombres complexes

Il est facile de fabriquer sa propre bibliothèque de nombres complexes, afin de pouvoir les utiliser dans les programmes. Il suffit de définir une structure associée à un nombre complexe : celle-ci contient deux nombres réels, correspondant à sa partie réelle et à sa partie imaginaire. Il suffit ensuite de construire des fonctions associées aux formules du cours, notamment celles de l'addition et de la multiplication. La fonction la plus intéressante est celle qui permet d'avoir une racine carrée d'un nombre complexe. On en déduit cette petite bibliothèque de fonctions, que l'on applique dans le programme principal pour calculer la somme et le produit de deux nombres complexes :

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
struct complexe { double A; double B; };
double RE(struct complexe z);
double IM(struct complexe z);
void afficher(struct complexe z);
struct complexe ADD(struct complexe z, struct complexe zz);
struct complexe MULT(struct complexe z, struct complexe zz);
struct complexe OPP(struct complexe z);
struct complexe RAC(struct complexe z);

int main()
{ struct complexe z,zz,somme,produit;
  z.A=3.; z.B=2.; zz.A=1.; zz.B=-4.; /* z et zz sont donnés,
                                     afin de calculer leur somme et leur produit */
  somme=ADD(z,zz);
  produit=MULT(z,zz);
  afficher(z);afficher(zz);printf("\n\n somme ");afficher(somme);
  printf("\n\n produit ");afficher(produit);
  getchar(); return 0;
}
/* partie réelle d'un nombre complexe */
double RE(struct complexe z) { return z.A; }

/* partie imaginaire d'un nombre complexe */
double IM(struct complexe z) { return z.B; }

/* affichage d'un nombre complexe sous la forme a + ib */
void afficher(struct complexe z) { printf(" %3.lf + i %2.lf ",z.A,z.B); }

/* addition deux nombres complexes */
struct complexe ADD(struct complexe z, struct complexe zz)
```

```

{ struct complexe zzz;
  zzz.A=RE(z)+RE(zz); zzz.B=IM(z)+IM(zz);
  return zzz;
}

/* multiplication de deux nombres complexes */
struct complexe MULT(struct complexe z, struct complexe zz)
{ struct complexe zzz;
  zzz.A=RE(z)*RE(zz)-IM(z)*IM(zz);
  zzz.B=RE(z)*IM(zz)+RE(zz)*IM(z);
  return zzz;
}

/* opposé d'un nombre complexe */
struct complexe OPP(struct complexe z)
{ struct complexe oppose;
  oppose.A=-z.A; oppose.B=-z.B;
  return oppose;
}

/* racine carrée d'un nombre complexe, celle de partie réelle ≥ 0 */
struct complexe RAC(struct complexe z)
{ double signB; struct complexe rac;
  if (z.A > 0.) { rac.A=sqrt( (z.A+ sqrt(z.A*z.A+z.B*z.B) )/2.);
                 rac.B=z.B/(2.*rac.A);
  }
  else if (z.A < 0) { if (z.B>=0.) signB=+1.; else signB=-1.;
                     rac.B=signB*sqrt((-z.A+sqrt(z.A*z.A+z.B*z.B))/2.);
                     rac.A=z.B/(2.*rac.B);
  }
  else { rac.A=sqrt(fabs(z.B)/2.);
        if (z.B>=0) rac.B=rac.A;
        else rac.B=-rac.A;
  }
  return rac;
}

```

• A propos de la fonction racine carrée :

Un nombre $z = a + ib$ étant donné, on sait qu'il admet deux racines carrées opposées. Une racine carrée $x + iy$ est telle que $(x + iy)^2 = a + ib$, d'où le système de deux équations :³

³ Il existe une autre méthode utilisant la forme trigonométrique des nombres complexes. Le nombre z étant donné, avec $z = x + iy$, on commence par chercher son module r puis son argument θ , en utilisant judicieusement la fonction *arctangente*. Une racine carrée a pour module la racine carrée de r et comme argument la moitié de θ , l'autre racine carrée étant son opposée.

```

r=sqrt(x*x+y*y);
if (x>0.) theta=atan(y/x);
else if (x<0.) theta=M_PI-atan(-y/x); /* ou bien atan(y/x)+M_PI; */
else if (x==0.) theta = M_PI/2.;
newr=sqrt(r); /* module de la racine carrée */
newtheta1=(theta)/2 ; /* argument d'une racine carrée */
newx1=newr*cos(newtheta1);newy1=newr*sin(newtheta1); /* les deux racines carrées */
newx2=-newx1;newy2=-newy1;

```

Mais cette méthode s'avère nettement moins performante en pratique que celle que nous développons ci-dessus.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

On a aussi cette relation entre modules : $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$, et le système à résoudre ne change pas en ajoutant cette troisième équation :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xy = b \end{cases}$$

La somme des deux premières équations donne $2x^2 = a + \sqrt{a^2 + b^2}$, soit $x = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$.

Mais cette formule manque de précision dans le cas où a est négatif et b proche de 0. Aussi préfère-t-on distinguer plusieurs cas, en constatant qu'au lieu de calculer x comme précédemment, on peut aussi bien calculer y par soustraction des deux premières équations. On en déduit alors la racine carrée ayant sa partie réelle x positive ou nulle, l'autre étant son opposée, dans les trois cas suivants :

1) Pour $a > 0$,

$$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \\ y = \frac{b}{2x} \end{cases}$$

2) Pour $a < 0$

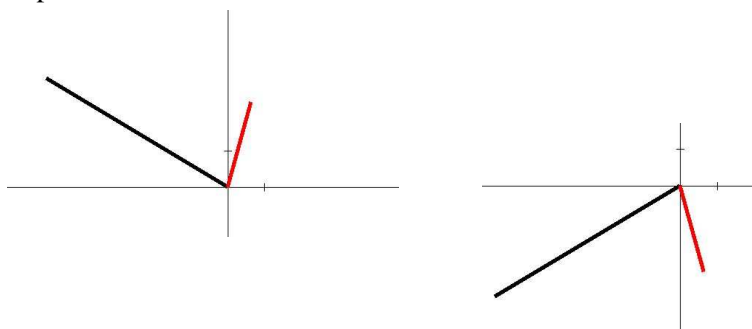
$$\begin{cases} y = (\text{sign}(b)) \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \\ x = \frac{b}{2y} \end{cases}$$

où la fonction $\text{sign}(b)$ vaut +1 ou -1 selon que b est positif ou négatif. On fait cela pour obtenir la même racine carrée que dans le 1°, où y est du signe de b puisque x est positif.

3) Pour $a = 0$, l'addition des deux premières équations se réduit à $x = \sqrt{\frac{|b|}{2}}$ où l'on a choisi $x \geq 0$.

Puis on distingue deux cas, en utilisant $2xy = b$ et $x^2 = y^2$: si b est ≥ 0 , y est aussi ≥ 0 , et $y = x$, et si b est < 0 , $y = -x$.

Exemples :



A gauche, le nombre complexe $z = -5 + i3$, affixe du vecteur dessiné en noir, admet comme racine carrée de partie réelle positive le nombre dont l'image est le vecteur rouge. Même chose à droite pour le nombre $z = -5 - i3$.

En privilégiant la racine carrée ayant une partie réelle positive ou nulle, cela veut dire que l'argument du nombre z est pris entre $-\pi$ et $+\pi$ et que l'on divise cet argument par 2 pour avoir cette racine carrée. En notant \sqrt{z} cette racine carrée, elle bénéficie de la propriété suivante :

$$\overline{\sqrt{z}} = \sqrt{\overline{z}}.^4$$

- **Quelques autres fonctions complexes**

```

/* conjugué d'un nombre complexe */
struct complexe CONJ(struct complexe z)
{ struct complexe conjue;
  conjue.A=z.A; conjue.B=-z.B;
  return conjue;
}

/* module au carré d'un nombre complexe */
double MODULE2(struct complexe z)
{ return RE(z)*RE(z)+IM(z)*IM(z);
}

/* Soustraction de deux nombres complexes  $z - zz$  */
struct complexe SOUSTR(struct complexe z, struct complexe zz)
{ struct complexe zzz;
  zzz.A=RE(z)-RE(zz); zzz.B=IM(z)-IM(zz);
  return zzz;
}

/* multiplication d'un nombre réel avec un nombre complexe */
struct complexe MULTreel(double reel, struct complexe z)
{ struct complexe zz;
  zz.A=reel*RE(z);
  zz.B=reel*IM(z);
  return zz;
}

/* inverse d'un nombre complexe  $z$  supposé différent de 0. Cela permet de faire des divisions */
struct complexe INV(struct complexe z)
{ return MULTreel(1./MODULE2(z),CONJ(z));
}

/* puissance complexe  $Z^z$  avec  $Z = a + ib$  et  $z = c + id$  */
struct complexe PUISS(double a, double b, double c, double d) /* a différent de 0 */
{ double r,theta,P,angle;
  struct complexe Q;
  r=sqrt(a*a+b*b);
  theta= atan(b/a); if (a<0.) theta+M_PI; /* a ≠ 0 */
  P= pow(r,c)*exp(-d*theta);
  angle=c*theta+d*log(r);
  Q.A=cos(angle); Q.B=sin(angle);
  return (MULTreel(P,Q));
}

```

⁴ Si l'on prenait l'argument de z entre 0 et 2π , et que l'on privilégiait la racine carrée ayant l'argument moitié, cette formule ne serait plus valable.

Pour ce calcul de la puissance complexe Z^z , on commence par mettre Z sous forme trigonométrique, soit $Z = r e^{i\theta}$. Alors :

$$\begin{aligned} Z^z &= (r e^{i\theta})^{c+id} = r^c r^{id} e^{ic\theta} e^{-d\theta} = r^c e^{-d\theta} e^{id \ln r} e^{ic\theta} \\ &= P Q \text{ avec } P = r^c e^{-d\theta} \text{ réel et } Q = e^{i(c\theta + d \ln r)} = \cos(c\theta + d \ln r) + i \sin(c\theta + d \ln r) \end{aligned}$$

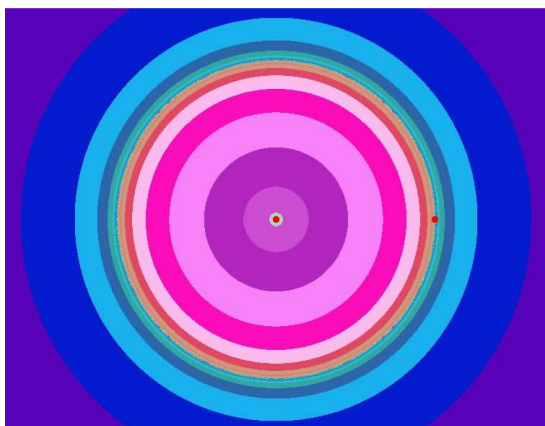
Nous allons maintenant utiliser cette bibliothèque complexe pour traiter un problème classique.

17. Fractales de Fatou-Julia

1) Le cas du cercle

Commençons par un exemple simple, en faisant subir à un point d'affixe z_0 la relation de récurrence $z_{n+1} = z_n^2$, avec comme fonction sous-jacente $f(z) = z^2$. La succession des points obtenus à partir de z_0 forme ce que l'on appelle la trajectoire de z_0 . Le fait d'élever au carré signifie que l'on élève au carré les modules et que l'on double les angles. Que se passe-t-il ? Si le point d'affixe z_0 a un module inférieur à 1, avec des modules élevés au carré à chaque fois, la trajectoire du point converge vers O . Par contre, si le point d'affixe z_0 a un module supérieur à 1, la trajectoire du point s'en va à l'infini. Le disque de rayon 1 (sans sa frontière) constitue ce que l'on appelle le bassin d'attraction de O , tandis que son extérieur strict est le bassin d'attraction du « point à l'infini ». Il existe deux types de points, ceux dont la trajectoire ne s'échappe pas à l'infini et qui restent « prisonniers », et ceux qui s'échappent à l'infini. La frontière entre ces deux types de points, ici le cercle de centre O et de rayon 1 constitue ce qui s'appelle l'ensemble, ou la courbe, de Fatou-Julia associé à la fonction f . Mais qu'en est-il dans le cas particulier où le point d'affixe z_0 est sur le cercle ? Le module des points de sa trajectoire reste égal à 1, et en règle générale, la trajectoire va parcourir le cercle (de façon dense si l'argument de z_0 est une fraction irrationnelle de 2π). Par contre si l'on prend le point d'affixe 1 qui est aussi sur le cercle, il reste fixe, et l'on dit qu'il est repousseur puisque tout point de son voisinage va s'en éloigner irrémédiablement.

On dispose déjà d'un premier algorithme, dit d'échappée dans le temps, pour construire la courbe de Fatou-Julia. Il suffit de prendre les points z_0 du plan complexe et de colorier ceux qui s'échappent à l'infini, c'est-à-dire ceux dont la trajectoire déborde au-delà d'un grand cercle de rayon R (par exemple $R = 1000$). La frontière de cette zone coloriée est justement le cercle. Mieux encore, en comptant le nombre d'étapes qu'il faut à la trajectoire d'un point pour passer au-delà de la frontière circulaire R , ou encore pour entrer dans un petit voisinage du point O , on peut colorier les points en fonction de ce nombre d'étapes, ce qui donne des couronnes circulaires.



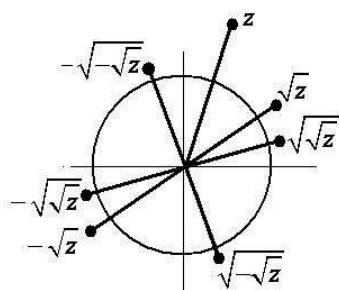
Echappée dans le temps, avec les points à dominante bleue qui s'échappent à l'infini, et les points à dominante rouge qui restent prisonniers. Les points fixes 0 et 1 sont indiqués en rouge.

Précisons un peu plus la nature du phénomène, en déterminant les points fixes de la fonction f . Il s'agit des points tels que $f(z) = z$, soit $z^2 = z$. Il existe deux points fixes, à savoir $z = 0$, et $z = 1$, et nous avons déjà trouvé ces points expérimentalement. On dispose alors de la propriété suivante⁵ :

Selon que la dérivée de $f(z)$ en un point fixe a un module inférieur ou supérieur à 1, le point fixe est attracteur ou repousseur.

Ici $f'(z) = 2z$. Au point 0, la dérivée est nulle, le point est attracteur. Au point 1, $|f'(1)| = 2$, le point est repousseur, comme nous l'avons déjà constaté.⁶

Maintenant, au lieu d'appliquer la fonction f , appliquons sa réciproque. Un point z admet deux antécédents $\pm\sqrt{z}$. En partant d'un point quelconque z_0 , il admet deux antécédents qui à leur tour admettent deux antécédents, etc. D'où que l'on parte, la trajectoire ainsi obtenue va venir se coller sur le cercle, puisque les modules sont transformés à chaque fois en leur racine carrée et qu'ils tendent vers 1 dans tous les cas.⁷ Les points 0 et ∞ qui étaient attracteurs, deviennent repousseurs pour la fonction réciproque.



Premiers antécédents d'un point d'affixe z . Ils se rapprochent du cercle. Les suivants vont finir par se coller sur le cercle, et le parcourir.

Cette méthode par la fonction réciproque donne lieu à deux algorithmes :

- Un algorithme récursif où l'on part d'un point quelconque, en prenant à chaque fois ses deux antécédents par racines carrées. Au bout d'une dizaine d'étapes par exemple, on obtient un millier de points qui sont collés sur le cercle, sauf les premiers d'entre eux. C'est ainsi que la courbe circulaire apparaît.
- Un algorithme probabiliste et itératif, où l'on prend à chaque fois une des deux racines carrées au hasard, avec la même probabilité. Là encore, après les premiers points, les autres sont sur le cercle et le dessinent.

2) Cas général

Ce que nous avons fait avec la fonction $f(z) = z^2$, nous allons le généraliser à une fonction légèrement différente, soit $f(z) = z^2 + c$, où c est un nombre complexe donné, avec pour chaque valeur de c une fonction f . Des phénomènes inattendus vont alors se produire.

⁵ Il s'agit d'une généralisation pour les nombres complexes de ce que l'on connaît pour les nombres réels (voir chapitre du cours sur les suites).

⁶ On pourrait aussi démontrer que le point à l'infini est attracteur.

⁷ Si l'on prenait seulement une racine carrée \sqrt{z} et non pas les deux, la trajectoire d'un point quelconque convergerait vers le point 1 qui maintenant est attracteur.

Cherchons les points fixes de l'application f . Ils vérifient $z = z^2 + c$, ou $z^2 - z + c = 0$. On trouve deux solutions $z_f = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}$. Avec $|f'(z_f)| = 2|z_f|$, il est possible de savoir si le point fixe est attracteur ou repousseur.

Contentons-nous de traiter le cas où c est un nombre réel.

- Si $c > 1/4$, le discriminant est négatif, et l'on a deux points fixes complexes non réels conjugués, soit $\frac{1 \pm i\sqrt{4c-1}}{2}$. Avec $|f'(z_f)| = 2|z_f| = \sqrt{1+4c-1} = 2\sqrt{c} > 2 \times 1/2$ supérieur à 1, ces deux points fixes sont repousseurs.

- $-3/4 < c < 1/4$, le discriminant est positif, et l'on a deux points fixes réels $z_f = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}$. Le point fixe $\frac{1 + \sqrt{1-4c}}{2}$ est tel que la valeur absolue $|2z_f| > 1$, il est repousseur. Par contre l'autre point fixe $\frac{1 - \sqrt{1-4c}}{2}$ est tel que $2z_f = 1 - \sqrt{1-4c} < 1$. Si l'on impose en plus que $2z_f > -1$, cela s'écrit $1 - \sqrt{1-4c} > -1$, $\sqrt{1-4c} < 2$, $1-4c < 4$, $c > -3/4$ et dans ce contexte, avec $|2z_f| < 1$, ce point fixe est attracteur.

- $c < -3/4$, les deux points fixes sont repousseurs car dans les deux cas $|2z_f| > 1$.

Vérifions cela sur quelques exemples, en utilisant l'algorithme d'échappée dans le temps, avec son programme :

- Recherche éventuelle des points fixes, pour le cas où l'un de ces points serait attracteur, auquel cas on peut dessiner son bassin d'attraction :

```
z1.A=1.; z1.B=0.; z4.A=4.; z4.B=0.; z05.A=0.5; z05.B=0.; /* z1 = 1, z4 = 4, z05 = 0,5 */
racdelta=RAC(ADD(z1,OPP(MULT(z4,c)))); /* utiliser la bibliothèque complexe */
pf1=MULT(z05,ADD(z1,racdelta));
pf2=MULT(z05,ADD(z1,OPP(racdelta)));
filldisc(400+zoom*RE(pf1),300-zoom*IM(pf1),4,rouge); /* coloriage en rouge des deux points fixes */
filldisc(400+zoom*RE(pf2),300-zoom*IM(pf2),4,rouge);
```

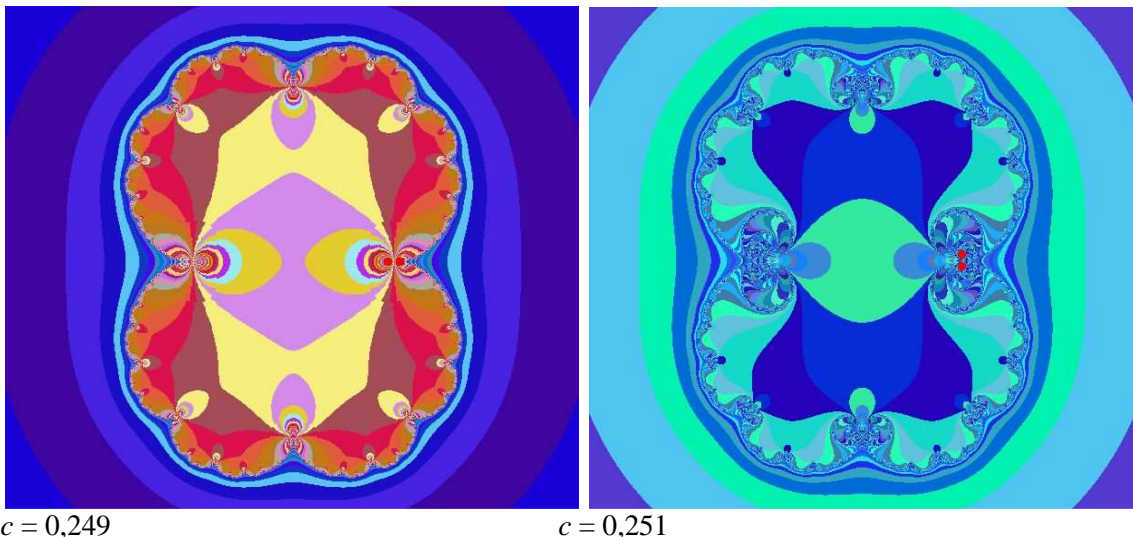
- Programme principal

```
for(xe=0;xe<800;xe++) for(ye=0;ye<600;ye++) /* parcours d'écran pixel par pixel */
{ x=(float)(xe-xorig)/zoom;y=(float)(yorig-ye)/zoom; /* passage aux points (x,y) pour les calculs */
  for(i=0;i<2000;i++) /* trajectoire des points */
  { newx=x*x-y*y+xc; newy=2*x*y+yc; /* conversion en réels de new z = z^2 + c */
    x=newx;y=newy;
    if (x*x+y*y>2000*2000) {putpixel(xe,ye,col2[i]);break;} /* test d'échappée avec R = 2000 */
    /* si le point fixe z_f2 est attracteur, on peut rajouter :
    else if ( (x-RE(pf2))*(x-RE(pf2)) + (y-IM(pf2))*(y-IM(pf2))<0.00000000001)
    {putpixel(xe,ye,col1[i]); break;}
    */
  }
}
```

Dans ce programme, on utilise les couleurs $c2[]$ à dominante bleue pour les points dont la trajectoire s'échappe à l'infini, et dans le cas où un point fixe est attracteur, on utilise les couleurs $c1[]$ à dominante rouge pour les points dont la trajectoire converge vers ce point fixe.

Prenons par exemple $c = 0,249$. Comme le deuxième point fixe est attracteur, on dessine non seulement le bassin d'attraction de l'infini à dominante bleue, mais aussi celui du point attracteur, à dominante rouge, leur séparation constituant la courbe de Fatou-Julia.⁸ On constate que cette courbe n'est plus du tout lisse comme dans le cas du cercle vu précédemment. A cause de ses multiples ruptures de pente, on l'appelle une fractale. Du fait qu'il s'agit d'une frontière, ses points sont entre deux eaux, n'étant ni attirés vers le point fixe ni vers l'infini. Cette courbe est telle que tout point situé sur elle a une trajectoire formée de points eux aussi situés sur elle. Elle reste globalement invariante sous l'effet répété de la fonction $f(z) = z^2 + c$.

Puis prenons $c = 0,251$, avec ses deux points fixes qui sont maintenant repousseurs. On constate que le bassin d'attraction de l'infini couvre tout le plan. Le dessin n'a rien à voir avec le dessin précédent, et pourtant il lui ressemble. Il n'y a pas de courbe frontière entre deux bassins d'attraction, mais il existe une « courbe » qui reste globalement invariante sous l'effet de la fonction f . Ses points sont tels que leurs images successives restent sur cette courbe. Ils ne s'échappent pas à l'infini. Cette courbe, invisible en l'état actuel, va ressembler à la précédente, comme l'indiquent déjà certaines ressemblances entre les deux dessins, mais il semble qu'elle n'ait plus d'intérieur, et il est vraisemblable que la courbe (ensemble de points) présente des trous, on dit alors qu'elle est non connexe (ou déconnectée).



Pour mieux visualiser ces courbes fractales, on est amené à utiliser l'autre algorithme, celui qui utilise la fonction réciproque, faisant passer de z à ses deux racines carrées. Rappelons qu'il existe soit sous forme probabiliste, en prenant une des deux racines carrées au hasard, soit sous forme récursive en prenant à chaque fois les deux racines carrées.

a) Algorithme probabiliste

```

se donner c
x=0.; y=2.; /* point z initial */
z.A=x;z.B=y;
for(i=0;i<1000000;i++)
{ h=rand()%2;
  z=RAC(ADD(z,OPP(c)));
  if (h==1) z=OPP(z);
  putpixel(400+zoom*RE(z),300- zoom*IM(z),rouge);
}

```

⁸ Si l'on dessine seulement la zone d'échappée dans le temps, sa frontière constitue la fractale de Fatou-Julia, et celle-ci enferme une surface intérieure qui n'est nulle part coloriée.

b) Algorithme récursif

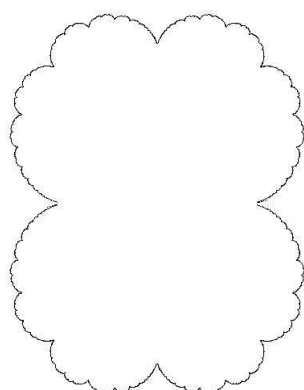
On se donne c et le point initial z ou (x, y) . Puis le programme principal appelle la fonction récursive :

point($z, 100000$);

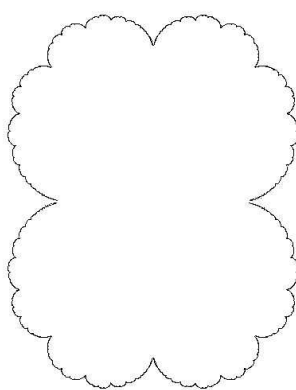
```
void point(complexe z,int n)
{ complexe zz;
  if (n!=0)
  {
    if (n<99990) putpixel(400+zoom*RE(z),300-zoom*IM(z),black);
    z=RAC(ADD(z,OPP(c))); zz=OPP(z);
    if (getpixel(400+zoom*RE(z),300-zoom*IM(z))==white)
      point (z,n-1);
    if (getpixel(400+zoom*RE(zz),300-zoom*IM(zz))==white)
      point (zz,n-1);
  }
}
```

A noter que pour éviter l'explosion du nombre des points, ce nombre doublant à chaque fois, on ne rappelle la fonction *point()* qu'à partir des points qui n'ont pas déjà été obtenus, plus précisément ceux qui ne sont pas déjà coloriés sur l'écran.

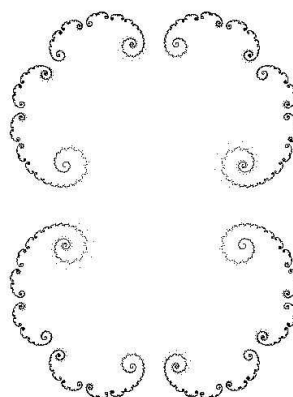
Dans le cas des deux exemples précédents, avec $c = 0,249$ et $c = 0,251$, on trouve maintenant deux courbes apparemment identiques. La précision des calculs n'est pas suffisante pour faire apparaître leur différence, à savoir que l'une est connexe et l'autre pas. C'est en prenant de plus grandes valeurs de c , par exemple $c = 0,3$ que l'on voit nettement la non-connexité de la courbe.



$c = 0,249$



$c = 0,251$

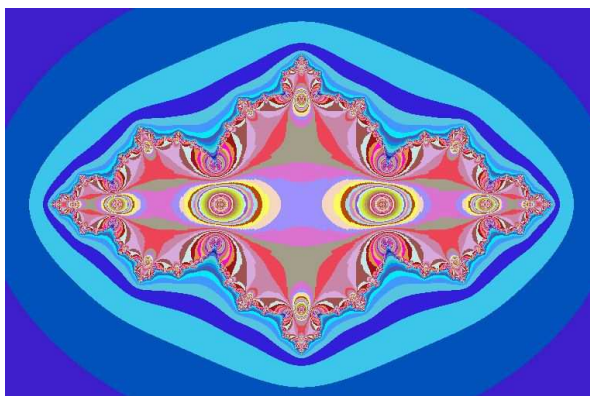


$c = 0,3$

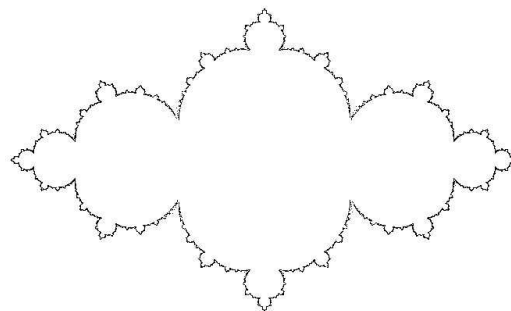
A ce stade, nous disposons alors d'une définition de la courbe de Fatou-Julia : il s'agit de l'ensemble de points qui restent globalement invariants aussi bien sous l'effet de $f(z) = z^2 + c$ que de sa réciproque faisant passer de z à $\pm\sqrt{z-c}$.

Exercice 9

Utiliser les deux types d'algorithmes pour traiter le cas $c = -0,7$, sachant comme on l'a vu qu'il existe un point fixe attracteur en plus de l'infini. Et constater qu'on est loin du cas où l'on obtenait un cercle pour $c = 0$.



$c = -0,7$



Jusqu'à présent nous avons eu deux cas de figure : celui où l'ensemble des points qui ne s'échappent pas à l'infini était vide ($c = 0,3$ par exemple), et celui où il ne l'était pas, avec convergence vers un point fixe attracteur ($c = 0$, 249 ou $c = 0$ ou $c = -0,7$). Mais la situation est plus complexe. Il peut arriver que des points convergent non plus vers un seul point fixe, mais sur un cycle fixe de plusieurs points. La trajectoire d'un point finit par se coller sur un point du cycle puis passe au suivant, dans un mouvement tournant infini. Nous allons traiter un de ces cas, celui d'un cycle de deux points.

Cas d'un cycle fixe de deux points

Si la trajectoire d'un point sous l'effet de $f(z) = z^2 + c$ finit par osciller indéfiniment sur un cycle de deux points, cela signifie que chacun de ces deux points est un point fixe pour la fonction $f^2(z)$:

$$z \rightarrow f(z) = z^2 + c \rightarrow f^2(z) = f(f(z)) = f(z^2 + c) = (z^2 + c)^2 + c = z^4 + 2cz^2 + c^2 + c.$$

On obtient un polynôme du quatrième degré. Mais les deux points fixes de f restent des points fixes pour f^2 . On peut donc mettre en facteur $z^2 - z + c$ dont les deux racines sont ces points fixes. On trouve :

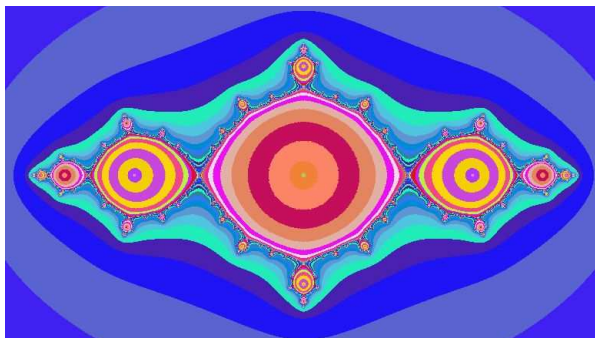
$f^2(z) = (z^2 - z + c)(z^2 + z + c + 1)$. Les racines z_1 et z_2 de $z^2 + z + c + 1$ constituent le cycle fixe de deux points pour $f(z)$. On trouve comme racines $\frac{-1 \pm \sqrt{-3-4c}}{2}$. Pour voir si ces points sont attracteurs

ou repousseurs pour f , ou aussi bien pour f^2 , dérivons : $(f^2(z))' = 4z^3 + 4cz = 4z(z^2 + c)$. On constate que $(f^2(z_1))' = 4z_1z_2$ et de même pour $(f^2(z_2))'$. Ainsi $|(f^2(z_1))'| = 4|1 + c|$. Selon que cette quantité est inférieure à 1 ou supérieure à 1, le cycle des deux points est attracteur ou repousseur.

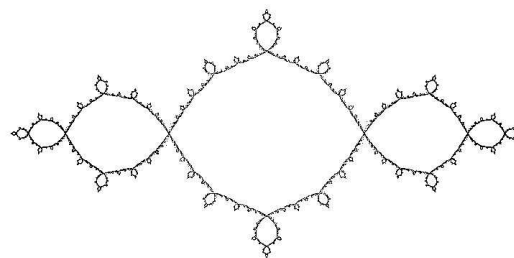
Revenons au cas où c est un nombre réel. Le cycle sera attractif si et seulement si $|1 + c| < 1/4$, soit $-5/4 < c < -3/4$.⁹

Par exemple, pour $c = -1$, on a le cycle fixe des deux points -1 et 0 . Les algorithmes précédents permettent de tracer la fractale correspondante, notamment l'algorithme d'échappée dans le temps, avec l'appoint du bassin d'attraction du cycle des deux points.

⁹ Rappelons que pour $c < -3/4$ les points fixes de f sont tous deux repousseurs. Ils ont laissé la place à un cycle attracteur.



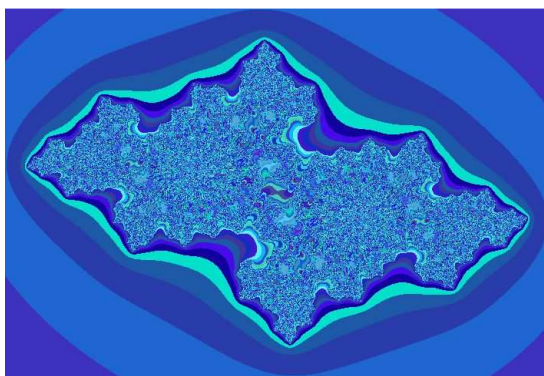
$c = -1$



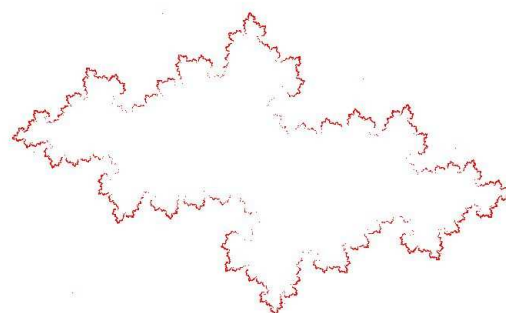
En-deçà de $-3/4$, le cycle des deux points devient à son tour repousseur, mais il laisse la place à un cycle de quatre points à son tour attracteur avant de devenir repousseur en faisant place à des cycles plus grands.

Exercice 10

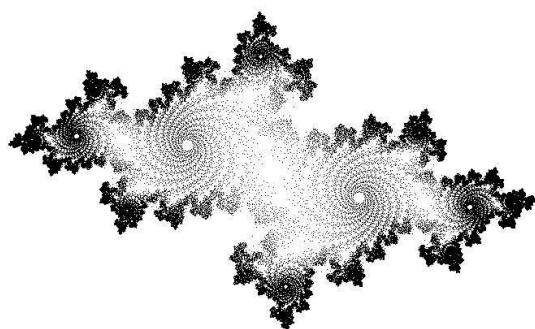
Utiliser les trois programmes précédents pour traiter le cas $c = -0,69 + i\,0,29$



Echappée dans le temps



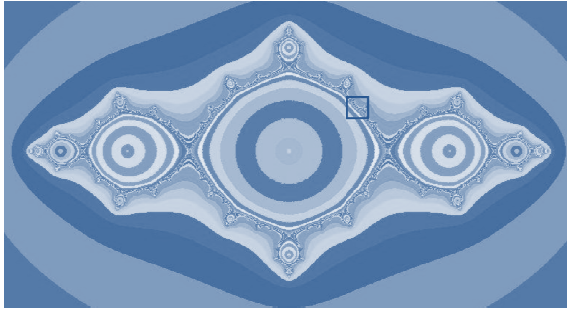
Algorithme probabiliste



Algorithme récursif, ici très supérieur à l'algorithme probabiliste

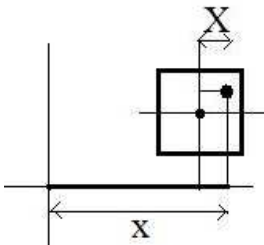
Exercice 11

Jusqu'ici, l'algorithme d'échappée dans le temps a permis de visualiser toute la fractale et son environnement sur l'écran. Mais on peut prendre une toute petite partie de l'image et la zoomer plein écran. Pour cela définissons un petit carré pris dans l'image, en se donnant son centre (x_{centre}, y_{centre}) et la longueur d du côté. On a intérêt à choisir ce carré de façon qu'il traverse la courbe fractale, là où les petits détails sont les plus importants, comme par exemple sur le dessin suivant.



Cela étant fait, on veut que cette petite zone carrée soit agrandie pour devenir un carré de côté L (par exemple $L = 400$) sur l'écran avec comme centre celui de l'écran ($xorig, yorig$), soit (400, 300). Le zoom à effectuer est donc égal à L/d .

a) Prendre un point du petit carré dans la zone de calcul. Dans un repère centré en ($xcentre, ycentre$) appelons ses coordonnées (X, Y), avec X et Y variant de $-d/2$ à $+d/2$. Chercher la formule de passage entre ce point (X, Y) et ce même point (xe, ye) après le zoom sur l'écran.



Dans la zone calcul, le point (X, Y) a pour coordonnées (x, y) dans le repère initial, avec les relations :

$x = xcentre + X, y = ycentre + Y$, ou encore $X = x - xcentre, Y = y - ycentre$. Puis on pratique le zoom L/d et l'on fait une translation pour centrer le carré écran en ($xorig, yorig$), ce qui donne le point (xe, ye), avec :

$$xe = (L/d) (x - xcentre) + xorig$$

$$ye = yorig - (L/d)(y - ycentre).$$

2) Faire le programme, en prenant $c = -1$, avec dans ce cas non seulement le bassin d'échappée à l'infini, mais aussi le bassin d'attraction vers le cycle fixe des deux points 0 et -1 . Faire varier le côté du petit carré de $d = 0,2$ à $d = 0,000005$ et observer le grossissement progressif de cette zone dans le carré écran de côté L .

Pour chaque valeur de d , il suffit de parcourir pixel par pixel le carré écran de côté L . Pour chaque point (xe, ye), on commence par convertir ses coordonnées dans la zone de calcul, en inversant les formules précédentes, ce qui donne :

$$x = (xe + (L/d) xcentre - xorig)/(L/d)$$

$$y = (yorig + (L/d) ycentre - ye)/(L/d)$$

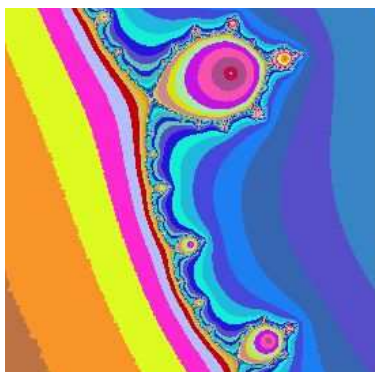
Puis on prend la trajectoire de ce point (x, y) qui va soit vers l'infini soit vers le cycle 0, -1 . Il suffit enfin de colorier le point écran correspondant (xe, ye) soit avec la couleur à dominante bleue, soit avec celle à dominante rouge.

```
xcentre=0.4; ycentre=0.289;
L=400.;
for(d=0.2;d>=0.000005;d-=0.001)
{ ZOOM=(float)L/d;
```

```

for(xe=xorig-L/2;xe<xorig+L/2;xe++) for(ye=yorig-L/2;ye<yorig+L/2;ye++)
{ x=(xe+ZOOM*xcentre-xorig)/ZOOM; y=(yorig+ZOOM*ycentre-ye)/ZOOM;
  for(i=0;i<2000;i++)
  { newx=x*x-y*y+xc; newy=2*x*y+yc;
    x=newx;y=newy;
    if (x*x+y*y>2000*2000) {putpixel(xe,ye,col2[i]);break;}
    else if (x*x+ y*y<0.000000000000001 ) {putpixel(xe,ye,col1[i]); break;}
  }
}
SDL_Flip(screen);
}

```



Zoom sur une minuscule partie de l'image.

18. Nombres complexes et géométrie

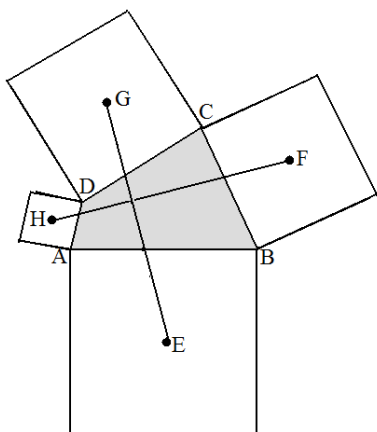
Il est souvent pratique de traiter des problèmes de géométrie à l'aide des nombres complexes¹⁰. Notamment les transformations planes comme les translations, rotations, réflexions, similitudes directes¹¹, peuvent s'écrire en complexes. Nous donnons ci-dessous quelques exemples sous forme d'exercices.

Exercice 12 : Quadrilatère et carrés accolés sur ses côtés.

Considérons un quadrilatère ABCD dans le sens direct, et accolons lui extérieurement des carrés. Le carré dont un côté est [AB] a pour centre E, celui accolé à [BC] a pour centre F, et de même G et H sont les centres des deux autres carrés.

¹⁰ Citons notamment le théorème de Napoléon (dans la rubrique *Travaux complémentaires/graphisme et géométrie* sur le site pierreaudibert.fr).

¹¹ On pourra consulter le chapitre consacré aux similitudes directes dans le plan, dans la rubrique *enseignements/informatique et mathématiques*.



A- On veut démontrer que $GE = HF$ et que $[GE]$ est perpendiculaire à $[HF]$.

Pour ce faire on se place dans le plan complexe en prenant A comme origine (les axes orthogonaux étant quelconques). On pose $2a$ affixe du vecteur \overrightarrow{AB} , $2b$ celui de \overrightarrow{BC} , $2c$ celui de \overrightarrow{CD} , et $2d$ celui de \overrightarrow{DA} , le facteur 2 n'étant pris que pour simplifier les calculs.

1) Montrer que $a + b + c + d = 0$.

Puisque $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \mathbf{0}$ grâce à la formule de Chasles, on en déduit que $2(a + b + c + d) = 0$, ou $a + b + c + d = 0$.

2) Déterminer les affixes des centres E, F, G, H des carrés en fonction de a, b, c, d .

Appelons K le milieu de $[AB]$. A cause du carré, on a $AK = KE$ et l'angle $(\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{KE}) = -\pi/2$. L'égalité vectorielle $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KE}$ se traduit en complexes par $e = a - ia = (1 - i)a$, puisque \overrightarrow{KE} se déduit de \overrightarrow{AK} en tournant de $-\pi/2$.

De même, avec K' milieu de $[BC]$, $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BK'} + \overrightarrow{K'F}$, ou encore $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK'} + \overrightarrow{K'F}$, ce qui donne en complexes $f = 2a + b - ib$.

Pour les mêmes raisons, $g = 2a + 2b + c - ic$, et $h = 2a + 2b + 2c + d - id$.

Le vecteur \overrightarrow{GE} a pour affixe $e - g = a - ia - 2a - 2b - c + ic = a(-1 - i) - 2b + c(-1 + i)$
 le vecteur \overrightarrow{HF} a pour affixe $f - h = 2a + b - ib - 2a - 2b - 2c - d + id = b(-1 - i) - 2c + d(-1 + i)$
 $= b(-1 - i) - 2c - (a + b + c)(-1 + i)$
 $= b(-1 - i) - 2c + (a + b + c)(1 - i)$
 $= a(1 - i) - 2ib + c(-1 - i)$

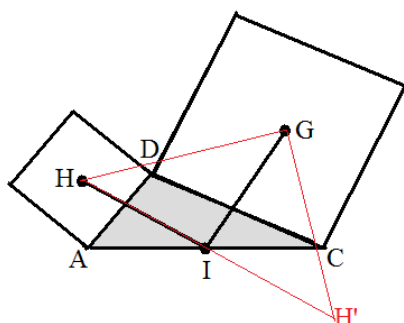
Formons $i(e - g) = a(1 - i) - 2ib + c(-1 - i)$.

On constate que $f - h = i(e - g)$. Avec $f - h$ affixe de \overrightarrow{HF} et $e - g$ affixe de \overrightarrow{GE} , cela prouve que $HF = GE$ et $(\overrightarrow{GE}, \overrightarrow{HF}) = \pi/2$.

B- Nous allons reprendre ce problème géométriquement.

1) Prenons un triangle quelconque ACD direct avec I milieu de $[AC]$, et accolons lui extérieurement deux carrés de centre G et H . Il s'agit de montrer que $IG = IH$ et $(\overrightarrow{IG}, \overrightarrow{IH}) = \pi/2$, ce qui revient à dire que la rotation de centre I et d'angle $\pi/2$ fait passer de G à H .

Pour cela faire la composée des deux rotations $R_{G, \pi/2} \circ R_{H, \pi/2}$ de centres respectifs G et H et de même angle $\pi/2$, et déterminer sa nature, en cherchant notamment l'image de A . Puis utiliser le point H' image de H par $R_{G, \pi/2}$ pour prouver la propriété.

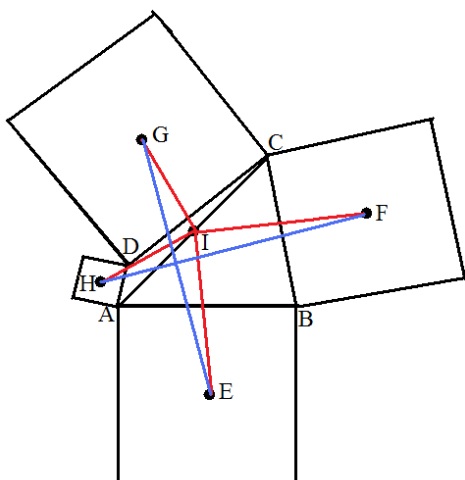


Si l'on sait que la composée de deux rotations est une rotation ayant comme angle la somme des angles des deux rotations (sous réserve que cette somme ne soit pas nulle, à $2k\pi$ près), la composée $R_{G, \pi/2} \circ R_{H, \pi/2}$ est un demi-tour.¹²

$A \rightarrow D \rightarrow C$ par la composée des deux rotations. Le demi-tour fait passer de A à C . Il a donc pour centre le milieu I de $[AC]$.

Toujours par la composée des deux rotations : $H \rightarrow H \rightarrow H'$ avec $GH' = GH$ et $(\mathbf{GH}, \mathbf{GH}') = \pi/2$, et le triangle HGH' est isocèle rectangle. Le demi-tour de centre I fait passer de H à H' , d'où I est le milieu de $[HH']$. La médiane $[GI]$ est aussi hauteur, et de longueur moitié par rapport à $[HH']$. Donc $IG = IH$ et $(\mathbf{IG}, \mathbf{IH}) = \pi/2$. Ce qui revient à faire une rotation de centre I et d'angle $\pi/2$ pour passer de G à H .

2) Reprendre le quadrilatère $ABCD$ en le découpant en deux triangles ACD et ABC , le côté commun $[AC]$ ayant pour milieu I . Utiliser le résultat précédent pour prouver que $[HF]$ se déduit de $[GE]$ par une rotation r de centre I et d'angle $\pi/2$. Cela permet de retrouver le résultat obtenu au A°.

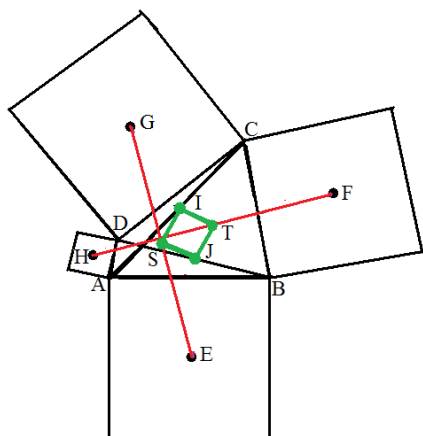


On a vu au 1° que l'on passe de G à H par la rotation r de centre I et d'angle $\pi/2$. De même en utilisant maintenant le triangle ABC , on passe de E à F par cette même rotation r .

Avec $G \rightarrow H$ et $E \rightarrow G$ par r , on en déduit que $GE = HF$ et $(\mathbf{GE}, \mathbf{HF}) = \pi/2$.

3) Choisissons maintenant de découper le quadrilatère selon son autre diagonale $[DB]$, de milieu J . Montrer que l'on passe de $[HF]$ à $[EG]$ par la rotation r' de centre J et d'angle $\pi/2$.

¹² Si on ne le sait pas, on écrit en complexes la rotation $R_{H, \pi/2} : z' - h = i(z - h)$, de la forme $z' = iz + b$, puis $R_{G, \pi/2}$ de la forme $z' = iz + b'$. La composée des deux donne $z' = -z + b''$, ce qui correspond bien à un demi-tour.



Pour les mêmes raisons que précédemment, la rotation de centre J et d'angle $\pi/2$ fait passer de H à E , et de F à G .

$$\begin{aligned} H &\rightarrow E \\ F &\rightarrow G \text{ d'où } [HF] \rightarrow [EG] \end{aligned}$$

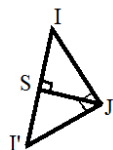
4) On appelle S le milieu de $[GE]$ et T le milieu de $[HF]$. Utiliser les composées $r' \circ r$ et $r \circ r'$ des rotations r et r' pour montrer que $ISJT$ est un carré.

$r' \circ r$ est un demi-tour, tout comme $r \circ r'$.

Par $r' \circ r : G \rightarrow H \rightarrow E$

$E \rightarrow F \rightarrow G$

Puisque $G \rightarrow E$ et $E \rightarrow G$, le demi-tour $r' \circ r$ a pour centre le milieu S de $[GE]$.



Par $r' \circ r$ on a aussi $I \rightarrow I' \rightarrow I''$ avec S milieu de $[I I']$. On en déduit (cf. figure) que SJI est un triangle rectangle isocèle.

De même, $r \circ r'$ est un demi-tour de centre T , et $J \rightarrow J' \rightarrow J''$ avec T milieu de $[JJ']$, ce qui entraîne que TIJ est un triangle rectangle isocèle.

Finalement $SJTI$ est bien un carré.

Exercice 13. Attelage de chiens de traîneau

On se place dans le plan complexe d'origine O , et l'on se donne un angle a non nul. Puis on se donne $2n + 1$ vecteurs, tous de longueur unité. Plus précisément, il s'agit du vecteur \mathbf{OA}_0 d'affixe 1, des n vecteurs \mathbf{OA}_k faisant un angle ka avec l'axe des x (avec k entre 1 et n), ainsi que les n vecteurs \mathbf{OA}'_k faisant un angle $-ka$ avec l'axe Ox . On s'intéresse à la somme S de ces $2n + 1$ vecteurs.

1) Montrer que S est porté par (Ox) . En déduire que le vecteur S a une mesure algébrique s (son abscisse) qui est une somme de cosinus que l'on précisera.

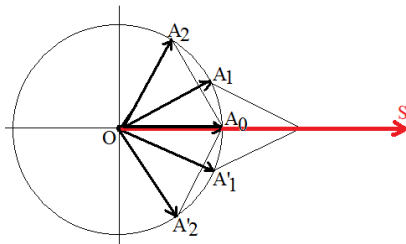
Pour chaque valeur de k entre 1 et n , les vecteurs \mathbf{OA}_k et \mathbf{OA}'_k sont symétriques par rapport à l'axe des x , leur somme est portée par Ox . Le vecteur \mathbf{OA}_0 est aussi porté par Ox . La somme S est donc portée par Ox .

Le vecteur \mathbf{OA}_k se projette sur Ox suivant un vecteur de mesure algébrique $\cos ka$, tout comme \mathbf{OA}'_k , d'où

$$s = 1 + 2(\cos a + \cos 2a + \dots + \cos na).$$

2) Traiter le cas où $n = 2$ et $a = \pi/6$, et déterminer s .

Ici $s = 1 + 2 (\cos \pi/6 + \cos \pi/3) = 1 + 2 (\sqrt{3}/2 + 1/2) = 2 + \sqrt{3}$.



3) On pose $A = \cos a + \cos 2a + \dots + \cos na$ et $B = \sin a + \sin 2a + \dots + \sin na$. On forme

$Z = A + iB$. Montrer que $Z = \frac{\sin na / 2}{\sin a / 2} e^{i(n+1)a/2}$ et en déduire s . Pour simplifier s , utiliser la

formule : $2 \sin x \cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y)$, et vérifier que finalement $s = \frac{\sin((2n+1)a/2)}{\sin(a/2)}$

$$\begin{aligned} Z &= (\cos a + \cos 2a + \dots + \cos na) + i(\sin a + \sin 2a + \dots + \sin na) \\ &= (\cos a + i \sin a) + (\cos 2a + i \sin 2a) + \dots + (\cos na + i \sin na) \\ &= e^{ia} + e^{i2a} + \dots + e^{ina} = e^{ia} (1 + e^{ia} + \dots + e^{i(n-1)a}) = e^{ia} (1 + e^{ia} + (e^{ia})^2 + \dots + (e^{ia})^{n-1}) \\ &= e^{ia} \frac{1 - e^{ina}}{1 - e^{ia}} \end{aligned}$$

grâce à la formule sur la somme des termes d'une suite géométrique (on est dans le cas où $e^{ia} \neq 1$ puisque a n'est pas nul).

On a utilisé la formule d'Euler sur le sinus, soit $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.

On en déduit que $A = \frac{\cos((n+1)a/2) \sin na / 2}{\sin a / 2}$

et

$$s = 1 + 2 \frac{\cos((n+1)a/2) \sin(na/2)}{\sin(a/2)}$$

En utilisant la formule donnée dans l'énoncé, cela s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} s &= 1 + \frac{\sin((2n+1)a/2) + \sin(-a/2)}{\sin(a/2)} = 1 + \frac{\sin((2n+1)a/2) - \sin(a/2)}{\sin(a/2)} \\ &= \frac{\sin((2n+1)a/2)}{\sin(a/2)} \end{aligned}$$

4) En reprenant l'exemple du 2° montrer que $\cotan(\pi/12) = 2 + \sqrt{3}$.

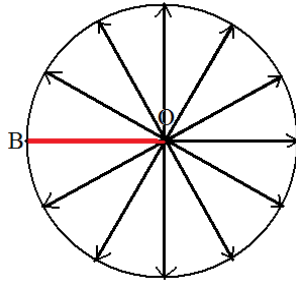
Pour $n = 2$ et $a = \pi/6$, on obtient $\frac{\sin(5\pi/12)}{\sin(\pi/12)} = 2 + \sqrt{3}$.

Avec $\sin(5\pi/12) = \sin(\pi/2 - \pi/12) = \cos(\pi/12)$, on trouve bien : $\cotan(\pi/12) = 2 + \sqrt{3}$.

5) Pour n donné, prendre $a = \pi / (n + 1)$. Combien vaut s ? Ce résultat était-il prévisible ?

$$s = \frac{\sin((2n+1)\pi / (2n+2))}{\sin(\pi / (2n+2))} = \frac{\sin(\pi - \pi / (2n+2))}{\sin(\pi / (2n+2))} = \frac{\sin(\pi / (2n+2))}{\sin(\pi / (2n+2))} = 1$$

Ce résultat était prévisible. En effet, si l'on ajoute aux $2n + 1$ vecteurs de somme **S** le vecteur **OB** d'affixe -1 , on obtient $2n + 2$ vecteurs dont les extrémités forment un polygone régulier, et l'on sait que dans ce cas, la somme est nulle. D'où $s - 1 = 0$, $s = 1$.



Exemple avec $n = 5$ et $a = \pi/6$