

Kaléidoscopes de triangles en géométries euclidienne, sphérique et hyperbolique

Notre objectif est de partir d'un triangle et de construire un pavage avec des copies de ce triangle en pratiquant trois symétries autour des trois côtés du triangle. Nous allons faire cela dans le plan euclidien, puis sur la sphère, et enfin dans le plan hyperbolique, en l'occurrence dans le modèle du disque de Poincaré. Ces pavages par symétries sont appelées des kaléidoscopes, par analogie avec l'instrument bien connu qui porte ce nom.

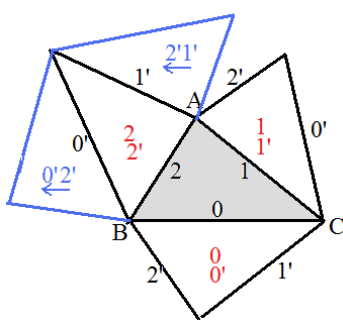
Dans le plan, prenons un triangle quelconque ABC , et appelons 0, 1, 2 les réflexions d'axes BC , CA et AB . Maintenant composons ces trois réflexions d'axes non concourants ni parallèles deux à deux. Elles engendrent un groupe dont les transformations s'écrivent comme des mots à base des trois lettres 0, 1, 2. Comme le produit de deux réflexions de même axe est l'identité Id , on a $00 = 11 = 22 = Id$, et les mots réduits du groupe ne contiennent que des lettres 0, 1, 2 isolées, par exemple le mot 0102, ce qui signifie que l'on fait d'abord la réflexion 2, puis la réflexion 0, puis la réflexion 1 et enfin la réflexion 0 (lecture de droite à gauche).

On sait que le produit de deux réflexions est une rotation dont l'angle est le double de celui séparant les deux axes de réflexion. On sait aussi que le produit de rotations est une rotation dont l'angle est la somme des angles des rotations, ou exceptionnellement une translation lorsque la somme des angles des rotations vaut 2π . On sait enfin que le produit d'une rotation et d'une réflexion est une réflexion glissée ou exceptionnellement une réflexion tout court.

Les transformations associées aux mots de longueur paire sont donc des rotations, voire des translations, tandis que celles associées aux mots de longueur impaire sont des réflexions glissées, voire des réflexions.

1. Les deux méthodes de construction par numérotation des triangles

Pour simplifier, nous allons nous placer dans le plan euclidien, ce qui est le cas le mieux connu, mais ce que nous allons faire sera tout autant valable sur la sphère ou en géométrie hyperbolique.



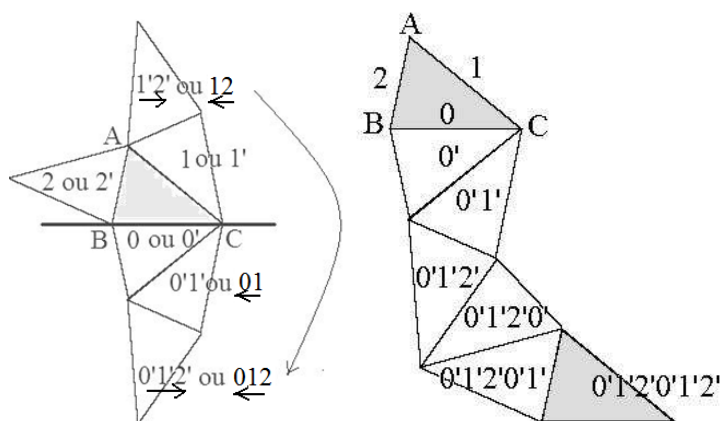
Partons d'un triangle ABC , puis prenons ses trois symétriques, en notant 0 (ou $0'$) celui symétrique par rapport à la droite (BC) notée aussi 0, 1 (ou $1'$) celui par rapport à la droite (CA) notée 1, et 2 (ou $2'$) celui par rapport à la droite (AB) notée 2. Re commençons à partir de ses trois triangles 0, 1, 2 en prenant leurs symétriques par rapport à leurs côtés, et non pas par rapport aux axes initiaux 0, 1, 2.

Par exemple le triangle 2 (ou $2'$) a pour symétriques deux nouveaux triangles que nous pouvons noter $\rightarrow 2'0'$ (ou $\leftarrow 0'2'$ en lecture droite-gauche) et $\rightarrow 2'1'$: ainsi $\rightarrow 2'0'$ indique que nous avons fait une réflexion autour du 2 (ou $2'$), soit (AB) , suivie d'une réflexion du triangle 2 autour du côté $0'$ qui est l'image de 0 par 2. On trouve ainsi 6 nouveaux triangles qui s'écrivent avec deux chiffres. Et l'on continue de cette façon, en prenant les triangles symétriques par rapport à ceux que nous venons d'obtenir. Les symétries se font chaque fois par rapport aux côtés des nouveaux triangles, c'est pourquoi nous les notons avec des « ' », à la différence des réflexions 0,1,2 correspondant aux côtés du triangle ABC initial. Cette construction progressive est particulièrement simple à faire manuellement, et l'on trouve 12 triangles à trois chiffres. On aurait aussi 21 nouveaux triangles à quatre chiffres qui sont les images de ceux à

trois chiffres, puis 36 à cinq chiffres, etc. Il suffit à chaque étape de dessiner les nouveaux triangles par rapport aux trois côtés des précédents, en évitant de redessiner ceux qui le sont déjà.¹

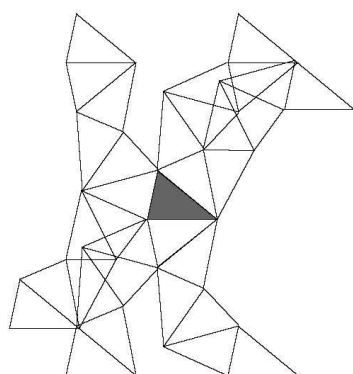
Mais obtient-on les mêmes triangles en n'utilisant que les trois réflexions 0, 1, 2, celles d'axes (BC), (CA) et (AB) ? La réponse est oui.

Prenons par exemple le triangle $\rightarrow 2'0'1'$. On a $2' = 2$, et $0' = \rightarrow 202^2$, d'où $\rightarrow 2'0' = 2\ 202 = \rightarrow 02 = \leftarrow 20$. Autrement dit, faire $2'$ puis $0'$ revient à faire 0 puis 2. Ensuite $1'$ qui est l'image de 1 par $\rightarrow 2'0'$ ou $(\rightarrow 02)$ s'écrit $1' = \rightarrow 20\ 1\ 02$. Ainsi $\rightarrow 2'0'1' = \rightarrow 02\ 20\ 1\ 02 = \rightarrow 102 = \leftarrow 201$. Finalement, faire une succession de réflexions, lues de gauche à droite, autour des axes relatifs des triangles images revient à faire la même succession de réflexions, mais de droite à gauche, autour des axes absolus, ceux du triangle initial.



Un autre exemple est donné sur la *figure ci-contre à gauche*, où l'on constate que le triangle 012 est le symétrique du triangle 12 par rapport à l'axe 0.

On constate un élément de régularité : le mot $\leftarrow (012)^2$ donne un triangle qui se déduit du triangle initial par translation (*figure ci-contre à droite*), et il en est de même pour tous les mots avec une permutation des trois chiffres 0, 1, 2 au carré.³



Mais le chaînage des triangles successifs qui aboutissent aux six triangles traduits montre que l'on est loin d'avoir un début de pavage lorsque l'on part d'un triangle quelconque (*figure ci-contre*). Alors existe-t-il des triangles particuliers permettant d'aboutir à un pavage du plan ?

2. Les contraintes pour obtenir un pavage

Pour répondre à cette question, considérons les triangles obtenus avec une alternance de $0'$ et de $1'$, soit $0'$, puis $0'1'$, puis $0'1'0'$, etc. On obtient une succession de triangles tournant autour du point C (*figure 1*). Avec un triangle quelconque, la chaîne des triangles n'a aucune raison de se refermer sur

¹ Dans la programmation, les numéros des triangles sont obtenus en construisant tous les mots de longueur 1, 2, 3, etc., à base des trois chiffres 0, 1, 2.

² C'est une propriété classique de la conjugaison. Prenons un point M et son image M' par la réflexion $0'$ (dans le triangle $2'0'$). Cela revient à commencer par envoyer M en M_1 par 2, afin d'être dans le triangle initial, puis à faire la réflexion autour de 0, d'où M'_1 , et enfin à faire la réflexion autour de 2 pour envoyer M'_1 en M' , d'où $0' = \rightarrow 202$.

³ Répétée deux fois une réflexion avec glissement donne une translation.

elle-même, interdisant tout pavage. On distingue deux cas permettant à l'éventail des triangles de se refermer autour de C :

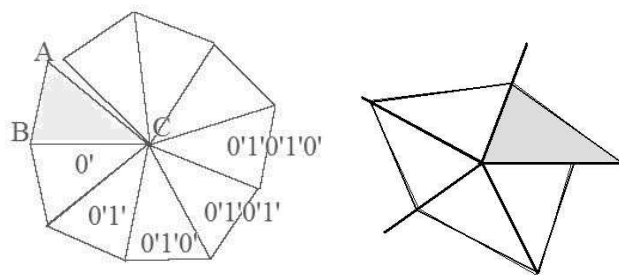


Figure 1 : A gauche succession de triangles autour de C avec $CA \neq CB$, avec à droite l'exemple d'un angle égal à $2\pi / 5$.

* si $CA \neq CB$, l'angle C doit être de la forme $2\pi/k$, avec k entier pair ($k = 2n$) car les triangles accolés vont par paires (les côtés extrêmes de chaque paire étant alors de même longueur). Cela impose que l'angle C soit de la forme π/n avec $n > 1$.

* si $CA = CB$, l'angle C doit être de la forme $2\pi/n$ avec n entier ($n > 2$).

Il doit aussi en être de même avec les deux autres angles du triangle. Ces contraintes sur les angles sont les mêmes dans les trois types de géométrie, puisqu'il s'agit toujours d'angles euclidiens. Mais les résultats vont être très différents selon le type de géométrie dans lequel on se place.

3. Kaléidoscopes dans le plan euclidien

Considérons d'abord un triangle équilatéral, avec ses angles de $\pi/3$. On peut entourer chaque sommet avec 6 triangles, sans trou ni superposition. La figure formée du triangle initial entouré de ses trois triangles symétriques forme un nouveau triangle équilatéral. Par reproduction de cette figure, on obtient un pavage du plan.

Prenons maintenant un triangle isocèle non équilatéral. Comme on l'a vu, son sommet principal doit avoir pour angle $2\pi/m$ et ses deux autres angles valent π/n avec $m > 2$ et $n > 2$.⁴ Cela impose aussi $2\pi/m + 2\pi/n = \pi$, soit $1/m + 1/n = 1/2$.

* Si m est pair, $m = 2q$ ($q > 1$). On en déduit $1/n = 1/2 - 1/(2q)$, et $n = 2q / (q - 1)$, $q - 1$ divise $2q$ et aussi $2q - 2(q - 1) = 2$, $q - 1$ divise 2, d'où $q = 2$ ou $q = 3$. Mais $q = 3$ redonne le triangle équilatéral. Il reste $q = 2$. On trouve le triangle d'angles $\pi/2$, $\pi/4$ et $\pi/4$.

* Si m est impair, $m = 2q + 1$ ($q > 0$). Alors $1/n = 1/2 - 1/(2q + 1)$, $n = 2(2q + 1) / (2q - 1)$. Si $q = 1$, on trouve $n = 6$ et $m = 3$, d'où le triangle d'angles $2\pi/3$, $\pi/6$ et $\pi/6$. Si $q > 1$, $2q - 1$ est impair ≥ 3 , il ne peut pas diviser 2, il divise $2q + 1$, et $2q - 1$ divise $2q + 1 - (2q - 1) = 2$, ce qui n'est pas possible.

Prenons enfin un triangle quelconque, non isocèle. Les angles sont π/m , π/n et π/p , avec $\pi/m + \pi/n + \pi/p = \pi$, ou $1/m + 1/n + 1/p = 1$ avec $m, n, p \geq 2$. On peut supposer $m < n < p$.

* Si $m = 2$, on obtient $1/n + 1/p = 1/2$ avec $n > 2$ et $p > n$. La seule possibilité est $n = 3$ et $p = 6$. Le triangle a pour angles $\pi/2$, $\pi/3$ et $\pi/6$.

* Si $m \geq 3$, $1 - 1/m \geq 2/3$, et $1/n + 1/p \leq 1/4 + 1/5 = 9/20$ qui n'est jamais $\geq 2/3$.

⁴ On ne peut pas prendre un triangle isocèle ABC avec un angle de $2\pi/m$ en A et deux angles de $2\pi/q$ en B et en C avec q impair. Car si l'on peut entourer le sommet A de m triangles même avec m impair puisque $AB = AC$, on ne peut pas le faire autour de B et C avec q impair car $BA \neq BC$. Le nombre q doit être pair, et les angles en B et C doivent être de la forme $2\pi/(2n) = \pi/n$.

En conclusion, il existe quatre triangles susceptibles de paver le plan euclidien :

- * le triangle équilatéral
- * le demi-triangle équilatéral d'angles $\pi/2$, $\pi/3$ et $\pi/6$
- * le triangle rectangle isocèle
- * le triangle isocèle d'angles $2\pi/3$, $\pi/6$ et $\pi/6$.

De fait, ces triangles pavent le plan. On sait que le triangle équilatéral le fait, et par suite le demi-triangle équilatéral ainsi que le triangle isocèle d'angle $2\pi/3$, l'un découpant le triangle équilatéral en deux, et l'autre en trois, tout en respectant les symétries par rapport aux côtés. Quant au triangle rectangle isocèle, c'est un demi-carré, et un carré pave aussi le plan. Il existe exactement quatre types de triangles pavant le plan par symétries (*figure 2*). Les pavages obtenus présentent une infinité d'axes de symétrie, tous ceux obtenus en conjuguant une des symétries initiales 0, 1, 2 avec certaines de leurs composées, par exemple 20 1 02 comme on l'a vu précédemment.

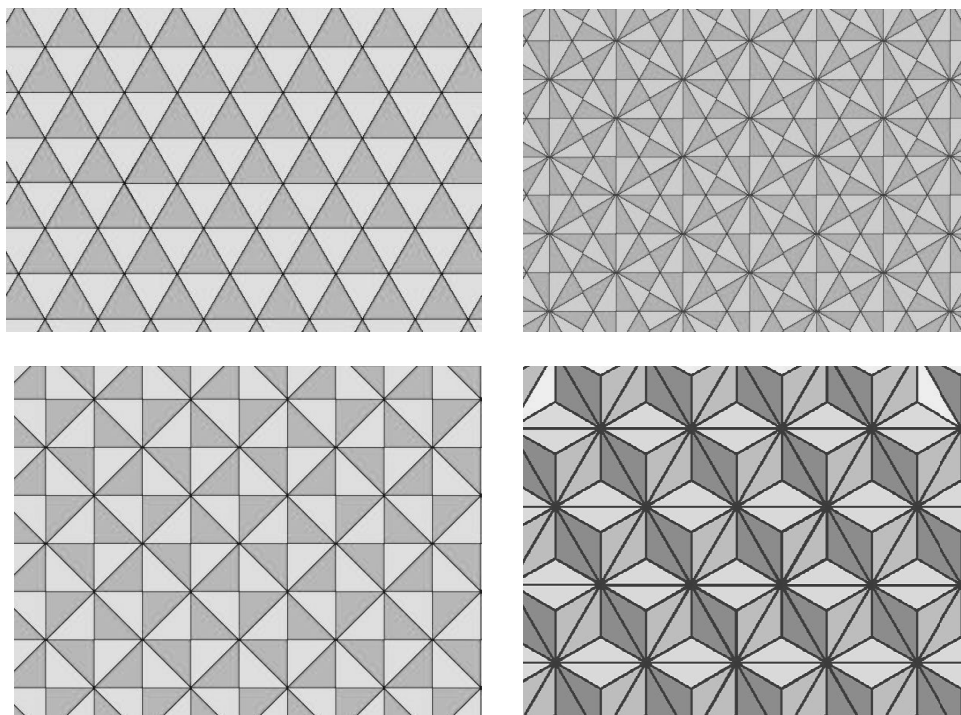


Figure 2 : Les quatre kaléidoscopes triangulaires du plan.

Dans la littérature à ce sujet, on trouve souvent comme condition sur les angles du triangle : $1/m + 1/n + 1/p = 1$, avec trois angles π/m , π/n et π/p . Mais cette condition ne vaut que pour trois des kaléidoscopes, et pas pour le triangle isocèle dont un angle est $2\pi/3$.

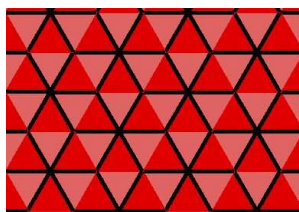
Le sous-groupe des rotations

A partir du groupe engendré par les trois réflexions 0, 1, 2, considérons le sous-groupe G formé de transformations comptant un nombre pair de réflexions. Le groupe G est constitué de rotations, et exceptionnellement de translations, c'est-à-dire des isométries directes. Considérons les deux rotations $R_0 = 1 \circ 2$ et $R_1 = 2 \circ 0$. On obtient alors la rotation R_2 telle que $R_2 = R_0 \circ R_1 = 1 \circ 2 \circ 2 \circ 0 = 1 \circ 0$. Une transformation de G , où l'on peut regrouper les réflexions deux par deux, est donc la composée des deux rotations R_0 et R_1 . Le groupe G est engendré par R_0 et R_1 .

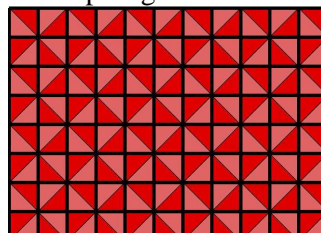
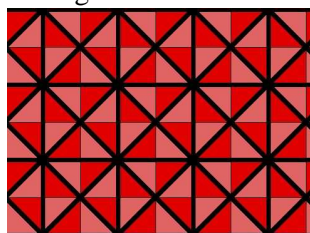
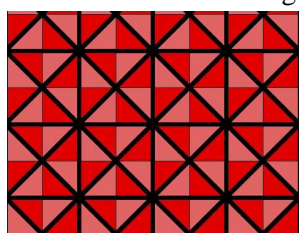
Prenons d'abord le cas des trois kaléidoscopes triangulaires précédents avec trois angles π/m , π/n et π/p et $1/m + 1/n + 1/p = 1$. R_0 est la rotation de centre A et d'angle $2\pi/m$, R_1 est la rotation de centre B et d'angle $2\pi/n$, et $R_2 = R_0 \circ R_1$ est alors la rotation de centre C et d'angle $-2\pi/p$. En accolant le

triangle initial ABC avec un de ses trois symétriques par 0, 1 ou 2, on obtient trois quadrilatères qui à leur tour vont paver le plan sous l'effet de ces rotations.

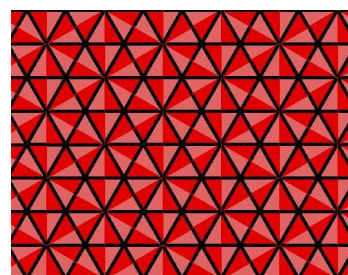
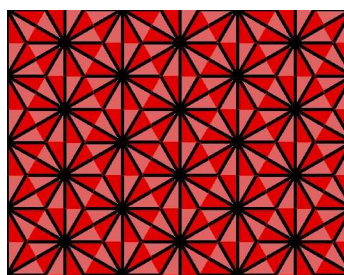
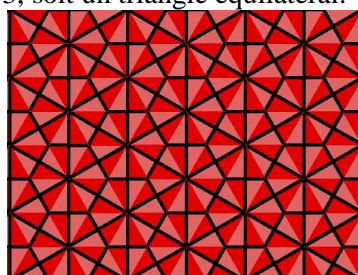
- * Dans le cas du triangle équilatéral, les trois quadrilatères possibles sont dans chaque cas un losange d'angles $\pi/3$ et $2\pi/3$. On obtient un seul pavage par ces losanges.



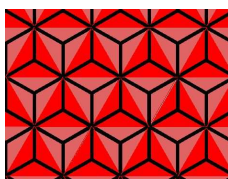
- * Dans le cas du triangle rectangle isocèle, les trois quadrilatères sont dans un cas un carré, et dans les deux autres cas un triangle rectangle isocèle. Cela donne deux pavages différents.



- * Dans le cas du demi-triangle équilatéral, les trois quadrilatères sont soit un quadrilatère avec deux angles droits opposés et des angles de $\pi/3$ et $2\pi/3$, soit un triangle isocèle d'angles $\pi/3$, $\pi/3$ et $2\pi/3$, soit un triangle équilatéral.



Il reste le dernier kaléidoscope, dont l'angle $2\pi/3$ au point A ne permet pas d'accoler les triangles deux à deux autour de lui. Mais on peut le faire autour de B et C , ce qui donne le pavage ci-contre. On retrouve alors le pavage par des losanges que l'on avait déjà trouvé à partir du triangle équilatéral. Rien de nouveau ne s'est produit.



Finalement, lorsque l'on fait seulement jouer les isométries directes, on peut considérer que la contrainte des trois angles π/m , π/n et π/p du triangle avec $1/m + 1/n + 1/p = 1$ est nécessaire (et suffisante) pour avoir un pavage du plan.

4. Kaléidoscopes sur la sphère

On entre ici dans un autre univers, même si l'on connaît ce qui se passe sur la Terre. Maintenant, tout pavage compte un nombre fini de pavés. Le plus court chemin entre deux points de la sphère est un arc de grand cercle. Ainsi, un grand cercle, situé à l'intersection de la sphère et d'un plan passant par le centre de la sphère, peut être considéré comme une *droite* de la sphère, et l'on n'a jamais deux droites qui peuvent être parallèles.

Passons aux isométries sur la sphère. Les réflexions existent, mais elles se font par rapport à des grands cercles. Les kaléidoscopes sphériques se font par rapport à trois grands cercles qui protent les

côtés d'un triangle. Comme deux grands cercles se coupent toujours, la composée de deux réflexions est une rotation, et les rotations sont les seules isométries directes possibles.

Pour obtenir un kaléidoscope à base de triangles, il est nécessaire que la somme des angles des triangles entourant chaque sommet soit égale à 2π , tout comme ce qui se passe en géométrie euclidienne. Chacun des trois angles d'un triangle est de la forme $2\pi/m$ avec $m > 2$, car chaque angle doit être inférieur à π . Mais un triangle sphérique est tel que la somme de ses angles est supérieure à π . Envisageons les cas possibles. Il y a deux façons d'agir :

* soit prendre la liste exhaustive des pavages par des triangles⁵, et dégager ceux qui présentent des réflexions par rapport à leurs côtés.

* soit faire un calcul d'angles à partir des conditions qui leur sont imposées. On trouvera ainsi des conditions nécessaires pour avoir un pavage kaléidoscopique, et nous constaterons que ces conditions sont aussi suffisantes pour avoir un pavage. C'est ce que nous allons faire dans ce qui suit.

4.1. Contraintes sur les angles

Envisageons trois cas suivant la forme du triangle.

4.1.1. Kaléidoscopes avec un triangle équilatéral

On doit avoir $3 \times 2\pi/m > \pi$, soit $m < 6$. On a $m = 3, 4$ ou 5 . Ces trois pavages existent, et ils sont donnés sur la *figure 3*. On verra plus tard d'où ils proviennent. Le nom qu'il portent dans la classification des pavages triangulaires est aussi indiqué entre parenthèses.

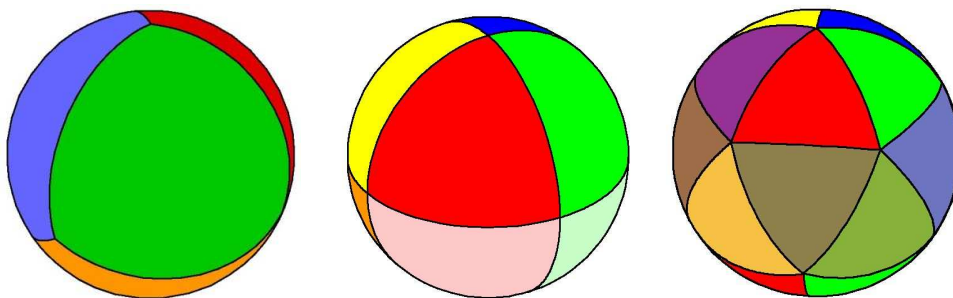


Figure 3 : A gauche le pavage de la sphère par quatre triangles équilatéraux avec des angles de $2\pi/3$ (pavage F_4). Au centre le pavage avec 8 triangles équilatéraux d'angles $\pi/2$, qui est un cas particulier (G_8) d'un pavage plus général que nous verrons plus tard. A droite, le pavage par des triangles équilatéraux d'angles $2\pi/5$ (pavage H_{20}).

4.1.2. Kaléidoscopes avec un triangle isocèle non équilatéral

Dans ce cas, un angle est égal à $2\pi/m$ et les deux autres à π/n (cela pour les mêmes raisons que dans le cas euclidien). La condition s'écrit $2\pi/m + 2\pi/n > \pi$ ou $1/m + 1/n > 1/2$, avec $m > 2$ et $n > 1$.

Pour $n = 2$, il existe déjà une infinité de solutions évidentes, avec $m \geq 3$, avec le triangle d'angles $\pi/2, \pi/2$ et $2\pi/m$ (*figure 4*). Remarquons que pour $m = 4$, on retrouve le pavage de la *figure 3* au centre.

⁵ cf. www.pierreaudibert.fr/pavages/PAVAGESPHERE.pdf.



Figure 4 : Pavage avec un triangle isocèle à deux angles droits et un angle de $2\pi/m$, ici avec $m = 20$ et 40 triangles (pavage du type G_{2m}).

Pour $n = 3$, on a $1/m > 1/2 - 1/3$, $1/m > 1/6$, $m < 6$, d'où $m = 3, 4$ ou 5 et les trois triangles d'angles
 * $2\pi/3, \pi/3, \pi/3$
 * $\pi/2, \pi/3, \pi/3$
 * $2\pi/5, \pi/3, \pi/3$

On trouve les pavages de la figure 5.

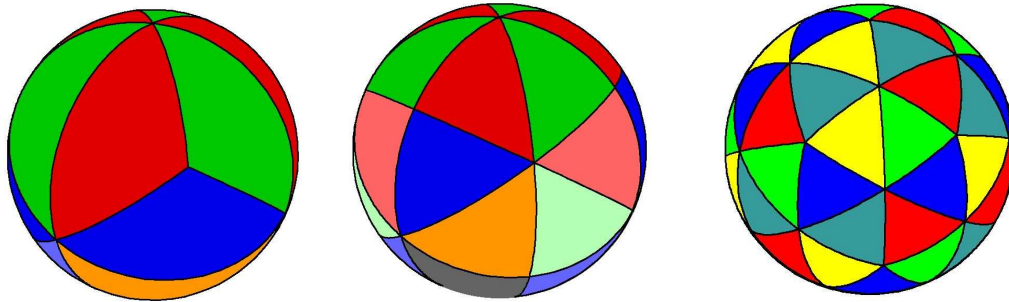


Figure 5 : A gauche le pavage avec 12 triangles d'angles $2\pi/3, \pi/3, \pi/3$: la moitié des 8 sommets est entourée de 3 angles $2\pi/3$ et l'autre moitié de 6 angles $\pi/3$ (pavage F_{12}^1). Au centre le pavage de 24 triangles d'angles $\pi/2, \pi/3, \pi/3$ (pavage I_{24}). A droite, le pavage avec 60 triangles d'angles $2\pi/5, \pi/3, \pi/3$. Les 32 sommets sont entourés de 5 angles $2\pi/5$ pour 12 d'entre eux et de 6 angles $\pi/3$ pour les autres (pavage F_{60}^2).

Pour $n = 4$, on obtient $1/m > 1/4$, $m < 4$, d'où $m = 3$, ce qui correspond au triangle d'angles $2\pi/3, \pi/4, \pi/4$, aboutissant au pavage de la figure 6.

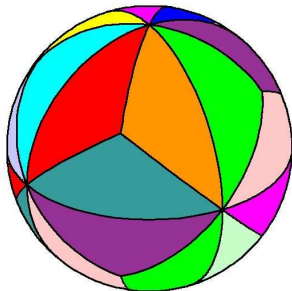


Figure 6 : Pavage avec 24 triangles d'angles $2\pi/3, \pi/4, \pi/4$. Les 14 sommets sont entourés de 8 angles $\pi/4$ pour 6 d'entre eux et de 3 angles $2\pi/3$ pour les 8 autres (pavage F_{24}).

Pour $n = 5$, la condition devient $1/m > 3/10$, soit $m \leq 3$, d'où $m = 3$, ce qui donne le triangle d'angles $2\pi/3, \pi/5, \pi/5$, et le pavage de la figure 7.

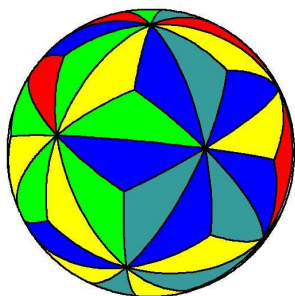


Figure 7 : Pavage avec 60 triangles d'angles $2\pi/3$, $\pi/5$, $\pi/5$. Les 32 sommets sont entourés de 3 angles $2\pi/3$ pour 20 d'entre eux et de 10 angles $\pi/5$ pour les autres (pavage F_{60}^1).

Pour $n = 6$, la condition s'écrit $1/m > 1/3$, soit $m < 3$, aucune valeur de m ne convient. Il en est de même pour $n > 6$.

4.1.3. Kaléidoscope avec un triangle quelconque non isocèle

Les angles sont de la forme π/m , π/n , π/p et l'on peut supposer $m < n < p$ et $m \geq 2$, avec comme condition $1/m + 1/n + 1/p > 1$.

Pour $m = 2$, la condition devient $1/n + 1/p > 1/2$ avec $n \geq 3$. Pour $n = 3$, on a $1/p > 1/6$ ou $p < 6$ avec $p > 3$, soit $p = 4$ ou $p = 5$. On trouve deux triangles d'angles

* $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/4$

* $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/5$

et les pavages associés sur la figure 8.

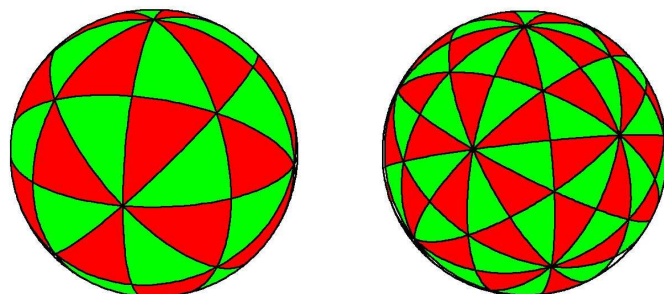


Figure 8 : A gauche, pavage avec 48 triangles d'angles $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/4$. Les 28 sommets sont entourés de 4 angles $\pi/2$ pour 12 d'entre eux, de 6 angles $\pi/3$ pour 6 d'entre eux et de 8 angles $\pi/4$ pour les 6 restants (pavage F_{48}). A droite, pavage avec 120 triangles d'angles $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/5$. Les 62 sommets⁶ sont entourés de 4 angles $\pi/2$ pour 30 s'entre eux, de 6 angles $\pi/3$ pour 20 d'entre eux, et de 10 angles $\pi/5$ pour les 12 restants (pavage F_{120}).

Pour $m = 3$, la condition s'écrit $1/n + 1/p > 2/3$ avec $n > 3$. Pour $n = 4$, on a $1/p > 5/12$, $p < 3$ alors que l'on doit avoir $p > 4$. Rien ne convient. A fortiori, il en est de même pour $n > 4$.

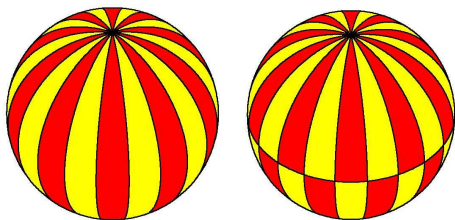
Pour $m \geq 4$, la plus grande valeur possible de $1/m + 1/n + 1/p$ est $1/4 + 1/5 + 1/6 = 37/60$ et $1/m + 1/n + 1/p$ n'est jamais supérieur à $1 - 1/m$ qui est supérieur à $3/4$.

Nous avons épuisé tous les cas possibles. Remarquons que pour chaque forme de triangle que nous avons trouvée par le calcul, nous avons obtenu un pavage. Il reste à expliquer d'où ces pavages proviennent. Cela tient à deux phénomènes, l'un étant lié au découpage possible d'une sphère en

⁶ On peut calculer le nombre de faces F , c'est-à-dire de triangles pavant la sphère, en utilisant la formule donnant l'aire A d'un triangle, soit $A = \text{somme des trois angles} - \pi$. Par exemple, pour $m = 2$, $n = 3$, $p = 5$, cela donne $F = 120$. On peut aussi connaître le nombre d'arêtes E du pavage, trois par triangle, mais comptées deux fois, soit $E = 180$ dans notre exemple. On en déduit le nombre V de sommets par la formule d'Euler, soit $V - E + F = 2$, ce qui donne $V = 62$ dans notre exemple.

tranches, et l'autre à l'existence de cinq polyèdres réguliers en trois dimensions, que l'on appelle les solides de Platon.

4.2. Découpage de la sphère en tranches



Le découpage en tranches, comme par exemple suivant des méridiens de la Terre à intervalles réguliers, est une spécificité de la sphère, car elle donne naissance à des polygones à deux côtés. Il suffit ensuite de couper la sphère suivant l'équateur pour obtenir des triangles isométriques qui se déduisent les uns des autres par des réflexions autour de leurs côtés. De tels kaléidoscopes sont en nombre infini (cf. figure 4).

4.3. Projection des polyèdres réguliers sur la sphère

Rappelons qu'il existe cinq polyèdres réguliers : le tétraèdre régulier, le cube, l'octaèdre régulier, l'icosaèdre régulier et le dodécaèdre régulier. Ils sont inscrits dans une sphère. Si l'on projette les arêtes d'un tel polyèdre à partir du centre de la sphère qui est aussi le centre du polyèdre, elles deviennent des arcs de grands cercles. Chaque face du polyèdre, qui est un polygone régulier, peut notamment être découpée en triangles isométriques correspondant au groupe diédral associé au polygone. Par exemple, la face carrée d'un cube peut être divisée en 8 triangles rectangles, correspondant au groupe diédral D_4 ⁷. A leur tour, les côtés de ces triangles sont projetés sur la sphère suivant des arcs de grands cercles (Figure 10). Les plans de ces grands cercles sont des plans de réflexion pour les triangles des faces du polyèdre, et comme ils le sont aussi pour la sphère, ils le restent pour les triangles qui pavent la calotte sphérique surmontant la face concernée du polyèdre. Il en est de même pour chaque face.

Ainsi, la sphère se trouve pavée par des triangles sphériques tous isométriques. Et les plans contenant les arcs de cercle délimitant chaque triangle sont des plans de réflexion pour le pavage de la sphère. Comme on l'a vu dans le plan, un triangle est transformé en trois triangles voisins par les trois réflexions autour de ses côtés, circulaires dans le cas présent. Ces trois réflexions engendrent toutes les symétries du pavage final.

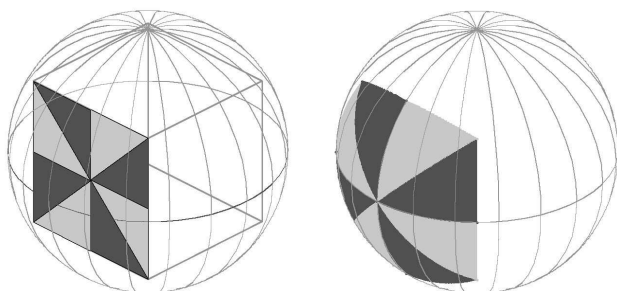
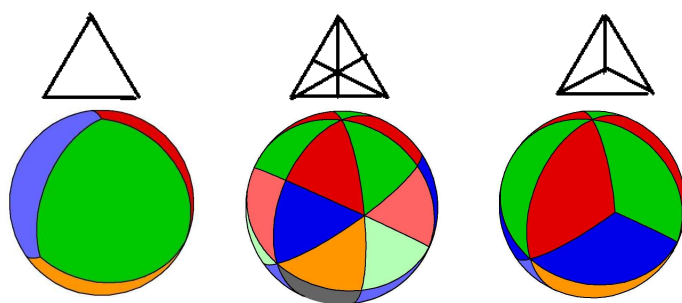


Figure 10 : A gauche les huit facettes sur une face du cube, associées au groupe diédral D_4 du carré, à droite leur projection sur la sphère.

Nous allons prendre tour à tour chacun des cinq polyèdres réguliers, et déterminer les kaléidoscopes qui leur correspondent.

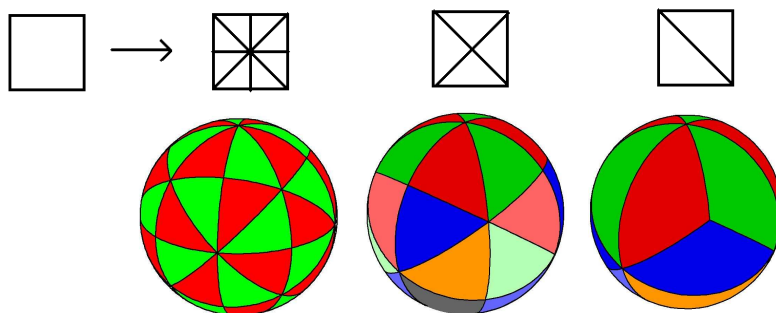
⁷ Un carré admet quatre rotations (Id , rotations de $\pi/2$, π , $3\pi/2$ autour du centre) et quatre réflexions (autour des diagonales et des médiatrices des côtés) qui le laissent invariant. Ces huit isométries, pour moitié directes et pour moitié indirectes, constituent ce que l'on appelle le groupe diédral D_4 .

A partir du tétraèdre régulier



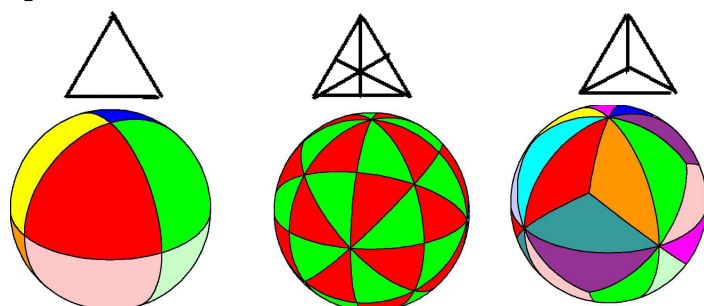
Chaque face du tétraèdre est un triangle équilatéral, ce qui donne le pavage F_4 sur la sphère. Si l'on découpe chaque triangle en 6 (selon son groupe diédral D_3) on trouve le pavage I_{24} . On peut aussi se contenter de le découper en 3, ce qui donne le pavage F_{12}^1 .

A partir du cube



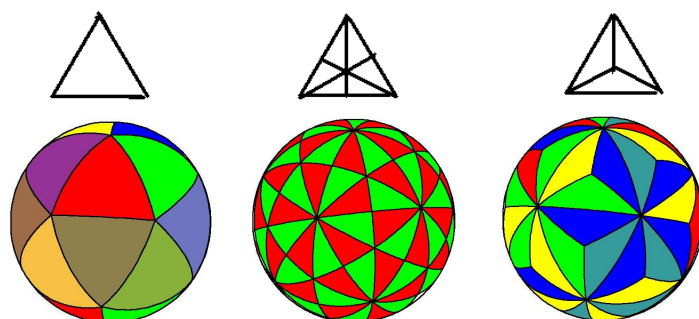
En découpant le cube suivant le groupe diédral de ses faces carrées, on obtient le pavage F_{48} . On peut aussi découper les faces suivant deux diagonales, ce qui redonne le pavage I_{24} déjà obtenu à partir du tétraèdre. On peut enfin le découper suivant une diagonale, et l'on trouve le pavage F_{12}^1 .

A partir de l'octaèdre



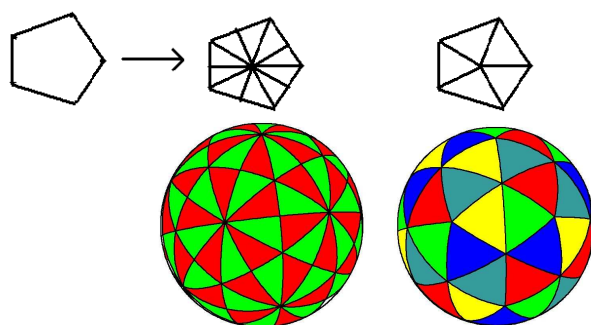
Chaque face de l'octaèdre est un triangle isocèle, et sa projection donne le pavage G_8 . En découpant chaque face en six triangles, on retrouve le pavage F_{48} . En découpant chaque face en trois triangles, on obtient le pavage F_{24} .

A partir de l'icosaèdre



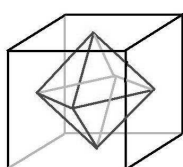
Chaque face de l'icosaèdre est un triangle équilatéral, ce qui donne le pavage H_{20} . En découpant chaque face en 6 triangles, on trouve le pavage F_{120} . En découpant chaque face en 3, on trouve le pavage F_{60}^1 .

A partir du dodécaèdre



Les faces du dodécaèdre sont des pentagones réguliers. Un pentagone peut être découpé en 10 triangles, ce qui redonne le pavage F_{120} . Si on le découpe en cinq triangles, on trouve le pavage F_{60}^2 .

Remarquons que l'on obtient le même pavage F_{120} à partir de l'icosaèdre et du dodécaèdre, ainsi que le même pavage F_{48} à partir du cube et de l'octaèdre. Cela est dû au fait que les deux polyèdres concernés dans chaque cas sont duaux.



Ainsi, en prenant les centres des faces du cube et en les joignant entre elles en tenant compte des liens de voisinage entre les faces, on obtient l'octaèdre régulier. Il en est de même pour l'icosaèdre et le dodécaèdre. A cause de leur construction, les polyèdres duaux présentent exactement les mêmes symétries. Lorsque l'on découpe chaque face en prenant en compte les symétries du groupe diédral associé, on obtient le même pavage pour ces polyèdres duaux.

On a ainsi retrouvé tous les kaléidoscopes à partir des triangles que l'on avait obtenus auparavant par le calcul. Cela prouve que les triangles trouvés par le calcul donnent bien des pavages kaléidoscopiques. Cela prouve aussi qu'il n'y a pas de pavages kaléidoscopiques autres que ceux provenant du découpage en tranches de la sphère ou de la projection des cinq solides de Platon sur la sphère.

5. Kaléidoscopes dans le disque de Poincaré

Dans ce nouveau contexte,⁸ les plus courts chemins d'un point à un autre sont des arcs de cercles orthogonaux au cercle unité $\partial\mathbf{D}$ qui est la frontière à l'infini du disque de Poincaré \mathbf{D} . Les *droites* sont représentées par des arcs de cercles, voire des segments lorsqu'elles passent par le centre O du disque. Les triangles ont alors une aire A inférieure à π , plus précisément $A = \pi - \text{somme des trois angles}$, ce qui impose que la somme des trois angles soit inférieure à π . Comme les angles conservent leur nature euclidienne dans le disque de Poincaré, on va trouver le même style de contraintes qu'en géométrie euclidienne, mais maintenant avec une infinité de possibilités comme on va le constater. Précisons que les réflexions ont en général des axes de forme circulaire -il s'agit d'inversions, et elles sont des isométries indirectes, transformant les angles en leurs opposés. Le produit de deux réflexions dont les axes se coupent est une rotation, et quand les axes ne se coupent pas elle devient une translation (voire une rotation limite lorsque les axes se rencontrent à l'infini, c'est-à-dire sur $\partial\mathbf{D}$). Rappelons aussi que des triangles ayant les mêmes angles ont aussi les mêmes longueurs de côtés : des triangles semblables sont isométriques, ce qui n'est pas le cas en géométrie euclidienne. Pour passer aux kaléidoscopes, distinguons comme précédemment trois cas selon la nature des triangles.

5.1. Kaléidoscope de triangles équilatéraux

Un triangle équilatéral a ses trois côtés de même longueur et ses trois angles égaux. La contrainte sur les angles pour pouvoir prétendre obtenir un kaléidoscope est : $3 \times 2\pi/m < \pi$, soit $m > 6$. On verra que cette condition est aussi suffisante. Il existe donc une infinité de kaléidoscopes à partir de triangles équilatéraux. Quelques exemples de pavages sont donnés sur la *figure 11*, avec notamment le cas minimal où $m = 7$, ce qui correspond aussi à l'aire minimale, soit $A = \pi/7$.

⁸ Pour plus de détails, consulter www.pierreaudibert.fr/explor/disquedePoincaré.

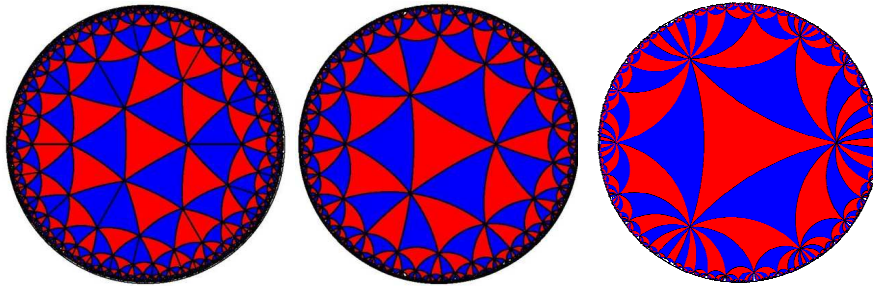


Figure 11 : Pavage à base de triangles équilatéraux isométriques, avec des angles de $2\pi/7$ ($m = 7$), $\pi/4$ ($m = 8$), et de $\pi/8$ ($m = 16$) de gauche à droite.

Pour les construire, on part d'un triangle équilatéral ABC centré en O , avec par exemple des angles de $\pi/4$. Puis on fait trois réflexions autour des côtés, et ainsi de suite, par réflexions autour des côtés des nouveaux triangles, comme on l'avait fait en géométrie euclidienne (figure 12). Pour vérifier que l'on obtient bien un pavage du disque, il convient de motrer que tout triangle obtenu a un éventail de huit triangles (avec l'angle de $\pi/4$) qui se referme autour de chacun de ses trois sommets. Prenons par exemple un triangle portant le numéro A qui est un nombre constitué de n chiffres $0'$, $1'$, $2'$, ce numéro se terminant par exemple par $2'$. Si l'on prend le sommet opposé au côté $2'$, ce sommet a pour côtés $0'$ et $1'$, et les 8 triangles qui l'entourent sont A , $A0'$, $A0'1'$, $A0'1'0'$, $A0'1'0'1'$, $A0'1'0'1'0'$, $A0'1'0'1'0'1'$, et $A0'1'0'1'0'1'0'1'$ (avec $A0'1'0'1'0'1'0'1'0'1' = A$ puisque $(0'1')^4 = Id$, $0'1'$ étant une rotation d'angle $\pi/2$).

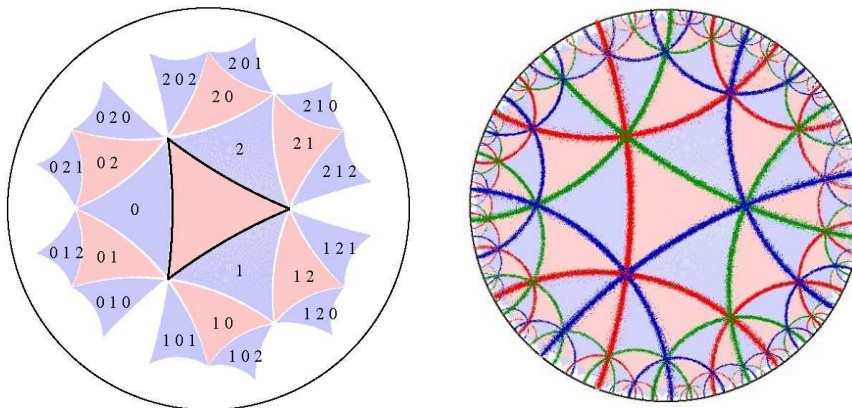


Figure 12 : A gauche, numérotation des premiers triangles du kaléidoscope. En lecture gauche-droite, ils correspondent aux réflexions successives sur les côtés des triangles. En lecture droite-gauche, ils correspondent aux réflexions par rapport aux trois axes formant les côtés du triangle ABC initial. A droite, les axes des réflexions initiaux autour du triangle central (0 en rouge, 1 en bleu et 2 en vert) ainsi que leurs images par composition. Ils délimitent les triangles du pavage, dans l'ordre rouge, bleu, vert pour les isométries directes, et rouge, vert, bleu pour les isométries indirectes.

5.2. Kaléidoscope de triangles isocèles (non équilatéraux)

Les trois angles doivent être de la forme $2\pi/m$, π/n , π/n avec $m > 2$ et $n > 2$, et ils doivent vérifier la condition $2\pi/m + 2\pi/n < \pi$, soit $1/m + 1/n < 1/2$.

* Pour $m = 3$, on obtient $1/n < 1/6$, soit $n > 6$. On a déjà une infinité de cas. L'aire A du triangle est minimale pour $n = 7$, soit $A = \pi/21$.

* Pour $m = 4$, le triangle est rectangle isocèle, et l'on obtient $1/n < 1/4$, soit $n > 4$. Encore une infinité de possibilités. L'aire A du triangle est minimale pour $n = 5$, soit $A = \pi/10$.

* Pour $m = 5$, on a $1/n < 3/10$, $n > 3$, d'où une infinité de cas, avec l'aire A du triangle minimale pour $n = 4$, soit $A = \pi/10$.

* Pour $m = 6$, on a $1/n < 1/3$, $n > 3$, avec l'aire A du triangle minimale pour $n = 4$, soit $A = \pi/6$.

* Pour $m = 7$ et au-delà, on trouve toujours $n > 2$, et l'aire A minimale est obtenue pour $n = 3$, soit $A = \pi - 2\pi/3 - 2\pi/m = \pi/3 - 2\pi/m$, et cette aire, qui vaut $\pi/21$ pour $m = 7$, augmente lorsque m augmente.

Pour chaque valeur de $m \geq 3$, on trouve une infinité de pavages. L'aire minimale du triangle isocèle est $\pi/21$, lorsque le triangle a pour angles soit $2\pi/7$, $\pi/3$ et $\pi/3$, ou $2\pi/3$, $\pi/7$ et $\pi/7$. Sur la *figure 13*, on trouvera deux des pavages pour $m = 4$ (angle de $\pi/2$).

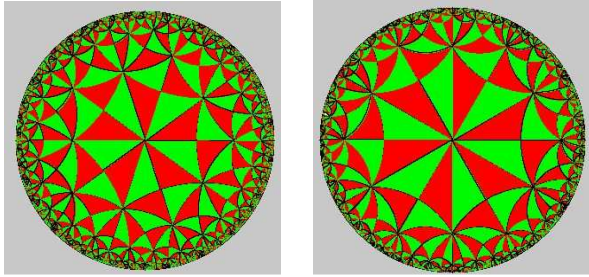


Figure 13 : Pavages par des triangles rectangles isocèles avec deux angles égaux à $\pi/5$ (d'aire $\pi/10$) à gauche, et $\pi/6$ (d'aire $\pi/6$) à droite.

5.3. Kaléidoscopes de triangles non isocèles

Les trois angles sont de la forme π/m , π/n et π/p , avec $m \geq 2$, $m < n < p$, et ils obéissent à la contrainte $\pi/m + \pi/n + \pi/p < \pi$, ou $1/m + 1/n + 1/p < 1$.

* Prenons d'abord $m = 2$, le triangle est rectangle. La condition s'écrit $\pi/n + \pi/p < \pi/2$, soit $1/n + 1/p < 1/2$. Si $n = 3$, on a $1/p < 1/6$, $p \geq 7$, et l'aire A du triangle est minimale pour $p = 7$, soit $A = \pi/42$. Si $n = 4$, $1/p < 1/4$, $p \geq 5$, et l'aire est minimale pour $p = 5$, soit $A = \pi/20$. Plus généralement, dès que $n \geq 4$, il suffit de prendre $p \geq n + 1$ pour avoir $1/n + 1/p < 1/2$.

* Prenons maintenant $m \geq 3$. Avec $m < n < p$, la plus grande valeur de $1/m + 1/n + 1/p$ est obtenue pour $m = 3$, $n = 4$ et $p = 5$, soit $1/3 + 1/4 + 1/5 = 47/60$, et elle est inférieure à 1. Tous les triangles avec $m \geq 3$, $n \geq m + 1$, $p \geq m + 2$ conviennent.

Sur la *figure 14* sont donnés quelques pavages par des triangles rectangles ou par des triangles quelconques.

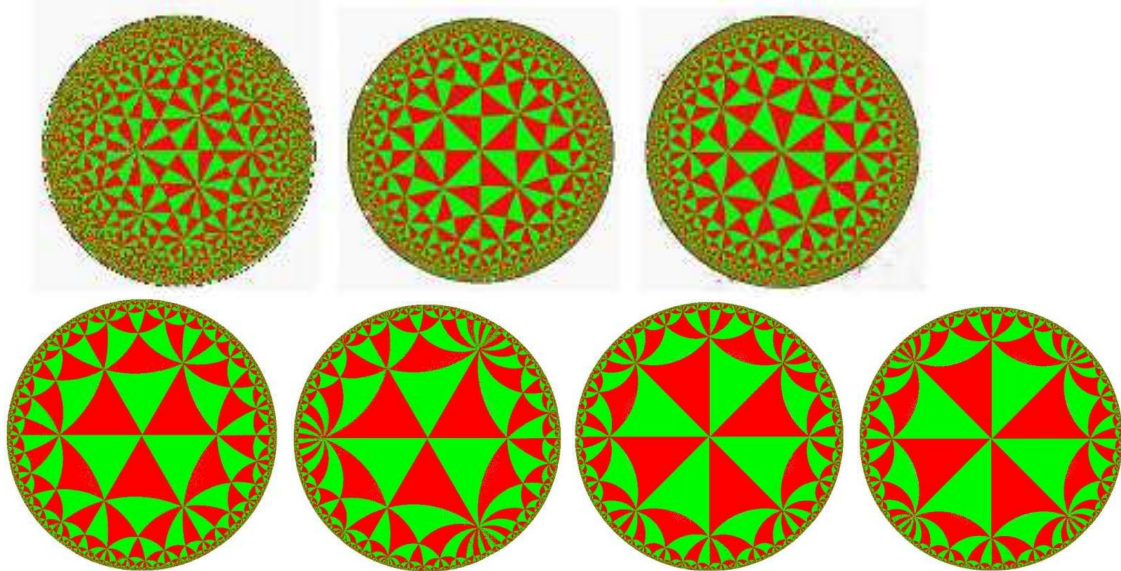


Figure 14 : En haut à gauche pavages par des triangles rectangles ($m = 2$) pour $n = 3$ et $p = 7$, d'aire minimale $\pi/42$, et au centre et à droite pour $n = 4$ et $p = 5$, avec des triangles d'aire $\pi/20$, ces deux pavages étant identiques (ils sont formés de triangles isométriques ayant les mêmes angles), même s'ils paraissent différents. En bas, pavages par des triangles quelconques pour $m = 3$, $n = 4$ et $p = 5$ et $p = 9$, puis pour $m = 4$, $n = 5$, $p = 6$ et $p = 8$.