

IV. Equations différentielles du premier ordre. Leur traitement dans l'espace de configuration

Jusqu'ici nous avons traité des processus discrets, pointués par le temps à intervalles réguliers. Il arrive aussi que des évolutions soient définies à partir de relations faisant intervenir des vitesses. Il s'agit là de phénomènes instantanés, correspondant à des dérivées par rapport au temps, c'est-à-dire des vitesses instantanées. On a alors affaire à des équations différentielles. Comme on va le voir, la résolution approchée de ces équations différentielles redonne des récurrences sur des intervalles de temps dt très petits.

1. Comment résoudre une équation différentielle du premier ordre ?

Plaçons-nous dans le cas le plus simple, en une dimension, avec un point (t, x) dont la position x varie avec le temps t . On ne connaît pas encore le mouvement de ce point, c'est-à-dire x en fonction de t . On dispose seulement d'une relation entre la vitesse v et la position x du point, ce que l'on appelle une équation différentielle du premier ordre, ce qui signifie que seule la dérivée première intervient, soit :

$x' = f(x)$ ou encore $dx/dt = f(x)$, f étant une fonction donnée,
avec $x' = dx/dt$ dérivée de x par rapport au temps t , x' n'étant autre que la vitesse instantanée v à l'instant t .

En plus nous ajoutons des conditions initiales, par exemple pour $t = 0$, $x = x_0$ donné. La résolution de cette équation différentielle va donner explicitement la position x en fonction du temps t de façon unique. Nous allons commencer par traiter le cas le plus simple, avec $f(x) = x$, il suffira ensuite de généraliser.

2. Résolution théorique de $x' = x$

Supposons d'abord qu'à un instant t_0 on ait $x = 0$, d'où $x' = 0$. Comme la vitesse est nulle, x reste à 0 dans un petit voisinage autour de t_0 , en $t_0 \pm dt$, et la vitesse reste nulle. Par propagation à droite ou à gauche de t_0 , x reste nul, tout comme la vitesse. Finalement $x = 0$ pour tout t .

Supposons maintenant qu'à un instant t_0 on ait $x \neq 0$. Dans le cas où x est > 0 , on a $x' > 0$, x va augmenter, et ainsi de suite quand t augmente, x reste positif. De même si l'on a $x < 0$ en t_0 , la vitesse est négative, x diminue et reste négatif. Comme x n'est jamais nul, l'équation différentielle peut s'écrire :

$x'/x = 1$, d'où $\ln |x| = t + \text{cte}$. La constante peut s'écrire $\ln K$, avec $K > 0$, sans perte de généralité. Alors $\ln |x| - \ln K = t$, $\ln |x| / K = t$, $|x| / K = e^t$, $|x| = K e^t$, soit $x = K e^t$ pour $x > 0$ ou $x = -K e^t$ pour $x < 0$.

Finalement on trouve une infinité de solutions, de la forme $x = C e^t$ avec C constante quelconque, positive, nulle ou négative. En ajoutant comme condition initiale $x = x_0$ pour $t = t_0$, la constante C est telle que $C = x_0 e^{-t_0}$, et l'on trouve la solution unique $x = x_0 e^{t-t_0}$.

3. Résolution graphique

Plaçons-nous dans le repère (t, x) . Tout trajectoire (t, x) solution de l'équation différentielle admet en chacun de ses points une tangente dont la pente est $v = dx/dt$ à l'instant t , celle-ci étant donnée

puisque $v = x$. Inversement, à partir de l'équation différentielle $x' = x$, on peut tracer en tout point (t, x) de petits segments de pente $v = x$, ou des vecteurs de coordonnées $(1, v)$. Une trajectoire, avec son point de départ connu, est une courbe qui va admettre certains de ces vecteurs comme tangentes. On peut ainsi la tracer approximativement. En changeant les conditions initiales, on trouve ainsi de nombreuses trajectoires, grâce à la seule connaissance de ces vecteurs vitesses.

Ces trajectoires forment ce que l'on appelle un écoulement, par analogie avec les lignes de courant d'un fluide, deux trajectoires quelconques ne pouvant pas se couper, car sinon il y aurait deux tangentes en un même point. Les vecteurs correspondant aux tangentes aux trajectoires constituent le champ de vitesses associé à l'équation différentielle.¹ Il permet de connaître l'allure générale des trajectoires, il donne aussi une autre indication : $x = 0$ est un point fixe instable, puisque par projection des vecteurs vitesses sur l'axe vertical, le mouvement a tendance à se faire soit vers le haut soit vers le bas dès que l'on se place au voisinage de $x = 0$.

Programmation du champ de vitesses

Dans le repère (t, x) , il s'agit de prendre un quadrillage de points pour chacun desquels on dessine le vecteur tangent (*figure 1*).

```
for(t=-6.;t<10.;t+=1.5) for(x=-5;x<7.;x+=1.)
{ te=torig+zoom*t; xe=xorig-zoom*x; filldisc(te,xe,1,red);
  m=x; /* m est la pente de la tangente, soit v = x */
  xV=1./sqrt(1.+m*m); /* on donne au vecteur tangent (xV, yV) une longueur unité */
  yV=m/sqrt(1.+m*m);
  arrow(te-14.*xV,xe+14.*yV,te+14.*xV,xe-14.*yV,red); /* vecteur de longueur 28 pixels */
}
```

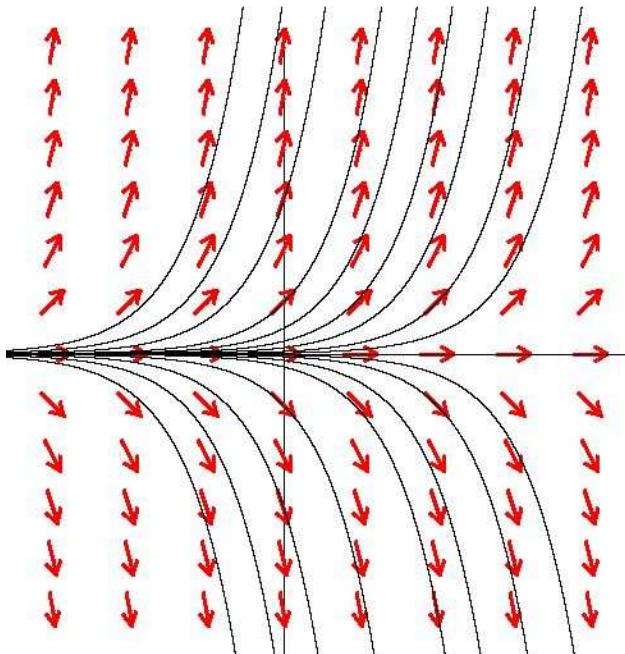


Figure 1 : Champ de vitesses (en rouge) de l'équation différentielle $x' = x$, et tracé de quelques trajectoires (en noir) qui forment l'écoulement de l'équation.

¹ Dans le cas présent, pour chaque valeur de x , les vecteurs tangents sont tous parallèles puisque $v = x$. On dit que l'équation différentielle est autonome quand le temps n'intervient pas de façon explicite, comme c'est le cas pour l'équation $x' = x$.

Si le champ de vitesses donne une bonne indication sur la forme des trajectoires, il ne suffit pas pour les tracer précisément. Sans utiliser pour autant la résolution théorique de l'équation, on dispose de méthodes permettant de résoudre l'équation différentielle de façon approchée.

4. Résolution approchée, ou méthode d'Euler

Il s'agit de découper le temps t continu en une succession de petits intervalles égaux dt . Sur chacun de ces intervalles, on suppose que la vitesse v reste constante, ce qui n'est pas tout à fait exact puisque v est une vitesse instantanée, mais plus dt est pris petit, plus le résultat sera précis. L'équation différentielle devient $dx / dt = x$, ou $dx = x dt$, dx désignant la petite variation de x pendant le temps dt . On obtient l'évolution suivante, à chaque étape de temps :

$t_0 = 0, x_0 = 1$ (condition initiale)
 $v = x_0$, puis $t_1 = t_0 + dt$, $x_1 = x_0 + v * dt$ à la première étape de temps
 $v = x_1$, puis $t_2 = t_1 + dt$, $x_2 = x_1 + v * dt$ à la deuxième étape de temps
 $v = x_2$, puis $t_3 = t_2 + dt$, $x_3 = x_2 + v * dt$ à la troisième étape de temps
etc.

Sur la figure 2, on a choisi volontairement un intervalle de temps très grand ($dt = 0,5$) de façon à faire ressortir la différence entre la courbe de la résolution approchée et la courbe théorique $x = e^t$. On remarquera que les petites erreurs ont tendance à s'accumuler. Avec cette contradiction : plus dt est choisi petit, plus le tracé sera proche du résultat théorique, mais plus il sera long à obtenir.

```
dt=0.5;
t=0.;x=1.; /* condition initiale */
for(i=0;i<7;i++)
{
    oldt=t;oldx=x; filldisc(torig+zoomh*oldt,xorig-zoomv*oldx,3,black); /* zoomh = 200, zoomv = 20 */
    v=x;
    t+=dt; x+=v*dt;
    linewidth(zoomh*oldt,xorig-zoomv*oldx,torig+zoomh*t,xorig-zoomv*x,1,black);
    /* ce qui suit est facultatif, seulement pour voir la courbe théorique et son lien avec la courbe approchée */
    tt=log(x);xx=exp(tt);filldisc(torig+zoomh*tt,xorig-zoomv*xx,3,red);
    line(torig+zoomh*tt,xorig-zoomv*xx, torig+zoomh*t,xorig-zoomv*x,blue);
    line(torig+zoomh*tt,xorig-zoomv*xx, torig+zoomh*(tt+dt),xorig-zoomv*(xx+dt*xx),blue);
}
```

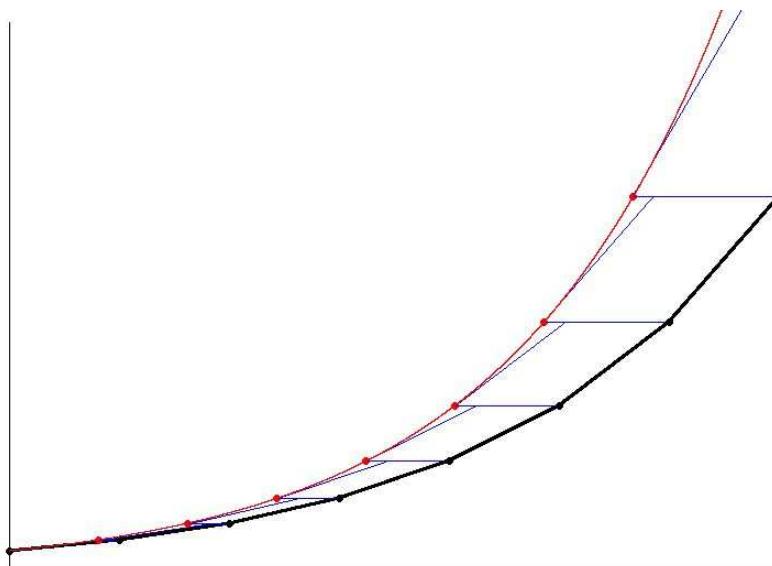


Figure 2 : La courbe approchée *en noir*, et la courbe théorique *en rouge*. Pour un point (t, x) de la courbe approchée, le segment menant de ce point au point suivant a une pente qui est celle de la tangente à la courbe théorique au point de même ordonnée x (tracé *en bleu*).

5. Résolution approchée améliorée

Par la méthode d'Euler, on gardait la vitesse v constante pendant chaque intervalle de temps dt , celle-ci ne variant que lors du passage d'un intervalle de temps au suivant. On va maintenant couper l'intervalle de temps dt en deux : pendant la première moitié $dt/2$, on prend la même vitesse v qu'auparavant, et pendant la deuxième moitié $dt/2$, on prend comme vitesse celle que l'on aurait eue au cours de l'intervalle de temps suivant par la méthode d'Euler. Dans le contexte de l'équation $x' = x$, la première vitesse a tendance à être trop petite, et la deuxième trop grande, ce qui donne une meilleure approximation² (cf. tracé en vert sur la figure 3). On en déduit le programme, et la courbe associée à cette méthode améliorée (en noir sur la figure 3).

```
dt=1.2;
t=0.;x=1.; /* condition initiale */
for(i=0;i<3;i++)
{
    oldt=t;oldx=x; filldisc(torig+zoomh*oldt,xorig-zoomv*oldx,3,black);
    t+=dt;
    v=x;
    xeuler=x+v*dt; /* nouvelle valeur de x obtenue par la méthode d'Euler */
    nv=xeuler; /* vitesse que l'on aurait à l'étape suivante par la méthode d'Euler */
    x+=0.5*(v+nv)*dt;
    linewidth(torig+zoomh*oldt,xorig-zoomv*oldx,torig+zoomh*t,xorig-zoomv*x,1,black);
    /* ce qui suit est facultatif, il permet de voir ce qui se passe sur chaque moitié de dt */
    linewidth(torig+zoomh*oldt,xorig-zoomv*oldx,
              torig+zoomh*(oldt+0.5*dt),xorig-zoomv*(oldx+0.5*v*dt),1,green);
    linewidth(torig+zoomh*(oldt+0.5*dt),xorig-zoomv*(oldx+0.5*v*dt),
              torig+zoomh*t,xorig-zoomv*(oldx+0.5*(v+nv)*dt),1,green);
}
```

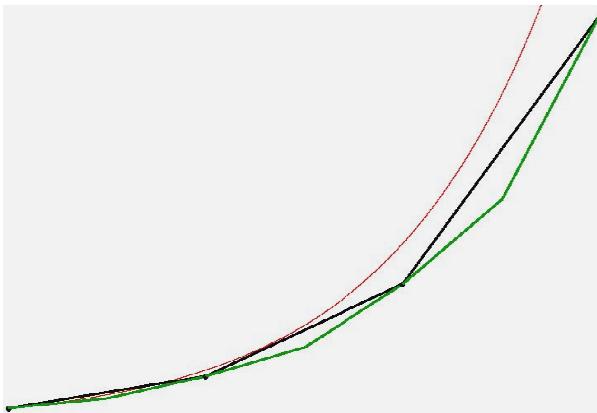


Figure 3 : La courbe approchée *en noir* (ici avec $dt = 1,2$), *en vert* les deux segments pendant chaque moitié d'intervalle de temps, et *en rouge* la courbe théorique.

La comparaison des méthodes de résolution est faite sur la figure 4, avec un dt assez grand pour faire ressortir les différences. Pour mieux approcher la courbe théorique, on prend plutôt un dt de l'ordre de 0,001, voire plus petit.

² On retrouve cela en appliquant la formule de Taylor-Young, qui s'écrit $x_{n+1} = x_n + v_n dt + 0,5 a_n dt^2 + \dots$, où v_n est la vitesse (égale à x_n) et où a_n désigne l'accélération, c'est-à-dire la dérivée seconde. En prenant seulement $x_{n+1} = x_n + v_n dt$ on retrouve la méthode d'Euler, et l'approximation est du premier ordre (seule la dérivée première intervient). Prenons maintenant l'approximation du second ordre : $x_{n+1} = x_n + v_n dt + 0,5 a_n dt^2$, où l'accélération est telle que $a_n = (v_{n+1} - v_n) / dt$, variation de la vitesse divisée par le temps. On obtient :

$x_{n+1} = x_n + v_n dt + 0,5 (v_{n+1} - v_n) dt = x_n + 0,5 (v_n + v_{n+1}) dt$, ce qui correspond à la méthode améliorée.

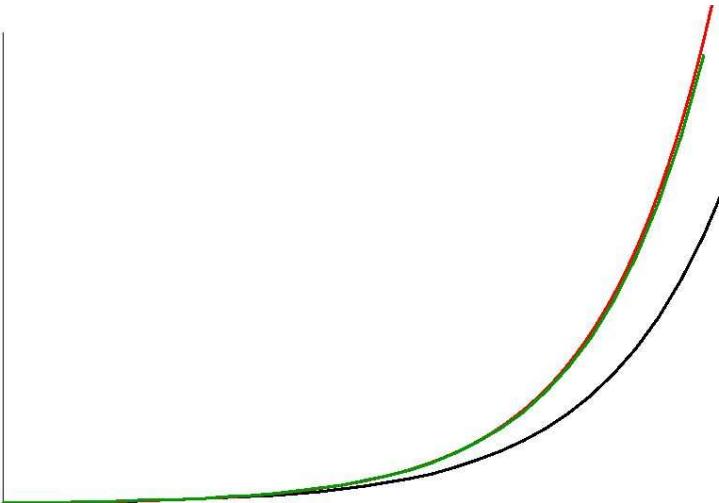


Figure 4 : En rouge la courbe théorique de $x = e^t$, en noir la courbe obtenue par la méthode d'Euler, en vert celle obtenue par la méthode améliorée (ici avec $dt = 0,2$).

Ce que nous avons fait pour résoudre expérimentalement l'équation différentielle $x' = x$ peut être aisément généralisé aux équations de la forme $x' = f(x)$, où f est une fonction donnée. Nous allons maintenant traiter un système d'équations différentielles.

6. Système d'équations différentielles du premier ordre

Le mouvement d'un point (x, y) dans un plan est connu grâce aux relations $x = u(t)$ et $y = v(t)$ où x et y varient avec le temps t par le biais des fonctions u et v . La courbe correspondante constitue ce qui s'appelle la trajectoire du point. Mais dans de nombreux problèmes, cette trajectoire n'est pas connue au départ. On ne dispose que de relations entre la vitesse et la position du point à chaque instant t , c'est-à-dire des équations différentielles. C'est la résolution de ces équations qui va donner les trajectoires au fil du temps t . En se plaçant dans le repère (x, y) lorsque l'on est dans l'espace à deux dimensions, ces équations forment un système de la forme :

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \quad \text{où } f \text{ et } g \text{ sont des fonctions données de deux variables, et } x' \text{ et } y' \text{ les dérivées de } x \text{ et } y \text{ par rapport au temps } t.$$

Dès que les fonctions f et g se compliquent, le plus souvent dès qu'elles ne sont pas linéaires (du premier degré), on ne sait plus les résoudre théoriquement. Mais ces équations donnent immédiatement des renseignements majeurs, car elles permettent de tracer en tout point (x, y) le vecteur (x', y') , c'est-à-dire le vecteur vitesse. Grâce à ce champ de vitesses, on peut déterminer l'allure des trajectoires puisque celles-ci sont tangentes aux vecteurs vitesses en chaque point par où elles passent.

7. Ecoulement dans l'espace de configuration

Le repère (x, y) où le temps t n'intervient pas explicitement, s'appelle espace de configuration³. Dans ce repère, le mouvement d'un point (x, y) à partir d'un point donné forme la trajectoire de ce point. Seule les flèches des vecteurs vitesses indiquant le sens de parcours sur une trajectoire

³ On l'appelle aussi espace de phase ou diagramme de phase.

témoignent de l'évolution dans le temps. Dans cet espace de configuration, l'ensemble des trajectoires suivant diverses conditions initiales constitue ce qui s'appelle un écoulement⁴.

Exercice 1 : Ecoulements correspondant à des systèmes différentiels non linéaires

1) Considérer le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 1 - xy \end{cases}$$

Déterminer ses points fixes, puis faire le programme permettant de tracer le champ de vitesses ainsi que l'écoulement de ce système.

Les points fixes vérifient $x' = 0$ et $y' = 0$, d'où $x = y$ et $x^2 = 1$. On trouve deux points fixes $(1, 1)$ et $(-1, -1)$. Le programme donnant le champ de vitesses est analogue à celui que nous avons fait précédemment :

```
for(x=-3.2;x<3.2;x+=0.4)for(y=-3.2;y<3.2;y+=0.4)
{ xe=xorig+zoom*x;ye=yorig+zoom*y;
  vx=x-y; vy=1.-x*y; /* les équations différentielles */
  if (vx*vx+vy*vy !=0.)
  { oldvx=vx;
    vx=vx/sqrt(vx*vx+vy*vy); /* on donne la longueur 1 au vecteur (vx, vy) */
    vy=vy/sqrt(oldvx*oldvx+vy*vy);
    arrow(xe-14.*vx,ye+14.*vy,xe+14.*vx,ye-14.*vy,red);
  }
}
```

Pour avoir l'écoulement, on profite du fait que le point fixe $(-1, -1)$ est une source, point d'où partent de nombreuses trajectoires, comme l'indique le champ de vitesses. A partir de points régulièrement espacés sur un petit cercle entourant ce points fixes, on lance des trajectoires qui remplissent une grande partie de l'intérieur d'un carré dont le centre est l'origine du repère (voir le programme ci-dessous). Il reste ensuite à lancer d'autres trajectoires pour remplir la partie restante, celles qui sont déviées par l'autre point fixe $(1, 1)$, d'allure hyperbolique.

```
dt=0.0005; R = 0.08;
filldisc(xorig+zoom,yorig+zoom,6,black);
for(alpha=0.;alpha<2.*M_PI;alpha+=0.15)
{ x0=-1.+R*cos(alpha); y0=-1.+R*sin(alpha); /* points de départ des trajectoires autour du point fixe */
  x=x0;y=y0;
  for(i=0;i<20000;i++)
  { vx=x-y; vy=1.-x*y;
    x+=vx*dt; y+=vy*dt;
    xe=xorig+zoom*x;ye=yorig+zoom*y;
    if (xe>100 && xe<699 && ye>20 && ye<579) putpixel(xe,ye,black);
  }
}
```

Les résultats sont donnés sur la figure 5.

⁴ Un écoulement est aussi appelé *flot*, du fait de la traduction simplificatrice du mot *flow* en anglais. Cette analogie avec le mouvement d'un fluide est dû au fait que les trajectoires ne peuvent pas se couper (on n'a qu'une tangente en chaque point), tout comme les lignes de courant d'un fluide.

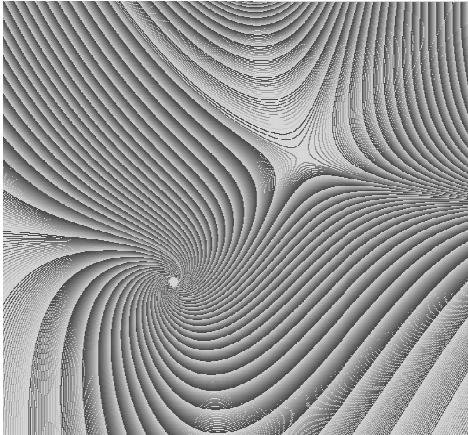
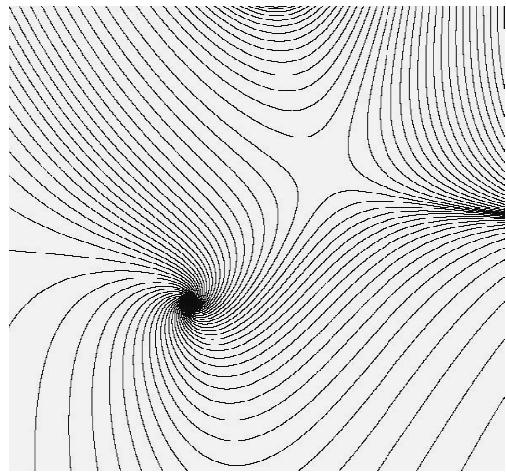
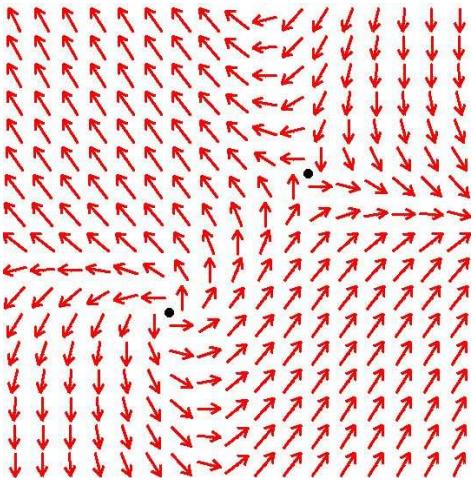
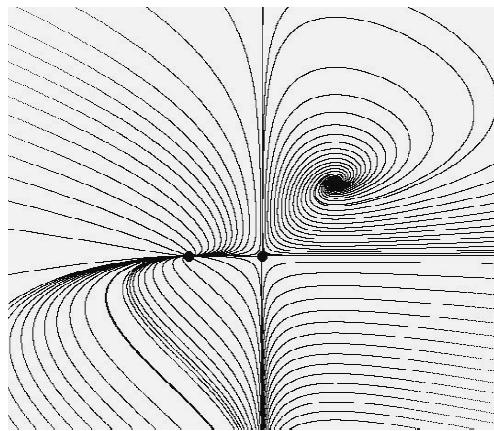
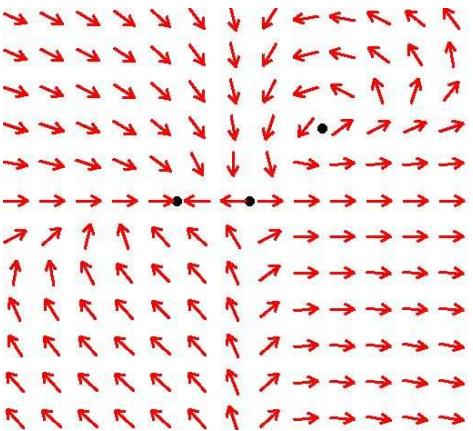


Figure 5 : Champ de vitesses et écoulement du système différentiel dans le repère (x, y) . En bas, on a aussi l'écoulement, avec un remplissage par un dégradé cyclique de gris.

2) Traiter de même le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = (1 + x - 2y)x \\ y' = (x - 1)y \end{cases}$$

On obtient comme points fixes $(0, 0)$, $(-1, 0)$, $(1, 1)$. D'après le champ de vitesses, le premier est un point hyperbolique, le deuxième est un puits et le troisième une source⁵. Le programme est analogue au précédent. Ses résultats sont illustrés sur la figure 6.



⁵ Ces noms sont suffisamment évocateurs pour comprendre comment se comportent ces points fixes. Ils seront expliqués plus précisément ci-dessous, dans les paragraphes 8 et 9.

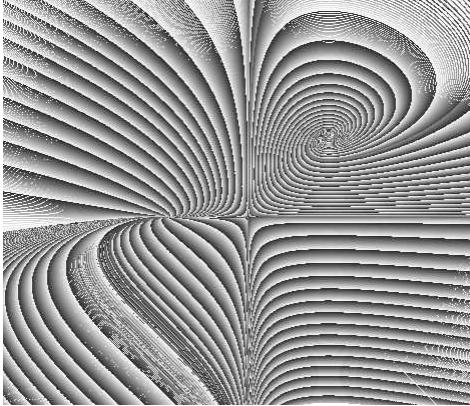


Figure 6 : Champ de vitesses et écoulement du système différentiel.

3) On considère l'équation différentielle qui s'écrit en complexes

$z' = 0,1z + (0,01 + i0,1)(z\bar{z})z + \bar{z}^3$, avec $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ (dérivées par rapport au temps t).

a) Montrer que le champ de vitesses est symétrique par rapport à l'axe des x dans le plan complexe (x, y) .

Le vecteur z' est le vecteur vitesse au point (x, y) d'affixe z . Prenons maintenant le point $(x, -y)$, d'affixe \bar{z} , symétrique du point (x, y) par rapport à (Ox) , le vecteur vitesse associé est :

$0,1\bar{z} + (0,01 + 0,1i)(z\bar{z})\bar{z} + z^3$, soit \bar{z}' , ce qui prouve que ce vecteur vitesse est le symétrique de celui de z .

b) Montrer que le champ de vitesses reste invariant par rotation de centre O et d'angle $\pi/2$.

A partir du point d'affixe z ayant pour vecteur vitesse z' , prenons le point d'affixe $z_1 = iz$ qui se déduit de z par la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$. Son vecteur vitesse z'_1 s'obtient en remplaçant z par iz dans l'expression de z' , soit

$$\begin{aligned} z'_1 &= 0,1iz + (0,01 + 0,1i)(z\bar{z})iz + (\bar{iz})^3 = 0,1iz + (0,01 + 0,1i)(z\bar{z})iz + (-i\bar{z})^3 \\ &= 0,1iz + i(0,01 + 0,1i)(z\bar{z})z + i\bar{z}^3 \\ &= iz' \end{aligned}$$

A son tour le vecteur vitesse z'_1 se déduit du vecteur vitesse z' par la même rotation, d'où l'invariance du champ de vitesse par cette rotation.

c) Les deux questions précédentes prouvent que le champ de vitesses, et par suite les trajectoires, présentent les symétries du carré. Transformer l'équation différentielle écrite en complexes sous forme d'un système différentiel avec x et y réels, puis faire le programme permettant d'avoir le champ de vitesses et l'écoulement..

Rappelons que $z\bar{z}$ est le nombre réel $x^2 + y^2$. Remplaçons z par $x + iy$ et z' par $x' + iy'$:

$$\begin{aligned} x' + iy' &= 0,1(x + iy) + (0,01 + 0,1i)(x^2 + y^2)(x + iy) + (x - iy)^3 \\ &= 0,1x + i0,1y + (x^2 + y^2)(0,01x - 0,1y) + i(x^2 + y^2)(0,01y + 0,1x) + x^3 - i3x^2y - 3xy^2 + iy^3 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{cases} x' = 0,1x + (x^2 + y^2)(0,01x - 0,1y) + x^3 - 3xy^2 \\ y' = 0,1y + (x^2 + y^2)(0,01y + 0,1x) - 3x^2y + y^3 \end{cases}$$

Les résultats sont indiqués sur la *figure 7*.

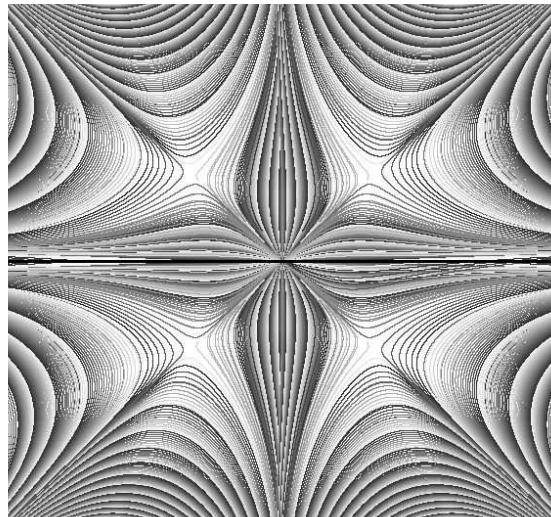
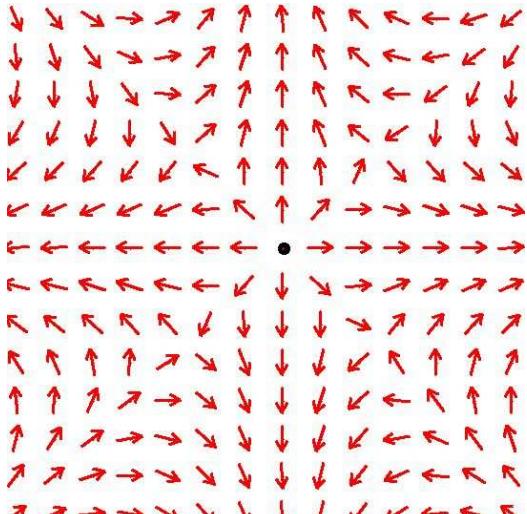


Figure 7 : Champ de vitesses et écoulement du système différentiel.

Ce que nous avons fait avec un système de deux équations différentielles peut s'élargir à un plus grand nombre d'équations, comme nous allons le voir avec l'exercice suivant, qui traite un problème concret pouvant être modélisé simplement par des équations différentielles.

Exercice 2 : la rumeur

Dans une population de $N + 1$ personnes, une rumeur se diffuse. A chaque instant t , il y a trois catégories de personnes dont le nombre est fonction du temps :

- x personnes ignorent la rumeur. Lorsque l'une d'elles rencontrent un diffuseur, elle devient à son tour diffuseur.
- y personnes diffusent activement la rumeur.
- z personnes connaissent déjà la rumeur mais elles ont arrêté de la diffuser, suivant les règles suivantes : si deux personnes qui diffusent la rumeur se rencontrent, elles décident d'arrêter de la diffuser, et si une personne qui diffuse la rumeur rencontre une personne qui a arrêté de la diffuser, elle s'arrête aussi.

On appelle m le taux de contact entre deux personnes. A chaque instant, on a : $x + y + z = N + 1$, et au départ on se donne $x = x_0$ et $y = y_0$, z étant forcément nul, d'où $x_0 + y_0 = N + 1$, un exemple limite étant $x_0 = N$ et $y_0 = 1$ lorsque la rumeur part d'une seule personne.

1) Quel est le nombre de rencontres possibles entre ceux qui ignorent la rumeur et ceux qui la diffusent ? En déduire la vitesse x' d'évolution de x dans le temps.

Une personne ignorant la rumeur peut rencontrer y diffuseurs. Comme ceux qui ignorent la rumeur sont au nombre de x , le nombre de rencontres possibles est $x y$. Comme x ne peut que diminuer, la vitesse x' est négative, et elle est proportionnelle aux rencontres xy qui transforment en diffuseurs ceux qui ignoraient la rumeur jusque-là. Le coefficient de proportionnalité est justement le taux de contact m . Ainsi $x' = -m x y$.

2) Donner les équations différentielles associées à y' et z' .

Le nombre y de diffuseurs augmente lorsque des personnes ignorant la rumeur deviennent diffuseurs. Il diminue lorsque deux diffuseurs se rencontrent, puisqu'ils arrêtent de diffuser. Or un diffuseur peut rencontrer $y - 1$ diffuseurs, et comme les diffuseurs sont au nombre de y , il existe $y(y - 1)$ rencontres possibles. Le nombre y diminue aussi lorsqu'un diffuseur rencontre une personne

qui a arrêté de diffuser la rumeur, le nombre de rencontres de ce type étant $y z$. On en déduit l'équation différentielle associée à y' :

$$y' = m x y - m y (y - 1) - m y z$$

De la même façon, le nombre z augmente lorsqu'il y a rencontre entre deux diffuseurs ou entre un diffuseur et une personne ayant arrêté de diffuser la rumeur, soit :

$$z' = m y (y - 1) + m y z$$

3) Montrer que le système de trois équations différentielles peut se réduire à deux équations faisant intervenir seulement x , y et leurs dérivées.

On sait que $x + y + z = N + 1$,⁶ d'où $z = N + 1 - x - y$, ce qui permet d'éliminer z de la deuxième équation, pour donner deux équations différentielles en x et y :

$$\begin{cases} x' = -m x y \\ y' = m x y - m y (y - 1) - m y (N + 1 - x - y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = -m x y \\ y' = m y (2x - N) \end{cases}$$

4) Faire le programme donnant le champ de vitesses et l'écoulement du système dans l'espace de configuration (x, y) .

Les valeurs initiales x_0 et y_0 doivent être comprises entre 0 et $N + 1$, avec en plus la relation $x_0 + y_0 = N + 1$, ou encore $y_0 = N + 1 - x_0$, ce qui indique que les points de départ des trajectoires sont sur un segment. La plus grande valeur de x_0 est N (avec $y_0 = 1$), car le cas où $x_0 = N + 1$ (et $y_0 = 0$) est sans intérêt, la rumeur ne pouvant pas exister.

Le programme donnant les trajectoires dans l'espace de configuration se présente ainsi :

```
dt=0.00003;
for(x0=N;x0>0;x0-=5)
{ y0=N+1.-x0; filldisc(xorig+zoom*x0,yorig-zoom*y0,3,black);
  x=x0;y=y0;
  for(i=0;i<200000;i++)
  { vx=-m*x*y; vy=m*y*(2.*x-N);
    x+=vx*dt; y+=vy*dt;
    xe=xorig+zoom*x;ye=yorig-zoom*y;
    if (y>=0) putpixel(xe,ye,black);
  }
}
```

Les résultats sont donnés sur la figure 8.

5) Calculer y' / x' et en déduire l'équation des trajectoires. Puis montrer que pour les conditions initiales $x_0 = N$ et $y_0 = 1$, le nombre final de personnes ignorant la rumeur après qu'elle a fini de se propager, est le nombre x_I tel que : $2N + 1 - 2x_I - N \ln(x_I/N) = 0$.

$$\frac{y'}{x'} = \frac{N - 2x}{x} = \frac{N}{x} - 2 \quad (\text{pour } x > 0)$$

⁶ En dérivant par rapport au temps, on obtient $x' + y' + z' = 0$, ce que l'on peut vérifier avec les résultats du 1^o et du 2^o.

Avec $x' = dx / dt$ et $y' = dy / dt$, on a $y' / x' = dy / dx$. On peut intégrer l'équation différentielle :

$$dy / dx = N / x - 2 \text{ par rapport à } x,$$

ce qui donne $y = N \ln x - 2x + K$, K étant une constante qui peut être déterminée grâce aux conditions initiales. Il s'agit de l'équation des trajectoires dans l'espace de configuration (x, y) . On remarquera que ces trajectoires sont indépendantes de la valeur du taux de contact m . Prenons maintenant le cas particulier où au départ $x_0 = N$ et $y_0 = 1$. La constante K vérifie :

$$1 = N \ln N - 2N + K, \text{ soit } K = 2N + 1 - N \ln N. \text{ L'équation correspondante de la trajectoire est :}$$

$$y = N \ln x - 2x + 2N + 1 - N \ln N = N \ln(x/N) - 2x + 2N + 1.$$

La trajectoire s'arrête lorsque le nombre des diffuseurs devient nul, soit $y = 0$, le nombre de personnes ignorant encore la rumeur est alors x_1 qui doit vérifier :

$$N \ln(x_1/N) - 2x_1 + 2N + 1 = 0$$

La résolution de cette équation sur ordinateur donne le point rouge indiqué sur la *figure 8 à droite*, avec une proportion x_1 / N de l'ordre de 20%.

Finalement, à partir de lois simples relatives à la propagation d'une rumeur, nous avons pu fabriquer un modèle mathématique à base d'équations différentielles, ce qui nous a permis d'aboutir à des résultats quantitatifs intéressants, proches de la réalité.

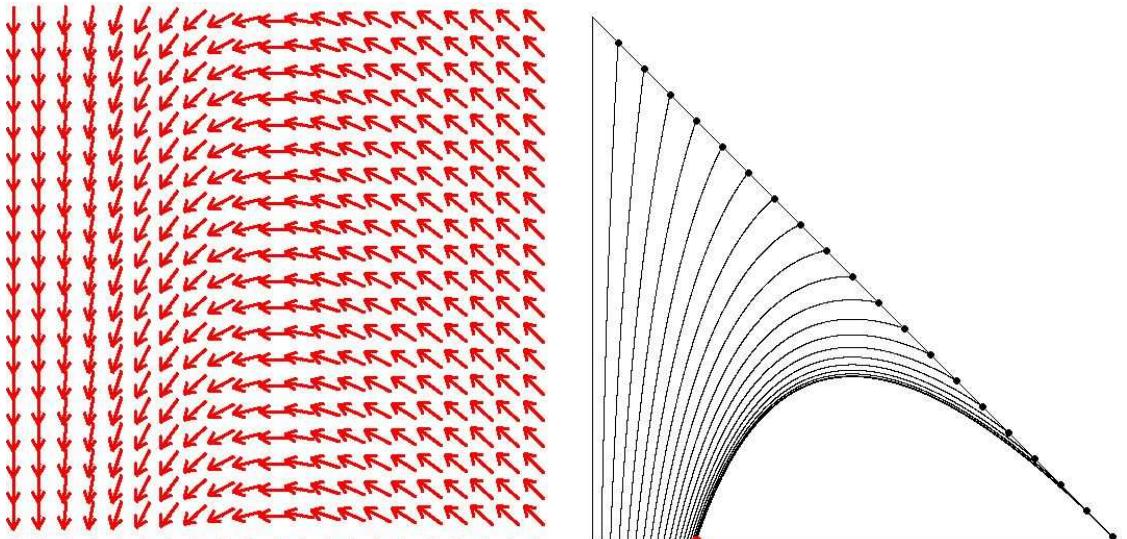


Figure 8 : Champ de vitesses et trajectoires dans l'espace de configuration (x, y) , pour $m = 0,5$ et $N = 100$. La trajectoire la plus basse correspond aux conditions initiales $x_0 = N$ et $y_0 = 1$.

Le traitement d'un système différentiel autonome (où la variable temps n'apparaît pas explicitement dans les équations) de deux équations dans l'espace de configuration (x, y) a fait ressortir le rôle essentiel joué par les points fixes. La nature de ces points fixes est révélée, parfois approximativement comme on le verra, par le tracé du champ de vitesses. Nous allons maintenant apprendre comment déterminer leur nature théoriquement, en commençant par traiter le cas le plus simple, celui d'un système linéaire de deux équations différentielles du premier ordre.

8. Système linéaire de deux équations différentielles du premier ordre

Ce système est de la forme $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$ où x et y sont fonctions du temps t , a , b , c , d étant des nombres réels donnés.

Nous allons voir que ce système peut être résolu théoriquement, à la différence d'un système non-linéaire, grâce à l'utilisation des valeurs propres et des vecteurs propres.

8.1. Valeurs propres et vecteurs propres

Considérons le système linéaire (il n'est pas différentiel) faisant passer d'un point ou vecteur (x_1, y_1) au point ou vecteur (x_2, y_2) par les relations linéaires :

$\begin{cases} x_2 = ax_1 + by_1 \\ y_2 = cx_1 + dy_1 \end{cases}$ ou $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On supposera que cette transformation est bijective, c'est-à-dire que la matrice A est inversible, son déterminant $ad - bc$ étant différent de 0.

Evidemment le point O est un point fixe, mais que se passe-t-il autour de lui ? Pour cela cherchons les vecteurs propres, à savoir les vecteurs non nuls \mathbf{U} vérifiant $A \mathbf{U} = \lambda \mathbf{U}$, où λ est un nombre qui va s'appeler valeur propre associée au vecteur propre. Autrement dit cela revient à chercher les vecteurs non nuls qui sont colinéaires (parallèles pour simplifier) avec leurs transformés par A . Avec $\mathbf{U}(u_1, u_2)$, il s'agit de résoudre le système :

$$\begin{cases} au_1 + bu_2 = \lambda u_1 \\ cu_1 + du_2 = \lambda u_2 \end{cases} \text{ où les inconnues sont } u_1, u_2 \text{ et } \lambda, \text{ soit}$$

$$\begin{cases} (a - \lambda)u_1 + bu_2 = 0 \\ cu_1 + (d - \lambda)u_2 = 0 \end{cases}$$

En règle générale ce système a une solution unique $u_1 = 0$ et $u_2 = 0$, mais nous n'en voulons pas. Pour avoir des solutions non nulles, le système doit se réduire à une seule équation, ce qui nécessite que le déterminant du système soit nul⁷, soit

$$\begin{aligned} (a - \lambda)(d - \lambda) - bc &= 0 \\ \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc &= 0 \end{aligned}$$

Cette équation est appelée équation caractéristique du système. Comme on a supposé $ad - bc \neq 0$, aucune valeur propre n'est nulle. En notant $T = a + d$, ce qui s'appelle la trace de la matrice A , et $D = ad - bc$ qui est le déterminant de A , le discriminant de l'équation est $T^2 - 4D$. Si celui-ci est positif ou nul, on trouve deux valeurs réelles de λ :

$$\lambda = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4D}}{2}$$

Pour chacune d'elles, on en déduit une infinité de vecteurs \mathbf{U} vérifiant l'une des équations (et l'autre aussi) tels que $(a - \lambda)u_1 + bu_2 = 0$, ou $bu_2 = -(a - \lambda)u_1$, tous colinéaires, de même pente $-(a - \lambda)/b$ si b n'est pas nul. Il suffit d'en prendre un non nul pour chacune des deux valeurs propres. Si les deux valeurs propres λ_1 et λ_2 sont distinctes, les deux vecteurs propres qui leur sont associés ne sont pas parallèles. Ils peuvent former les deux vecteurs de base d'un nouveau repère d'origine O . Dans ce nouveau repère de base $\mathbf{U}(u_1, u_2)$ et $\mathbf{V}(v_1, v_2)$ tout va être plus simple.

⁷ Sauf cas exceptionnel de coefficient nul, cela signifie que les membres de gauche des deux équations sont proportionnels, soit $(a - \lambda)/c = b/(d - \lambda)$, les deux équations étant alors les mêmes.

Prenons un point M (ou un vecteur \mathbf{OM}) de coordonnées x, y dans le repère initial et de coordonnées X, Y dans le nouveau repère. On a la relation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \text{ avec comme matrice de passage des anciennes coordonnées aux nouvelles :}$$

$$P = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}, \text{ ayant comme vecteurs colonnes les nouveaux vecteurs de base rapportés à l'ancienne base.}$$

Prenons un vecteur quelconque (X_1, Y_1) dans le nouveau repère, soit $X_1 \mathbf{U} + Y_1 \mathbf{V}$. Il est transformé en un vecteur (X_2, Y_2) , soit $X_2 \mathbf{U} + Y_2 \mathbf{V}$. On sait que \mathbf{U} est transformé en $\lambda_1 \mathbf{U}$ et que \mathbf{V} devient $\lambda_2 \mathbf{V}$. Comme le vecteur $X_1 \mathbf{U} + Y_1 \mathbf{V}$ est transformé en $X_1 \lambda_1 \mathbf{U} + Y_1 \lambda_2 \mathbf{V}$, on trouve :

$$\begin{cases} X_2 = \lambda_1 X_1 \\ Y_2 = \lambda_2 Y_1 \end{cases} \text{ ou } \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

La transformation qui s'écrivait avec la matrice A dans l'ancien repère, s'écrit maintenant beaucoup plus simplement avec une matrice diagonale D dans le nouveau repère.

Comment passer de A à D ?

Partons de $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, puis utilisons la matrice de passage P :

$$P \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = AP \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = P^{-1}AP \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}$$

car la matrice inverse P^{-1} existe, ses vecteurs colonnes \mathbf{U} et \mathbf{V} étant non parallèles et non nuls.

Finalement $D = P^{-1}AP$.

$$\text{Exemple 1 : traitons le système } \begin{cases} x_2 = x_1 + y_1, \text{ ou} \\ y_2 = 2y_1 \end{cases} \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On trouve aussitôt comme valeurs propres 1 et 2, réelles et distinctes, et comme vecteurs propres associés $\mathbf{U}(1, 0)$ et $\mathbf{V}(1, 1)$ (figure 9). Dans ce nouveau repère, la transformation devient :

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}. \text{ Précisons que la matrice de passage est } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

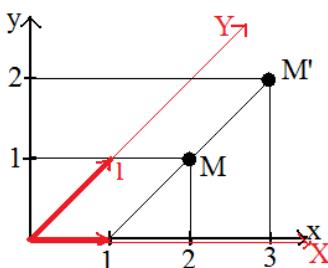


Figure 9 : En noir l'ancien repère, en rouge le nouveau. Le point M de coordonnées $(2,1)$ dans l'ancien repère et $(1, 1)$ dans le nouveau, devient par la transformation le point M' de coordonnées

(3, 2) dans l'ancien ou (1, 2) dans le nouveau.

Nous allons utiliser ces résultats pour résoudre un système différentiel linéaire.

8.2. Résolution théorique du système différentiel pour des valeurs propres réelles et distinctes

Reprendons le système $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$ ou $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Supposons que l'on ait trouvé deux valeurs propres réelles et distinctes, de vecteurs propres associés $\mathbf{U}(u_1, u_2)$ et $\mathbf{V}(v_1, v_2)$.

Avec la matrice de passage P , on a

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ et par dérivation par rapport au temps $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$. Le système initial se réécrit :

$$P \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = AP \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = P^{-1}AP \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

Sachant que $P^{-1}AP = D$ qui est la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, le système devient dans le nouveau repère :

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} X' = \lambda_1 X \\ Y' = \lambda_2 Y \end{cases}$$

Mais ce nouveau système, nous savons le résoudre :

$$\begin{cases} X = K_1 e^{\lambda_1 t} \\ Y = K_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

Il suffit maintenant de revenir au repère initial :

$$\begin{cases} X = K_1 e^{\lambda_1 t} \\ Y = K_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 e^{\lambda_1 t} \\ K_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = K_1 u_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 v_1 e^{\lambda_2 t} \\ y = K_1 u_2 e^{\lambda_1 t} + K_2 v_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

Le système différentiel est ainsi résolu dans le cas où les deux valeurs propres sont réelles et distinctes. Mais ce sont les équations des courbes dans le nouveau repère, avec X et Y fonctions du temps, qui précisent parfaitement la nature du point fixe O .

Lorsque les deux valeurs propres sont réelles et distinctes (et non nulles) :

- Si elles sont toutes deux positives, le point fixe est instable et il est un point repousseur, appelé source.
- Si elles sont toutes deux négatives, le point fixe est stable et attracteur, quel que soit le point de départ, appelé puits.
- Si l'une est positive et l'autre négative, le point fixe est instable, il s'agit d'un point hyperbolique, aussi appelé selle.

Exemple 1' : Résolution du système $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 2y \end{cases}$ et nature du point fixe O .

Cet cas a déjà été traité dans l'*exemple 1*. On aboutit aux solutions :

$$\begin{cases} x = K_1 e^t + K_2 e^{2t} \\ y = K_2 e^{2t} \end{cases}$$

Dans la base des vecteurs propres, elles s'écrivent $\begin{cases} X = K_1 e^t \\ Y = K_2 e^{2t} \end{cases}$. La croissance des exponentielles

indique que X et Y augmentent tous deux avec le temps. Dans le plan de configuration, le point fixe O est instable et repousseur⁸ (*figure 10*).

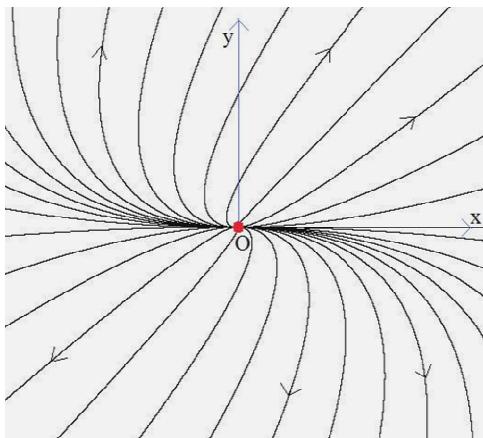


Figure 10 : Trajectoires dans l'espace de configuration avec le point fixe O instable et repousseur.

Exemple 2 : Résolution du système $\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = x - 2y \end{cases}$ et nature du point fixe O .

Les valeurs propres sont -1 et -3 , les vecteurs propres associés $(1, 1)$ et $(1, -1)$. Les équations paramétriques des courbes solutions sont :

$$\begin{cases} x = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-3t} \\ y = K_1 e^{-t} - K_2 e^{-3t} \end{cases} \text{ ou dans la base des vecteurs propres } \begin{cases} X = K_1 e^{-t} \\ Y = K_2 e^{-3t} \end{cases}.$$

Les deux exponentielles décroissant dans le temps vers 0 , le point fixe O est stable et attracteur d'où que l'on parte (*figure 11*).

⁸ Pour programmer le tracé des trajectoires dans le cas d'un point repousseur, on a intérêt à prendre des points de départ sur un grand cercle autour de O , en allant en marche arrière grâce à un dt pris négatif.

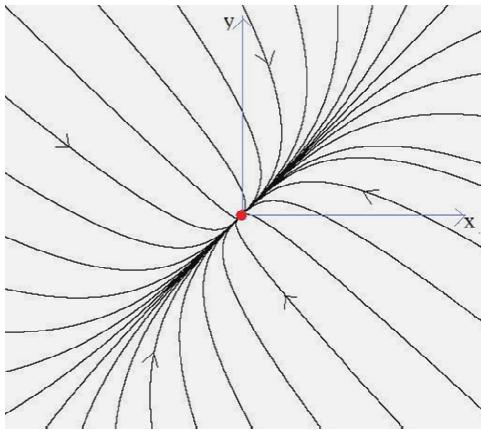


Figure 11 : Point fixe stable et attracteur.

Exemple 3 : Résolution du système $\begin{cases} x' = 4x + 3y \\ y' = -2x - 3y \end{cases}$ et nature du point fixe O.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$, ce qui donne $\lambda = 3$ ou -2 , avec comme vecteurs propres associés $(3, -1)$ et $(1, -2)$. Les équations paramétriques des courbes solutions sont :

$$\begin{cases} x = 3K_1 e^{3t} + K_2 e^{-2t} \\ y = -K_1 e^{3t} - 2K_2 e^{-2t} \end{cases} \text{ ou dans la base des vecteurs propres } \begin{cases} X = K_1 e^{3t} \\ Y = K_2 e^{-2t} \end{cases}. \text{ La première}$$

exponentielle croît dans le temps, tandis que l'autre décroît. Le point fixe O est instable et hyperbolique. On l'appelle aussi selle, car il aurait tendance à être stable dans une direction s'il n'était pas instable dans une autre. C'est ce que montre la figure 12.

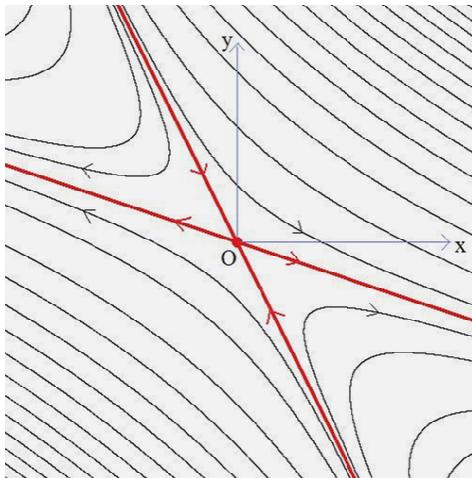


Figure 12 : Point fixe hyperbolique, les droites de vecteurs propres (en rouge) étant asymptotes aux trajectoires.

Mais qu'en est-il si les deux valeurs propres sont réelles et égales ? Prenons d'abord un exemple.

Exemple 4 : Résolution du système $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = 3y \end{cases}$

On constate que les deux valeurs propres sont confondues, et que l'on a seulement $\lambda = 3$, avec comme vecteur propre associé $(1, 0)$. On ne peut plus procéder comme auparavant. Mais nous pouvons résoudre ce système, en commençant par la deuxième équation qui donne $y = K e^{3t}$. La première équation devient : $x' = 3x + K e^{3t}$. Ce n'est plus une équation autonome, puisque le temps t apparaît explicitement. Comment s'y prendre dans ce cas ? On sait que les solutions de l'équation autonome

$x' = 3x$ sont $x = q e^{3t}$. Utilisons la méthode de la variation de la constante, en cherchant les solutions de $x' = 3x + K e^{3t}$ sous la forme $x = q(t) e^{3t}$ où q est fonction du temps⁹. Le système s'écrit :

$$3qe^{3t} + q'e^{3t} = 3qe^{3t} + Ke^{3t}$$

$$q'e^{3t} = Ke^{3t}$$

$q' = K$ puisque l'exponentielle n'est jamais nulle

$$q = Kt + Q$$

Finalement les solutions du système sont :

$$\begin{cases} x = (Kt + Q)e^{3t} \\ y = Ke^{3t} \end{cases}$$

On en déduit que le point fixe O est instable et repousseur (*figure 13*). Il a le même comportement que dans le cas où il existait deux valeurs propres positives distinctes (*cf. exemple 1*). Nous admettrons qu'il en est toujours ainsi. Autrement dit, quand les valeurs propres sont réelles, le fait qu'elles soient différentes ou pas ne change pas la nature du point fixe.

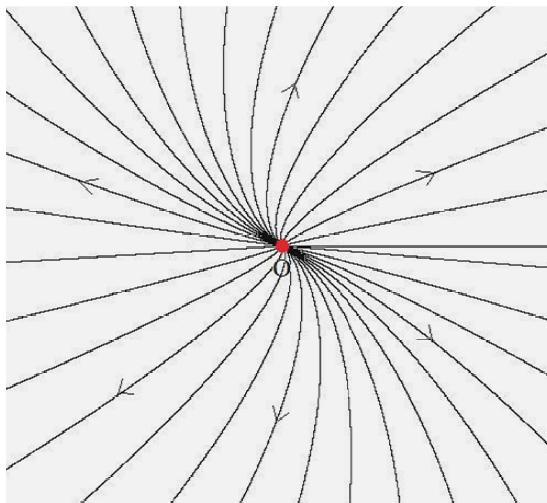


Figure 13 : Point fixe repousseur dans le cas d'une seule valeur propre réelle et positive.

Ayant épuisé tous les cas où les valeurs propres sont réelles, il reste à traiter les cas où les valeurs propres sont complexes non réelles. Elles sont alors conjuguées puisque les coefficients de l'équation caractéristique sont réels. Il n'existe plus de vecteurs propres dans le plan de configuration (x, y) .

Un cas particulier est celui où les deux valeurs propres sont imaginaires pures. Traitons cela sur quelques exemples très simples, en privilégiant l'aspect expérimental, car le niveau théorique des démonstrations dépasse le cadre de cet ouvrage.

Exemple 5 : Résolution de $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$

⁹ Remarquons que $x = q(t) e^{3t}$ équivaut à $q(t) = x e^{-3t}$. Toute solution peut s'écrire sous cette forme. Par exemple si l'on a une solution égale à t , il lui correspond $q(t) = t e^{-3t}$.

¹⁰ La matrice associée $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ étant de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$ est une matrice de rotation.

L'équation caractéristique $\lambda^2 + 1 = 0$ a comme solutions $\lambda = \pm i$. Que faire ? Comme ce système est particulièrement simple, on trouve la solution évidente $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ et plus généralement une première infinité de solutions $\begin{cases} x = K_1 \cos t \\ y = K_1 \sin t \end{cases}$. Les trajectoires correspondantes sont circulaires de centre O , parcourues dans le sens trigonométrique.

Une autre infinité de solutions est donnée par $\begin{cases} x = K_2 \sin t \\ y = -K_2 \cos t \end{cases}$, les trajectoires étant aussi circulaires.

En combinant ces deux infinités de solutions, on trouve plus généralement

$$\begin{cases} x = K_1 \cos t + K_2 \sin t \\ y = K_1 \sin t - K_2 \cos t \end{cases}$$

Nous admettrons qu'il n'existe pas d'autres solutions que celles-là¹¹. On en déduit que le point fixe O est stable mais pas attracteur. On l'appelle centre, les trajectoires étant circulaires autour de lui. Cela se vérifie expérimentalement (*figure 14*).

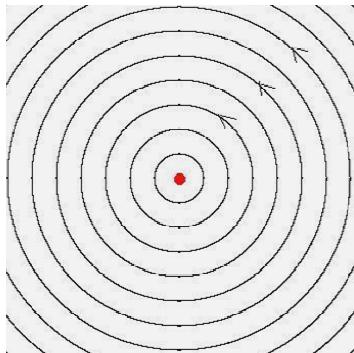


Figure 14 : Le point fixe est un centre.

Exemple 5' : Résolution de $\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = 5x - y \end{cases}$

L'équation caractéristique $\lambda^2 + 9 = 0$ a comme solutions $\lambda = \pm 3i$. Ici aussi les valeurs propres sont imaginaires pures. En cherchant des solutions qui sont comme précédemment des combinaisons linéaires de $\cos(3t)$ et $\sin(3t)$, on trouve¹² :

$$\begin{cases} x = K_1 \cos 3t + K_2 \sin 3t \\ y = 0,5(K_1 - 3K_2) \cos 3t + 0,5(3K_1 + K_2) \sin 3t \end{cases}$$

Ces trajectoires sont périodiques, et comme le précise l'étude expérimentale, il s'agit d'ellipses autour du point O . Celui-ci est un point fixe stable non attracteur, c'est-à-dire un centre (*figure 15*).

¹¹ En prenant comme conditions initiales x_0 et y_0 en $t = 0$, on trouve la solution unique :

$\begin{cases} x = x_0 \cos t - y_0 \sin t \\ y = x_0 \sin t + y_0 \cos t \end{cases}$. On vérifie aisément que la trajectoire est un cercle.

¹² Prenons x et y sous la forme : $\begin{cases} x = K_1 \cos 3t + K_2 \sin 3t \\ y = Q_1 \cos 3t + Q_2 \sin 3t \end{cases}$, d'où $\begin{cases} x' = 3K_2 \cos 3t - 3K_1 \sin 3t \\ y' = 3Q_2 \cos 3t - 3Q_1 \sin 3t \end{cases}$. En imposant que

$x' = x - 2y$, on trouve $Q_1 = 0,5(K_1 - 3K_2)$ et $Q_2 = 0,5(3K_1 + K_2)$. On vérifie ensuite qu'avec ces valeurs, on a aussi $y' = 5x - y$. Il resterait à prouver qu'on n'a pas d'autres solutions que celles-là.

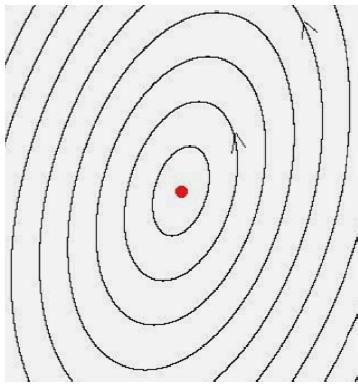


Figure 15 : Point fixe elliptique, ou centre.

Exemple 6 : Résolution de $\begin{cases} x' = -x - 5y \\ y' = 5x - y \end{cases}$ ¹³

L'équation caractéristique $\lambda^2 + 2\lambda + 26 = 0$ a comme solutions $\lambda = -1 \pm i5$. Les valeurs propres sont complexes conjuguées. On démontre que les solutions sont :

$$\begin{cases} x = e^{-t}(K_1 \cos 5t + K_2 \sin 5t) \\ y = e^{-t}(K_1 \sin 5t - K_2 \cos 5t) \end{cases}$$

Les parenthèses correspondent à des équations de cercles, tandis que la présence des exponentielles provoque un phénomène de décroissance. Les trajectoires sont des spirales convergeant vers l'origine. Le point fixe est stable et attracteur, il s'agit d'un puits. On le vérifie expérimentalement (figure 16).

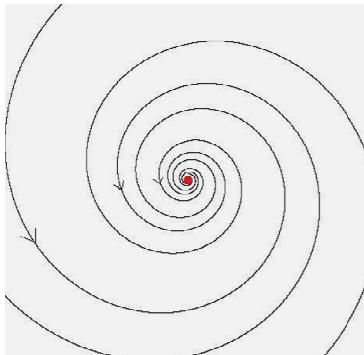


Figure 16 : Point fixe puits, stable et attracteur, les trajectoires convergeant en spirale vers lui.

Remarque : Le seul tracé du champ de vitesses peut laisser planer un doute sur la nature du point fixe, comme on le constate sur la figure 17 où les champs de vitesses sont analogues, mais avec dans un cas un point elliptique (cf. exemple 5') et dans l'autre un puits avec des trajectoires en spirale (cf. exemple 6).

¹³ La matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ est une matrice de similitude directe.

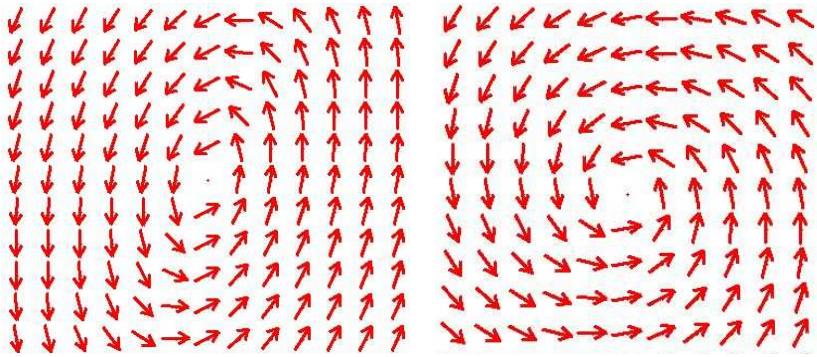


Figure 17 : Champs de vitesses qui se ressemblent, à gauche dans le cas d'un centre, à droite dans le cas d'un puits.

Exemple 7 : Résolution de $\begin{cases} x' = x - 5y \\ y' = 5x + y \end{cases}$ ¹⁴

Il s'agit encore d'une matrice de similitude¹⁵. L'équation caractéristique $\lambda^2 - 2\lambda + 26 = 0$ a comme solutions $\lambda = 1 \pm i5$. Les valeurs propres sont complexes conjuguées. On démontre que les solutions sont :

$$\begin{cases} x = e^t (K_1 \cos 5t + K_2 \sin 5t) \\ y = e^t (K_1 \sin 5t - K_2 \cos 5t) \end{cases}$$

A cause de la croissance des exponentielles, il s'agit maintenant de spirales divergeant à partir de l'origine. Le point fixe O est instable et repousseur. Il s'agit d'une source (figure 18).

¹⁴ La matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ est une matrice de similitude directe.

¹⁵ Faisons un raisonnement formel pour généraliser. Toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dont les valeurs propres sont complexes conjuguées $\lambda = \alpha \pm i\beta$ est semblable à la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix}$ puisqu'elle représente la même transformation. Mais la matrice de similitude $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ que nous avons étudiée est aussi semblable à la même matrice diagonale $\begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix}$. Autrement dit, ce que nous avons fait avec une matrice de similitude se généralise à une matrice quelconque en cas de valeurs propres complexes. Or le système $\begin{cases} x' = \alpha x - \beta y \\ y' = \beta x + \alpha y \end{cases}$ s'écrit, en posant $z = x + iy$, $z' = (\alpha + i\beta)z$. Cette équation a comme solution $z = Ke^{(\alpha+i\beta)t}$ avec K complexe, ce qui permet d'arriver aux formules sur x et y où interviennent $e^{\alpha t}$ multiplié par une combinaison de $\cos\beta t$ et $\sin\beta t$.

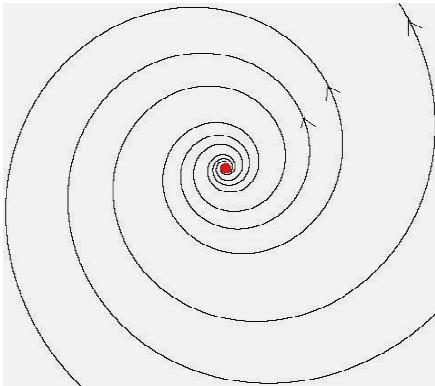


Figure 18 : Point fixe instable repousseur, avec trajectoires divergentes en spirales.

Convenons que nous avons épuisé tous les cas possibles. Il en ressort que :

- Si les deux valeurs propres sont réelles et négatives, ou complexes avec leurs deux parties réelles négatives, le point fixe est stable.
- Si les deux valeurs propres sont réelles et positives, ou complexes avec leurs parties réelles positives, le point fixe est instable.
- Si les deux valeurs propres sont de signe contraire (et non nulles), le point fixe est instable (hyperbolique)
- Si les deux valeurs propres sont complexes avec leurs parties réelles nulles, le point fixe est stable (et c'est un centre).

9. Equations différentielles non linéaires

A la différence des équations linéaires, on ne sait pas résoudre théoriquement, en général, les équations différentielles non linéaires. Mais connaissant le rôle fondamental joué par les points fixes, on va ramener par approximation les équations non linéaires à des équations linéaires dont on sait déterminer la nature des points fixes. Avant de passer à un système différentiel, commençons par traiter une équation différentielle autonome à une inconnue $x(t)$, de la forme $x' = f(x)$ où f est une fonction donnée de x .

9.1. Points fixes de $x' = f(x)$

Supposons que l'on ait trouvé un point fixe x_0 où la vitesse v est nulle, vérifiant $f(x_0) = 0$. Grâce au développement en série de Taylor, on peut écrire :

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots$ avec des dérivées f', f'', \dots par rapport à x . Lorsque x est voisin de x_0 , on peut négliger les termes $(x - x_0)$ d'exposant supérieur à 1. Il reste :

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ sous réserve que $f'(x_0)$ soit différent de 0. Posons $X = x - x_0$, avec X proche de 0. Sachant que $f(x_0) = 0$, on obtient :

$f(x) = f'(x_0)X$, et comme $x' = X'$ en dérivant par rapport au temps, l'équation différentielle $x' = f(x)$ devient linéaire au voisinage du point fixe. Il s'écrit, avec le point fixe comme origine du repère :

$X' = f'(x_0)X$. Il s'ensuit que $X(t)$ est une exponentielle.

- Pour $f'(x_0) > 0$, l'exponentielle est croissante, et le point fixe est instable et repousseur.
- Pour $f'(x_0) < 0$, l'exponentielle est décroissante, et le point fixe est stable et attracteur.

Exercice 3 : Etude de l'équation différentielle $x' = k + x^2$, avec k réel donné.

1) Déterminer les points fixes et leur nature pour $k < 0$.

Pour $x' = 0$, on a $x^2 = -k$, d'où les deux points fixes $x_0 = \pm\sqrt{-k}$. Avec $f(x) = 2x$, $f'(x_0) = 2x_0$, du signe de x_0 . Le point fixe $x_0 = \sqrt{-k}$ est stable et attracteur en son voisinage, tandis que le point : $x_0 = -\sqrt{-k}$ est instable et repousseur.

2) Faire de même pour $k > 0$.

Avec $x^2 + k > 0$, on n'a aucun point fixe.

3) Traiter le cas où $k = 0$. Dans ce cas, l'équation $x' = x^2$ peut-elle modéliser l'évolution d'une population (avec $x > 0$) ?

Il existe un seul point fixe tel que $x^2 = 0$, soit $x_0 = 0$. Comme $f'(0) = 0$, on ne peut rien conclure. Mais on peut résoudre l'équation différentielle :

$$\frac{x'}{x^2} = 1 \quad (x \neq 0) \quad -\frac{1}{x} = t + K \quad x = \frac{1}{K-t}$$

En ajoutant comme condition initiale $x = x_1$ pour $t = 0$, l'équation de la courbe est :

$$x = \frac{1}{1/x_1 - t}.$$

Pour $x_1 < 0$, on obtient une branche d'hyperbole situé du côté des x négatifs et convergent vers 0 pour t infini, faisant de 0 un point fixe stable. Mais pour $x_1 > 0$ on a aussi une branche d'hyperbole d'asymptote verticale $t = 1/x_1$ et toute courbe passant par un point initial proche de $(0t)$ tend à s'en éloigner, faisant de 0 un point fixe instable.

En termes d'évolution de population, avec $x_1 > 0$, la vitesse d'accroissement n'est plus proportionnelle au nombre d'individus comme pour $x' = x$, mais au nombre de couples. Par comparaison, l'accroissement est beaucoup plus élevé pour les grands x et beaucoup moins pour les petits x . On aboutit ainsi à un phénomène irréaliste, où la population tend à devenir infinie en un temps fini, à cause de l'asymptote verticale de la courbe. Cela est impossible. Mais si l'on reste dans un intervalle de temps limité, loin de cette limite, l'équation peut modéliser l'évolution explosive, plus qu'exponentielle, d'une population.

4) Faire les programme donnant les courbes de x en fonction de t , selon les valeurs du paramètre l et les conditions initiales.

Pour k donné négatif, les points fixes $x_0 = \pm\sqrt{-k}$ sont matérialisés par deux asymptotes horizontales, l'une vers lesquelles certaines courbes convergent, l'autre dont certaines courbes s'éloignent. Le passage de k négatif à k positif correspond à un phénomène de bifurcation, avec le passage graduel de deux points fixes vers aucun (figure 19).

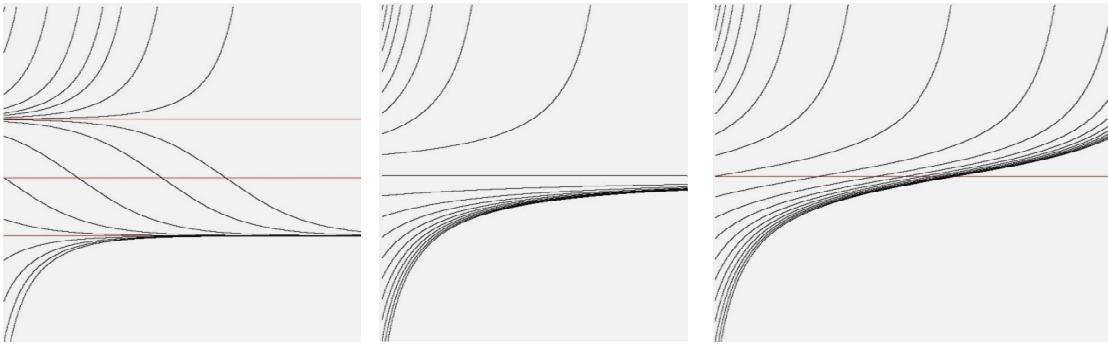


Figure 19 : A gauche les courbes obtenues pour une valeur donnée de k négative, au centre celles obtenues pour $k = 0$, et à droite, celles pour $k > 0$.

Exercice 4

Etudier l'équation différentielle $x' = kx - x^3$, avec k réel donné.

Les points fixes vérifient $kx - x^3 = 0$, ou $x(k - x^2) = 0$.

- Pour $k < 0$, il existe un seul point fixe $x_0 = 0$. La linéarisation de l'équation donne aussitôt $x' = kx$, et le point fixe est stable.
- Pour $k > 0$, on obtient trois points fixes : $x_0 = 0$ et $x_0 = \pm\sqrt{k}$. Pour $x_0 = 0$, la linéarisation $x' = kx$ indique que le point est instable. Avec $f'(x) = k - 3x^2$, on trouve, au voisinage de $x_0 = \sqrt{k}$, $f'(x_0) = -2k < 0$, le point est stable, et au voisinage de $x_0 = -\sqrt{k}$, $f'(x_0) = -2k < 0$, le point est aussi stable.
- Pour $k = 0$, le seul point fixe est $x_0 = 0$. Avec $f'(x_0) = 0$, on ne peut pas conclure. Mais on peut intégrer l'équation dans ce cas. Avec $x'/x^3 = 1$, on arrive aux courbes d'équation

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2(t+K)}} \quad \text{avec } K \text{ constante donnée quelconque. Notamment, pour les valeurs de } K$$

positives, on trouve un point fixe stable.

Ces résultats sont vérifiés sur la figure 20. On constate, comme dans l'exercice précédent, que de petites variations du paramètre autour de 0 suffisent à provoquer un changement du comportement du système.

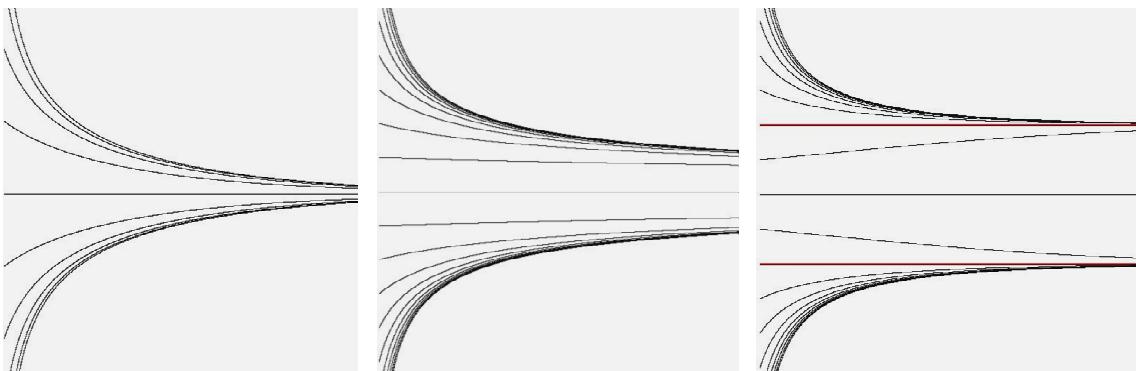


Figure 20 : Passage du point fixe stable 0 à gauche (pour $k < 0$) à deux points fixes stables et le point 0 instable à droite (pour $k > 0$), avec au centre le cas frontière ($k = 0$) où 0 est encore le seul point fixe stable.

9.2. Cas d'un système différentiel non linéaire

Ce système est de la forme $\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$, où f et g sont des fonctions données non linéaires des deux variables x et y .

Il peut admettre plusieurs points fixes, à la différence d'un système linéaire qui n'en a qu'un en général, à savoir l'origine O . Nous pouvons encore appliquer la formule de Taylor autour d'un point fixe (x_0, y_0) , ce qui donne, en s'arrêtant aux termes du premier degré :

$$\begin{cases} f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ g(x, y) = g(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \end{cases}$$

Avec $f(x_0, y_0) = 0$ et $g(x_0, y_0) = 0$, et en posant $X = x - x_0$ et $Y = y - y_0$, le système se réécrit sous forme linéaire, au voisinage du point fixe pris comme origine :

$$\begin{cases} X' = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)X + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)Y \\ Y' = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)X + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)Y \end{cases}$$

La matrice des dérivées partielles $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$ est appelée matrice jacobienne du système.

On est ainsi ramené au cas linéaire, à condition de se restreindre à un petit voisinage autour du point fixe. Ce qui permet de connaître théoriquement la nature du point fixe.

Exercice 5 : Etude théorique de la nature des points fixes d'un système différentiel

1) Reprendre le système différentiel $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 1 - xy \end{cases}$ déjà étudié dans l'exercice 1.1(figure 5) et déterminer la nature des points fixes par linéarisation du système.

On a vu qu'il existait deux points fixes : $(1, 1)$ et $(-1, -1)$. La matrice jacobienne du système est :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -y & -x \end{pmatrix}.$$

En l'appliquant au point fixe $(1, 1)$ elle devient $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, et le système est linéaire au voisinage

de ce point, soit : $\begin{cases} X' = X - Y \\ Y' = -X - Y \end{cases}$. L'équation caractéristique est $\lambda^2 - 2 = 0$, $\lambda = \pm\sqrt{2}$. Etant réelles de signe contraire, le point fixe est hyperbolique, avec pour asymptotes aux trajectoires les vecteurs propres de pente $1 \pm \sqrt{2}$.

Pour le point $(-1, -1)$, on a la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ d'équation caractéristique $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$. On

trouve deux racines complexes $\lambda = 1 \pm i$. La partie réelle étant positive, le point fixe est une source, d'où partent des trajectoires en spirale.

2) Faire de même pour le système différentiel $\begin{cases} x' = (1+x-2y)x \\ y' = (x-1)y \end{cases}$ (cf. exercice 1.2 et figure 6).

La matrice jacobienne s'écrit : $\begin{pmatrix} 1+2x-2y & -2x \\ y & x-1 \end{pmatrix}$.

Pour le point fixe $(0, 0)$, elle devient $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ de valeurs propres $\lambda = \pm 1$. Comme elles sont réelles

de signe contraire, le point fixe est une selle, avec comme asymptotes aux trajectoires les vecteurs propres qui sont les deux axes du repère.

Pour le point fixe $(-1, 0)$, la linéarisation donne la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ de valeurs propres -1 et -2 .

Etant toutes deux réelles négatives, le point est un puits.

Pour le point fixe $(1, 1)$, on a la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de valeurs propres 1 et 0 . A cause de cette valeur nulle, on ne peut pas conclure sur la nature du point fixe.¹⁶

3) Faire de même pour le système différentiel $\begin{cases} x' = x^2 - y^2 \\ y' = xy - 4 \end{cases}$ et tracer par programme les trajectoires dans l'espace de configuration (x, y) .

Les points fixes vérifient $x^2 - y^2 = 0$ et $xy = 4$. On trouve deux points fixes $(2, 2)$ et $(-2, -2)$.

La matrice jacobienne des dérivées partielles est $\begin{pmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{pmatrix}$.

Pour le point fixe $(2, 2)$ elle devient $\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, avec pour valeurs propres $\lambda = 3 \pm i\sqrt{7}$. Leurs parties réelles sont positives. Le point fixe est une source.

Pour le point fixe $(-2, -2)$, la matrice est $\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ et les valeurs propres $\lambda = -3 \pm i\sqrt{7}$. Leurs parties réelles étant négatives, le point fixe est un puits.

Si l'on change x en $-x$ et y en $-y$, le système reste inchangé. Deux points symétriques par rapport à l'origine O ont les mêmes vecteurs vitesses. Cela signifie que par symétrie autour de O les courbes

¹⁶ Mais on peut résoudre théoriquement le système $\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = x \end{cases}$. Avec $y'' = x'$, on a y qui vérifie l'équation différentielle du second ordre $y'' - y' + 2y = 0$. D'autre part, avec $x'' = x' - 2y'$, x vérifie aussi la même équation du second ordre $x'' - x' + 2x = 0$. L'équation caractéristique associée à cette équation est $r^2 - r + 2 = 0$, de racines $\frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$. On sait que les solutions sont de la forme $e^{t/2}(K_1 \cos(0,5\sqrt{7}t) + K_2 \sin(0,5\sqrt{7}t))$. La présence de l'exponentielle à exposant $0,5 t$ prouve que le point fixe est instable repousseur, avec des trajectoires en spirale qui en sont issues. Plus précisément, si l'on prend une famille de solutions telle que $y = K e^{t/2} \cos(0,5\sqrt{7}t)$, on en déduit, grâce à $y' = x$: $x = K e^{t/2} (0,5 \cos(0,5\sqrt{7}t) - 0,5\sqrt{7} \sin(0,5\sqrt{7}t))$.

trajectoires sont invariantes mais leur sens est inversé. Cela se vérifie lors du tracé de l'écoulement (*figure 21*).

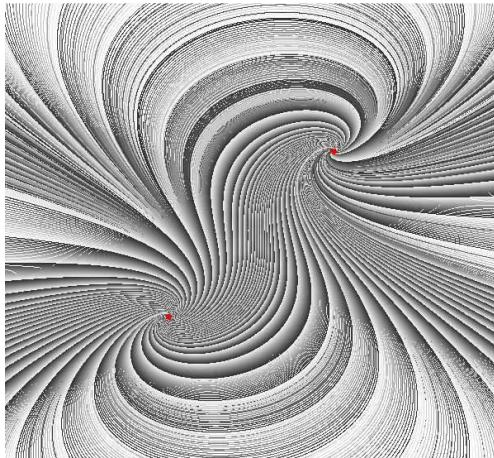


Figure 21 : Trajectoires dans l'espace de configuration, avec les points fixes en rouge.

Exercice 6 : Mouvement de tourbillons dans un fluide

Il ne s'agit plus ici d'équations différentielles, mais de voir sur un exemple révélateur à quelle condition la discréétisation d'un mouvement par découpage en petits intervalles de temps est valable. Cet exercice a pour but de montrer que la méthode d'Euler améliorée s'avère parfois nécessaire par rapport à la méthode classique, si l'on veut que la simulation sur ordinateur corresponde à la théorie et à la réalité. Elle s'avère aussi suffisante, dans la mesure où l'on peut choisir des intervalles de temps dt suffisamment petits tout en ayant une certaine rapidité d'exécution avec les ordinateurs d'aujourd'hui.¹⁷

Par définition, un tourbillon ponctuel dans un fluide en deux dimensions fait tourner le fluide autour de lui avec une vitesse v inversement proportionnelle à la distance r entre le centre du tourbillon et le point considéré du fluide, soit $v = k / r$, k étant une constante représentant la force du tourbillon. Plus on est près du coeur du tourbillon, plus la vitesse de rotation est grande. Par exemple, un tige que l'on tourne rapidement dans l'eau, comme dans un mixeur, crée un tourbillon. Sans avoir besoin de tige, des tourbillons naissent, se développent et se déplacent dans les fluides en mouvement, notamment dans le sillage provoqué par des obstacles.

Considérons un tourbillon placé en un point $A(x_0, y_0)$, et cherchons quel est le vecteur vitesse qu'il crée en un point quelconque $M(x, y)$. Le vecteur \mathbf{AM} , de longueur r , a pour coordonnées $(x - x_0, y - y_0)$ et le vecteur de longueur unité qui lui est associé est $((x - x_0) / r, (y - y_0) / r)$. Le vecteur unitaire qui se déduit de lui en tournant de $\pi / 2$ a pour coordonnées $(-(y - y_0) / r, (x - x_0) / r)$. Finalement le vecteur vitesse de longueur k / r a pour coordonnées $(-k(y - y_0) / r^2, k(x - x_0) / r^2)$.

Première expérience : Comparaison des méthodes de calcul dans le mouvement de tourbillons en interaction

Considérons deux tourbillons de même force k et tournant dans le même sens ($k > 0$ par exemple). Chacun provoque le mouvement de l'autre. Le tourbillon numéro 1 est soumis à la vitesse imprimée par le tourbillon numéro 2 et vice-versa. Sous cette influence réciproque et identique, les deux

¹⁷ Il existe aussi une méthode bien plus performante, d'ordre 4 par rapport à l'ordre 2 de la méthode d'Euler améliorée. Il s'agit de la méthode de Runge-Kutta, mais celle-ci nécessite une densité de calculs bien supérieure, ce qui en limite la portée.

tourbillons vont se déplacer sur un cercle en restant toujours aux extrémités d'un diamètre. Il en est de même si, au lieu de deux tourbillons, on en prend plusieurs disposés régulièrement sur un cercle. Programmer ce mouvement, en utilisant d'abord la méthode d'Euler, puis la méthode d'Euler améliorée, pour constater l'avantage de la deuxième sur la première.

Dans le programme qui suit, utilisant la méthode d'Euler, nous avons pris $N = 6$ tourbillons régulièrement disposés sur un cercle de rayon unité, chacun ayant une force $k = 1$. Pour mieux voir les erreurs provoquées par cette méthode, nous avons choisi un intervalle de temps dt exceptionnellement grand, ici $dt = 0,1$. On assiste alors à un mouvement en spirale des tourbillons, au lieu d'un déplacement immuable sur un cercle (figure 2).

```

theta=2.*M_PI/(double)N;
for(i=0;i<N;i++) { x[i]=cos(i*theta); y[i]=sin(i*theta); } /* coordonnées des N tourbillons au départ */
for (compteur=0;compteur<200;compteur++) /* boucle d'évolution dans le temps */
{ for (i=0;i<N;i++) { vx[i]=0. ; vy[i]=0. ; } /* mise initiale à 0 des vecteurs vitesse de chaque tourbillon */
  for (m=0;m<N;m++) for(n=0;n<N;n++) if (n!=m) /* tourbillon m soumis aux n autres tourbillons */
    { rcarre=(x[m]-x[n])*(x[m]-x[n])+(y[m]-y[n])*(y[m]-y[n]);
      vx[m]+=(y[n]-y[m])/rcarre; vy[m]+=(x[m]-x[n])/rcarre; /* vitesse des tourbillons par cumul */
    }
  for (i=0;i<N;i++) { oldx[i]=x[i];oldy[i]=y[i]; } /* anciennes positions des tourbillons */
  for (i=0;i<N;i++) { x[i]+=vx[i]*dt; y[i]+=vy[i]*dt; } /* nouvelles positions */
  dessin(); /* tracé de segments entre les anciennes positions et les nouvelles */
  if (compteur%20==19) {SDL_Flip(screen);pause();} /* pour visualiser les mouvements par morceaux */
}

void dessin(void)
{ int i,xe,ye,oldxe,oldye;
  for(i=0;i<N;i++)
  { oldxe=xorig+zoom*oldx[i]; oldye=yorig-zoom*oldy[i];
    xe=xorig+zoom*x[i]; ye=yorig-zoom*y[i];
    line(oldxe,oldye,xe,ye,black);
  }
}

```

Par contre, avec la méthode d'Euler améliorée, et en gardant le même $dt = 0,1$, on constate que les déplacements se font bien sur un cercle, du moins durant les premiers tours, car ensuite, le cercle aura aussi tendance à grossir peu à peu, à cause des petites erreurs cumulées. Finalement, on peut considérer que la méthode d'Euler améliorée donne un bon résultat, même au bout d'un temps assez long, le déplacement se faisant toujours sur le même cercle, si l'on prend un intervalle de temps assez petit, comme $dt = 0,001$, ce que nous ferons par la suite.

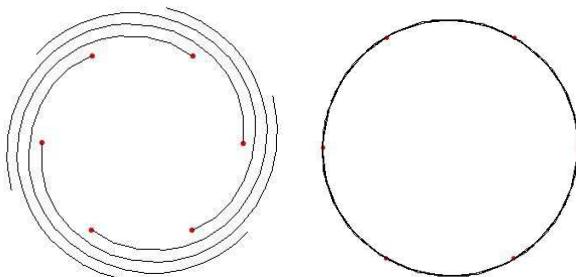


Figure 2 : Début du mouvement obtenu par la méthode d'Euler à gauche, et par la méthode d'Euler améliorée à droite.

Deuxième expérience : Visualisation du mouvement des tourbillons dans le champ des vecteurs vitesses

Dans le programme qui suit, nous utilisons la méthode d'Euler améliorée, avec $dt = 0,001$ et $N = 5$. Le résultat obtenu est montré sur la figure 3.

```

theta=2.*M_PI/(double)N;
for(i=0;i<N;i++) { x[i]=cos(i*theta); y[i]=sin(i*theta); }
for(i=0;i<N;i++) filldisc(xorig+zoom*x[i],yorig-zoom*y[i],2,red);
for (compteur=0;compteur<20000;compteur++) /* boucle d'évolution à chaque dt */
{ for (i=0;i<N;i++) { vx[i]=0.; vy[i]=0.; } /* calcul de la vitesse vx, vy des tourbillons en x, y */
  for (m=0;m<N;m++) for(n=0;n<N;n++) if (n!=m)
    { rcarre=(x[m]-x[n])*(x[m]-x[n])+(y[m]-y[n])*(y[m]-y[n]);
      vx[m]+=(y[n]-y[m])/rcarre; vy[m]+=(x[m]-x[n])/rcarre;
    }
  for (i=0;i<N;i++) { nx[i]=x[i]+vx[i]*dt; ny[i]=y[i]+vy[i]*dt; } /* nouvelles positions nx, ny */
  for (i=0;i<N;i++) { vvx[i]=0.; vvy[i]=0.; }
  for (m=0;m<N;m++) for(n=0;n<N;n++) if (n!=m) /* nouvelles vitesses pour les tourbillons en nx, ny */
    { rcarre=(nx[m]-nx[n])*(nx[m]-nx[n])+(ny[m]-ny[n])*(ny[m]-ny[n]);
      vvx[m]+=(ny[n]-ny[m])/rcarre; vvy[m]+=(nx[m]-nx[n])/rcarre;
    }
  for(i=0;i<N;i++) /* nouvelles positions nnx, nny, grâce à la méthode d'Euler améliorée */
  { nnx[i]=x[i]+0.5*(vx[i]+vvx[i])*dt; nny[i]=y[i]+0.5*(vy[i]+vvy[i])*dt;
  }
  for(i=0;i<N;i++)
  { xe=xorig+zoom*nnx[i]; ye=yorig-zoom*nny[i]; filldisc(xe,ye,5,black); /* dessin des tourbillons */
  }
for(xe=150;xe<=650;xe+=25) for(ye=80;ye<=520;ye+=25) /* points régulièrement espacés sur l'écran */
{ xx=(xe-xorig)/zoom; yy=(yorig-ye)/zoom; filldisc(xe,ye,1,red);
  for (i=0;i<N;i++) { vxx=0.; vyy=0.; } /* vecteurs vitesses vxx, vyy en chacun des points */
  for(i=0;i<N;i++)
  { rcarre=(xx-x[i])*(xx-x[i])+(yy-y[i])*(yy-y[i]); vxx+=(y[i]-yy)/rcarre; vyy+=(xx-x[i])/rcarre;
  }
  flag=0;
  for(i=0;i<N;i++) /* dessin des vecteurs vitesses quand ils ne sont pas trop près des tourbillons */
  if (fabs(xorig+zoom*nnx[i]-xe)<20 && fabs(yorig-zoom*nny[i]-ye)<20) flag=1;
  if (flag==0) arrow(xe,ye,xe+7.*vxx,ye-7.*vyy,red); /* vecteurs sous forme de flèches */
}
SDL_Flip(screen);if (compteur==5000) pause();SDL_FillRect(screen,0,white);
for (i=0;i<N;i++)
{ x[i]=nnx[i]; y[i]=nny[i]; } /* actualisation des positions des tourbillons à chaque étape de temps dt */
}

void dessin(void) /* fonction auxiliaire pour dessiner les tourbillons */
{ int i,xe,ye,nxe,nye;
  for(i=0;i<N;i++)
  { xe=xorig+zoom*x[i]; ye=yorig-zoom*y[i]; /* position actuelle */
    nxe=xorig+zoom*nnx[i]; nye=yorig-zoom*nny[i]; /* position nouvelle */
    line(xe,ye,nxe,nye,black);
  }
}

```

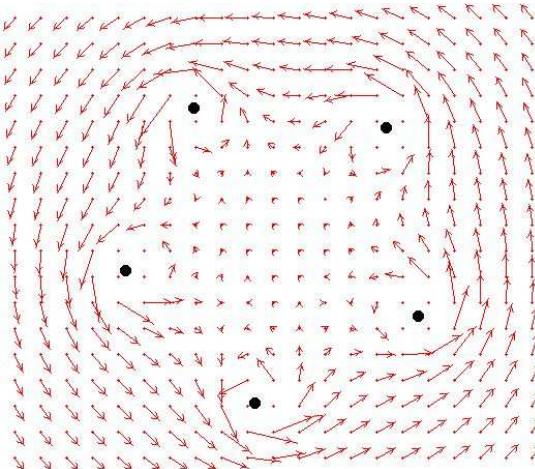


Figure 3 : Visualisation de 5 tourbillons dans le champ de vitesses qu'ils ont créé.

Troisième expérience : Stabilité ou instabilité du mouvement

Vérifier expérimentalement la propriété découverte en 1883 par le physicien J.L. Thompson, qui plus tard découvrit aussi l'élection : le mouvement des N tourbillons est stable lorsque $N < 7$, même si l'on écarte légèrement un tourbillon hors du cercle où les autres sont régulièrement disposés. Par contre il devient instable dès que $N \geq 7$.

En utilisant le même style de programme que précédemment, en ajoutant une traînée derrière chacun des tourbillons, on constate bien que le mouvement reste stable pour $N = 6$, après un grand nombre de tours, tandis qu'il finit par devenir instable pour $N = 7$, et encore plus nettement pour $N = 8$ (figure 4).

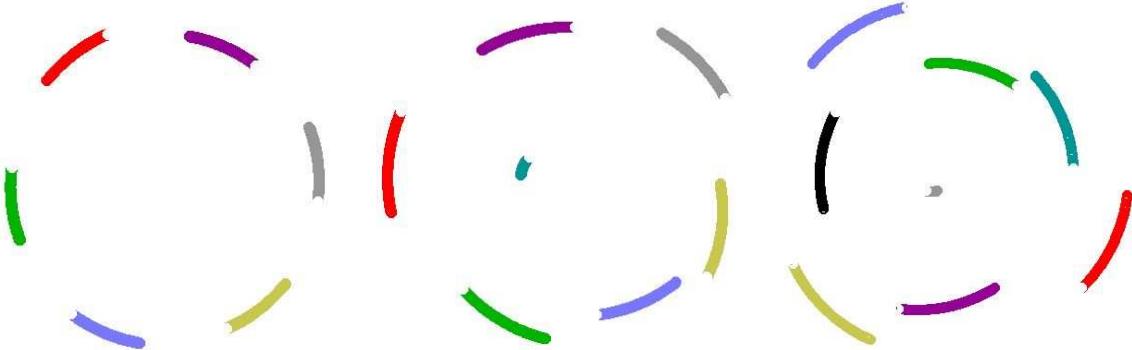


Figure 4 : Position des tourbillons après un grand nombre de tours, pour $N = 6$, puis 7 puis 8, de gauche à droite.