

# Pavages hyperboliques

Nous abordons ici ce qui est l'objectif principal de notre étude : les pavages. Cela sera fait en deux temps. Nous commencerons par la fabrication concrète de plusieurs types de pavages, qui ne nécessitent pas de connaissances théoriques approfondies. Puis nous en verrons l'aspect théorique sous une forme simplifiée, avec les groupes fuchsien et les domaines fondamentaux<sup>1</sup>.

## 1. Pavage par des polygones réguliers isométriques

Si l'on se restreint à des pavages par des polygones réguliers isométriques, on sait qu'en géométrie euclidienne, il n'existe que trois types de pavages : par des triangles équilatéraux, par des carrés et par des hexagones réguliers. En géométrie hyperbolique, nous allons voir qu'il en existe une infinité : tout polygone régulier à  $n$  côtés pave le plan hyperbolique. Ce qui montre la richesse de cette géométrie dans le domaine des pavages.

On dispose de la propriété suivante :

Il existe un pavage du plan hyperbolique par des polygones réguliers à  $n$  côtés isométriques ( $n \geq 3$ ), avec  $k$  polygones autour de chaque sommet, si et seulement si

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{k} < \frac{1}{2}$$

Pour démontrer cela, supposons d'abord qu'un tel pavage existe. Les angles du polygone sont tous égaux à  $2\pi/k$ . Son aire est  $S = (n-2)\pi - n \cdot 2\pi/k$ . Elle doit être positive, soit  $(n-2)\pi - n \cdot 2\pi/k > 0$ , ou  $n-2 - 2n/k > 0$ , et après avoir divisé par  $n$ , on a bien  $\frac{1}{n} + \frac{1}{k} < \frac{1}{2}$ .

Inversement, supposons que l'on ait  $\frac{1}{n} + \frac{1}{k} < \frac{1}{2}$ . Plaçons-nous dans le disque  $\mathbf{D}$ , et traçons les rayons joignant le centre  $O$  aux points  $e^{i2q\pi/n}$  avec  $q$  de 0 à  $n-1$ . En prenant les  $n$  points situés sur ces rayons tous à une même distance hyperbolique  $R$ , on obtient tous les polygones réguliers à  $n$  côtés. Lorsque  $R$  va de 0 à l'infini, les angles  $\alpha$  de ces polygones réguliers vont de  $\pi - 2\pi/n$  à 0 en décroissant continûment. Notamment, lorsque  $R$  est proche de 0, le polygone est quasiment euclidien, et en le découpant en  $n$  triangles, on a bien dans chaque triangle  $\alpha/2 + \alpha/2 + 2\pi/n = \pi$ , soit  $\alpha = \pi - 2\pi/n$ . Avec  $\frac{1}{n} + \frac{1}{k} < \frac{1}{2}$ , on a aussi  $0 < 2\pi/k < \pi - 2\pi/n$ . Cela prouve que cette valeur est atteinte par  $\alpha$  lorsque  $R$  va de 0 à l'infini. Il existe donc un polygone régulier unique avec  $n$  côtés et des angles égaux à  $2\pi/k$ . Par réflexions successives autour des côtés, on peut entourer ce polygone par d'autres polygones isométriques, ce qui donne  $k$  polygones autour de chaque sommet du polygone initial. Mais il resterait à prouver qu'en continuant le processus indéfiniment, on obtient bien un pavage du disque  $\mathbf{D}$ .<sup>2</sup> Nous ne le ferons pas ici, même si le cas que nous traitons ci-dessous à propos des triangles équilatéraux est facilement généralisable.

Suivant les valeurs de  $n$ , on en déduit les contraintes sur  $k$ .

- \* Pour  $n = 3$ , on trouve  $k \geq 7$ .
- \* Pour  $n = 4$ , on a  $k \geq 5$
- \* Pour  $n = 5$  et  $n = 6$ , on a  $k \geq 4$
- \* Pour  $n \geq 7$ , on a  $k \geq 3$ .

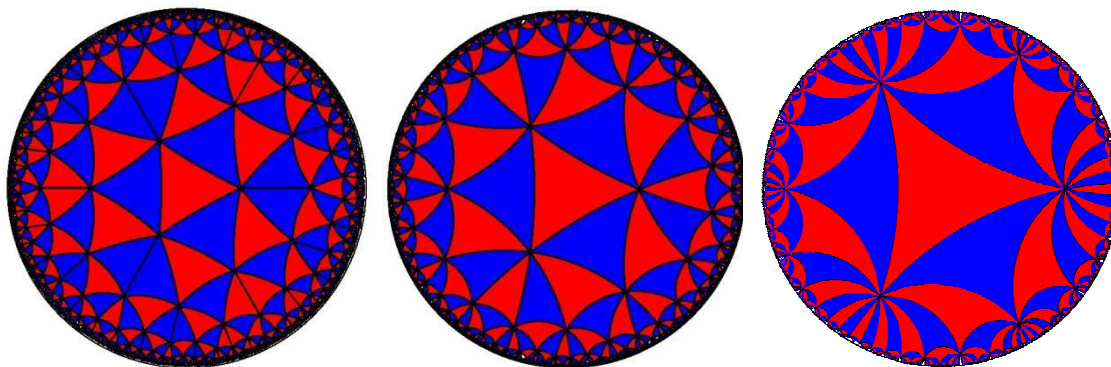
<sup>1</sup> Les documents [WAL2019] et [SER2013] nous ont servis de références dans ce domaine. On pourra se reporter aux chapitres qui précèdent celui-ci dans [www.pierreaudibert.fr](http://www.pierreaudibert.fr) dans travaux exploratoires, géométrie hyperbolique.

<sup>2</sup> Une démonstration est donnée dans C. Caratheodory, *Theory of Functions*, vol. II, Chelsea, 1960.

Notamment, les polygones réguliers ayant tous leurs angles droits existent dès que  $n \geq 5$ , à la différence de la géométrie euclidienne où le seul polygone régulier à angles droits est le carré. Nous allons d'abord étudier précisément le cas le plus simple, celui du triangle équilatéral.

## 1.1. Pavage par des triangles équilatéraux

Quelques exemples de pavages sont donnés sur la *figure 1*, avec notamment le cas minimal où  $k = 7$ . Il reste à expliquer comment les construire.



*Figure 1* : Pavage à base de triangles équilatéraux isométriques, avec des angles de  $2\pi/7$  ( $k = 7$ ),  $\pi/4$  ( $k = 8$ ), et de  $\pi/8$  ( $k = 16$ ) de gauche à droite.

### 1.1.1. Construction par numérotation des triangles

Partons d'un triangle équilatéral  $ABC$  centré en  $O$ , avec par exemple des angles de  $\pi/4$ . Puis prenons ses trois symétriques, en notant 0 (ou 0') celui symétrique par rapport à la droite  $(BC)$  notée aussi 0, 1 (ou 1') celui par rapport à la droite  $(CA)$  notée 1, et 2 (ou 2') celui par rapport à la droite  $(AB)$  notée 2. Re commençons à partir de ses trois triangles 0, 1, 2 en prenant leurs symétriques par rapport à leurs côtés. Par exemple le triangle 2 (ou 2') a pour symétriques deux nouveaux triangles que nous pouvons noter  $\rightarrow 2'0'$  et  $\rightarrow 2'1'$  (lecture gauche-droite) : ainsi  $\rightarrow 2'0'$  indique que nous avons fait une réflexion autour du 2 (ou 2'), soit  $(AB)$ , suivie d'une réflexion du triangle 2 autour du côté 0' qui est l'image de 0. On trouve ainsi 6 nouveaux triangles qui s'écrivent avec deux chiffres. Et l'on continue de cette façon, en prenant les triangles symétriques par rapport à ceux que nous venons d'obtenir. Les symétries se font chaque fois par rapport aux côtés des nouveaux triangles, c'est pourquoi nous les notons avec des « ' », à la différence des réflexions 0,1,2 correspondant aux côtés du triangle  $ABC$  initial. Cette construction progressive est particulièrement simple, comme on le constate sur la *figure 2*, où l'on trouve 12 triangles à trois chiffres. On aurait aussi 21 nouveaux triangles à quatre chiffres qui sont les images de ceux à trois chiffres, puis 36 à cinq chiffres, etc. Il suffit à chaque étape de dessiner les nouveaux triangles par rapport aux trois côtés des précédents, en évitant de redessiner ceux qui le sont déjà.<sup>3</sup> Chaque sommet d'un nouveau triangle finit toujours par être entouré de 8 triangles, et l'on obtient sans conteste un pavage du plan hyperbolique. On parle aussi de pavage kaléidoscopique, à cause de cette succession indéfinie de réflexions.

Prenons par exemple un triangle portant le numéro  $A$  qui est un nombre constitué de  $n$  chiffres 0', 1', 2', ce numéro se terminant par exemple par 2'. Si l'on prend le sommet opposé au côté 2', ce sommet a pour côtés 0' et 1', et les 8 triangles qui l'entourent sont  $A, A0', A0'1', A0'1'0', A0'1'0'1', A0'1'0'1'0', A0'1'0'1'0'1',$  et  $A0'1'0'1'0'1'0'1'$  (avec  $A0'1'0'1'0'1'0'1'0'1' = A$  puisque  $(0'1')^4 = Id$ ).

<sup>3</sup> Dans la programmation, les numéros des triangles sont obtenus en construisant tous les mots de longueur 1, 2, 3, etc., à base des trois chiffres 0, 1, 2.

Mais peut-on obtenir les mêmes triangles en n'utilisant que les trois réflexions 0, 1, 2, celles d'axes (BC), (CA) et (AB) ? La réponse est oui.

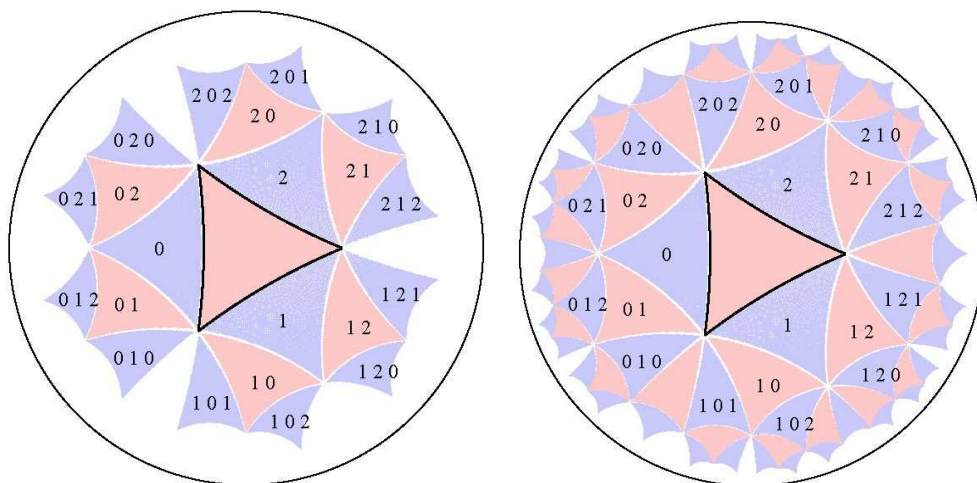


Figure 2 : A gauche numérotation des premiers triangles du kaléidoscope. En lecture gauche-droite, ils correspondent aux réflexions successives sur les côtés des triangles. En lecture droite-gauche, ils correspondent aux réflexions par rapport aux trois axes formant les côtés du triangle ABC initial. A droite sont ajoutés sans numérotation les triangles à 4 chiffres et ceux à 5 chiffres.

Prenons par exemple le triangle  $\rightarrow 2'0'1'$ . On a  $2' = 2$ , et  $0' = \rightarrow 202$ <sup>4</sup>, d'où  $\rightarrow 2'0' = 2\ 202 = \rightarrow 02 = \leftarrow 20$ . Autrement dit, faire  $2'$  puis  $0'$  revient à faire 0 puis 2. Ensuite  $1' = \rightarrow 20\ 1\ 02$  et  $\rightarrow 2'0'1' = \rightarrow 02\ 20\ 1\ 02 = \rightarrow 102 = \leftarrow 201$ . Finalement, faire une succession de réflexions, lues de gauche à droite, autour des axes relatifs des triangles images revient à faire la même succession de réflexions, mais de droite à gauche, autour des axes absolus, ceux du triangle initial.

Les trois réflexions 0, 1, 2 engendrent un groupe infini de transformations, formé des composées de ces trois réflexions. Lorsque le nombre de composées est pair, on a une isométrie directe et lorsqu'il est impair, on a une isométrie indirecte, avec parmi elles toutes les réflexions autour des axes images des axes initiaux (figure 3). On notera que le pavage est globalement invariant par rapport à n'importe laquelle des réflexions autour de ces axes.

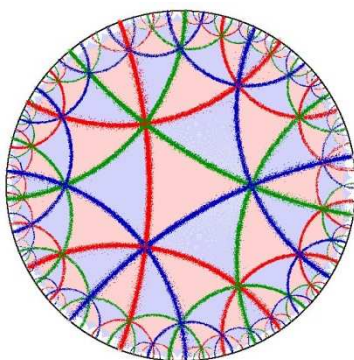


Figure 3 : Les axes des réflexions initiaux autour du triangle central (0 en rouge, 1 en bleu et 2 en vert) ainsi que leurs images par composition. Ils délimitent les triangles du pavage, dans l'ordre rouge, bleu, vert pour les isométries directes, et rouge, vert, bleu pour les isométries indirectes.

<sup>4</sup> C'est une propriété classique de la conjugaison. Prenons un point  $M$  et son image  $M'$  par la réflexion  $0'$  (dans le triangle  $2'0'$ ). Cela revient à commencer par envoyer  $M$  en  $M_1$  par 2, afin d'être dans le triangle initial, puis à faire la réflexion autour de 0, d'où  $M'_1$ , et enfin à faire la réflexion autour de 2 pour envoyer  $M'_1$  en  $M'$ , d'où  $0' = \rightarrow 202$ .

### 1.1.2. Passage d'un kaléidoscope à un autre, à base des mêmes triangles équilatéraux

Le triangle équilatéral  $ABC$  de centre  $O$ , qui était le point de départ du kaléidoscope précédent, peut être transformé par *réflexion* en un triangle isométrique dont un sommet est situé en  $O$  (*figure 4 en haut*). Sous l'effet de cette réflexion, on trouve un nouvel aspect du même pavage par des triangles équilatéraux.

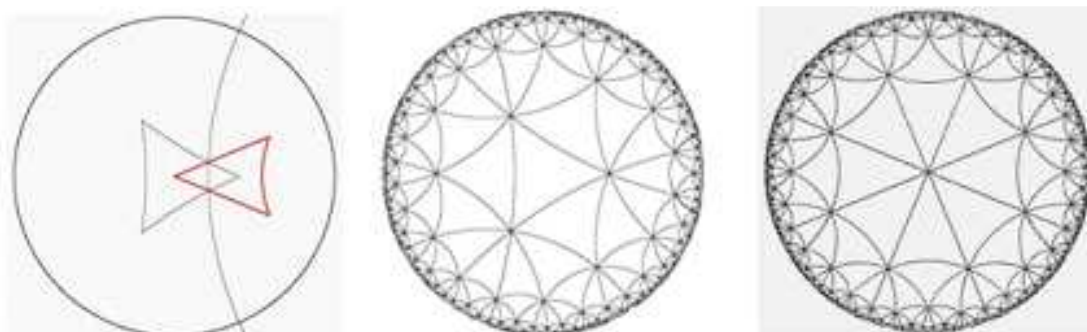


Figure 4 : A gauche le triangle équilatéral central, et son image en rouge par réflexion, au centre et à droite passage du pavage issu du triangle équilatéral central à celui obtenu par réflexion.

### 1.1.3. Le cas limite du triangle équilatéral à angles nuls et la formation d'infinigones

Lorsque les sommets  $A$ ,  $B$ ,  $C$  du triangle équilatéral tendent vers le cercle limite du disque de Poincaré, ses angles tendent à devenir nuls. Plaçons-nous dans ce cas limite, et traçons dans ce triangle les trois parties de *médiatrices* issues du centre  $O$ . Il s'agit de segments de même longueur, séparés par des angles de  $2\pi/3$ . Ce motif est ensuite reproduit à l'échelle infinie des réflexions. On obtient alors des polygones réguliers avec des angles de  $120^\circ$ , et leurs côtés sont en nombre infini. D'où le concept d'infinigone. Ces polygones spécifiques à la géométrie hyperbolique sont montrés sur la *figure 5*.

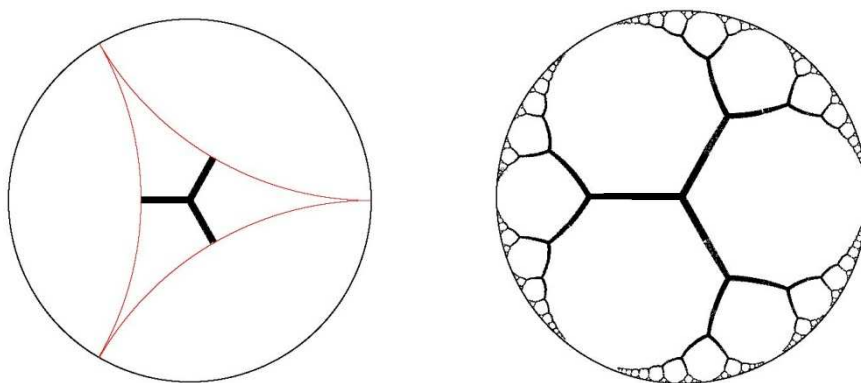


Figure 5 : A gauche, le motif formé des trois médiatrices dans le triangle équilatéral à angles nuls, à droite le pavage aboutissant à des polygones réguliers ayant une infinité de côtés.

## 1.2. Cas des polygones réguliers ayant plus de trois côtés

Ce que nous avons fait avec les triangles équilatéraux, nous pouvons le refaire pour tous les autres polygones réguliers. On utilise toujours la méthode des réflexions successives autour des côtés des polygones progressivement construits. Cela se ramène aussi à faire des composées des  $n$  réflexions associées aux  $n$  côtés du polygone central initial. On trouvera ci-dessous un certain nombre d'exemples, sur la *figure 6*.



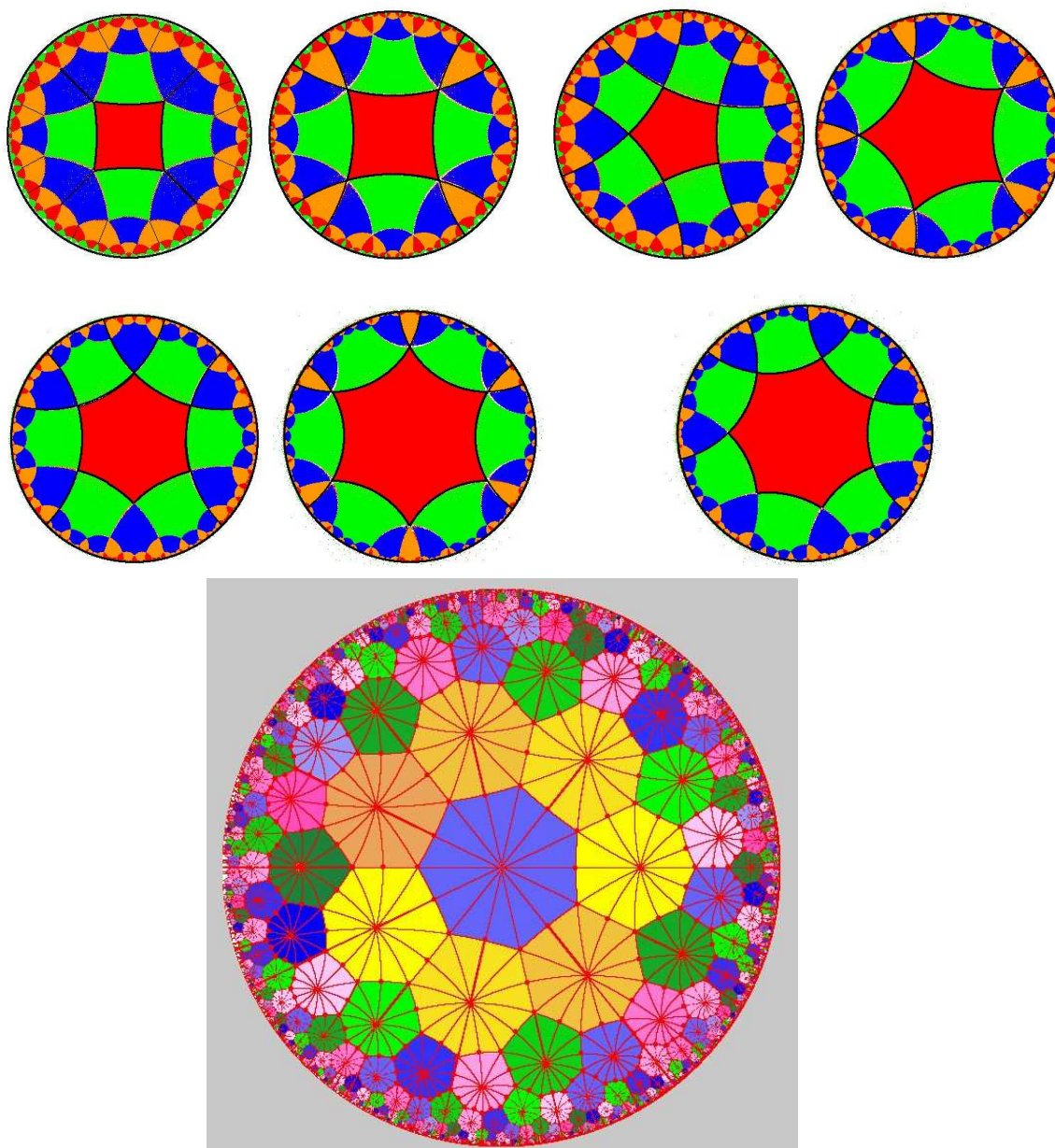


Figure 6 : En haut, pavages par des quadrilatères réguliers pour  $k = 5$  et  $k = 6$ , puis par des pentagones réguliers pour  $k = 4$  (pentagones à angles droits) et  $k = 6$ . En-dessous, pavages par des hexagones réguliers pour  $k = 4$  (hexagones à angles droits) et pour  $k = 6$ , puis par des heptagones réguliers pour  $k = 4$  (angles droits). En bas, pavage par des heptagones réguliers pour  $k = 3$ , chacun étant en plus découpé en 14 triangles rectangles isométriques.

## 2. Pavages par des triangles isométriques

A partir d'un triangle quelconque, nous allons procéder par réflexions autour de ses trois côtés et cela de façon répétée indéfiniment, ce qui donnera un pavage par des triangles isométriques. Cela s'appelle un pavage kaléidoscopique ou une triangulation-réflexion. Il existe une condition nécessaire<sup>5</sup> pour qu'un tel pavage existe. En chaque sommet du pavage doivent en effet se trouver des triangles en éventail obtenus par réflexions successives. En supposant que les triangles ne sont pas isocèles, le nombre de triangles doit être pair en chaque sommet. Sinon l'éventail des triangles ne se refermerait pas (figure 7). Avec  $2m$  triangles autour d'un sommet,  $2n$  triangles autour d'un autre et  $2p$  triangles autour du troisième, cela impose que les trois angles du triangle soient  $\pi/m$ ,  $\pi/n$  et  $\pi/p$  avec  $m, n, p$

<sup>5</sup> En fait, cette condition n'est nécessaire que pour des triangles ayant des côtés de longueur différente.

entiers positifs. Sachant que la somme des angles d'un triangle hyperbolique est inférieure à  $\pi$ , cela donne la condition

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} < 1 \text{ avec } m, n, p \text{ entiers supérieurs à } 1.$$

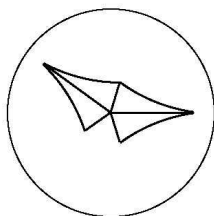


Figure 7 : L'éventail de triangles isométriques autour d'un sommet ne se referme pas si l'on prend un angle  $2\pi/n$  avec  $n$  impair, comme ici  $n = 5$ .

Cette contrainte sur les angles, d'où découlent les longueurs des côtés, va cependant offrir une infinité de choix de triangles pouvant paver le plan hyperbolique. On démontre que cette condition est aussi suffisante. Et l'on a le résultat suivant :

En géométrie hyperbolique, tout triangle équilatéral, tout triangle isocèle dont les angles sont  $2\pi/m$ ,  $\pi/n$  et  $\pi/n$  ( $m \geq 3$ ,  $n \geq 3$ ), tout triangle à côtés de longueurs différentes dont les trois angles sont  $\pi/m$ ,  $\pi/n$  et  $\pi/p$  avec  $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} < 1$  ( $m, n, p$ , entiers avec  $m \geq 2$ ,  $m < n < p$ ) peut créer un pavage

kaléidoscopique du plan par réflexions successives autour des côtés. Il existe alors une infinité de formes de triangles susceptibles de paver le plan de cette façon, mais leur taille est déterminée par leurs angles, et le plus petit triangle qui peut être obtenu a une aire égale à  $\pi/42$ . C'est complètement différent de ce qui se passe en géométrie euclidienne où il n'existe que quatre formes de triangles permettant un pavage kaléidoscopique, mais ceux-ci peuvent être aussi petits ou aussi grands qu'on le désire.

Pourquoi cette limite inférieure  $\pi/42$  ? Pour un triangle équilatéral, l'aire minimale est  $\pi/7$ . Pour un triangle isocèle (non équilatéral), l'aire minimale est  $\pi/21$ .<sup>6</sup> Pour un triangle non isocèle, l'aire est minimale lorsque la somme des angles est maximale, soit  $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}$  maximal. Plus précisément, il

s'agit de montrer que  $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} \leq \frac{41}{42}$ . Le fait que l'aire soit positive impose que  $1/m + 1/n + 1/p < 1$ .

Supposons que  $m < n < p$  avec  $m \geq 2$ . Si l'on prend  $m = 4$  (ou  $m \geq 4$ ), la valeur maximale est  $1/4 + 1/4 + 1/4 = 3/4 < 41/42$ . Si l'on prend  $m = 3$ , la valeur maximale est obtenue pour  $n = 4$  et  $p = 5$ , ce qui donne  $1/3 + 1/4 + 1/5 = 47/60 < 41/42$ . Prenons enfin  $m = 2$ . Si  $n = 4$  (ou  $n \geq 4$ ), la valeur maximale est obtenue pour  $p = 5$ , soit  $1/2 + 1/4 + 1/5 = 19/20 < 41/42$ . Il reste  $n = 3$ , ce qui donne  $1/m + 1/n = 5/6$ . Avec  $5/6 + 1/p < 1$ , la valeur de  $p$  la plus petite est alors  $1/7$ , et  $1/2 + 1/3 + 1/7 = 41/42$ . L'aire minimale correspondante est  $\pi - \pi(1/2 + 1/3 + 1/7) = \pi/42$ .

Nous avons déjà vu le cas du triangle équilatéral. Nous allons maintenant passer en revue d'autres formes de triangles.

<sup>6</sup> Si l'on accepte que le triangle soit isocèle, on peut avoir un nombre impair de triangles autour d'un seul sommet, et la contrainte devient  $2/m + 1/n + 1/n < 1$  avec  $m$  impair, soit  $1/m + 1/n < 1/2$ . Pour avoir l'aire minimale, on prend d'abord  $m = 3$ , puis  $n = 7$ , d'où une aire égale à  $\pi - 20\pi/21 = \pi/21$ , et l'on peut vérifier que c'est l'aire minimale quel que soit  $m$ . Dans le cas d'un triangle équilatéral, avec un angle de  $2\pi/p$ , la contrainte devient  $6/p < 1$ , soit  $p \geq 7$ , comme on l'a vu, et l'aire minimale est  $\pi - 6\pi/7 = \pi/7$ .

## 2.1. Pavage par des triangles isocèles rectangles

Avec un angle de  $\pi/2$ , la contrainte sur les angles impose que les deux angles égaux à  $\pi/n$  soient tels que  $n \geq 5$ . On trouve deux exemples de pavages sur la *figure 8*.

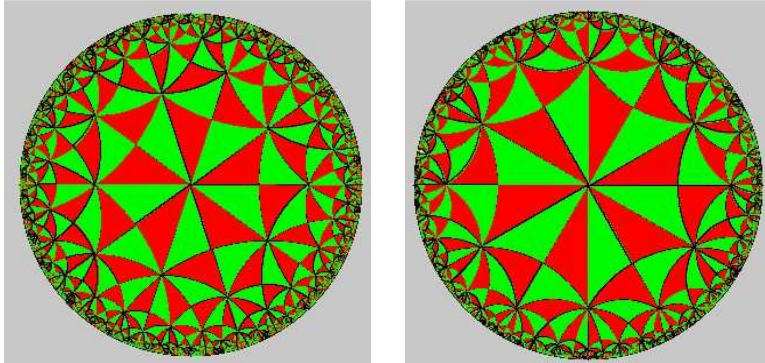


Figure 8 : Pavages par des triangles rectangles isocèles avec deux angles égaux à  $\pi/5$  à gauche et  $\pi/6$  à droite.

## 2.2. Pavages par des triangles rectangles

Avec un angle droit, la contrainte sur les deux autres angles  $\pi/n$  et  $\pi/p$  devient  $1/n + 1/p < 1/2$ . Pour  $n = 3$ , valeur minimale de  $n$ , cela donne  $p \geq 7$ , et pour  $n = 4$ ,  $p \geq 5$ , etc. (*figure 9*). Rappelons que le cas où  $n = 3$  et  $p = 7$  est le cas où le triangle pavant le plan a l'aire minimale  $\pi/42$ .

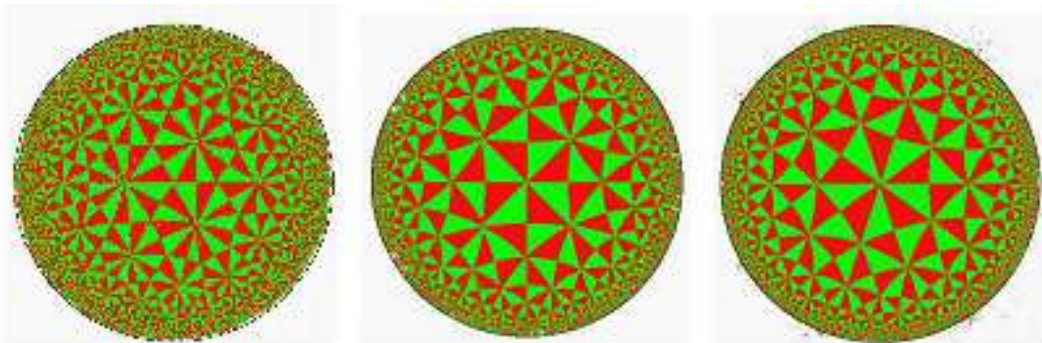


Figure 9 : Pavages par des triangles rectangles pour  $n = 3$  et  $p = 7$  à gauche, pour  $n = 4$  et  $p = 5$  (et  $n = 5$ ,  $p = 4$ ) au centre et à droite, ces deux pavages étant identiques, même s'ils paraissent différents.

## 2.3. Pavages par des triangles quelconques

La contrainte  $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} < 1$  permet notamment  $m = 3$ ,  $n = 4$  et  $p \geq 5$ , ou  $m = 4$ ,  $n = 5$  et  $p \geq 6$ , etc.

Quelques-uns de ces cas sont montrés sur la *figure 10*. Signalons que pour la construction d'un triangle quelconque en connaissant ses trois angles, on peut soit appliquer les formules trigonométriques donnant les côtés en fonction des angles, ou procéder par des constructions purement géométriques<sup>7</sup>.

<sup>7</sup> Ces formules obtenues par des considérations géométriques sont données dans [AUD2013].



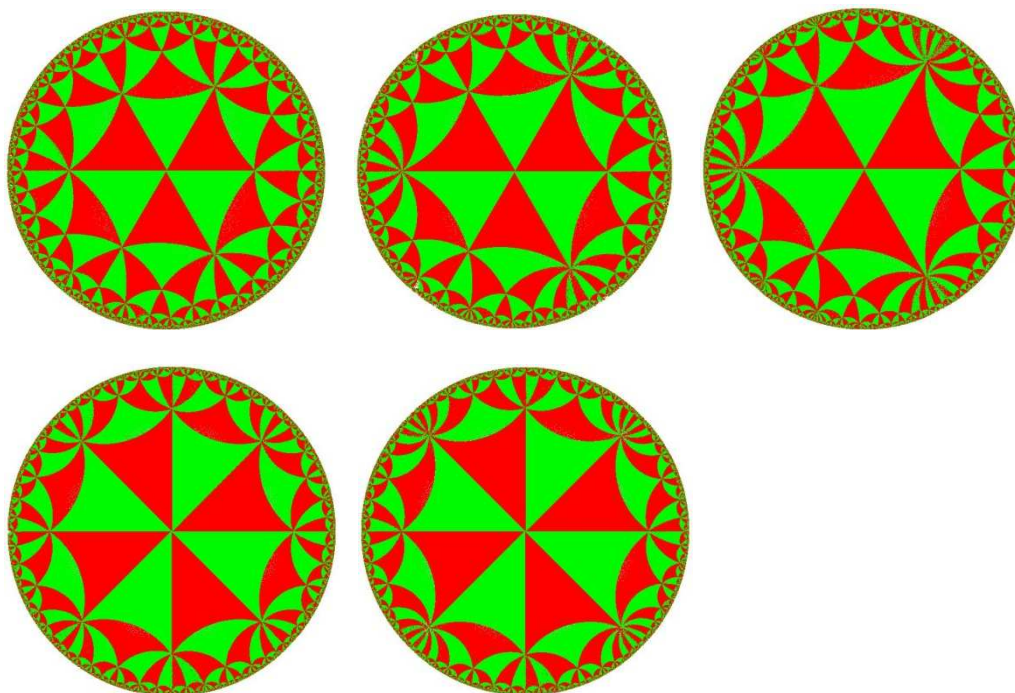


Figure 10 : Pavages par des triangles quelconques pour  $m = 3, n = 4$  et  $p = 5, 7, 9$  en haut, pour  $m = 4, n = 5, p = 6, 8$  en bas.

### Exercice 1 : Pavages kaléidoscopiques par des polygones non-réguliers

A partir des pavages précédents par des triangles quelconques, on constate que l'on peut regrouper les triangles en éventail par groupes de  $2m$  triangles. On obtient alors des polygones à côtés de même longueur, mais avec des angles en alternance et  $2\pi/n$  et  $2\pi/p$ , et qui par là-même ne sont plus réguliers. Visualiser ces pavages.

Il suffit d'aménager ce que l'on a fait avec un triangle quelconque. On obtient ainsi de nouveaux pavages kaléidoscopiques par des polygones qui ne sont plus tout à fait réguliers à cause de leurs angles égaux seulement de deux en deux par alternance. Par exemple, à partir d'un triangle d'angles  $\pi/3, \pi/4$  et  $\pi/8$ , on obtient le pavage polygonal de la figure 11.

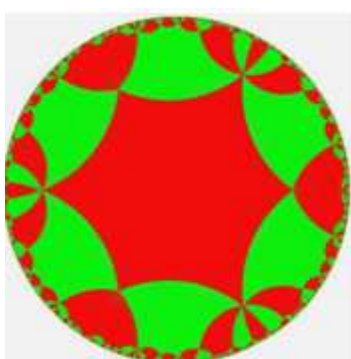


Figure 11 : Pavage à partir d'un polygone à 6 côtés égaux mais avec des angles de  $\pi/2$  et  $\pi/4$  en alternance.

Nous en resterons là sur les pavages kaléidoscopiques. Nous allons maintenant élargir la notion de pavages par des polygones isométriques sous sa forme théorique, celle que H. Poincaré a développée avec son étude stupéfiante sur les groupes fuchsien.



### 3. Groupe fuchsien

Rappelons que le groupe des isométries directes de  $\mathbf{H}$ ,  $Isom^+(\mathbf{H})$ , est constitué des transformations de Mobius  $M$  telles que  $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  avec  $a, b, c, d$  réels et  $ad - bc > 0$ , et que celui des isométries

directes de  $\mathbf{D}$ ,  $Isom^+(\mathbf{D})$ , est formé des transformations de Mobius  $M$  telles que  $M(z) = \frac{Az+B}{Bz+A}$  avec  $|B| < |A|$ .

#### 3.1. Notion de groupe discret

Plaçons-nous par exemple dans  $Isom^+(\mathbf{H})$ , et normalisons les transformations en prenant  $ad - bc = 1$ . Deux transformations  $M$  et  $M'$  seront différentes sauf si  $M(z) = (az+b)/(cz+d)$  et  $M'(z) = (-a z - b)/(-c z - d)$ . On pourra dire que deux transformations sont proches si les quadruplets de nombres réels  $(a, b, c, d)$  ou  $(-a, -b, -c, -d)$  sont proches de  $(a', b', c', d')$  ou  $(-a', -b', -c', -d')$ . Cela signifie que nous définissons une notion de distance entre deux transformations de Mobius normalisées, soit

$$d(M, M') = \text{minimum}(\|(a, b, c, d) - (a', b', c', d')\|, \|(a, b, c, d) - (-a', -b', -c', -d')\|) \quad ^8$$

Prenons maintenant un sous-groupe de  $Isom^+(\mathbf{H})$  dont les éléments sont des transformations de Mobius  $M$ . On dira que la transformation  $M$  est isolée s'il existe un nombre positif  $\delta$  tel que pour toute autre transformation  $M'$  du sous-groupe on a  $d(M, M') > \delta$ . Ce qui revient à dire que  $M$  est isolée si elle est séparée de toutes les autres transformations par une distance non nulle.

Et l'on dira que le sous-groupe est discret si chacune des transformations est isolée. Cela nous permet de définir ce qu'est un groupe fuchsien.

#### 3.2. Définition d'un groupe fuchsien

Un groupe fuchsien est un sous-groupe discret de  $Isom^+(\mathbf{H})$  (ou  $Isom^+(\mathbf{D})$ ), ce qui signifie que toutes les transformations qui le constituent sont isolées.<sup>9</sup>

##### Exemples

\* Dans  $\mathbf{D}$ , considérons le groupe des rotations de centre  $O$  engendré par la rotation d'angle  $2\pi/n$  avec  $n$  entier positif. Il s'agit des transformations de Mobius de la forme  $M(z) = e^{i 2k\pi/n}$  avec  $k$  de 0 à  $n-1$ . Ce sous-groupe de  $Isom^+(\mathbf{D})$  est manifestement un groupe fuchsien, comme tout sous-groupe fini de  $Isom^+(\mathbf{D})$ .

\* Dans  $\mathbf{H}$ , le sous-groupe des translations entières  $M$  telles que  $M(z) = z + n$  (avec  $n$  dans  $\mathbf{Z}$ ) est un groupe fuchsien.<sup>10</sup>

\* Dans  $\mathbf{H}$ , le sous-groupe des transformations  $M$  telles que  $M(z) = 2^n z$  (avec  $n$  dans  $\mathbf{Z}$ ) est un groupe fuchsien.

<sup>8</sup> On utilise ici la métrique euclidienne sur  $\mathbf{R}^4$ , telle que

$$d((a, b, c, d), (a', b', c', d')) = \|(a, b, c, d) - (a', b', c', d')\| = \sqrt{|a-a'|^2 + |b-b'|^2 + |c-c'|^2 + |d-d'|^2}$$

<sup>9</sup> Cela revient à dire que le groupe n'a pas de point d'accumulation.

<sup>10</sup> Par contre, le sous-groupe des translations telles que  $M(z) = z + a$  avec  $a$  réel non nul n'est pas un groupe fuchsien.

\* Dans  $\mathbf{H}$ , le groupe modulaire  $PSL(2, \mathbf{Z})$ , formé des transformations  $M$  telles que  $M(z) = (az + b) / (cz + d)$  avec  $a, b, c, d$  dans  $\mathbf{Z}$  et  $ad - bc = 1$ , est un groupe fuchsien.

Les groupes fuchsien ont les caractéristiques suivantes, que nous admettrons ici :<sup>11</sup>

\*  $F$  est un groupe fuchsien si et seulement si la transformation  $Id$  est isolée.

\*  $F$  est un groupe fuchsien si et seulement si pour chaque élément  $z$  de  $\mathbf{H}$  (ou  $\mathbf{D}$ ) l'orbite<sup>12</sup> de  $z$  est un ensemble discret.

## Exercice 2 : Groupes fuchsien et non-fuchsien

1) En utilisant l'orbite d'un point  $z$  quelconque de  $\mathbf{H}$ , montrer que le sous-groupe des transformations  $M$  avec  $M(z) = 2^n z$  ( $n$  dans  $\mathbf{Z}$ ) est un groupe fuchsien.

Prenons un point  $z$  quelconque dans  $\mathbf{H}$ . Toutes ses images sont situées sur la demi-droite formant un angle de  $\text{Arg } z$  avec  $Ox$ . Choisissons une des images  $z' = 2^n z$ . On a  $|z'| = 2^n |z|$ . Les autres images ont des modules  $2^{n+1} |z|, 2^{n+2} |z|, \dots$ , et  $2^{n-1} |z|, 2^{n-2} |z|, \dots$ . L'image la plus proche de  $z'$  est  $2^{n-1} z$ , à une distance  $(2^n - 2^{n-1}) |z| = 2^{n-1} |z|$ . On a bien une orbite discrète pour chaque point  $z$  de  $\mathbf{H}$ . Le sous-groupe des transformations  $M$  est un groupe fuchsien.

2) Le groupe formé des translations  $t_a$  de la forme  $t_a(z) = z + a$  avec  $a$  dans  $\mathbf{R}$  est-il un groupe fuchsien ?

Non, car la transformation identité peut être approchée par les translations  $t_\varepsilon$  avec  $\varepsilon$  aussi proche de 0 que l'on veut. On n'a pas un groupe discret.

3) a) Considérons le groupe engendré par deux transformations de Mobius de  $\mathbf{H}$ , soit  $S$  et  $T$ ,  $S$  étant parabolique et  $T$  hyperbolique. Est-il fuchsien ? Pour le voir, utiliser notamment  $T^{-n} S T^n$ .

En pratiquant une conjugaison sur  $S$  et  $T$ , on peut toujours s'arranger pour que  $T$  s'écrive comme une dilatation  $T(z) = kz$  avec  $k$  réel  $> 0$  et  $k \neq 1$ .  $S$  s'écrit alors comme la translation  $S(z) = z + a$  avec  $a$  entier non nul.

Prenons d'abord  $k > 1$  et appliquons la transformation  $T^{-n} S T^n$  à un point  $z$  :

$$z \xrightarrow{T^n} z_1 = k^n z \xrightarrow{S} z_2 = k^n z + a \xrightarrow{T^{-n}} z' = k^{-n} (k^n z + a) = z + a / k^n$$

En prenant  $n$  suffisamment grand,  $a/k^n$  tend vers 0, et l'on trouve des transformations dans l'orbite de  $z$  qui donnent des points aussi près de  $z$  qu'on le désire. L'orbite de  $z$  n'est pas discrète, et le groupe n'est pas fuchsien. Si  $k$  est inférieur à 1, on fait de même en formant  $T^n S T^{-n}$ .

b) Soit  $F$  un groupe fuchsien et supposons qu'il contienne une transformation  $S$  parabolique et une transformation  $T$  hyperbolique. Montrer que  $S$  et  $T$  ne peuvent pas avoir un point fixe commun.

Procédons par la négative, en supposant que  $S$  et  $T$  ont un point fixe commun. Par conjugaison, ce point fixe devient  $\infty$ , et  $S$  et  $T$  s'écrivent  $S(z) = z + a$  et  $T(z) = kz$ . Par le même procédé qu'au a), on trouve  $T^n S T^{-n}(z) = z + a / k^n$ . Pour  $k > 1$ ,  $T^n S T^{-n}(z)$  tend vers  $z$ ,  $T^n S T^{-n}$  tend à se confondre avec l'identité, et l'on n'a plus un groupe discret. Pour  $k < 1$ , on fait de même avec  $T^n S T^{-n}$ .

<sup>11</sup> Pour un groupe fuchsien, le fait d'être discret équivaut au fait qu'il agit proprement discontinûment dans  $\mathbf{H}$ . Cela signifie que pour n'importe quel ensemble compact  $K$  de  $\mathbf{H}$ , seul un nombre fini de transformations  $g$  sont telles que  $g(K)$  coupe  $K$ .

<sup>12</sup> L'orbite de  $z$  est l'ensemble de toutes les images de  $z$  par les transformations du groupe.

## 4. Domaine fondamental et pavage

### 4.1. Définition

Si  $F$  est un groupe fuchsien, un domaine fondamental pour  $F$  est une partie ouverte  $D$  de  $\mathbf{H}$  telle que :

\* si  $x$  et  $y$  dans  $D$  sont tels que  $y = f(x)$  pour un élément  $f$  de  $F$ , alors  $f = Id$ , ce qui revient à dire que  $f(D) \cap D = \emptyset$  (ensemble vide) pour toute transformation  $f$  de  $F$  autre que l'identité. Autrement dit encore, les images  $f(D)$  sont deux à deux disjointes, c'est-à-dire  $f_1(D) \cap f_2(D) = \emptyset$  pour toutes transformations  $f_1$  et  $f_2$  de  $F$  avec  $f_1 \neq f_2$ .

\* Pour tout  $z$  de  $\mathbf{H}$  il existe une transformation  $f$  de  $F$  telle que  $f(z)$  est dans l'ensemble ferme  $\bar{D}$  formé de l'ouvert  $D$  et de sa frontière, ce qui revient à dire que  $\bigcup_{f \in F} \overline{f(D)} = \mathbf{H}$ .

Ainsi, une partie ouverte  $D$  de  $\mathbf{H}$  est un domaine fondamental si chaque point de  $\mathbf{H}$  se trouve dans la fermeture d'une certaine image  $f(D)$  de  $D$  et que deux images distinctes ne se chevauchent pas. Cela signifie que les images de  $D$  pavent le plan hyperbolique  $\mathbf{H}$ .

Prenons un exemple, à partir du groupe fuchsien  $F$  des transformations de Möbius  $f_n$  de la forme  $f_n(z) = z + n$ , avec  $n$  dans  $\mathbf{Z}$ . Considérons l'ensemble  $D$  formé des points  $z = x + iy$  de  $\mathbf{H}$  tels que  $0 < x < 1$ . Il s'agit bien d'un ensemble ouvert, et l'on constate que  $f_n(D)$  est l'ensemble des  $z$  tels que  $n < x < n + 1$ , et  $\overline{f_n(D)}$  est l'ensemble des  $z$  tels que  $n \leq x \leq n + 1$ . On en déduit que  $\bigcup_{n \in \mathbf{Z}} \overline{f_n(D)} = \mathbf{H}$  et que

pour  $n \neq n'$ , les ensembles  $f_n(D)$  et  $f_{n'}(D)$  sont disjointes. L'ensemble  $D$  est un domaine fondamental pour  $F$ . Le pavage correspondant est indiqué sur la figure 12, dans  $\mathbf{H}$  et aussi dans  $\mathbf{D}$ .

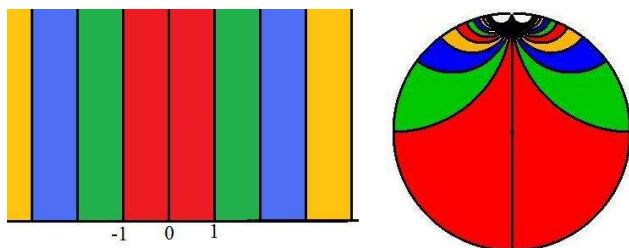


Figure 12 : A gauche, le pavage dans  $\mathbf{H}$  pour le groupe  $F$  des  $f_n(z) = z + n$ . A droite, le pavage identique dans le disque  $\mathbf{D}$ , obtenu par la transformation de Cayley de  $\mathbf{H}$  vers  $\mathbf{D}$ .

Le domaine fondamental associé au groupe fuchsien  $F$  n'est pas unique. On peut par exemple remplacer les demi-droites verticales par des courbes partant aussi vers l'infini, comme sur la figure 13.

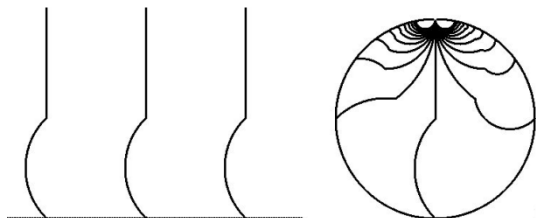


Figure 13 : Pavage lié à un domaine fondamental délimité par deux courbes formées d'un arc de cercle prolongé par une demi-droite, dans  $\mathbf{H}$  et dans  $\mathbf{D}$ .

Un autre exemple simple consiste à prendre le sous-groupe  $F$  des transformations de Möbius  $f_n(z) = 2^n z$ , avec  $n$  dans  $\mathbf{Z}$ . C'est aussi un groupe fuchsien. Prenons comme ensemble  $D$  celui constitué des points  $z$  tels que  $1 < |z| < 2$  dans  $\mathbf{H}$ , ce qui donne une demi-couronne circulaire. Les ensembles images

$f_n(D)$  sont formés des points  $z$  tels que  $2^n < |z| < 2^{n+1}$ . L'union des ensembles fermés correspondants recouvre  $\mathbf{H}$  et les ensembles ouverts sont disjoints deux à deux. L'ensemble  $D$  est un domaine fondamental pour  $F$ , et donne le pavage de la figure 14.

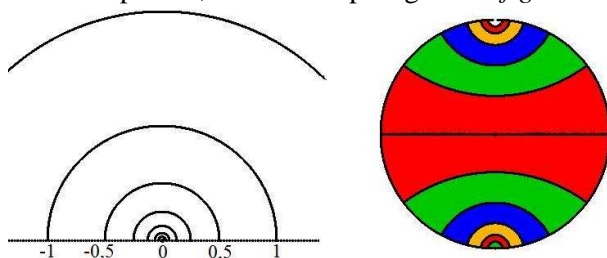


Figure 14 : A gauche le pavage associé aux transformations  $f_n(z) = 2^n z$  dans  $\mathbf{H}$ , et à droite dans  $\mathbf{D}$ .

## 4.2. Polygones de Dirichlet

Jusqu'ici nous avons obtenu des domaines fondamentaux associés à quelques groupes fuchsien particulièrement simples. Nous allons maintenant voir que tout groupe fuchsien possède un domaine fondamental particulier, assez simple à construire, qui s'appelle un polygone de Dirichlet.

### 4.2.1. Définition

Commençons par définir un polygone hyperbolique convexe : il s'agit de l'intersection d'un nombre fini de demi-plans. Cette définition est valable puisque la notion de demi-plan s'applique aussi bien dans  $\mathbf{H}$  que dans  $\mathbf{D}$ , toute droite divisant le plan en deux parties. Par exemple, l'axe  $Oy$  dans  $\mathbf{H}$  définit deux demi-plans, l'un dont les points  $z$  ont une partie réelle strictement négative, et l'autre avec des points  $z$  tels que  $\text{Re}(z) > 0$ . Ou encore la droite représentée par le cercle unité dans  $\mathbf{H}$  partage  $\mathbf{H}$  en un demi-plan avec  $|z| > 1$  et l'autre avec  $|z| < 1$ .

Notons que cette définition d'un polygone hyperbolique convexe est plus large que la définition classique d'un polygone par  $n$  segments qui constituent ses arêtes. Car on accepte maintenant qu'un « côté » du polygone soit une partie de l'horizon infini, comme dans ces exemples donnés sur la figure 15.

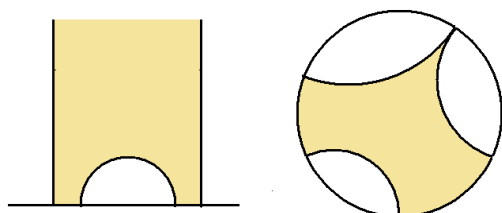


Figure 15 : Polygones avec deux « côtés » sur l'horizon, l'un dans  $\mathbf{H}$  l'autre dans  $\mathbf{D}$ .

Nous admettrons ici la propriété suivante :

Soit  $F$  un groupe fuchsien autre que l'identité, formé des transformations de Möbius  $f$  de  $\mathbf{H}$  ou de  $\mathbf{D}$ . Il existe alors un point  $p$  dont les images  $f(p)$  sont différentes de  $p$  pour toutes les transformations  $f$  autres que l'identité.

Cela permet de définir la région de Dirichlet  $D_p$  du point  $p$ , comme étant l'ensemble des points plus près de  $p$  que de tous les points  $f(p)$  avec  $f \neq \text{Id}$ . Ce qui peut s'écrire

$$D_p = \{ z \in \mathbf{H} \mid d(z, p) < d(z, f(p)) \text{ pour tout } f \in F - \text{Id} \}$$

On sait que tout segment  $[p, f(p)]$  joignant deux points distincts de  $\mathbf{H}$  (ou  $\mathbf{D}$ ) admet une médiatrice, et que celle-ci sépare  $\mathbf{H}$  en deux demi-plans, l'un avec ses points plus près de  $A$  que de  $B$ , et l'autre



avec ses points plus près de  $B$  que de  $A$ . la région  $D_p$  est délimitée par des morceaux de médiatrices, et l'on a le moyen de la construire.

#### 4.2.2. Construction d'un polygone de Dirichlet

Pour construire un polygone de Dirichlet à partir d'un groupe fuchsien  $F$ , on procède de la façon suivante :

\* Choisir un point  $p$  dans  $\mathbf{H}$  (ou  $\mathbf{D}$ ) tel que  $f(p) \neq p$  pour toute transformation  $f$  de  $F$  autre que l'identité.

\* Pour chaque transformation  $f$  de  $F$  autre que  $Id$ , construire le segment  $[p, f(p)]$ , puis tracer sa médiatrice  $L_{p,f}$  et prendre le demi-plan  $H_{p,f}$  délimité par  $L_{p,f}$  contenant le point  $p$ .

Le polygone de Dirichlet  $D_p$  associé au point  $p$  est  $D_p = \bigcap_{f \in F \setminus Id} H_{p,f}$

On dispose alors de la propriété suivante, que nous admettrons :

Soit un groupe fuchsien  $F$  et un point  $p$  qui ne reste fixe par aucune des transformations  $f$  de  $F$  autres que l'identité. Alors la région de Dirichlet  $D_p$  est un domaine fondamental pour  $F$ . Et si l'aire de  $D_p$  n'est pas infinie,  $D_p$  est un polygone convexe et il a un nombre fini de côtés.

Remarquons que lorsque l'on parle de polygone de Dirichlet avec un nombre fini de côtés, certains peuvent avoir une extrémité sur l'horizon  $\partial H$  (ou  $\partial D$ ). Notons aussi que si l'on change de point  $p$ , le polygone associé peut aussi changer.

#### 4.2.3. Exemples

Nous commençons par reprendre les exemples simples vus précédemment, avant de traiter le groupe modulaire.

##### 4.2.3.1. Le groupe des translations entières

Considérons le groupe fuchsien  $F$  des transformations  $f_n$  telles que  $f_n(z) = z + n$  avec  $n$  entier relatif. Choisissons  $p = i$ . Alors  $f_n(i) = i + n$  et le point  $i$  n'est fixé par aucune transformation  $f$  autre que  $Id$ . En se plaçant dans  $\mathbf{H}$ , les médiatrices des segments  $[i, i + n]$  en forme d'arcs de cercles sont des demi-droites verticales d'équation  $x = n / 2$ . Les demi-plans associés  $H_{i,f_n}$  sont tels que  $x < n/2$  pour  $n$  positif, ou  $x > n/2$  pour  $n$  négatif. On en déduit que leurs intersections donnent le polygone de Dirichlet  $D_i$  se réduisant à une bande verticale entre  $-1/2$  et  $1/2$ , soit l'ensemble des points  $z = x + iy$  tels que  $-1/2 < x < 1/2$ . Le pavage correspondant est visible sur la *figure 16*. Il est identique, à une isométrie près, à celui obtenu plus haut (*figure 1*), lorsque le point  $p$  est  $0,5 + i$ .

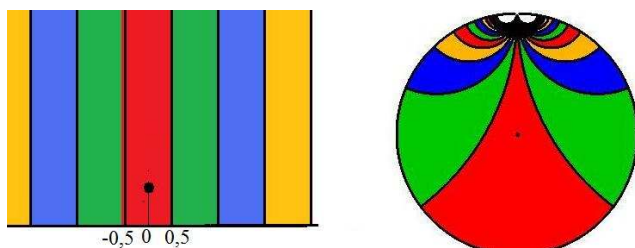


Figure 16 : A gauche le domaine fondamental en rouge, avec son point  $p = i$ , et le pavage associé dans  $\mathbf{H}$ . A droite, le pavage correspondant dans  $\mathbf{D}$ .

#### 4.2.3.2. Le groupe de rotations

Prenons le groupe fuchsien  $F$  des rotations de  $\mathbf{D}$  formés des  $n$  transformations  $f_k$  telles que  $f_k(z) = e^{i2k\pi/n} z$ , avec  $n$  entier donné  $> 0$  et  $k$  prenant les valeurs entières de  $0$  à  $n - 1$ . Le seul point fixe de  $f_k$  est  $0$ , et tous les autres points ont des transformés différents d'eux sous l'effet des  $n - 1$  transformations  $f_k$  autres que l'identité (pour  $k = 0$ ). Prenons par exemple le point  $p = 1/2$ . Alors  $f_k(1/2) = e^{i2k\pi/n} / 2$ . Le segment  $[1/2, f_k(1/2)]$  est un arc de cercle centré en  $0$ , et sa médiatrice est un diamètre de  $\mathbf{D}$  faisant l'angle  $k\pi/n$  avec  $Ox$ . Les demi-plans  $H_{1/2, k}$  bordés par ces  $n - 1$  diamètres et contenant le point  $1/2$  ont pour intersection le secteur angulaire formé des  $z$  tels que  $-\pi/n < \text{Arg } z < \pi/n$ . Il s'agit du polygone de Dirichlet  $D_{1/2}$ . Le pavage correspondant est formé de  $n$  tranches découpant le disque  $\mathbf{D}$  (figure 17).

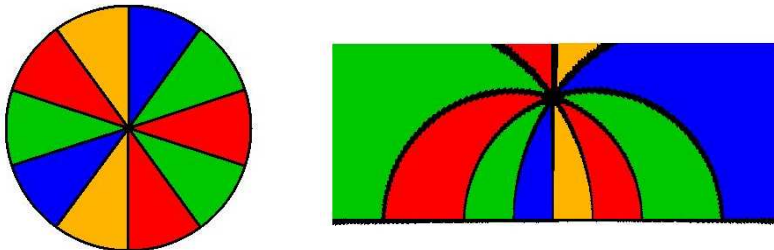


Figure 17 : Pavage associé aux transformations  $f_k(z) = e^{i2k\pi/n} z$ , ici pour  $n = 10$ , à gauche dans  $\mathbf{D}$  et à droite dans  $\mathbf{H}$ .

#### 4.2.3.3. Le groupe des homothéties

Prenons le groupe fuchsien  $F$  formé des transformations  $f_n$  dans  $\mathbf{H}$  telles que  $f_n(z) = 2^n z$  avec  $n$  dans  $\mathbf{Z}$ . Choisissons  $p = i$ . On a toujours  $f_n(i) = 2^n i \neq i$  pour tous les  $f_n$  autres que  $Id$  (pour  $n = 0$ ). Dans  $\mathbf{H}$ , le segment vertical  $[i, 2^n i]$  a pour médiatrice le *segment* en forme de demi-cercle centré en  $0$  et passant par le *milieu* du *segment*. Les demi-plans bordés par ces médiatrices et contenant  $i$  ont pour intersection la zone comprise entre les demi-cercles tous deux centrés en  $0$  et passant l'un par le *milieu* de  $[i, 2i]$ , soit  $i\sqrt{2}$ ,<sup>13</sup> et l'autre par le *milieu* de  $[i, i/2]$ , soit  $i/\sqrt{2}$ . Il s'agit du polygone de Dirichlet  $D_i$  (figure 18).

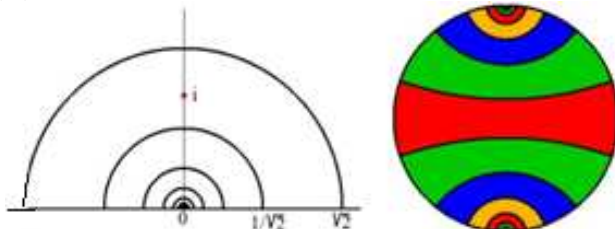


Figure 18 : Pavage associé aux transformations  $f_n(z) = 2^n z$  dans  $\mathbf{H}$  à gauche, et dans  $\mathbf{D}$  à droite.

#### 4.2.3.4. Le groupe modulaire

Par définition, le groupe modulaire est  $PSL(2, \mathbf{Z})$ . Il est constitué par les transformations de Möbius  $f$  de la forme  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  avec  $a, b, c, d$  entiers relatifs et  $ad - bc = 1$ . Il s'agit d'un groupe fuchsien, dont nous allons déterminer un domaine de Dirichlet associé.

Prenons  $p = 2i$ , et vérifions que  $f(2i) \neq 2i$  pour toute transformation  $f$  autre que  $Id$ . En effet, si l'on avait  $f(2i) = 2i$ , cela donnerait

<sup>13</sup> Rappelons que la distance hyperbolique entre les points  $ia$  et  $ib$  avec  $a < b$  est  $d(ia, ib) = \ln(b/a)$ , ce qui donne bien pour  $a = 1$  et  $b = 2$  le point  $g$  tel que  $d(i, gi) = d(gi, 2i)$ , soit  $\ln(g) = \ln(2/g)$ ,  $2 \ln g = \ln 2$ ,  $\ln(g^2) = \ln 2$ ,  $g^2 = 2$ ,  $g = \sqrt{2}$ , et  $i\sqrt{2}$  est le milieu de  $[a, b]$ .

$$\frac{b+i2a}{d+i2c} = 2i, \quad \frac{(b+i2a)(d-i2c)}{d^2+4c^2} = 2i, \quad \frac{bd+4ac+2i}{d^2+4c^2} = 2i$$

$$\begin{cases} bd+4ac=0 \\ d^2+4c^2=1 \end{cases}$$

La deuxième équation impose que  $c = 0$  et  $d = \pm 1$ , et la première devient  $b d = 0$ , soit  $b = 0$ . Avec  $a d - b c = 1$ , on a  $a d = 1$ . Finalement  $a = d = \pm 1$  et  $b = c = 0$ . La seule possibilité est l'identité. Donc  $f(2i) \neq 2i$  pour toute autre transformation  $f$ .

Parmi toutes les transformations  $f$ , choisissons-en trois :

$$f_1(z) = z + 1, f_{-1}(z) = z - 1 \text{ et } f_2(z) = -1/z$$

La première et la deuxième sont des translations inverses l'une de l'autre. Le segment  $[2i, f_1(2i) = 2i + 1]$  a pour médiatrice la droite verticale  $x = 1/2$  dans  $\mathbf{H}$ , et le segment  $[2i, f_{-1}(2i) = 2i - 1]$  a pour médiatrice la verticale  $x = -1/2$ . L'intersection des deux demi-plans correspondants est la bande verticale des points  $z = x + i y$  tels que  $-1/2 < x < 1/2$ . D'autre part, le segment  $[2i, f_2(2i) = i/2]$  a pour médiatrice le segment en forme de demi-cercle centré en 0 et de rayon 1.<sup>14</sup> Le demi-plan associé à cette médiatrice est tel que  $|z| > 1$ . L'intersection des trois demi-plans est la surface  $R$  des points  $z = x + i y$  tels que  $-1/2 < x < 1/2$  et  $|z| > 1$  (figure 19 en haut à gauche).

En prenant toutes les transformations  $f$  et les demi-plans qui leur sont associés, on peut affirmer que le domaine de Dirichlet  $D_{2i}$  est inclus dans  $R$ . Nous allons maintenant montrer que  $D_{2i} = R$ .

Raisonnons par l'absurde en supposant que  $D_{2i}$  est strictement inclus dans  $R$ . Il existe alors une transformation  $f_0$ , autre que  $Id$ , telle que  $f(R) \cap R$  soit non vide, et il existe alors un point  $z_0$  de  $R$  tel que  $f_0(z_0)$  est aussi dans  $R$ . Posons  $f_0(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  avec  $a, b, c, d$  dans  $\mathbf{Z}$  et  $ad - bc = 1$ . On a :

$|c z_0 + d|^2 = |c x_0 + d + i c y_0|^2 = (c x_0 + d)^2 + c^2 y_0^2 = c^2 |z_0|^2 + 2 c d x_0 + d^2 > c^2 - |c d| + d^2$  car  $|z| > 1$  et avec  $-1/2 < x_0 < 1/2$ ,  $-|c d| < c d 2 x_0 < |c d|$  dans  $R$ . Ainsi :

$|c z_0 + d|^2 > (|c| - |d|)^2 + |c d| \geq 0$ . Mais si l'on avait  $(|c| - |d|)^2 + |c d| = 0$ , cela imposerait  $c = d = 0$ , ce qui n'est pas possible puisque  $ad - bc = 1$ . Finalement :

$$|c z_0 + d|^2 > 1, \text{ et } \operatorname{Im} f_0(z_0) = \frac{\operatorname{Im} z_0}{|c z_0 + d|^2} < \operatorname{Im} z_0$$

En remplaçant  $z_0$  par  $f(z_0)$  qui est aussi dans  $R$ , et  $f_0$  par  $f_0^{-1}$ , on obtient de même  $\operatorname{Im} z_0 < \operatorname{Im} f(z_0)$ .

Finalement  $\operatorname{Im} f_0(z_0) < \operatorname{Im} z_0 < \operatorname{Im} f_0(z_0)$ , ce qui est impossible. On a donc  $D_{2i} = R$ . Remarquons qu'il s'agit d'un triangle avec un angle nul et deux angles égaux à  $\pi/3$ . Son aire est donc égale à  $\pi - 2\pi/3 = \pi/3$ .

Un polygone de Dirichlet pour le groupe modulaire  $PSL(2, \mathbf{Z})$  est donné par  $D_{2i}$  formé des points  $z$  de  $\mathbf{H}$  tels que  $|z| > 1$  et  $-1/2 < \operatorname{Re}(z) < 1/2$ .

Le pavage correspondant est donné sur la figure 19 en bas.

<sup>14</sup> En appliquant toujours la formule  $d(ia, ib) = \ln(b/a)$ .

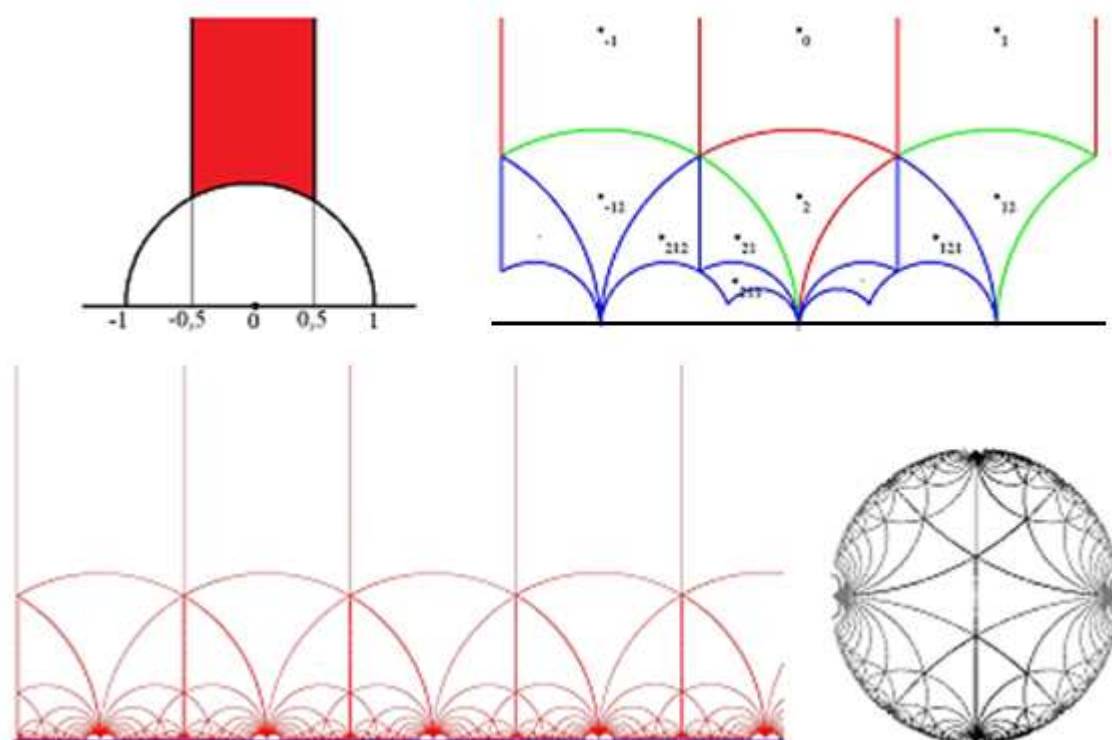
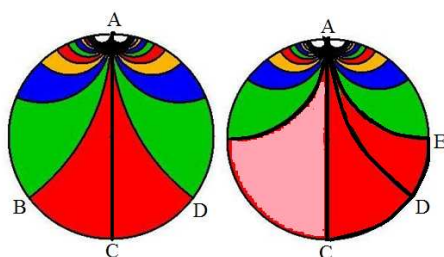


Figure 19 : En haut à gauche, le domaine fondamental du groupe modulaire, et à droite quelques-unes de ses images comme composées de transformations : les translations sont notées 1 et  $-1$ , la transformation  $f_2$  (qui est le produit d'une réflexion autour du cercle et d'une réflexion autour du  $Oy$ ) est numérotée 2. En bas, le pavage correspondant dans  $\mathbf{H}$  à gauche et dans  $\mathbf{D}$  à droite.

#### 4.2.4. Remarques complémentaires

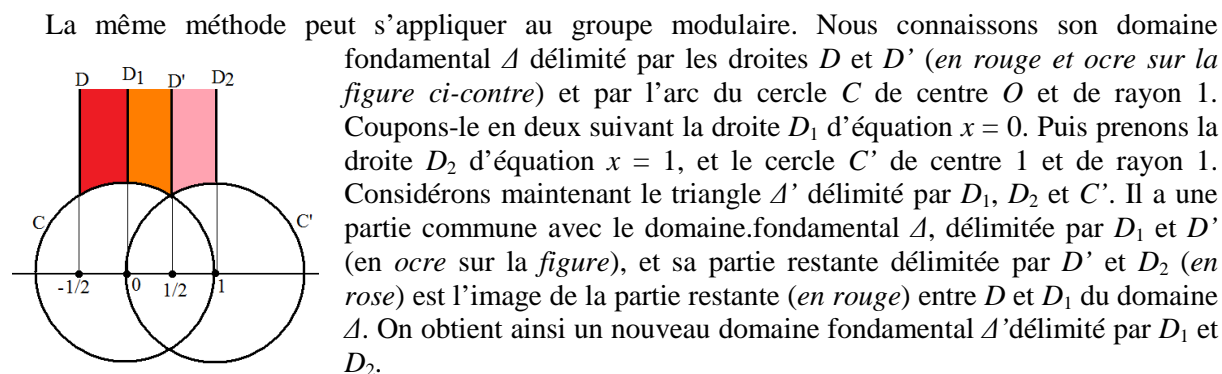
1) Reprenons l'exemple du groupe modulaire, avec son groupe de transformations  $M$  telles que  $M(z) = (az + b) / (cz + d)$  où  $a, b, c, d$  sont dans  $\mathbf{Z}$  et  $ad - bc = 1$ . Prenons le point 0, qui est sur la frontière  $\partial\mathbf{H}$ . Son orbite est formée des points  $b/d$  avec  $b$  et  $d$  dans  $\mathbf{Z}$  et  $ad - bc = 1$ . Pour  $d = 0$  on a le point  $\infty$ , et pour  $d \neq 0$  le fait d'avoir  $ad - bc = 1$  signifie que  $b$  et  $d$  sont premiers entre eux, ce qui donne une fraction  $b/d$  irréductible. Comme  $b$  et  $d$  sont quelconques, l'orbite de 0 est l'ensemble  $\mathbf{Q} \cup \infty$  qui n'est pas un ensemble discret. Mais cela n'est pas en contradiction avec le groupe modulaire qui agit sur  $\mathbf{H}$ , et pas sur sa frontière, et qui lui est discret.

2) Nous avons vu précédemment le groupe fuchsien engendré par la translation entière  $f$  telle que



$f(z) = z + 1$ , constitué par les translations de la forme  $f_n(z) = z + n$  avec  $n$  entier relatif. Et nous avons trouvé deux domaines fondamentaux  $ABD$  et  $ACE$  que nous redonnons sur la figure ci-contre, en rouge. En les coupant en deux triangles isométriques,  $ABC$  et  $ACD$  pour l'un,  $ACD$  et  $ADE$  pour l'autre, on constate que les deux domaines ont un triangle en commun,  $ACD$ , et que le triangle restant du premier, soit  $ABC$ , est transformé en l'autre triangle restant  $ADE$  par la translation  $f$ .





Ces exemples donnent des domaines fondamentaux différents mais qui ont le même aire. Cette propriété se généralise :

Deux domaines fondamentaux d'un groupe fuchsien ont toujours la même aire.

Considérons deux domaines  $\Delta$  et  $\Delta'$  d'un groupe fuchsien  $F$ , constitué de transformations notées  $g$ . Appelons leurs aires  $A(\Delta)$  et  $A(\Delta')$ . On sait qu'avec tous les  $g$  de  $F$ , l'union des  $g(\Delta')$  pave le plan  $\mathbf{H}$ . On peut écrire :

$$\begin{aligned}
 A(\Delta) &= A(\Delta \cap (\cup_g g(\Delta'))) \\
 &= \sum_g A(\Delta \cap g(\Delta')) \\
 &= \sum_g A(g^{-1}(\Delta \cap g(\Delta'))) \\
 &= \sum_g A(g^{-1}(\Delta) \cap \Delta') \\
 &= A(\Delta') \text{ car les } g^{-1}(\Delta) \text{ pavent le plan}
 \end{aligned}$$

Au point où nous en sommes, nous venons de voir des exemples de domaines fondamentaux ayant une partie de leur frontière à l'infini. Nous avons vu aussi précédemment des pavages à partir de triangles ou de polygones réguliers obtenus à partir de *réflexions* successives autour de leurs côtés – des isométries indirectes en l'occurrence. Mais quel est le rapport avec les domaines fondamentaux et leurs pavages obtenus à partir d'isométries directes ? Cela nous amène à définir des transformations de Möbius couplant deux à deux les côtés d'un domaine fondamental.

## 5. Couplage des côtés d'un polygone de Dirichlet et cycles de transformations

Supposons que l'on ait un groupe fuchsien  $F$  avec son polygone de Dirichlet  $D_p$  qui est un domaine fondamental. Cela permet de construire un pavage du plan par des polygones isométriques. Notamment le polygone  $D_p$  admet des polygones qui lui sont adjacents. Il existe une isométrie  $g$  de  $F$  (autre que  $Id$ ) telle qu'un côté  $s$  de  $D_p$  sépare le polygone  $D_p$  et le polygone image  $g^{-1}(D_p)$ . Ce côté est d'ailleurs un *segment* porté par la *médiatrice* du segment  $[p, g^{-1}(p)]$ . Alors, sous l'effet de  $g$ , le côté  $s$  séparant  $g^{-1}(D_p)$  et  $D_p$  devient le côté  $s'$  séparant  $D_p$  et  $g(D_p)$ . La transformation  $g$  couple les côtés  $s$  et  $s'$  (figure 20), et ces côtés sont isométriques. Plus précisément, si  $A$  et  $B$  sont les sommets extrémités de  $s$ , et  $A'$   $B'$  ceux de  $s'$ , avec  $A \rightarrow A'$  et  $B \rightarrow B'$  par  $g$ , et que l'on oriente les côtés de  $A$  vers  $B$  et de  $A'$  vers  $B'$  (ou inversement), le polygone  $D_p$  se trouve d'un côté du segment orienté  $[AB]$  (à droite par exemple) et de l'autre pour  $[A'B']$  (à gauche dans cet exemple).

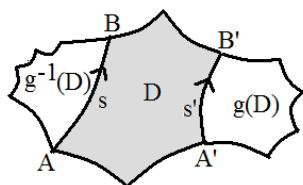
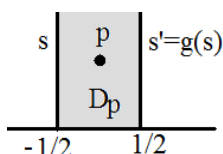


Figure 20 : La transformation  $g$  couple le côté  $s$  avec le côté  $s'$ .

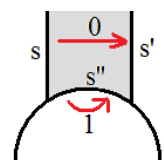
Reprenons quelques exemples de groupes fuchsien dont on connaît le polygone de Dirichlet associé.

\*  $F$  est le groupe des translations entières  $f_n(z) = z + n$ .



Dans  $\mathbf{H}$ , le domaine fondamental  $D_p$  est rappelé ci-contre. Le côté  $s$  sépare  $D_p$  et  $f_{-1}(D_p)$ . Le côté  $s'$  sépare  $D_p$  et  $f_1(D_p)$ . La transformation  $g = f_1$  fait passer de  $s$  à  $s' = g(s)$ . C'est la transformation de couplage associée à  $s$  ( $g^{-1}$  étant celle associée à  $s'$ ), soit  $g(z) = z + 1$ .

\*  $F$  est le groupe modulaire  $PSL(2, \mathbf{Z})$



Avec le domaine fondamental dans  $\mathbf{H}$  indiqué ci-contre, la transformation notée 0, telle que  $z' = z + 1$ , envoie le côté  $s$  en  $s'$ , et son inverse envoie  $s'$  en  $s$ . D'autre part, la transformation 1 telle que  $z' = -1/z$  transforme  $s''$  en  $s'$ , en retournant l'arc de cercle car, rappelons-le, on n'a jamais l'identité parmi les couplages.

A la différence des deux exemples précédents, nous allons maintenant traiter le cas le plus simple, celui où le polygone de Dirichlet a tous ses sommets dans  $\mathbf{H}$  (ou dans  $\mathbf{D}$ ), avec un nombre fini de sommets. On se place alors dans le contexte suivant : on a un groupe fuchsien  $F$  avec son polygone de Dirichlet  $D_p$  dont les côtés sont couplés deux à deux par des transformations  $f_1, f_2, \dots, f_n$  de  $F - Id$ .

Chaque côté de  $D_p$  a deux sommets qui lui sont associés, pris dans un certain ordre, et chaque sommet a deux côtés accrochés à lui. Pour chaque sommet  $v$  associé à un des deux côtés  $s$ , nous avons le couple  $(v, s)$ . Partons d'un de ces couples, soit  $(v_0, s_0)$ . Le côté  $s_0$  est couplé par une des transformations  $f_i$  avec le côté  $s'_0$ , le sommet  $v_0$  devenant le sommet  $v'_0$ . Puis on prend l'autre côté  $s''_0$  associé à  $v'_0$ , ce qui donne un nouveau couple  $(v'_0, s''_0)$ . Et l'on recommence en prenant le sommet et le côté couplés avec  $(v'_0, s''_0)$  par la transformation de couplage correspondante. On obtient de la sorte une succession de sommets et de côtés par le biais des transformations  $f_i$  de couplage. Que va-t-il se passer ?

Comme le nombre de couples (sommet-côté) est fini, on est sûr, au bout d'un certain nombre de transformations à partir d'un couple initial, de retomber sur un couple que l'on a déjà trouvé. Et comme les transformations sont bijectives, on ne peut que retomber sur le couple initial. On obtient alors ce que l'on appelle un cycle elliptique, avec le cycle de sommets  $E_0 : v_0, v'_0, v''_0, \dots, v^{(p)}_0$  et la composée des transformations associées  $f_0^{(p)} \circ \dots \circ f_0'' \circ f_0' \circ f_0$ . Au cas où les sommets n'ont pas tous été atteints par ce cycle, on part d'un de ces sommets, et l'on détermine son cycle. Et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les sommets soient dans un cycle. Les cycles elliptiques obtenus  $E_0, E_1, \dots$  forment ce que l'on peut appeler le graphe des trajectoires.

## Exemple

Supposons que l'on ait un groupe fuchsien  $F$  dont le polygone de Dirichlet  $D_p$  est un hexagone, et que l'on puisse apparier les côtés par les trois transformations 0, 1, 2 comme indiqué sur la figure 21. Notons que cela impose que les côtés ainsi couplés soient isométriques deux à deux.

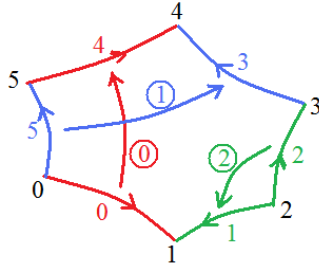


Figure 21 : Hexagone avec ses trois transformations de couplage.

Partons du sommet 0 associé au côté 0 :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{0} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{0'} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2'} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{1'} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient le cycle elliptique des sommets (0 5 4 1 3) et de transformations (1' 2' 0' 1 0) (les inverses comme  $1^{-1}$  étant notés 1'). Le sommet 2 n'a pas été atteint. Cherchons son cycle :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ d'où le cycle de sommet (2) et la transformation (2).}$$

Finalement le graphe des trajectoires est (0 5 4 1 3) (2) pour les sommets, et pour les transformations  $f^{*}_1 = 1' \circ 2' \circ 0' \circ 1 \circ 0$  et  $f^{*}_2 = 2$ . Ces deux transformations de Möbius admettent chacune un point fixe : 0 pour l'une et 2 pour l'autre. On sait qu'une telle transformation de Möbius avec un point fixe dans  $\mathbf{H}$  est une transformation elliptique de  $\mathbf{H}$  (et de  $\mathbf{D}$ ), ou exceptionnellement l'identité, ce qui explique la dénomination de cycle elliptique.

Cela se généralise. Les transformations obtenues pour chaque cycle de trajectoires sont des transformations elliptiques. On a alors ces propriétés, que nous admettons ici :

\* Soit un groupe fuchsien  $F$  et une transformation elliptique  $f$  de  $F$ . Alors il existe un entier naturel positif  $m$  tel que  $f^m = Id$ . Le plus petit entier  $m$  vérifiant cette égalité est appelé l'ordre de  $f$ .

\* Si  $D_p$  est un polygone de Dirichlet associé au groupe  $F$ , avec ses sommets dans  $\mathbf{H}$  (ou  $\mathbf{D}$ ) et que l'on a un cycle elliptique  $E$  dont la somme des angles associé aux sommets du cycle est  $\sum_E \alpha$ , et dont la transformation associée est  $f_E$  elliptique d'ordre  $m_E$ , alors  $m_E \sum_E \alpha = 2\pi$  ( $m_E \geq 1$ ).

\* L'ensemble des transformations couplant les côtés de  $D_p$  engendre le groupe fuchsien  $F$ .

Reprenons notre exemple de l'hexagone. Supposons qu'il soit régulier avec des côtés et des angles égaux, ces angles valant  $\pi / 5$ . Pour le cycle elliptique (1' 2' 0' 1 0) on trouve que son ordre  $m$  est tel que  $m 5 \pi / 5 = 2\pi$ , soit  $m = 2$ , et pour le cycle (2) son ordre est  $m'$  tel que  $m' \pi / 5 = 2\pi$ , soit  $m' = 10$ . Le groupe fuchsien  $F$  peut être considéré comme engendré par les transformations 0 et 1 avec les relations  $(1' 2' 0' 1 0)^2 = Id$  et  $2^{10} = Id$ . Cette nouvelle définition du groupe  $F$  est appelée sa présentation, sous forme de générateurs et de relations.

A ce stade, nous sommes partis d'un groupe fuchsien à partir duquel on a construit son polygone de Dirichlet  $D_p$  ainsi que ses transformations de côtés à côtés. Mais c'est plutôt l'inverse qui nous intéresse. Et c'est là que H. Poincaré intervient, avec un théorème qui porte son nom, et que nous allons étudier dans deux cas particuliers.

## 6. Théorème de Poincaré pour un polygone n'ayant pas de sommets à l'infini

Nous allons maintenant partir d'un polygone convexe, en se plaçant dans le cas où ses sommets sont tous dans **H** (ou **D**), puis nous allons prendre des transformations de couplages de côtés, ce que nous savons faire. Le problème est alors de savoir si l'on obtient un groupe fuchsien et lequel. On est alors dans le contexte du théorème de Poincaré, qui s'énonce ainsi :

Soit  $D$  un polygone convexe à  $n$  côtés, dont tous les sommets sont dans le disque de Poincaré **D** (ou **H**). Equipons-le d'un ensemble  $G$  de transformations de Möbius (des isométries directes) reliant chaque côté à un autre côté. Par effet répété de ces transformations, il s'ensuit l'apparition de trajectoires cycliques  $E_1, E_2, \dots, E_p$  où tous les sommets sont atteints une fois et une seule. Supposons que chacun de ces cycles  $E_i$  obéisse à la condition cyclique elliptique : il existe un entier  $m_i \geq 1$  tel que  $m_i \sum_k \alpha_k = 2\pi$  où  $\sum_k \alpha_k$  est la somme des angles des sommets du cycle  $E_i$ . Alors :

- \* Le sous-groupe  $F$  engendré par les transformations de  $G$  est un groupe fuchsien.
- \* Ce groupe  $F$  a le polygone  $D$  comme domaine fondamental.
- \* Ce groupe  $F$  obéit aux relations  $g_i^{m_i} = Id$ , formées par les transformations  $g_i$  d'ordre  $m_i$  associées aux cycles  $E_i$ .

### 6.1. Exemples de polygones réguliers hyperboliques

#### 6.1.1. Quadrilatère régulier

Utilisons les deux transformations 0 et 1 indiquées sur la *figure 22*.

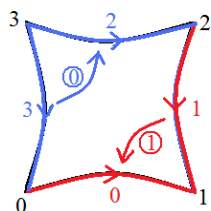


Figure 22 : Le quadrilatère régulier avec ses côtés et ses angles égaux, et les deux couplages de côtés que l'on a choisis.

Puis construisons les trajectoires cycliques :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{1'} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{0'} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le premier cycle sur les sommets est (0 2).

Partons d'un sommet restant 1 :

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1'} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , le cycle est (1). Il reste le cycle à partir de 3 qui comme le précédent se réduit à (3).

Les cycles des transformations correspondantes sont  $(0' \circ 1')$ ,  $(1')$ ,  $(0)$ . Pour le premier, on a  $m_1 2\alpha = 2\pi$ , où  $\alpha$  est l'angle du quadrilatère. Comme un quadrilatère régulier doit avoir ses angles inférieurs à  $\pi/2$ , on trouve un angle qui convient lorsqu'il est de la forme  $\pi/q$  avec  $q$  entier  $\geq 3$ , avec  $m_1 = q$ . Pour le deuxième cycle, on doit avoir  $m_2 \alpha = 2\pi$ , d'où  $m_2 = 2q$ . Et de même pour le troisième cycle. Le



groupe engendré par les transformations 0 et 1 se présente sous la forme des relations  $(0' \circ 1')^q = Id$ , et  $(1')^{2q} = Id$ , ou ce qui revient au même :

$$(1 \circ 0)^q = Id, (1)^{2q} = Id, (0)^{2q} = Id.$$

Ce groupe fuchsien a pour domaine fondamental le quadrilatère régulier, à partir duquel peut être obtenu le pavage.

Prenons une autre façon d'apparier les côtés, comme indiqué sur la *figure 23*.

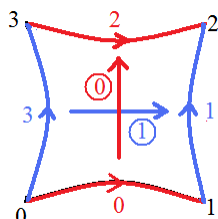


Figure 23 : Un autre couplage.

On a :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{0} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{0'} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1'} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On trouve un cycle unique de sommets (0 3 2 1) et pour les transformations  $(1' \circ 0' \circ 1 \circ 0)$ . La conditions s'écrit  $m 4 \alpha = 2\pi$ , ce qui impose  $\alpha = \pi / (2 q)$  avec  $q > 1$ , d'où  $\alpha = \pi/4$  pour  $q = 2$  et  $m = 2$ ,  $\pi/6$  pour  $q = 3$  et  $m = 3$ , etc. Par exemple, pour  $\alpha = \pi/4$ , on obtient le groupe fuchsien  $F$  de générateurs 0 et 1 avec la relation  $(1' \circ 0' \circ 1 \circ 0)^2 = Id$ .

Prenons une troisième façon d'apparier les côtés, en rajoutant des sommets auxiliaires au milieu de chaque côté, ce qui donne un octogone (*figure 24*).

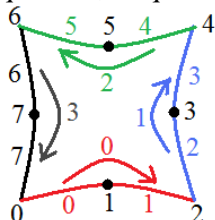
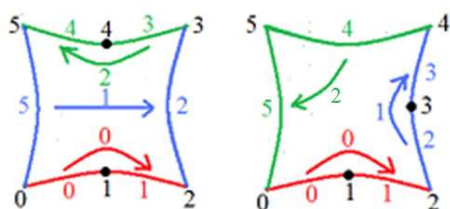


Figure 24 : Chaque côté est partagé en deux, ce qui donne une nouvelle façon de coupler les sommets<sup>15</sup>.

On trouve alors les cycles de sommets (0 2 4 6) (1) (3) (5) (7), et les transformations correspondantes (3 2 1 0) (1) (2) (3). La contrainte sur les angles donne pour le premier cycle  $m 4 \alpha = 2 \pi$ ,  $2 \alpha m = \pi$ , soit  $\alpha = \pi / m$  avec  $m \geq 3$ . Et pour les autres cycles,  $m' = 2$ . Le groupe fuchsien est engendré par 0, 1, 2, 3, avec les relations  $(3 2 1 0)^m = 1^2 = 2^2 = 3^2 = Id$  avec  $m \geq 3$ .



Nous venons de voir trois façons d'apparier les côtés. Ce ne sont pas les seules. Il y a aussi les deux cas ci-contre, avec les présentations  $(0 2)^m = (2 1)^m = 0^2 = 1^2 = Id$  ( $m \geq 3$ ) pour l'un et  $(2 1 0)^m = Id$ ,  $0^2 = 1^2 = Id$ ,  $2^{3m} = Id$  ( $m \geq 1$ ) pour l'autre.

Quelles que soient les façons d'apparier les côtés du quadrilatère régulier, on trouve toujours le même pavage. Et c'est le même que celui obtenu par des réflexions sur les quatre côtés. Mais nous

<sup>15</sup> Les orientations relatives des côtés étant suffisamment claires, nous pouvons maintenant les omettre.

n'avons pas trouvé les pavages par des quadrilatères réguliers avec des angles de  $2\pi/5$ , ou  $2\pi/7$ , etc., ce qui indique qu'ils ne peuvent être obtenus qu'à partir de réflexions, c'est-à-dire des isométries indirectes.

### Exercice 3 : Le cas du carré euclidien

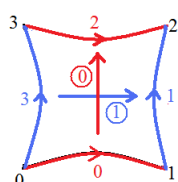
Ce que l'on a fait avec un quadrilatère régulier hyperbolique s'applique aussi au carré euclidien avec des angles de  $\pi/2$ , ce qui donne le groupe fuchsien  $F$  de générateurs  $0$  et  $1$  avec la relation  $1 \circ 0' \circ 0' \circ 1 \circ 0 = \text{Id}$ . Montrer que ce groupe est isomorphe au groupe additif commutatif  $\mathbb{Z}^2$  muni de l'addition.

Montrons que  $F$  est commutatif :  $01 = 01 \ 1'0' \ 10 = 00' \ 10 = 10$  (nous avons omis les  $\circ$ )

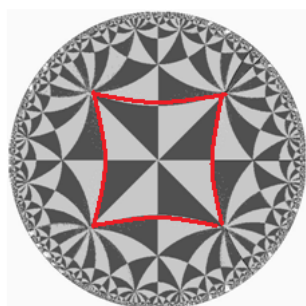
Une transformation quelconque de  $F$  est de la forme  $f = 0^{m_1} 1^{n_1} 0^{m_2} 1^{n_2} \dots 0^{m_p} 1^{n_p}$ , avec tous les exposants dans  $\mathbb{Z}$ . Grâce à la commutativité, elle s'écrit aussi  $0^{m_1 + m_2 + \dots + m_p} 1^{n_1 + n_2 + \dots + n_p} = 0^m 1^n$ . Le groupe  $F$  est formé des éléments  $0^m 1^n$  avec  $m$  et  $n$  dans  $\mathbb{Z}$ .

Le groupe additif  $\mathbb{Z}^2$  est formé des couples  $(m, n)$  avec  $m$  et  $n$  entiers relatifs. Il est isomorphe au groupe multiplicatif formé des éléments  $0^m 1^n$  :  $(m, n) \leftrightarrow 0^m 1^n$ , l'addition de l'un correspondant à la multiplication (composition) de l'autre.  $F$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}^2$ .

### Exercice 4 : Quadrilatère régulier avec des angles de $\pi/4$



Reprenons l'exemple du quadrilatère régulier avec des angles de  $\pi/4$ , et avec les côtés opposés appariés comme indiqué sur la figure. On a vu qu'il existait un seul cycle de sommets  $(0 \ 3 \ 2 \ 1)$  et que le groupe fuchsien correspondant avait pour présentation  $(1' \circ 0' \circ 1 \circ 0)^2 = \text{Id}$ . L'objectif est de vérifier ce résultat en construisant le pavage dans le disque de Poincaré.



1) Déterminer les coordonnées des sommets du quadrilatère, ainsi que le centre et le rayon des cercles portant les côtés du quadrilatère.

Il s'agit de construire en premier lieu le triangle dont le sommet en  $O$  a pour angle  $\pi/4$ , le deuxième sommet sur  $Ox$  avec un angle droit, et le troisième sommet -le point numéroté 2- avec pour angle  $\pi/8$ . Ce triangle en noir sur le dessin ci-contre donne le pavage du disque de Poincaré ainsi que le quadrilatère  $0123$  (en rouge).

Pour le cercle passant par les sommets 1 et 2, le calcul<sup>16</sup> donne son centre (situé sur  $Ox$ ) à la distance  $d = 1,554$ , et son rayon  $R = 1,189$  (avec  $d^2 - R^2 = 1$ ). Le sommet 2 a pour coordonnées  $(0,455, 0,455)$ . Les autres sommets s'en déduisent.

2) Déterminer les transformations de Möbius  $1$  et  $0$  qui couplent les côtés  $03$  et  $12$  ainsi que les côtés  $01$  et  $23$ .

La transformation  $1$  peut être considérée comme le produit de l'inversion faisant passer du cercle centré en  $-d$  (cf. 1°) et portant les sommets  $0, 3$  à l'axe des  $y$  suivie de l'inversion faisant passer de  $Oy$  au cercle portant  $1$  et  $2$ . La première inversion a son cercle qui a pour centre le point d'abscisse  $-(d + R)$  sur  $Ox$ , et la deuxième en  $d + R$ , puisqu'on est dans le cas où un cercle est transformé en droite. Et le rayon des cercles d'inversion est  $r$  tel que  $r^2 = A^2 - 1$  avec  $A = d + R$  puisqu'ils sont orthogonaux au disque unité. La première inversion est de la forme  $z' + A = \frac{A^2 - 1}{\bar{z} + A}$ , soit  $z' = \frac{-A\bar{z} - 1}{\bar{z} + A}$ . La deuxième

<sup>16</sup> cf. [AUD2013].

s'écrit  $z' = \frac{A\bar{z}-1}{\bar{z}-A}$ . Par composition, la transformation 1 s'écrit  $z' = \frac{-(A^2+1)z-2A}{-2Az-(A^2+1)}$ . Avec  $A = d + R$ , et  $d^2 - R^2 = 1$ ,  $A^2 + 1 = d^2 + R^2 + 2Rd + 1 = d^2 + R^2 + 2Rd + d^2 - R^2 = 2Ad$ . En divisant les coefficients par  $2A$ , la transformation 1 s'écrit finalement  $z' = \frac{dz+1}{z+d}$ .<sup>17</sup> On constate d'ailleurs que, par son écriture, cette transformation conserve aussi bien le disque de Poincaré que le demi-plan de Poincaré.

Le même procédé donne la transformation 0 :  $z' = \frac{idz-1}{z+id}$  ou  $\frac{dz+i}{-iz+d}$ .<sup>18</sup>

3) Vérifier que la transformation  $1' \circ 0' \circ 1 \circ 0$  associée au cycle de sommets  $(0 \ 3 \ 2 \ 1)$  est une rotation d'angle  $\pi$  autour du sommet 0, donc elliptique, et que l'on a bien  $(1'0'10)^2 = Id$  ( $1'$  et  $0'$  étant les inverses de 1 et 0).

Faisons la transformation  $1' \circ 0' \circ 1 \circ 0$ . A partir du quadrilatère initial, on obtient successivement les pavés 0, puis 10, puis  $0'10$  et enfin  $1'0'10$ . Ces quadrilatères sont dessinés sur la figure 25 à gauche, en bleu. On constate que le quadrilatère  $1'0'10$  se déduit bien du quadrilatère initial par rotation de  $\pi$  autour du sommet 0. En répétant la transformation, on obtient les quadrilatères (en rouge sur la figure 25 à droite)  $01'0'10 = 1'01$ , puis  $101'0'10 = 01$ , puis  $0'101'0'10 = 1$  et enfin le retour au quadrilatère initial  $1'0'101'0'10 = Id$ . Les deux écritures possibles des quadrilatères sont dues au fait que  $(1'0'10)^2 = Id$ .

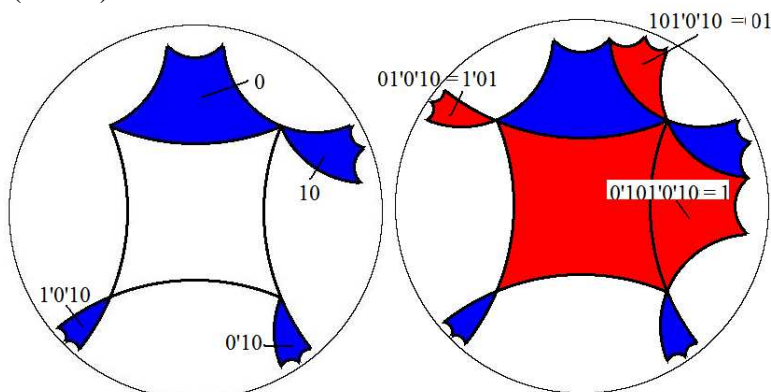


Figure 25 : Action de la transformation  $(1'0'10)^2$  étape par étape, avec notamment le quadrilatère  $1'0'10$  (ou  $0'1'01$ ) se déduisant du quadrilatère initial par demi-tour.

4) Donner l'écriture des huit quadrilatères qui entourent chacun des sommets 0, 1, 2, 3.

Le cycle de sommets  $(0 \ 3 \ 2 \ 1)$  peut aussi s'écrire  $(3 \ 2 \ 1 \ 0)$  et l'on a  $(0 \circ 1' \circ 0' \circ 1)^2 = Id$ , soit la rotation  $0 \circ 1' \circ 0' \circ 1$  d'angle  $\pi$  autour du sommet 3. Il en est de même autour de chacun des sommets, ce qui donne un éventail de huit quadrilatères dont l'écriture est donnée sur la figure 26. Autour du sommet 3, après le quadrilatère initial, on a les quadrilatères  $1'$ ,  $1'0$ ,  $1'01$ ,  $1'010'$  (ou  $01'0'1$ ),  $01'0'$ ,  $01'0$ .

<sup>17</sup> Une autre méthode est donnée dans [www.pierreaudibert.fr/explor/Schottky.pdf](http://www.pierreaudibert.fr/explor/Schottky.pdf) (exercice 1).

<sup>18</sup> On peut aussi obtenir cette transformation 0 en conjuguant la transformation 1 avec la rotation de centre  $O$  et d'angle droit.

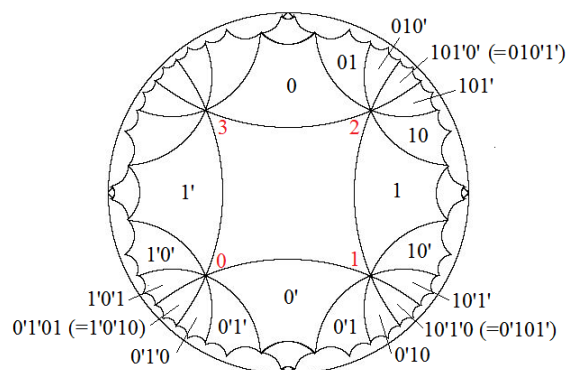


Figure 26 : Numérotation des quadrilatères autour des sommets.

4) Si l'on change le couplage des côtés, par exemple en prenant comme transformations les rotations de  $\pi/4$  autour des sommets 0 et 2, obtient-on le même pavage, le même groupe fuchsien ?

Le groupe fuchsien que nous avons étudié dans les questions précédentes ne contient que des rotations d'angle  $\pi$ , mais pas de rotations d'angle  $\pi/2$  ou  $\pi/4$ . Il est donc différent du groupe fuchsien créé par des rotations de  $\pi/4$ . Pourtant le pavage reste le même dans les deux cas. Ainsi le même pavage peut correspondre à des groupes fuchiens différents.

### 6.1.2. Octogone hyperbolique régulier

Considérons l'octogone hyperbolique régulier avec ses côtés de même longueur et des angles tous égaux à  $\pi/(4k)$  avec  $k$  entier positif. Les côtés sont appariés comme sur le dessin de la figure 27. Vérifions que les quatre transformations 0, 1, 2, 3, 4 engendrent un groupe fuchsien.

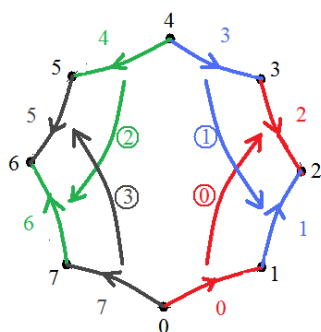


Figure 27 : Octogone régulier et ses couplages de côtés.

Constatons d'abord qu'un tel octogone existe. On sait qu'un polygone régulier à  $n$  côtés existe si et seulement si son angle  $\alpha$  est compris entre 0 et  $(n-2)\pi/n$ , soit  $\alpha < 3\pi/4$ , ce qui est bien le cas pour  $\alpha = \pi/(4k)$ . Partons du sommet 0 associé au côté 0 et déterminons son cycle.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\xrightarrow{0} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{0'} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1'} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{3} \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{2'} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{3'} \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Les 8 sommets ont été atteints. On a un seul cycle elliptique des sommets successifs : 0 3 2 1 4 7 6 5, et la transformation cyclique associée est  $3' \circ 2' \circ 3 \circ 2 \circ 1' \circ 0' \circ 1 \circ 0$ . On constate que la condition sur les angles est vérifiée lorsque  $m \cdot 8 \cdot \pi / (4m) = 2\pi$ , avec  $m \geq 1$ . Le groupe engendré par les 4 transformations est un groupe fuchsien. Et ce groupe obéit à la relation  $(3' \circ 2' \circ 3 \circ 2 \circ 1' \circ 0' \circ 1 \circ 0)^m = Id$  avec  $m \geq 1$ .



## 6.2. Polygones non réguliers

### 6.2.1. Quadrilatères

Nous allons maintenant traiter le cas d'un quadrilatère qui n'est plus régulier.

Prenons d'abord le cas d'un quadrilatère qui a ses quatre angles égaux, et ses côtés opposés égaux deux à deux, en commençant par le construire grâce à l'exercice suivant.

#### **Exercice 5 : Quadrilatère à angles égaux et côtés opposés de même longueur**

*Il ne s'agit plus, sauf cas exceptionnel, d'un polygone régulier, mais plutôt d'une sorte de rectangle. Comment construire de tels quadrilatères ?*

1) On se donne la longueur d'un côté hyperbolique  $[AB]$  dans le disque de Poincaré  $D$ . Prendre d'abord ce segment sur  $(Ox)$  avec son milieu en  $O$ . La médiatrice  $\Delta$  de ce segment est  $Oy$ . Construire des segments  $[A'B']$  de même longueur ayant pour médiatrice  $\Delta$ .

On se donne le point  $B(xb, 0)$  sur  $[Ox]$ , d'où l'on déduit  $A$ . On se donne aussi le point  $O'(0, yO')$  sur  $[Oy]$ . Il existe une inversion unique  $T$  faisant passer de  $O$  à  $O'$  et l'on détermine aisément le centre et le rayon de son cercle. Cette inversion fait passer  $B$  en  $B'$ . On a  $d(O, B) = d(O', B')$  et par symétrie on obtient le segment  $[A'B']$  de même longueur que  $[AB]$ . En faisant varier  $yO'$  de  $-1$  à  $1$ , on obtient ainsi des segments tous isométriques avec le segment  $[AB]$  (figure 28).

2) Quelle courbe décrit le point  $B'$  ?

Où que soit le point  $O'$ , on a toujours  $d(O', B') = d(O, B) = \text{cte}$ . La courbe décrite par  $B'$  est la courbe équidistante de  $(Oy)$ , c'est-à-dire un arc de cercle qui passe par  $B$  ainsi que par les points  $(0, 1)$  et  $(0, -1)$ , ce qui permet de trouver le centre et le rayon du cercle correspondant. Il en est de même avec le point  $A$ .

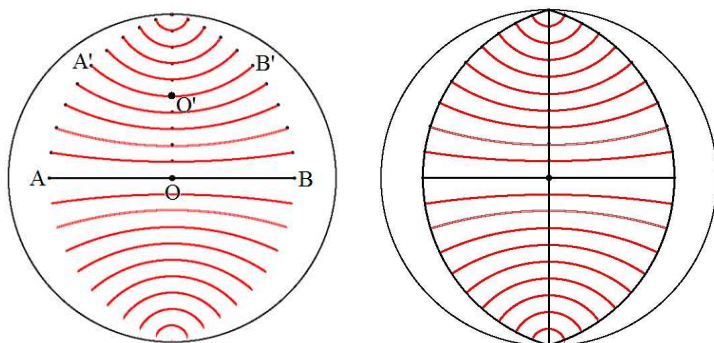
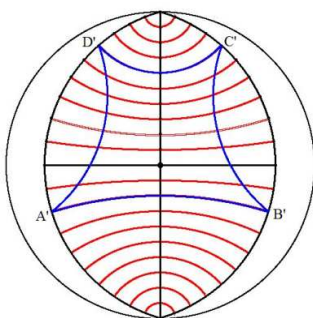


Figure 28 : A gauche le segment  $[AB]$  et les segments isométriques  $[A'B']$  ayant pour médiatrice  $Oy$ . A droite, sont ajoutées les courbes circulaires équidistantes de  $Oy$ , décrites par  $A'$  et  $B'$ .

3) On veut construire un quadrilatère avec des angles égaux  $\alpha$  et les côtés opposés de même longueur :  $d(A, B) = d(C, D)$  et  $d(A, D) = d(B, C)$ . Quelle est la contrainte sur  $\alpha$  pour qu'un tel quadrilatère existe ?

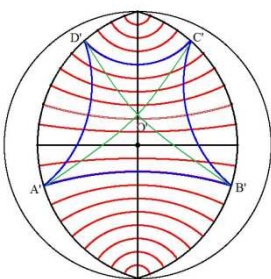
Rappelons la contrainte pour qu'un polygone à  $n$  côtés existe : la somme de ses angles doit être inférieure à  $(n - 2)\pi$ . Cela donne ici :  $\alpha < \pi/2$ .

4) Prendre un des segment  $[A', B']$  ayant une certaine longueur donnée, et montrer que l'on peut construire un quadrilatère avec des angles égaux  $\alpha$  et les côtés opposés de même longueur.



Donnons-nous un angle  $\alpha$ , puis traçons les *droites* passant par  $A'$  et  $B'$  et faisant cet angle  $\alpha$  avec  $[A'B']$ . Les points  $C'$  et  $D'$  sont sur ces *droites*, qui sont symétriques par rapport à  $Oy$ . Comme on veut que  $d(C', D') = d(A', B')$ ,  $C'$  et  $D'$  sont symétriques par rapport à  $Oy$ . Avec  $d(C', D') = d(A', B)$ , le segment  $[C', D']$  est un des segments isométriques avec  $[AB]$  obtenus précédemment. Les segments  $[A'D']$  et  $[B'C']$  étant orthogonaux aux cercles qui sont les courbes équidistantes, on en déduit que les angles en  $C$  et  $D$  sont égaux à ceux en  $A$  et en  $B$ .

5) Montrer que le quadrilatère obtenu a ses diagonales qui se coupent en leur milieu et ont même longueur.



Pour des raisons de symétries, les diagonales  $[A'C']$  et  $[B'D']$  ont même longueur et se coupent en un point  $O'$  qui est sur  $Oy$ . Les triangles  $O'A'B'$  et  $O'C'D'$  sont isocèles, et ils ont un angle en commun. Ils ont donc leurs trois angles respectifs égaux et sont isométriques. Les diagonales se coupent en leur milieu.

6) Sans perte de généralité, on peut remplacer le quadrilatère construit précédemment par un quadrilatère isométrique ayant son centre en  $O$ . En faisant varier l'angle  $\alpha$ , tracer plusieurs quadrilatères de centre  $O$ .

Les résultats sont donnés sur la figure 29. On remarquera que les côtés horizontaux des quadrilatères sont des arcs de cercles du faisceau à points limites les pôles nord et sud du disque de Poincaré, tandis que les côtés verticaux sont dans le faisceau dont les points limites sont les extrémités ouest et est du disque de Poincaré.

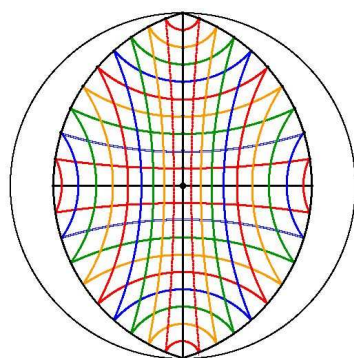


Figure 29 : Quadrilatères à côtés opposés égaux et à angles égaux. La longueur d'un côté étant donnée, l'angle est en bijection avec la longueur du deuxième côté.

Prenons un tel quadrilatère, avec le seul couplage de côtés possible (figure 17 à gauche). On retrouve un des cas déjà traité pour le quadrilatère régulier, avec un seul cycle de sommets  $(0\ 3\ 2\ 1)$  et la transformation correspondante  $(1' \circ 0' \circ 1 \circ 0)$ . La contrainte sur les angles s'écrit  $2m\alpha = \pi$ , soit  $\alpha = \pi / (2m)$  pour  $m \geq 2$ , ce qui autorise un angle de  $\pi/4$  ou  $\pi/6$ , ... Le groupe fuchsien  $F$  est engendré par les transformations 0 et 1, avec la relation  $(1' \circ 0' \circ 1 \circ 0)^m = 1$  pour  $m \geq 2$ . Un pavage correspondant est donné sur la figure 30 dans le cas où  $\alpha = \pi/6$ .

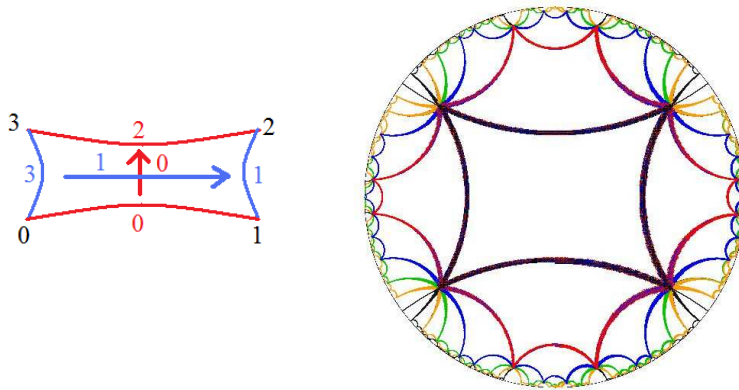


Figure 30 : A gauche, le quadrilatère avec les deux transformations de couplage. A droite, le pavage obtenu à partir de ce quadrilatère pour  $\alpha = \pi/6$ .

Un autre cas se présente en prenant un quadrilatère avec ses côtés opposés égaux deux à deux et ses angles opposés égaux deux à deux, comme dans le cas suivant (figure 31 à gauche). On commence par construire le triangle  $ABC$ , puis par demi-tour, le triangle isométrique  $ADB$ . On obtient ainsi un quadrilatère avec ses côtés et ses angles opposés égaux deux à deux. En couplant les côtés opposés comme précédemment, on retrouve le cycle  $(0\ 3\ 2\ 1)$ , ici  $(D\ A\ C\ B)$ , avec la contrainte sur les angles  $2m(\pi/8 + 3\pi/8) = 2\pi$ , d'où  $m = 2$ . Avec les angles que nous avons choisis, le pavage est possible (figure 31 à droite).

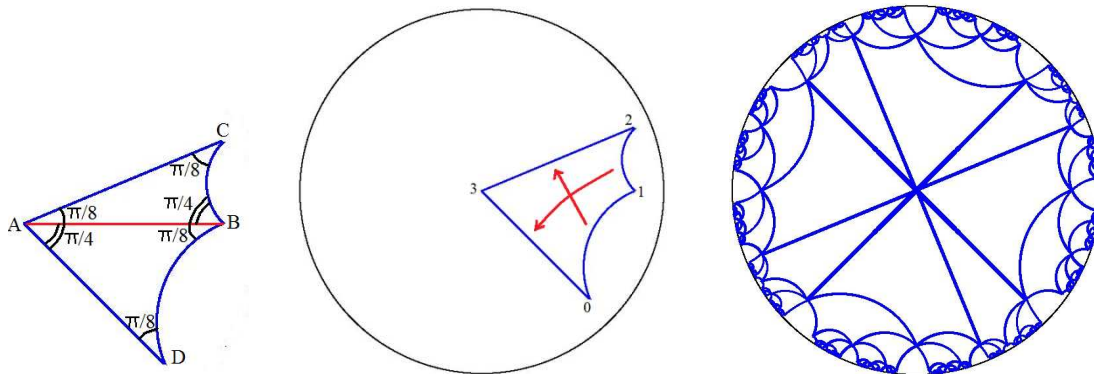


Figure 31 : Quadrilatère avec  $AC = DB$ ,  $BC = AD$ , et  $\hat{A} = \hat{B} = 3\pi/8$ ,  $\hat{C} = \hat{D} = \pi/8$ .

Une autre méthode consiste à coupler les côtés adjacents deux à deux. Prenons deux exemples simples :

\* Quadrilatère à quatre côtés égaux et des angles opposés égaux, plus précisément deux angles de  $\pi/4$  et deux angles de  $\pi/2$ . Il s'agit de deux triangles équilatéraux accouplés. On a les cycles  $(0)\ (2)\ (1\ 3)$  avec les contraintes  $m_0 \pi/4 = 2\pi$ ,  $m_2 \pi/4 = 2\pi$  et  $m'(\pi/2 + \pi/2) = 2\pi$ , soit  $m_0 = m_2 = 8$  et  $m' = 2$ . Le groupe a pour présentation  $0^8 = 1^8 = Id$  et  $(0\ 1)^2 = Id$ . Le pavage correspondant est donné sur la figure 32 en haut.

\* Quadrilatère à côtés adjacents égaux deux à deux, deux côtés adjacents étant séparés par un angle égal à  $\pi/3$ , les trois autres angles étant égaux à  $\pi/2$ . Avec les cycles  $(0)\ (2)\ (1\ 3)$  les contraintes donnent  $m_0 \pi/3 = 2\pi$ ,  $m_2 \pi/2 = 2\pi$  et  $m'(\pi/2 + \pi/2) = 2\pi$ , soit  $m_0 = 6$ ,  $m_2 = 4$  et  $m' = 2$ . Le groupe a pour présentation  $0^6 = Id$ ,  $1^4 = Id$  et  $(0\ 1)^2 = Id$ . Le pavage correspondant est donné sur la figure 32 en bas.

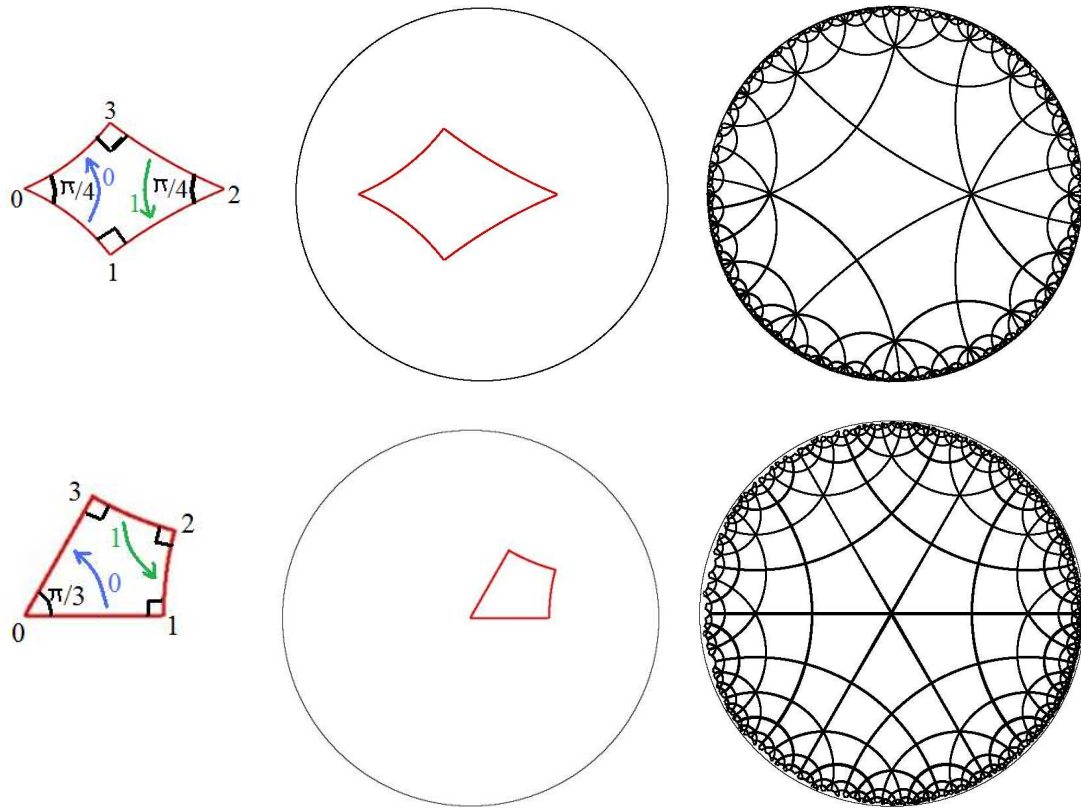


Figure 32 : Deux formes de quadrilatères et leurs pavages.

Ce que nous avons fait avec les quadrilatères peut être adapté aux polygones ayant un nombre pair de côtés. Mais qu'en est-il pour un nombre impair de côtés ?

### 6.2.2. Cas d'un pentagone

Pour permettre les couplages, nous devons ajouter un sommet qui est le milieu d'un côté, ce qui donne un hexagone, comme sur la figure 33.

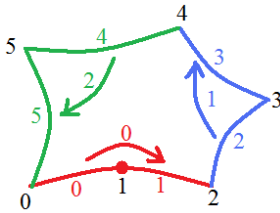


Figure 33 : Un pentagone transformé en hexagone, avec les couplages de côtés choisis.

Les transformations de couplages que nous avons choisies sur la figure 33 supposent que les côtés 2 et 3 sont égaux, ainsi que les côtés 4 et 5. La somme des angles du pentagone doit être inférieure à  $3\pi$ , soit  $\alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 < 3\pi$ . Les cycles sur les sommets sont :  $(0\ 2\ 4)$ ,  $(1)$ ,  $(3)$ ,  $(5)$ , et les transformations associées sont  $(2\ 1\ 0)$ ,  $0$ ,  $1$ ,  $2$ . Les conditions sur les cycles s'écrivent pour ces cinq cycles :

$$m_0 (\alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_4) = 2\pi$$

$$m_1 \pi = 2\pi \text{ d'où } m_2 = 2$$

$$m_3 \alpha_3 = 2\pi$$

$$m_4 \alpha_5 = 2\pi$$

Si l'on prend par exemple  $\alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_4 = 2\pi$ , soit  $m_0 = 1$ , on doit choisir  $\alpha_3 = 2\pi / m_3$  avec  $m_3 \geq 3$  et  $\alpha_5 = 2\pi / m_4$  de façon que  $1/m_3 + 1/m_4 < 1/2$ . Par exemple pour  $\alpha_3 = 2\pi/3$ , on doit avoir  $\alpha_5 = 2\pi/m_4$  avec  $m_4 \geq 7$ . Dans le cas particulier où  $\alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_4 = 2\pi$ ,  $\alpha_3 = 2\pi/3$ ,  $\alpha_5 = 2\pi/7$ , le groupe fuchsien est engendré par  $0, 1, 2$  avec les relations  $2\ 1\ 0 = Id$ ,  $0^2 = Id$ ,  $1^3 = Id$ ,  $2^7 = Id$ .

## 7. Théorème de Poincaré pour un polygone ayant des sommets à l'infini

Supposons maintenant que le polygone ait des sommets à l'infini, c'est-à-dire sur l'horizon  $\partial H$  de  $\mathbf{H}$  (ou  $\partial D$  de  $\mathbf{D}$ ) sans pour autant qu'un ou des « côtés » ne soient sur cette frontière. Nous allons encore appliquer la méthode des couplages et des cycles dans ce nouveau contexte, en distinguant les cycles elliptiques contenant des sommets qui ne sont pas sur la frontière, et que nous connaissons déjà, et ceux qui contiennent des points sur la frontière.

Les transformations de couplage étant des transformations de Mobius, elles agissent dans  $\mathbf{H}$ , mais elles transforment aussi  $\partial H$  en lui-même. Si l'on d'un sommet situé sur la frontière, son transformé est aussi sur la frontière, et ce sera soit lui-même soit un autre point frontière, comme par exemple sur la figure 34.

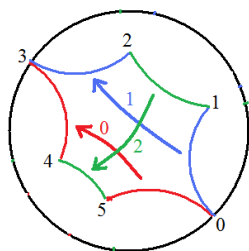


Figure 34 : Hexagone dans  $\mathbf{D}$  avec deux points frontières 0, 3, et ses trois transformations de couplage. Le sommet 0 a pour transformé 3 sous l'effet des couplages 0 ou 1, et les côtés de couleur verte sont isométriques.

Partons d'un sommet frontière, et construisons son cycle, que l'on appelle cycle parabolique. La transformation associée, qui est la composée de transformations de Mobius, admet forcément un point fixe sur  $\partial H$ , et peut-être d'autres. Autrement dit, elle est parabolique si elle n'a qu'un point fixe, ou hyperbolique si elle en a deux sur  $\partial H$ , et encore elle peut être l'identité. On dit que la transformation obéit à la condition de cycle parabolique si elle est parabolique ou si elle est l'identité, autrement dit si elle n'est pas hyperbolique. On sait vérifier si une transformation est parabolique en prenant sa trace qui est 2 ou  $-2$  (lorsque la transformation est écrite sous forme normalisée<sup>19</sup>).

Le théorème de Poincaré prend alors la forme suivante :

Soit  $D$  un polygone convexe avec un nombre fini de côtés, pouvant avoir des sommets à l'infini, mais sans côté à l'infini. Equipons-le d'un ensemble  $G$  de transformations de couplage de côtés sans qu'aucun côté ne soit apparié avec lui-même. Appelons  $E_1, E_2, \dots, E_p$  les cycles elliptiques et  $P_1, P_2, \dots, P_p$  les cycles paraboliques, partant de points frontières ou qui en contiennent. On suppose que les cycles elliptiques satisfont à la condition de cycle elliptique sur les angles, et que les cycles paraboliques obéissent à la condition de cycle parabolique (les transformations associées sont paraboliques ou l'identité). Alors

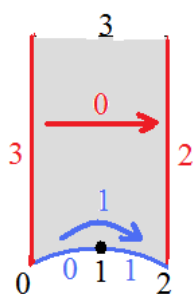
- \* Les transformations de couplage de l'ensemble  $G$  engendrent un groupe fuchsien  $F$ .
- \* Ce groupe fuchsien  $F$  admet  $D$  comme domaine fondamental.
- \* Le groupe fuchsien  $F$  a pour générateurs les transformations de  $G$ , et pour relations  $g_i^{m_i} = Id$ , où les transformations  $g_i$  d'ordre  $m_i$  correspondent aux cycles elliptiques  $E_i$ .

Appliquons cela à des exemples, et d'abord au groupe modulaire.

<sup>19</sup> Rappelons que  $z' = (az + b) / (cz + d)$  est normalisée lorsque  $a d - b c = 1$ .



On sait déjà que le groupe modulaire est un groupe fuchsien et l'on connaît son domaine fondamental. Nous allons maintenant vérifier qu'il en est bien ainsi en appliquant le théorème de Poincaré, et nous aurons en plus la présentation du groupe modulaire sous forme de générateurs et de relations.



Partons du polygone de Dirichlet  $D$  ci-contre, dans  $\mathbf{H}$ . Pour être dans les conditions du théorème, un côté ne peut pas être apparié avec lui-même, ce qui impose que l'on ajoute un nouveau sommet, noté 1, au milieu du segment  $[0, 2]$ . Remarquons aussi que le sommet 3 est le point  $\infty$ . Passons aux cycles, en utilisant les transformations 0 et 1.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{0'} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

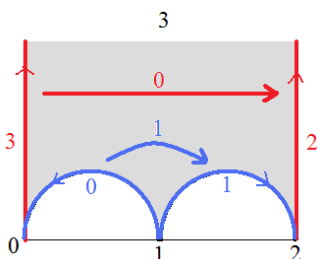
On obtient le cycle elliptique de sommets  $(0, 2)$  et la transformation  $0'1$ . La condition elliptique s'écrit  $m \frac{2\pi}{3} = 2\pi$ , d'où  $m = 3$ .

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1'} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . On a le cycle elliptique (1) avec la transformation  $1'$  (ou 1 si l'on veut), avec la condition  $m' \pi = 2\pi$ , d'où  $m' = 2$ .

$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{0} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ . On a le cycle parabolique (3) avec la transformation 0. La condition parabolique est vérifiée puisque la transformation 0 est la translation  $z' = z + 1$  qui admet un unique point fixe  $\infty$ .

Grâce au théorème de Poincaré, le groupe modulaire est engendré par les transformations 0 et 1 avec les relations  $(0'1)^3 = Id$  et  $1^2 = Id$ .

### Exercice 6 : Quadrilatère à quatre sommets à l'infini



On considère dans  $\mathbf{H}$  le quadrilatère  $D$  dont les sommets 0 1 2 3 sont tous situés à l'infini, comme sur le dessin ci-contre, avec les deux transformations de couplage indiquées.

1) En prenant le point 1 comme origine du repère, les points 0 et 2 ont pour coordonnées respectives  $(-1, 0)$  et  $(1, 0)$ . Montrer que la transformation de couplage notée 1 s'écrit  $z' = \frac{z}{2z+1}$  et qu'elle est parabolique, tout comme la transformation 0.

La transformation  $z' = \frac{z}{2z+1}$  laisse fixe le point 1 puisque  $0 \rightarrow 0$ , et elle fait passer de  $-1$  à  $1$ , c'est-à-dire du point 0 au point 2. La droite (demi-cercle) unique joignant 01 devient la droite 12, et la transformation fait bien passer du côté 0 au côté 1. On constate aussi que l'écriture de la transformation est normalisée, et que sa trace est 2, ce qui signifie que la transformation est parabolique. D'autre part, la transformation 0 s'écrit  $z' = z + 2$ . Il s'agit d'une translation ayant comme seul point fixe  $\infty$ . C'est aussi une transformation parabolique.

2) Déterminer le groupe fuchsien ayant comme domaine fondamental le quadrilatère  $D$ , et donner sa présentation.

On obtient les cycles paraboliques sur les sommets (0 2), (1), (3). Il n'y a pas de cycle elliptique. Les transformations associées aux cycles sont  $0'1$ ,  $1$  et  $0$ . On sait déjà que les transformations  $1$  et  $0$  sont paraboliques. Il reste à vérifier que la transformation  $0'1$  est aussi parabolique :

$z \xrightarrow{1} z_1 = \frac{z}{2z+1} \xrightarrow{0'} z' = z_1 - 2 = \frac{z}{2z+1} - 2 = \frac{-3z-2}{2z+1}$ . Cette transformation est normalisée et sa trace est  $-2$ . Elle est bien parabolique.

Le groupe engendré par les deux transformations  $0$  et  $1$  est fuchsien, sans aucune relation entre elles. Le pavage correspondant est donné sur la figure 35.

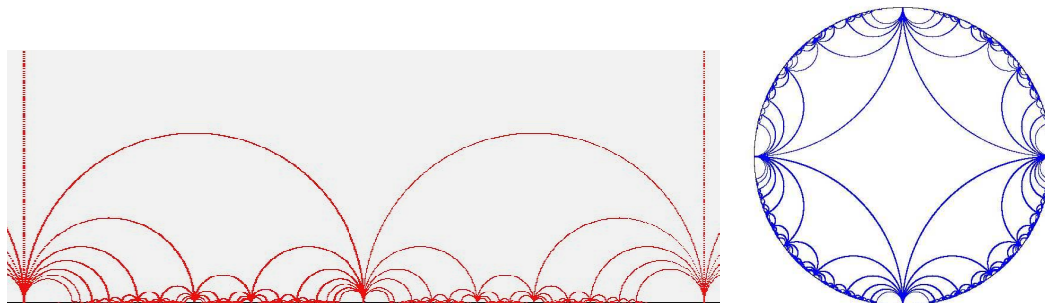
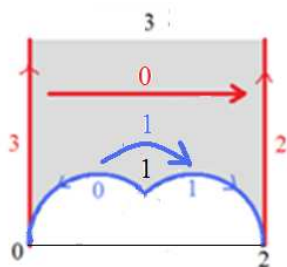


Figure 35 : Pavage dans le demi-plan de Poincaré à gauche, et dans le disque de Poincaré à droite.

### Exercice 7 : Quadrilatère à trois sommets à l'infini



On considère le quadrilatère 0123 dessiné ci-contre, dont les sommets ont pour affixe :

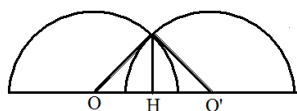
$$0 : -1 - \sqrt{2}/2$$

$$1 : i\sqrt{2}/2$$

$$2 : 1 + \sqrt{2}/2$$

$$3 : \infty$$

1) Vérifier que les cercles portant les côtés de part et d'autre du sommet 1 ont pour rayon 1 et se coupent à angle droit.



Avec deux demi-cercles se coupant à angle droit et de rayon 1, on a bien  $OH = \sqrt{2}/2$ , et avec le point  $H$  comme origine du repère, on trouve bien les affixes des sommets 0, 1, 2, 3.

2) Vérifier que les deux transformations de couplage 0 et 1 indiquées sur le dessin s'écrivent :

$$z' = z + 2 + \sqrt{2} \quad \text{et} \quad z' = \frac{(\sqrt{2}/2)z - 1/2}{z + \sqrt{2}/2}.$$

La transformation 0 est la translation faisant passer du côté 3 d'équation  $x = -1 - \sqrt{2}/2$  au côté 2 d'équation  $x = 1 + \sqrt{2}/2$ .

La transformation 1 transforme le sommet 1 en lui-même :

$$\frac{(\sqrt{2}/2)(i\sqrt{2}/2) - 1/2}{i\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2} = \frac{(-1/2)(1-i)}{(\sqrt{2}/2)(1+i)} = \frac{i}{\sqrt{2}} = i\sqrt{2}/2 \quad \text{et elle transforme le sommet 0 en 2 :}$$

$$\frac{(\sqrt{2}/2)(-1 - \sqrt{2}/2) - 1/2}{-1 - \sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2} = \frac{-1 - \sqrt{2}/2}{-1} = 1 + \sqrt{2}/2.$$

La transformation 1 fait bien passer du segment [01] au segment [21].

3) Déterminer le groupe fuchsien  $F$  dont le domaine fondamental est le quadrilatère 0123.

En faisant jouer les transformations de couplage 0 et 1, on trouve les cycles de sommets :  
(0 2), (1), (3).

Le deuxième cycle (1), avec la transformation 1, est elliptique et celle-ci vérifie la condition elliptique  $m\pi/2 = 2\pi$ , soit  $m = 4$ .

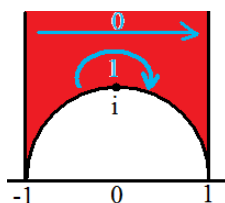
Les deux autres cycles sont paraboliques. Le cycle (3) de transformation 0 vérifie la condition parabolique puisque cette transformation est parabolique. D'autre part, le cycle (02) correspond à la transformation  $0'1$ , qui s'écrit :

$$z \xrightarrow{1} z_1 = \frac{(\sqrt{2}/2)z - 1/2}{z + \sqrt{2}/2} \xrightarrow{0'} z' = z_1 - 2 - \sqrt{2} = \frac{(\sqrt{2}/2)z - 1/2}{z + \sqrt{2}/2} - 2 - \sqrt{2} = \frac{(-2 - \sqrt{2}/2)z - 3/2 - \sqrt{2}}{z + \sqrt{2}/2}$$

Ainsi écrite, la transformation  $10'$  est normalisée, et sa trace est  $-2$ . Elle est bien parabolique.

On obtient ainsi un groupe fuchsien dont les générateurs sont les transformations 0 et 1 avec la relation  $1^4 = Id$ .

### Exercice 8 : Evolution de pavages



1) Prendre comme domaine fondamental un triangle idéal (ses trois sommets à l'infini) comme indiqué sur le dessin dans **H**. En introduisant un sommet supplémentaire en  $i$ , on définit deux transformations de couplage, la transformation  $0 : z' = z + 2$ , et la transformation  $1 : z' = -1/z$ . Donner la présentation du groupe fuchsien correspondant.

On trouve les transformations  $(0' 1)$ , (1) et (0) associées aux cycles. La transformation (0) est parabolique, ainsi que la transformation  $(0' 1)$  qui s'écrit  $z' = (-2z - 1)/z$ . Seule la transformation (1) est elliptique, et elle obéit à la condition elliptique  $m\pi = 2\pi$ , avec  $m = 2$ . La présentation du groupe fuchsien se résuit à  $(1)^2 = Id$ .

2) Partir de la figure du 1° puis dédoubler le demi-cercle. On obtient alors comme intermédiaire le domaine fondamental de l'exercice 7 précédent, pour finir par avoir deux demi-cercles tangents comme dans l'exercice 6. Visualiser les pavages correspondant à cette évolution, dans **H** et dans **D**.

Dans **D** (comme dans **H**), on a au départ un pavage par des triangles idéaux. Puis ceux-ci deviennent des quadrilatères avec trois sommets à l'infini, pour finir par un quadrilatère idéal à quatre sommets à l'infini (figure 36).

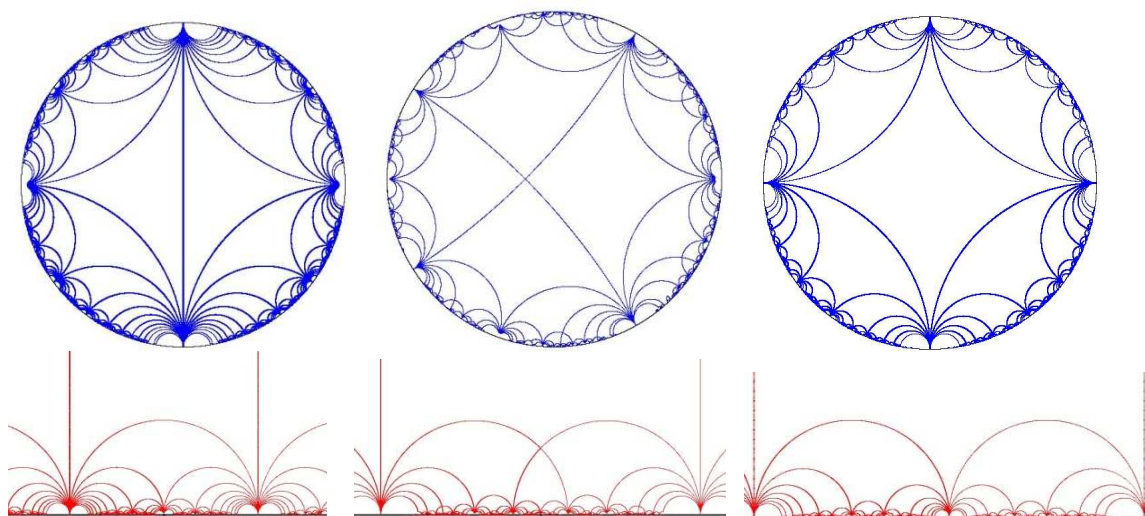


Figure 36 : Evolution des pavages dans **D** et dans **H**

## 8. Signature d'un groupe fuchsien

### 8.1. Caractéristique d'Euler et genre d'une surface

Commençons par un rappel de géométrie euclidienne. Lorsque l'on fait un découpage<sup>20</sup> d'une surface avec un nombre fini de polygones, on définit ce que l'on appelle la caractéristique d'Euler  $\chi$ , soit  $\chi = V - E + F$ , où  $V$  est le nombre de sommets,  $E$  le nombre d'arêtes et  $F$  le nombre de faces. Notamment pour un graphe planaire, qui découpe le plan en  $F$  régions, la caractéristique d'Euler est toujours égale à 2. Il en est de même pour un polyèdre de Platon qui peut se projeter sur un plan pour donner un graphe planaire. Comme par exemple pour le tétraèdre de la *figure 37*. On peut aussi placer les sommets d'un tétraèdre sur une sphère et projeter ses triangles sur la sphère. Sur une surface sphérique, toute triangulation a pour caractéristique d'Euler  $\chi = 2$ , et c'est là une sorte de caractéristique de la forme d'une telle surface.<sup>21</sup>

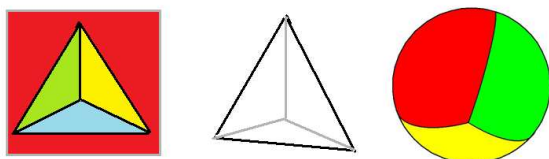


Figure 37 : Tétraèdre, avec à gauche le graphe planaire associé avec 4 sommets, 6 arêtes et 4 faces, au centre le tétraèdre en trois dimensions, et à droite sa projection sur la sphère.

En liaison avec  $\chi$ , on définit le genre  $g$  d'une surface par  $\chi = 2 - 2g$ . Ainsi une surface de forme sphérique a pour genre 0.

Il existe d'autres types de surfaces. Une surface classique est le tore. Pour le construire, on part d'un carré, puis on colle l'un sur l'autre deux côtés opposés, ce qui donne un cylindre, et enfin par étirement on accole les deux autres côtés qui avaient une forme circulaire, ce qui donne le tore (*figure 38*). Dans la triangulation finale, on a un seul sommet, deux arêtes et une face, d'où  $\chi = 1 - 2 + 1 = 0$ , et  $g = 1$ . Pour simplifier, le fait d'avoir  $g = 1$  indique que la surface possède un trou. Plus généralement le genre  $g$  indique le nombre de trous que possède une surface, et on l'appelle tore à  $g$  trous.

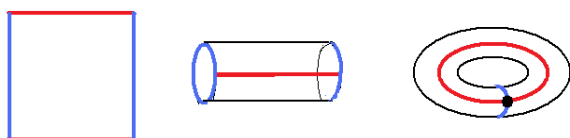


Figure 38 : Fabrication du tore, en accolant d'abord les côtés rouges, puis les côtés bleus.

### 8.2. Groupe fuchsien et sa signature

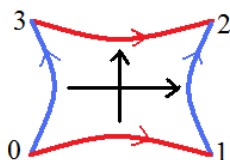
Revenons au plan hyperbolique modélisé par le demi-plan de Poincaré  $\mathbf{H}$  ou le disque de Poincaré  $\mathbf{D}$ , et considérons un groupe fuchsien  $F$ , c'est-à-dire un groupe discret d'isométries positives. Il admet un domaine fondamental (un polygone de Dirichlet) que l'on supposea ici encore d'aire finie. En ajoutant sa frontière, il peut être compact avec ses sommets en nombre fini situés à l'intérieur du disque de Poincaré, ou encore il peut avoir des sommets à l'infini, mais seulement avec un angle nul en ces points. On a vu qu'en appariant ses côtés deux à deux, on pouvait déterminer les générateurs du groupe ainsi que la présentation du groupe sous forme de relations entre ses générateurs.

<sup>20</sup> On l'appelle aussi triangulation, même si l'on n'a pas des triangles mais plus généralement des polygones.

<sup>21</sup> Si l'on dessine un polygone sur la sphère, soit  $V = E$ , on a  $F = 2$ , d'où  $\chi = 2$ . Si l'on accole un nouveau polygone (ayant  $n$  côtés) à un polygone de la triangulation, le nombre de sommets augmente de  $n - 2$ , celui des arêtes de  $n - 1$ ,  $V - E$  diminue de 1 tandis que le nombre de faces augmente de 1, d'où  $\chi$  reste inchangé. Si l'on ajoute une arête entre deux arêtes d'une triangulation de la sphère, le nombre de sommets augmente de 2, celui des arêtes augmente de 3 et celui des faces de 1, ce qui laisse inchangé le nombre  $\chi$ .

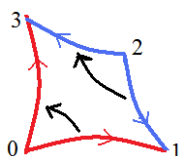
Nous allons maintenant utiliser les transformations appariant les côtés du domaine fondamental pour les coller l'un sur l'autre. La surface obtenue est l'espace quotient  $H / F$ . Donnons quelques exemples :

### 1) Le tore hyperbolique



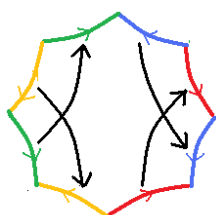
En collant les côtés *bleus* et les côtés *rouges* du domaine fondamental de la figure ci-contre, on trouve une surface qui a un seul sommet, deux arêtes et une face, d'où  $\chi = 0$  et  $g = 1$ , soit une surface avec un trou, comme en géométrie euclidienne, mais avec une différence essentielle : la somme des angles du sommet unique n'est pas égale à  $2\pi$ , mais elle est strictement inférieure à  $2\pi$ .

### 2) Quadrilatère formé de deux triangles symétriques<sup>22</sup>



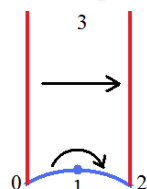
En collant les côtés de même couleur, on trouve une surface avec trois sommets, deux côtés et une face, soit  $\chi = 3 - 2 + 1 = 2$  et  $g = 0$ .

### 3) Octogone régulier avec des angles de $\pi/4$



Après collage des côtés de même couleur, on a  $V = 1$ ,  $E = 4$  et  $F = 1$ , d'où  $\chi = -2$  et  $g = 2$ . La surface  $H / F$  est un tore à deux trous. On constate d'ailleurs que la partie droite de l'octogone, tout comme sa partie gauche, est appariée comme celle du tore à un trou précédent, ce qui confirme que le genre est ici égal à deux.

### 4) Groupe modulaire



Après collage des côtés de même couleur, on trouve  $V = 3$ ,  $E = 2$  et  $F = 1$ , soit  $\chi = 2$  et  $g = 0$ .

Plus généralement, chaque cycle elliptique du domaine fondamental se réduit à un sommet dans  $H / F$ , avec une période (ou un ordre)  $m$  tel que  $m \sum(\text{angles}) = 2\pi$ . Si  $m = 1$ , soit une somme des angles égale à  $2\pi$ , on dit que le cycle est accidentel. Si  $m$  est supérieur à 1, le sommet correspondant de  $H / F$  est appelé un point marqué. Il en est de même avec un cycle parabolique, qui se réduit à un sommet, mais ce sommet est situé à l'infini et d'angle nul, et il se présente de façon imagée comme une pointe en forme d'entonnoir.

On définit alors la signature  $s(F)$  du groupe fuchsien  $F$ , soit

$s(F) = (g ; m_1, m_2, \dots, m_r ; c)$  où  
 $g$  est le genre,  
 $m_1, m_2, \dots, m_r$  sont les ordres associés aux  $r$  points marqués, ces nombres étant supérieurs à 1 (on ne tient pas compte des cycles accidentels),  
et  $c$  est le nombre de cycles paraboliques.

<sup>22</sup> Les triangles 012 et 032 sont symétriques par rapport à la droite 02. En effet, ces triangles ayant leurs trois côtés *égaux*, ils sont isométriques et leurs angles sont égaux. Appelons  $H$  le point d'intersection des diagonales 02 et 13. Avec un côté et les deux angles adjacents égaux, les triangles  $H12$  et  $H32$  sont isométriques. On en déduit que  $H$  est le milieu du segment 13 et que les diagonales sont orthogonales, d'où la symétrie.

Reprenons les quatre exemples précédents.

Dans l'exemple 1, en supposant que les 4 angles sont tous égaux à  $\alpha$ , avec  $\alpha < \pi/2$ , il existe un cycle elliptique unique (0 3 2 1) d'ordre  $m$  tel que  $4 m \alpha = 2\pi$ . Par exemple pour  $\alpha = \pi/4$ ,  $m = 2$ , et  $s(\mathbf{F}) = (1 ; 2 ; 0)$ .

Dans l'exemple 2, en supposant que l'angle en 2 vaut  $\pi/2$  et les trois autres  $\pi/4$ , on obtient trois cycles elliptiques (0), (2), (1 3) d'ordres 8, 4 et 4, et  $s(\mathbf{F}) = (0 ; 4, 4, 8 ; 0)$ .

Dans l'exemple 3, on avait vu précédemment qu'il existe un cycle elliptique unique, d'ordre  $m$  tel que  $8 m \alpha = 2\pi$ , et avec l'angle  $\alpha = \pi/4$  que nous avons choisi,  $m = 1$ , il s'agit d'un cycle accidentel. On écrit alors la signature sous la forme  $s(\mathbf{F}) = (2 ; -- ; 0)$ . Si l'on choisit un autre angle  $\alpha$ , il doit obéir à  $\alpha = \pi / (4m)$  avec maintenant  $m \geq 2$ , la surface  $\mathbf{H} / \mathbf{F}$  possède un point marqué, et la signature de  $\mathbf{F}$  est  $(2 ; m ; 0)$ .

Dans l'exemple 4, on a les deux cycles elliptiques (1) et (0 2) d'ordres 2 et 3, et un cycle parabolique (3), d'où  $s(\mathbf{F}) = (0 ; 2, 3 ; 1)$ .

Une question se pose : Mais à quoi sert la signature ? Le fait de la connaître a un premier intérêt immédiat, celui de pouvoir calculer l'aire du domaine fondamental du groupe, comme nous allons le voir.

### 8.3. Aire du domaine fondamental

Prenons un groupe fuchsien  $\mathbf{F}$  de signature  $(g ; m_1, m_2, \dots, m_r ; c)$  et appelons  $D$  un domaine fondamental. Puis considérons la triangulation de la surface  $\mathbf{H} / \mathbf{F}$  déduite de  $D$  après collage des côtés appariés. Elle a autant de sommets qu'il existe de cycles. Avec  $r$  nombre de cycles elliptiques pour les points marqués,  $s$  nombre de cycles elliptiques accidentels (avec une somme des angles égale à  $2\pi$ ) et  $c$  nombre de cycles paraboliques (avec une somme d'angles nulle), on a  $V = r + s + c$ . En appelant  $n$  le nombre de côtés du domaine fondamental, le fait de coller deux à deux les côtés donne  $E = n / 2$ . Enfin on a toujours le nombre de faces  $F = 1$ . On obtient la relation  $\chi = 2 - 2g = r + s + c - n/2 + 1$ , soit

$$n = 2(r + s + c) - 2 + 4g \text{ ou en prévision de ce qui va suivre } (n - 2)\pi = 2\pi(r + s + c - (2 - 2g))$$

Pour le cycle elliptique d'un point marqué  $j$ , la somme des angles est  $2\pi / m_j$ . La somme des angles du domaine fondamental  $D$  est donc  $2\pi s + 2\pi \sum_{j=1}^r \frac{1}{m_j}$ . Appliquons maintenant la formule de Gauss donnant l'aire  $A$  de  $D$  :

$$\begin{aligned} A &= (n - 2)\pi - \Sigma(\text{angles de } D) = 2\pi(r + s + c - (2 - 2g)) - 2\pi s - 2\pi \sum_{j=1}^r \frac{1}{m_j} \\ &= 2\pi(c - (2 - 2g) + r - \sum_{j=1}^r \frac{1}{m_j}) = 2\pi(c - (2 - 2g) + \sum_{j=1}^r (1 - \frac{1}{m_j})) \end{aligned}$$

L'aire  $A$  du domaine fondamental  $D$  est

$$A = 2\pi(2g - 2 + \sum_{j=1}^r (1 - \frac{1}{m_j}) + c)$$

Ainsi, la connaissance de la signature du groupe  $\mathbf{F}$  permet de calculer l'aire de son domaine fondamental. Par exemple, pour le groupe modulaire de signature  $(0 ; 2, 3 ; 1)$ , on retrouve bien

$$A = 2\pi(-2 + 1 - 1/2 + 1 - 1/3 + 1) = \pi/3.$$

### 8.4. Minimum de l'aire d'un domaine fondamental

On distingue deux cas, celui où il n'y a pas de cycle parabolique ( $c = 0$ ), et celui où il en existe ( $c \geq 1$ ).



### 8.4.1. Le cas elliptique

Nous allons montrer cette propriété :

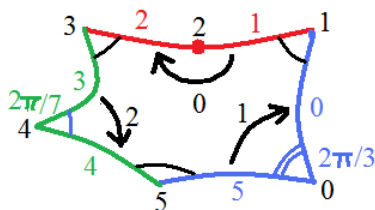
Parmi tous les groupes fuchsien  $F$  ayant uniquement des cycles elliptiques, l'aire minimale du domaine fondamental est  $\pi / 21$ . La signature de  $F$  est alors  $(0 ; 2, 3, 7 ; 0)$ .

Cela revient à démontrer que  $2g - 2 + \sum_{j=1}^r (1 - \frac{1}{m_j}) \geq \frac{1}{42}$ . Posons  $Q = 2g - 2 + \sum_{j=1}^r (1 - \frac{1}{m_j})$  où l'on a toujours  $\sum_{j=1}^r (1 - \frac{1}{m_j}) > 0$  et  $1 - \frac{1}{m_j} \geq \frac{1}{2}$ . Envisageons les cas possibles :

- \*  $g \geq 2$ . Comme  $2g - 2 \geq 2$ ,  $Q > 2 > 1/42$ .
- \*  $g = 1$ ,  $2g - 2 = 0$ , et avec  $1 - 1/m_j \geq 1/2$ ,  $Q \geq 1/2 > 1/42$ .
- \*  $g = 0$ ,  $2g - 2 = -2$ .
  - Si  $r \geq 5$ ,  $Q \geq -2 + 5/2$ ,  $Q \geq 1/2 > 1/42$ .
  - Si  $r = 4$ , on ne peut pas avoir les quatre  $m_j$  égaux à 2, l'aire ne pouvant pas être nulle. La plus petite valeur de  $Q$  est obtenue pour les quatre  $m_j$  égaux à 2, 2, 2, 3, alors  $Q = 1/6 > 1/42$ .
  - Si  $r = 3$ ,  $Q = -2 + 3 - (1/m_1 + 1/m_2 + 1/m_3) = 1 - (1/m_1 + 1/m_2 + 1/m_3)$ .  
Supposons  $m_1 \leq m_2 \leq m_3$ .  
Prenons d'abord  $m_1 \geq 3$ . Si les trois  $m_j$  sont 3, 3, 3, l'aire serait nulle. Si l'on prend 3, 3, 4,  $Q = 1/12 > 1/42$ , et pour toutes les autres valeurs,  $Q > 1/12$ .  
Prenons  $m_1 = 2$ .  
Si les trois  $m_j$  sont 2, 4, 4, l'aire serait nulle, et pour 2, 4, 5,  $Q = 1/20 > 1/42$ , et pour  $m_3 > 5$ ,  $Q > 1/20$ .  
Si les trois  $m_j$  sont 2, 3,  $m_3$ ,  $Q = 1/6 - 1/m_3$ , et la valeur minimale de  $Q$  est obtenue pour  $m_3 = 7$ , d'où  $Q = 1/42$ .  
Si les trois  $m_j$  sont 2, 2,  $m_3$ ,  $Q < 0$  ne convient pas.

L'aire minimale est obtenue pour une signature égale à  $(0 ; 2, 3, 7 ; 0)$  et elle vaut  $\pi/21$ .

L'exemple associé à ce cas est celui où le domaine fondamental est un pentagone ayant un angle de  $2\pi/3$ , un angle de  $2\pi/7$ , et les trois autres  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  ont une somme égale à  $2\pi$ , suivant la disposition de la figure ci-dessous. La somme des 5 angles vaut  $62\pi / 21 < 3\pi$ , ce pentagone existe, son aire étant positive.



Avec les appariements 0, 1, 2 indiqués sur la figure, on obtient les cycles elliptiques (0), (2), (4) d'ordres respectifs 3, 2, 7, ainsi que le cycle (1, 3, 5) dont la somme des angles est  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 2\pi$ , d'où un ordre égal à 1, et ce cycle est accidentel. Le groupe fuchsien  $F$  a pour présentation :

$$0^2 = 1^3 = 2^7 = 0 \ 1 \ 2 = Id.$$

Pour avoir le genre, on constate que  $V = 4$  (le nombre de cycles elliptiques),  $E = 3$  (la motié des côtés) et  $F = 1$ , d'où  $\chi = 2$  et  $g = 0$ . La signature du groupe est bien  $(0 ; 2, 3, 7 ; 0)$ , et l'aire du domaine fondamental est la valeur minimale  $\pi/21$ .

### 8.4.1. Le cas parabolique

Parmi tous les groupes fuchsien ayant au moins un cycle parabolique, l'aire minimale d'un domaine fondamental est  $\pi/3$ , et le groupe fuchsien correspondant est le groupe modulaire.

Posons  $Q = 2g - 2 + \sum_{j=1}^r (1 - \frac{1}{m_j}) + c$ . Il s'agit de montrer que  $Q \geq \frac{1}{6}$ . Evisageons tous les cas :

\* Si  $g \geq 1$ ,  $2g - 2 + c \geq 1$ , et  $Q \geq 1 > 1/6$ .

\* Si  $g = 0$  et  $c \geq 3$ ,  $Q \geq 1 > 1/6$ .

\* Si  $g = 0$  et  $c = 2$ ,  $Q = \sum_{j=1}^r (1 - \frac{1}{m_j}) \geq 1/2 > 1/6$ .

\* Si  $g = 0$  et  $c = 1$ ,  $Q = -1 + \sum_{j=1}^r (1 - \frac{1}{m_j})$ . Si  $r \geq 3$ ,  $Q \geq 1/2 > 1/6$ . Si  $r = 1$ , l'aire est négative. Il

reste  $r = 2$ ,  $Q = 1 - 1/m_1 - 1/m_2$ . Supposons  $m_1 \leq m_2$ . Si  $m_1 = 4$ ,  $Q > 3/4 > 1/6$ . Si  $m_1 = 3$ ,  $Q \geq 1 - 1/3 - 1/m_2$ ,  $Q \geq 1/3 > 1/6$ . Si  $m_1 = 2$ ,  $Q = 1/2 - 1/m_2$ . Pour  $m_2 = 2$ , l'aire serait nulle. Pour  $m_2 = 3$ ,  $Q = 1/6$ , et pour  $m_2 > 3$ ,  $Q > 1/6$ . L'aire minimale est obtenue pour  $g = 1$ ,  $c = 1$ ,  $m_1 = 2$  et  $m_2 = 3$ . La signature du groupe est  $(0 ; 2, 3 ; 1)$ . On en déduit que le groupe fuchsien ayant l'aire minimale est le groupe modulaire.

La connaissance de la signature nous a renseigné sur l'aire d'un domaine fondamental. Mais son intérêt essentiel va bien au-delà. En effet, la donnée des  $r + 2$  éléments qui constituent la signature va nous permettre de trouver le groupe fuchsien qui lui correspond, du moins lorsque  $c = 0$ .

## 8.4. De la signature au groupe fuchsien

Donnons-nous  $r + 1$  nombres entiers naturels  $g, m_1, m_2, \dots, m_r$ , étant entendu que  $c = 0$ . Pour pouvoir prétendre être la signature d'un groupe fuchsien, encore faut-il que l'aire du domaine fondamental soit supérieure à 0. On a alors la propriété suivante :

Etant donnés les  $r + 1$  nombres entiers  $g, m_1, m_2, \dots, m_r$ ,

avec  $g \geq 0, m_j \geq 2$  ( $1 \leq j \leq r$ , et éventuellement  $r = 0$ ), et  $2g - 2 + \sum_{j=1}^r (1 - \frac{1}{m_j}) > 0$ ,

il existe un groupe fuchsien à cycles elliptiques<sup>23</sup> qui a pour signature  $(g ; m_1, m_2, \dots, m_r ; 0)$ .

A partir de ces  $r + 1$  nombres, nous allons construire pas à pas le groupe fuchsien. Commençons par construire un polygone régulier de rayon  $t$  autour de  $O$ , avec  $4g + r$  côtés, en nous plaçant dans le disque de Poincaré **D**. Les angles entre les rayons sont égaux à  $2\pi / (4g + r)$ . On verra plus tard pourquoi avoir choisi ce nombre de côtés. Sur la *figure 39 à gauche*,  $r = 3$  et  $g = 2$ , soit un polygone régulier à 11 côtés, les sommets étant numérotés 1, 2, 3, 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24. Puis sur chacun des  $r$  premiers côtés, accolons un triangle isocèle dont la pointe fait un angle de  $2\pi / m_j$  pour  $j$  et 1 à  $r$  (*figure 39 au centre*). Appelons 1', 2', 3', ..  $r'$  ces nouveaux sommets. Les  $r$  côtés concernés sont remplacés par  $2r$  côtés, on obtient un polygone  $P$  à  $4g + 2r$  côtés. Enfin apparions les côtés deux à deux comme indiqué sur la *figure 39 à droite*.

On obtient déjà  $r$  cycles elliptiques  $(1')$ ,  $(2')$ , ...  $(r')$  correspondant à des rotations autour de ces points, avec des ordres  $m_1, m_2, \dots, m_r$ , et la condition elliptique est vérifiée pour chacun puisque  $m_j \times 2\pi / m_j = 2\pi$ .

<sup>23</sup> Un tel groupe est dit cocompact car la surface du domaine fondamental complétée par sa frontière est compacte ainsi que la surface  $H/F$ .

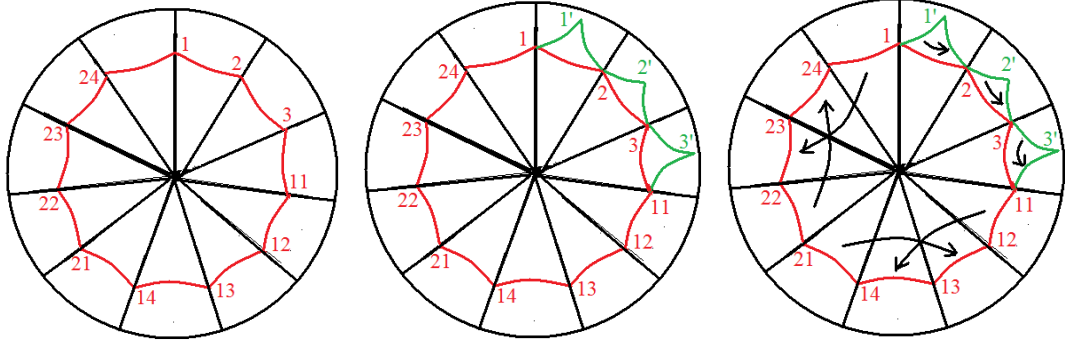
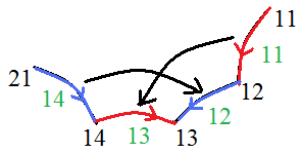


Figure 39 : A gauche le polygone régulier initial ayant  $4g + r$  sommets, ici avec  $g = 2$  et  $r = 3$ . Au centre le nouveau polygone  $P$  avec  $4g + 2r$  sommets. A droite, l'appariement des côtés de  $P$ .



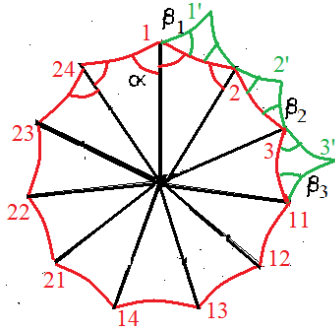
Prenons maintenant le cycle démarrant en 11. On a comme début de cycle :

$$\begin{pmatrix} 11 \\ 11 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 13 \\ 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 13 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 21 \\ 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 \\ 21 \end{pmatrix} \mapsto \dots$$

Après ces quatre premiers sommets, on passe aux quatre suivants, et cela  $g$  fois. On arrive ainsi au sommet 1, et la fin du cycle s'écrit :

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 11$ . Dans notre exemple avec  $g = 2$ , cela donne le cycle :

$$(11 \ 14 \ 13 \ 12 \ 21 \ 24 \ 23 \ 22 \ 1 \ 2 \ 3)$$



Appelons  $\alpha$  le demi-angle du polygone initial, et  $\beta_j$  chacun des deux angles du triangle isocèle  $j$ . La somme des angles associés au cycle précédent est

$$\begin{aligned} \sigma &= 4g \cdot 2\alpha + 2r\alpha + \sum (2\beta_j) \\ &= (4g + r) 2\alpha + \sum (2\beta_j) \end{aligned}$$

Rappelons que le polygone initial avait un rayon  $t$  à l'intérieur du disque de Poincaré, soit  $0 < t < 1$ . Nous allons voir que nous pouvons trouver  $t$  de façon que la somme des angles  $\sigma$  soit égale à  $2\pi$ , le cycle devenant alors accidentel.

Lorsque  $t$  tend vers 0, on est quasiment en géométrie euclidienne, avec une somme des angles d'un triangle égale à  $\pi$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \sigma &= (4g + r)(\pi - 2\pi/(4g + r)) + \sum_{j=1}^r (\pi - 2\pi/m_j) = 4g\pi + r\pi - 2\pi + r\pi - \sum_{j=1}^r 2\pi/m_j \\ &= 4g\pi - 2\pi + 2\pi \sum_{j=1}^r (1 - 1/m_j) = 2\pi (2g - 1 + \sum_{j=1}^r (1 - 1/m_j)) \\ &= 2\pi (2g - 2 + \sum_{j=1}^r (1 - 1/m_j)) + 2\pi \\ &> 2\pi \text{ puisque } 2g - 2 + \sum_{j=1}^r (1 - 1/m_j) > 0 \end{aligned}$$

Lorsque  $t$  tend vers 1, on est proche de l'infini en géométrie hyperbolique, et les angles  $\alpha$  et  $\beta_j$  tendent vers 0 :  $\lim_{t \rightarrow 1} \sigma = 0$ .

Lorsque  $t$  va de 0 à 1,  $\sigma$  va de 0 à un nombre supérieur à  $2\pi$ . Comme la variation est continue, il existe une valeur  $t_0$  de  $t$  pour laquelle  $\sigma = 2\pi$ . Cette valeur étant choisie, le cycle devient accidentel.

Les transformations appariant les côtés du polygone  $P$  engendrent un groupe fuchsien  $F$  dont le domaine fondamental est  $P$ . Cherchons la signature du groupe. On connaît déjà les  $r$  cycles elliptiques d'ordre  $m_j$ . Il reste à déterminer le genre  $g$ . La surface  $H/F$  a autant de sommets qu'il y a de cycles, soit  $V = r + 1$  car ici le cycle accidentel compte. Son nombre de côtés est  $E = 2g + r$  soit la moitié du nombre de côtés de  $P$ , et enfin le nombre de faces est  $F = 1$ . On en déduit

$\chi = r + 1 - 2g - r + 1 = 2 - 2g$ . Le groupe  $F$  que nous avons construit a bien pour signature  $(g ; m_1, m_2, \dots, m_r ; 0)$ .

Nous allons maintenant pouvoir développer notre étude sur les pavages kaléidoscopiques par des triangles, faite au *paragraphe 2*.

## 9. Les groupes de triangles

Nous avons vu qu'en prenant un triangle d'angles  $\pi/m, \pi/n, \pi/p$  avec  $m, n, p$  entiers au moins égaux à 2, on pouvait paver le plan hyperbolique avec des triangles isométriques en pratiquant des réflexions autour des trois côtés du triangle. Ces trois réflexions  $s_1, s_2, s_3$ , qui sont des isométries négatives, engendrent un groupe discret formé d'isométries positives et d'isométries négatives.

Considérons le sous-groupe  $G$  des isométries positives. Il est constitué des produits de réflexions en nombre pair.<sup>24</sup> On appelle ce groupe le groupe du triangle  $(m, n, p)$ . Et il possède la propriété suivante que nous allons démontrer :

Un groupe  $G$  est un groupe du triangle  $(m, n, p)$  si et seulement s'il est un groupe ayant pour signature  $(0 ; m, n, p ; 0)$ .

\* Considérons le groupe  $G$  du triangle  $(m, n, p)$ . Le triangle  $T$  de sommets 1, 2, 3 a ses angles indiqués sur la *figure 40 à gauche*, de façon que  $\pi/m + \pi/n + \pi/p < \pi$ . Le groupe  $G$  est formé des composées des trois réflexions  $s_1, s_2, s_3$  en nombre pair (et sans répétitions). Accolons à ce triangle  $T$  le triangle  $s_3(T)$ , ce qui donne un quadrilatère  $Q$  d'angles  $2\pi/m, \pi/p, 2\pi/n$  et  $\pi/p$ . Puis appariions les côtés deux à deux grâce aux deux rotations  $R_1$  et  $R_2$  de centres 1 et 2, et d'angles  $2\pi/m$  et  $2\pi/n$ . Cela donne trois cycles elliptiques (1), (2) et (3 3') selon les notations de la *figure 40 à droite*, avec les transformations associées  $R_1, R_2, R_1 \circ R_2$ . Or  $R_1 = s_2 \circ s_3$  et  $R_2 = s_3 \circ s_1$ . On en déduit que

$R_1 \circ R_2 = s_2 \circ s_3 \circ s_3 \circ s_1 = s_2 \circ s_1$  qui est la rotation  $R_3$  de centre 3 et d'angle  $2\pi/p$ . Elle a pour ordre  $p$ .

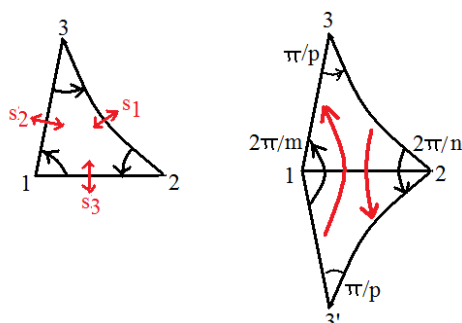


Figure 40 : A gauche, le triangle  $(m, n, p)$  et les trois réflexions  $s_1, s_2, s_3$ . A droite, le quadrilatère  $Q$  et ses deux transformations d'appariement  $R_1$  et  $R_2$  en rouge.

Grâce au théorème de Poincaré,  $Q$  est le domaine fondamental du groupe fuchsien engendré par  $R_1$  et  $R_2$ , avec comme présentation  $R_1^m = R_2^n = (R_1 \circ R_2)^p$ , et ce groupe est justement  $G$ . En passant à la

<sup>24</sup> En notant 1, 2, 3 les trois réflexions, les mots correspondants ont une longueur paire. Ils sont de la forme  $ij$  s'ils sont de longueur 2, avec  $i \neq j$  ( $i$  et  $j$  étant 1, 2 ou 3). Ils sont de la forme  $ijkl$  avec  $i \neq j, j \neq k, k \neq l$  pour une longueur 4. Etc.

surface  $H/G$ , le nombre de sommets est  $V = 3$ , le nombre d'arêtes  $E = 2$  et le nombre de faces  $F = 1$ , d'où  $\chi = 2$  et  $g = 0$ . Le groupe  $G$  a bien pour signature  $(0 ; m, n, p ; 0)$ .

\* Inversement, considérons le groupe fuchsien de signature  $(0 ; m, n, p ; 0)$ . Appliquons la méthode de construction que nous avons vue. On commence par construire dans le disque de Poincaré un triangle équilatéral 024 centré à l'origine avec un rayon  $t$  pour le moment inconnu (*figure 41*). Puis on accole à chacun de ses côtés trois triangles isocèles 102, 324 et 540 dont les pointes 1, 3, 5 ont des angles orientés  $210 = 2\pi/m$ ,  $234 = 2\pi/n$  et  $450 = 2\pi/p$ . On obtient ainsi l'hexagone 012345.

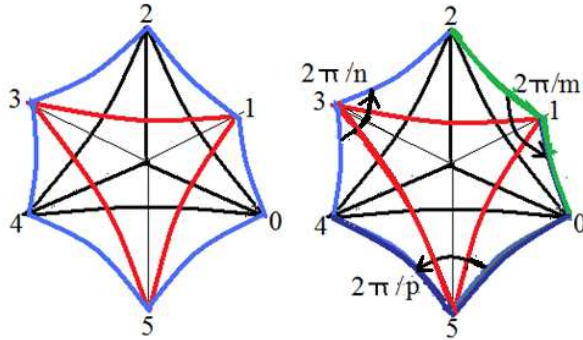


Figure 41 : Hexagone 012345.

Puis on applique les règles d'appariement, et l'on choisit le nombre  $t$  de façon que la somme des trois angles de l'hexagone en 0, 2 et 4 soit égale à  $2\pi$ . L'hexagone devient alors le domaine fondamental du groupe fuchsien de signature  $(0 ; m, n, p ; 0)$ . Sa présentation est  $R_1^m = R_2^n = (R_1 \circ R_2)^p$ .

Nous venons de trouver un groupe fuchsien qui admet deux domaines fondamentaux de forme différente : un hexagone ou un quadrilatère, ces deux domaines devant avoir la même aire. Cela semble mystérieux. Voyons comment passer de l'un à l'autre.

Constatons d'abord que l'hexagone peut être découpé en trois zones, dessinées en *jaune*, *bleu* et *vert* sur la *figure 42*. Par la rotation  $R_2$  de centre 3 et d'angle  $2\pi/n$ , le triangle vert 345 est transformé en triangle isométrique 325', avec  $R_2(4) = 2$  et  $R_2(5) = 5'$ . Par la rotation  $R_1^{-1}$  de centre 1 et d'angle  $-2\pi/m$ , le triangle bleu 105 devient le triangle 125'' avec  $R_1^{-1}(0) = 2$  et  $R_1^{-1}(5) = 5''$ . Mais on sait que  $R_3(5) = 5$ ,  $R_3$  étant la rotation de centre 5 et d'angle  $2\pi/p$ , et que  $R_3 = R_1 \circ R_2$ . On en déduit que

$R_1^{-1}(5) = R_1^{-1}(R_1 \circ R_2(5)) = R_2(5) = 5'$ , donc  $5'' = 5'$ . Les triangles 215' et 125' sont accolés suivant le côté 25'.

Remarquons aussi que la somme des trois angles en 0, 2 et 4 de l'hexagone qui doit être égale à  $2\pi$  se retrouve autour du sommet 2 avec les angles *jaune*, *vert*, *bleu* faisant un tour complet.

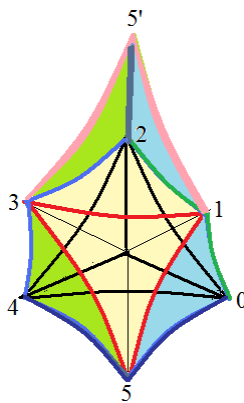


Figure 42 : L'hexagone 012345 découpé en trois surfaces, en *jaune*, *vert* et *bleu*, et les images des triangles *vert* et *bleu* sous l'effet des rotations autour de 1 et 3, d'angles  $-2\pi/m$  et  $2\pi/n$ , ce qui donne les triangles 325' et 125'

Considérons maintenant le quadrilatère 515'34, formé des deux triangles accolés 513 et 5'13. Ces deux triangles ont des côtés de même longueur. Ils sont isométriques. Leurs angles respectifs sont

égaux. Autour du sommet 3, on a ainsi  $\text{angle}531 = \text{angle}135'$ . On a aussi en ce point les angles égaux des deux triangles *verts*, et comme l'angle 432 vaut  $2\pi/n$ , l'angle 535' vaut aussi  $2\pi/n$ . On en déduit que  $\text{angle}531 = \text{angle}135' = \pi/n$ . Il en est exactement de même autour du sommet 1, et  $\text{angle}513 = \text{angle}315' = \pi/m$ . Enfin, les deux angles autour de 5' en *vert* et en *bleu* dont la somme est l'angle 35'1, se retrouvent autour du sommet 5, et en les ajoutant à l'angle 351 la somme vaut  $2\pi/p$ . D'où  $\text{angle}351 = \text{angle}35'1 = \pi/p$ . Le quadrilatère 515'34 a pour angles  $2\pi/m, \pi/p, 2\pi/n$  et  $\pi/p$ . C'est exactement ce que nous voulions. Nous sommes bien passés d'un domaine fondamental à un autre, de même aire. (figure 43).

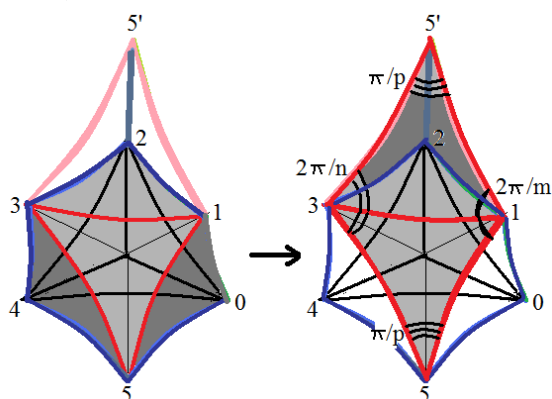


Figure 43 : Passage du domaine fondamental hexagonal au domaine fondamental en forme de quadrilatère.

En conclusion, ce que nous venons de faire, nous allons l'appliquer à un exemple faisant l'objet de l'exercice suivant.

### Exercice 9 : Le groupe du triangle (2, 4, 6)

1) a) Construire dans le disque de Poincaré le triangle  $Oab$  d'angles  $\pi/2, \pi/4$  et  $\pi/6$ . Puis en utilisant la réflexion autour de  $Ob$ , construire le quadrilatère  $Oabc$ . En déduire le pavage du disque de Poincaré à partir de ce quadrilatère. Il s'agit du pavage associé au groupe du triangle (2, 4, 6), le groupe fuchsien correspondant ayant pour signature  $(0 ; 2, 4, 6 ; 0)$ .

Commençons par construire le triangle  $Oab$ . Pour simplifier, on place le point  $a$  sur  $Ox$ , avec l'angle droit en ce point, et on prend  $\pi/6$  comme angle en  $O$  et  $\pi/4$  comme angle en  $b$ . Après la réflexion, le quadrilatère  $Oabc$  a un angle de  $\pi/3$  en  $O$ , et de  $\pi/2$  en  $a, b$  et  $c$  (figure 44 à gauche). En pratiquant un mélange des deux rotations autour de  $O$  et de  $b$  avec des angles respectifs de  $\pi/3$  et  $\pi/2$ , on obtient un pavage du disque par les quadrilatères tous isométriques avec  $Oabc$  (figure 44 à droite).

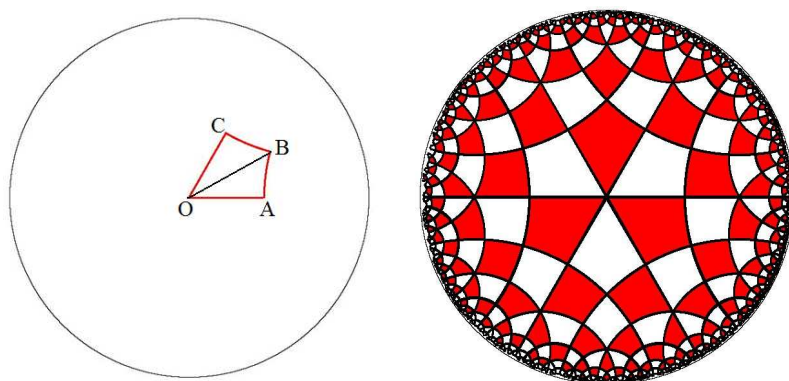


Figure 42 : A gauche le quadrilatère  $Oabc$  formé de deux triangles accolés. A droite, le pavage qui en découle, avec un angle de  $\pi/3$  et trois angles de  $\pi/2$ .



**b)** Calculer la longueur euclidienne du côté  $Oa$ , ainsi que sa longueur hyperbolique  $d(Oa)$ . Faire de même pour le côté  $ab$ .

Avec des angles de  $\pi/6$  et  $\pi/2$  en  $O$  et en  $a$ , un calcul de géométrie pure donne [AUD2013] :

$$Oa = \sqrt{\frac{-\tan(\pi/6) + \tan(\pi/6) \times \sin(\pi/6 - \pi/4) + \cos(\pi/6 - \pi/4)}{\tan(\pi/6) + \tan(\pi/6) \times \sin(\pi/6 - \pi/4) + \cos(\pi/6 - \pi/4)}} = 0,414214$$

puis  $d(Oa) = 2 \operatorname{argth}(Oa) = 0,881374$ .

Si l'on préfère, on peut aussi bien utiliser les formules trigonométriques de la géométrie hyperbolique dans un triangle de longueurs de côtés  $a, b, c$ , soit

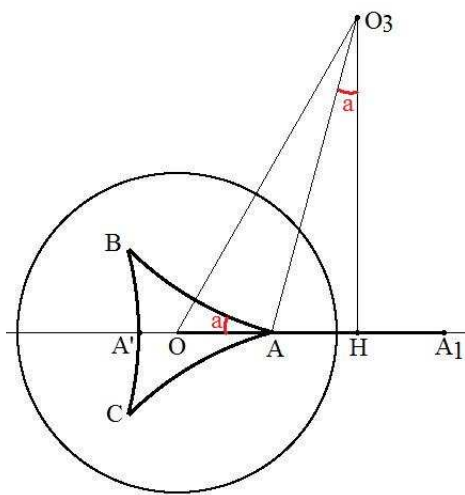
$$\cos \gamma = \sin \alpha \sin \beta \operatorname{ch} c - \cos \alpha \cos \beta,^{25} \text{ ou } \operatorname{ch} c = \frac{\cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} \text{ avec } c = d(Oa), \alpha = \pi/6, \beta = \pi/2, \gamma = \pi/4 :$$

$d(Oa) = \operatorname{Argch}(\cos(\pi/4) / (\sin(\pi/6))) = \operatorname{Argch}(\sqrt{2}) = 0,881374$ , puis on passe à la distance euclidienne, soit  $\operatorname{arc} Oa = \operatorname{th}(d(Oa) / 2) = 0,414214$ .

De même  $d(ab) = \operatorname{Argch}(\cos(\pi/6) / (\sin(\pi/4))) = \operatorname{Argch}(\sqrt{3} / \sqrt{2}) = 0,658479$  et  $\operatorname{arc} AB = 0,317837$ .

**2)** On va maintenant partir de la signature du groupe du triangle, soit  $(0 ; 2, 4, 6 ; 0)$  et construire l'hexagone qui en constitue le domaine fondamental, puis faire le lien avec le quadrilatère précédent. Pour cela on utilise la construction indiquée précédemment.

**a)** Commencer par construire un triangle équilatéral  $ABC$  centré en  $O$  et qui constitue le polygone régulier initial. On pose  $OA = OB = OC = t$  avec  $t$  entre 0 et 1. La figure obtenue dépend de ce paramètre  $t$ . Déterminer les angles du triangle  $ABC$  en fonction de  $t$ .



Prenons le point  $A$  sur  $Ox$ . Les deux autres sommets  $B$  et  $C$  sont sur des rayons issus de  $O$  et faisant un angle de  $120^\circ$  avec  $Ox$ . Le segment  $[AB]$  est une partie d'un cercle  $(C_3)$  dont le centre  $O_3$  se trouve sur la demi-droite issue de  $O$  et faisant un angle de  $60^\circ$  avec  $Ox$ . Ce cercle doit passer par  $A$  et il est orthogonal au cercle unité (de centre  $O$  et de rayon 1). Prenons le point  $A_1$  inverse de  $A$  par rapport au cercle unité, d'où  $OA_1 = 1/OA = 1/t$ . Le milieu  $H$  de  $[AA_1]$  est tel que  $OH = (t + 1/t)/2 = (t^2 + 1) / (2t)$ . Le faisceau de cercles défini par le cercle unité et la droite verticale passant par  $H$  a pour points limites  $A$  et  $A_1$ . Le faisceau de cercles qui lui est orthogonal a comme points de base  $A$  et  $A_1$ , et ses cercles ont leur centres sur la verticale en  $H$ , notamment le point  $O_3$ . Ce point a pour coordonnées  $x_{O_3} = (t^2 + 1) / (2t)$  et  $y_{O_3} = x_{O_3} \sqrt{3}$ .

Appelons  $a$  le demi-angle du triangle équilatéral  $ABC$ . On retrouve cet angle en  $AO_3H$ . Avec  $AH = OH - OA = (1 - t^2) / (2t)$ , on en déduit que  $\tan a = AH / O_3H$  et  $a = \operatorname{Arctan}(\frac{1-t^2}{(1+t^2)\sqrt{3}})$ . Le rayon  $R$  du cercle  $(C_3)$  est  $R = O_3A$  tel que  $O_3A = O_3H / \cos a = y_{O_3} / \cos a$ . A partir des points  $A$  et  $O_3$ , les rotations de  $120^\circ$  autour de  $O$  permettent d'obtenir les points  $B$  et  $C$ , ainsi que les centres  $O_1$  et  $O_2$  des deux autres cercles de rayon  $R$  qui portent les côtés du triangle équilatéral.

<sup>25</sup> Il s'agit de la formule faisant le lien entre un côté et les trois angles.

**b)** Calculer  $d(AB)$  longueur hyperbolique des côtés du triangle équilatéral, en fonction de  $t$ .

Grâce à la formule des distances dans le disque de Poincaré :

$$d(AB) = 2 \operatorname{Argth} \frac{|z_B - z_A|}{|1 - \bar{z}_A z_B|} \quad \text{avec } z_A = t \text{ et } z_B = e^{i2\pi/3} z_A = (-1/2 + i\sqrt{3}/2)t$$

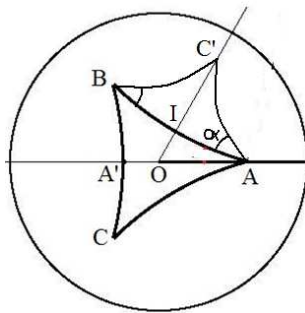
$$z_B - z_A = (-3/2 + i\sqrt{3}/2)t, \quad |z_B - z_A| = \sqrt{3}t$$

$$1 - \bar{z}_A z_B = 1 - t(-1/2 + i\sqrt{3}/2)t = 1 + t^2/2 - i(\sqrt{3}/2)t^2, \quad |1 - \bar{z}_A z_B| = \sqrt{t^4 + t^2 + 1}$$

$$d(AB) = 2 \operatorname{Argth} \frac{\sqrt{3}t}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$$

**c)** Autour des côtés du triangle équilatéral paramétré par  $t$ , on va accoler trois triangles isocèles  $BA'C$ ,  $AC'B$ ,  $CB'A$  dont les pointes ont pour angles  $\pi$ ,  $\pi/2$  et  $\pi/3$ , le double des angles du triangle (2, 4, 6). Déterminer les coordonnées du point  $A'$ , puis celles de  $B'$  et  $C'$  en calculant d'abord les angles des triangles  $AC'B$  et  $CB'A$ . On trouve ainsi l'hexagone  $AC'BA'CB'$ .

Le triangle  $BA'C$  est aplati, le point  $A'$  est le milieu de  $[BC]$ . L'inverse  $A'_1$  de  $A'$  par rapport au cercle unité est tel que  $OA' \cdot OA'_1 = 1$ ,  $OA'_1 = 1/OA'$ . Le cercle de diamètre  $[A' A'_1]$  est orthogonal au cercle unité, il passe aussi par  $B$  et  $C$ , et son centre n'est autre que  $O_1$ . On a alors  $OO_1^2 = R^2 + 1$ , et  $OA' + 1/OA' = 2 OO_1$ , soit  $OA'^2 - 2\sqrt{R^2 + 1} OA' + 1 = 0$ . Cette équation a pour solutions  $\sqrt{R^2 + 1} \pm R$ , correspondant aux distances  $OA'$  et  $OA'_1$ . Le point  $A'$  a pour abscisse (négative)  $R - \sqrt{R^2 + 1}$ , et pour ordonnée 0.



Passons au triangle isocèle  $AC'B$  d'angle  $\pi/3$ . Appelons  $\alpha$  ses deux autres angles. Il a pour axe de symétrie la droite  $(OC')$  qui passe par le milieu  $I$  de  $[AB]$ . Il est ainsi découpé en deux triangles isométriques rectangles ayant pour angles  $\pi/6$  et  $\alpha$ . Le segment  $[AI]$  a pour longueur  $d(AI) = d(AB)/2$  que l'on connaît grâce à la question 2.b.

Le triangle  $AIC'$  est isométrique avec le triangle rectangle  $ODE$  avec  $D$  sur  $Ox$  (figure 45), où l'on prend  $d(OD) = d(AI) = d(AB)/2$ , avec les angles  $\pi/6$  et  $\alpha$ . On a, en appliquant la formule donnant un côté par rapport aux trois angles :

$$\cosh(d(OD)) = \frac{\cos(\pi/6)}{\sin \alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2 \cosh(d(OD))}$$

d'où  $\alpha$  en fonction de  $d(AB)/2$  et donc de  $t$ .

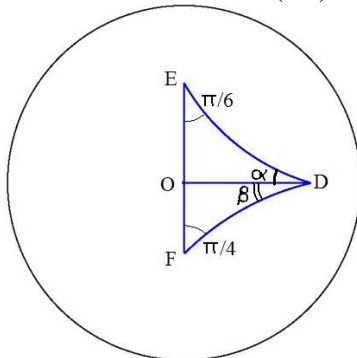
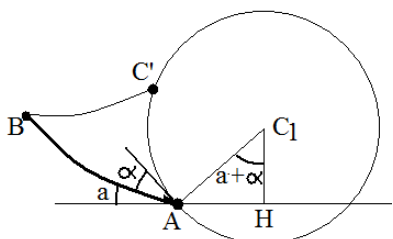


Figure 45 : Les deux triangles rectangles  $ODE$  et  $ODF$  qui sont isométriques avec les deux demi-triangles constituant les triangles isocèles accolés aux côtés  $[AB]$  et  $[CA]$  du triangle équilatéral  $ABC$ .

Faisons de même avec le triangle isocèle  $CB'A$  composé de deux triangles rectangles d'angles  $\pi/4$  et  $\beta$ . Chacun de ces triangles rectangles est isométrique avec le triangle rectangle  $ODF$  avec  $d(OD) = d(AB)/2$  et d'angles  $\pi/4$  et  $\beta$  (figure 43). On a comme précédemment :

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2 \cosh(d(OD))} \text{ d'où } \beta.$$

Connaissant les angles  $\alpha$  et  $\beta$ , on peut maintenant construire les triangles  $AC'B$  et  $CB'A$ .



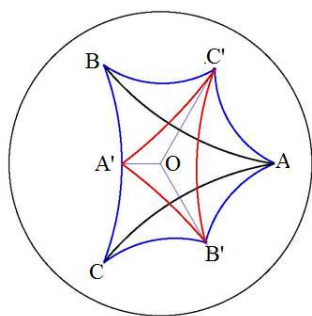
Le segment  $[AC']$  est porté par un arc de cercle faisant l'angle  $a + \alpha$  avec  $Ox$ , comme indiqué sur la figure ci-contre (avec  $a + \alpha < 90^\circ$ ), l'angle  $a$  ayant été calculé précédemment. Ce cercle, qui passe par  $A$  et qui est orthogonal au cercle unité, a son centre  $C_1$  d'abscisse  $OH$ , ce point  $H$  ayant déjà été utilisé dans la question 2a). Ce centre  $C_1$  a pour coordonnées  $x_1 = OH$  et  $y_1 = AH / \tan(a + \alpha)$ . Le rayon du cercle est  $R_1 = y_1 / \cos(a + \alpha)$ . Le point  $C'$  est à l'intersection de ce cercle et de la droite faisant  $60^\circ$  avec  $Ox$  en  $A$ , ce qui nous amène à résoudre le

système de leurs équations,  $(X - x_1)^2 + (Y - y_1)^2 = r_1^2$  et  $Y = \sqrt{3}X$ . On trouve pour  $C'$  le point de coordonnées

$$x_{C'} = \frac{x_1 + \sqrt{3}y_1 - \sqrt{\Delta}}{4} \text{ avec } \Delta = -3x_1^2 - y_1^2 + 2\sqrt{3}x_1y_1 + 4r_1^2 \text{ et } y_{C'} = \sqrt{3}x_{C'}$$

Pour les mêmes raisons, le point  $B'$  est sur le cercle faisant l'angle de  $a + \beta$  avec  $Ox$ , avec son centre  $C_2$  d'ordonnée négative, et de coordonnées  $x_2 = OH$  et  $y_2 = -AH / \tan(a + \beta)$ . Son rayon est  $R_2 = -y_2 / \cos(a + \beta)$ . Le point  $B'$  est à l'intersection de ce cercle et de la droite d'équation  $Y = -\sqrt{3}X$ , d'où

$$x_{B'} = \frac{x_2 - \sqrt{3}y_2 - \sqrt{\Delta}}{4} \text{ avec } \Delta = -3x_2^2 - y_2^2 - 2\sqrt{3}x_2y_2 + 4r_2^2 \text{ et } y_{B'} = -\sqrt{3}x_{B'}$$



Connaissant maintenant les points  $A, C', B, A', C, B'$ , on obtient l'hexagone cherché, et cela pour une valeur quelconque de  $t = OA$ . En fait, comme le point  $A'$  est sur le segment  $[BC]$ , il s'agit d'un pentagone dont les angles en  $C'$  et  $B'$  valent  $\pi/3$  et  $\pi/2$ . Ce pentagone est tracé en bleu sur la figure ci-contre, ici pour  $t = 0,75$ .

**d) Déterminer la valeur de  $t$  permettant d'obtenir l'hexagone dont les copies vont paver le disque de Poincaré.**

La valeur de  $t$  cherchée est celle qui fait que la somme des angles de l'hexagone en  $A, B$  et  $C$  soit égale à  $2\pi$ . L'angle en  $A$  vaut  $2a + \alpha + \beta$ , l'angle en  $B$  vaut  $2a + \alpha$ , et l'angle en  $C$   $2a + \beta$ . La somme est égale à  $6a + 2\alpha + 2\beta$  et elle est fonction de  $t$ . Par un calcul approché, on trouve une somme égale à  $2\pi$  pour  $t$  sensiblement égal à 0,203.

**e) Construire le triangle associé à l'hexagone ainsi que son symétrique, ce qui donne un quadrilatère pour une valeur de  $t$  quelconque. Puis, en prenant pour  $t$  la valeur trouvée ci-dessus, construire le pavage issu de ce quadrilatère. Construire aussi le pavage issu de l'hexagone (en fait un pentagone). Le quadrilatère et le pentagone sont deux domaines fondamentaux du même groupe fuchsien, de signature  $(0; 2, 4, 6; 0)$ .**

Le triangle associé à l'hexagone n'est autre que  $A'B'C'$  (figure 46). Il reste à prendre le symétrique  $A''$  du point  $A$  par rapport au cercle dont le segment  $[B'C']$  est une partie. Cela donne le quadrilatère  $A'B'A''C'$ .

Pour la valeur de  $t = 0,203$  trouvée au 2d), on sait que le triangle  $A'B'C'$  a pour angles  $\pi/2$  en  $A'$ ,  $\pi/4$  en  $B'$  et  $\pi/6$  en  $C'$ . A son tour le quadrilatère a trois angles égaux à  $\pi/2$ , et un angle de  $\pi/3$  en  $C'$  (figure 46 à droite).

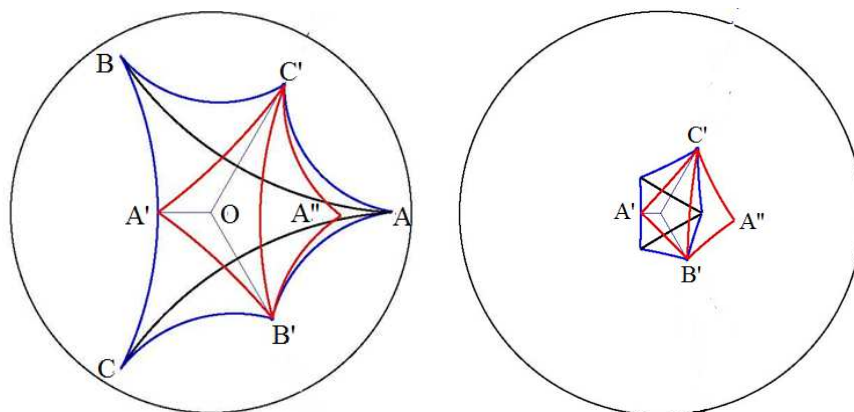


Figure 46 : On accole au triangle  $A'B'C'$  son symétrique  $A''C'B'$  par rapport au segment  $\{B'C'\}$ , ce qui donne le quadrilatère  $A'B'A''C'$  en rouge. A gauche le quadrilatère obtenu pour  $t = 0,9$ , à droite celui pour  $t = 0,203$ .

C'est ce quadrilatère qui permet de paver le disque de Poincaré (figure 47 à droite). On retrouve le même pavage que celui de la figure 44, sous un autre point de vue. Enfin on trace l'hexagone  $AC'BA'C'B'$ , puis le pavage associé (figure 47 à gauche).

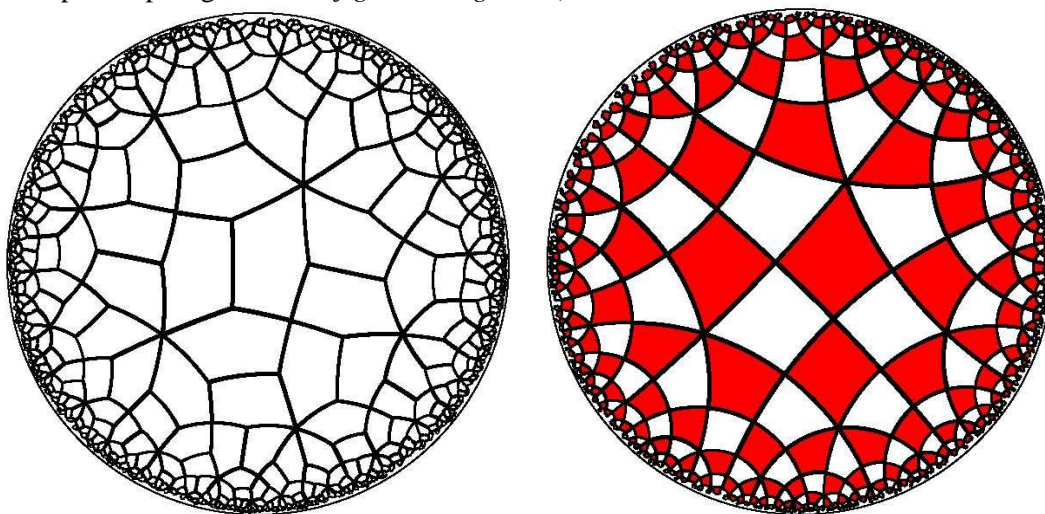
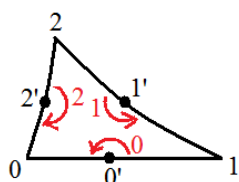


Figure 47 : A gauche, le pavage par des pentagones, à droite celui par des quadrilatères, tous deux associés au même groupe fuchsien.

## 10. Pavages à base de triangles et de quadrilatères

A la différence de ce qui précède, il existe une façon d'apparier les côtés d'un triangle quelconque par des isométries directes, à savoir des demi-tours autour des milieux de chacun des côtés.



Avec les notations de la figure ci-contre, on obtient les cycles de sommets  $(0'), (1'), (2'), (0' 1' 2')$  et les transformations correspondantes  $(0), (1), (2), (2' 1' 0')$ . Les contraintes sur les angles  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  du triangle se réduisent à  $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 < \pi$  et pour la contrainte elliptique  $m$  ( $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$ )

$= 2\pi$ , ce qui impose déjà  $m \geq 3$ . On en déduit la présentation du groupe fuchsien associé :  $(0)^2 = (1)^2 = (2)^2 = (210)^m = Id$ .

Prenons par exemple  $m = 3$ , ce qui impose  $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = (2/3)\pi$ . Si l'on désire avoir des angles de la forme  $\pi/p, \pi/q, \pi/r$  (avec  $p \leq q \leq r$ ), on trouve notamment  $p = 2, q = 12, r = 12$ , ou  $p = 3, q = 6, r = 6$ , ou encore si l'on veut un triangle non isocèle  $p = 3, q = 4, r = 6$ . Mais on peut ajouter à ces trois angles un nombre réel tels que leur somme soit nulle, ce qui respecte la contrainte  $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = (2/3)\pi$ , sous réserve que les angles restent positifs. Par exemple, dans le cas où les angles sont  $\pi/3 (= 1,047)$ ,  $\pi/4, \pi/6$ , en ajoutant et retranchant le même nombre aux angles en 0 et 2, on a notamment, en approchant du cas limite où  $\alpha_2 = 0$  :  $\alpha_0 = 1,259, \alpha_1 = 0,785$  et  $\alpha_2 = 0,05$ , ou inversement en augmentant  $\alpha_2$  :  $\alpha_0 = 0,747, \alpha_1 = 0,705$  et  $\alpha_2 = 0,562$ . Il existe donc une infinité de formes triangulaires qui pavent le disque de Poincaré.

Le triangle 012 admet trois transformés qui lui sont adjacents. En unissant le triangle avec chacun de ses trois transformés, on obtient trois formes de quadrilatères qui vont paver le disque. Ces quadrilatères ont des côtés opposés de même longueur et des angles opposés égaux. Il existe ainsi une infinité de quadrilatères qui pavent le disque de Poincaré.<sup>26</sup>

Nous allons maintenant traiter sous forme d'exercice un cas évoqué précédemment.

### **Exercice 10 : Pavages associés au cas $m = 3$ , et $p = 3, q = 4, r = 6$**

1) Donner l'écriture d'une rotation dans le disque de Poincaré. En déduire l'écriture d'une rotation d'angle  $\pi$ .

Appelons  $a$  le centre (son affixe en fait) de la rotation hyperbolique et  $\theta$  son angle. Il s'agit de trouver la transformation de Möbius directe  $R$  qui lui correspond.<sup>27</sup> On sait que la rotation  $R_0$  de centre 0 et d'angle  $\theta$  s'écrit  $z' = e^{i\theta} z$ . On sait aussi qu'une transformation de Möbius  $M$  directe transformant le point  $a$  en 0 s'écrit  $M(z) = \frac{z-a}{-\bar{a}z+1}$ . Utilisons la propriété de conjugaison en formant  $M \circ R_0 \circ M^{-1} =$

$R$  :

$$z \xrightarrow{M} Z = \frac{z-a}{-\bar{a}z+1} \xrightarrow{R_0} Z' = e^{i\theta} Z = e^{i\theta} \frac{z-a}{-\bar{a}z+1} \xrightarrow{M^{-1}} z' = \frac{Z'+a}{\bar{a}Z'+1} = \frac{(e^{i\theta}-a\bar{a})z+a(1-e^{i\theta})}{\bar{a}(e^{i\theta}-1)z+1-a\bar{a}e^{i\theta}}$$

$$\text{Finalement } R(z) = \frac{(e^{i\theta}-a\bar{a})z+a(1-e^{i\theta})}{\bar{a}(e^{i\theta}-1)z+1-a\bar{a}e^{i\theta}}$$

Pour  $\theta = \pi$ , la formule précédente devient  $R(z) = \frac{(-1-a\bar{a})z+2a}{-2\bar{a}z+1+a\bar{a}}$  avec  $a\bar{a} = |a|^2$ .

2) Construire le triangle 012, d'angle  $\pi/3$  en 0,  $\pi/4$  en 1 et  $\pi/12$  en 2, avec le point 0 en O et le point 1 sur [Ox).

Nous nous contentons de donner le résultat : **0** (0, 0), **1** (0,605, 0), **2** (0,413, 0,716).

3) Déterminer les coordonnées des milieux des trois côtés du triangle.

Appliquons les formules liant la distance non euclidienne  $d$  et la distance euclidienne :  $d(01) = 2 \operatorname{Argth} x_1$ . Avec  $m_0(x_{m0}, 0)$  milieu de [01] :

<sup>26</sup> Pour autant, à la différence de la géométrie euclidienne où tout quadrilatère pave le plan, il existe certes une infinité de quadrilatères qui pavent le disque de Poincaré, mais ceux-ci n'ont pas une forme quelconque.

<sup>27</sup> Rappelons qu'une rotation est une isométrie directe dans le disque de Poincaré **D**, et qu'elle est elliptique, avec son point fixe  $a$  dans **D**.

$$d(0\ m_0) = d(01) / 2 = \text{Argth } x_1$$

$$x_{m0} = Om_0 = \text{th } (d(0\ m_0) / 2).$$

Passons à  $m_2 (x_{m2}, y_{m2})$  milieu de  $[02]$ .

$$02 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

$$d(0\ m_2) = \text{Argth}(02)$$

$$0m_2 = \text{th}(d(0\ m_2) / 2)$$

$$x_{m2} = 0,5 \times 0m_2, y_{m2} = (\sqrt{3} / 2) \times 0m_2$$

Le milieu  $m_1(x_{m1}, y_{m1})$  de  $[12]$  est plus délicat à obtenir, car le segment  $[12]$  est circulaire. Commençons par envoyer le point 1 en 0 par l'isométrie  $M$  telle que  $M(z) = \frac{z - x_1}{-x_1 z + 1}$ , et le point 2

devient  $2' = M(2)$ . Le segment  $[0\ 2']$  a pour longueur  $02' = \sqrt{x_2'^2 + y_2'^2}$  et fait un angle  $\alpha$  avec  $[Ox]$  tel que  $\cos \alpha = x_2' / 02'$  et  $\sin \alpha = y_2' / 02'$ , d'où  $d(02') = \text{Argth}(02')$ . Le milieu  $m'_1$  de  $[02']$  est tel que  $0m'_1 = \text{th}(d(02') / 2)$ , et les coordonnées de  $m'_1$  sont  $x'_{m1} = 0m'_1 \cos \alpha$  et  $y'_{m1} = 0m'_1 \sin \alpha$ . Le milieu  $m_1$  d'affixe  $z_1$  de  $[12]$  s'obtient en faisant agir  $M^{-1}$ , soit  $z_1 = M^{-1}(z'_1)$ , avec  $M^{-1}(z') = \frac{z' + x_1}{x_1 z' + 1}$

4) Construire les trois transformés du triangle initial  $012$  par les trois demi-tours de centre les milieux  $m_0$ ,  $m_1$  et  $m_2$  des côtés. Puis construire le pavage du disque de Poincaré qui découle de l'action des composés de ces demi-tours.

Il suffit d'appliquer la formule des demi-tours donnée au 1°. On obtient les résultats donnés sur la figure 48.

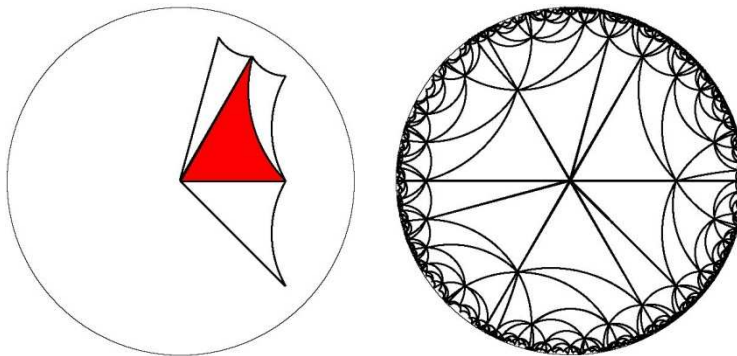


Figure 48 : A gauche le triangle initial 012 en rouge, et ses trois transformés par demi-tours. A droite, le pavage du disque de Poincaré par des triangles tous isométriques avec le triangle 012.

5) Regrouper le triangle 012 avec chacun de ses trois transformés par demi-tour. On trouve trois formes de quadrilatère. Construire les trois pavages correspondants.

Quel que soit le demi-tour effectué, le quadrilatère a ses côtés opposés de même longueur. Avec le demi-tour autour de  $m_0$  milieu de  $[01]$ , le quadrilatère a deux angles opposés égaux à  $7\pi/12$  et les deux autres égaux à  $\pi/12$ . Avec le demi-tour autour de  $m_1$ , les quatre angles sont tous égaux à  $\pi/3$ . On retrouve le même type de pavage que celui que l'on avait trouvé sur la figure 30. Avec le demi-tour autour de  $m_2$ , on a deux angles opposés de  $5\pi/12$  et les deux autres de  $\pi/4$ . Les résultats sont donnés sur la figure 49.



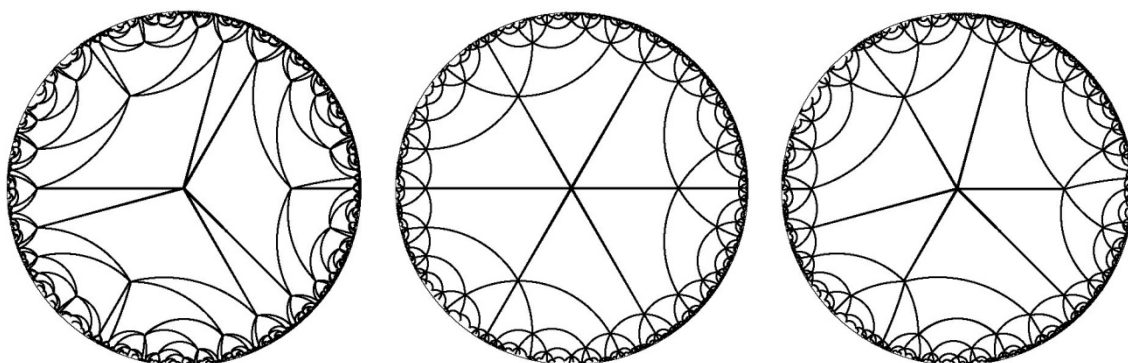


Figure 49 : Pavage par des quadrilatères isométriques. A gauche le quadrilatère est formé du triangle 012 et de son transformé autour de  $m_0$  milieu de  $[01]$ . Au centre le quadrilatère est constitué de 012 et de son transformé autour de  $m_1$ , et à droite est utilisé le demi-tour de centre  $m_2$ .

6) Prendre maintenant des angles  $\alpha_0 = 1,259$ ,  $\alpha_1 = 0,785$  et  $\alpha_2 = 0,05$ , puis  $\alpha_0 = 0,747$ ,  $\alpha_1 = 0,705$  et  $\alpha_2 = 0,562$ , la contrainte  $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = (2/3)\pi$  étant satisfaite

Les résultats sont donnés sur la figure 50.

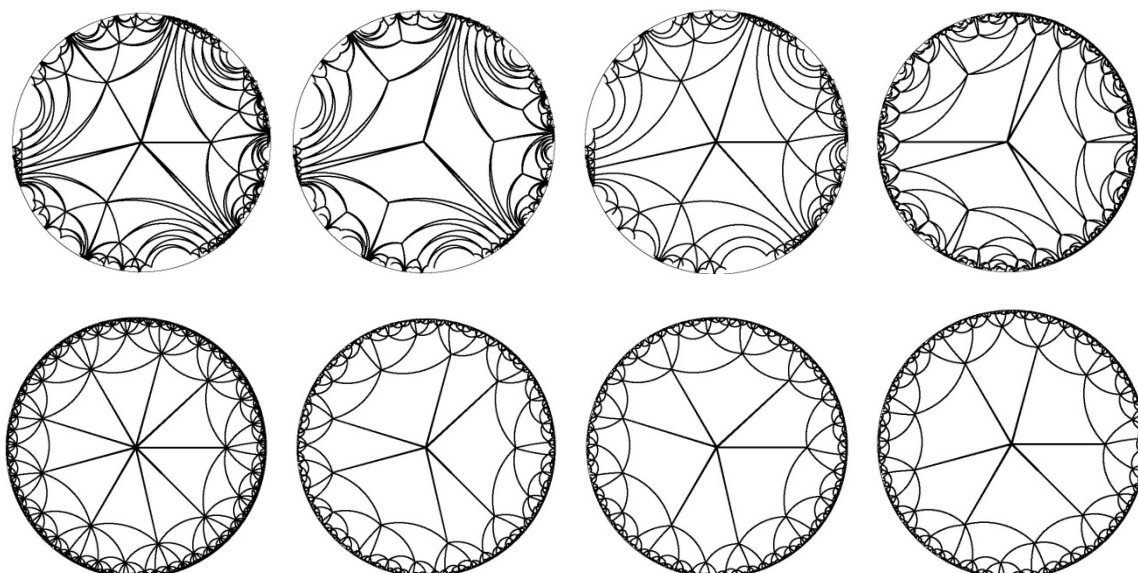
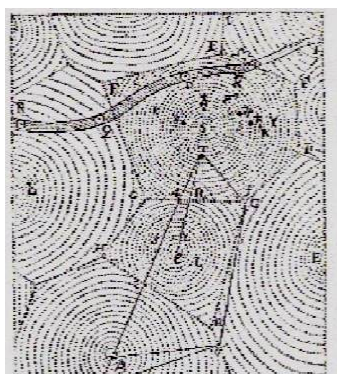


Figure 50 : Les deux cas, en haut et en bas. A gauche le pavage par des triangles, et ensuite les pavages avec les trois formes de quadrilatère.

### Quelques dessins historiques





En haut à gauche, premier dessin d'un pavage hyperbolique paru dans un livre de F. Klein et R. Fricke en 1890, au centre une oeuvre de M.C. Escher en 1958, à droite un dessin sur ordinateur d'après une oeuvre plus récente de J.F. Rigby (avec son motif indiqué à côté). En bas cellules de Descartes (dans son livre *Traité de la lumière*, 1640), plus tard appelées cellules de Voronoi, ou de Dirichlet.

## Bibliographie

\* *PDF sur Internet* :

Deux très bonnes introductions à la géométrie hyperbolique :

[WAL2019] C. Walkden, *Hyperbolic Geometry*, MATH21052, 2019

[SER2010] C. Series, *Hyperbolic Geometry*, MA 448, 2010.

Autres documents pour aller plus loin :

J. Cannon, W. Floyd, R. Kenyon, W. Parry, *Hyperbolic Geometry*, MSRI Publications, 1997.

O. Lacourte, Groupes de Coxeter, Pavages, E.N.S. Rennes, 2015.

K. Mann, *DIY hyperbolic geometry*, Berkeley Math, 2015.

O. Rémy, Groupes Fuchsien et Flot Géodésique (*PDF sur Internet*), 2016.

\* *Ouvrages de base* :

A.F. Beardon, *The Geometry of Discrete Groups*, Graduate Texts on Mathematics, Springer, 1983.

S. Katok, *Fuchsian Groups*, The University of Chicago Press, 1992.

\* *Sur les pavages* :

[AUD2013] P. Audibert, *Géométrie des pavages*, éditions Lavoisier, 2013.