

Disque de Poincaré et géométrie hyperbolique

Le disque de Poincaré est un autre modèle du plan hyperbolique. Toute la géométrie non-euclidienne va se passer à l'intérieur d'un disque, et dans ce disque, l'inversion va jouer un rôle essentiel. Dans tout ce qui suit, les objets de la géométrie hyperbolique seront mis en italique, pour les distinguer des objets de la géométrie euclidienne qui vont les représenter dans cette modélisation. Au départ, les angles hyperboliques sont considérés comme égaux aux angles euclidiens : le modèle est conforme.

1. Le disque de Poincaré et sa métrique

Les points sont tous situés dans le disque de Poincaré, noté \mathbf{D} , avec son centre O et son rayon égal à 1, dont la frontière – le cercle limite $\partial\mathbf{D}$ – est exclue (*figure 1*). Il s'agit des points de coordonnées (x, y) ou d'affixe complexe z , dont la distance (euclidienne) au centre O du disque est inférieure à 1 :

$$|z| < 1 \text{ ou } x^2 + y^2 < 1$$

Mais la notion de distance va changer : la distance non-euclidienne pourra devenir infinie alors même que l'on reste à l'intérieur du disque où les distances euclidiennes, celles que nous avons l'habitude d'utiliser, restent finies. Le cercle limite $\partial\mathbf{D}$, appelé aussi horizon, est censé représenter l'infini, et les *droites* de la géométrie hyperbolique, comme les droites euclidiennes s'étendant à l'infini des deux côtés, auront aussi leurs limites extrêmes sur ce cercle, comme nous le verrons par la suite.

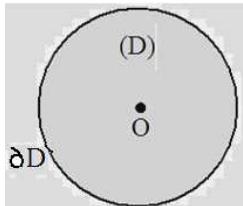


Figure 1 : L'univers hyperbolique tient dans ce disque unité \mathbf{D} , son cercle frontière $\partial\mathbf{D}$ étant exclu.

Nous allons d'abord définir la métrique dans \mathbf{D} en la déduisant de celle dans le demi-plan de Poincaré \mathbf{H} .

1.1. Transport des distances de \mathbf{H} vers \mathbf{D}

On a vu précédemment que la transformation de Möbius M telle que $z \rightarrow z' = (z - i) / (z + i)$ était une bijection conforme de \mathbf{H} sur \mathbf{D} (*cf. exercice 3 sur la transformation de Cayley dans le chapitre : les transformations de Möbius*). La bijection inverse est $M^{-1} : z = i \frac{z' + 1}{-z' + 1}$. Par dérivation :

$$\frac{dz}{dz'} = \frac{2i}{(z'-1)^2} \text{ et } |dz| = \frac{2|dz'|}{|z'-1|^2}$$

D'autre part, $y = \operatorname{Im} z = \frac{1 - |z'|^2}{|1 - z'|^2}$. On en déduit que

$$\frac{|dz|}{\operatorname{Im} z} = \frac{2|dz'|}{|1 - z'|^2} \frac{|1 - z'|^2}{1 - |z'|^2} = \frac{2|dz'|}{1 - |z'|^2}$$

Or $|dz| / \operatorname{Im} z$ est la distance hyperbolique dans le demi-plan **H**. Nous allons choisir comme distance dans le disque de Poincaré celle qui lui est égale, soit $\frac{2|dz|}{1-|z|^2}$. La transformation de Cayley qui fait passer de **H** à **D** est alors une isométrie. Finalement :

Dans le disque de Poincaré **D**, la distance infinitésimale $d(z, z + dz)$ entre deux points $z = x + iy$ et $z + dz = (x + dx) + i(y + dy)$ est

$$d(z, z + dz) = \frac{2|dz|}{1-|z|^2} = \frac{2\sqrt{dx^2 + dy^2}}{1-x^2-y^2}$$

La distance hyperbolique $d(z, z + dz)$ se trouve ainsi reliée à la distance euclidienne $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, celle que nous avons l'habitude d'utiliser. En passant de la forme cartésienne (x, y) à la forme trigonométrique (r, θ) , on a aussi $dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$ et la formule devient :

$$d(z, z + dz) = \frac{2\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}}{1-r^2}$$

Lorsque les points z et $z + dz$ sont sur un même rayon du disque, l'angle θ est fixe, et la *distance* devient $d(z, z + dz) = \frac{2 dr}{1-r^2}$. En prenant deux points A et B sur un même rayon avec $OA = r_A$ et $OB = r_B$, on en déduit :

$$d(A, B) = 2 \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{1-r^2} = \int_{r_A}^{r_B} \left(\frac{1}{1-r} + \frac{1}{1+r} \right) dr = \left[\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) \right]_{r_A}^{r_B} = \ln \frac{(1+r_B)(1-r_A)}{(1-r_B)(1+r_A)}$$

Notamment $d(O, M) = \ln \frac{1+r}{1-r}$ pour tout point M situé à une distance r du centre.

1.2. Distances à partir de **O** sur un rayon du disque

On constate bien que la *distance* $d(O, M)$ du centre O du cercle de Poincaré à un point M ne dépend que de sa distance au centre, c'est-à-dire de $r = OM$ (la distance euclidienne), et que la *distance* entre A et B sur un même rayon ne dépend que de r_A et r_B , distances des points A et B par rapport à O .

On a aussi $e^{d(O,M)} = \frac{1+r}{1-r}$ d'où $r = \frac{e^{d(O,M)} - 1}{e^{d(O,M)} + 1}$, soit avec $r = OM$:

$$OM = \operatorname{th} \frac{d(OM)}{2} \text{ ou inversement } d(OM) = 2 \operatorname{Argth} OM$$

La fonction *Argth*, inverse de la fonction tangente hyperbolique, est une bijection de $[0, 1]$ sur \mathbf{R}_+ , dont la courbe représentative est tracée sur la figure 2. On vérifie ainsi que la *distance* $d(O, M)$ devient infinie lorsque r tend vers 1, c'est-à-dire lorsque M s'approche de l'horizon. Des cercles concentriques de centre O et séparés l'un de l'autre par la même *distance* apparaissent exponentiellement de plus en plus proches en s'approchant de l'horizon dans le disque de Poincaré.

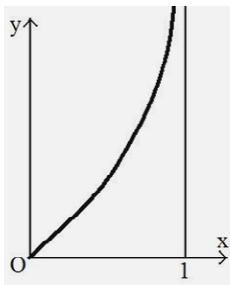


Figure 2 : La courbe d'équation $y = \operatorname{Argth} x$. La distance hyperbolique $d(O, M)$, soit $2y$, tend vers l'infini lorsque $OM (=x)$ tend vers 1.

Lorsque l'on prend le segment $[AB]$ sur un rayon du disque, il est plus court que tout autre chemin joignant A et B . Le segment $[AB]$ est une géodésique, il est donc un *segment*. Par extension, les diamètres du disque portent des géodésiques, et sont donc des *droites* (figure 3).

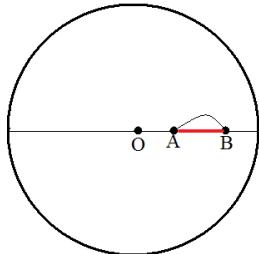


Figure 3 : Un segment $[AB]$ et le diamètre correspondant qui est une *droite*.

A ce stade, avec le transport de la distance de **H** vers **D**, on peut faire découler toutes les propriétés dans **D** de celles de **H**. Dans l'exercice suivant, on verra notamment quelle est la forme des isométries directes dans **D**. Et dans *l'exercice 3 du chapitre sur les transformations de Möbius*, nous avons vu que les *droites* (géodésiques) dans **D** sont des arcs de cercles orthogonaux au cercle frontière ∂D . Mais dans ce qui suit, nous avons préféré retrouver directement les propriétés dans **D**, indépendamment de ce que nous savons dans **H**. Cela facilitera notamment la programmation des dessins dans **D**.

Exercice 1 : Isométries directes dans **D, à partir de celles dans **H****

On sait que les isométries directes de **H** sont les transformaitons de Möbius M de la forme $z' = M(z) = (az + b) / (cz + d)$ avec a, b, c, d réels et $a d - b c > 0$. En déduire que les isométries directes de **D** sont de la forme $z' = \frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta} z + \bar{\alpha}}$ avec $|\alpha|^2 - |\beta|^2 > 0$.

Dans **H**, on passe de z à z' par $z' = M(z)$. D'autre part, z a pour transformé Z par la transformation de Cayley f faisant passer de **H** à **D**, et z' a pour transformé Z' par f . Comment passe-t-on de Z à Z' ? On a $Z' = f(z') = f(M(z)) = f(M(f^{-1}(Z)))$, soit $Z' = M'(Z)$ avec $M' = f \circ M \circ f^{-1}$.

On sait que $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$ et $f^{-1}(z) = \frac{-iz-i}{z-1}$. Le calcul donne :

$Z' = M'(Z) = \frac{\alpha Z + \beta}{\bar{\beta} Z + \bar{\alpha}}$ avec $\alpha = a + d + i(b - c)$ et $\beta = a - d - i(b + c)$. On constate que $|\alpha|^2 = (a+d)^2 + (b-c)^2$ et $|\beta|^2 = (a-d)^2 + (b+c)^2$, soit $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 4(a d - b c) > 0$.

Comme M et f sont des isométries directes, on en déduit que les transformations de Möbius M' sont des isométries directes dans **D**.

2. Transformations de Möbius dans le disque de Poincaré

Parmi les transformations de Möbius dans le corps des complexes \mathbf{C} , il s'agit de déterminer celles qui conservent le disque de Poincaré \mathbf{D} . Pour ce faire, nous allons nous donner leur forme et vérifier ensuite que celle-ci convient.

Prenons les transformations de Möbius de la forme : $M(z) = e^{i\theta} \frac{z-m}{1-\bar{m}z}$, avec m dans \mathbf{D} , et montrons qu'elles transforment \mathbf{D} en \mathbf{D} . En effet $|M(z)| = \frac{|z-m|}{|1-\bar{m}z|} < 1$ équivaut à $(z-m)(\bar{z}-\bar{m}) < (1-\bar{m}z)(1-m\bar{z})$ soit après calcul $z\bar{z}(1-|m|^2) < 1-|m|^2$ ou encore $|z|^2 < 1$ puisque $|m| < 1$, c'est-à-dire $|z| < 1$. Remarquons aussi que le cercle horizon ∂D délimitant le disque de Poincaré ($|z| = 1$) est conservé par ces transformations ($|M(z)| = 1$).

Ainsi, les transformations de Möbius de la forme précédente sont des bijections conformes dans \mathbf{D} , ce qui signifie qu'elles appartiennent à l'ensemble $\text{Aut}(\mathbf{D})$ des automorphismes (bijections conformes) de \mathbf{D} . On peut même montrer que toute transformation conforme qui conserve \mathbf{D} est aussi une transformation de Möbius de cette forme.¹

L'ensemble des transformations de Möbius qui conservent \mathbf{D} forme le sous-groupe du groupe $\text{Aut}(\mathbf{C})$ ² des transformations de Möbius dans l'ensemble des complexes \mathbf{C} . Et ces transformations sont toutes de la forme :

$$M(z) = e^{i\theta} \frac{z-m}{1-\bar{m}z} \text{ avec } m \text{ dans } \mathbf{D}.$$

Ces transformations peuvent aussi bien s'écrire : $M(z) = \frac{az+b}{bz+\bar{a}}$ avec $|a| > |b|$.³

$$\text{En effet, } M(z) = \frac{az+b}{bz+\bar{a}} = \frac{\frac{a}{\bar{a}}z + \frac{b}{\bar{a}}}{\frac{b}{\bar{a}}z + 1} = \frac{a}{\bar{a}} \frac{z - (\frac{-b}{\bar{a}})}{1 - (\frac{-b}{\bar{a}})z}.$$

¹ Cette démonstration dépasse un peu le cadre de notre étude, car elle fait intervenir le lemme de Schwarz. Considérons un automorphisme quelconque g de D , ainsi que la transformation de Möbius $f(z) = \frac{z-m}{1-\bar{m}z}$ avec $m = g^{-1}(0)$ (c'est aussi un automorphisme de \mathbf{D}). On en déduit $f(m) = 0$, $f^{-1}(0) = m$, et $g(f^{-1}(0)) = g(m) = 0$, soit $h(0) = 0$, avec $h = g \circ f^{-1}$ qui est un automorphisme de \mathbf{D} . En appliquant alors le lemme de Schwarz, on a $|h(z)| \leq |z|$. Faisons de même avec h^{-1} : $|h^{-1}(h(z))| \leq |h(z)|$, soit $|z| \leq |h(z)|$. Finalement $|h(z)| = |z|$. Il en déduite que $h(z) = e^{i\theta} z$, et $h(f(z)) = e^{i\theta} f(z)$, soit $g(z) = e^{i\theta} f(z) = e^{i\theta} \frac{z-m}{1-\bar{m}z}$, qui est bien une transformation de Möbius de la forme cherchée.

² Rappelons que les automorphismes de \mathbf{C} , qui ne sont autres que les transformations de Möbius dans \mathbf{C} , sont les bijections conformes (conservant les angles orientés) dans \mathbf{C} .

³ $|a| > |b|$ s'écrit aussi bien $|a|^2 > |b|^2$, ou $|a|^2 - |b|^2 > 0$. Sous forme normalisée, on prend $|a|^2 - |b|^2 = 1$. Remarquons que l'on retrouve le résultat obtenu dans l'exercice 1.

Posons $m = -b/a$ qui est tel que $|m| < 1$. D'autre part, a/\bar{a} est un nombre de module 1, qui peut s'écrire $e^{i\theta}$. On trouve bien $M(z) = e^{i\theta} \frac{z-m}{1-\bar{m}z}$, avec m dans \mathbf{D} . On peut faire de même en sens inverse.

Nous allons maintenant montrer que ces transformations de Möbius sont bien des isométries directes. Pour cela dérivons $z' = e^{i\theta} \frac{z-m}{1-\bar{m}z}$, soit $dz' = e^{i\theta} \frac{1-|m|^2}{(1-\bar{m}z)^2} dz$. Le segment infinitésimal dz'

$$\text{de longueur euclidienne } |dz'| \text{ a pour longueur hyperbolique } ds' = \frac{|dz'|}{1-|z'|^2} = \frac{(1-|m|^2)|dz|}{(1-\bar{m}z)^2(1-|z'|^2)} \text{ avec}$$

$$1-|z'|^2 = 1 - \frac{|z-m|^2}{|1-\bar{m}z|^2} = \frac{|1-\bar{m}z|^2 - |z-m|^2}{|1-\bar{m}z|^2} = \frac{1-|z|^2 - |a|^2 + |a|^2|z|^2}{|1-\bar{m}z|^2} = \frac{(1-|z|^2)(1-|a|^2)}{|1-\bar{m}z|^2}$$

$$1-|z'|^2 = 1 - \frac{|z-m|^2}{|1-\bar{m}z|^2} = \frac{|1-\bar{m}z|^2 - |z-m|^2}{|1-\bar{m}z|^2} = \frac{1-|z|^2 - |m|^2 + |m|^2|z|^2}{|1-\bar{m}z|^2} = \frac{(1-|z|^2)(1-|m|^2)}{|1-\bar{m}z|^2}$$

$$\text{Finalement } ds' = \frac{|dz|}{1-|z|^2} = ds$$

Les transformations de Möbius que nous avons prises sont bien des isométries et plus précisément des isométries directes puisque ces transformations conservent les angles orientés.

A ce stade, résumons ce que nous avons montré : Le groupe des transformations M de Möbius de la forme $M(z) = e^{i\theta} \frac{z-m}{1-\bar{m}z}$ avec $|m| < 1$ ou de la forme équivalente $M(z) = \frac{az+b}{bz+a}$ avec $|a| > |b|$, forment

le groupe des bijections conformes $\text{Aut}(\mathbf{D})$ du disque de Poincaré \mathbf{D} . Elles sont aussi des isométries directes de \mathbf{D} . Deux questions restent en suspens : qu'est-ce qui se cache derrière ces transformations de Möbius que nous avons choisies *a priori*, pour vérifier qu'elles conviennent ? Et parmi les isométries directes de \mathbf{D} , en existe-t-il d'autres que celles que nous avons prises ? Nous y répondrons plus tard.

D'où vient la formule $M(z) = e^{i\theta} \frac{z-m}{1-\bar{m}z}$ avec $|m| < 1$?

Pour le comprendre, prenons une transformation de Möbius M qui conserve le disque \mathbf{D} . Il existe un point (ou le nombre complexe associé) m unique (avec $|m| < 1$) qui est transformé en O . D'autre part, considérons l'inversion de cercle ∂D : elle transforme m en $1/\bar{m}$. Grâce au principe de symétrie, les points $M(m) = 0$ et $M(1/\bar{m})$ sont inverses par l'inversion de cercle $M(\partial D) = \partial D$. Cela implique que $M(1/\bar{m}) = \infty$. Si l'on ajoute que $M(m) = 0$, la transformation s'écrit sous la forme

$$M(z) = k \frac{z-m}{-mz+1} \text{ où } k \text{ est un nombre complexe quelconque.}$$

Imposons en plus que le point 1 sur ∂D aille en $M(1) = e^{i\phi}$ lui aussi sur ∂D , ce qui s'écrit $k \frac{1-m}{1-\bar{m}} = e^{i\phi}$, $k = \frac{1-\bar{m}}{1-m} e^{i\phi}$, d'où $|k| = 1$, et $k = e^{i\theta}$. Avec $m \rightarrow 0$, $1/\bar{m} \rightarrow \infty$ et $1 \rightarrow e^{i\phi}$, on a trouvé

une transformation M unique sous la forme $M(z) = e^{i\theta} \frac{z-m}{1-\bar{m}z}$. C'est bien la formule annoncée.

Les transformations de Möbius qui conservent \mathbf{D} dépendent des deux paramètres m et θ (soit trois nombres réels, en prenant les deux coordonnées de m), et on peut les indexer sous la forme $M_{m,\theta}$. On a alors $M_{m,\theta} = M_{0,0} \circ M_{m,0}$, où $M_{0,0}$ est la rotation de centre O et d'angle θ et où $M_{m,0}(z) = \frac{z-m}{-\bar{m}z+1}$.

Connaissant la forme des automorphismes de \mathbf{D} , qui sont comme on l'a vu des isométries directes, nous sommes en mesure de savoir quelles sont les *droites* dans le disque \mathbf{D} .

2. Les droites en géométrie hyperbolique

Nous avons déjà vu, dans le *paragraphe 1*, que les diamètres de \mathbf{D} sont des droites. Prenons maintenant deux points m et p qui ne sont pas sur un diamètre. Par ces points passe un cercle unique (Γ) qui est orthogonal au cercle horizon ∂D . Appliquons la transformation de Möbius M telle que $M(z) = \frac{z-m}{1-\bar{m}z}$. Le point m est transformé en 0 et le point p devient p' . On sait qu'une transformation de Möbius transforme un cercle généralisé en cercle généralisé en conservant les angles orientés. L'arc mp du cercle (Γ) orthogonal à ∂D devient donc un segment $[Op']$ porté par un diamètre (car un cercle passant par O n'est jamais orthogonal au cercle ∂D). On sait aussi que la transformation M est une isométrie, et son inverse M^{-1} aussi. Comme le plus court chemin de O à p' est le segment $[Op']$, l'arc de cercle mp de (Γ) est aussi le plus court chemin de m à p . On en déduit que l'arc mp du cercle (Γ) est une géodésique, et que l'arc du cercle (Γ) situé dans \mathbf{D} est une *droite*, ses deux points à l'infini étant situés à l'intersection avec ∂D (*figure 4*). Remarquons que cette *droite*, partie d'un cercle orthogonal à ∂D , ne peut jamais passer en O , à la différence d'une *droite* qui est un diamètre.

On trouvera sur la *figure 5* quelques tracés de droites dans le disque de Poincaré.

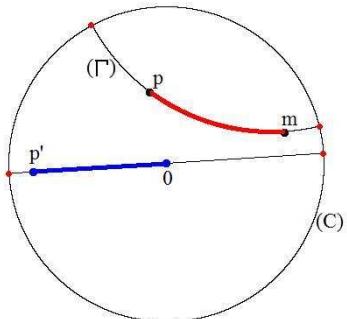


Figure 4 : Segment $[mp]$ transformé en segment $[Op']$ par une transformation de Möbius.

En résumé :

Dans le disque de Poincaré, une *droite* est un arc de cercle généralisé, orthogonal au cercle limite ∂D , c'est-à-dire :
soit une partie de cercle orthogonal au cercle ∂D , située dans le disque \mathbf{D} ,
soit un segment diamétral, passant par O .

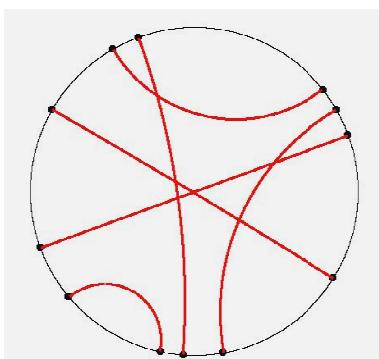


Figure 5 : Droites dans le disque de Poincaré.

Exercice 2 : Construction d'une droite à partir de ses deux points limites

A partir de deux points A et B sur le cercle limite ∂D , construire la droite hyperbolique (AB) .

Dans le cas où les points A et B sont diamétralement opposés, la *droite* est représentée par le segment $[AB]$. Sinon, il s'agit de construire le cercle passant par A et B et orthogonal au cercle ∂D . Le centre I de ce cercle est situé sur la médiatrice (OH) de $[AB]$, et sur la perpendiculaire menée par A à (OA) . Ayant ainsi obtenu le centre I , le cercle a pour rayon IA . Pour avoir la *droite* associée, on ne garde de ce cercle que la partie incluse dans le disque (D) (figure 6).

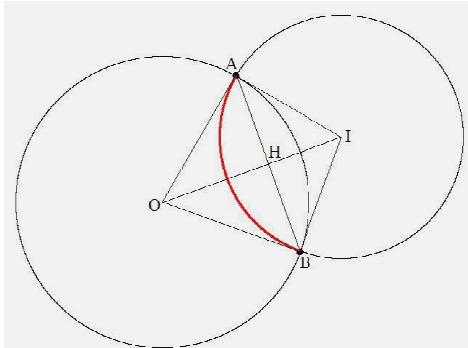


Figure 6 : Construction d'une *droite* de points limites A et B donnés

Remarquons qu'il existe une droite et une seule passant par deux points donnés, comme le montre la construction précédente. Par contre, le cinquième postulat d'Euclide n'est plus valable. On constate en effet que par un point on peut mener plusieurs parallèles à une droite.

On dit que deux droites sont parallèles lorsqu'elles n'ont aucun point en commun, ou encore lorsqu'elles ne se rencontrent qu'à l'infini. En géométrie hyperbolique, cela donne deux cas (figure 7) :

* les deux *droites* ont un de leurs points limites en commun. On dit qu'elles sont parallèles, ou asymptotiques.

* les deux *droites* n'ont aucun point commun. On dit qu'elles sont ultra-parallèles.

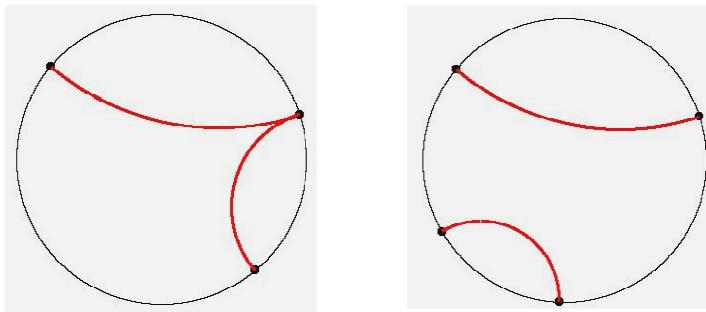


Figure 7 : Deux *droites* parallèles asymptotiques à gauche, deux *droites* ultra-parallèles à droite.

On dispose alors des deux propriétés suivantes, en tenant compte de la nuance faite entre *droites* parallèles asymptotiques et *droites* ultra-parallèles :

Par un point, on peut mener deux *droites* parallèles asymptotiques à une même *droite*.

Par un point, on peut mener une infinité de *droites* ultra-parallèles à une même *droite* (celle-ci ne contenant pas le point).

Etant donnée une *droite* de points limites A et B et un point P qui n'est pas sur la *droite* AB , les deux seules droites passant par ce point et asymptotiques avec la *droite* AB sont celles qui passent par A ou par B . D'autre part, par ce point P on peut construire une infinité de *droites* ultra-parallèles à la *droite* AB . Il suffit pour cela de tracer des *droites* passant par P et par un point quelconque du cercle limite, sous réserve que ce point ne soit pas sur le petit arc situé entre A et B (*figure 8*).

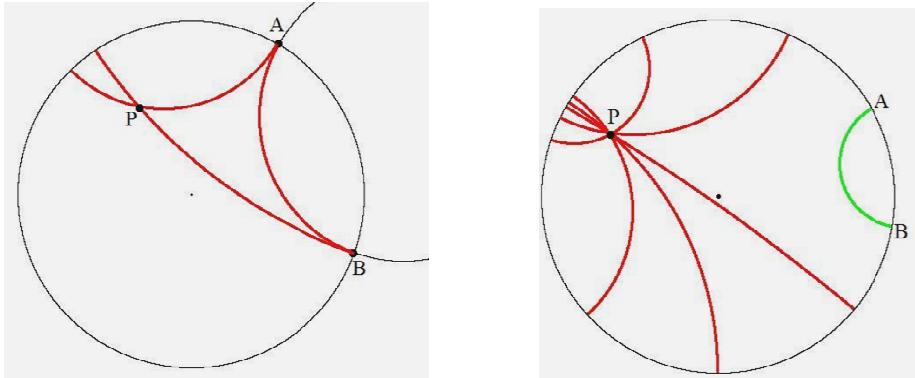


Figure 8 : A gauche, les deux droites passant par P et asymptotiques avec la droite AB . A droite, quelques droites passant par P et ultra-parallèles à la droite AB .

3. Distances et birapport

Prenons un point a sur l'axe des x avec $a > 0$. Comme on l'a vu, $d(0, a) = \ln \frac{1+a}{1-a}$. On constate que

$$\frac{1+a}{1-a} = \frac{0-1}{0+1} \div \frac{a-1}{a+1} = [0 \ a \ 1-1] \text{ birapport de ces quatre points, d'où } d(0, a) = \ln[0 \ a \ 1-1].$$

Prenons maintenant un *segment* $[z_1 z_2]$ dont nous voulons connaître la longueur $d(z_1, z_2)$. La transformation de Möbius telle que $z' = \frac{z - z_1}{1 - z_1 z}$ envoie z_1 en 0 et z_2 en z'_2 , et le segment $z_1 z_2$ devient le segment 0 z'_2 . En composant cette transformation avec la transformation $z \rightarrow e^{i\theta} z$, on peut s'arranger pour que le segment $[0 z'_2]$ soit porté par Ox (z'_2 est réel positif) (*figure 9*). On sait que la transformation obtenue est une isométrie directe, d'où $d(z_1 z_2) = d(0 z'_2) = \ln[0 z'_2 1-1]$. Comme une transformation de Möbius conserve les birapports, on en déduit que $\ln[z_1 z_2 z_{2\infty} z_{1\infty}] = \ln[0 z'_2 1-1]$ où $z_{1\infty}$ et $z_{2\infty}$ sont les points limites de la droite $(z_1 z_2)$. Finalement :

$$d(z_1 z_2) = \ln[z_1 z_2 z_{2\infty} z_{1\infty}] = \ln\left(\frac{z_1 - z_{2\infty}}{z_1 - z_{1\infty}} \div \frac{z_2 - z_{2\infty}}{z_2 - z_{1\infty}}\right)$$

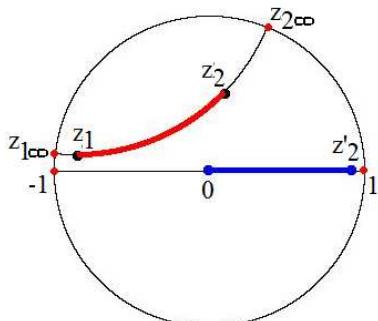


Figure 9 : $d(z_1 z_2) = d(0 z'_2)$ sous l'effet d'une transformation de Möbius isométrique.

On peut aussi calculer $d(z_1 z_2)$ par rapport à z_1 et z_2 :

$$d(z_1 z_2) = d(0 z'_2) = \ln[0 z'_2 1 - 1] = \ln \frac{1+z'_2}{1-z'_2} = \ln \frac{1+|z'_2|}{1-|z'_2|} = \ln \frac{1+\frac{|z_2-z_1|}{|z_1 z_2|}}{1-\frac{|z_2-z_1|}{|z_1 z_2|}} = 2 \operatorname{Argth} \frac{|z_2-z_1|}{|1-z_1 z_2|}$$

$$d(z_1, z_2) = 2 \operatorname{Argth} \frac{|z_2-z_1|}{|1-z_1 z_2|}$$

4. Réflexions hyperboliques

Par définition, une *réflexion* (non-euclidienne) par rapport à une *droite* à points limites A et B est soit une inversion par rapport au cercle associé à la *droite* quand celle-ci est circulaire, soit une réflexion par rapport au diamètre du disque (D) associé à cette *droite* quand elle est rectiligne (*figure 10*). Cette définition est cohérente car une telle *réflexion* transforme un point du disque (D) de Poincaré en un point du disque. Rappelons qu'il s'agit aussi d'une transformation anti-conforme : les angles orientés sont transformés en leurs opposés.

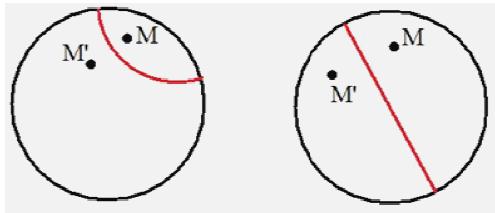


Figure 10 : Réflexions non-euclidiennes autour d'une droite (inversion à gauche, réflexion classique à droite).

4.1. Groupe engendré par les réflexions

La composée de *réflexions* est toujours une bijection du disque \mathbf{D} dans lui-même, puisque l'inversion (avec un centre hors de \mathbf{D}) et la réflexion d'axe diamétral sont toutes deux des bijections. Les transformations formées par les composées de *réflexions* ont une structure de groupe, ayant notamment des inverses. Elles conservent les angles non-orientés. Plus précisément, si une transformation est le produit d'un nombre pair de *réflexions*, les angles orientés sont conservés, sinon ils sont changés en leurs opposés. Dans tous les cas, les angles droits sont conservés. Ces transformations transforment les cercles-droites en cercles-droites, et quand ceux-ci sont des *droites*, faisant des angles droits avec le cercle ∂D limite de \mathbf{D} , ils sont transformés en *droites*.

4.2. Ecriture en complexes d'une composée de réflexions hyperboliques

Nous allons montrer qu'une composée de *réflexions* s'écrit en complexes sous l'une des deux formes $z' = \frac{A\bar{z} + B}{B\bar{z} + A}$ ou $z' = \frac{Az + B}{Bz + A}$ avec $|B| < |A|$. Dans le premier cas, la transformation est anti-conforme, dans le second elle est conforme. Vérifions-le précisément dans l'exercice suivant.

Exercice 3 : Composées de réflexions hyperboliques

- 1) Montrer qu'une réflexion hyperbolique s'écrit sous la forme $z' = \frac{A\bar{z} + B}{B\bar{z} + A}$ avec $|B| < |A|$.

* Cas d'une réflexion autour d'un diamètre : avec son axe passant par O et faisant un angle θ avec l'axe des x , la réflexion s'écrit $z' = e^{2i\theta} \bar{z}$. C'est de la forme $z' = \frac{A\bar{z} + B}{B\bar{z} + A}$ avec $A = e^{i\theta}$ (soit $|A| = 1$) et $B = 0$, et l'on a bien $|B| < |A|$.

* Cas d'une inversion : le cercle d'inversion étant orthogonal au disque de Poincaré, avec son centre d'affixe a ($|a| > 1$) et son rayon R tel que $R^2 + 1 = a\bar{a}$ (condition d'orthogonalité), on a

$z' - a = \frac{R^2}{z - a} = \frac{a\bar{a} - 1}{z - \bar{a}}$, soit $z' = \frac{a\bar{a} - 1}{z - \bar{a}} + a$, $z' = \frac{a\bar{z} - 1}{z - \bar{a}}$. C'est aussi de la forme $z' = \frac{A\bar{z} + B}{B\bar{z} + A}$ en posant $A = ia$ et $B = -i$, avec $|B| < |A|$ puisque $|a| > 1$.

2) Montrer que la composée de deux réflexions hyperboliques s'écrit sous la forme $z' = \frac{Az + B}{\bar{B}\bar{z} + \bar{A}}$ avec $|B| < |A|$.

* Produit de deux réflexions : avec deux axes passant par O et faisant des angles θ et θ' avec l'horizontale, la composée des deux réflexions s'écrit $z' = e^{i(2(\theta' - \theta))} z$, de la forme $z' = \frac{Az + B}{B\bar{z} + \bar{A}}$ avec $|B| = 0 < |A| = e^{i(\theta' - \theta)}$.

* Produit d'une réflexion et d'une inversion : selon l'ordre dans lequel elles sont effectuées, on trouve $z' = e^{i2\theta} \frac{\bar{a}z - 1}{z - a}$ ou $z' = \frac{az - e^{i2\theta}a}{z - e^{i2\theta}\bar{a}}$, toutes deux de la forme $z' = \frac{Az + B}{B\bar{z} + \bar{A}}$ avec $|B| < |A|$ (notamment dans le deuxième cas on a $A = i a e^{-i\theta}$ et $B = -i e^{i\theta}$).

* Produit de deux inversions :

$z \rightarrow z_1 = \frac{a\bar{z} - 1}{\bar{z} - \bar{a}} \rightarrow z' = \frac{b\bar{z}_1 - 1}{\bar{z}_1 - b} = \frac{(\bar{a}\bar{b} - 1)z + a - b}{(\bar{a} - \bar{b})z + \bar{a}\bar{b} - 1}$. C'est de la forme $z' = \frac{Az + B}{B\bar{z} + \bar{A}}$ avec $A = \bar{a}\bar{b} - 1$, $B = a - b$. D'autre part, le point O est transformé en point d'affixe B/\bar{A} situé à l'intérieur du disque de Poincaré, d'où $|B/\bar{A}| = |B|/|A| < 1$ soit $|B| < |A|$.

3) Montrer que le produit d'un nombre pair de réflexions est de la forme $z' = \frac{Az + B}{\bar{B}\bar{z} + \bar{A}}$ avec $|B| < |A|$. et que le produit d'un nombre impair de réflexions est de la forme $z' = \frac{A\bar{z} + B}{\bar{B}\bar{z} + \bar{A}}$ avec $|B| < |A|$.

C'est déjà vrai pour deux réflexions. Par récurrence, il suffit de montrer qu'il en est encore ainsi pour le produit d'une telle transformation (un nombre pair de réflexions), qui s'écrit $z_1 = \frac{Az + B}{B\bar{z} + \bar{A}}$,

avec deux nouvelles réflexions, soit $z' = \frac{A'z_1 + B'}{\bar{B}'\bar{z}_1 + \bar{A}'}$. Le calcul aboutit à :

$z' = \frac{(AA' + \bar{B}\bar{B}')z + BA' + \bar{A}\bar{B}'}{(\bar{B}\bar{A}' + AB')z + \bar{A}\bar{A}' + B\bar{B}'}$. C'est bien de la forme $z' = \frac{Cz + D}{\bar{D}\bar{z} + \bar{C}}$ et comme $O \rightarrow D/\bar{C}$ avec $|D/\bar{C}| < 1$ on a bien $|D| < |C|$.

On montrerait de même que le produit d'un nombre impair de transformations est de la forme $z' = \frac{A\bar{z} + B}{\bar{B}\bar{z} + A}$ avec $|B| < |A|$.

4) Sachant dorénavant que toute composée de réflexions hyperboliques est de l'une des deux formes indiquées, il reste à procéder en sens inverse. Etant donnée une transformation qui s'écrit $z' = \frac{A z + B}{\bar{B} z + \bar{A}}$ ou $z' = \frac{A \bar{z} + B}{\bar{B} \bar{z} + \bar{A}}$ avec $|B| < |A|$, celle-ci appartient-elle au groupe des composées de réflexions ? Montrer précisément que la transformation $z' = \frac{A z + B}{\bar{B} z + \bar{A}}$ peut toujours s'écrire comme le produit de deux réflexions.

Soit $z' = \frac{A z + B}{\bar{B} z + \bar{A}}$ avec $|B| < |A|$. Montrons que cette transformation peut s'écrire comme produit de deux réflexions. D'abord le point O devient le point d'affixe B / \bar{A} . On distingue deux cas :

. . $B = 0$, le point O reste fixe, et $z' = (A / \bar{A})z$, de la forme $z' = e^{i2\theta}z$, il s'agit du produit d'une réflexion par rapport à un diamètre, soit $z_1 = e^{i2\theta} \bar{z}$, suivie de la réflexion d'axe Ox , soit $z' = \bar{z}$, et l'on obtient le produit de deux réflexions.

. . $B \neq 0$. Appelons T la transformation correspondante, et prenons l'inversion I qui s'écrit $z' = \frac{a\bar{z}-1}{\bar{z}-\bar{a}}$ avec $|a| > 1$. Formons le produit $T' = I \circ T$. Le calcul donne pour T' :

$$z' = \frac{(a\bar{A}-B)\bar{z}+a\bar{B}-A}{(\bar{A}-\bar{a}B)\bar{z}+\bar{B}-\bar{a}A} = \frac{(ia\bar{A}-iB)\bar{z}+ia\bar{B}-iA}{(i\bar{A}-i\bar{a}B)\bar{z}+i\bar{B}-i\bar{a}A}$$

avec $O \xrightarrow{T} \frac{B}{\bar{A}} \xrightarrow{I} \frac{a\bar{B}-A}{\bar{B}-\bar{a}A}$ et comme le point $\frac{B}{\bar{A}}$ est dans le disque, le point $\frac{a\bar{B}-A}{\bar{B}-\bar{a}A}$ l'est aussi, et $|a\bar{B}-A| < |\bar{B}-\bar{a}A|$ ou $|ia\bar{B}-iA| < |i\bar{B}-i\bar{a}A|$. On en conclut que T' est la composée d'un nombre impair de réflexions, et par suite est la composée d'un nombre pair de réflexions. Choisissons maintenant l'inversion I telle que $a = \frac{A}{B}$. Dans ce cas, sous l'effet de $I \circ T$ le point O est invariant, et T' est une réflexion. Ainsi $T = I \circ T'$ peut s'écrire comme le produit de deux réflexions.

Avec $z' = \frac{A\bar{z}+B}{\bar{B}\bar{z}+A}$ on fait de même. On peut aussi considérer qu'il s'agit du produit de la réflexion $z' = \bar{z}$, suivie de la transformation $z' = \frac{A z + B}{\bar{B} z + \bar{A}}$, elle-même produit de deux réflexions. La transformation peut s'écrire comme produit de trois réflexions, ou exceptionnellement d'une seule.

La nouveauté de tout cela, c'est le rôle de briques élémentaires que jouent les inversions-réflexions dans \mathbf{D} . Ajoutons ce que nous avons vu précédemment : les transformations de Möbius de la forme $z' = \frac{A z + B}{\bar{B} z + \bar{A}}$ avec $|B| < |A|$ constituent le groupe $\text{Aut}(\mathbf{D})$ des bijections conformes de \mathbf{D} , et il s'agit aussi d'isométries directes dans \mathbf{D} . En les composant avec la transformation $z \rightarrow \bar{z}$ qui est une

isométrie indirecte, on trouve les transformations de la forme $z' = \frac{A\bar{z} + B}{B\bar{z} + A}$ qui sont donc des isométries indirectes. En résumé :

Une composée de *réflexions* s'écrit de deux façons :

. soit $z' = \frac{A\bar{z} + B}{B\bar{z} + A}$ avec $|B| < |A|$, et les angles orientés sont conservés. Toute composée d'un

nombre pair de *réflexions* s'écrit sous cette forme. Ces transformations sont des isométries directes, et forment le groupe $\text{Aut}(\mathbf{D})$ des bijections conformes de \mathbf{D} , qui est aussi le groupe des isométries directes de \mathbf{D} , soit $\text{Isom}^+(\mathbf{D})$.

. soit $z' = \frac{A\bar{z} + B}{B\bar{z} + A}$ avec $|B| < |A|$, et les angles orientés sont transformés en leurs opposés. Toute

composée d'un nombre impair de *réflexions* s'écrit sous cette forme. Il s'agit de l'ensemble des isométries indirectes de \mathbf{D} .

A ce stade, nous avons seulement montré que les transformations de Möbius de la forme

$z' = \frac{A\bar{z} + B}{B\bar{z} + A}$ avec $|B| < |A|$ sont des automorphismes de \mathbf{D} . On doit montrer en plus que tout

automorphisme de \mathbf{D} est aussi de ce forme, ce que nous avons fait dans le *chapitre sur le demi-plan de Poincaré*. On doit aussi prouver que toute isométrie directe de \mathbf{D} est de cette forme, ce qui nécessite de savoir ce que sont des cercles hyperboliques. Nous verrons dans le *paragraphe 7* qu'un cercle hyperbolique est aussi un cercle euclidien. En utilisant ce fait, nous pouvons faire la démonstration suivante :

Considérons une isométrie directe J . Elle envoie notamment deux points de l'axe (Ox), par exemple O et un point A , en deux points O' et A' . Prenons alors la transformation de Möbius M , qui est une isométrie directe, et qui envoie O' et A' en O et A . La composée MoJ a deux points fixes O et A . Prenons maintenant un point P quelconque. Il est transformé en $MoJ(P) = P'$. A cause de l'isométrie, on a $d(O, P') = d(O, P)$, et $d(A, P') = d(A, P)$. Les points P et P' sont à l'intersection de deux *cercles* qui sont aussi des cercles euclidiens. Deux tels cercles se coupent en deux points. En prenant en compte le fait que l'isométrie conserve les angles orientés, seul un point convient, et l'on a $P = P'$. Finalement $MoJ = Id$, et $J = M^{-1}$. L'isométrie J est bien une transformation de Möbius. On a finalement le résultat suivant :

Le groupe des automorphismes de \mathbf{D} est le groupe des isométries positives de \mathbf{D} , soit :

$\text{Isom}^+(\mathbf{D}) = \text{Aut}(\mathbf{D})$.⁴ Ce groupe est constitué des transformations de Möbius telles que $z' = \frac{A\bar{z} + B}{B\bar{z} + A}$ avec $|B| < |A|$.

Les exercices qui suivent montrent l'intérêt d'utiliser des *réflexions-inversions* pour construire les *droites* et *segments* du disque \mathbf{D} .

Exercice 4 : Construction de la droite hyperbolique passant par deux points A et B à l'intérieur du disque D ainsi que du segment hyperbolique $[AB]$

⁴ Il en est évidemment de même dans \mathbf{H} .

On distingue deux cas :

A et B sont alignés avec le centre O du disque, voire même l'un des deux points est confondu avec O. Dans ce cas, la droite (AB) est représentée par un diamètre du disque, c'est-à-dire par un segment sur lequel se trouvent A, B, et O.

A et B ne sont pas alignés avec O. Procédons alors à une inversion, telle que le point A soit transformé en O .⁵ On construit aisément le centre I et le rayon du cercle d'inversion correspondant (figure 11). Sous l'effet d'une telle inversion, le point B est transformé en un point B' (qui n'est pas O). Prenons la droite OB' , correspondant à un diamètre du disque. Et refaisons la même inversion que précédemment : O retourne en A , et B' en B , et la droite (OB') est transformée en un cercle Γ passant par I , ainsi qu'en A et B , et comme le diamètre (OB') est orthogonal au cercle ∂D , le cercle Γ est aussi orthogonal à ∂D . La droite (OB') devient la partie du cercle Γ située dans (D) : on vient de trouver une droite passant par A et B . Une telle droite est unique : en effet, l'inversion faisant passer de A à O est unique, comme sa construction le prouve, et B va en B' . A son tour le passage du diamètre (OB') au morceau de cercle passant par A et B par la même inversion est unique. Il ne peut pas exister d'autre droite que celle trouvée.

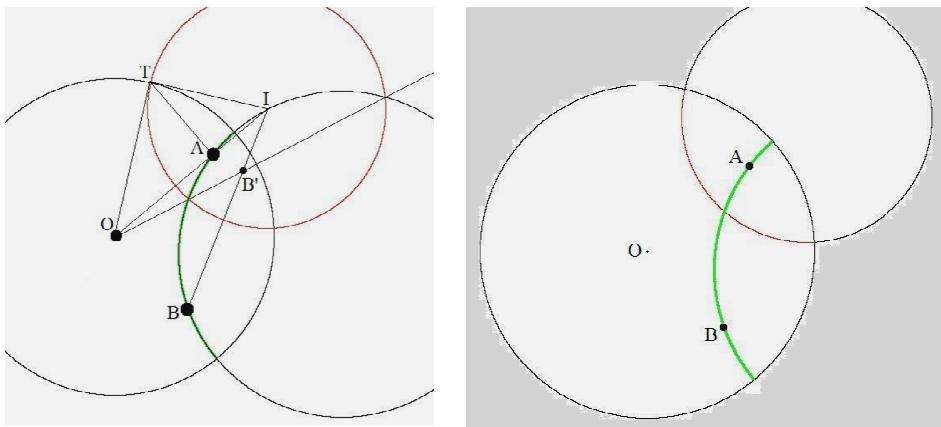


Figure 11 : A gauche, les détails de la construction, avec le cercle d'inversion de centre I qui envoie A en O et B en B' , puis qui renvoie la droite OB' pour donner le cercle passant par A et B . A droite la droite unique passant par A et B en vert, avec le cercle d'inversion envoyant A en O .

Comme nous aurons souvent besoin d'utiliser l'inversion qui fait passer d'un point A au point O , rappelons ses caractéristiques :

L'inversion faisant passer de A à O se fait autour d'un cercle de centre I et de rayon r tels que :

$$\mathbf{OI} = (1 / OA^2) \mathbf{OA}$$
 et $r^2 = (1 - OA^2) / OA^2$.

Autre méthode de construction

Prenons la polaire de A et celle de B . Le centre du cercle cherché, passant par A et B et orthogonal au cercle ∂D , est à l'intersection des deux polaires. Remarquons que ce centre est aussi sur la médiatrice de $[AB]$. Le morceau de ce cercle situé dans le disque (D) est la droite passant par A et B .

Les coordonnées du centre I du cercle cherché sont solutions du système formé par les équations des deux polaires de A et de B :

⁵ Comme indiqué sur la figure 11 à gauche, on mène par A la perpendiculaire à OA , qui coupe le cercle de Poincaré en T . La construction du triangle rectangle ATI donne le cercle d'inversion faisant passer de A en O . Celui-ci est centré en I et il passe par T . Il est en effet orthogonal à ∂D , avec $IA \cdot IO = IT^2$. On a aussi $OA \cdot OI = 1$, $OI = 1/OA$, $\mathbf{OI} = (1/OA^2) \mathbf{OA}$, ce qui permet de construire le point I , et le rayon r du cercle d'inversion est tel que $r^2 = OI^2 - 1 = (1 - OA^2) / OA^2$. Puis pour avoir B' inverse de B on fait $IB \cdot IB' = r^2$, $IB' = r^2 / IB$, $\mathbf{IB}' = (r^2 / IB^2) \mathbf{IB}$.

$$\begin{cases} xaX + yaY = (OA^2 + 1)/2 \\ yaX + yaY = (OB^2 + 1)/2 \end{cases}$$

Le déterminant du système est $d = xayb - ya xb$. On trouve :

$$\begin{cases} x_I = \frac{yb(OA^2 + 1) - ya(OB^2 + 1)}{2d} \\ y_I = \frac{-xb(OA^2 + 1) + xa(OB^2 + 1)}{2d} \end{cases}$$

et le rayon du cercle est $\sqrt{(xa - x_I)^2 + (ya - y_I)^2}$.

Si l'on veut seulement construire le *segment* entre A et B , il convient de constater que l'arc de cercle entre A et B est formé des points M tels que l'angle AMB est supérieur à 90° .⁶ Cette contrainte s'exprime en prenant les points M du cercle tels que le produit scalaire $\mathbf{MA} \cdot \mathbf{MB} \leq 0$ (figure 12).

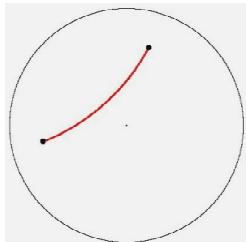


Figure 12 : Un segment $[AB]$

Exercice 5 : A partir d'un point P et d'une droite hyperbolique de points limites A et B , construction des deux droites parallèles asymptotiques (PA) et (PB) .

On se donne une droite de points limites A et B , ainsi qu'un point P . La droite (AB) est construite comme on l'a fait ci-dessus. Puis on pratique une inversion dont le cercle de centre I est orthogonal au cercle ∂D de Poincaré, de façon que P soit envoyé en O (la détermination d'une telle inversion a été faite dans l'exercice précédent). Comme le cercle de l'inversion est orthogonal à ∂D , le cercle ∂D reste globalement invariant, A et B deviennent deux points A' et B' situés sur le cercle ∂D (figure 13).

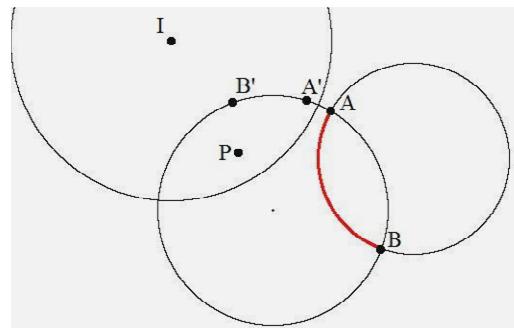
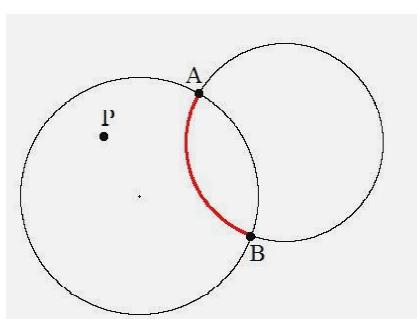


Figure 13 : A gauche le dessin initial, à droite l'action d'une inversion transformant le point P en O , centre du disque de Poincaré.

On trace ensuite les diamètres portés par (OA') et (OB') dans le disque D . Appliquons à ces diamètres la même inversion que précédemment, ce qui fait revenir A' et B' en A et B , et O en P ,

⁶ C'est une conséquence du théorème de l'angle inscrit. Lorsque l'on a un cercle avec une corde $[AB]$, le grand arc délimité par A et B est formé des points M tels que l'angle AMB reste constant et aigu, tandis que le petit arc est formé des points M avec l'angle AMB constant et obtus.

l'inversion étant une involution. Les diamètres deviennent des cercles passant l'un par A , l'autre par B , et tous deux par P (et I), et comme le cercle ∂D reste globalement invariant, ces cercles sont orthogonaux au cercle ∂D comme l'étaient les diamètres (figure 14). Leurs parties intérieures au disque D forment des ne-droites passant l'une par A et l'autre par B , elles sont bien parallèles à la droite AB .

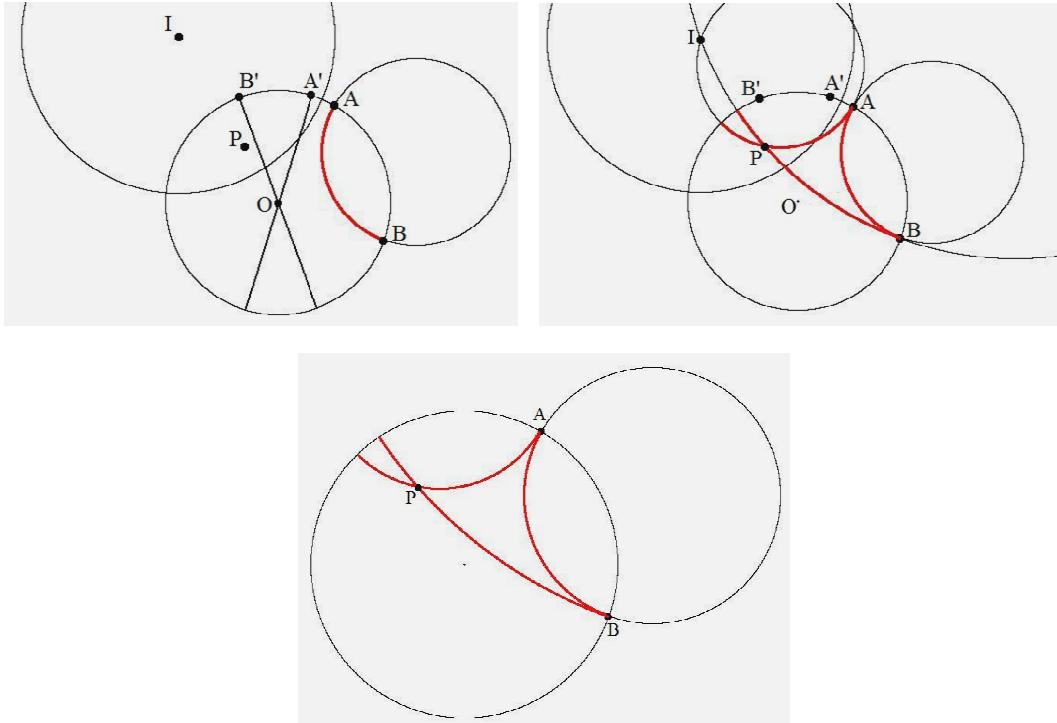


Figure 14 : En haut suite de la construction, avec le résultat final en bas : une droite AB et deux droites passant par P et qui lui sont parallèles asymptotiques.

4.3. Inversion-réflexion et médiatrice hyperbolique

Rappelons d'abord qu'un *segment* entre deux points A et A' situés dans le disque de Poincaré est la partie de la *droite* passant par A et A' et située entre ces deux points. Cela permet de définir la *médiatrice* d'un *segment*, comme étant la *droite* passant par le *milieu du segment* et perpendiculaire à celui-ci. On dispose alors de la propriété suivante, qui rapproche la notion de *réflexion* de celle de *réflexion*, puisque l'axe joue le rôle de médiatrice.

Propriété 1 : Soit deux points A et A' dans le disque D de Poincaré, symétriques par rapport à une droite L , c'est-à-dire transformés l'un en l'autre par une *réflexion* par rapport à L . Alors L est la *médiatrice du segment* $[AA']$.

La *droite* L coupe la *droite* passant par A et A' en un point S . La *distance* entre S et A est égale à celle entre S et A' , puisque la *réflexion* faisant passer de A à A' est une isométrie. Plus précisément le *segment* SA est transformé en SA' de même longueur. Ces deux segments font un angle de 180° . Comme le *réflexion* conserve les angles non-orientés, l'angle entre SA et L est égal à celui entre SA' et L , L étant invariante, d'où un angle de 90° . Ainsi le *segment* AA' est perpendiculaire à L (figure 15).

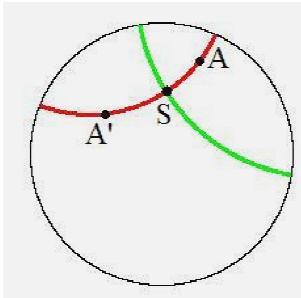


Figure 15 : La droite L (en vert), avec les points A et A' symétriques par rapport à elle, est la médiatrice du segment $[AA']$ et S est le milieu de $[AA']$.

Propriété 2 : Soit A et B deux points du disque de Poincaré. Alors ces points sont inverses l'un de l'autre dans l'inversion dont le cercle est la médiatrice de $[AB]$.

En effet, en appelant I le *milieu* de $[AB]$ et (Δ) la médiatrice, on a $d(AI) = d(IB)$. L'inversion de cercle (Δ) laisse fixe le point I et laisse globalement invariant le cercle (Γ) portant le segment $[AB]$. Comme elle conserve les *distances*, le point A devient un point à égale distance de I que A sur (Γ) , et c'est le point B .

4.3.1. A partir de deux points distincts A et A' dans le disque (D) de Poincaré, détermination de la réflexion qui fait passer de l'un à l'autre

Appelons a et a' les affixes des points donnés A et B . Exprimons qu'une inversion autour d'un cercle de centre I d'affixe c inconnu fait passer de l'un à l'autre (figure 16).⁷ On trouve une inversion unique de centre

$$c = \frac{a - a' + a a'(\bar{a} - \bar{a}')}{a \bar{a} - a' \bar{a}'} \text{ sauf si } a \bar{a} - a' \bar{a}' = 0.$$

Dans le cas où $a \bar{a} - a' \bar{a}' = 0$, ce qui signifie que $|a| = |a'|$, les points sont équidistants du centre, et c'est une réflexion d'axe la médiatrice de $[AA']$ qui fait passer de l'un à l'autre. Dans tous les cas de figure on a trouvé une *réflexion* qui fait passer de A à A' .

⁷ Cette inversion a pour écriture complexe

$z' = \frac{c \bar{z} - 1}{\bar{z} - \bar{c}}$, c étant inconnu. Exprimons qu'elle fait passer de a à a' :

$a' = \frac{c \bar{a} - 1}{\bar{a} - \bar{c}}$, soit $\bar{a} c + a' \bar{c} = a' \bar{a} + 1$. A cause de la présence de c et de son conjugué, on prend aussi la

conjuguée de l'équation précédente $\bar{a}' c + a \bar{c} = a \bar{a}' + 1$. En combinant les deux pour se débarrasser du conjugué de c , par multiplication de la première par a et de la deuxième par a' , on a par soustraction :

$(a \bar{a} - a' \bar{a}')c = a - a' + a a'(\bar{a} - \bar{a}')$

d'où la formule obtenue lorsque $a \bar{a} - a' \bar{a}' \neq 0$, et l'on vérifie que cette valeur de c convient, même si a (ou a') est nul. Le passage en nombres réels donne les coordonnées x_I et y_I du centre du cercle et son rayon r , tel que $OI^2 = r^2 + 1$.

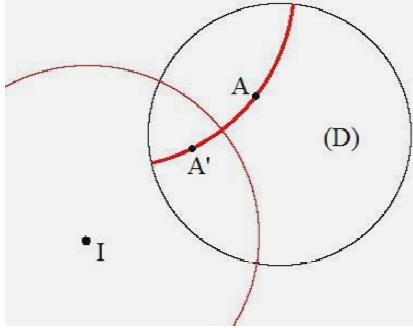


Figure 16 : A partir de deux points A et A' , détermination de la *réflexion* faisant passer de l'un à l'autre.

Dans le programme permettant d'obtenir le dessin de la figure 16, on se donne les deux points A et A' dans (D) , et l'on détermine le cercle d'inversion qui fait passer de A à A' , avec son centre I :

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A(1-OA'^2) - x_{A'}(1-OA^2)}{OA^2 - OA'^2} \\ y_I = \frac{y_A(1-OA'^2) - y_{A'}(1-OA^2)}{OA^2 - OA'^2} \end{cases}$$

et son rayon r tel que $r^2 = OI^2 - 1$.

Exercice 6 : Centre et rayon du cercle d'inversion faisant passer de A à B

Il s'agit d'une variante du calcul précédent. On se donne deux points A et B dans le disque de Poincaré, de coordonnées (xA, yA) et (xB, yB) dans un repère orthonormé d'origine O , centre du disque D . Déterminer les coordonnées du centre I et le rayon R du cercle de l'inversion (C) faisant passer de A à B . Pour cela, écrire que vectoriellement $\mathbf{AI} = k \mathbf{AB}$ et déterminer le nombre k .

On prend $\mathbf{AI} = k \mathbf{AB}$ avec $k > 0$, en supposant que I est plus près de B que de A , soit $xI = xA + k(xB - xA)$ et $yI = yA + k(yB - yA)$. Il s'agit de trouver k .

L'inversion s'écrit $IA IB = R^2$ avec $R^2 = IO^2 - 1$, puisque le cercle (C) est orthogonal au cercle unité de centre O .

$$\begin{aligned} IA IB &= IO^2 - 1 \text{ s'écrit } k AB (IA - AB) = xI^2 + yI^2 - 1, \\ k^2 AB^2 - k AB^2 &= xI^2 + yI^2 - 1 \end{aligned}$$

Avec $AB^2 = (xB - xA)^2 + (yB - yA)^2$, et xI et yI calculés précédemment, on trouve après calculs :

$$k = \frac{xA^2 + yA^2 - 1}{xA^2 + yA^2 - xB^2 - yB^2}$$

De là on déduit xI , yI et R .

4.3.2. Propriétés de la médiatrice hyperbolique

Par définition, la *médiatrice* d'un segment $[AB]$ est la *droite* perpendiculaire à $[AB]$ en son *milieu* I . On en déduit que $d(IA) = d(IB)$. Et si l'on prend un point M quelconque sur cette *droite*, on a aussi $d(MA) = d(MB)$. En effet les triangles MIA et MIB , ayant deux côtés de même longueur avec le même angle (90°) entre eux sont isométriques, d'où $d(MA) = d(MB)$ (figure 17).

Nous allons maintenant voir qu'il n'y a pas d'autres points équidistants de A et B que ceux de la médiatrice, d'où cette caractérisation de la médiatrice :

La médiatrice de $[AB]$ est l'ensemble des points M équidistants de A et de B .

Prenons un de ces points M . Le triangle MAB étant isocèle, sa *bissectrice* en M coupe $[AB]$ en un point I' . Les triangles $MI'A$ et $MI'B$ ont un angle égal avec deux côtés adjacents de même longueur. Ils sont isométriques, d'où $d(I'A) = d(I'B)$, I' est le milieu de $[AB]$, et les deux angles égaux en I valent chacun 90° . La bissectrice est confondue avec la médiatrice de la première définition.

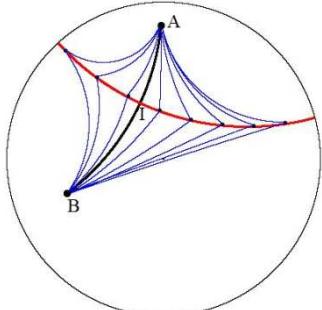


Figure 17 : Un segment $[AB]$ et sa médiatrice (en rouge), avec des points M équidistants de A et B .

Construction de la médiatrice du segment $[AB]$

Commençons par construire le cercle de centre I dont le *segment* $[AB]$ est une partie. Il coupe le cercle unité ∂D de centre O en D et E . En général, les droites (AB) et (DE) se coupent en K ⁸ (figure 18). Le cercle de centre K et de rayon R tel que $KA KB = R^2$ est un cercle du faisceau orthogonal à celui engendré par le cercle unité et celui de centre I . Le cercle de centre K et de rayon R est orthogonal au cercle unité et à celui de centre I . Sa partie intérieure au disque de Poincaré constitue la *médiatrice* de $[AB]$.

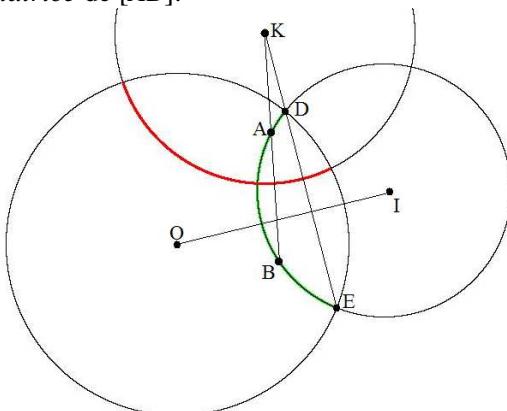
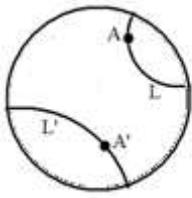


Figure 18 : Construction de la médiatrice (en rouge) du segment $[AB]$ (en vert), cette médiatrice étant une partie du cercle de centre K .

4.4. Propriétés des isométries de \mathbf{D}

Soit trois points A, B, C disposés dans cet ordre et trois points A', B', C' dans le même ordre sur le cercle frontière ∂D . On sait qu'il existe une transformation de Möbius unique dans le corps des nombres complexes \mathbf{C} faisant passer de A à A' , de B à B' et de C à C' . La transformation laisse le cercle ∂D invariant, c'est alors une transformation dans \mathbf{D} . Comme la notion de distance n'existe plus sur le cercle frontière, on a bien trouvé une isométrie directe unique de \mathbf{D} .

⁸ Dans le cas particulier où (AB) est parallèle à (DE) , la *médiatrice* est une partie de la droite médiatrice de $[AB]$, pour des raisons de symétrie évidentes. Dans le programme de construction, il conviendra aussi de prendre en considération le cas particulier où les points A, O, B sont alignés, le *segment* $[AB]$ devenant un segment.



Prenons maintenant un point A dans \mathbf{D} et une droite L passant par A , ainsi qu'un point A' et une droite L' passant par A' . Nous allons montrer qu'il existe une isométrie directe faisant passer de A à A' et de L à L' .

Considérons l'inversion unique T_1 qui envoie A en O , ainsi que l'inversion unique T_2 qui envoie A' en O , T_1 et T_2 étant des isométries indirectes de \mathbf{D} . La droite L est transformée en un diamètre L_1 par T_1 , et la droite L' en un diamètre L'_2 par T_2 . Prenons aussi une rotation de centre O qui envoie le diamètre L_1 en L'_2 , cette transformation étant une isométrie directe de \mathbf{D} . En fait il existe deux rotations possibles, l'angle de droites étant à π près. Puis pratiquons la chaîne de transformations indiquée sur la figure 19.

On passe ainsi de (A, L) à (A', L') par $T_2^{-1} \circ R \circ T_1$ de deux façons possibles, et la transformation de Möbius obtenue est directe.

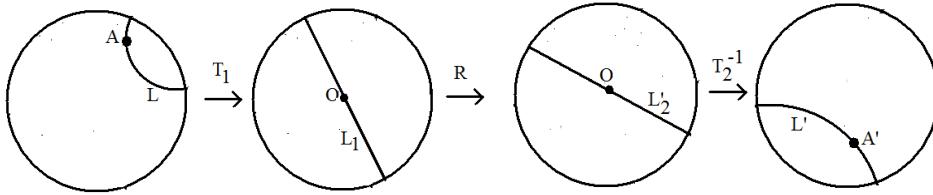


Figure 19 : Chaîne de transformations faisant passer de (A, L) à (A', L') .

Ajoutons maintenant un deuxième point B sur L tel que L soit la droite (AB) , ainsi qu'un point B' sur L' , et imposons que $d(A, B) = d(A', B')$. L'inversion T_1 envoie B en B_1 sur un demi-diamètre. L'inversion T_2 envoie B' en B'_2 sur un demi-diamètre. Et l'on a $d(O, B_1) = d(O, B'_2)$. Il n'existe alors qu'une seule rotation envoyant le demi-diamètre $[OB_1]$ sur le demi-diamètre $[OB'_2]$. Finalement, il existe une isométrie directe de \mathbf{D} unique envoyant le segment $[AB]$ sur le segment $[A'B']$ lorsque $d(A, B) = d(A', B')$. En résumé :

Etant donnés trois points A, B, C dans cet ordre sur le cercle frontière $\partial\mathbf{D}$ et trois points A', B', C' dans le même ordre sur $\partial\mathbf{D}$, il existe une isométrie directe unique de \mathbf{D} envoyant ces trois points sur les trois autres respectivement.

Etant donnés deux points A et B dans \mathbf{D} et deux points A' et B' dans \mathbf{D} , ces points étant équidistants : $d(A, B) = d(A', B')$, il existe une isométrie directe unique de \mathbf{D} envoyant A en A' et B en B' .

Notamment, si une transformation de Möbius de \mathbf{D} envoie un point P de \mathbf{D} en un autre point P' de \mathbf{D} et aussi le point P' en P , cette transformation est unique. Et si P reste fixe ainsi que P' , cette transformation ne peut être que l'identité.

5. Triangles hyperboliques

Un triangle non-euclidien est formé de trois sommets A, B et C qui appartiennent au disque de Poincaré, et de trois côtés qui sont les segments AB, BC et CA .

5.1. Somme des angles d'un triangle

Nous allons montrer que la somme des angles d'un triangle est inférieure à 180° . Pour cela, faisons subir au triangle ABC une transformation, ici une réflexion qui amène A en O . A leur tour les points B

et C deviennent B' et C' , et les côtés OB' et OC' du nouveau triangle sont rectilignes (*figure 19*). Comme la transformation conserve les angles, la somme des trois angles du triangle $OB'C'$ est égale à celle de ABC . Dans $OB'C'$ le segment $B'C'$ est un arc de cercle, et par comparaison avec le triangle euclidien $OB'C'$ ayant comme côté la corde (rectiligne) $[B'C']$, dont la somme des angles est 180° , celle des angles du triangle $OB'C'$ est strictement inférieure à 180° .

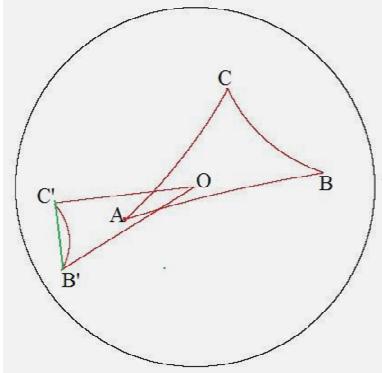


Figure 19 : Triangle ABC transformé en $OB'C'$.

Ce résultat se généralise à un *polygone* à N côtés. Comme il peut être découpé en $N - 2$ triangles, la somme des angles du polygone est strictement inférieure à $(N - 2)\pi$.

5.2. Triangles isométriques et semblables

On dit que deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont *isométriques* s'il existe une *isométrie* faisant passer des trois sommets de l'un aux trois sommets de l'autre. Puisqu'une telle transformation conserve non seulement les distances mais aussi les angles non orientés, deux triangles isométriques ont leurs trois angles respectivement égaux. Par analogie avec la géométrie euclidienne, on peut dire que les deux triangles isométriques sont aussi *semblables*, puisqu'ils ont leurs angles respectifs égaux. Mais en géométrie euclidienne deux triangles semblables ABC et $A'B'C'$, qui ont leurs angles égaux, ne sont pas isométriques en général : ils ont seulement leurs côtés respectifs dans les mêmes proportions : $A'B'/AB = B'C'/BC = C'A'/CA$ (*figure 20*). En géométrie non-euclidienne, il n'en est pas de même, et l'on a la propriété suivante :

Deux triangles sont *isométriques* si et seulement s'ils sont semblables (angles respectifs égaux).

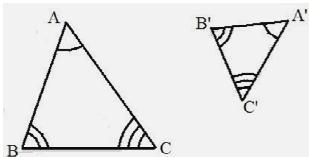


Figure 20 : Deux triangles semblables, et non-isométriques, en géométrie euclidienne.

Il reste seulement à prouver que si deux *triangles* sont semblables, ils sont aussi *isométriques*. Partons de deux triangles semblables ABC et $A'B'C'$, ayant par définition leurs angles respectifs égaux. Amenons A en O par une *réflexion*, et amenons aussi A' en O par une *réflexion*. Puis par rotation de centre O (avec éventuellement une réflexion supplémentaire d'axe passant par O) on peut toujours faire en sorte que les triangles obtenus après cette transformation aient leurs deux côtés issus de O qui soient portés par deux mêmes droites. Appelons ODE et $OD'E'$ les deux triangles obtenus. La transformation ayant conservé les angles, on est dans l'un des contextes indiqués sur la *figure 21*, avec des angles égaux en D et D' , ainsi qu'en E et E' :

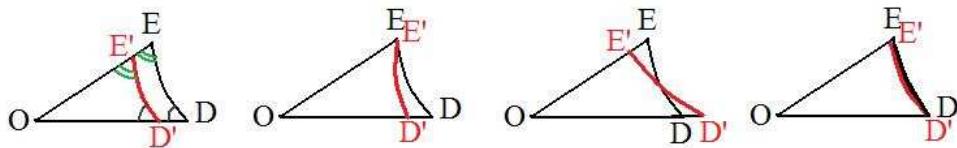


Figure 21 : Les quatre cas de figure, du cas 1 au cas 4 en allant de gauche à droite.

Cas 1 : le quadrilatère $DEE'D'$ doit avoir la somme de ses angles strictement inférieure à 360° , c'est une conséquence immédiate du fait que la somme des angles d'un triangle est inférieure à 180° . Or la somme de ses angles en D et D' est égale à 180° ainsi que celle de ses angles en E et E' , et la somme des quatre angles vaut 360° , ce qui n'est pas possible.

Cas 2 : le triangle EDD' a un angle nul en E (ou E'), et la somme des angles en D et D' vaut 180° . On tombe encore sur une contradiction.

Cas 3 : le quadrilatère croisé $DD'EE'$ est formé de deux triangles, avec une somme des angles en D et D' égale à 180° pour l'un et aussi à 180° pour l'autre, ce qui est impossible.

Cas 4 : les triangles ODE et $OD'E'$ sont confondus, donc isométriques, et les triangles originaux ABC et $A'B'C'$ aussi. C'est la seule possibilité.

5.3. Triangles idéaux

On dit qu'un *triangle* est idéal lorsque ses trois sommets sont à l'infini, c'est-à-dire sur le cercle limite ∂D du disque de Poincaré. Dans ces conditions, ses trois angles sont nuls et son aire vaut π . Il existe aussi des *triangles* deux-asymptotiques ou un-asymptotique lorsqu'ils ont deux ou un sommets à l'infini.

Exercice 7 : Triangle rectangle isocèle et sa limite deux-asymptotique

Montrer que la hauteur hyperbolique d'un triangle hyperbolique rectangle isocèle est inférieure à $\ln(1 + \sqrt{2})$. Cette propriété a été trouvée en 1807 par F.K. Schweikart, inventeur de la géométrie astrale

Plaçons ce triangle avec un sommet en O , avec un angle droit, et les deux autres sommets A et B sur Ox et Oy , avec $d(OA) = d(OB)$ (figure 22). L'hypoténuse AB est un arc de cercle dont le centre est sur la première bissectrice du repère. Comme ce cercle est orthogonal au cercle C , il appartient au faisceau de cercles dont les points limites sont les points d'intersection de la bissectrice avec C . L'hypoténuse du triangle atteint sa limite en $A_\infty B_\infty$. Lorsque A va de 0 à 1, la hauteur du triangle OAB va de 0 à Oh , ce point h étant sur l'arc de cercle $A_\infty B_\infty$. Calculons $d(O h)$, la hauteur hyperbolique maximale. L'arc de cercle $A_\infty B_\infty$ ayant un rayon égal à 1, on en déduit que $Oh = \sqrt{2} - 1$, puis

$$d(O h) = \ln \frac{1 + Oh}{1 - Oh} = \ln \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \ln \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = \ln(1 + \sqrt{2})$$

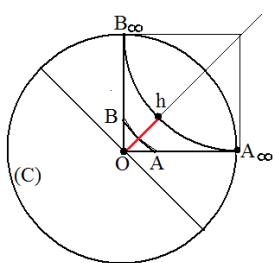


Figure 22 : Triangles rectangles isocèles et la hauteur Oh maximale.

5.4. Médiatrices d'un triangle

Nous allons montrer que les trois *médiatrices* d'un *triangle* sont ou bien concourantes ou bien ultra-parallèles avec la même *perpendiculaire commune*. Nous admettrons ici que deux droites ultra-parallèles admettent une perpendiculaire commune unique, ce que nous démontrerons dans le *paragraphe 7*.

Considérons un *triangle ABC*, et prenons les *médiatrices* des côtés $[AB]$ et $[AC]$. On distingue deux cas.

- a) Les deux *médiatrices* se coupent. Appelons G ce point. On a $d(GA) = d(GB)$ et $d(GA) = d(GC)$. D'où $d(GB) = d(GC)$. Le point G , équidistant de B et C , est aussi sur la *médiatrice* de $[BC]$ (*figure 23*).

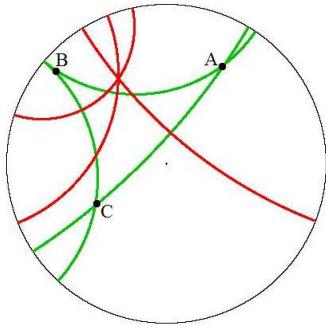


Figure 23 : Un triangle ABC (en vert) dont les *médiatrices* sont concourantes.

- b) Les deux *médiatrices* ne se coupent pas. Elles sont ultra-parallèles et admettent une *perpendiculaire commune*. Pour montrer que la troisième *médiatrice* est ultra-parallèle avec les deux autres en ayant la même droite *perpendiculaire commune*, commençons par montrer la propriété suivante⁹ :

Considérons un *segment* $[AB]$ de *médiatrice* (D), et une *droite* (EF). Les points A et B se projettent orthogonalement en P et Q sur (EF). Alors les *droites* (D) et (EF) sont perpendiculaires si et seulement si $d(AP) = d(BQ)$ avec A et B du même côté de (EF).

Supposons que (D) est perpendiculaire à (EF). Les droites (AB) et (EF) étant toutes deux orthogonales à (D), elles ne peuvent pas être sécantes (sinon on aurait un triangle dont la somme des angles dépasserait 180°). Les points A et B sont du même côté de (EF).

Faisons maintenant l'inversion de cercle (D). Elle envoie A en B (*cf. propriété ci-dessus*), et elle laisse la *droite* (EF) globalement invariante. Le cercle portant le *segment* $[AP]$ est transformé en un cercle passant par B et orthogonal au cercle unité ainsi qu'au cercle portant (EF). Il s'agit du cercle portant $[BQ]$. $[AP]$ devient $[BQ]$, et P est transformé en Q . On en déduit, puisque l'inversion est une isométrie, que $d(AP) = d(BQ)$ et aussi que $d(PJ) = d(JQ)$ où J est le *milieu* de $[PQ]$ (*figure 24*).

⁹ Cette démonstration est donnée par D. Perrin dans *les géométries non euclidiennes et ce qu'elles nous apprennent sur la géométrie euclidienne et son enseignement*.

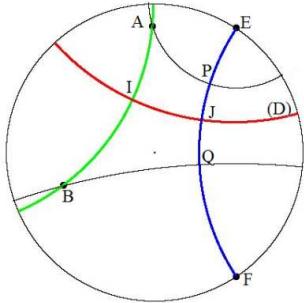
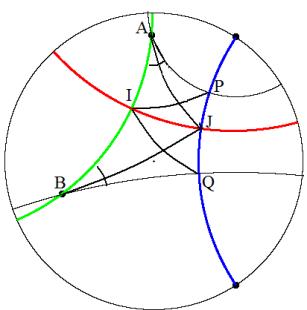


Figure 24 : P et Q étant les projections de A et B sur la droite (EF) orthogonale à la médiatrice (D) , on a $d(AP) = d(BQ)$.

Inversement, supposons que $d(AP) = d(BQ)$ avec A et B du même côté de la droite (EF) . Appelons J le point d'intersection de la médiatrice (D) de $[AB]$ avec (EF) . Il s'agit de prouver que (D) est aussi la médiatrice de $[PQ]$, et (D) sera bien orthogonale à (EF) .



On a déjà $d(JA) = d(JB)$, et les triangles AIJ et BIJ sont isométriques. On en déduit que leurs angles en A et B sont égaux. À leur tour les triangles AJP et BQJ sont isométriques (triangles rectangles avec deux côtés isométriques), d'où $d(JP) = d(JQ)$ et les angles en A et en B sont égaux. On en déduit que les angles en A et en B des triangles AIP et BIQ sont égaux, et ces deux triangles sont isométriques (un même angle et deux côtés adjacents isométriques). D'où $d(IP) = d(IQ)$. I et J étant équidistants de P et Q , la droite (D) est aussi la médiatrice de $[PQ]$, et (D) est orthogonale à (EF) .

La propriété est démontrée. Il reste à l'appliquer aux trois *médiatrices* d'un *triangle ABC*. Supposons que les *médiatrices* (D) et (D') des côtés $[AB]$ et $[AC]$ sont ultra-parallèles. Elles admettent une perpendiculaire commune (Δ) . Les points A, B, C se projettent en P, Q, R sur (Δ) . On a alors $d(AP) = d(BQ)$ et $d(AP) = d(CR)$ grâce à la propriété précédente. Il en découle que $d(BQ) = d(CR)$, et grâce à la réciproque de la propriété, la *médiatrice* de $[BC]$ est orthogonale à la droite (Δ) . Les trois *médiatrices* sont orthogonales à la droite (Δ) (figure 25).

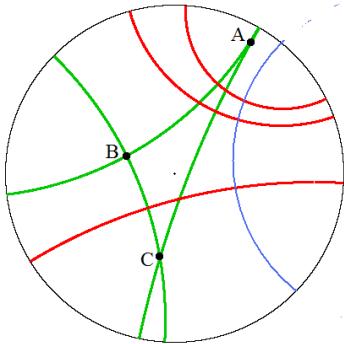


Figure 25 : Un triangle ABC , avec ses trois médiatrices (en rouge) et leur perpendiculaire commune (en bleu).

Exercice 8 : Autre démonstration pour prouver que les médiatrices ont la même perpendiculaire commune lorsque elles sont ultra-parallèles

On considère un triangle $A_1B_1C_1$ dont les médiatrices de $[A_1B_1]$ et $[A_1C_1]$ sont ultra-parallèles.

1) Que devient ce triangle et ses médiatrices lorsque l'on fait l'inversion qui envoie le milieu de $[BC]$ en O ?

On obtient un triangle ABC dont le côté $[BC]$ est sur un diamètre du disque de Poincaré, avec en plus $d(OA) = d(OB)$, ou encore $OA = OB$. La médiatrice de $[BC]$ est un diamètre orthogonal à (BC) . Les deux autres médiatrices deviennent de droites ultra-parallèles, portées par des cercles de centres I et J .

2) Pour faciliter les calculs qui vont suivre, faire une rotation de centre O de façon que le diamètre (BC) soit porté par l'axe des x , ce qui laisse la figure isométrique au sens euclidien (figure 26). La médiatrice de $[BC]$ est portée par (Oy) . Les points A, B, C ont alors pour coordonnées respectives (xA, yA) , $(-b, 0)$ et $(b, 0)$. En utilisant le résultat de l'exercice 1, montrer que la droite (IJ) est parallèle à (BC) .

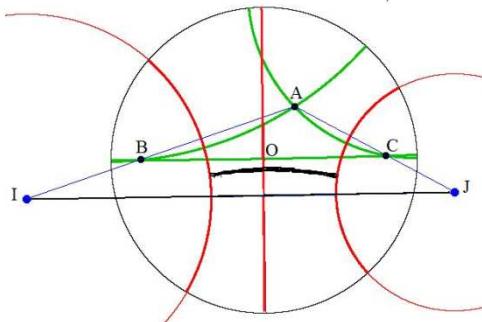


Figure 26 : Le triangle ABC en vert, et ses médiatrices en rouge.

On a $\mathbf{AI} = k \mathbf{AB}$ et $\mathbf{AJ} = k' \mathbf{AC}$. Grâce à l'exercice 1, on a

$$k = \frac{x_A^2 + y_A^2 - 1}{x_A^2 + y_A^2 - b^2} \text{ et } k' = \frac{x_A^2 + y_A^2 - 1}{x_A^2 + y_A^2 - b^2} \text{ d'où } k = k'.$$

Par la réciproque du théorème de Thalès, la droite (IJ) est parallèle à la droite (BC) .

3) En déduire que la perpendiculaire commune aux médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$ est aussi perpendiculaire à celle de $[BC]$.

Le cercle du disque de Poincaré étant orthogonal aux deux cercles (C_1) et (C_2) portant les médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$, son centre O est sur l'axe radical du faisceau engendré par les deux cercles (C_1) et (C_2) , ce faisceau ayant pour axe (IJ) . Cet axe radical est confondu avec la médiatrice de $[BC]$. La perpendiculaire commune à $[AB]$ et $[AC]$ est portée par un cercle orthogonal lui aussi au faisceau. Son centre est sur l'axe radical et il fait bien un angle droit avec la médiatrice de $[BC]$.

En faisant la rotation inverse et l'inversion précédente, qui conservent les angles, les trois médiatrices du triangle $A_1B_1C_1$ admettent la même perpendiculaire commune.

6. Cercles hyperboliques

Par définition un *cercle* de centre I et de rayon R est l'ensemble des points M tels que $d(IM) = R$. Mais à quoi ressemble un tel *cercle*? Nous allons montrer qu'un *cercle* est aussi un cercle situé à l'intérieur du disque de Poincaré, et inversement. Mais ces deux cercles qui se confondent n'ont pas le même centre ni le même rayon en général.

Commençons par le cas particulier où le *cercle* a pour centre O et pour rayon R . Il s'agit alors du cercle de centre O et de rayon r tel que $r = \tanh(R/2)$.

Prenons maintenant le cas général où le *cercle* (C) a un centre I autre que O . On ne connaît pas sa forme, mais la droite (OI) coupe ce *cercle* en deux points A et B avec $d(AI) = d(BI) = R$, et A, I, B alignés sur (OI) . Par l'inversion qui envoie I en O , le cercle (C) devient un ensemble de points

équidistants de O , c'est-à-dire un cercle (C_1) de centre O . Les points A et B sont transformés en A' et B' alignés avec O .

Puis traçons le cercle (C') de diamètre $[AB]$ avec son centre I' au milieu de $[AB]$ et de rayon $R' = AB/2$. L'inversion transforme ce cercle en un cercle (C'_1) passant par A' et B' . Comme l'inversion conserve les angles, les angles droits en A et B entre (AB) et (C') deviennent des angles droits en A' et B' entre (AB) et (C'_1) . Il s'ensuit que $[A'B']$ est un diamètre de (C'_1) .

Finalement le cercle (C_1) est confondu avec le cercle (C'_1) . En revenant aux cercles initiaux, le cercle (C) est confondu avec le cercle (C') . Le cercle non-euclidien est aussi un cercle euclidien. On constate aussi que leurs centres I et I' sont alignés avec O . Cela donne le moyen de trouver le centre et le rayon de l'un à partir de ceux de l'autre, comme on le montre dans l'exercice suivant. Finalement :

Un cercle est un cercle. Les centres euclidien et hyperbolique sont alignés avec O .

Exercice 9 : Lien entre cercle hyperbolique et cercle euclidien

1) Comment avoir le centre I' et le rayon R' d'un cercle euclidien (C') à partir du cercle hyperbolique correspondant \odot de centre I et de rayon R ?

Le centre I est défini par sa position, c'est-à-dire par la distance euclidienne OI et l'angle $(\mathbf{Ox}, \mathbf{OI}) = \theta$. On commence par calculer $d(OI) = 2 \operatorname{Argth}(OI)$. Puis on détermine les points A et B d'intersection de (OI) et \odot , en calculant $d(OA) = d(OI) + R$, $d(OB) = d(OI) - R$. On en déduit les distances euclidiennes $OA = \operatorname{th}(d(OA)/2)$ et $OB = \operatorname{th}(d(OB)/2)$, puis le rayon $R' = (OA - OB)/2$ et la position du centre I' par $OI' = (OA + OB)/2$, soit $x_{I'} = OI' \cos\theta$ et $y_{I'} = OI' \sin\theta$.

Par exemple, pour $OI = 0,8$, $\theta = 70^\circ$ et $R = 1$, on trouve le cercle de centre I' et de rayon R' sur la figure 27.

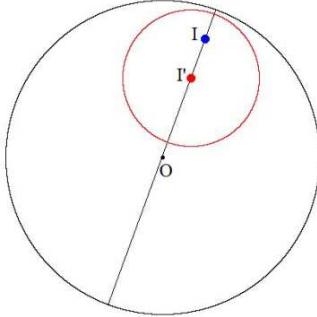


Figure 27 : Cercle de centre I et de rayon 1, avec I' centre du cercle correspondant.

2) Comment avoir le centre I et le rayon R d'un cercle hyperbolique \odot à partir du cercle euclidien correspondant (C') de centre I' et de rayon R' ?

Le cercle (C') doit être à l'intérieur du disque de Poincaré. Son centre I' est donné par la distance OI' et l'angle θ entre (\mathbf{Ox}) et \mathbf{OI}' . Ce cercle coupe (OI) en A et B , avec A supposé plus loin de O que B . On en déduit les distances $OA = OI' + R'$ (< 1) et $OB = |OI' - R'|$, ce qui nous amène à distinguer deux cas :

Si $OI' - R' \geq 0$, $OB = OI' - R'$, d'où $d(OA) = 2 \operatorname{Argth}(OA)$, $d(OB) = 2 \operatorname{Argth}(OB)$, puis $d(OI) = (d(OA) + d(OB))/2$

$$OI = \operatorname{th}(d(OI)/2), x_I = OI \cos\theta, y_I = OI \sin\theta \text{ et } R = (d(OA) - d(OB))/2.$$

Si $OI' - R' < 0$, $OB = R' - OI'$, d'où $d(OA) = 2 \operatorname{Argth}(OA)$, $d(OB) = 2 \operatorname{Argth}(OB)$, puis $d(OI) = (d(OA) - d(OB))/2$

$$OI = \operatorname{th}(d(OI)/2), x_I = OI \cos\theta, y_I = OI \sin\theta \text{ et } R = (d(OA) + d(OB))/2.$$

Des résultats sont donnés sur la *figure 28*, avec quelques *rayons* dessinés sur les *cercles*.

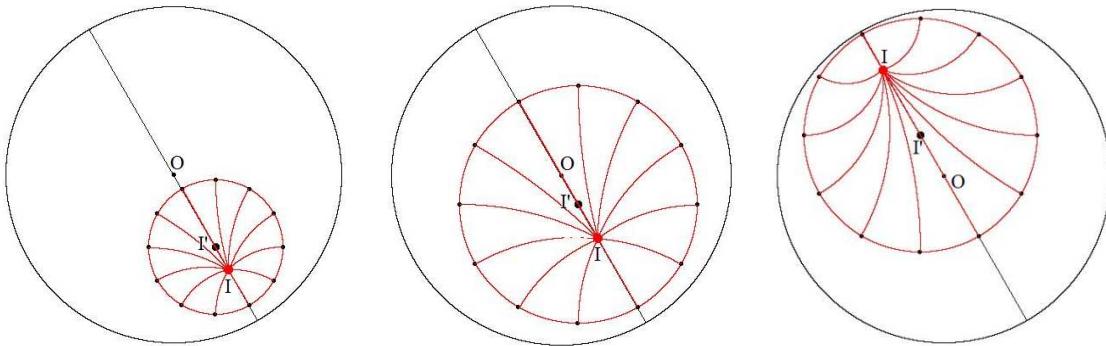


Figure 28 : De gauche à droite, les cercles de centres I' avec $OI' = 0,5, 0,2, 0,28$ ($\theta = 300^\circ, 300^\circ$ et 120°) et de rayon R' égal à $0,4, 0,7$ et $0,7$. Les cercles associés ont pour centre I et pour rayon $R = 1,38, 2,02, 2,74$.

Exercice 10 : Longueur et aire hyperboliques d'un cercle

1) Montrer que la longueur d'un cercle de rayon hyperbolique R est égale à $2\pi \operatorname{sh} R$.

Prenons un cercle de centre O , de rayon euclidien R' et de rayon hyperbolique R . Un élément de longueur hyperbolique ds du cercle est tel que $ds = 2R' d\theta / (1 - R'^2)$. La longueur du cercle est

$$\int_0^{2\pi} \frac{2R'}{1 - R'^2} d\theta = \frac{4\pi R'}{1 - R'^2}.$$

Avec $R' = \operatorname{th}(R/2) = \operatorname{sh}(R/2) / \operatorname{ch}(R/2)$ et $1 - R'^2 = 1 - \operatorname{th}^2(R/2) = 1 / \operatorname{ch}^2(R/2)$, la longueur hyperbolique du cercle est $4\pi \operatorname{sh}(R/2) \operatorname{ch}(R/2) = 2\pi \operatorname{sh} R$.

2) Montrer que l'aire du disque de rayon hyperbolique R est égale à $4\pi \operatorname{sh}^2(R/2)$.

Un élément d'aire de côtés euclidiens dr et $r d\theta$ a pour aire hyperbolique $4 dr r d\theta / (1 - r^2)^2$. L'aire hyperbolique du disque est

$$\begin{aligned} \int_{r=0}^{R'} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{4r dr d\theta}{(1-r^2)^2} &= \int_0^{R'} \frac{8\pi r dr}{(1-r^2)^2} = 4\pi \left[\frac{1}{1-r^2} \right]_0^{R'} = 4\pi \left(\frac{1}{1-R'^2} - 1 \right) = 4\pi \frac{R'^2}{1-R'^2} = 4\pi \operatorname{th}^2(R/2) \operatorname{ch}^2(R/2) \\ &= 4\pi \operatorname{sh}^2(R/2) \end{aligned}$$

3) Conclure sur la différence de comportement de la longueur et de l'aire d'un cercle selon qu'il est euclidien ou hyperbolique.

Lorsque le rayon devient grand, la longueur du cercle euclidien et son aire restent proportionnelles au rayon et à son carré, tandis que pour le cercle hyperbolique, la longueur et l'aire ont une évolution exponentielle.

7. Perpendiculaire commune à deux droites

Commençons par un problème annexe, celui de la distance d'un point à une droite. En géométrie euclidienne, on sait que par un point on peut mener une perpendiculaire unique à une droite, ce qui donne la distance du point à la droite. Il en est de même en géométrie hyperbolique, comme le montre l'exercice suivant.

Exercice 11 : Distance d'un point à une droite hyperbolique

Considérons un point A et une droite hyperbolique L . Montrer que par A on peut mener une perpendiculaire unique à la droite L , et que le segment $[AK]$ obtenu a pour longueur la distance hyperbolique $d(A, L) = d(A, K)$ entre le point et la droite, et qu'il s'agit de la distance minimale entre le point et tout autre point de la droite.

Donnons-nous un point A et une droite L (en forme d'arc de cercle en général). Puis faisons l'inversion de cercle (C) qui envoie le point A en O . Cette inversion transforme la droite L en une droite L' . La perpendiculaire menée par O vers L' est un segment euclidien $[OK']$ (figure 29 à gauche), et ce segment est le plus court parmi tous les segments (des segments aussi) joignant O à un point quelconque de la droite L' . En refaisant l'inversion, le point K' devient un point K sur L , avec $[AK]$ orthogonal à L , et ce segment est aussi le plus court entre le point et la droite, puisque l'inversion est une isométrie (figure 29 à droite).

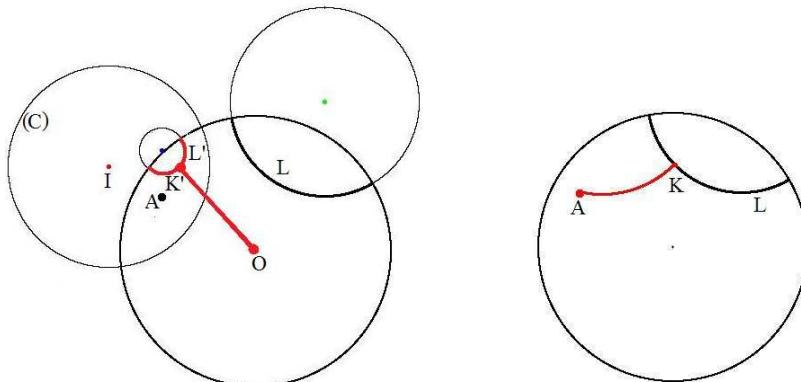
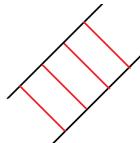


Figure 29 : A gauche, inversion de cercle (C) envoyant A en O et L en L' : la distance de O à L' est $d(O, K')$. A droite retour à la figure initiale avec $d(A, K)$ distance du point A à la droite L .



En géométrie euclidienne, on sait aussi que seules deux droites parallèles admettent des perpendiculaires communes, et qu'il en existe alors une infinité, les segments transversaux ayant tous même longueur. Il n'en est plus de même en géométrie hyperbolique. On va constater que seules deux droites ultra-parallèles (mais pas symptotiques) admettent une perpendiculaire commune, et que celle-ci est unique. La notion de distance entre deux droites parallèles n'a alors plus aucun sens. La démonstration se fait en deux temps.

1. Si deux droites admettent une perpendiculaire commune, ces deux droites sont ultra-parallèles.

Supposons que les deux droites sont sécantes ou parallèles asymptotiques. Les cercles qui les portent ont deux points d'intersection A et B , éventuellement confondus. Ces deux cercles définissent un faisceau de cercles à points de base A et B , ou tangents. Ce faisceau admet un faisceau orthogonal à points limites A et B ou tangent. Le cercle de Poincaré appartient à ce faisceau, ainsi que le cercle portant la perpendiculaire commune. Mais tous les cercles du faisceau orthogonal qui sont intérieurs au disque de Poincaré ont leur centre à l'intérieur du disque. Aucun ne peut porter une droite. Il ne peut pas y avoir de perpendiculaire commune.

2. Si deux droites sont ultra-parallèles, elles admettent une perpendiculaire commune unique.

Considérons les deux droites ultra-parallèles $(L_1 L'_1)$ et $(L_2 L'_2)$ portées par les cercles (C_1) et (C_2) de centres I et J (figure 30). Le faisceau de cercles engendré par ces deux cercles est à points limites. Comme le cercle ∂D unité de Poincaré appartient au faisceau orthogonal, il coupe la droite (IJ) en ces

deux points limites P et Q . A son tour, la droite (PQ) est portée par un cercle du faisceau orthogonal. Etant orthogonale aux deux cercles (C_1) et (C_2) , c'est une *perpendiculaire commune* aux droites.

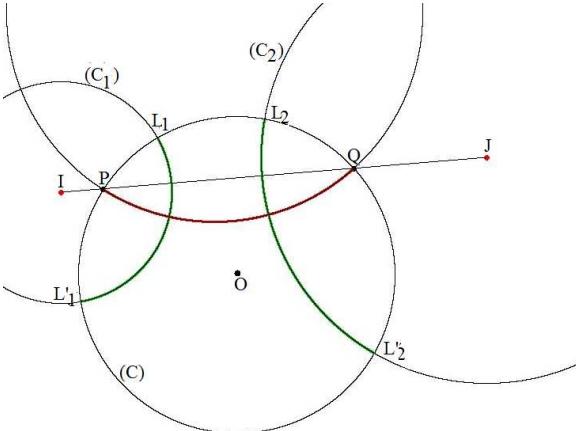
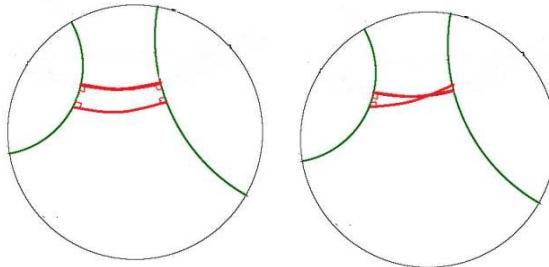


Figure 30 : Construction de la perpendiculaire commune (en rouge) à deux droites ultra-parallèles (en vert).



S'il existait une autre perpendiculaire commune, on aurait deux cas de figure. Si les deux perpendiculaires communes ne se coupent pas, on aurait un quadrilatère avec quatre angles droits, ce qui est impossible. Si les deux perpendiculaires se coupent, on aurait un triangle dont la somme des angles dépasserait π , ce qui est aussi impossible.

La perpendiculaire commune est bien unique, et la méthode utilisée ci-dessus permet de la construire. Il suffit en effet de trouver les deux points d'intersection P et Q du cercle unité et de la droite (IJ) .

Remarquons aussi que les droites (euclidiennes) $(L_1 L'_1)$ et $(L_2 L'_2)$, si elles se coupent, ont comme point d'intersection le centre K du cercle qui porte cette *perpendiculaire commune* (avec $KL_1 KL'_1 = KL_2 KL'_2 = R^2$, ce qui donne le rayon R du cercle).

8. Courbes équidistantes d'une droite hyperbolique

En géométrie euclidienne classique, on sait qu'il existe des droites parallèles à une droite donnée. En géométrie hyperbolique, il n'en est rien. Il existe des courbes, et non des *droites*, qui sont parallèles à une *droite* donnée. Et ces courbes sont des arcs de cercle. Pour le vérifier, considérons une *droite* dont les points limites sont A_∞ et B_∞ , ainsi qu'un arc de cercle (euclidien) passant par ces deux points (figure 31). Cet arc de cercle est caractérisé par l'angle α qu'il fait avec la droite en ses points limites. Nous allons montrer que les points de cet arc de cercle sont équidistants des points de la *droite*. Pour ce faire, commençons par simplifier le problème en pratiquant une isométrie directe –une certaine transformation de Möbius, qui fait passer de la droite $(A_\infty B_\infty)$ à la droite (AB) qui est un diamètre du disque de Poincaré, plus précisément avec $A(-1, 0)$ et $B(1, 0)$.¹⁰ L'arc de cercle $A_\infty B_\infty$ est transformé en arc de cercle AB faisant le même angle α avec le diamètre. Il reste à démontrer que cet arc AB a ses points équidistants du diamètre. Comme les distances sont conservées, il en sera de même pour l'arc de cercle $A_\infty B_\infty$.

¹⁰ Cette transformation existe, puisqu'il existe une transformation isométrique faisant passer d'un point et d'une droite passant par ce point à un autre point et une droite passant par ce point.

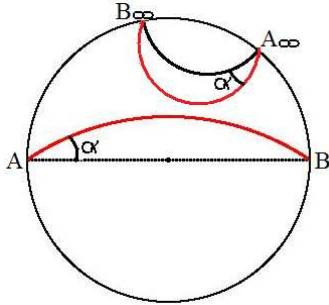


Figure 31 : Passage de la droite $A_\infty B_\infty$ et d'un arc de cercle (en rouge) $A_\infty B_\infty$ au diamètre AB et à l'arc de cercle correspondant, les distances étant conservées entre les uns et les autres.

Constatons d'abord que le cercle de Poincaré et le cercle associé à l'arc AB définissent un faisceau de cercle dont l'axe radical est la droite (AB) (figure 32). Puis prenons un point quelconque P sur l'arc de cercle AB . Par ce point passe un cercle du faisceau orthogonal au précédent, et ce cercle est orthogonal non seulement au cercle AB mais aussi au diamètre AB et au cercle de Poincaré. Il coupe le diamètre en Q , et l'arc de cercle PQ , qui est un *segment*, a pour longueur la *distance* $d(PQ)$. Il reste à montrer que cette distance est la même quelle que soit la position du point P .

Pour ce faire, considérons l'isométrie directe telle que $z' = \frac{z - q}{-qz + 1}$ où q est l'affixe (réel) de Q . Le

point Q devient O , et les points A et B restent fixes. Le diamètre $[AB]$ reste invariant, et l'arc de cercle AB devient un arc de cercle passant par A et B et qui conserve l'angle α avec le diamètre. Ainsi l'arc de cercle AB est lui aussi invariant. Le *segment* PQ devient un segment porté par l'axe vertical Oy à cause de la préservation des angles droits, et le point P devient le point P' situé à l'intersection de l'arc de cercle AB et de l'axe des y . Par conservation des distances, $d(PQ) = d(OP')$, et cela quelle que soit la position du point P . Tous les points de l'arc AB sont bien équidistants de la *droite* AB , et cette distance est $d(OP')$.

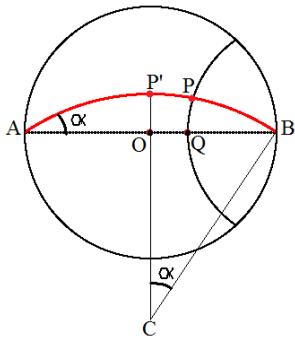


Figure 32 : Les points de l'arc de cercle AB (en rouge) sont équidistants du diamètre $[AB]$, avec $d(PQ) = d(OP')$.

Calculons $d(OP')$. L'arc de cercle AB ayant pour centre C et pour rayon R , on a $CO = R \cos\alpha$, $OP' = R - R \cos\alpha = R(1 - \cos\alpha)$, avec R tel que $R^2 = 1 + OC^2 = 1 + R^2 \cos^2\alpha$, $R^2 = 1 / \sin^2\alpha$, $R = 1 / \sin\alpha$. D'où la distance euclidienne $OP' = (1 - \cos\alpha) / \sin\alpha = (2 \sin^2(\alpha/2)) / (2 \sin(\alpha/2) \cos(\alpha/2)) = \tan(\alpha/2)$. La distance hyperbolique est alors :

$$\begin{aligned} d(OP') &= 2 \operatorname{Argh}(OP') = \ln \frac{1 + OP'}{1 - OP'} = \ln \frac{1 + \tan(\alpha/2)}{1 - \tan(\alpha/2)} \\ &= \ln \frac{\cos(\alpha/2) + \sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2) - \sin(\alpha/2)} = \ln \frac{\sqrt{2} \sin(\alpha/2 + \pi/4)}{\sqrt{2} \cos(\alpha/2 + \pi/4)} = \ln(\tan(\alpha/2 + \pi/4)) \end{aligned}$$

On a finalement la propriété :

Soit une droite de points limites A_∞ et B_∞ . Alors l'arc de cercle euclidien passant par A_∞ et B_∞ (voire la corde $[A_\infty B_\infty]$), et faisant un angle α avec la droite, a tous ses points équidistants de la droite, et cette distance est $\ln(\tan(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}))$.

9. Horocycles

Considérons un cercle dans le disque de Poincaré \mathbf{D} . Puis faisons tendre son centre vers l'infini. À la limite, le centre devient un point idéal T sur $\partial\mathbf{D}$ et le rayon devient infini. C'est toujours un cercle euclidien, mais ce n'est plus un cercle, puisque son centre T n'est pas dans \mathbf{D} . Il s'agit d'une courbe en forme de cercle tangent en T à $\partial\mathbf{D}$, que l'on appelle horocycle.¹¹ Les diamètres de l'horocycle, orthogonaux en ses extrémités au cercle euclidien qui le représente, et notamment orthogonaux en T au cercle unité $\partial\mathbf{D}$ sont des parties de droites asymptotiques issues du point idéal T .

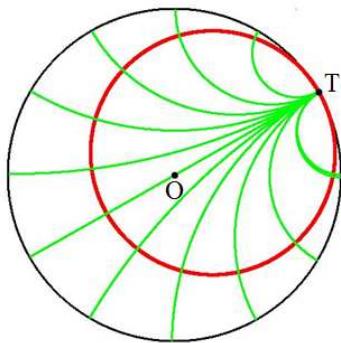


Figure 33 : Un horocycle (en rouge) dans le disque de Poincaré (en noir), avec ses diamètres (en vert) portés par des droites asymptotiques issues de son centre T .

Exercice 12 : Construction d'horocycles

1) Déterminer l'horocycle de centre hyperbolique T donné sur $\partial\mathbf{D}$ et passant par un point A donné du disque de Poincaré \mathbf{D} .

Le centre euclidien K de l'horocycle est sur (OT) (il est même sur $]OT[$) et sur la médiatrice de $[TA]$. Il existe toujours un point unique d'intersection, et un horocycle unique. Celui-ci appartient au faisceau de cercles tangents au cercle unité $\partial\mathbf{D}$ en T . Son centre euclidien K , ici situé sur $]OT[$, a pour coordonnées $OK \cos\theta, OK \sin\theta$. L'équation d'un cercle centré en K et de rayon KT est

$$(X - OK \cos\theta)^2 + (Y - OK \sin\theta)^2 = (1 - OK)^2. \text{ Imposons que le cercle passe par } A(x_A, y_A) :$$

$$(x_A - OK \cos\theta)^2 + (y_A - OK \sin\theta)^2 = 1 - OK^2. \text{ On en déduit}$$

$$OK = \frac{1 - x_A^2 - y_A^2}{2(1 - x_A \cos\theta - y_A \sin\theta)} \text{ d'où le centre } K \text{ et le rayon } TI.$$

Un résultat est donné sur la figure 34.

¹¹ En géométrie euclidienne, un cercle limite de rayon infini devient une droite. Autrement dit, un cercle généralisé reste à la limite un cercle généralisé. C'est différent en géométrie hyperbolique : un cercle devient une courbe qui n'est plus un cercle.

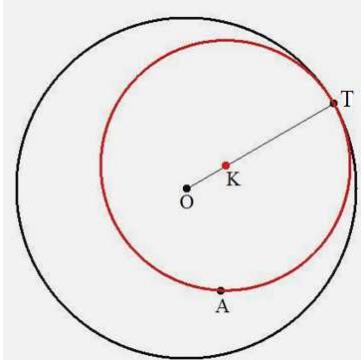


Figure 34 : Horocycle passant par A et tangent en T à ∂D .

2) Construire les horocycles passant par deux points A et B du disque D , en distinguant deux cas :

- a) Les points A et B sont équidistants du centre O du disque D
- b) Les points A et B ne sont pas équidistants de O .

a) La médiatrice \mathcal{A} de $[AB]$ coupe le cercle unité ∂D en deux points T et T' . Elle est aussi un axe de symétrie de la figure. Dans ces conditions, les cercles passant par TAB et par $T'AB$, qui sont leurs centres sur \mathcal{A} , sont tangents à ∂D . Ils sont les deux horocycles passant par A et B (figure 35).

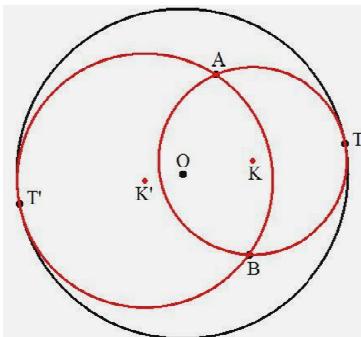


Figure 35 : Les deux horocycles passant par les points A et B lorsque $OA = OB$.

b) La médiatrice de $[AB]$ coupe le cercle unité ∂D en deux points. Prenons l'un de ces deux points comme centre d'un cercle Γ passant par A et B . Ce cercle coupe le cercle ∂D en deux points E et F (figure 36). La médiatrice de $[EF]$ passe par O mais pas celle de $[AB]$ puisque $OA \neq OB$. Les droites (AB) et (EF) ne sont pas parallèles. Elles sont sécantes en G , et l'on a $GA GB = GE GF$. D'autre part les points E et F sont de part et d'autre de l'arc AB sur le cercle Γ . Il s'ensuit que le point d'intersection G est à l'extérieur du cercle ∂D . Par le point G on peut toujours mener deux tangentes (GT) et (GT') au cercle ∂D , T et T' étant les points de contact, et l'on a $GA GB = GT^2 = GT'^2$, soit la puissance de G par rapport au cercle unité. Mais pour tout horocycle passant par A et B , la puissance de G est aussi $GA GB$. Comme celle-ci est aussi $GT^2 = GT'^2$, un horocycle qui est tangent à ∂D à comme point de tangence T ou T' . Il existe donc deux horocycles qui sont les cercles circonscrits à TAB et à $T'AB$.

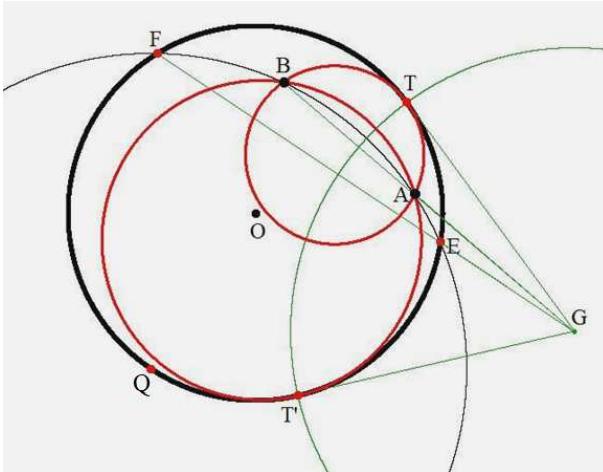


Figure 36 : Construction des deux horocycles passant par A et B dans le cas général.

10. Classification des isométries directes de \mathbf{D}

Rappelons qu'une isométrie directe de \mathbf{D} est une transformation de Möbius M de la forme

$$M(z) = e^{i\theta} \frac{z - m}{-\bar{m}z + 1} \text{ avec } |m| < 1.$$

Sous forme normalisée (avec son déterminant égal à 1), elle devient :

$$M(z) = \frac{(e^{i\theta/2} / A)z - m(e^{i\theta/2} / A)}{-\bar{m}(e^{-i\theta/2} / A)z + (e^{-i\theta/2} / A)} \text{ où } A = \sqrt{1 - |m|^2}.$$

$$\text{La trace de } M \text{ est : } \text{Tr}M = \frac{e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2}}{A} = \frac{2\cos(\theta/2)}{\sqrt{1 - |m|^2}}$$

Comme $|m| < 1$, la trace est réelle. Notre étude sur les transformations de Möbius, dans un chapitre précédent, indique qu'il existe deux points fixes, leur produit valant $-b/c$. Dans le cas présent, cela donne $\frac{m}{\bar{m}}e^{i\theta}$, soit 1 en module. On en déduit qu'il existe trois cas possibles : soit il existe un point fixe unique dans \mathbf{D} , l'autre étant à l'extérieur, soit les deux points fixes sont distincts mais tous deux sur le cercle unité ∂D , soit ils sont confondus en un point de ∂D . Finalement, on obtient ces trois cas :

Si $|\text{Tr } M| < 2$, la transformation est elliptique. Il existe un point fixe unique dans \mathbf{D} . La transformation est une *rotation* hyperbolique autour du point fixe.

Si $|\text{Tr } M| = 2$, la transformation est parabolique. Il existe un seul point fixe sur ∂D . La transformation est une *rotation limite* dont le centre est ce point limite.

Si $|\text{Tr } M| > 2$, la transformation est hyperbolique. Il n'existe aucun point fixe dans \mathbf{D} , mais deux points fixes limites sur ∂D . La transformation est une *translation* hyperbolique.

Cela peut aussi être vu sous forme géométrique. Nous savons que M est une isométrie directe de \mathbf{D} et qu'elle est toujours le produit de deux *réflexions* hyperboliques. Cela nous amène encore à distinguer trois cas, selon que les *axes* des réflexions sont sécants, parallèles asymptotiques ou ultra-parallèles. Et l'on retrouve les *rotations*, les *rotations limites* et les *translations*. L'exercice qui suit montre le lien entre la trace de M et la position respective des axes des *réflexions*.

Exercice 13 : Trace de M lorsque M est la composée de deux inversions.

1) Deux inversions-réflexions de \mathbf{D} ont pour centres a et b . Supposons que la droite $(a b)$ est verticale : les points a et b ont pour coordonnées (h, a') et (h, b') . Montrer que pour $|h| > 1$, les cercles d'inversion se coupent en deux points dont un dans \mathbf{D} , et que pour $|h| < 1$, ils ne sont pas sécants (les droites correspondantes sont ultra-parallèles).

Lorsque $|h|$ est supérieur à 1, la droite $(a b)$ ne coupe pas le cercle unité ∂D . Cette droite et ce cercle engendrent un faisceau de cercles (avec $(a b)$ comme axe radical). Il admet deux points limites B et B' sur Ox (figure 37 à gauche). Le faisceau orthogonal contient les cercles de centres a et b , et il a comme point de base B et B' . Les cercles d'inversion sont sécants en B et B' , ou encore les axes des deux réflexions se coupent en B .

Lorsque $|h|$ est inférieur à 1, la droite $(a b)$ coupe le cercle unité ∂D . Cette droite et ce cercle engendrent un faisceau de cercles à points de base L et L' (figure 37 à droite). A leur tour, ces deux points sont des points limites pour le faisceau orthogonal dont font partie les cercles de centres a et b . Les cercles d'inversion ne se coupent pas. Il existe aussi des contraintes : a et b doivent être hors de \mathbf{D} , soit $1 - h^2 < a'^2$ et $1 - h^2 < b'^2$.

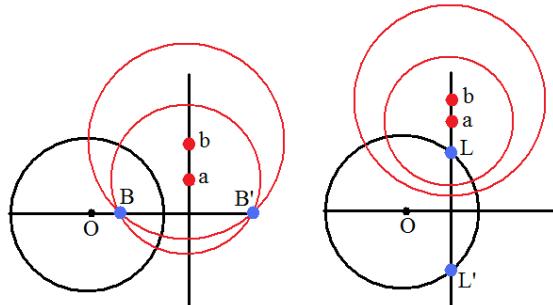


Figure 37 : Les deux cas possibles selon que $|h| > 1$ à gauche, et $|h| < 1$ à droite.

2) On rappelle (cf. exercice 3) que la composée de deux inversions s'écrit $z' = \frac{Az + B}{Bz + A}$ avec $A = \bar{a}b - 1$, $B = a - b$, a et b étant les centres (ou les affixes) des cercles d'inversion. Calculer le carré de la trace de cette transformation de Möbius M . Vérifier que pour $h = 1$, on a bien $|\text{Tr } M| = 2$.

Sous forme normalisée, la transformation M a pour trace $(A + \bar{A}) / \sqrt{A\bar{A} - B\bar{B}}$. Après calculs, on trouve : $A + \bar{A} = 2(h^2 - 1 + a'b')$ et $A\bar{A} - B\bar{B} = (h^2 - 1)(h^2 + a'^2 + b'^2 - 1) + a'^2 b'^2$.

$$(\text{Tr } M)^2 = 4 \frac{(h^2 - 1 + a'b')^2}{(h^2 - 1)(h^2 + a'^2 + b'^2 - 1) + a'^2 b'^2}$$

Pour $h = 1$, on trouve bien $(\text{Tr } M)^2 = 4$.

3) On pose $X = h^2 - 1$, et $Y = ((\text{Tr } M)^2 - 4) / 4$. Ecrire Y en fonction de X .

Le résultat précédent s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{(\text{Tr } M)^2}{4} &= \frac{(X + a'b')^2}{X(X + a'^2 + b'^2) + a'^2 b'^2} = \frac{(X + a'b')^2}{X^2 + (a'^2 + b'^2)X + a'^2 b'^2} = \frac{(X + a'b')^2}{(X + a'^2)(X + b'^2)} \\ Y &= \frac{(\text{Tr } M)^2 - 4}{4} = \frac{(\text{Tr } M)^2}{4} - 1 = \frac{(X + a'b')^2 - X^2 - (a'^2 + b'^2)X - a'^2 b'^2}{(X + a'^2)(X + b'^2)} \\ &= \frac{-(b - a)^2 X}{(X + a'^2)(X + b'^2)} \end{aligned}$$

Lorsque X est positif, ce qui signifie que $h^2 - 1 > 0$ ou $|h| > 1$, on constate que Y est négatif, ce qui signifie que $(\text{Tr } M)^2 < 4$ ou $|\text{Tr } M| < 2$.

Lorsque X est négatif, soit $|h| < 1$, on sait que l'on doit avoir $1 - h^2 < a'^2$ et $1 - h^2 < b'^2$, soit $X > -a'^2$ et $X > -b'^2$, Y est positif, d'où $|\text{Tr } M| > 2$.

10.1. Rotation hyperbolique

Sous l'effet des deux inversions, un point A est transformé en A_1 puis en A' . Quant au point d'intersection K des deux cercles d'inversion c'est un point fixe, et une figure, comme un triangle dans la figure) est transformée en une figure isométrique, avec ses angles orientés conservés, cette figure étant tournée, autour de K , d'un angle double de celui compris entre les deux cercles d'inversion (figure 38). Il s'agit d'une *rotation*.

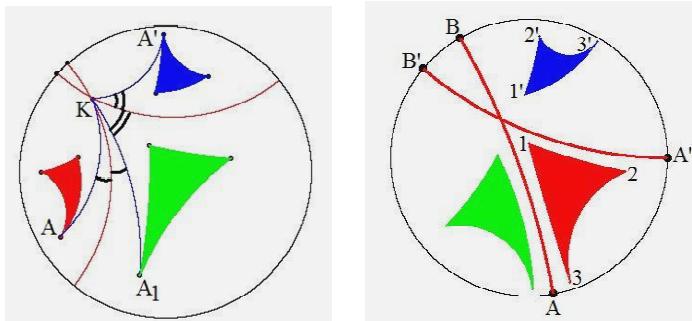


Figure 38 : A gauche passage de A à A' en passant par A_1 , avec un angle AKA' double de l'angle entre les deux cercles d'inversion. A droite, à partir du triangle rouge 123, la première inversion (AB) donne le triangle vert, puis la deuxième inversion ($A'B'$) donne le triangle final $1'2'3'$ en bleu.

A partir de deux *droites* passant par un point A dans \mathbf{D} et faisant un angle de $\theta/2$, constituant les deux axes des réflexions, les *droites* successives qui passent par A en faisant ce même angle de l'une à la suivante, sont des morceaux des cercles d'un faisceau à points de base A et A' . Il est orthogonal au faisceau qui est engendré par le cercle unité ∂D et le cercle point A , et ce faisceau a pour points limites les points A et A' . Il donne des cercles dans \mathbf{D} , et tout point de \mathbf{D} situé sur un cercle du faisceau est transformé par la rotation en un point qui est sur un même cercle. Ces cercles restent globalement invariants sous l'effet de la rotation de centre K et d'angle θ . Les *droites* qui leur sont orthogonales sont telles qu'un point situé sur l'une a pour transformé un point situé sur la *droite* qui fait un angle θ avec l'autre. La figure 39 montre l'évolution de figures sous l'effet d'une rotation de centre A et d'angle $\theta = \pi/3$ à partir de la composée de deux réflexions dont les axes passent par A et font un angle $\theta/6$ de l'un vers l'autre.

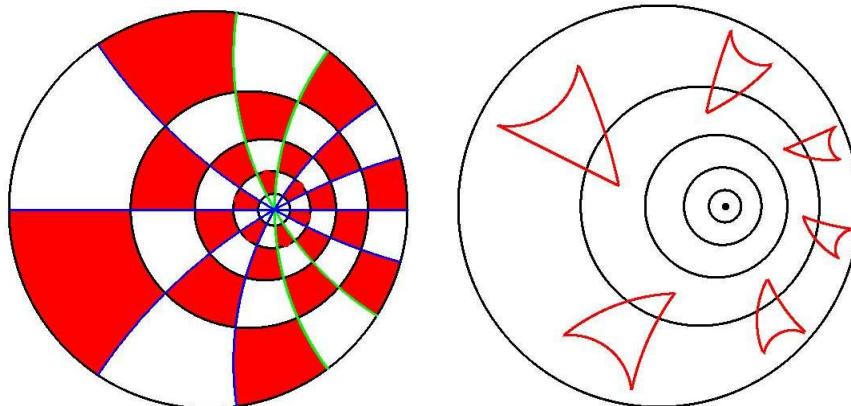


Figure 39 : Rotation d'angle $\pi/3$. A gauche, les deux axes des réflexions sont en vert, ils font un angle de $\pi/6$. Sous l'effet répété de cette rotation, on assiste à un mouvement tournant de quadrilatères

rouges situés entre deux cercles globalement invariants et des segments qui leur sont orthogonaux et faisant entre eux des angles de 30° . A droite, on a une succession périodique de six triangles sous l'effet répété de la rotation.

Un cas spécial se produit lorsque le point A est en O , centre du cercle unité ∂D , le point A' étant envoyé à l'infini. Les axes des deux réflexions sont maintenant des diamètres du cercle, ce qui donne par réflexions successives des diamètres séparés d'un angle $\theta/2$. Et les cercles qui leur sont orthogonaux sont tous concentriques. La *rotation* devient une rotation de centre O et d'angle θ (figure 40). Remarquons que l'on peut passer de la rotation d'angle θ autour du point A à la rotation de même angle autour de O en faisant la transformation de Möbius qui est la composée de la *réflexion* envoyant A en O suivie de la *réflexion* autour de Ox . Et signalons que pour un « habitant » du disque de Poincaré, le mouvement de rotation lui apparaît identique dans les deux cas, et le point O est un point comme un autre dans le plan hyperbolique.

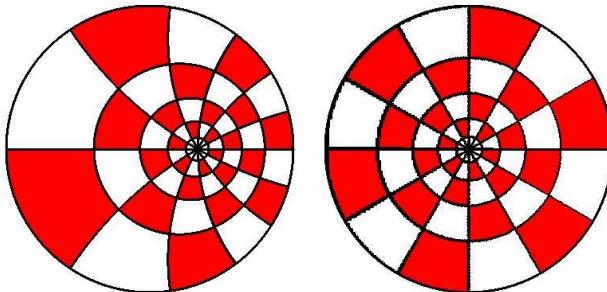


Figure 40 : A gauche une rotation d'angle $\pi/3$ autour d'un point A autre que O . A droite la rotation de même angle et de centre O .

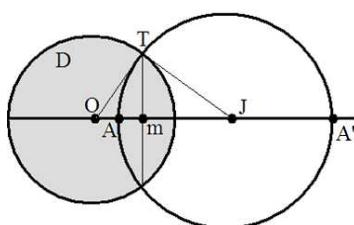
L'exercice suivant traite un cas particulier de rotation, celui où la transformation échange les points m et 0 , m étant donné dans le disque de Poincaré \mathbf{D} .

Exercice 14 : Etude de la transformation de Möbius M_π telle que $M_\pi(z) = \frac{z-m}{\bar{m}z-1}$ avec m tel que $|m| < 1$.

1) Montrer qu'il s'agit d'une isométrie directe de \mathbf{D} qui échange les points m et 0 .

Cette transformation s'écrit aussi $M_\pi(z) = e^{i\pi} \frac{z-m}{-\bar{m}z+1}$ avec $|m| < 1$ (cela explique la notation M_π pour $\theta = \pi$), il s'agit donc d'une isométrie directe de \mathbf{D} . On vérifie que l'on a bien $M_\pi(m) = 0$, et $M_\pi(0) = m$.

2) Utiliser la *réflexion* S unique qui échange m et 0 pour démontrer que M_π est une rotation d'angle π dont on précisera le centre. Pour simplifier, on prendra m sur (Ox) .



La *réflexion* $S_{(C)}$ est une inversion dont le cercle (C) de centre J et de rayon r est orthogonal au cercle unité ∂D . La figure ci-contre indique comment le construire. Grâce au triangle rectangle OTJ , on a $Jm \cdot JO = r^2$ et aussi $Om \cdot OJ = 1$. Mais cette *réflexion* d'axe le cercle (C) est une isométrie indirecte. Composons-la avec la *réflexion* $S_{(Om)}$ d'axe (Om) , soit $S_{(Om)}(z) = \bar{z}$, qui laisse les points m et O fixes. On obtient ainsi une isométrie directe qui échange les points m et O . Cette isométrie est unique, il s'agit donc de M_π , soit $M_\pi = S_{(Om)} \circ S_{(C)}$. Composée de deux *réflexions* d'axes orthogonaux, M_π est une *rotation* d'angle π et de centre A , seul point d'intersection

du cercle (C) et de la droite (Om) dans \mathbf{D} . Précisons que, grâce à la réflexion S , A est le *milieu* de $[Om]$, soit $d(O, A) = d(A, m)$.¹²

3) Vérifier que la transformation M_π échange aussi tout point z de \mathbf{D} avec le point $M_\pi(z)$. Et déduire cette formule sur la distance entre deux points m et z : $d(m, z) = \ln \frac{|\bar{m}z - 1| + |z - m|}{|\bar{m}z - 1| - |z - m|}$.

A cause de l'angle plat de la rotation, il est normal que $M_\pi(z)$ soit transformé en z . Mais vérifons-le par le calcul : $M_\pi(M_\pi(z)) = \frac{M_\pi(z) - m}{\bar{m}M_\pi(z) - 1} = \frac{z - m - m\bar{m}z + m}{\bar{m}z - m\bar{m} - \bar{m}z + 1} = \frac{z(1 - m\bar{m})}{1 - m\bar{m}} = z$. On en déduit que :

$d(m, z) = d(M_\pi(m), M_\pi(z)) = d(0, M_\pi(z))$, et l'on applique la formule de la distance à partir du centre 0 : $d(0, M_\pi(z)) = \ln \frac{1 + |M_\pi(z)|}{1 - |M_\pi(z)|} = \ln \frac{1 + |z - m| / |\bar{m}z - 1|}{1 - |z - m| / |\bar{m}z - 1|}$. Finalement la distance entre deux points m et z est : $d(m, z) = \ln \frac{|\bar{m}z - 1| + |z - m|}{|\bar{m}z - 1| - |z - m|}$.

4) Visualiser la transformation en construisant un quadrilatère à quatre angles droits et son image.

Rappelons que l'on s'est donné m réel positif dans \mathbf{D} , soit $Om = m$. On en déduit $OJ = 1/Om$, puis le rayon r du cercle d'inversion (C) , soit $r^2 = Jm$. $OJ = (1/Om - Om)/Om = (1 - m^2)/m^2$. Les points d'intersection de (Om) et (C) sont A et A' avec $OA = OJ - r$ et $OA' = OJ + r$, soit

$$OA = \frac{1 - \sqrt{1 - m^2}}{m} \text{ et } OA' = \frac{1 + \sqrt{1 - m^2}}{m} \text{ (figure 41 à gauche).}$$

Le cercle unité ∂D et le cercle point A définissent un faisceau de cercles de points limites A et A' . Prenons deux cercles Γ et Γ' de ce faisceau à l'intérieur de \mathbf{D} . Ils restent globalement invariants sous l'effet de la rotation hyperbolique puisqu'ils sont orthogonaux aux deux axes des réflexions. Le faisceau orthogonal au faisceau précédent a comme points de base A et A' et le cercle (C) en fait notamment partie. Prenons deux cercles de ce faisceau passant par A : il s'agit de deux droites Δ et Δ' du disque \mathbf{D} passant par A . Les cercles Γ et Γ' déterminent, avec les droites Δ et Δ' , un quadrilatère à quatre angles droits. Son transformé par la rotation hyperbolique est le quadrilatère situé à l'opposé lui aussi délimité par les mêmes quatre courbes (figure 41 à droite).

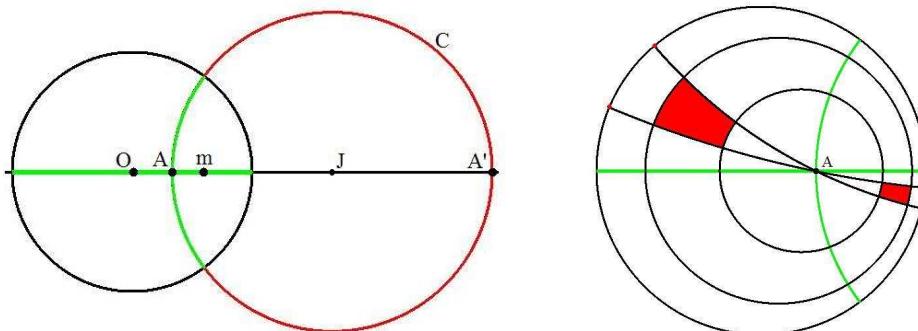


Figure 41 : A gauche les deux axes de réflexion en vert dans le disque de Poincaré. A droite, dans le disque de Poincaré, un quadrilatère et son transformé par la rotation de centre A et d'angle π , en rouge.

5) Grâce à $\text{Tr } M_\pi$ vérifier que la transformation est elliptique. On rappelle que les deux points fixes d'une transformation de Möbius, sous son écriture normalisée, obéissent à la formule

¹² On avait vu que la composée d'une inversion de cercle centré en a suivie de la réflexion dont l'axe fait un angle θ avec Ox s'écrivait $z' = e^{i2\theta}(\bar{a}z - 1)/(z - a)$. Avec le lien $a = 1/\bar{m}$, on a aussi :

$e^{i2\theta}(z/m - 1)/(z - 1/\bar{m}) = e^{i2\theta}(\bar{m}/m)(z - m)/(\bar{m}z - 1) = (z - m)/(\bar{m}z - 1)$. On retrouve bien la transformation M_π .

$\frac{a-d \pm \sqrt{\text{Tr } M^2 - 4}}{2c}$. Vérifier que l'on retrouve bien A et A' , A étant le seul point fixe dans D .

Avec $\theta = \pi$, $\text{Tr } M_\pi = 0$. On a bien $|\text{Tr } M_\pi| < 2$. La transformation est elliptique. D'autre part, les points fixes vérifient $\frac{a-d \pm \sqrt{-4}}{2c} = \frac{a-d \pm 2i}{2c} = \frac{(2i/A)(1 \pm A)}{(2i/A)\bar{m}} = \frac{1 \pm \sqrt{1-m^2}}{m}$. On retrouve bien les points A et A' , seul A étant dans D . On a bien une rotation hyperbolique autour de A . Le multiplicateur μ vaut -1 , la rotation a pour angle π .

10.2. Rotation limite

On est dans le cas où la transformation est la composée de deux *réflexions d'axes* parallèles asymptotiques en un point A de l'horizon ∂D . Les cercles correspondant à ces axes engendrent un faisceau de cercles tangents à (OA) en A . Sur la figure 42, nous avons pris la réflexion d'axe Ox suivie de l'inversion de cercle centré en $C_1(1, a)$. Sous l'effet de cette inversion (C_1) , l'axe Ox est transformé en un cercle de centre $C_2(1, a/2)$. Puis sous l'effet de cette inversion (C_2) , le cercle (C_1) est transformé en un cercle de centre C_3 . Et ainsi de suite. Dans un *exercice* qui suit, on constate que le centre C_k du cercle numéro k a pour ordonnée a/k . Dans le disque D , cela donne des droites toutes asymptotiques en A . Prenons maintenant les cercles du faisceau orthogonal au précédent, tous centrés sur Ox . Tout point situé sur l'un d'eux est transformé en un point situé sur lui. Ces cercles restent globalement invariants sous l'effet de la transformation. Sur la figure 42 au centre, on voit le mouvement tournant où la rotation fait passer d'un quadrilatère rouge au suivant, et cela dans un mouvement sans fin. On constate que les cercles globalement invariants sont des horocycles de point idéal A .

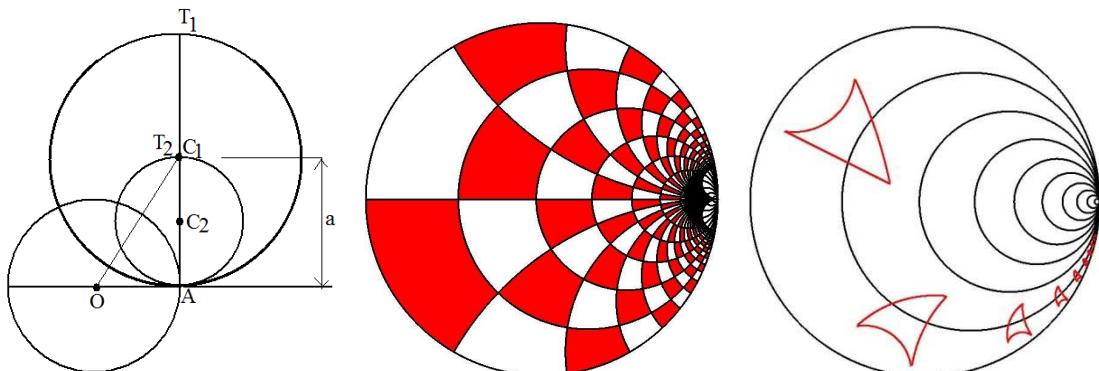


Figure 42 : A gauche les deux réflexions initiales, celle d'axe Ox et celle de cercle centré en $C_1(1, a)$. ici avec $a = \sqrt{3}$. Sous l'effet de cette dernière, l'axe Ox devient le cercle de centre C_2 . Au centre, le mouvement de rotation limite, avec le mouvement tournant infini faisant passer d'un quadrilatère rouge au suivant. A droite, avec $a = -\sqrt{3}$ pour avoir une rotation dans le sens trigonométrique, évolution d'un triangle sous l'effet répété de la transformation.

Exercice 15 : Droites asymptotiques en un même point

En reprenant les notations de la figure 42 à gauche, déterminer les coordonnées du centre C_{k+1} du cercle (C_{k+1}) qui est le transformé du cercle (C_{k-1}) sous l'effet de l'inversion de cercle (C_k) . Au départ, on connaît $C_1(1, a)$ et $C_2(1, a/2)$. On notera que les droites hyperboliques associées aux cercles (C_k) découpent chaque cercle du faisceau orthogonal suivant des distances hyperboliques égales.

Appelons T_k le point situé à l'extrémité opposée de A sur le cercle C_k , et notons t_k et c_k leurs coordonnées. Sous l'effet de l'inversion (C_k) appliquée à (C_{k-1}) pour donner (C_{k+1}) , on a :

$$\begin{aligned}
 C_k T_{k+1} C_k T_{k-1} &= C_k T_k^2 \\
 (AT_{k+1} - AC_k)(AT_{k-1} - AC_k) &= C_k A^2 \\
 (2c_{k+1} - c_k)(2c_{k-1} - c_k) &= c_k^2 \\
 c_{k+1} &= \frac{c_{k-1} c_k}{2c_{k-1} - c_k} \quad \text{avec } c_1 = a \text{ et } c_2 = a/2.
 \end{aligned}$$

Il existe une suite unique (c_k) obéissant à ces conditions. On vérifie alors que $c_k = a / k$ ($k > 0$) vérifie aussi bien les conditions initiales que la relation de récurrence. C'est la formule cherchée.

On notera aussi que la composée des deux réflexions initiales est la transformation de Möbius M telle que $M(z) = \frac{(1+ia)z-1}{z-(1-ia)} = \frac{i(1+ia)z-i}{iz-i(1-ia)} = \frac{(-a+i)z-i}{iz+(-a-i)}$ qui est bien de la forme $\frac{Az+B}{Bz+A}$ avec $A = -a + i$, $B = -i$ et $|B| = 1 < |A| = \sqrt{1+a^2}$ (cf. exercice 3). Tout cela est utile pour faire le programme aboutissant au dessin de la figure 42 à droite.

10.3. Translation hyperbolique

Lorsque l'on fait la composée de deux *réflexions* de cercles non sécants, c'est-à-dire de deux *droites* ultra-parallèles, il n'y a aucun point fixe, on dit qu'il s'agit d'un *translation* (figure 43).

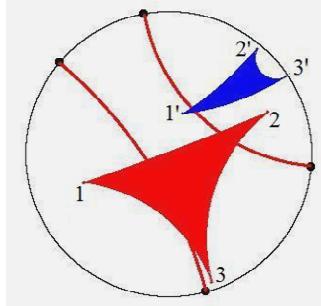
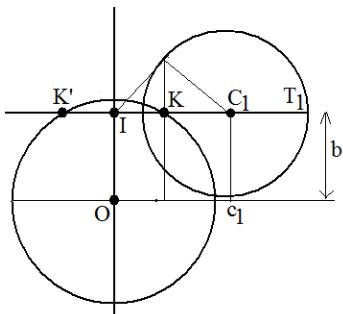


Figure 43 : Une *translation*, avec le triangle 123 transformé en triangle 1'2'3', sous l'effet de deux *réflexions* autour de deux *droites* ultra-parallèles (en rouge).

Ce qui suit va permettre de mieux comprendre ce phénomène de translation, et de préciser comment faire les constructions géométriques correspondantes.



Choisissons comme réflexions celle d'axe Oy et celle de cercle (C_1) orthogonal au cercle unité, ce cercle ayant pour centre $C_1(c_1, b)$ et pour rayon R_1 ($R_1 < c_1$). Comme ces deux cercles généralisés ne se coupent pas, ils engendrent un faisceau de cercles à points limites K et K' , les centres de ces cercles étant sur la droite $y = b$. La droite Oy coupe cette droite en $I(0, b)$ et le cercle (C_1) la coupe en T_1 et T'_1 , ce qui donne $IT_1 IT'_1 = IK^2$, soit $(c_1 - R_1)(c_1 + R_1) = IK^2$. On en déduit IK (et IK'). Comme le cercle unité ∂D fait partie du faisceau orthogonal, il passe par les points K et K' , ce qui impose $b^2 = 1 - IK^2$, et aussi pour les conditions initiales sur c_1 et R_1 : $(c_1 - R_1)(c_1 + R_1) < 1$.

Prenons ensuite le cercle (C_2) inverse de l'axe Oy par l'inversion de cercle (C_1) . Il passe par C_1 et il est tel que $C_1 I C_1 T_2 = R_1^2$, $c_1 2 R_2 = R_1^2$, $R_2 = R_1^2 / (2c_1)$, et $c_2 = c_1 - R_2$ avec c_2 abscisse du centre C_2 . Puis on construit les cercles suivants, le cercle (C_3) est le transformé du cercle (C_1) par l'inversion de cercle (C_2) , et plus généralement, le cercle (C_k) est le transformé du cercle (C_{k-2}) par l'inversion de cercle (C_{k-1}) , avec les formules de récurrence (cf. chapitre sur l'inversion) :

$$c_k = \frac{(c_{k-2} - c_{k-1})R_{k-1}^2}{(c_{k-2} - c_{k-1})^2 - R_{k-2}^2} \text{ et } R_k = \frac{R_{k-1}^2 R_{k-2}}{|(c_{k-2} - c_{k-1})^2 - R_{k-2}^2|}$$

Il reste à tracer les courbes orthogonales aux précédentes. Elles font partie du faisceau de cercles à points de base K et K' . Parmi elles se trouve la seule *droite* (KK'), les autres étant les *courbes équidistantes* de cette *droite* (figure 44).

Pour le tracé de la figure 44, on pourra aussi utiliser la formule de la transformation de Möbius associée M :

$$z \mapsto z_1 = -\bar{z} \mapsto z' = \frac{a\bar{z}_1 - 1}{\bar{z}_1 - a} \quad (\text{avec } a \text{ centre du cercle } (C_1)), \text{ soit } M(z) = \frac{-az - 1}{-z - \bar{a}} = \frac{(-c_1 - ib)z - 1}{-z - c_1 + ib}.$$

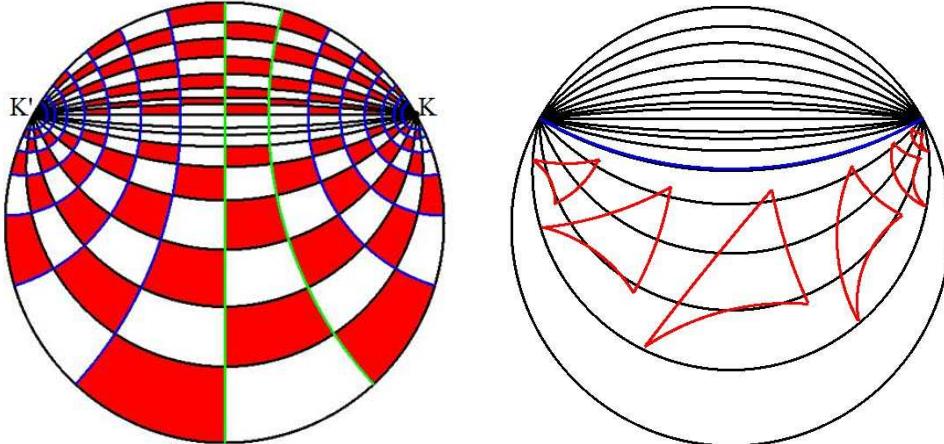


Figure 44 : A gauche les *droites en bleu* sont les transformées successives des axes *en vert* des deux réflexions qui définissent la transformation de Möbius. Les courbes circulaires globalement invariantes *en noir* passent par les deux points fixes K et K' . Les quadrilatères *rouges* à angles droits situés entre ces courbes sont transformés de l'un au suivant en allant de K' vers K . A droite, on voit les transformations successives d'un triangle. Parmi les courbes invariantes, la seule qui soit une *droite* est tracée *en bleu*.