

Le demi-plan de Poincaré

Le demi-plan de Poincaré est le demi-plan situé au-dessus de l'axe de x , dont les points ont des ordonnées $y > 0$. Pour qu'il devienne un modèle de la géométrie non-euclidienne hyperbolique, il est muni d'une distance qui n'est pas celle de la distance euclidienne telle qu'on la voit dans ce demi-plan. Cette distance hyperbolique entre deux points infiniment proches d'affixes z et $z + dz$, que l'on note $d(z, z+dz)$, est prise égale à la distance euclidienne $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ divisée par $y = \text{Im } z$, soit

$$d(z, z + dz) = \frac{|dz|}{y}.$$

Mais d'où vient cette formule ? Pour cela nous devons faire une digression historique, où le rôle du mathématicien E. Beltrami joue un rôle décisif.

L'histoire commence avec le cinquième postulat d'Euclide (années -300), qui sous sa variante la plus simple s'énonce ainsi : par un point donné, on ne peut mener qu'une parallèle à une droite donnée. Pendant plus de mille ans, de nombreux mathématiciens, Omar Khayyam et G. Saccheri parmi les plus remarquables, n'ont pas voulu accepter qu'il s'agisse d'un axiome, et ils ont tenté de démontrer cette propriété à partir des autres axiomes d'Euclide. Sans vraiment y arriver. Cet acharnement a abouti à la naissance de la géométrie non-euclidienne, appelée « géométrie imaginaire » par ses inventeurs, et dite hyperbolique ensuite. Dans cette nouvelle géométrie, celle du plan hyperbolique, on dispose maintenant de cette propriété : par un point on peut mener plusieurs parallèles à une droite donnée, les autres axiomes d'Euclide restant valables, notamment celui qui dit que par deux points passe une droite unique. Cette géométrie ne présente aucune contradiction interne et possède une multitude de propriétés qui lui sont propres, fort différentes de celles de la géométrie plane euclidienne. Par la même occasion, son existence prouve que le cinquième postulat d'Euclide ne peut pas découler des autres postulats.

Comme l'a écrit K.F. Gauss (années 1800) « L'hypothèse que la somme des trois côtés d'un triangle est inférieure à 180° conduit à une géométrie tout à fait différente des autres géométries, mais qui est cohérente en elle-même. »

« A partir de rien, j'ai créé un étrange nouvel univers », s'exclame J. Bolyai qui, avec N. I. Lobachevsky, est un promoteur de cette nouvelle géométrie, dans les années 1830. Mais ces mathématiciens sont relativement ignorés, voire décriés en leur temps.¹ Il faut attendre les travaux de E. Beltrami en 1868 pour commencer à faire accepter cette géométrie. Celui-ci est le premier à en donner une représentation concrète, en utilisant ce qu'il appelle la pseudosphère.²

1. La pseudosphère, première illustration de la géométrie hyperbolique

La pseudosphère est une surface en trois dimensions qui a la particularité d'avoir une courbure négative constante (-1 en l'occurrence), à l'opposé de la sphère qui a une courbure positive constante³,

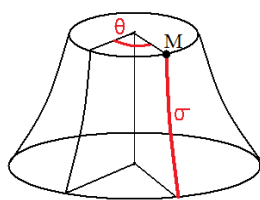
¹ Pour le mathématicien logicien G. Frege : « Si la géométrie euclidienne est vraie, alors la géométrie non-euclidienne est fausse », et vice-versa.

² Pour la petite histoire, précisons que Beltrami, lorsqu'il est étudiant à l'Université de Pavie, se fait renvoyer pour activités subversives contre l'autorité.

³ A cause de cette analogie avec la sphère, Beltrami a préféré le terme « pseudosphère » à celui d'antisphère, considérant qu'elles sont « plus soeurs jumelles qu'antagonistes ». Précisons qu'une surface à courbure négative

le plan ayant, lui, une courbure nulle. On a vu que sur la sphère la somme des angles d'un triangle dépasse 180° . Sur la pseudosphère, la somme des angles d'un triangle est inférieure à 180° , comme on peut le voir sur la *figure 1 à droite*. Si l'on considère que le cinquième postulat d'Euclide a pour conséquence immédiate que la somme des angles d'un triangle est égale à un angle plat, on a bien l'émergence d'une géométrie hyperbolique sur la pseudosphère. Et sur cette surface, les mesures des angles et des longueurs sont celles de la géométrie euclidienne.

Comment construit-on la pseudosphère ? On part d'une courbe appelée tractrice, représentée sur la *figure 1 à gauche*.⁴ Si l'on appelle r la distance d'un point M de la courbe à l'axe vertical, et σ la longueur de l'arc AM , la courbe a pour équation $r = e^{-\sigma}$. Puis on passe en trois dimensions : en faisant tourner la tractrice autour de l'axe vertical, la surface ainsi créée est la pseudosphère (*figure 1 au centre*). Dans le cas présent, on peut vérifier que sa courbure est partout égale à -1 .⁵ Par analogie avec la sphère, on peut considérer que les tractrices qui tapissent la surface jouent le rôle de *méridiens*, et que les cercles horizontaux de la pseudosphère sont des *parallèles*.



Tout point M de la pseudosphère est à l'intersection d'un méridien et d'un parallèle. Il peut être caractérisé par sa longitude θ , c'est-à-dire par l'angle que fait M sur son cercle *parallèle* avec une direction servant d'origine (ce cercle a pour rayon $e^{-\sigma}$), et par sa *latitude* σ qui ici n'est pas un angle, mais la longueur de l'arc de tractrice allant de l'altitude 1 à celle de M .

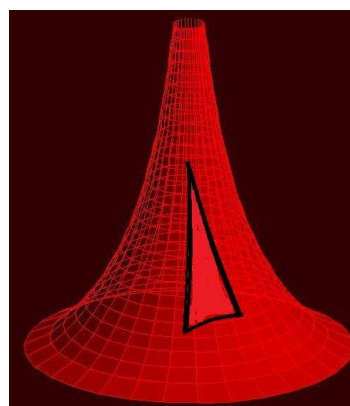
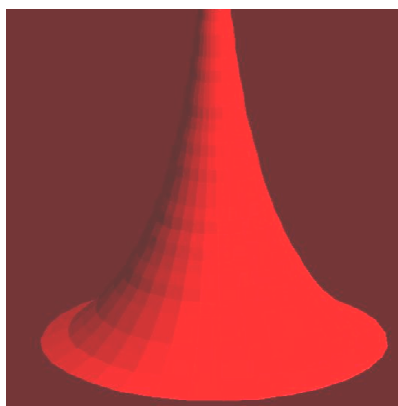
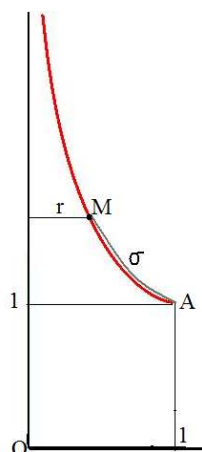


Figure 1 : A gauche, la courbe appelée tractrice, telle que $r = e^{-\sigma}$. Au centre, la pseudosphère, surface de révolution engendrée par la tractrice. A droite, un triangle sur la pseudosphère, avec la somme de ses angles inférieure à 180° .

A ce stade, nous devons préciser le concept de droite. Il n'y a aucune droite présente sur la pseudosphère. Mais en géométrie euclidienne, on sait que la ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre. Un tel plus court chemin est appelé une géodésique. Désormais, le mot de *droite* va devenir synonyme de géodésique. Dans ce nouveau contexte, les méridiens en forme de tractrices sur la pseudosphère, qui constituent manifestement des géodésiques entre deux points de même angle θ , seront appelés des segments de *droites*. Par contre les cercles horizontaux pour $y > 1$ ne sont pas des géodésiques.

est telle que pour tout plan tangent à la surface en un point, il existe des points voisins de cette surface qui sont de part et d'autre de ce plan.

⁴ On peut la construire en utilisant ses équations paramétriques : $x = 1 / \operatorname{ch} t$, $y = t - \operatorname{th} t$. Pour plus de détails sur cette courbe, voir le site *Math Curve*.

⁵ La démonstration se trouve dans *Visual Complex Analysis* de T. Needham, Clarendon Press, 1999.

L'intérêt de la pseudosphère va se préciser lorsque l'on va aplatir sa surface, en revenant en deux dimensions. Imaginons qu'elle soit recouverte d'un tissu élastique que l'on découpe suivant un méridien, et faisons en sorte que ce tissu devienne un « rectangle » de longueur 2π (longueur de la pseudosphère à la base, en $y = 1$) et de hauteur infinie. On veut que cette transformation soit conforme, c'est-à-dire qu'elle conserve les angles orientés. Cela signifie aussi qu'à très petite échelle, la transformation se comporte comme une similitude directe, transformant un cercle en cercle.

Les méridiens de la pseudosphère deviennent des demi-droites verticales, et les parallèles ($\sigma = \text{cte}$) qui sont perpendiculaires aux méridiens, deviennent des segments horizontaux. Un point $M(\theta, \sigma)$ devient un point $M'(\theta, y)$ (figure 2). Il s'agit de déterminer y par rapport à σ . Pour cela prenons un triangle infinitésimal ABC avec $[AC]$ de longueur $r d\theta$ sur un parallèle et $[BC]$ de longueur $d\sigma$ sur un méridien. La longueur AB , plus court chemin de A à B , est la distance hyperbolique $d(A, B)$. Après la transformation, on obtient un triangle $A'B'C'$ avec $[A'C']$ horizontal de longueur $d\theta$, $[B'C']$ de longueur dy et perpendiculaire à $[A'C']$, et $[A'B']$ de longueur euclidienne ds . Comme l'angle en A doit être conservé, on a $dy / d\theta = d\sigma / (r d\theta)$, soit $dy / d\sigma = 1 / r = e^\sigma$. On en déduit que $y = e^\sigma + \text{cte}$, et la constante est nulle puisque $y = 1$ pour $\sigma = 0$. Finalement $y = e^\sigma$. Le rectangle plan subit un étirement vertical de plus en plus grand.

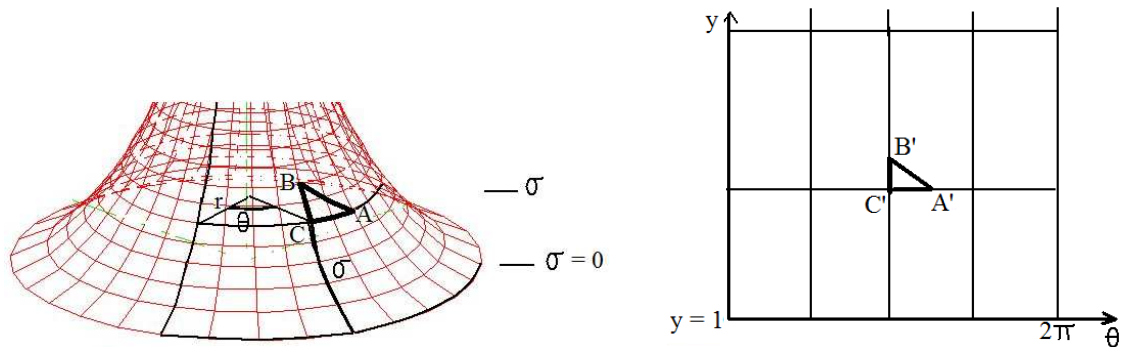


Figure 2 : Passage de la pseudosphère au rectangle plan, avec le triangle ABC transformé en $A'B'C'$, les angles étant conservés.

On a aussi $ds / d(A, B) = 1 / r = e^\sigma = y$, soit $d(A, B) = ds / y$. Cela explique pourquoi, lorsque l'on travaillera dans le demi-plan de Poincaré (avec $y > 0$), on prendra cette *métrique*⁶ : $d(A, B) = ds / y$ qui donne la distance hyperbolique par rapport à la distance euclidienne. Sauf que pour le moment, notre rectangle est tel que $y \geq 1$. Nous allons le prolonger jusqu'à $y = 0$.

Plaçons-nous entre $\sigma = \ln 2$ ($r = 1/2$) et $\sigma = 0$ sur la pseudosphère, et dessinons de petits cercles centrés sur un méridien, tous de même diamètre hyperbolique ds' et accolés les uns aux autres. Ils deviennent, dans le rectangle, de petits cercles accolés dont le diamètre passe de $ds_2 = 2 ds'$ en $y = 2$ à $ds_1 = ds'$ en $y = 1$ (figure 3). Les tangentes communes à ces cercles se coupent en un point d'ordonnée $y = 0$ et elles font en ce point un petit angle α . On en déduit que la distance hyperbolique ds' est égale à cet angle α . Cela nous autorise à prolonger le rectangle jusqu'en $y = 0$ en conservant la métrique $d(A, B) = ds / y$. Supposons maintenant que l'on marche verticalement de $y = 1$ à $y = 0$ à une vitesse hyperbolique constante. On passe de $y = 1$ à $y = 1/2$ pendant un temps t , puis de $1/2$ à $1/4$ pendant le même temps, puis de $1/4$ à $1/8$ dans le même temps, et ainsi de suite. On mettra donc un temps infini pour atteindre $y = 0$. Aussi appelle-t-on horizon l'axe horizontal $y = 0$.

⁶ Une métrique est une façon de mesurer la longueur des courbes.

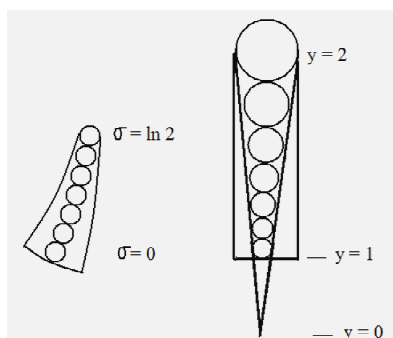


Figure 3 : A gauche cercles accolés de même diamètre ds' le long d'un méridien de la pseudosphère, à droite leurs images sur le plan.

La pseudosphère montre alors ses limites. Elle ne peut représenter la géométrie hyperbolique que dans une zone limitée. Et il a été démontré qu'aucune surface ne peut visualiser complètement cette géométrie.⁷ Ce qui va à l'encontre de sa réalité. Par exemple un méridien sur la pseudosphère ne va à l'infini que d'un seul côté, et ne peut être une *droite* qui s'en va à l'infini des deux côtés. Aussi a-t-on été amené à élargir le rectangle plan représentant la pseudosphère jusqu'à $y = 0$. Mais cela ne suffit pas. Le rectangle a une longueur limitée 2π . La pseudosphère se comporte comme un cylindre que l'on peut étaler suivant un rectangle, et non pas suivant un plan. Aussi Beltrami a-t-il proposé de ne pas se contenter de recouvrir la pseudosphère une seule fois, mais d'enrouler tout autour une pièce élastique une infinité de fois, ce qui n'est pas parfait non plus car on perd la bijection entre le plan et la pseudosphère. On en arrive ainsi au modèle du demi-plan de Poincaré, en fait inventé par Beltrami puis largement développé par H. Poincaré dans les années 1880. Les angles resteront euclidiens, mais les droites ne seront plus de vraies droites.

2. Le demi-plan de Poincaré et ses *droites*

Il s'agit d'un modèle du plan hyperbolique, formé des nombres complexes $z = x + i y$ de partie imaginaire y positive. Par modèle, on entend que l'on va utiliser les objets classiques (points, droites, cercles, etc.) de la géométrie plane pour visualiser la géométrie non-euclidienne. Dans ce modèle, les angles restent ceux de la géométrie euclidienne, mais les distances ne sont plus celles de l'espace euclidien, puisque l'on a $d(z, z + dz) = \sqrt{dx^2 + dy^2} / y$. La bordure du demi-plan est l'axe des x d'équation $y = 0$, appelé *horizon*, n'appartient pas au demi-plan. Lorsque l'on s'approche de l'horizon, y tend vers 0, et la distance tend à devenir infinie. Les points de cette bordure sont des points à l'infini, on les appelle points idéaux ou points asymptotiques. Précisons que lorsque y tend vers $+\infty$, on atteint aussi le point à l'infini vers le haut, et l'horizon, que l'on peut considérer comme un cercle de rayon infini, contient aussi ce point ∞ : on obtient ainsi l'horizon élargi, soit l'ensemble des nombres réels auquel on ajoute le point ∞ .

Dans tout ce qui suit, nous mettrons en italique tout ce qui concerne la géométrie hyperbolique. Ainsi les *droites* seront les droites hyperboliques, à savoir des géodésiques lorsque l'on prend des *segments de droites*. On a alors la propriété suivante :

Les *droites* sont
soit des demi-cercles orthogonaux à l'horizon –donc centrés sur Ox
soit des demi-droites verticales (orthogonales à l'horizon).⁸

⁷ Comme le dit F. Klein, la représentation du plan hyperbolique au moyen de surfaces à courbure négative « semble malheureusement ne jamais pouvoir fournir l'intuition du plan tout entier. »

⁸ Ces demi-droites peuvent aussi être considérées comme des cercles orthogonaux à (Ox) et de rayon infini.

• Commençons par prendre deux points $A(x, y_1)$ et $B(x, y_2)$ sur la même verticale. Nous allons voir que le plus court chemin hyperbolique qui les joint est le segment vertical qui les relie.⁹ En effet prenons un chemin courbe quelconque entre A et B . A l'altitude y entre y_1 et y_2 , on a un segment infinitésimal euclidien ds sur $[AB]$ et un segment ds' sur la courbe, avec $ds < ds'$ (cela arrive toujours même si l'on a parfois $ds = ds'$). Pour les distances hyperboliques, on a aussi $ds / y < ds' / y$. La longueur hyperbolique du segment $[AB]$ est bien strictement inférieure à celle d'une courbe quelconque entre A et B . Le segment $[AB]$ est une *géodésique*, et la demi-droite d'équation $x = \text{cte}$ est une *droite*.

On en déduit que $d(A, B) = \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{y} = \ln \frac{y_2}{y_1}$ pour $y_2 > y_1$.

Mais que se passe-t-il dans des directions qui ne sont plus verticales ?

• Prenons un demi-cercle centré sur Ox et pratiquons une inversion par rapport à ce cercle. A partir d'un point A d'affixe $z = x + i y$, considérons un petit segment $[AB]$ de longueur (euclidienne) ds et orthogonal à $[OA]$. L'inversion le transforme en un segment $[A'B']$ lui aussi orthogonal à $[OA]$ puisque l'inversion conserve les angles non orientés. Avec H et H' projections de A et A' sur (Ox) , soit $HA = y$ et $H'A' = y'$, les triangles ABH et $A'B'H'$ sont semblables et il en découle que la distance hyperbolique $d(A', B') = A'B' / y' = AB / y = d(A, B)$. Les longueurs sont conservées. D'autre part, l'inversion, transformant les angles orientés en leurs opposés, se comporte à petite échelle comme une similitude indirecte, et transforme un petit cercle en petit cercle. Le cercle de diamètre $[AB]$ devient le cercle de diamètre $[A'B']$, et tout segment de même longueur que $[AB]$ mais dans une autre direction conserve sa longueur sous l'effet de l'inversion. Celle-ci est donc une *isométrie* indirecte du plan hyperbolique.

• Considérons maintenant deux points A et B d'abscisse différente. Nous voulons déterminer la *géodésique* qui les joint. Pour cela traçons le demi-cercle centré sur (Ox) et passant par ces deux points. Il est unique puisque son centre est à l'intersection de (Ox) et de la médiatrice de $[AB]$. Appelons C un des deux points d'intersection de ce demi-cercle avec (Ox) et considérons un cercle (C) de centre C et de rayon quelconque. Sous l'effet de l'inversion de cercle (C) , le demi-cercle passant par A et B devient une demi-droite verticale, (passant par le point d'intersection des deux cercles s'il existe). L'inversion étant une isométrie, comme on vient de le voir, on a $d(A', B') = d(A, B)$. Les transformés A' et B' étant sur la même verticale, on sait que la *géodésique* est le segment $[A'B']$ qui les joint. Par suite, si l'arc de cercle joignant A et B n'était pas le *plus court chemin* de A à B , le plus court chemin entre A' et B' ne serait pas le segment $[A'B']$. Ce qui est contradictoire. Finalement la *géodésique* entre A et B est l'arc de cercle qui les joint, le demi-cercle correspondant étant orthogonal à (Ox) .

Les *droites* étant ainsi définies, on constate que les axiomes d'Euclide autres que le cinquième sont bien vérifiés. Une *droite* s'en va à l'infini des deux côtés, et par deux points passe une *droite* unique.

Lorsque l'on prend deux *droites*, trois configurations sont possibles. Elles peuvent être sécantes en un point, ou encore n'avoir aucun point en commun – on dit qu'elles sont ultra-parallèles, ou encore elles peuvent se rencontrer à l'infini, -on dit qu'elles sont parallèles, ou encore asymptotiques. Ces trois cas sont illustrés sur la *figure 4*.

⁹ On retrouve le fait que les méridiens de la pseudosphère, transformés en droites verticales, sont des géodésiques hyperboliques.

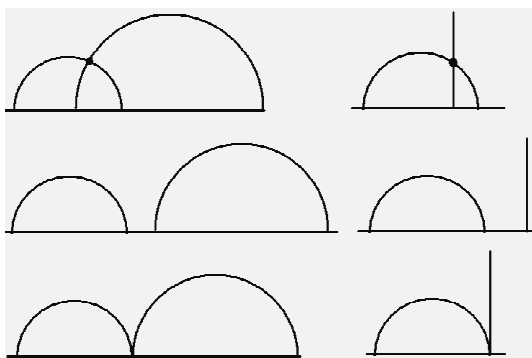


Figure 4 : De haut en bas, droites sécantes, droites ultra-parallèles, droites asymptotiques.

On trouve enfin la propriété caractéristique de la géométrie hyperbolique : Par un point, on peut mener une infinité de parallèles (ultra-parallèles) à une droite donnée, comme on le constate sur la figure 5. On peut aussi mener deux droites asymptotiques à la droite.

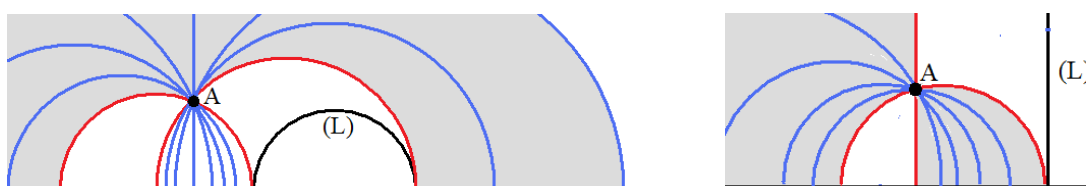


Figure 5 : A partir d'un point A et d'une droite (L) (demi-cercle à gauche et demi-droite à droite), on a une infinité de droites ultra-parallèles à (L) passant par A (en bleu dans la zone en gris) et deux droites asymptotiques (en rouge) qui constituent des cas limites.

3. Isométries du demi-plan

On a vu au paragraphe précédent qu'une inversion de cercle (C) est une isométrie indirecte. Considérons deux points A et A' inverses l'un de l'autre (figure 6). On sait que tout cercle passant par A et A' est orthogonal au cercle (C). Choisissons celui qui est centré sur (Ox). Il coupe orthogonalement le cercle (C) en I. A cause de l'isométrie, I étant invariant, on a $d(I, A) = d(I, A')$. Le point I est le milieu du segment [AA'] et le cercle (C) est la médiatrice du segment [AA'].¹⁰ L'inversion de cercle (C) est une réflexion autour de la droite (C).

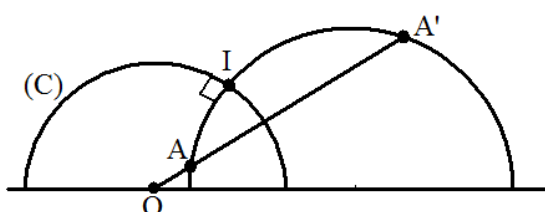


Figure 6 : L'inversion de cercle (C) est aussi une réflexion autour du cercle (C) qui est la médiatrice de [AA'].

Exercice 1 : Construction de la médiatrice de deux points

Etant donnés deux points A et B du demi-plan, construire la médiatrice hyperbolique du segment hyperbolique [AB]. Envisager les deux cas possibles.

Supposons d'abord que les deux points A et B ont des ordonnées différentes. La médiatrice de [AB] coupe (Ox) en J. Le cercle (I) de centre J et de rayon JA permet de tracer le segment [AB] représenté

¹⁰ Si l'on prend un point M quelconque sur (C), on a aussi $d(M, A) = d(M, B)$, ce qui est une caractéristique de la médiatrice.

par un arc du cercle (Γ) (figure 7). D'autre part la droite (AB) coupe l'axe (Ox) en I . Les points A et B sont inverses dans l'inversion de cercle (C) centré en I et de rayon R tel que $IA \cdot IB = R^2$. Ce cercle passe par le milieu m du segment $[AB]$ et lui est orthogonal. Il s'agit de la médiatrice du segment $[AB]$.

Supposons maintenant que les points A et B ont même ordonnée. Traçons la médiatrice de $[AB]$. Elle coupe le segment $[AB]$ représenté par un arc de cercle en un point m . Deux petits arcs ds et ds' symétriques ayant même longueur, ils ont aussi même longueur hyperbolique puisqu'ils ont la même ordonnée. On en déduit que $d(A, m) = d(B, m)$ et m est le milieu du segment $[AB]$. La médiatrice du segment $[AB]$ est aussi la médiatrice du segment $[AB]$, et il s'agit d'une droite.

Dans ces deux cas de figure, la médiatrice est une droite.

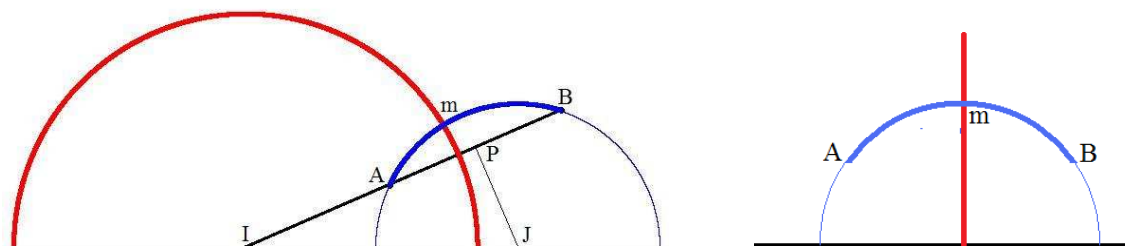


Figure 7 : Le segment $[AB]$ est en bleu et sa médiatrice en rouge. Suivant le cas de figure, la médiatrice est une droite en forme de demi-cercle ou de demi-droite.

On sait dorénavant qu'une réflexion est une inversion-réflexion autour d'un demi-cercle-droite orthogonal à (Ox). En composant deux réflexions, on obtient une isométrie directe, et celle-ci n'est pas loxodromique¹¹, car une transformation loxodromique est forcément la composée de quatre réflexions, comme on l'a vu au chapitre précédent.

3.1. Isométries directes

Inversement, considérons une transformation de Möbius M qui, dans le contexte actuel, préserve l'axe des x . On sait que cet axe n'est jamais une courbe invariante pour une transformation loxodromique. Notre transformation de Möbius n'étant pas loxodromique, on sait qu'elle est la composée de deux réflexions. Celles-ci se font dans le cas présent par rapport à deux cercles orthogonaux à la courbe invariante (Ox). On constate alors qu'en composant ces deux réflexions qui sont aussi des inversions-réflexions (cf. exercice suivant), on trouve une transformation de la forme

$$M(z) = \frac{az+b}{cz+d} \text{ avec } a, b, c, d \text{ réels et } a d - b c > 0$$

Exercice 2 : Transformation de Möbius dans le demi-plan

Il s'agit de prouver que la composée de deux réflexions hyperboliques s'écrit : $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ avec a, b, c, d réels et $a d - b c > 0$.

1) Montrer que la composée de deux réflexions (par rapport à des droites verticales) correspond à cette formule.

Prenons une droite d'équation $x = k$ (k réel). Appelons K le point $(k, 0)$ d'affixe k . La réflexion fait passer de $M(z)$ à $M'(z')$, ce qui signifie que le vecteur $\overrightarrow{KM'}$ a son affixe qui est l'opposé du conjugué de celui de \overrightarrow{KM} , soit $z' - k = -(\overline{z - k})$, $z' = -\overline{z} + 2k$. Composons cette réflexion avec une autre d'axe $x = k'$:

¹¹ Ce cas est traité dans le chapitre précédent sur les transformations de Möbius.

$z \mapsto z_1 = -\bar{z} + 2k \mapsto z' = -\bar{z}_1 + 2k' = z - 2k + 2k'$. C'est une translation de vecteur horizontal, qui est bien de la forme cherchée.

2) Montrer que la composée d'une réflexion d'axe vertical et d'une inversion dont le cercle est centré sur Ox aboutit aussi à la formule.

L'inversion dont le cercle est centré en $(k, 0)$ et a pour rayon R s'écrit $z' = \frac{k\bar{z} + R^2 - k^2}{\bar{z} - k}$.

Composons-la avec la réflexion d'axe $x = k'$:

$z \mapsto z_1 = -\bar{z} + 2k' \mapsto z' = \frac{k\bar{z}_1 + R^2 - k^2}{\bar{z}_1 - k} = \frac{-kz + 2kk' + R^2 - k^2}{-z + 2k' - k}$ qui a bien la forme cherchée puisque $a d - b c = R^2 > 0$.

3) On considère deux cercles (C) et (C') centrés en $(k, 0)$ et $(k', 0)$ avec comme rayons R et R' . Montrer que la composée des deux inversions par rapport à ces cercles ((C) puis (C')) aboutissent à la formule.

$$z \mapsto z_1 = \frac{k\bar{z} + R^2 - k^2}{\bar{z} - k} \mapsto z' = \frac{k'\bar{z}_1 + R'^2 - k'^2}{\bar{z}_1 - k'}$$

Après calculs, on trouve :

$z' = \frac{(kk' + R'^2 - k'^2)z + k'R^2 + kR'^2 + kk'^2 - k'k^2}{(k - k')z + kk' + R^2 - k^2}$ avec $a d - b c = R^2 R'^2 > 0$, ce qui correspond à la formule.

3.2. Isométries indirectes

Parmi les *isométries* indirectes, on connaît déjà les réflexions par rapport à une droite verticale, soit $z' = -\bar{z} + 2k$, ou les inversions par rapport à des cercles centrés sur Ox , soit $z' = \frac{k\bar{z} + R^2 - k^2}{\bar{z} - k}$. Elles sont de la forme $M'(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$ avec a, b, c, d réels et $a d - b c < 0$. Inversement, considérons une isométrie indirecte quelconque M' , et formons $M' \circ \gamma'$ avec γ' telle que $\gamma'(z) = -\bar{z}$ (réflexion par rapport à Oy). On obtient une isométrie directe $M : M' \circ \gamma' = M$ avec $M(z)$ de la forme $M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ (a, b, c, d réels et $a d - b c > 0$). On en déduit $M' = M \circ \gamma'$, d'où $M'(z) = \frac{-a\bar{z} + b}{-c\bar{z} + d}$, qui est de la forme $M'(z) = \frac{a'\bar{z} + b'}{c'\bar{z} + d'}$ avec a', b', c', d' réels et $a' d' - b' c' < 0$.

En résumé :

Dans le demi-plan de Poincaré, le groupe des isométries est formé du sous-groupe des isométries directes M de la forme $M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ avec a, b, c, d réels et $a d - b c > 0$, ainsi que des isométries indirectes M' de la forme $M'(z) = \frac{a'\bar{z} + b'}{c'\bar{z} + d'}$ avec a', b', c', d' réels et $a' d' - b' c' < 0$.

Exercice 3 : Isométries dans \mathbf{H}

On appelle \mathbf{H} le demi-plan de Poincaré. On considère une transformation de Möbius M qui s'écrit $z' = \frac{az+b}{cz+d}$ avec a, b, c, d réels et $ad - bc = 1$.

1) Calculer la partie imaginaire $\text{Im } z'$ par rapport à $\text{Im } z$. En déduire que si z est dans \mathbf{H} , z' est dans \mathbf{H} .

Le calcul donne $\text{Im } z' = \frac{\text{Im } z}{|cz+d|^2}$. Avec z dans \mathbf{H} , $\text{Im } z > 0$, d'où $\text{Im } z' > 0$ et z' appartient à \mathbf{H} .

2) Prendre un segment infinitésimal dz de longueur euclidienne $|dz|$ et de longueur hyperbolique $|dz|/\text{Im } z$, et calculer son image dz' sous l'effet de la transformation de Möbius. En déduire que cette transformation est une isométrie hyperbolique.

Par dérivation de $z' = M(z)$, on trouve $dz' = \frac{dz}{(cz+d)^2}$ de longueur hyperbolique ds' avec

$$ds' = \frac{|dz'|}{\text{Im } z'} = \frac{|dz|}{|cz+d|^2} \frac{|cz+d|^2}{\text{Im } z} = \frac{|dz|}{\text{Im } z} = ds, \text{ longueur hyperbolique de } dz. \text{ Les distances}$$

hyperboliques sont bien conservées par la transformation de Möbius.

4. Distance entre deux points

Nous connaissons déjà la distance entre deux points sur une verticale. Mais qu'en est-il dans le cas général ? Nous allons démontrer la formule :

$$\boxed{\text{ch}(d(z_1, z_2)) = 1 + \frac{|z_2 - z_1|^2}{2 \text{Im}(z_1) \text{Im}(z_2)}}$$

Prenons une transformation de Möbius M . Elle transforme z_1 et z_2 en z'_1 et z'_2 . Comme M est une isométrie, on a : $d(z'_1, z'_2) = d(z_1, z_2)$, d'où

$$\text{ch}(d(z'_1, z'_2)) = \text{ch}(d(z_1, z_2)).$$

D'autre part, sachant que $\text{Im}(z') = (ad - bc) \text{Im}(z) / |cz + d|^2$ (cf. exercice 3) :

$$\begin{aligned} d(z'_1, z'_2) &= 1 + \frac{|z'_2 - z'_1|^2}{2 \text{Im}(z'_1) \text{Im}(z'_2)} = 1 + \frac{\left| \frac{az_2+b}{cz_2+d} - \frac{az_1+b}{cz_1+d} \right|^2}{\frac{2(ad-bc)^2 \text{Im}(z_1) \text{Im}(z_2)}{|cz_1+d|^2 |cz_2+d|^2}} = 1 + \frac{(ad-bc) |z_2 - z_1|^2}{2(ad-bc)^2 \text{Im}(z_1) \text{Im}(z_2)} \\ &= 1 + \frac{|z_2 - z_1|^2}{2 \text{Im}(z_1) \text{Im}(z_2)} \end{aligned}$$

Ainsi, une transformation de Möbius conserve les membres gauche et droite de la formule à démontrer.

Choisissons maintenant la transformation M qui envoie z_1 et z_2 en $z'_1 = ia$ et $z'_2 = ib$ avec $b > a$. Sachant que $d(ia, ib) = \ln(b/a)$, on trouve pour que les membres gauche et droite sont égaux :

$$\begin{aligned} \text{ch}(d(ia, ib)) &= (e^{\ln(b/a)} - e^{-\ln(b/a)})/2 = (b/a + a/b)/2 = (a^2 + b^2)/(2ab) \\ \text{et } 1 + (b-a)^2/(2ab) &= (a^2 + b^2)/(2ab) \text{ aussi.} \end{aligned}$$

La formule est donc valable dans ce cas particulier, et comme la transformation M préserve les deux membres, on a bien $\text{ch}(d(z_1, z_2)) = 1 + \frac{|z_2 - z_1|^2}{2\text{Im}(z_1)\text{Im}(z_2)}$.

Exercice 4 : Longueur hyperbolique d'un chemin entre deux points

On se donne un chemin entre deux points A et B sous forme paramétrée. Cela revient à se donner deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ telles que le point $M(x(t), y(t))$ décrivent ce chemin lorsque t va de t_0 à t_1 . En géométrie euclidienne, la longueur de ce chemin est égale à

$$\int_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Si l'on prend l'affixe de M : $z(t) = x(t) + i y(t)$, dont la dérivée est $z'(t) = x'(t) + i y'(t)$, cette longueur est aussi égale à

$$\int_{t_0}^{t_1} |z'(t)| dt$$

Dans la géométrie hyperbolique du demi-plan, la longueur du chemin devient :

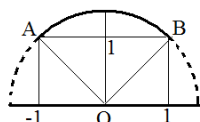
$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{|z'(t)|}{y(t)} dt$$

Dans ce qui suit, on prend les deux points de mêmes ordonnées $A(-1, 1)$ et $B(1, 1)$.

1) Calculer la longueur hyperbolique du chemin AB suivant une ligne droite horizontale.

Le chemin s'écrit $z(x) = x + i$ avec x allant de -1 à 1 (le paramètre étant x). On a alors $z'(x) = 1$, $|z'(x)| = 1$, et $y(x) = 1$. On en déduit la longueur de ce chemin : $\int_{-1}^1 1 dt = 2$. On retrouve évidemment la longueur euclidienne puisque l'on circule à l'altitude $y = 1$.

2) Calculer la longueur du chemin de A à B lorsque celui-ci est un arc de cercle dont le centre est en O . Pourquoi est-elle plus courte que la précédente ?



Le cercle a pour rayon $\sqrt{2}$ et ses équations paramétriques sont $x(t) = \sqrt{2} \cos t$, $y(t) = \sqrt{2} \sin t$, soit $z(t) = \sqrt{2} \cos t + i \sqrt{2} \sin t$. On a alors $|z'(t)| = \sqrt{2}$, et la longueur de ce chemin est

$$\sqrt{2} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{1}{\sqrt{2} \sin t} dt = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{1}{\sin t} dt = [\ln(\tan(t/2))]_{\pi/4}^{3\pi/4} = \ln \frac{\tan(3\pi/8)}{\tan(\pi/8)} \approx 1,763$$

Elle est plus courte que celle obtenue au 1° puisque le chemin en arc de cercle est une géodésique, et il s'agit même du plus court chemin de A à B .

3) Vérifier le résultat obtenu au 2° en appliquant la formule de la distance hyperbolique.

On a $\text{ch}(d(A, B)) = 1 + 4/2 = 3$, d'où $d(A, B) = \text{argch}(3)$.

Sachant que $\text{argch}(X) = \ln(X + \sqrt{X^2 - 1})$, on retrouve bien 1,763 comme précédemment.

5. Classification des isométries directes

On connaît la classification des transformations de Möbius selon leurs points fixes¹² (cf. chapitre précédent). Dans le cas présent, seuls trois cas se présentent, selon que le réel $|a + d|$ est supérieur, égal ou inférieur à 2.

1) $|a + d| < 2$, les points fixes sont conjugués. Dans le demi-plan de Poincaré, seul le point fixe A d'ordonnée positive convient. On obtient alors une *rotation* hyperbolique d'angle φ autour du point fixe. Cette *rotation* peut être créée par deux inversions autour de deux cercles centrés sur (Ox) et se coupant au point fixe suivant un angle de $\varphi/2$ (figure 8). Les *cercles* qui constituent les courbes invariantes de la rotation sont représentés par des cercles euclidiens qui appartiennent au demi-faisceau de cercles ayant pour point limite le point fixe et pour axe radical l'axe des x . Ces *cercles* sont orthogonaux aux *droites* passant par le point fixe. Les *distances* séparant deux de ces *cercles* sont partout égales. Notamment prenons le cercle-point A . Un point M quelconque sur une courbe invariante est transformé en un point M' sur cette même courbe, et du fait de l'isométrie, la distance hyperbolique $d(AM')$ est égale à $d(AM)$. Chaque *cercle* correspondant à une courbe invariante a pour *centre* A , et tous les *cercles* de ce faisceau ont le même *centre*.

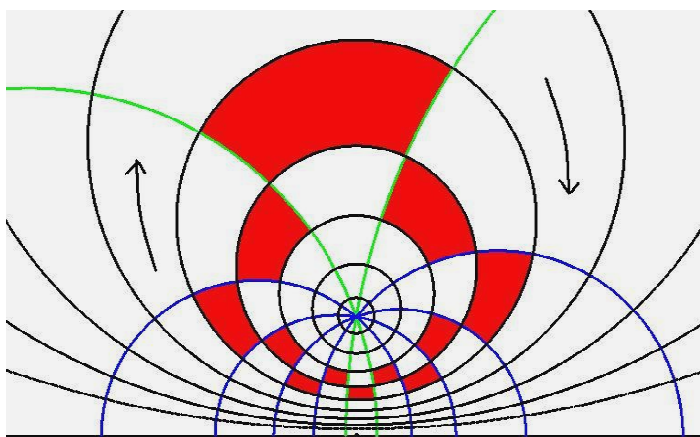


Figure 8 : Rotation d'angle $\pi/3$ autour du point fixe. Elle est engendrée par deux inversions autour des cercles (des *droites*) faisant un angle de $\pi/6$, en vert. La rotation fait passer d'un « rectangle » rouge au suivant lors du mouvement tournant.

2) $|a + d| > 2$, les points fixes a et a' sont réels, situés sur l'horizon qui est l'axe des x . Le mouvement se fait du point fixe source vers le puits. Il s'agit d'une *translation*. Elle est la composée de deux *réflexions* par rapport à des *droites* ultra-parallèles, et le mouvement se fait suivant des cercles qui leur sont orthogonaux, suivant une *distance* qui est partout la même. Parmi ces cercles qui constituent des courbes invariantes se trouve le cercle de diamètre $[a a']$, et qui est la seule *droite* qui reste invariante. Il s'agit de l'axe de la *translation*. Chaque cercle est *équidistant* de cette droite, formant ce que l'on appelle les *courbes équidistantes* de la droite (figure 9).

¹² Rappelons que les points fixes ont pour affixe $\frac{a-d \pm \sqrt{(d+a)^2 - 4}}{2c}$ lorsque la transformation de Möbius est normalisée.

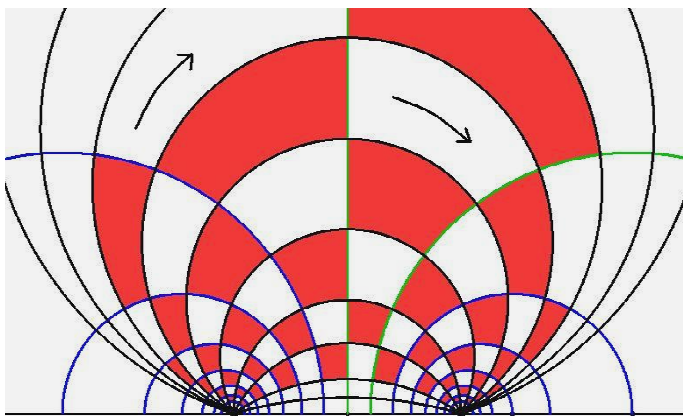


Figure 9 : Translation avec ses courbes invariantes en noir formées de cercles passant par les points fixes ainsi que de la droite en forme de demi-cercle. Les droites qui leur sont orthogonales sont les cercles en bleu, avec en vert les deux droites ultra-parallèles qui par réflexions successives autour d'elles créent la translation.

3) $|a + d| = 2$, il n'y a qu'un point fixe A sur l'horizon. La transformation est parabolique, elle est appelée rotation limite. Les courbes invariantes sont représentées par des cercles tangents à (Ox) en A . Ce faisceau de cercles a pour faisceau orthogonal les cercles tangents à (Oy) en A . Ceux-ci sont des droites toutes parallèles et asymptotiques en A .

Si le point A avait une ordonnée y_A non nulle mais qui tende vers 0, les courbes invariantes seraient des cercles de centre A (des cercles aussi) et l'on aurait une rotation. Mais à la limite, pour $y_A = 0$, on n'a plus un cercle (au sens hyperbolique). Les cercles correspondants sont appelés horocycles et ils ont comme particularité d'être orthogonaux aux droites parallèles asymptotiques en A (figure 10). On verra dans l'exercice 5 qu'il existe aussi des horocycles sous forme de droites parallèles à Ox .

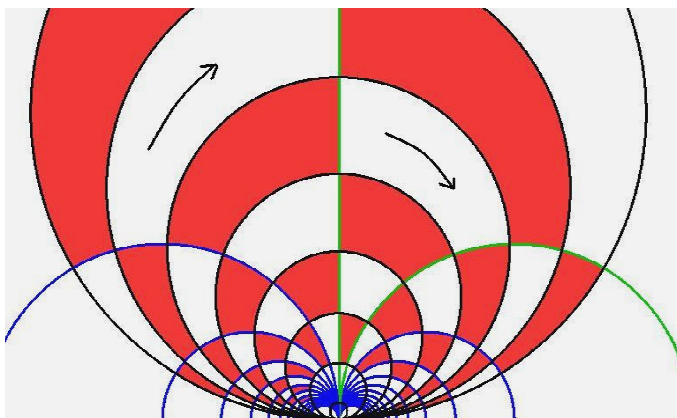


Figure 10 : Rotation limite, les courbes invariantes sont des cercles appelés horocycles, avec le faisceau de droites asymptotiques au point fixe qui leur sont orthogonales.

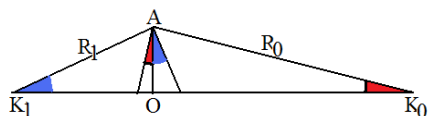
Par comparaison avec d'autres géométries, on a cette conclusion :

En géométrie euclidienne plane, il existe deux types d'isométries directes : les rotations et les translations. En géométrie sphérique, il en existe un seul : les rotations. En géométrie hyperbolique, il y en a trois : les rotations, les translations et les rotations limites.

Dans ces trois géométries, les isométries directes sont toujours des composées de deux réflexions, et elles s'écrivent sous des formes particulières de transformations de Mobius M , soit $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ avec $ad - bc > 0$.

Exercice 5 : Construction d'une rotation (hyperbolique) à partir de deux réflexions d'axes sécants.

1) On se donne un point $A(0, 1)$. Construire deux cercles (C_0) et (C_1) centrés sur (Ox) en K_0 et K_1 , et se coupant en A suivant un angle de $\pi/6$.



Comme le dessin ci-contre l'indique, l'angle de 30° entre les deux cercles se partage en deux angles α_0 et α_1 (en rouge et en bleu). En appelant k_0 et k_1 les abscisses des centres des cercles, on a $k_0 = 1/\tan \alpha_0$, $k_1 = -1/\tan \alpha_1$, et pour les rayons des cercles : $R_0 = 1/\sin \alpha_0$, $R_1 = 1/\sin \alpha_1$. Pour le tracé final, nous avons choisi $\alpha_0 = 10^\circ$ et $\alpha_1 = 20^\circ$.

2) Les deux cercles (C_0) et (C_1) engendrent un faisceau de cercles à deux points fixes, l'un étant A . A partir d'un cercle, (C_0) par exemple, construire les quatre autres cercles du faisceau faisant de l'un au suivant un angle de $\pi/6$ autour de A . Précisons qu'au-dessus de (Ox) il s'agit aussi bien de droites hyperboliques.

Avec notre choix des angles α_0 et α_1 , le cercle (C_2) fait un angle de $\alpha_0 + 30 = 40^\circ$ avec la verticale, d'où. Puis l'on continue en ajoutant 30° à chaque fois, soit $70, 100$ et 130° .

3) On veut maintenant construire les courbes invariantes, formant le faisceau de cercles orthogonal au précédent. Les cercles hyperboliques associés sont tous centrés en A . Prendre un cercle coupant (Oy) en des points d'ordonnées y_1 et y_2 . Calculer le rayon ρ du cercle hyperbolique correspondant. Puis en déduire l'ordonnée c du cercle euclidien associé ainsi que son rayon r en fonction de ρ . En déduire comment tracer des courbes invariantes.

On connaît la formule de la distance hyperbolique sur une verticale comme (Oy) , et l'on a $2\rho = \ln(y_2/y_1)$, ou $y_2/y_1 = e^{2\rho}$. On a aussi $y_1 y_2 = 1$. On en déduit que $y_2^2 = e^{2\rho}$, et $y_2 = e^\rho$. De même $y_1 = e^{-\rho}$. Avec $y_2 = c + r$ et $y_1 = c - r$, on en déduit

$$c = \frac{e^\rho + e^{-\rho}}{2} = \cosh \rho$$

$$r = \frac{e^\rho - e^{-\rho}}{2} = \sinh \rho$$

Il suffit de se donner plusieurs valeurs de ρ pour tracer des cercles de centre c et de rayon r . Tout cela aboutit au dessin de la figure ci-dessus.

4) Montrer l'évolution d'un triangle hyperbolique sous l'effet répété de la rotation hyperbolique.

Comme l'angle de la rotation est $\pi/3$ qui est une fraction de 2π , on obtient un mouvement périodique avec six triangles qui se répètent (figure 11).

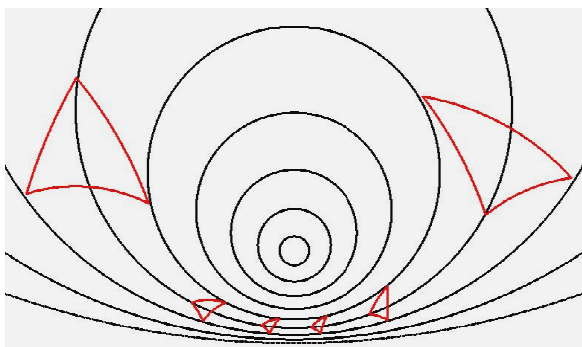


Figure 11 : Un triangle et ses images sous l'effet de la rotation répétée d'angle $\pi/3$ autour du point fixe.

Exercice 6 : Translation hyperbolique à partir de deux réflexions d'axes ultra-parallèles.

1) Prendre deux droites hyperboliques D et C_0 , représentée l'une par le demi-axe des y et l'autre par un demi-cercle centré sur (Ox) en K_0 et de rayon R_0 , et ne coupant pas (Oy) . Une fois le point K_0 placé, déterminer R_0 de façon que le faisceau de cercles engendré par ces deux droites hyperboliques aient pour points limites les points A et A' d'abscisses 1 et -1 sur (Ox) .

Le cercle de diamètre $[AA']$ est orthogonal à C_0 . La puissance du point K_0 $(k_0, 0)$ par rapport à ce cercle donne $K_0A \cdot K_0A' = R_0^2$, soit $(k_0 - 1)(k_0 + 1) = R_0^2$, d'où R_0 .

2) La composée des réflexions autour de D et C_0 est une translation de points fixes A et A' . Quelles sont les courbes invariantes sous l'effet de cette translation ?

Les courbes invariantes (les lignes de courant) sont les cercles passant par les points fixes A et A' . Ils forment le faisceau de cercles orthogonal à celui engendré par D et C_0 . Pour tracer ces courbes invariantes, on prend des points sur (Oy) qui sont le centre de ces cercles, soit $(0, y_c)$ puis on calcule le rayon r , tel que $r^2 = 1 + y_c^2$.

3) Construire les droites (hyperboliques) orthogonales aux courbes invariantes. Pour cela, on sera amené à construire le cercle C_1 image de D par C_0 , puis C_2 image de C_0 par C_1 , etc.

On connaît déjà les droites D et C_0 . Le cercle C_1 est le transformé de la droite D par l'inversion de cercle C_0 . Le cercle C_1 passe par K_0 et l'on a $2 R_1 k_0 = R_0^2$, soit $R_1 = R_0^2 / 2 k_0$, puis $k_1 = k_0 - R_1$, ce qui permet de construire le cercle. Ensuite le cercle C_2 est le transformé de C_0 par l'inversion de cercle C_1 , et plus généralement le cercle C_i est l'image du cercle C_{i-2} par l'inversion de cercle C_{i-1} , pour $i > 1$. En utilisant la formule donnant le transformé d'un cercle, on obtient :

$$k_i = \frac{(k_{i-2} - k_{i-1}) r_{i-1}^2}{(k_{i-2} - k_{i-1})^2 - r_{i-2}^2} + k_{i-1}$$

$$r_i = \frac{r_{i-1}^2 r_{i-2}}{(k_{i-2} - k_{i-1})^2 - r_{i-2}^2}$$

Une fois tracés ces cercles, on peut tracer leurs symétriques par rapport à (Oy) .

Comme les inversions sont aussi de réflexions, les distances entre ces cercles sont égales. Le vecteur de la translation est délimité par deux cercles successifs C_i et C_{i+1} , et il est porté par un segment de cercle passant par A et A' . Tout cela permet de construire la figure ci-dessus.

4) Construire les images successives d'un triangle sous l'effet de cette translation. Quel est le vecteur de la translation ?

Le vecteur de la translation est le segment séparant un sommet d'un triangle avec le sommet correspondant du triangle image. On obtient le dessin de la *figure 12*, où l'on voit que les lignes de courant sont équidistantes entre elles.

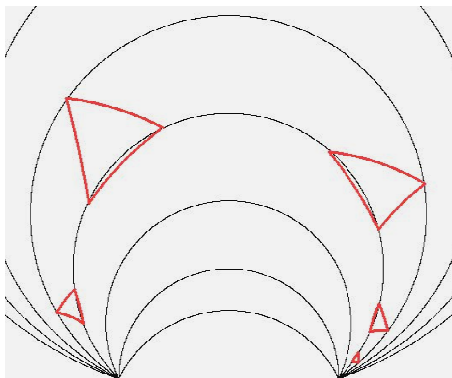
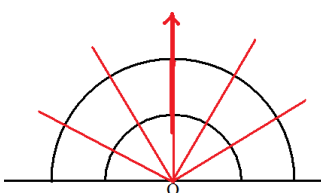


Figure 12 : A partir du triangle en bas à gauche, on a pris ses quatre premières images successives sous l'effet de la translation. Les lignes de courant en forme d'arcs de cercles ont une longueur infinie.

5) Que se passe-t-il lorsque les deux axes des réflexions sont des cercles concentriques ?



Les deux demi-cercles concentriques sont aussi des *droites* ultra-parallèles. La composée de deux réflexions autour d'eux –il s'agit d'inversions, donne une homothétie de centre O , de la forme $z' = k z$. Les courbes invariantes sont des demi-droites issues de O , et elles sont *équidistantes*. Mais il s'agit toujours d'une *translation*, dont le vecteur est un segment de demi-droite orthogonal aux deux cercles concentriques et de longueur égale au double de leur distance.

Exercice 7 : Rotation limite comme composée de deux réflexions d'axes asymptotiques

1) Montrer comment évolue un triangle hyperbolique sous l'effet d'une rotation limite.

Le résultat est donné sur la *figure 13*.

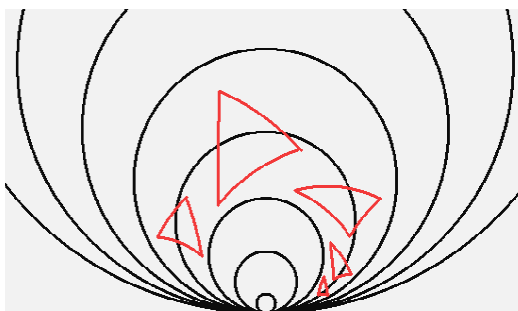
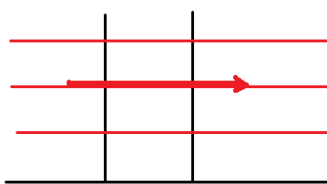


Figure 13 : Transformés successifs d'un triangle sous l'effet d'une rotation limite.

2) Que se passe-t-il lorsque les deux axes de la réflexion sont des demi-droites verticales ?



Dans ce cas particulier, les demi-droites verticales sont aussi des *droites* asymptotiques se rencontrant à l'infini. La composée des deux réflexions d'axes parallèles séparés par une distance d donne une translation (euclidienne mais pas hyperbolique) de vecteur parallèle à Ox et de longueur $2d$. Les horocycles correspondant aux courbes invariantes deviennent alors des droites parallèles à (Ox) .

Quelques précisions sur la classification des isométries directes de \mathbf{H}

* Transformation de Mobius parabolique dans \mathbf{H} (rotation limite)

Une transformation M de Mobius de \mathbf{H} (demi-plan de Poincaré), autre que l'identité, est parabolique si et seulement si

- (1) M admet un point fixe unique sur la frontière $\partial\mathbf{H}$.
- (2) $|\text{Tr}(M)| = 2$
- (3) M est conjuguée à une translation (écrite sous forme euclidienne).
- (4) M est conjuguée à la translation $z' = z + 1$ ou à la translation $z' = z - 1$.

On sait déjà que (1) équivaut à (2) et que (4) entraîne (3).

Montrons que (3) entraîne (4). Prenons la translation $M(z) = z + k$ avec $k \neq 0$. On distingue deux cas. Si k est positif, considérons la transformation g_1 de Mobius dans \mathbf{H} telle que $g_1(z) = k z$ qui a bien pour déterminant $k > 0$. La transformation conjuguée $g_1 M g_1^{-1}$ s'écrit $g_1 M g_1^{-1}(z) = z + 1$. Si k est négatif, considérons la transformation g_2 telle que $g_2(z) = -k z$ de déterminant $-k > 0$. La transformation conjuguée $g_2 M g_2^{-1}$ s'écrit $g_2 M g_2^{-1}(z) = z - 1$.

On sait que (3) entraîne (1) puisqu'une translation a un point fixe unique qui est ∞ . Il reste à montrer que (1) entraîne (3). Par le biais d'une transformation de Mobius g qui envoie le point fixe f de M en ∞ , la transformation conjuguée $g M g^{-1}$ a pour point fixe ∞ et c'est une translation.

* Transformation de Mobius hyperbolique dans \mathbf{H} (translation hyperbolique)

Une transformation de Mobius M de \mathbf{H} est hyperbolique si et seulement si

- (1) M a deux points fixes sur la frontière $\partial\mathbf{H}$.
- (2) $|\text{Tr}(M)| > 2$ (en prenant ici M telle que $|M| = 1$)
- (3) M est conjuguée à une dilatation d de la forme $d(z) = k z$ avec k réel > 0 et $k \neq 1$.
- (4) L'axe de la translation hyperbolique est la droite passant par les points fixes, et la longueur de la translation est $\ln k$.

On sait déjà que (1) équivaut à (2). D'autre part une dilatation est une transformation de Mobius de \mathbf{H} (coefficients réels et déterminant $k > 0$), et elle a deux points fixes 0 et ∞ sur $\partial\mathbf{H}$: elle est hyperbolique, et (3) implique (1). Il reste à montrer que (1) entraîne (3).

Appelons f et f' les deux points fixes de M . On distingue deux cas. Si le point fixe f est ∞ , on considère la translation g telle que $g(z) = z - f'$ qui a pour point fixe ∞ et $g(f') = 0$. La conjuguée de M qui s'écrit $g M g^{-1}$ a pour points fixes 0 et $f = \infty$, et c'est une dilatation. Si aucun des deux points fixes n'est infini, f et f' (avec $f < f'$) sont deux nombres réels. Considérons la transformation de Mobius g telle que $g(z) = (z - f') / (z - f)$ à coefficients réels et de déterminant $f' - f > 0$. On a $g(f) = 0$ et $g(f') = \infty$. Avec g agissant dans \mathbf{H} , la conjuguée de M qui s'écrit $g M g^{-1}$ a pour points fixes 0 et ∞ . C'est une dilatation.

Sous l'effet de M , un point P est transformé en P' . Alors $d(P, P')$ est la longueur de la translation. Sans perte de généralité, on peut prendre M sous la forme $M(z) = k z$, l'axe de la translation étant la demi-droite $[Oy)$, et l'on peut choisir P sur cet axe. Avec $P = qi$, $P' = i k q$, et $d(P, P') = \ln k$. Posons $L = \ln k$. La longueur L de la translation est liée à la trace de la transformation M , soit $\text{Tr}M = \sqrt{k} + 1/\sqrt{k} = e^{L/2} + e^{-L/2} = 2 \text{ch}(L/2)$.

* Transformation de Mobius elliptique dans \mathbf{D} ¹³ (rotation)

¹³ On préfère ici se placer dans \mathbf{D} , car on peut fait intervenir dans ce cas la rotation r de centre O et d'angle θ .

Une transformation de Mobius M de \mathbf{D} (disque de Poincaré) est elliptique si et seulement si

- (1) M a un point fixe dans \mathbf{D} .
- (2) $|\text{Tr}(M)| < 2$ (en prenant pour calculer la trace la transformation M telle que $|M| = 1$)
- (3) M est conjuguée à une rotation R dans \mathbf{D} de la forme $r(z) = e^{i\theta} z$.

Vérifions d'abord que la rotation R de centre O et d'angle θ est bien une transformation de Mobius de la forme $(\alpha z + \beta) / (\bar{\beta} z + \bar{\alpha})$ avec $|\alpha|^2 > |\beta|^2$. Il suffit de prendre $\alpha = e^{i\theta/2}$ et $\beta = 0$. Et cette transformation est elliptique avec pour seul point fixe O . On a (3) qui implique (1). Il reste à montrer que (1) entraîne (3). Appelons f le point fixe de M et considérons une transformation g de Mobius de \mathbf{D} qui envoie f en O . Alors la conjuguée $g M g^{-1}$ admet comme point fixe unique 0 . Elle est de la forme $(\alpha z + \beta) / (\bar{\beta} z + \bar{\alpha})$ avec $|\alpha|^2 > |\beta|^2$, et avec 0 comme point fixe, on a $\beta = 0$, d'où $g M g^{-1}(z) = (\alpha / \bar{\alpha}) z = (\alpha^2 / r^2) z$. Posons $\alpha = r e^{i\theta/2}$, d'où l'on déduit que $g M g^{-1}(z) = e^{i\theta} z$.

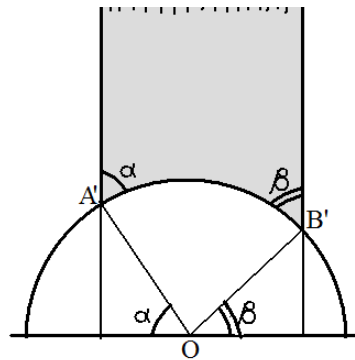
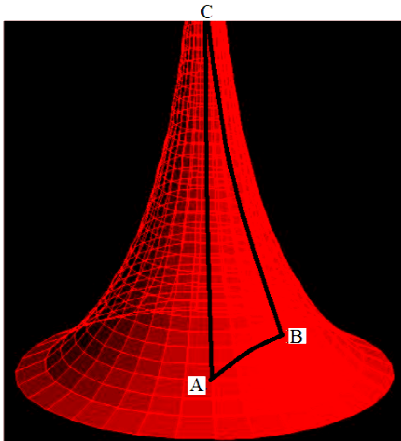
6. Aire et angles d'un triangle

Revenons à la pseudosphère, qui est à l'origine du demi-plan de Poincaré. Un élément d'aire dA sur la pseudosphère est égal à l'élément d'aire $dx dy / y^2$ sur le demi-plan, puisque chaque longueur dx et dy est divisée par y . On en déduit la formule donnant l'aire de la pseudosphère, soit

$$A = \iint dA = \int_{x=0}^{2\pi} \int_{y=1}^{+\infty} \frac{dx dy}{y^2} = \int_0^{2\pi} dx \int_1^{+\infty} \frac{dy}{y^2} = \int_0^{2\pi} dx \left[-\frac{1}{y} \right]_1^{+\infty} = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi^{14}$$

Prenons maintenant un triangle asymptotique ABC sur la pseudosphère : son sommet C est en $+\infty$ avec un angle nul, et ses côtés CA et CB sont des méridiens. Appelons α et β ses angles en A et B . Ce triangle se retrouve, avec la même aire, dans le demi-plan de Poincaré : il est délimité par deux demi-droites verticales issues des points A' et B' , et ces deux points sont sur un même demi-cercle (la droite $A'B'$). On retrouve les mêmes angles α et β en A' et B' (figure 14). Quitte à pratiquer une translation horizontale (une *rotation limite*) qui ne modifie pas les aires, on peut supposer que le cercle est centré en O . De même en faisant une homothétie (une *translation*), on peut s'arranger, sans changer l'aire, pour que le cercle ait un rayon unité. L'équation du cercle est $y = \sqrt{1-x^2}$. Les points A' et B' ont pour coordonnées $(x = \cos(\pi - \alpha), y = \sqrt{1-x^2})$ et $(x = \cos\beta, y = \sqrt{1-x^2})$. On en déduit l'aire de ce triangle :

$$\begin{aligned} \text{aire}(ABC) &= \int_{-\cos\alpha}^{\cos\beta} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{+\infty} \frac{dy}{y^2} = \int_{x=\cos(\pi-\alpha)}^{\cos\beta} dx \int_{y=\sqrt{1-x^2}}^{+\infty} \frac{dy}{y^2} = \int_{x=\cos(\pi-\alpha)}^{\cos\beta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \int_{\pi-\alpha}^{\beta} \frac{-\sin\theta d\theta}{\sin\theta} = \pi - \alpha - \beta, \text{ après avoir procédé au changement de variable } x = \cos\theta. \end{aligned}$$



¹⁴ Bien que la pseudosphère s'élève à l'infini, son aire reste finie.

Figure 14 : A gauche un triangle asymptotique ABC avec C à l'infini sur la pseudosphère, à droite le même triangle $A'B'C'$ en gris dans le demi-plan de Poincaré, délimité par deux demi-droites verticales et le cercle unité.

Prenons maintenant un triangle quelconque $A'B'C'$ dans le demi-plan de Poincaré. Par rotation autour de A' , ce qui ne modifie pas l'aire, arrangeons-nous pour que le segment hyperbolique $[A'C']$ devienne vertical (figure 15). L'aire du triangle devient la différence de celles de deux triangles asymptotiques, soit : $(\pi - \alpha - \beta - \delta) - (\pi - \delta - (\pi - \gamma)) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$. Finalement :

$$\text{aire}(ABC) = \pi - \alpha - \beta - \gamma \text{ ou encore } \alpha + \beta + \gamma = \pi - \text{aire}(ABC)$$

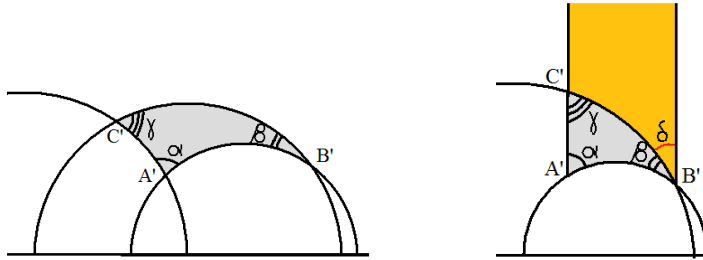
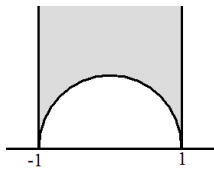


Figure 15 : Aire d'un triangle quelconque.

Exercice 8 : Triangles idéaux et aires dans le demi-plan

Il s'agit d'une variante de la démonstration précédente sur l'aire d'un triangle, ici indépendante de l'aire de la pseudosphère..

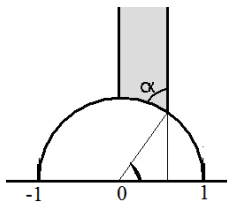
1) Par définition un triangle idéal a ses trois angles nuls. Montrer par intégration que son aire est égale à π .



On peut s'arranger pour que le triangle ait ses trois sommets en -1 , 1 et ∞ . Son aire hyperbolique est :

$$2 \int_{x=0}^1 \int_{y=\sqrt{x^2-1}}^{+\infty} \frac{dy \, dx}{y^2} = 2 \int_{x=0}^1 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = 2 [\arcsin x]_0^1 = \pi.$$

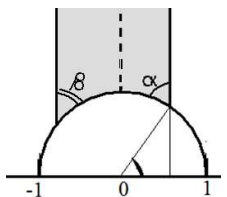
2) Montrer qu'un triangle rectangle 1-asymptotique ayant un angle nul, un angle $\pi/2$ et un angle non nul α , a une aire égale à $\pi/2 - \alpha$.



L'aire est égale à :

$$\int_0^{\cos \alpha} \int_{y=\sqrt{x^2-1}}^{+\infty} \frac{dy \, dx}{y^2} = \int_0^{\cos \alpha} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = [\arcsin x]_0^{\cos \alpha} = \arcsin(\sin(\pi/2 - \alpha)) = \pi/2 - \alpha$$

3) En juxtaposant deux triangles comme ceux de la question précédente, calculer l'aire d'un triangle 1-asymptotique avec un angle nul et deux angles non nuls α et β .



En additionnant les aires de deux triangles rectangles 1-asymptotiques, on trouve, grâce à la question précédente, l'aire $= \pi/2 - \alpha + \pi/2 - \beta = \pi - \alpha - \beta$.

3) Prendre un triangle quelconque ABC d'angles $\alpha \beta \gamma$, avec D qui est un point d'intersection de la droite hyperbolique AB avec l'axe des x (figure 16). Calculer l'aire des triangles ADC et BDC , et en déduire celle de ABC .

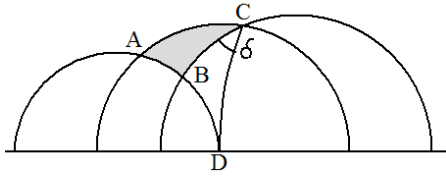


Figure 16 : Triangle ABC , dont l'aire est la différence de celles de ADC et BDC .

Le triangle ADC est 1-asymptotique, avec un angle nul, un angle α et un angle $\gamma + \delta$. Son aire est $\pi - \alpha - \gamma - \delta$. Le triangle BDC est 1-asymptotique, avec un angle nul, un angle $\pi - \beta$ et un angle δ . Son aire est $\pi - \pi + \beta - \delta$. L'aire de ABC est la différence des aires de ADC et BDC , soit $\pi - \alpha - \beta - \gamma$.

7. Formules liant côtés et angles dans un triangle hyperbolique

7.1. Cas d'un triangle rectangle

Considérons un triangle ABC rectangle en C , et faisons-lui subir une transformation de Mobius qui l'envoie en $A'B'C'$ avec le côté $[B'C']$ porté par Oy et avec C' en i . Celle-ci est de la forme

$$z' = K \frac{z - C_\infty}{z - B_\infty} \text{ où } B_\infty \text{ et } C_\infty \text{ sont les extrémités du demi-cercle qui porte le segment } [BC]. \text{ Ainsi le}$$

point B_∞ est envoyé en ∞ et C_∞ en O . Par conservation des angles droits, le demi-cercle devient l'axe des y , et $[B'C']$ est un segment vertical d'abscisse nulle. Imposons ensuite que C aille en i , soit

$$i = K \frac{z_C - C_\infty}{z_C - B_\infty}, \quad K = \frac{i(z_C - B_\infty)}{z_C - C_\infty}. \text{ On trouve } K = \frac{(C_\infty - B_\infty)y_C}{(x_C - C_\infty)^2 + y_C^2} \text{ qui est bien un nombre réel.}$$

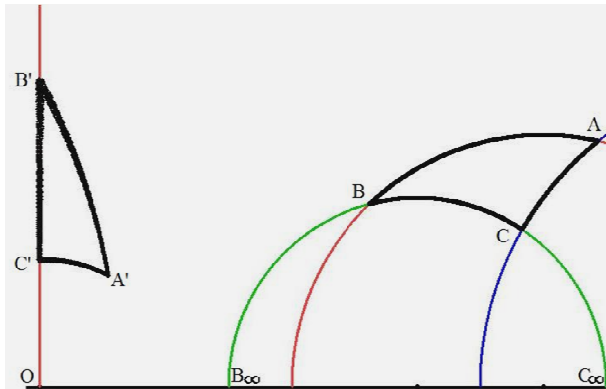


Figure 17 : Triangle ABC et son transformé $A'B'C'$.

Appelons a, b, c les longueurs des côtés du triangle ABC . Elles sont égales à celles du triangle $A'B'C'$ à cause de l'isométrie. Les points A', B', C' ont pour coordonnées $(u, v), (0, k)$ et $(0, 1)$ avec $k > 1$ et $u^2 + v^2 = 1$ car le cercle qui porte le segment $[C'A']$ a pour centre O et pour rayon 1. Puis

$$\text{appliquons la formule précédemment vue : } \text{ch}(d(z_1, z_2)) = 1 + \frac{|z_2 - z_1|}{2 \text{Im}(z_1) \text{Im}(z_2)}.$$

Avec $a = d(B', C'), b = d(A', C'), c = d(A', B')$:

$$\text{ch } a = \text{ch}(d(i, ki)) = 1 + \frac{|i(k-1)|^2}{2k} = 1 + \frac{(k-1)^2}{2k} = \frac{k^2+1}{2k}$$

$$\text{ch } b = \text{ch}(d(i, u+iv)) = 1 + \frac{|u+iv-i|^2}{2v} = 1 + \frac{u^2+(v-1)^2}{2v} = \frac{u^2+v^2+1}{2v} = \frac{1}{v}$$

$$\text{ch } c = \text{ch}(d(ki, u+iv)) = 1 + \frac{|u+iv-ki|^2}{2kv} = 1 + \frac{u^2+(v-k)^2}{2kv} = \frac{u^2+v^2+k^2}{2kv} = \frac{1+k^2}{2kv}$$

On trouve $\text{ch } c = \text{ch } a \text{ ch } b$. C'est le théorème de Pythagore en géométrie hyperbolique.

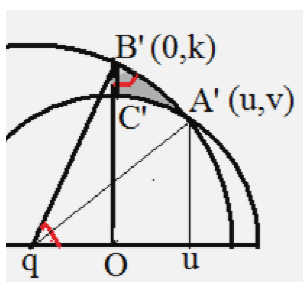
Que se passe-t-il lorsque les côtés du triangle sont grands ? On a $\text{ch } c \approx e^c / 2$ tout comme $\text{ch } a$ et $\text{ch } b$. Le théorème de Pythagore devient :

$e^c / 2 \approx e^a e^b / 4$, $e^c \approx e^{a+b} / 2$, $c \approx a + b - \ln 2$. Ainsi, dans un « grand » triangle rectangle hyperbolique, le chemin en ligne droite de A vers B est proche de celui qui va de A vers B en passant par C . C'est une différence notable avec ce qui se passe en géométrie euclidienne.

Exercice 9 : Formules trigonométriques dans le triangle rectangle

On reprend les mêmes notations que précédemment, avec le triangle $A'B'C'$ rectangle.

1) On appelle q le point (ou l'affixe) du centre du cercle qui porte le segment hyperbolique AB . Calculer qB'^2 et qC'^2 pour montrer que $k^2 = 1 - 2uq$. En déduire que $\tan \beta = (2uk) / (k^2 - 1)$.



Dans le triangle rectangle OqB' , $qB'^2 = q^2 + k^2$. Dans le triangle rectangle uqA' , $qA'^2 = (u-q)^2 + v^2$. On en déduit que $(u-q)^2 + v^2 = q^2 + k^2$. Comme $u^2 + v^2 = 1$, il reste $k^2 = 1 - 2uq$.

L'angle β en B' du triangle $A'B'C'$ se retrouve en q dans le triangle qOB' . $\tan \beta = OB' / qO = k / (-q)$ car $q < 0$. Avec $q = (1 - k^2) / (2u)$,

$$\tan \beta = \frac{2uk}{k^2 - 1}.$$

2) Utiliser les formules vues à propos du théorème de Pythagore pour trouver $\text{ch } b$ et $\text{sh } a$ en fonction de u et k . En déduire que $\tan \beta = \text{th } b / \text{sh } a$.

$$\text{th}^2 b = \frac{\text{sh}^2 b}{\text{ch}^2 b} = \frac{\text{ch}^2 b - 1}{\text{ch}^2 b} = 1 - \frac{1}{\text{ch}^2 b} = 1 - v^2 = u^2$$

$$\text{sh}^2 a = \text{ch}^2 a - 1 = \frac{(1+k^2)^2 - 4k^2}{4k^2} = \frac{(1-k^2)^2}{4k^2}$$

d'où $\text{th } b = u$ et $\text{sh } a = (k^2 - 1) / 2k$. On a bien $\tan \beta = \text{th } b / \text{sh } a$.

3) Montrer que $\cos \beta = \text{th } a / \text{th } c$ et $\sin \beta = \text{sh } b / \text{sh } c$.

Exprimons $\cos \beta$ en fonction de $\tan \beta$, et ensuite nous éliminerons b pour qu'il ne reste que a et c , cela grâce au théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} \cos^2 \beta &= \frac{1}{1 + \tan^2 \beta} = \frac{1}{1 + \text{th}^2 b / \text{sh}^2 a} = \frac{\text{sh}^2 a}{\text{sh}^2 a + \text{th}^2 b} = \frac{\text{sh}^2 a \text{ ch}^2 b}{\text{sh}^2 a \text{ ch}^2 b + \text{sh}^2 b} = \frac{\text{sh}^2 a \text{ ch}^2 b}{\text{sh}^2 a \text{ ch}^2 b + c \text{h}^2 b - 1} \\ &= \frac{\text{sh}^2 a \text{ ch}^2 c / \text{ch}^2 a}{\text{sh}^2 a \text{ ch}^2 c / \text{ch}^2 a + c \text{h}^2 c / \text{ch}^2 a - 1} = \frac{\text{sh}^2 a \text{ ch}^2 c}{\text{sh}^2 a \text{ ch}^2 c + c \text{h}^2 c - \text{ch}^2 a} = \frac{\text{sh}^2 a \text{ ch}^2 c}{\text{ch}^2 a \text{ ch}^2 c - \text{ch}^2 a} = \frac{\text{sh}^2 a \text{ ch}^2 c}{\text{ch}^2 a \text{ sh}^2 c} \\ &= \frac{\text{th}^2 a}{\text{th}^2 c} \end{aligned}$$

Ainsi $\cos \beta = \operatorname{th} a / \operatorname{th} c$.

Pour avoir $\sin \beta$, utilisons ce que nous avons trouvé :

$$\sin \beta = \tan \beta \cos \beta = \frac{\operatorname{th} b}{\operatorname{sh} a} \frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{th} c} = \frac{\operatorname{sh} b \operatorname{sh} a \operatorname{ch} c}{\operatorname{ch} b \operatorname{sh} a \operatorname{ch} a \operatorname{sh} c} = \frac{\operatorname{sh} b \operatorname{ch} c}{\operatorname{ch} b \operatorname{ch} a \operatorname{sh} c} = \frac{\operatorname{sh} b \operatorname{ch} c}{\operatorname{ch} c \operatorname{sh} c} = \frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{sh} c}.$$

En résumé :

Dans un triangle rectangle hyperbolique ABC de côtés a, b, c et d'angles α, β, γ

le théorème de Pythagore s'écrit : $\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b$

et l'on a les relations :

$$\begin{array}{ll} \sin \alpha = \operatorname{sh} a / \operatorname{sh} c & \sin \beta = \operatorname{sh} b / \operatorname{sh} c \\ \cos \alpha = \operatorname{th} b / \operatorname{th} c & \cos \beta = \operatorname{th} a / \operatorname{th} c \\ \tan \alpha = \operatorname{th} a / \operatorname{sh} b & \tan \beta = \operatorname{th} b / \operatorname{sh} a \end{array}$$

7.2. Cas d'un triangle quelconque

Il existe trois catégories de formules, que nous donnons ici sans démonstration.

$$\frac{\sin \alpha}{\operatorname{sh} a} = \frac{\sin \beta}{\operatorname{sh} b} = \frac{\sin \gamma}{\operatorname{sh} c}$$

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \cos \gamma$$

$$\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c \cos \alpha$$

$$\operatorname{ch} b = \operatorname{ch} c \operatorname{ch} a - \operatorname{sh} c \operatorname{sh} a \cos \beta$$

$$\cos \gamma = \sin \alpha \sin \beta \operatorname{ch} c - \cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos \alpha = \sin \beta \sin \gamma \operatorname{ch} a - \cos \beta \cos \gamma$$

$$\cos \beta = \sin \gamma \sin \alpha \operatorname{ch} b - \cos \gamma \cos \alpha$$

Remarquons que la troisième série de formules permet d'obtenir les trois côtés si l'on connaît les trois angles. Cela confirme le fait que deux triangles hyperboliques semblables (avec les mêmes angles) sont isométriques.¹⁵

Nous allons maintenant passer à l'autre modèle, celui du disque de Poincaré, sur lequel nous donnerons plus de détails. Mais nous ne reviendrons pas sur les formules trigonométriques que nous venons de donner, pas plus que sur les calculs d'aires.

¹⁵ Les autres cas d'égalité (à une isométrie près) de deux triangles restent les mêmes qu'en géométrie euclidienne. Notamment, deux triangles ayant deux côtés de même longueur deux à deux, avec le même angle entre eux, sont égaux.