

Pavage de la sphère avec une forme unique de pavés

L'objectif est de paver la sphère avec une forme unique de pavé polygonal, le pavage étant fait bord à bord.¹ Le pavage de la sphère le plus connu est celui du ballon de football, mais il ne nous concerne pas ici, puisqu'il est fait avec deux types de polygones, à 5 et 6 côtés. En fait, l'étude des pavages de la sphère est un sujet récent et loin d'être clos, alors que celle plus globale de la géométrie sphérique date de millénaires². C'est en 1922 que l'étude des pavages de la sphère par des triangles isométriques est esquissée par D.M.Y. Sommerville, puis développée par H. L. Davies en 1967, pour ne citer que les principales références. En 2002, Y. Ueno et Y. Agaoka donnent pour la première fois une classification exhaustive de ces pavages par des triangles. Depuis cette date, plusieurs autres chercheurs japonais ont élargi le champ d'étude aux quadrilatères et aux pentagones, notamment Y. Akama et Y. Sakano en 2013-2015. A partir de 2013, un groupe de chercheurs chinois de Hong Kong prend le relais : M. Yan, E. X. Wang, K.Y. Cheunk, H.M. Cheung, H. H. Gao, N. Shi. Ils sont en train de finaliser la classification des pavages par des pentagones identiques.

L'étude des pavages sphériques par des polygones isométriques semble concerner tout particulièrement les chercheurs japonais et chinois. Peut-être faut-il voir là un lien avec la fabrication locale de multiples formes sphériques par d'ingénieux artisans, comme les sphères brodées *temari*,³ dont on voit des exemples ci-dessous.



Dans ce qui suit, nous avons repris ces travaux pour donner une construction graduelle des divers pavages par des triangles à partir des formes les plus simples. Cette construction est présentée sous forme expérimentale, mais elle s'appuie sur un théorème de Grunbaum-Shephard [GRU1981] : *pour tout pavage monoédrique et isoédrique, le pavage est topologiquement un solide de Platon, un solide de Catalan, une bipyramide ou un antidiament*.⁴ Nous esquisserons aussi les pavages par des

¹ Il est sous-entendu que les côtés des polygones sphériques sont des arcs de grands cercles (géodésiques), et que le degré de chaque sommet du pavage est de degré au moins 3, le degré (ou la valence) étant le nombre de polygones accrochés à ce sommet.

² cf. le document *Géométrie sphérique : plus courts chemins, théorème de Girard, relations trigonométriques, isométries de la sphère*, dans *Travaux complémentaires*, rubrique *géométrie et graphisme*, sur mon site pierreaudibert.fr.

³ Originaires de Chine, et développés au Japon depuis les années 1500, les *temari* ont d'abord été des jouets d'enfants pour devenir ensuite des objets d'art. Citons aussi les *dorodango*, sphères parfaites obtenues par des artisans aux mains expertes en malaxant de la terre et de la boue, ou encore les sphères fabriquées en froissant et compactant du papier aluminium, et qui deviennent d'éblouissants miroirs sphériques, ou encore les *kokedama*, sphères de mousse végétale dans lesquelles poussent des plantes, actuellement très tendance en France.

⁴ *Monoédrique* signifie pavage à base de copies d'un pavé unique. *Isoédrique* signifie que l'on peut passer de n'importe quel sommet à n'importe quel autre par une isométrie laissant le pavage globalement invariant.

quadrilatères et des pentagones, qui sont toujours des objets de recherches. Mais commençons par le polygone ayant le moins de côtés, et qui est propre à la géométrie sphérique, le bi-gone.

1. Pavage par des bigones

Les bigones sont aussi appelés digones, biangles, hosoèdres, lunes, secteurs ou fuseaux. Il s'agit tout simplement de découper la sphère en tranches, le nombre de tranches étant quelconque. Les bigones ont chacun comme côtés deux grands cercles, des cercles méridiens ayant tous en commun deux points aux antipodes, comme le pôle nord et le pôle sud, et régulièrement espacés. Un tel découpage en tranches identiques peut s'effectuer d'une infinité de façons, avec un nombre n quelconque de tranches (*figure 1*).



Figure 1 : Découpage de la sphère en n tranches, ici $n = 20$.

2. Pavages par des triangles

Nous allons partir de ce que nous connaissons, à savoir le pavage en tranches précédent, ainsi que les cinq polyèdres réguliers que nous allons projeter sur leur sphère circonscrite. A partir de là, nous retrouverons effectivement les bi-pyramides (diamants) et les antidiament, ainsi que les 13 solides de Catalan. Ces derniers ont la particularité d'hériter des symétries des solides de Platon dont ils sont issus, et d'avoir des faces toutes isométriques. Lorsque celles-ci sont des triangles, cela donnera des pavages isoédriques par projection sur une sphère. Ensuite, dès que cela sera possible, nous casserons les symétries pour faire apparaître de nouveaux pavages. Cela se produira lorsqu'un pavage peut être tranché suivant deux hémisphères, permettant la rotation de l'un par rapport à l'autre. Cela se produira aussi lorsque les triangles accolés deux à deux pourront devenir des losanges, des rectangles ou des carrés, ce qui permettra de jouer sur les diagonales pour fabriquer de nouveaux pavages.

2.1. Le découpage des tranches

Les n tranches du pavage précédent peuvent être coupées en deux suivant l'équateur, ce qui donne $2n$ triangles isométriques (*figure 2*). Un tel pavage est le cas générique des pavages notés G_{2n} , avec $n \geq 2$.⁵ Dans le cas limite où $n = 2$ les triangles occupent chacun un demi-hémisphère. Les triangles sont isocèles, avec un angle $\gamma = 2\pi/n$ et deux angles égaux $\alpha = \beta = \pi/2$.

⁵ Dans le cas limite où $n = 2$, les triangles occupent chacun un demi-hémisphère.

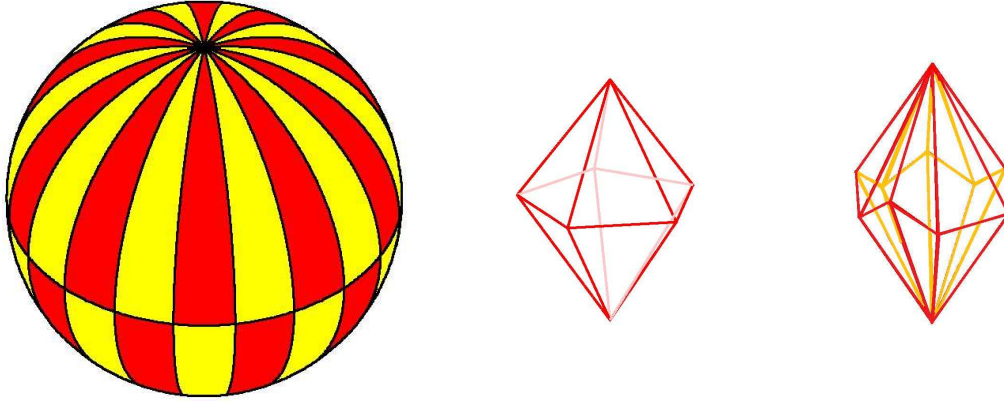


Figure 2 : A gauche, le pavage générique G_{2n} , ici avec $2n = 40$ triangles. Au centre le polyèdre diamant associé à G_{2n} , à droite le polyèdre anti-diamant associé au pavage de la figure 3.

On peut aller plus loin. Remplaçons chaque côté situé sur l'équateur par un trait oblique de même milieu (figure 3). Les triangles ne sont plus isocèles mais restent isométriques. Leurs angles sont tels que $\alpha + \beta = \pi$, avec $\gamma = 2\pi/n$. Lorsque le trait oblique s'approche de la verticale, le plus petit angle reste supérieur à π/n et le grand angle inférieur à $\pi - \pi/n = (n-1)\pi/n$.⁶ D'où $\pi/n < \alpha, \beta < (n-1)\pi/n$. Mais on veut un pavage bord à bord avec des triangles tous isométriques. Cela impose que la ligne brisée en dents de scie des côtés obliques se referme sur elle-même. Le nombre de tranches doit être pair, $n = 2p$. Il s'agit alors d'un pavage noté G_{4p} , avec $4p$ triangles et $p > 1$.⁷ Dans ce cas, les deux sommets aux pôles sont entourés de $2p$ angles γ , et les autres sommets de 2 angles α et de deux angles β .

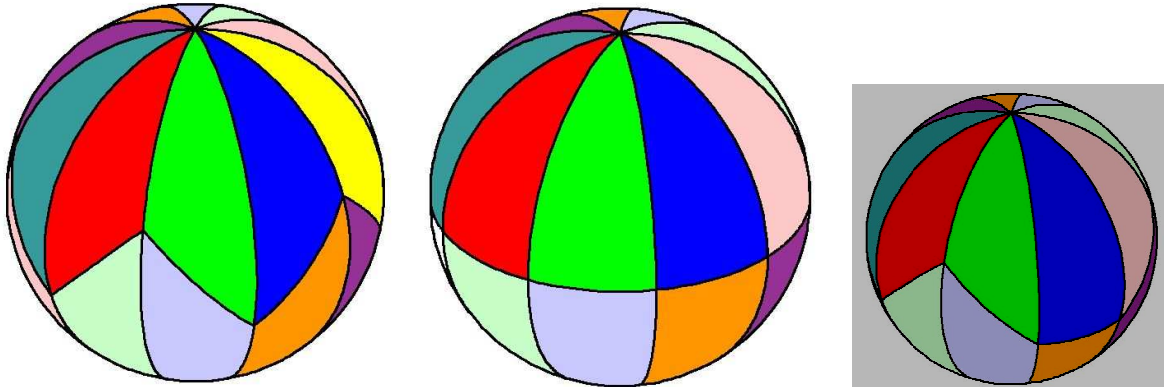
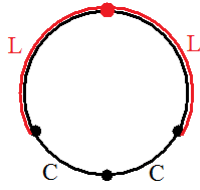


Figure 3 : A gauche un des pavages G_{20} (20 multiple de 4) avec des triangles quelconques. Au centre le seul pavage G_{18} (18 de la forme $4p + 2$) avec des triangles isocèles, tandis qu'à droite après déformation on perd le pavage G_{18} car en refermant la ligne brisée des côtés, deux des pavés ne sont plus isométriques avec les autres, en bleu et ocre (et si on les prenait isométriques, ils ne seraient plus bord à bord avec leurs voisins).

Il existe une autre façon d'agir. Revenons aux pavage en tranches. Si (et seulement si) le nombre n de tranches est pair ($n = 2p$), et que l'on prend un pavage G_{4p} avec ses $4p$ triangles, celui-ci peut être découpé en deux verticalement, donnant deux hémisphères séparé par un cercle méridien, ce qui va permettre de bouger l'un par rapport à l'autre. Deux possibilités se présentent selon que $4p$ est de la forme $8k$ ou $8k + 4$.

⁶ Cela s'observe géométriquement. Mais c'est aussi la conséquence de l'inégalité $\beta + \gamma < 1 + \alpha$. Car on a aussi $\beta + \gamma = \pi + 4\pi / F - \alpha$, où F est le nombre de faces. Avec $F = 4p$, on trouve aussi $\alpha > \pi/(2p)$.

⁷ Le cas limite où $n = 2$, ou $p = 1$, ne nous intéresse plus ici, car aucune déformation ne peut se produire dans ce cas, les triangles restant des demi-hémisphères.



Premier cas : partons de G_{8k} , avec des pavés triangulaires qui ne sont pas isocèles. Le deuxième hémisphère peut être considéré comme l'image du premier par demi-tour, ou encore son symétrique par rapport au plan de coupe. Le méridien les séparant a la disposition indiquée ci contre, avec L désignant un côté long et C un côté court d'un triangle non isocèle. Le seul mouvement possible consiste à faire tourner un hémisphère par rapport à l'autre, mais on ne peut jamais avoir un pavage bord à bord à cause des côtés de longueur inégale (figure 4).

On aura un pavage bord à bord seulement lorsque les triangles sont isocèles (avec $L = C$), grâce à une rotation de 90° d'un hémisphère. Cela donne le pavage appelé TG_{8k} (figure 5). Les angles d'un triangle sont $\alpha = \beta = \pi/2$ et $\gamma = \pi/(2k)$. Les $4k + 2$ sommets sont entourés de $2\alpha + 2k\gamma$ angles pour deux d'entre eux, les autres étant entourés de 4α .

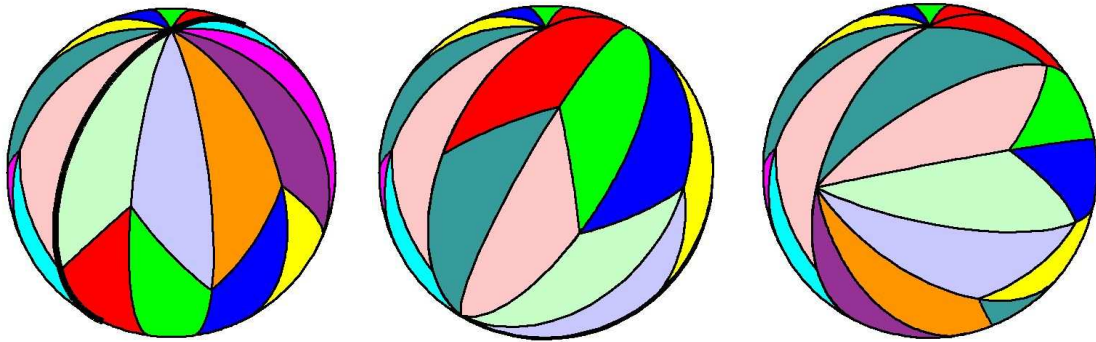


Figure 4 : A gauche un pavage G_{8k} (ici G_{24}) avec des triangles non isocèles, où l'on a fait ressortir le cercle méridien séparant les deux hémisphères. Au centre, une phase intermédiaire de la rotation de l'hémisphère de droite. A droite, le pavage final qui n'est pas bord à bord.

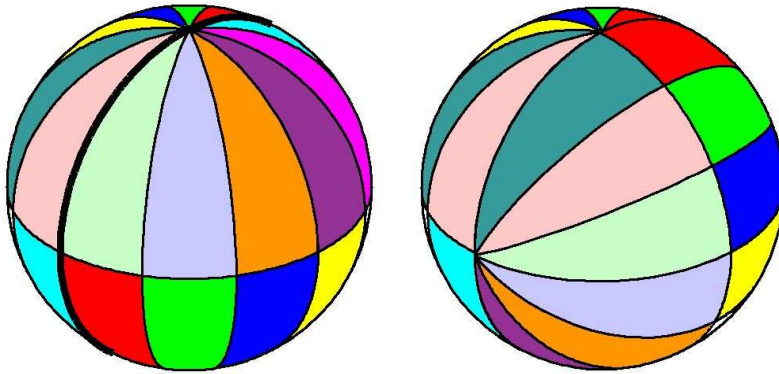


Figure 5 : A gauche le pavage générique G_{8k} , ici G_{24} , avec des triangles isocèles, et à droite le nouveau pavage TG_{8k} après rotation d'un hémisphère de 90° par rapport à l'autre.

Deuxième cas : Prenons le pavage G_{8k+4} . Dans ce cas, le deuxième hémisphère ne se déduit pas du premier par demi-tour comme précédemment, le méridien frontière ayant la disposition de la figure 6 à gauche, avec des pavés triangulaires ayant un côté long L et un côté court C . Mais on peut remplacer le deuxième hémisphère par le premier retourné par demi-tour. Le méridien de sa bordure ne se plaque plus sur celui du premier hémisphère, et le pavage n'est plus bord à bord. Mais en le faisant tourner de $-L$ (ou de $+C$), on retrouve un pavage bord à bord, et ce nouveau pavage est appelé TG_{8k+4} (figure 7).

A la différence du cas précédent TG_{8n} , on obtient un pavage avec des triangles non isocèles, d'angles $\gamma = \pi/(2k + 1)$, α et β tels que $\alpha + \beta = \pi$ (α et β étant strictement compris entre $\pi/(4k + 2)$ et $(4k + 1)\pi/(4k + 2)$). Les $4k + 4$ sommets sont entourés de $\alpha + \beta + (2k + 1)\gamma$ pour quatre d'entre eux, et de $2\alpha + 2\beta$ pour les autres.

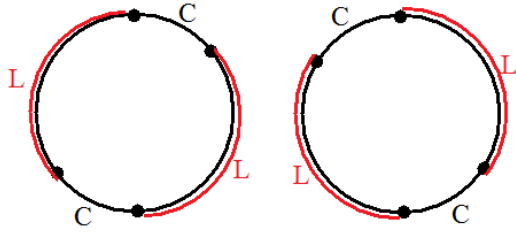


Figure 6 : A gauche le méridien frontière des deux hémisphères. A droite, le méridien du deuxième hémisphère lorsque celui-ci est remplacé par le premier tourné d'un demi-tour. Les côtés des triangles de bordure ne sont plus bord à bord, mais si l'on tourne le deuxième hémisphère de $-L$, les deux méridiens de bordure se confondent et l'on retrouve un pavage bord à bord.

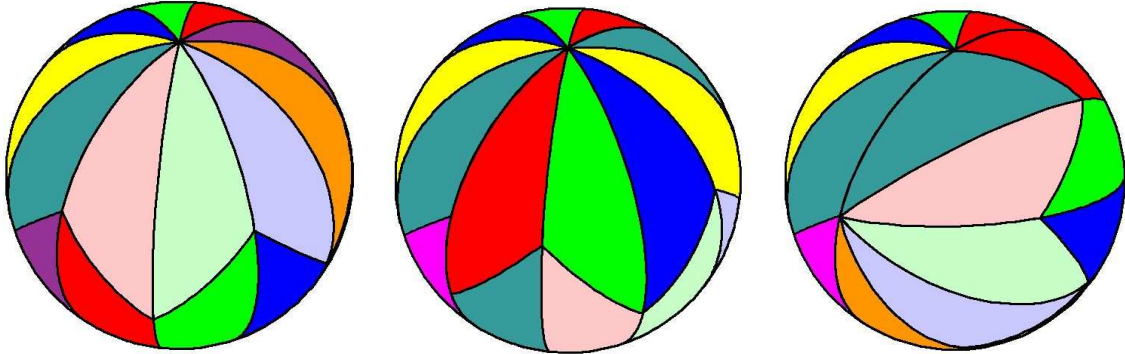


Figure 7 : A gauche un pavage G_{8k+4} , ici G_{20} . Au centre le deuxième hémisphère est remplacé par le premier hémisphère retourné, avec la perte du pavage bord à bord (visible à gauche sur le dessin). A droite le pavage TG_{20} après rotation du deuxième hémisphère.

On s'aperçoit alors que ce pavage présente quatre parallélogrammes isométriques deux à deux, ces parallélogrammes étant chacun formés de deux triangles accolés (figure 8). Un parallélogramme sphérique a ses côtés opposés de même longueur et des angles opposés égaux, et c'est bien le cas ici. L'un des deux types de parallélogramme a des angles opposés $\alpha + \gamma$ et β , l'autre a des angles $\beta + \gamma$ et α .

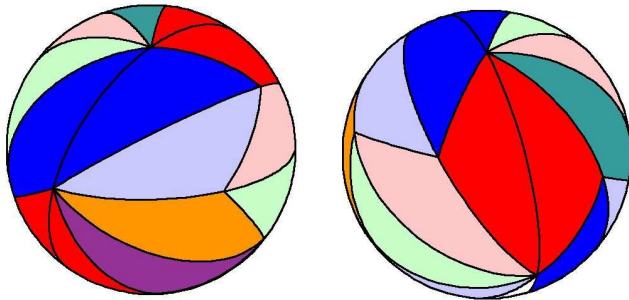


Figure 8 : Les quatre parallélogrammes forment une sorte de ruban en alternance autour de la sphère, deux sont en rouge et deux en bleu sur les dessins.

Prenons un des deux parallélogrammes d'angles $\alpha + \gamma$ et β . Il devient un rectangle si tous ses angles sont égaux, soit $\beta = \alpha + \gamma$. Associée à $\alpha + \beta = \pi$, la contrainte $\beta - \alpha = \gamma$ donne :

$$\alpha = k \pi / (2k + 1) \text{ et } \beta = (k + 1) \pi / (2k + 1).$$

Lorsque l'on obtient ainsi deux rectangles, les deux autres parallélogrammes ne deviennent pas des rectangles, sauf dans le cas particulier de TG_{12} (TG_{8k+4} pour $k = 1$) que nous verrons plus loin.

Si l'on choisit des transformer les deux autres parallélogrammes d'angles $\beta + \gamma$ et α en rectangles, on obtient le même résultat que précédemment, les valeurs de α et β étant échangées. Autrement dit, cela conduit au même pavage.

Ayant ainsi obtenus deux rectangles isométriques aux antipodes l'un de l'autre, il suffit de changer une diagonale en l'autre pour avoir un nouveau pavage à base des mêmes formes triangulaires. Et deux cas sont possibles, selon que l'on change la diagonale d'un seul rectangle ou des deux. D'où les pavages notés MTG_{8k+4}^1 et MTG_{8k+4}^2 (figures 9, 10, 11).

Pour la programmation, il s'agit de connaître les dimensions des triangles. Le côté long L mesure $\pi/2 + \lambda$, le côté court C mesure $\pi/2 - \lambda$, et la base est c telle que

$\cos c = (\cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta) / (\sin \alpha \sin \beta)$. On connaît les trois angles α, β, γ . Pour connaître λ , appliquons la relation :

$\sin C / \sin \alpha = \sin L / \sin \beta = \sin c / \sin \gamma$ qui se réduit à

$\sin L / \sin \beta = \sin c / \sin \gamma$, la première égalité étant toujours vraie. La résolution de cette équation en λ donne par exemple comme résultats :

pour $k = 1$ et MTG_{12} : $\lambda = 0,340$

pour $k = 2$ et MTG_{20} : $\lambda = 0,106$

pour $k = 4$ et MTG_{36} : $\lambda = 0,031$

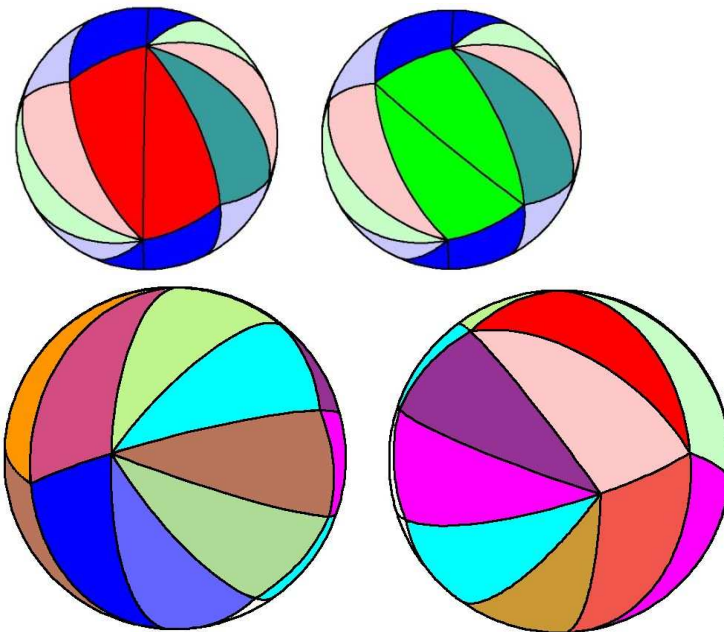
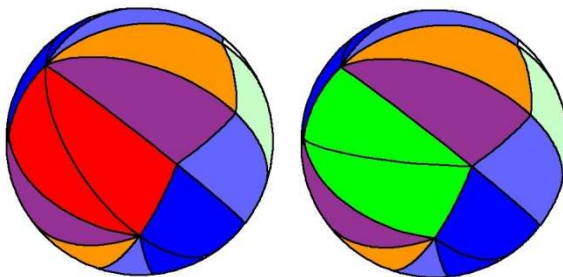


Figure 9 : En haut la diagonale d'un des deux rectangles est changée. En bas le pavage MTG_{20}^1 , où l'on voit à gauche le rectangle inchangé (en bleu pâle et bleu foncé) et à droite l'autre rectangle modifié (en rouge foncé et rouge clair).



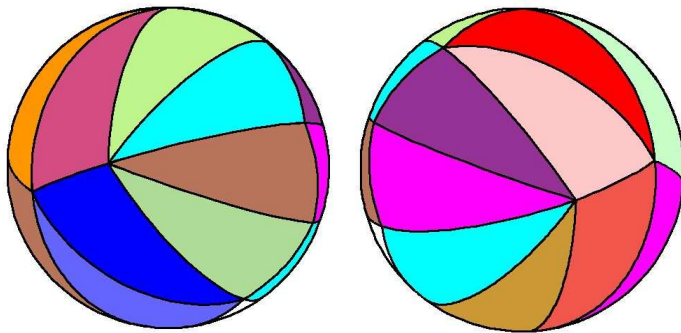


Figure 10 : En haut la diagonale du second rectangle est aussi changée, ce qui donne en bas le pavage MTG_{20}^2 vu sous deux angles différents pour faire ressortir les deux rectangles modifiés.

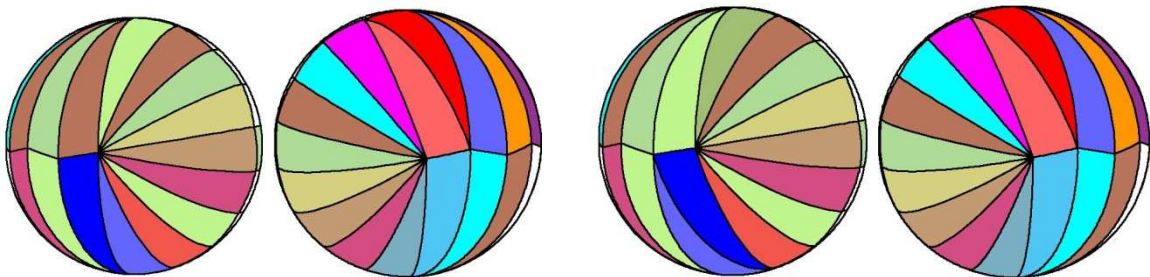


Figure 11 : De gauche à droite, les pavages MTG_{36}^1 et MTG_{36}^2 , chacun sous deux angles de vue.

Pour les pavages MTG_{8k+4}^1 , les $4k + 4$ sommets sont entourés des angles $2\beta + 2k\gamma$ pour 2 d'entre eux, de $\alpha + \beta + (2k+1)\gamma$ pour deux autres, de $3\alpha + \beta + \gamma$ pour 2 autres, et de $2\alpha + 2\beta$ pour le reste. Pour les pavages MTG_{8k+4}^2 , les $4k + 4$ sommets sont entourés des angles $2\beta + 2k\gamma$ pour 4 d'entre eux, de $3\alpha + \beta + \gamma$ pour 4 autres et de $2\alpha + 2\beta$ pour le reste.

Il reste le cas particulier de MTG_{12} . Les angles d'un triangle sont alors $\alpha = \gamma = \pi/3$ et $\beta = 2\pi/3$. Les triangles sont tous isocèles et accolés deux à deux, ils forment des carrés qui pavent la sphère (figure 12). Remarquons que le pavage G_{12} avec des triangles isocèles donne aussi des carrés lorsque l'on accole les triangles deux à deux (figure 12 à droite). Mais les diagonales choisies ne sont pas toutes les mêmes que celles du pavage MTG_{12} . Nous retrouverons le pavage MTG_{12} plus tard sous un autre nom dans la classification.

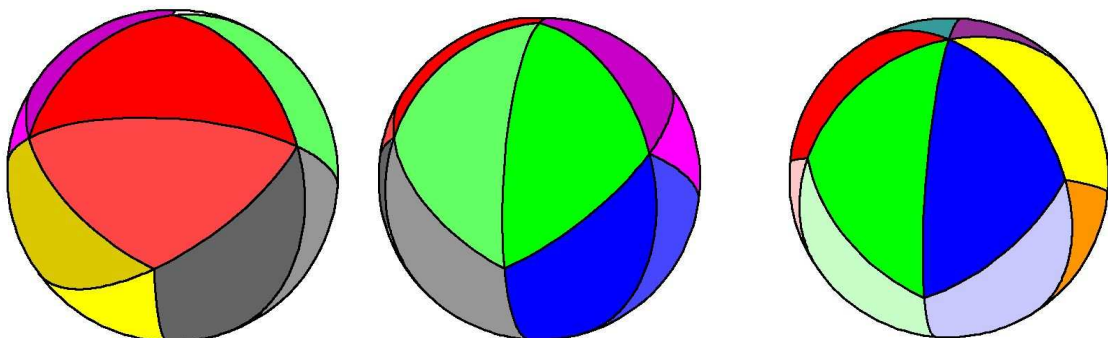


Figure 12 : A gauche et au centre, le pavage MTG_{12} sous deux angles de vue. Au lieu de deux rectangles seulement comme dans le cas général, les triangles accolés deux à deux forment 6 carrés qui pavent la sphère. Mais ce pavage n'est pas identique au pavage G_{12} avec des triangles isocèles, à droite.

Nous n'avons pas pour autant épuisé tous les cas possibles à partir du pavage en tranches. Revenons au pavage G_{4p} avec ses triangles quelconques d'angles tels que $\gamma = \pi/p$ et $\alpha + \beta = \pi$. On va donner une forme particulière aux triangles en les rendant isocèles. On prend alors $\alpha = \gamma = \pi/p$ et $\beta = \pi$

– $\pi/p = (p-1)\pi/p$. Pourquoi faire cela ? Parce que les triangles accolés deux à deux forment des losanges, et que l'on va pouvoir jouer avec leurs diagonales pour avoir d'autres triangles isométriques.

Considérons un triangle sphérique ABC de côtés a, b, c avec $b = \pi/2 + \lambda$ et $c = \pi/2 - \lambda$. Lorsqu'il est isocèle : $a = c$, et l'on connaît ses angles α, β, γ . Cela permet de déterminer λ . Il suffit d'utiliser une formule de trigonométrie sphérique :

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos c$$

$$\sin \lambda = \frac{\cos(\pi/p) \times (1 + \cos((p-1)\pi/p))}{\sin((p-1)\pi/p) \sin(\pi/p)} \quad \text{d'où } \lambda.$$

On obtient les résultats suivants pour $p \geq 3$ (pour $p = 2$, un losange couvre un hémisphère et ce cas a déjà été traité) :

$$\begin{aligned} p = 3, \lambda &= 0,339 \quad (\text{pour } H_{12}, \text{ les triangles accolés deux à deux forment des carrés}) \\ p = 4, \lambda &= 0,427 \\ p = 5, \lambda &= 0,463 \\ p = 6, \lambda &= 0,483 \\ p = 7, \lambda &= 0,493 \end{aligned}$$

En remplaçant deux triangles accolés par un losange, on trouve le pavage par des losanges de la *figure 13*. Et si l'on remplace une diagonale par l'autre, cela donne le pavage noté H_{4p} . Les angles des triangles isocèles sont maintenant $\gamma = 2\pi/p$ et $\alpha = \beta = (p-1)\pi/(2p)$ (*figures 13 et 13 bis*). Les $2p+2$ sommets sont entourés des angles $p\gamma$ pour deux d'entre eux et de $4\alpha + \gamma$ pour les autres. En particulier, pour $p = 5$, on a $\alpha = \beta = \gamma = 2\pi/5$, et l'on voit déjà apparaître ce qui sera la projection de l'icosaèdre régulier sur la sphère.

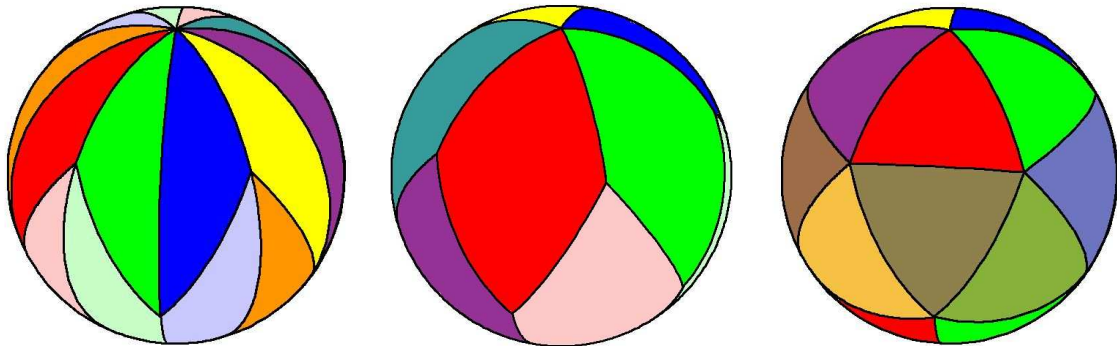


Figure 13 : A gauche le pavage G_{20} avec des triangles isocèles. Au centre le pavage par des losanges, obtenus en accolant les triangles deux à deux. A droite, le pavage H_{20} (H_{4p} pour $p = 5$) obtenu en remplaçant une diagonale des losanges par l'autre.

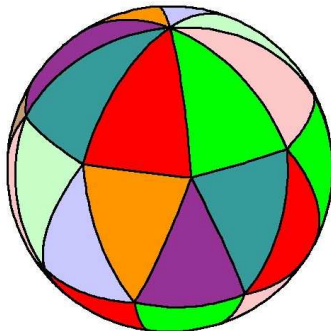


Figure 13 bis : Le pavage H_{32} .

On peut aussi découper chaque losange suivant ses deux diagonales, ce qui donne quatre triangles isométriques et le pavage correspondant est noté I_{8p} (figure 14). Un triangle a pour angles $\gamma = \pi/p$, $\alpha = (p-1)\pi/(2p)$ et $\beta = \pi/2$. Les $4p+2$ sommets sont entourés des angles $2p\gamma$ pour deux d'entre eux, de 4β pour $2p$ sommets et de $4\alpha + \gamma$ pour les $2p$ restants.

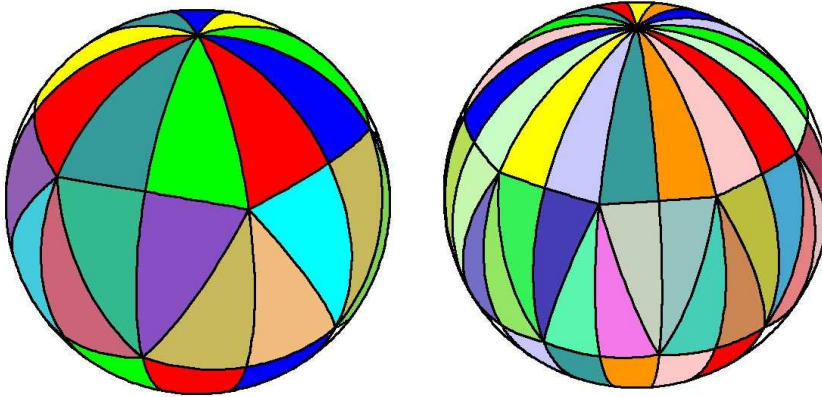


Figure 14 : Les pavages I_{40} et I_{72} (voir plus bas le pavage I_{24} sur la figure 25).

Au lieu d'utiliser le pavage G_{4p} comme on vient de le faire, on peut aussi utiliser le pavage TG_{8k+4} en rendant ses triangles isocèles, de façon qu'accollés deux à deux ils forment encore des losanges (figure 15).

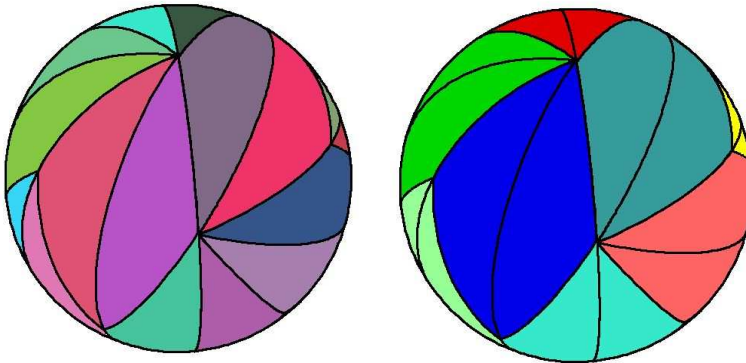


Figure 15 : Le pavage TG_{8k+4} , ici TG_{20} , avec des triangles isocèles, en faisant ressortir à droite la formation de losanges.

A leur tour ces losanges peuvent être découpés en deux ou en quatre triangles isométriques, ce qui donne deux nouveaux pavages, notés TH_{8k+4} et TI_{16k+8} . Le pavage TH_{8k+4} a des triangles d'angles $\gamma = 2\pi/(2k+1)$ et $\alpha = \beta = \pi k/(2k+1)$. Les $4k+4$ sommets sont entourés de $(k+1)\gamma + \alpha$ pour deux d'entre eux et de $4\alpha + \gamma$ pour les autres. On constate que pour la valeur minimale de k , soit $k=2$, où les losanges sont devenus des carrés, le pavage TH_{20} redonne H_{20} . Pour les pavages TH_{8k+4} , on prendra donc $k \geq 3$.

L'autre pavage TI_{16k+8} est formé de triangles rectangles avec $\gamma = \pi/(2k+1)$, $\alpha = \pi k/(2k+1)$ et $\beta = \pi/2$. Ses $8k+6$ sommets sont entourés de $2\alpha + (2k+2)\gamma$ angles pour quatre sommets, de 4β pour $4k+2$ sommets et de $4\alpha + 2\gamma$ pour les autres.

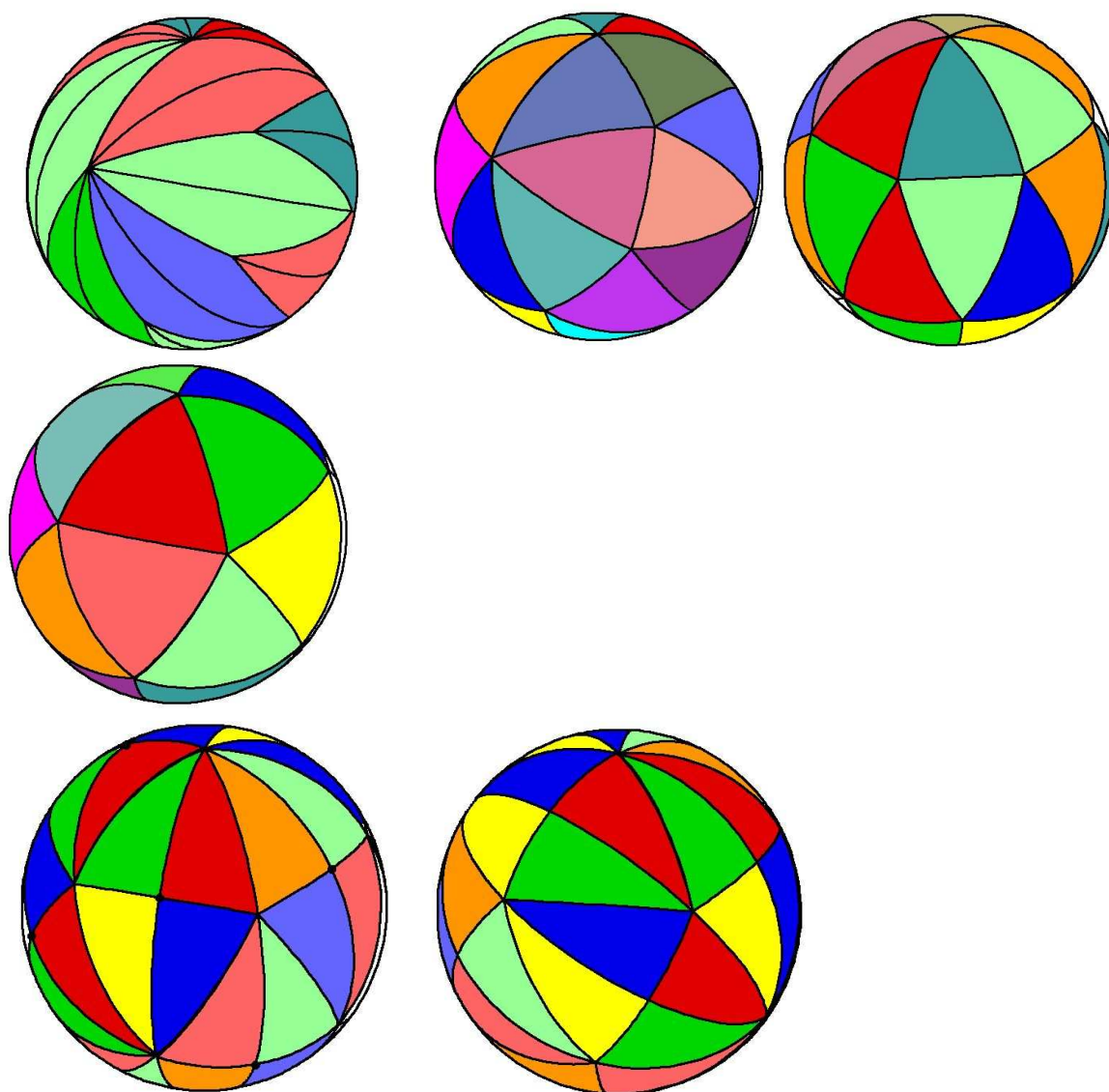


Figure 16 : Les pavages TH_{8k+4} et TI_{16k+8} .

En haut, en partant à gauche du pavage TG_{28} où l'on a fait ressortir les losanges, on obtient au centre et à droite le pavage TH_{28} vu sous deux angles différents, puis au-dessous le pavage TH_{20} (les triangles sont équilatéraux et $TH_{20} = H_{20}$).

En bas le pavage TI_{40} vu sous deux angles différents.

A ce stade, nous avons épuisé tous les cas possibles obtenus, rappelons-le, à partir du découpage de la sphère en tranches. Nous allons maintenant partir d'une autre façon d'obtenir des pavages, celle obtenue à partir des polyèdres réguliers. Car lorsqu'un polyèdre a toutes ses faces isométriques avec ses sommets tous situés sur sa sphère circonscrite, les polygones sphériques obtenus par projection radiale sont aussi isométriques, et ils pourront être découpés en triangles s'il n'en sont pas déjà.

2.2. Le tétraèdre et les pavages sphériques correspondants

Partons d'un tétraèdre régulier, avec ses quatre sommets, ses six côtés et ses quatre faces qui sont des triangles équilatéraux. Par projection radiale sur la sphère circonscrite, à partir du centre O de la sphère, on obtient un pavage de la sphère suivant quatre triangles sphériques équilatéraux (côtés et angles égaux) (figure 17). Appelons α un des angles. Chaque sommet étant entouré de trois faces, on a $3\alpha = 2\pi$, $\alpha = 2\pi/3$. Ce pavage est appelé F_4 .

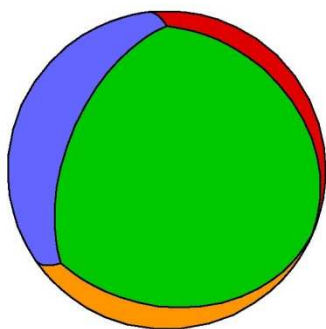


Figure 17 : Pavage de la sphère par quatre triangles équilatéraux, à partir d'un tétraèdre régulier inscrit dans la sphère.

Mais le tétraèdre régulier est-il le seul tétraèdre à permettre un tel pavage ? La réponse est non. En effet, le tétraèdre régulier n'est qu'un cas très particulier de tétraèdres à faces triangulaires isométriques. A partir d'un triangle quelconque, sous réserve que tous ses angles soient aigus, on peut toujours fabriquer un tétraèdre équifacial.⁸

La projection d'un tel tétraèdre sur la sphère donne des variantes de pavage F_4 (figure 22).

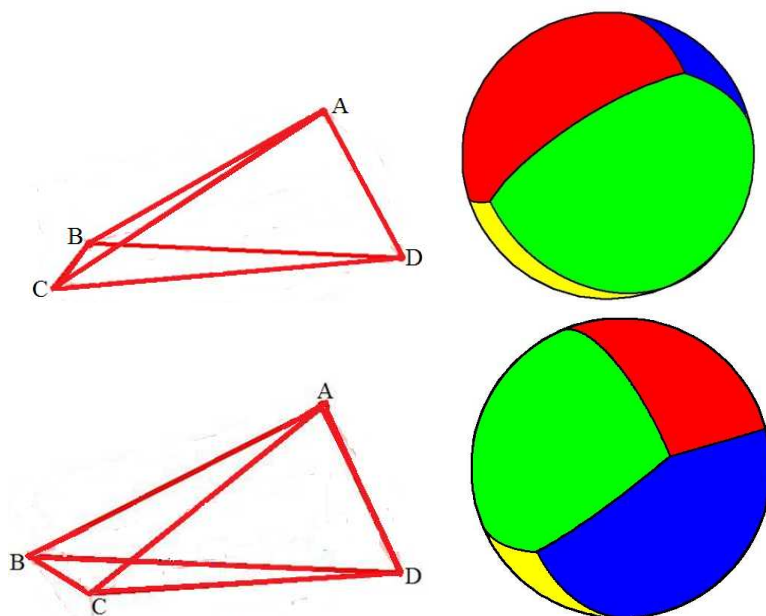


Figure 22 : En haut à gauche un disphénoïde tétragonal (tétraèdre dont les faces sont des triangles isocèles), à droite le pavage sphérique correspondant. En bas un pavage à partir de triangles quelconques à angles aigus.

Lorsque les triangles des faces sont quelconques, aucune variante de pavage n'est permise. Par contre, si les triangles sont isocèles, ce qui correspond au disphénoïde tétragonal, on peut les découper chacun en deux triangles rectangles isométriques. Sauf qu'il y a un problème : si l'on découpe les trois faces latérales en tranches passant par les trois milieux des côtés du triangle de la base, le pavage n'est plus bord à bord (figure 23), car le triangle de base n'utilise qu'un seul milieu. Le découpage bord à bord ne marche que si l'on utilise le milieu d'un côté latéral pour couper deux faces latérales. Mais dans ce cas on retrouve le pavage G_8 avec des triangles d'angles $\alpha = \pi/3$, $\beta = 2\pi/3$, $\gamma = \pi/2$ (figure 23 bis).

⁸ voir document *Tétraèdres équifaciaux ou disphénoïdes*, dans *graphisme et géométrie*, rubrique travaux complémentaires, sur mon site.

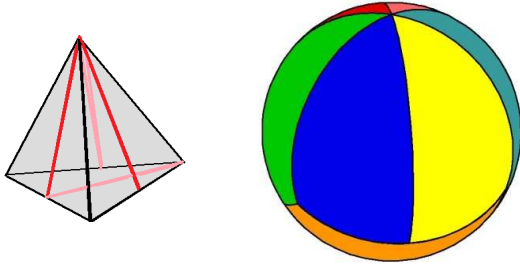


Figure 23 : Le découpage des quatre triangles isocèles de F_4 en deux donne des triangles isométriques mais on perd le pavage bord à bord comme on peut le constater.

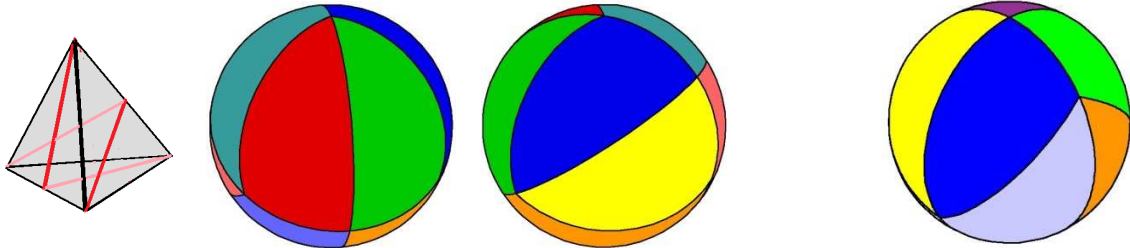


Figure 23 bis : A gauche le nouveau découpage des quatre triangles isocèles de F_4 vu sous deux angles différents. A droite le pavage G_8 identique au précédent.

Seul le pavage F_4 initial, avec ses quatre triangles équilatéraux, obtenu à partir du tétraèdre régulier, permet d'envisager de nouveaux pavages. En prenant le centre de ces triangles, on peut découper chaque triangle en trois triangles isocèles isométriques ayant ce centre comme sommet commun. Ce qui donne un nouveau pavage noté F_{12}^1 . Chaque triangle a pour angles $\alpha = \gamma = \pi/3$ et $\beta = 2\pi/3$. La moitié des 8 sommets est entourée de 3β angles et l'autre moitié de 6α angles (figure 24).

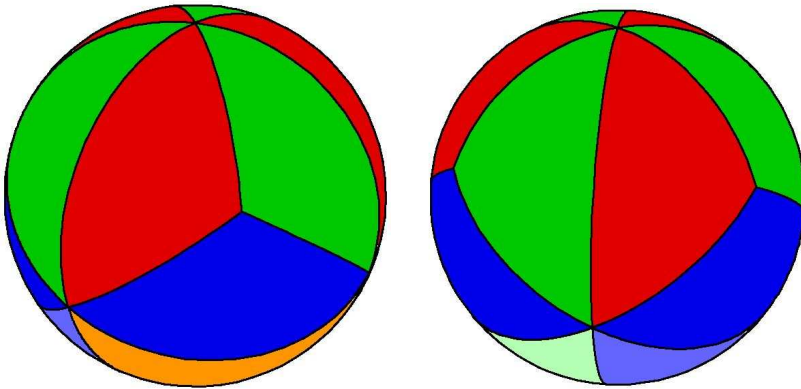


Figure 24 : Le pavage F_{12}^1 .

On s'aperçoit alors que les triangles accolés deux à deux forment six carrés car les angles correspondants sont tous égaux à $2\pi/3$ et que les côtés sont aussi tous égaux. En changeant la diagonale de ces carrés, on obtient encore des triangles isométriques. Encore faut-il remarquer qu'en faisant cela on n'est plus dans le cadre d'une modification directe à partir du tétraèdre, mais d'une modification à partir du cube et des six carrés sphériques qu'il donne directement sur la sphère.

Quitte à anticiper sur les pavages du cube, nous allons présenter deux des nouveaux cas qui se produisent à partir du pavage F_{12}^1 : soit on modifie la diagonale d'un seul carré, ce qui donne le pavage noté F_{12}^2 (figure 25), soit on modifie les diagonales de deux carrés, ce qui donne le pavage F_{12}^3 (figure 26). Les angles des triangles sont toujours $\alpha = \gamma = \pi/3$ et $\beta = 2\pi/3$. Mais pour le pavage F_{12}^2 les 8 sommets sont entourés de 6α pour deux d'entre eux, de 3β pour deux autres, de $4\alpha + \beta$ pour deux autres et de $2\alpha + 2\beta$ pour les deux restants. Pour le pavage F_{12}^3 , on retrouve les mêmes entourages mais les angles 6α et 3β ne concernent plus qu'un sommet chacun. Les autres cas de découpage des six carrés, nous les verrons plus tard de façon exhaustive lorsque nous étudierons le cube.

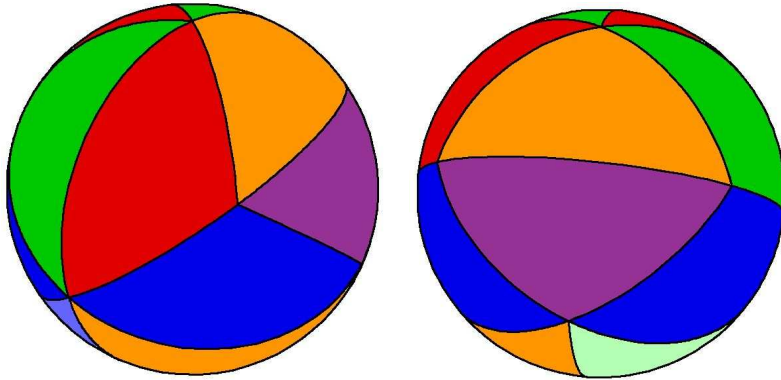


Figure 25 : Le pavage F_{12}^2 vu sous deux angles différents.

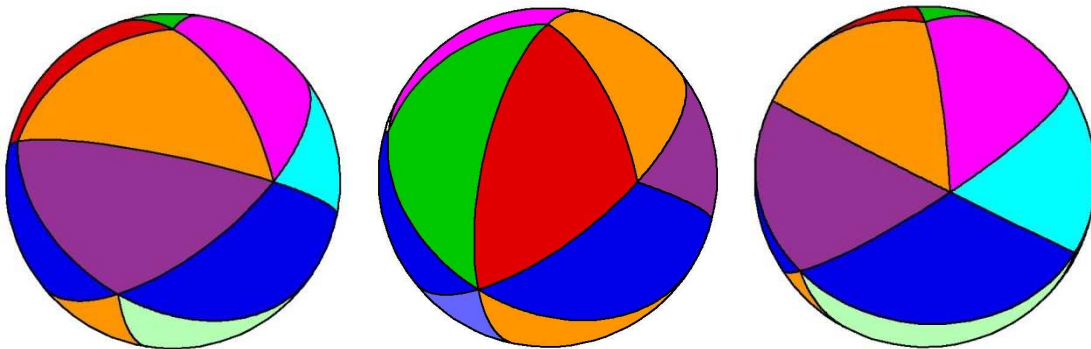


Figure 26 : Le pavage F_{12}^3 vu sous des angles différents.

Une dernière possibilité existe, à partir du pavage F_{12}^1 . On peut en effet découper les triangles isocèles en deux, ce qui donne des triangles rectangles (figure 25). Mais on retrouve le pavage I_{24} déjà obtenu précédemment, avec dans un triangle les angles $\alpha = \gamma = \pi/3$ et $\beta = \pi/2$ (avec $p = 3$ pour I_{8p}).⁹ On s'aperçoit alors que les triangles rectangles groupés quatre par quatre autour d'angles droits forment des carrés, et l'on peut procéder à un nouveau découpage, comme indiqué sur la figure 25 à droite. Mais nous traiterons ce pavage plus loin, à partir du cube que nous allons maintenant étudier, puisque les pavages à partir du tétraèdre régulier sont épuisés.

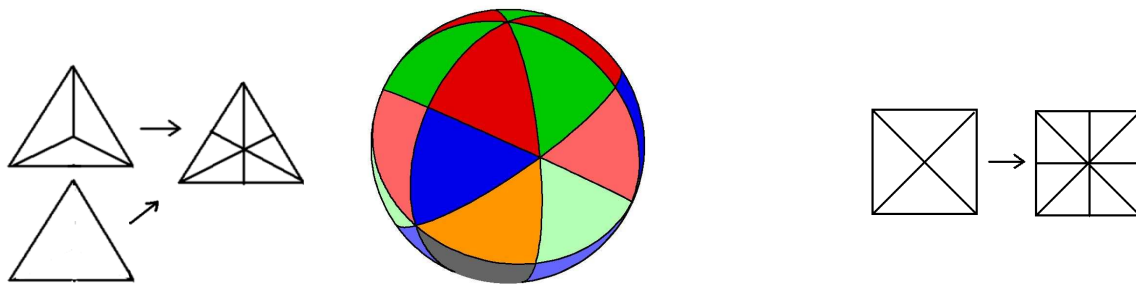


Figure 25 : A gauche, le nouveau découpage à partir des triangles de F_{12}^1 (en haut) ou de G_8 (en bas), avec au centre le pavage I_{24} correspondant mais déjà connu. A droite, le nouveau découpage possible, à partir des carrés présents.

⁹ On peut aussi retrouver le pavage I_{24} à partir du pavage G_8 en découpant ses triangles comme indiqué sur la figure 25.

2.3. Le cube et les pavages sphériques correspondants

La projection du cube sur sa sphère circonscrite donne six carrés sphériques d'angles tous égaux à $2\pi/3$ (figure 26). Commençons par découper les carrés en triangles suivant une des deux diagonales des carrés, chaque triangle ayant deux angles $\alpha = \gamma = \pi/3$ et $\beta = 2\pi/3$. Cela conduit à huit découpages différents, aux isométries directes près du cube¹⁰. Mais nous allons voir que nous connaissons déjà ces huit cas.

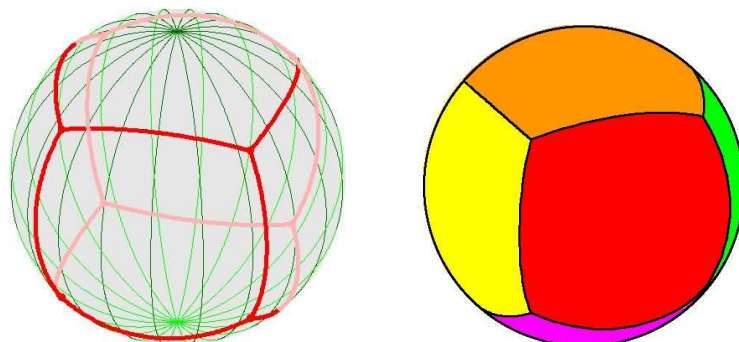
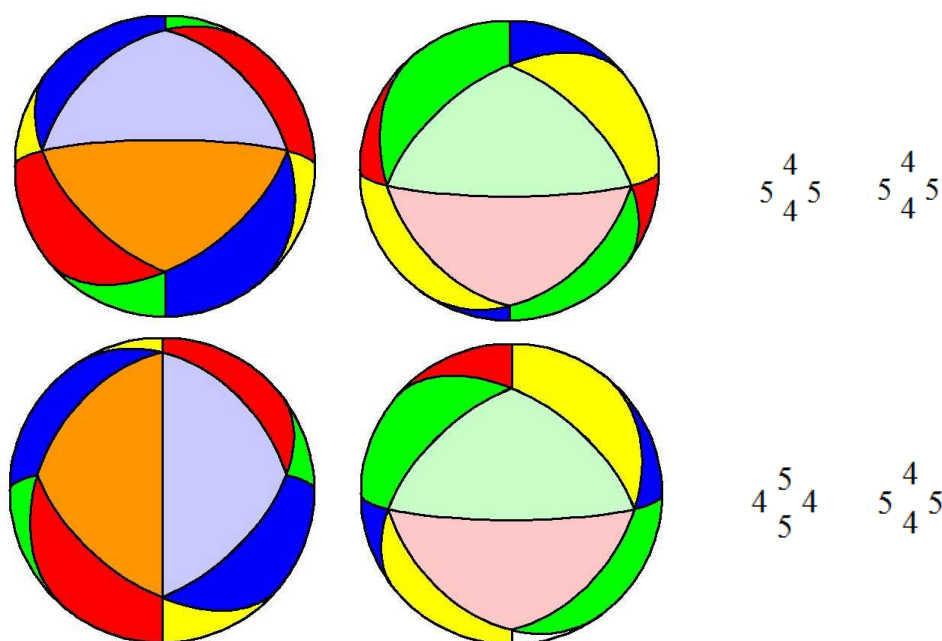


Figure 26 : Cube envoyé sur sa sphère circonscrite.

On constate d'abord que l'on a des cas particuliers de TG_{8n+4} et MTG_{8n+4}^1 pour $n = 1$, avec les angles $\alpha = \gamma = \pi/3$ et $\beta = 2\pi/3$, ce qui donne 4 sommets entourés de $4\alpha + \beta$ et les quatre autres de $2\alpha + 2\beta$. Cela donne précisément trois cas différents, dont deux sont en miroir l'un par rapport à l'autre (figure 27).



¹⁰ On démontre qu'il existe exactement huit configurations de cubes avec une diagonale sur chaque face, aux rotations près de la sphère, voir *Formule de Burnside et cube*, dans *géométrie et graphisme*, rubrique *travaux complémentaires* sur mon site. Dans leur article de référence, Y.Ueno et Y.Agaoka indiquent qu'il y a 7 cas. Cela est dû au fait que deux pavages sont symétriques par rapport à un plan, et qu'on peut en décompter un seul au lieu de deux.

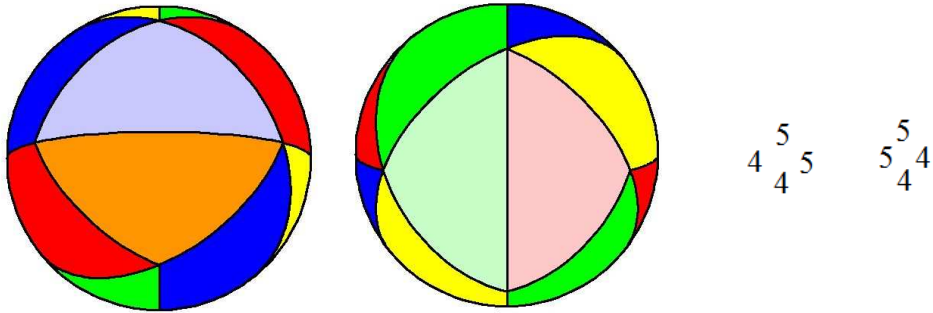


Figure 27 : Vues de haut et de bas des trois cas obtenus à partir de TG_{12} et MTG_{12}^1 , avec des sommets entourés pour moitié de cinq triangles et pour moitié de quatre triangles.

On retrouve aussi comme prévu les trois pavages $F_{12}^1, F_{12}^2, F_{12}^3$ vus avec le tétraèdre (figure 28). Et l'on retrouve enfin des cas particuliers des pavages G_{4n} (pour $n = 3$ et $\alpha = \gamma = \pi/3, \beta = 2\pi/3$) et H_{4n} pour $n = 3$. Les sommets de G_{12} sont entourés pour six d'entre eux par $2\alpha + 2\beta$ et pour les deux autres par 6α . Ceux de H_{12} sont entourés pour deux d'entre eux par 3β et les autres par $4\alpha + \beta$ (figure 29).

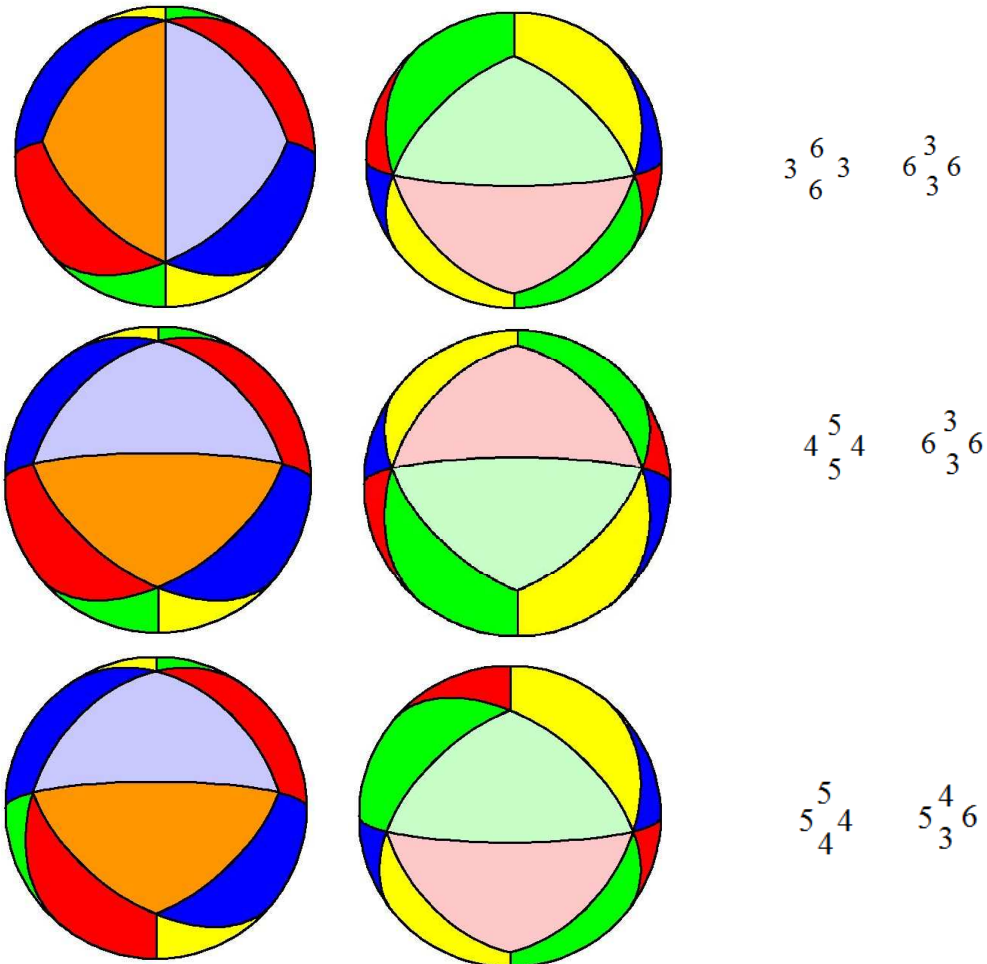


Figure 28 : Les pavages $F_{12}^1, F_{12}^2, F_{12}^3$.

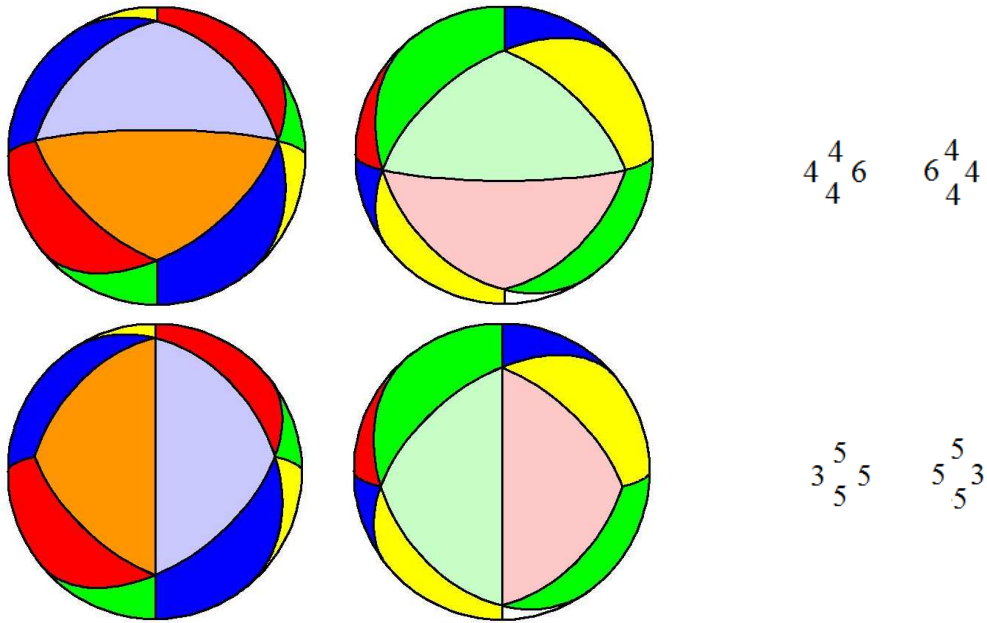


Figure 29 : Les pavages G_{12} et H_{12} .

Remarquons qu'à partir des huit pavages obtenus en partageant les carrés suivant une de leurs diagonales, il est possible de garder cette diagonale et de rajouter la deuxième diagonale partout, et l'on retrouve alors le pavage I_{24} . Puis en découpant ces triangles suivant une des médiatrices (cf. figure 25 à droite), on trouve le nouveau pavage F_{48} (figure 30). Les triangles du pavage ont pour angle $\alpha = \pi/4$, $\beta = \pi/2$ et $\gamma = \pi/3$. Les sommets sont entourés de 8α pour six d'entre eux, de 4β pour 12 d'entre eux et de 6γ pour les 8 restants.

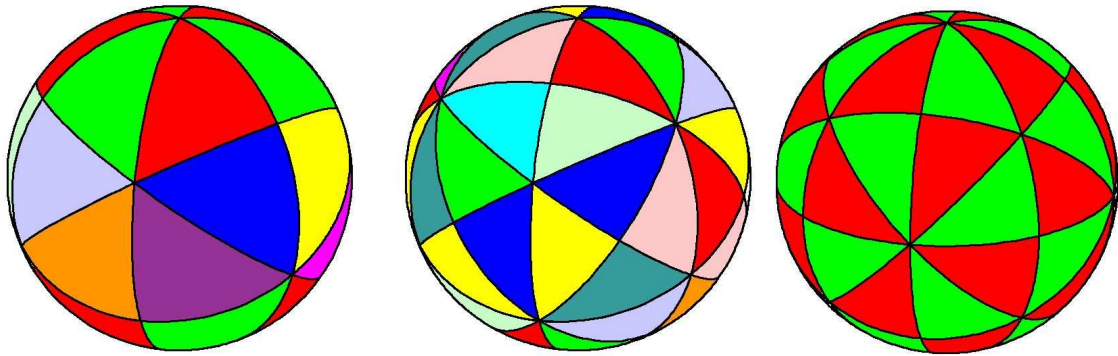


Figure 30 : Le pavage I_{24} à gauche et le nouveau pavage F_{48} au centre et à droite, colorié de deux façons et vu sous deux angles différents.

On s'aperçoit que le pavage F_{48} peut se partager en deux hémisphères de plusieurs façons. Par exemple entre leur grand cercle méridien lorsque le pôle nord est un sommet 6γ (figure 30 au centre) ou lorsque le pôle nord est un sommet 8α (figure 30 à droite). Peut-on alors faire tourner un hémisphère par rapport à l'autre pour avoir un nouveau pavage bord à bord ? Une seule possibilité existe, elle est visible sur la figure 30 à droite, avec les hémisphères nord et sud séparés par l'équateur. En faisant tourner l'hémisphère sud de l'angle $\pi/4$, on trouve bien un nouveau pavage, noté TF_{48} . Cela est illustré sur la figure 31.

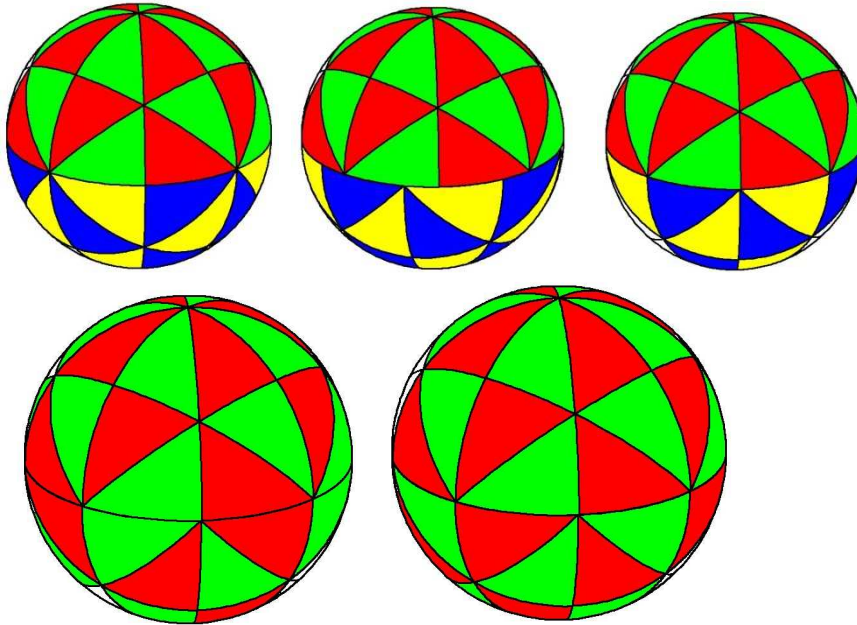


Figure 31 : En haut, on part (à gauche) du pavage F_{48} avec ses hémisphères de couleurs différentes, puis on le fait tourner progressivement (au centre) pour aboutir au pavage TF_{48} (à droite). En bas, le pavage TF_{48} est montré avec deux coloriage différents, chacun à base de deux couleurs.

A ce stade, aucun autre pavage n'est possible.

2.4. L'octaèdre régulier et les pavages correspondants

L'octaèdre régulier est formé de huit faces en forme de triangles équilatéraux. Sa projection sur la sphère circonscrite donne un pavage que nous avons déjà rencontré, à savoir le pavage G_8 avec des angles $\alpha = \beta = \gamma = \pi/2$ (figure 32 à gauche). En découpant chaque triangle équilatéral en trois triangles autour de son centre, on obtient le nouveau pavage noté F_{24} (figure 32 à droite). Les triangles de F_{24} ont des angles $\alpha = \gamma = \pi/4$ et $\beta = 2\pi/3$. Les 14 sommets sont entourés de 8α pour 6 d'entre eux et de 3β pour les 8 autres. En découpant à nouveau les triangles en deux, on retrouve le pavage F_{48} (cf. figure 30 ci-dessus).

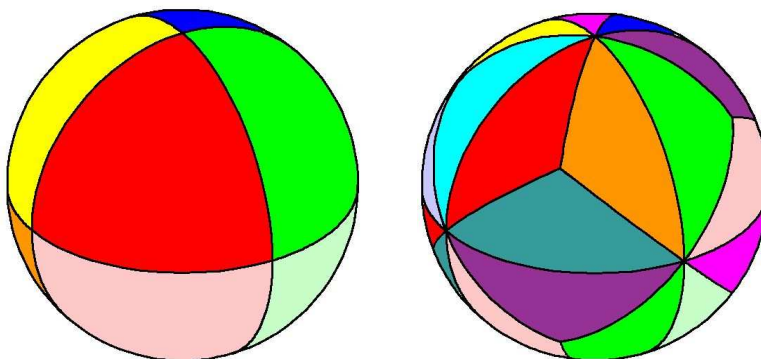


Figure 32 : A gauche, le pavage octaédrique G_8 , à droite le pavage F_{24} .

A partir du pavage octaédrique initial G_8 , une autre façon d'agir consiste à découper chaque triangle suivant n tranches verticales, ce qui redonne le pavage G_{8k} avec $\alpha = \beta = \pi/2$ et $\gamma = \pi/2k$ ou encore le pavage TG_{8k} (figure 33 pour $k = 2$).

Dans le cas particulier de G_{16} et TG_{16} , on constate qu'en regroupant les triangles deux à deux, ce qui donne des triangles équilatéraux, on peut les découper suivant leurs médianes, et encore retrouver le pavage F_{48} .

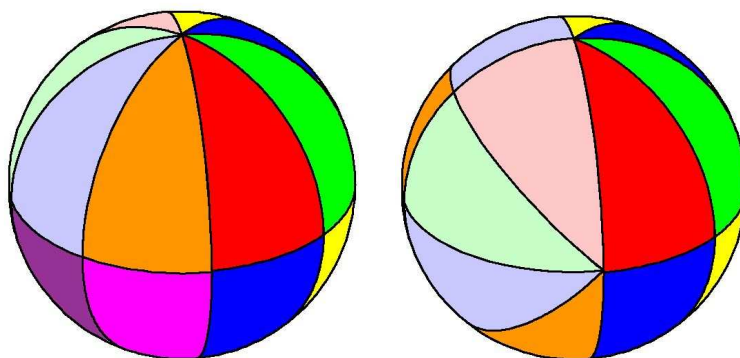


Figure 33 : A gauche le pavage G_{16} (avec $\alpha = \beta = \pi/2$ et $\gamma = \pi/4$) et à droite le pavage associé TG_{16} .

Même si cela est peu prévisible en l'état actuel, on s'aperçoit que le pavage octaédrique G_8 peut aussi avoir chacune de ses huit faces découpées en 15 triangles, ce qui donne le pavage F_{120} que nous trouverons plus tard, obtenu tout naturellement à partir de l'icosaèdre ou du dodécaèdre réguliers (figure 34). Il n'y a pas d'autres cas possibles pour l'octaèdre.

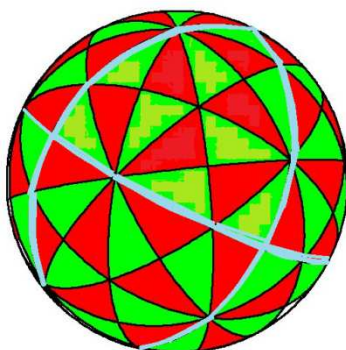


Figure 34 : Derrière le pavage F_{120} , on voit apparaître les 8 triangles à trois angles droits de G_8 .

2.5. L'icosaèdre régulier et ses pavages

L'icosaèdre régulier possède 20 faces en forme de triangles équilatéraux. Sa projection sur la sphère donne aussi des triangles équilatéraux d'angles $\alpha = \beta = \gamma = 2\pi/5$, chaque sommet étant entouré de 5α . On retrouve un cas particulier du pavage déjà vu H_{20} (figure 35 à gauche). Chacun des triangles équilatéraux peut être découpé en trois autour de son centre, et l'on obtient le nouveau pavage noté F_{60}^1 (figure 35 au centre). Les triangles isocèles de F_{60}^1 ont pour angles $\alpha = \gamma = \pi/5$ et $\beta = 2\pi/3$. Les 32 sommets sont entourés de 3β pour 20 d'entre eux et de 10α pour les autres. Si l'on revient au pavage initial H_{20} , on sait que l'on peut aussi découper en deux les triangles équilatéraux, et cela donne les pavages déjà connus I_{40} , et ensuite TI_{40} .

On constate que les triangles isocèles de F_{60}^1 forment des losanges lorsqu'ils sont accolés deux à deux. On peut alors faire un nouveau découpage avec l'autre diagonale des losanges, et l'on aboutit au nouveau pavage noté F_{120} (figure 35 à droite). Les triangles obtenus ont des angles $\alpha = \pi/3$, $\beta = \pi/2$ et $\gamma = \pi/5$. Les 62 sommets sont entourés de 6α pour 20 d'entre eux, de 4β pour 30 autres et de 10γ pour les 12 restants. Il n'y a plus d'autres cas possibles à partir de l'icosaèdre.

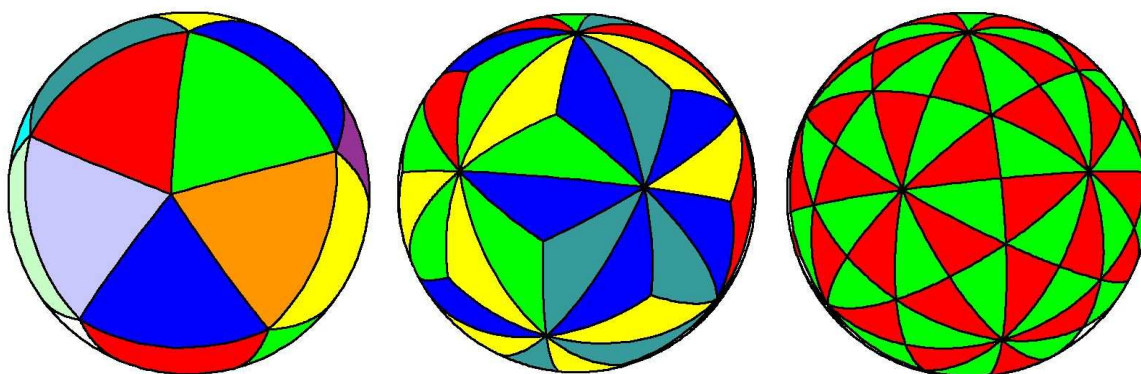


Figure 35 : A gauche le pavage H_{20} à partir de l'icosaèdre, au centre le pavage F_{60}^1 , et à droite le pavage F_{120} .

2.6. Le dodécaèdre et les pavages correspondants

Le dodécaèdre régulier¹¹ présente 12 faces en forme de pentagones réguliers, que l'on peut ensuite découper en cinq triangles isométriques autour du centre de ces pentagones. Leur projection sur la sphère donne le pavage noté F_{60}^2 (figure 36). Chacun des 60 triangles a des angles $\alpha = \beta = \pi/3$ et $\gamma = 2\pi/5$. Les 32 sommets sont entourés de 5γ pour 12 d'entre eux et de 6α pour les autres.

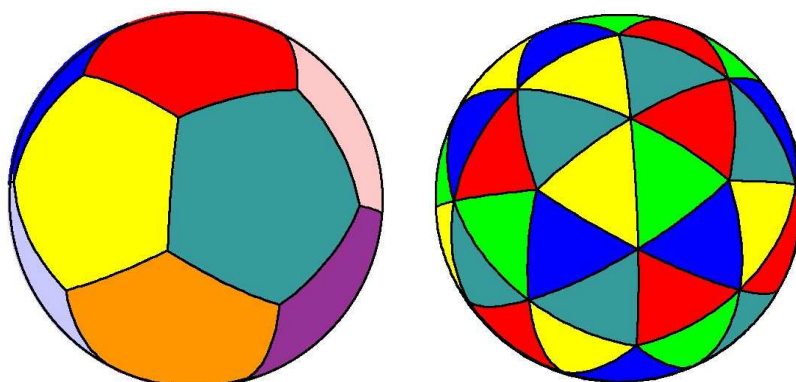


Figure 36 : A gauche, le pavage à base de pentagones réguliers, à droite la division des pentagones en cinq triangles donne le pavage F_{60}^2 .

A leur tour, les triangles peuvent chacun être divisés en trois autour de leurs centres, et cela redonne le pavage F_{120} . Il n'y a plus d'autres possibilités.

On en a fini avec les pavages par des triangles. A cette occasion, on a entrevu d'autres pavages, avec d'autres polygones sous-jacents comme des losanges, des carrés ou les pentagones. Mais pour de tels polygones à quatre ou à cinq côtés, leur classification exhaustive n'est pas (encore) connue. Avant d'en donner quelques exemples, nous allons voir qu'il est inutile de chercher à paver la sphère avec des hexagones ou des heptagones, car il n'en existe pas.

3. Au-delà des pentagones ?

Nous allons voir qu'au-delà des pentagones, aucune forme polygonale à n côtés, avec $n \geq 6$, ne peut paver la sphère. Pour le montrer, nous avons besoin de quelques propriétés relatives aux pavages polygonaux de la sphère.

¹¹ Pour construire le dodécaèdre régulier, la méthode la plus simple consiste à prendre les centres des triangles formant l'icosaèdre régulier. Ces centres sont les sommets du dodécaèdre, car celui-ci est le dual de l'icosaèdre.

3.1. Formule d'Euler

Considérons un pavage de la sphère, où F est le nombre de pavés (ou de faces), V le nombre de sommets et E le nombre d'arêtes. On dispose alors de la formule d'Euler : $V - E + F = 2$.

Pour démontrer cette formule, donnons-nous un pavage quelconque de la sphère par des polygones, ceux-ci ayant chacun un nombre quelconque de côtés. Notre objectif est de le reconstruire pas à pas. Commençons par prendre un seul sommet du pavage. On a alors $V = 1$, $E = 0$ et $F = 1$, la formule est vérifiée : $V - E + F = 2$. Puis continuons la reconstruction du pavage en suivant deux règles : soit on prend un nouveau sommet que l'on joint par une arête à un sommet déjà construit, soit on joint deux sommets déjà existants par une arête. Dans le premier cas, V et E augmentent de 1 et F ne change pas, $V - E + F$ ne change pas et la formule d'Euler reste valable. Dans le deuxième cas, V reste inchangé, E augmente de 1 et F aussi, $V - E + F$ ne change pas, la formule d'Euler reste valable. En pratiquant à chaque étape l'une ou l'autre de ces règles, le pavage est finalement reconstruit¹² et la formule d'Euler s'applique bien.

3.2. Formules sur les polygones à n côtés pavant la sphère

Supposons maintenant que les pavés sont tous des polygones à n côtés ($n \geq 3$). On a alors la relation $n F = 2 E$.

En effet, lorsqu'un pavé a n arêtes et qu'il y a F pavés, $n F$ est le nombre total d'arêtes du pavage, mais celles-ci sont comptées deux fois, puisque la même arête appartient à deux faces. D'où $n F = 2 E$.

D'autre part, supposons que les sommets ont des degrés i avec $i \geq 3$, V_i désignant le nombre de sommets de degré i (un sommet a i polygones accrochés à lui). Alors on a la relation :

$3 V_3 + 4 V_4 + 5 V_5 + \dots = 2 E$, avec $V = V_3 + V_4 + V_5 + \dots$, cette somme étant finie. Dans le cas particulier où les sommets ont tous le même degré p , la relation se simplifie en $p V = 2 E$.

En effet, à partir d'un sommet de degré i partent i arêtes. Comme il y a V sommets, cela donne $3 V_3 + 4 V_4 + 5 V_5 + \dots$ arêtes pour la pavage, mais là encore celles-ci sont comptées deux fois, puisqu'elles ont deux sommets en leurs extrémités, soit $3 V_3 + 4 V_4 + 5 V_5 + \dots = 2 E$.

¹² En cas de doute, il suffit de savoir que la pavage sur la sphère est un graphe planaire (les arêtes ne se coupent pas). Un graphe planaire, comme tout graphe connexe, admet un arbre couvrant : cet arbre (un graphe sans cycle) a pour sommets les sommets du graphe, et pour arêtes une partie de celles du graphe. On peut le construire en appliquant la première règle. Il suffit ensuite de construire les arêtes manquantes en appliquant la deuxième règle. Le graphe est entièrement construit.

Il existe une autre démonstration, complètement différente, de la formule d'Euler. On s'arrange d'abord pour faire une triangulation des polygones du pavage, de façon à n'avoir que des triangles. Cela ne change pas $V - E + F$ (car E et F augmentent de la même valeur, et V reste inchangé quand on passe d'un polygone aux triangles). Avec ce pavage par des triangles, on peut appliquer la formule de Girard : la somme des angles d'un triangle sphérique est égale à $\pi + S$, où S est l'aire du triangle. La somme de tous les angles des triangles est $2 \pi V$, puisqu'autour de chacun des V sommets il y a un angle 2π . La somme des aires des triangles est 4π , aire de la sphère. La sommation de la formule de Girard aux F faces triangulaires devient :

$2 \pi V = F\pi + 4\pi$, soit $V = F/2 + 2$. D'autre part, $3 F = 2 E$ (car $3 F$ est le nombre d'arêtes du pavage, celles-ci étant comptées deux fois). Alors $V - E + F = F/2 + 2 - 3 F/2 + F = 2$.

3.3. Conclusion

Nous sommes maintenant en mesure de prouver que s'il existe un pavage par des polygones à n côtés sur la sphère¹³, alors $n = 2, 3, 4$ ou 5 .

On a vu que $E = nF/2$. Avec la formule d'Euler $V = E - F + 2$, cela donne, en éliminant E :

$$V = (n/2 - 1)F + 2.$$

Avec $V = V_3 + V_4 + 5 V_5 + \dots$ et $3 V_3 + 4 V_4 + 5 V_5 + \dots = 2E$ ou encore $3 V_3 + 4 V_4 + 5 V_5 + \dots = nF$, l'égalité précédente devient :

$$\begin{aligned} V_3 + V_4 + 5 V_5 + \dots &= (n/2 - 1) (3 V_3 + 4 V_4 + 5 V_5 + \dots) / n + 2 \\ 2 n (V_3 + V_4 + 5 V_5 + \dots) &= (n - 2) (3 V_3 + 4 V_4 + 5 V_5 + \dots) + 4n \\ (n - 6) V_3 + (2n - 8) V_4 + (3n - 10) V_5 + (4n - 12) V_6 + \dots + 4n &= 0 \end{aligned}$$

Le terme $4n$ est toujours positif (et ≥ 12). L'égalité n'est possible que si certains termes sont négatifs. Or $n - 6 < 2n - 8 < 3n - 10 < \dots$. Pour $n \geq 6$, l'égalité est impossible puisque $4n$ est positif et que tous les autres termes sont positifs ou nuls. Les seules valeurs possibles de n sont $3, 4$ ou 5 .

Cas particulier des solides de Platon

Un polyèdre régulier convexe (ou solide de Platon) a des faces formées de polygones à n côtés, avec les mêmes longueurs de côtés et les mêmes angles. Ses sommets ont tous le même degré p et ils sont tous sur la même sphère, ce qui donne un pavage sphérique. On a alors la condition $1/n + 1/p > 1/2$.

La formule d'Euler $V - E + F = 2$, avec $nF = pV = 2E$, devient :

$$\begin{aligned} 2E/p - E + 2E/n &= 1/E \\ 1/p - 1/2 + 1/n &= 1/E \\ 1/p + 1/n &= 1/E + 1/2 > 1/2 \end{aligned}$$

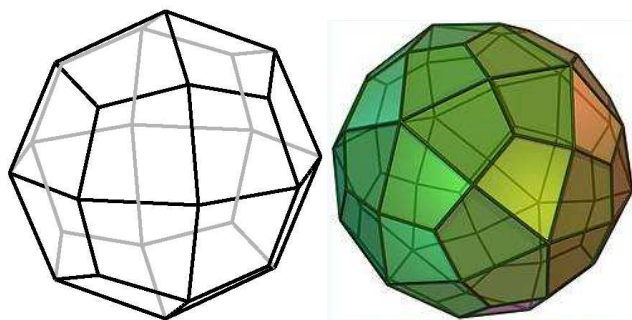
On vérifie alors qu'il n'existe que cinq couples possibles (n, p) , soit $(3, 3)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 3)$ et $(5, 3)$. Cela correspond aux cinq polyèdres réguliers de Platon connus : le tétraèdre, l'octaèdre, l'icosaèdre, le cube et le dodécaèdre. On vient de démontrer qu'il n'y en a pas d'autres.¹⁴

4. Pavage par des quadrilatères

On connaît déjà deux solides de Catalan dont les faces sont des quadrilatères plans, à savoir l'icositétraèdre trapézoïdal avec ses 24 quadrilatères et l'hexacontaèdre trapézoïdal avec ses 64 quadrilatères, en forme de cerfs-volants pour l'un comme pour l'autre. Par projection sur la sphère, on trouve deux pavages isoédriques par des pentagones (eux aussi plans) identiques.

¹³ Ce pavage peut être monoédrique ou pas.

¹⁴ En fait, la démonstration attribuée à Euclide est plus simple : la somme des angles d'un polygone régulier à n côtés est $(n - 2) \pi$, et un angle vaut $(n - 2) \pi/n$. En un sommet, où se rencontrent p polygones, la somme des angles est $p(n - 2) \pi/n$. Cette somme doit être inférieure à 2π pour que les faces ne soient pas coplanaires ou que l'on perde la convexité, soit $p(n - 2) \pi/n < 2\pi$, ou $p(n - 2) < 2n$ et cette contrainte sur n et p redonne les cinq solides de Platon, sans autre alternative.



À gauche l'icositétraèdre trapézoïdal, à droite l'hexacontaèdre trapézoïdal.

Passons maintenant au cas général. Un quadrilatère présente exactement sept formes différentes. En effet, écrivons les longueurs des côtés sous forme de lettres différentes si les longueurs sont différentes. On obtient alors des mots cycliques de quatre lettres :

aaaa (les côtés ont tous la même longueur)

aaab

aabb

abab

aabc

abac

abcd (les côtés sont tous de longueur différente)

Commençons par quelques considérations générales qui vont limiter la recherche de quadrilatères pouvant paver la sphère. Un premier résultat est dû à Y. Ueno et Y. Agaoka [UEN2001], développé ensuite par Y. Sakano et Y. Akama [AKA2013][SAK2015] :

Un pavage par des quadrilatères isométriques est tel que des sommets ont pour degré trois. Il s'ensuit que seuls quatre cas sont possibles parmi sept :

1) *aaaa*

2) *aaab*

3) *aabb*

4) *aabc*

Le pavé à quatre côtés a au moins deux côtés adjacents de même longueur.

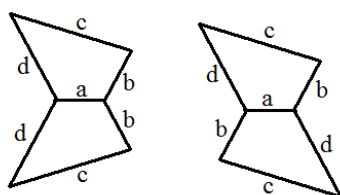
La démonstration reprend ce que nous avons vu plus généralement dans le *paragraphe 3*. Avec $V - E + F = 2$ et $E = 2F$, on en déduit $V = F + 2$. Avec $V = V_3 + V_4 + \dots$ et $3V_3 + 4V_4 + \dots = 2E = 4F$, on a :

$$4(V_3 + V_4 + \dots) = 4F + 8 = 3V_3 + 4V_4 + \dots + 8$$

$$V_3 = V_5 + 2V_6 + 3V_7 + \dots + 8.$$

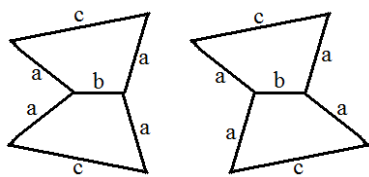
Donc $V_3 > 0$. Il existe des sommets ayant trois quadrilatères accrochés à lui. Cette contrainte élimine trois cas de quadrilatères :

- *abcd*



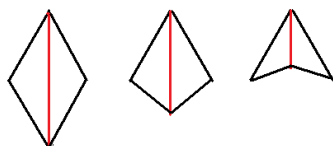
Supposons que l'on ait deux quadrilatères collés selon leur face *a*, avec ses deux cas possibles, comme indiqué ci-contre. Alors le troisième quadrilatère devrait avoir comme côtés adjacents *dd* ou *bb* ou *bd*, ce qui est impossible.

- *abab* et *abac*



Lorsque deux quadrilatères sont accolés suivant leur côté b , cela donne dans tous les cas de figure deux côtés adjacents aa pour le troisième quadrilatère, ce qui est impossible.

Il reste quatre cas possibles.

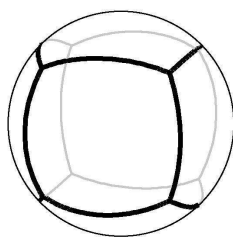


Le cas *aaaa* signifie que l'on a un losange, le cas *aabb* signifie que l'on a un cerf-volant ou une flèche (voir dessins à gauche). Dans ces deux cas, les quadrilatères peuvent être découpés en deux triangles isométriques (et isocèles dans le premier cas). On est alors sûr de trouver tous leurs pavages à partir de la classification exhaustive des pavages par des triangles.

Mais pour les deux autres cas, *aaab* et *aabc*, c'est plus compliqué.

Exercice 1

1) D'après ce que l'on a vu précédemment, quel est le pavage le plus simple obtenu avec un quadrilatère ? Vérifier dans ce cas la formule précédente donnant V_3 .



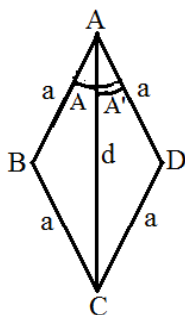
Il s'agit évidemment du pavage à partir du cube, qui donne six pavés carrés sur la sphère. La formule sur V_3 donne $V_3 \geq 8$. Dans le cas présent tous les sommets sont de degré 3 et l'on a bien $V_3 = 8$.

2) En s'inspirant des calculs précédents, trouver une formule donnant la somme des angles d'un quadrilatère pavant la sphère en fonction du nombre de faces F , et vérifier cette formule sur le pavage précédent.

Appelons s la somme des angles d'un quadrilatère sphérique pavant la sphère. La somme de tous les angles du pavage est $F s$. D'autre part, en chaque sommet la somme des angles est 2π , et la somme totale des angles est $2\pi V$, d'où $Fs = 2\pi V$, ou $V = Fs / (2\pi)$. Mais on a vu que $V = F + 2$. On en déduit que $s = 2\pi + 4\pi / F$. Pour le pavage précédent par des carrés, on a $F = 6$ et $s = 2\pi + 2\pi/3 = 8\pi/3$. Cela correspond bien aux carrés sphériques ayant 4 angles égaux à $2\pi/3$.

Exercice 2

1) Montrer qu'un losange sphérique, ayant par définition quatre côtés de même longueur, a ses angles opposés deux à deux égaux, avec comme bissectrices les diagonales du losange. Puis donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un quadrilatère sur la sphère soit un carré.



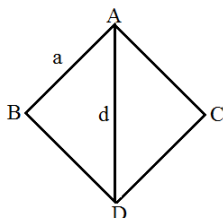
Un losange a ses quatre côtés de même longueur. On en déduit, grâce à la formule des sinus dans un triangle, qu'il a ses angles opposés égaux deux à deux. En effet, le triangle ABC est isocèle, d'où angle $A = \text{angle } C$ dans ce triangle, et de même le triangle ADC est isocèle et angle $A = \text{angle } C$ dans ce triangle. Finalement l'angle A du losange est égal à l'angle opposé C . Plus précisément dans ABC , $\sin a / \sin A = \sin d / \sin B$ (cf. figure ci-contre), et dans le triangle ADC , $\sin a / \sin A' = \sin d / \sin B$. Avec l'angle B égal à l'angle D , on en déduit $\sin A = \sin A'$, angle $A = \text{angle } A'$, la droite (AC) est la bissectrice de l'angle A du losange.

Un carré a ses quatre côtés de même longueur et ses quatre angles égaux. Il suffit même qu'il soit un losange avec deux angles successifs égaux.

2) Montrer que l'angle α d'un carré sphérique est strictement compris entre $\pi/2$ et π . Déterminer la longueur a d'un côté en fonction de l'angle α .

Un carré minuscule sur la sphère est quasiment plan. Cela implique que $\alpha > \pi/2$. Un carré le plus grand possible a ses sommets quasiment sur un grand cercle, donc $\alpha < \pi$.

Pour la longueur a du côté, plaçons-nous dans le triangle ABD et appliquons la formule :

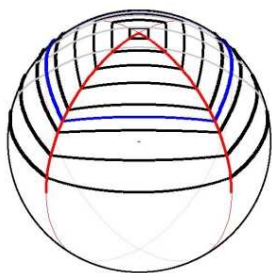


$$\cos(\alpha/2) = -\cos\alpha \cos(\alpha/2) + \sin\alpha \sin(\alpha/2) \cos a$$

$$\cos a = \frac{\cos(\alpha/2) + \cos(\alpha/2)\cos\alpha}{\sin(\alpha/2)\sin\alpha}$$

$$= \frac{\cos(\alpha/2)(1 + \cos\alpha)}{\sin(\alpha/2)\sin\alpha} = \frac{2\cos(\alpha/2)\cos^2(\alpha/2)}{2\sin(\alpha/2)\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)} = \frac{\cos^2(\alpha/2)}{\sin^2(\alpha/2)}$$

Finalement $a = \text{Arccos}(1 / \tan^2(\alpha/2))$.



La figure ci-contre donne l'exemple de quelques carrés centrés sur le pôle nord, celui en bleu correspondant au cube inscrit dans la sphère.

3) Combien existe-t-il de carrelages sur la sphère ? Par carrelage on entend le pavage de la sphère par des pavés carrés isométriques. Donner leur angle et leur longueur de côtés, ainsi que la longueur d de la diagonale.

Sachant qu'un carré se découpe en deux triangles isométriques, la classification exhaustive des pavages par des triangles montre que le seul pavage par des carrés est issu de la projection du cube sur la sphère. L'unique carrelage possible est formé de six carrés, avec $\alpha = 2\pi/3$ et $a = \text{Arccos}(1/3) \approx 1,231$.

Cela peut se vérifier par un autre moyen. Si un sommet du pavage avait un degré égal à 4 ou plus, on aurait $\alpha \leq \pi/2$, ce qui est impossible comme on l'a vu. Les sommets sont tous de degré 3, d'où $\alpha = 2\pi/3$ et l'on retrouve le cube.

Connaissant la longueur a , on en déduit d par la relation $\sin d / \sin(2\pi/3) = \sin a / \sin(\pi/3)$, d'où $\sin d = \sin a$. Si l'on avait $d = a$ le triangle ABD serait équilatéral, ce qui est impossible à cause des angles non égaux, donc $d = \pi - a \approx 1,911$.

4.1. Pavages par des losanges, cerfs-volants ou flèches

Il suffit de reprendre tous les types de pavages par des triangles, et de garder les cas où les triangles peuvent être accolés deux à deux pour donner des losanges, des cerfs-volants ou des flèches.

Partons de l'exemple précédent, avec le pavage par des carrés qui sont des losanges particuliers. On a vu que l'on pouvait découper chaque carré en six triangles rectangles, ce qui donnait le pavage F_{48} , ainsi que TF_{48} en tournant un hémisphère de 45° . En accolant les triangles deux à deux, on obtient des cerfs-volants, ce qui donne deux pavages (figure 37).

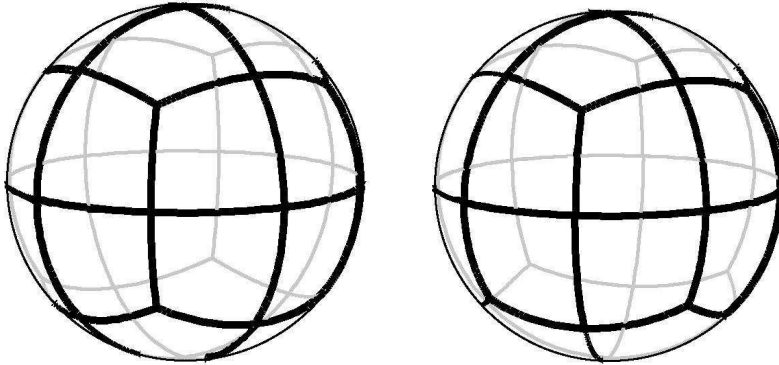


Figure 37 : Deux types de pavages par des cerfs-volants, le deuxième se déduisant du premier par rotation de 45° de l'hémisphère sud.

Maintenant, reprenons le pavage G_{4p} obtenu en coupant les $2p$ tranches sur la sphère par deux triangles isométriques quelconques.¹⁵ Il existe deux façons de les accoler, ce qui donne soit un pavage par des cerfs-volants, soit un pavage par des flèches. Dans le cas particulier où les triangles sont isocèles, les cerfs-volants deviennent des losanges (figure 38).

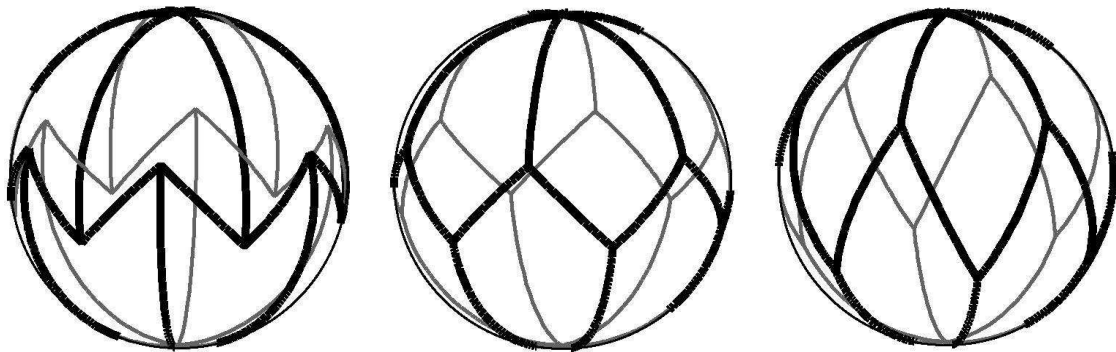


Figure 38 : A gauche pavage par $2p$ flèches ($2p = 12$ sur le dessin), au centre pavage par $2p$ cerfs-volants, à droite pavage par des losanges.

Passons ensuite au pavage TG_{8k+4} où l'on avait déjà vu apparaître des losanges. Cela nous donne un nouveau pavage par des losanges au nombre de $4k + 2$ (figure 39).

¹⁵ La valeur minimale de p est 3, ce qui donne 6 faces et 8 sommets. Cela correspond au cas minimal pour les pavages par des quadrilatères. On a vu en effet que $V_3 \geq 8$. Le nombre minimal de sommets de degré 3 est 8, et le nombre de sommets minimal est 8, quand ils sont tous de degré 3, ce qui donne $F = V - 2 = 6$.

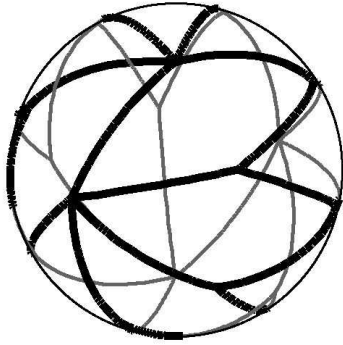


Figure 39 : Pavage déduit de TG_{8k+4} , ici TG_{28} avec $k = 3$, d'où 14 losanges.

Puis on arrive au pavage F_{24} issu de l'octaèdre, où l'on peut aussi accoler les triangles pour avoir des losanges (figure 40). Notons qu'il y a 6 sommets de degré 4 et 8 sommets de degré 3, ce qui correspond aux formules précédemment données : $V = F + 2$ et $V_3 = 8$.

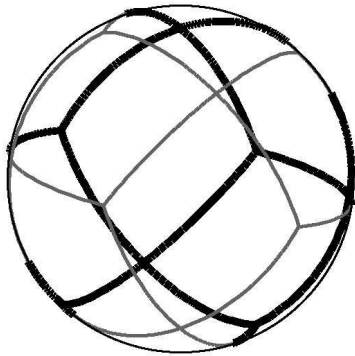


Figure 40 : Pavage par des losanges issu de F_{24} , avec 12 losanges d'angles $\pi/2$ et $2\pi/3$.

Il reste les pavages associés à l'icosaèdre, soit F_{60}^1 où apparaissent des losanges et F_{120} avec des cerfs-volants (figure 41).

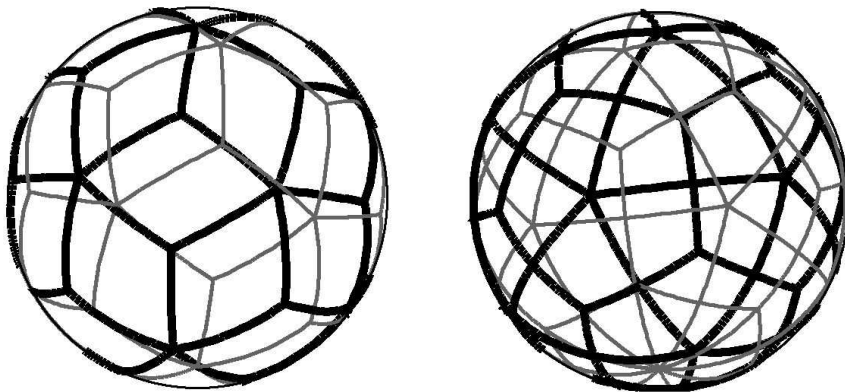


Figure 41 : A gauche pavage par 30 losanges, issu du pavage F_{60}^1 , à droite pavage par 30 cerfs-volants, issu de F_{120} .

A ce stade, on chercherait vainement tout autre pavage par des losanges, des cerfs-volants ou des flèches.

Il reste les pavages $aaab$ et $aabc$, beaucoup plus complexes, et toujours en cours d'étude par les chercheurs japonais et chinois. Nous en resterons donc là sur les pavages par des quadrilatères.

5. Pavage par des pentagones

Au départ, on connaît trois pavages par des pentagones identiques. D'abord celui obtenu à partir du dodécaèdre régulier, avec ses 12 faces en forme de pentagones réguliers (*cf. figure 36 ci-dessus*). Mais aussi deux pavages sphériques issus de deux solides de Catalan (*figure 46*). Il s'agit de l'icositétraèdre pentagonal (à 24 faces) et de l'hexacontaèdre pentagonal (à 60 faces). Leurs faces sont des pentagones de la forme a^3b^2 .

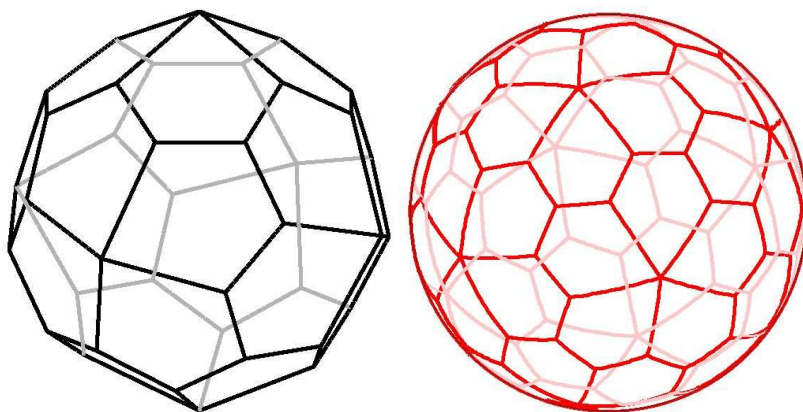


Figure 46 : Les deux solides de Catalan à faces pentagonales, l'un à 24 faces, l'autre avec 60 faces.

5.1. Le dodécaèdre déformé

Commençons par le plus simple, le dodécaèdre régulier. Ce cas correspond au nombre de faces minimal que peut avoir un pavage par des pentagones. En effet, reprenons la formule sur les sommets :

$$V_3 = 2 V_4 + 5 V_5 + \dots + 20$$

Le nombre minimal de sommets de degré 3 est 20, et cela se produit quand ils sont tous de degré 3. On a alors $V = 20$ et l'on en déduit, par la relation $3 F = 2 V - 4$, que $F = 12$.

Mais le pavage issu du dodécaèdre régulier est-il le seul à avoir 12 faces ? La réponse est non. En 2013, dans [GAO2013]¹⁶, une indication de construction est donnée. On part d'un cube et on coupe chaque face en deux parties identiques (*figure 42 à gauche*). On obtient alors des pentagones qui ont le défaut d'avoir un angle de 180° , que ce soit sur le cube ou sur sa projection sur la sphère (*figure 42 au centre*). En fait, il s'agit d'un pavage par des quadrilatères qui ne sont pas bord à bord.

Mais faisons subir des rotations aux étoiles à trois branches situées autour de 4 sommets du cube (*en bleu sur la figure 42*). Ces rotations ont toutes le même angle, avec des axes passant par ces 4 sommets. Dans ces conditions, les étoiles à trois branches situées autour des 4 autres sommets suivent le mouvement. Les longueurs de leurs branches varient mais elles restent toutes les mêmes. On obtient ainsi des pentagones identiques, de la forme a^2b^2c . Les deux angles entre les côtés égaux deux à deux sont égaux à $2\pi/3$. On vient de trouver une infinité de pavages possibles, caractérisés chacun par la longueur a d'un côté du pentagone et par l'angle de la rotation (*figure 43*).

¹⁶ Dans cet article, les auteurs trouvent cinq types de pavages possibles avec 12 faces, avec un type permettant une infinité de variations, celui obtenu avec les pentagones de la forme a^2b^2c comme sur les *figures 42 et 43*. Un an plus tard, dans [AKA2014], les auteurs montrent que les quatre autres formes ne peuvent exister que dans le cas exceptionnel du pavage à partir du dodécaèdre régulier. Finalement, tous les pavages avec 12 faces sont obtenus avec la méthode que nous expliquons ici.

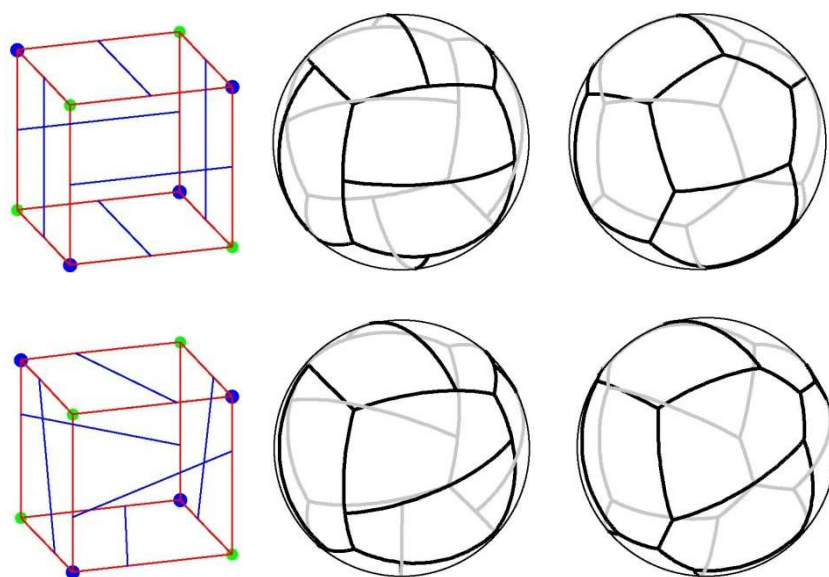


Figure 42 : De gauche à droite, le découpage du cube, puis sa projection sur la sphère circonscrite, et enfin le pavage pentagonal obtenu par rotations autour des sommets bleus. En haut, les sommets situés sur les arêtes du cube sont au milieu, en bas, elles sont au tiers.

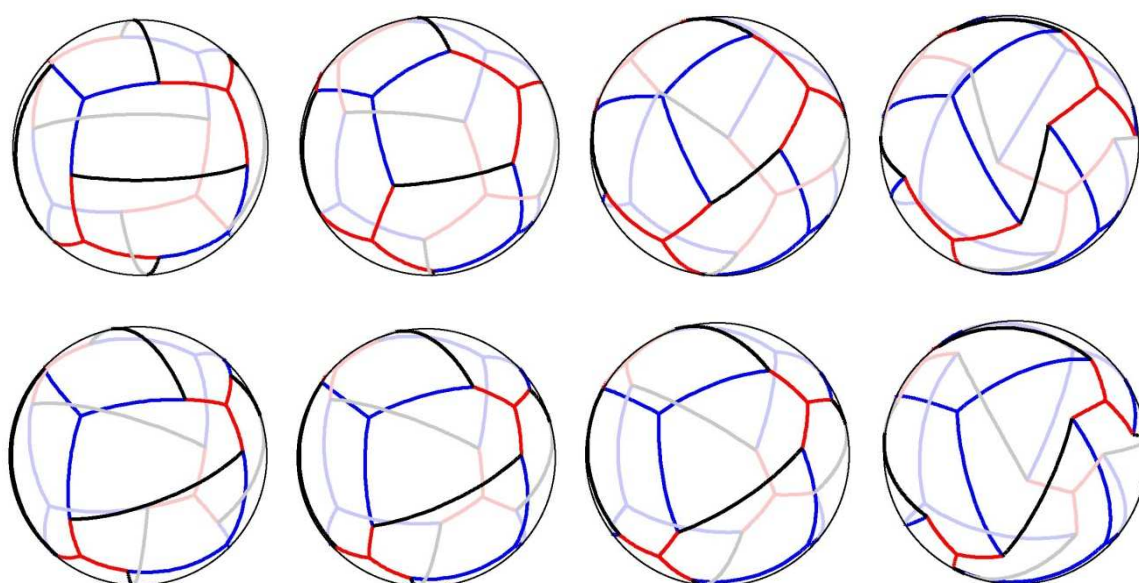


Figure 43 : De gauche à droite, augmentation des angles des rotations des étoiles à trois branches en rouge, celles qui conservent leur longueur. Les étoiles en bleu ont, elles, leurs longueurs qui augmentent. En haut on part d'un cube sphérique dont les côtés sont coupés en deux, en bas, on prend des points situés au tiers.

En ayant procédé de la sorte, on constate que les quatre sommets du cube autour desquels les rotations sont pratiquées forment un tétraèdre régulier. Cela donne une autre idée de construction. On commence par subdiviser en trois les faces du tétraèdre, en utilisant des points situés sur les arêtes dans une certaine proportion q donnée¹⁷, comme indiqué sur la figure 44. Après projection sur la sphère, on soumet les sommets du tétraèdre à des rotations de même angle, chacune autour d'une hauteur du tétraèdre. Les étoiles autour des sommets (en rouge sur la figure 45) conservent leur longueur, tandis que celles (en bleu) autour des centres voient leur longueur diminuer jusqu'à ce que l'angle de la rotation atteigne 90° , où toutes les arêtes du pavage ont même longueur, et où l'on

¹⁷ Lorsque la proportion sur les côtés du tétraèdre est q , celle obtenue après projection sur les côtés sphériques est q' , ce qui fait l'objet de l'exercice 3.

retrouve le dessin obtenu précédemment à partir du cube coupé en deux de la *figure 42 en haut*. Au-delà de 90° , les longueurs des arêtes bleues augmentent et le pentagone devient concave.

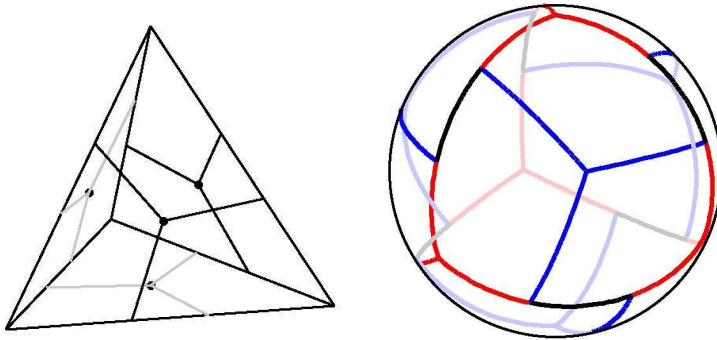


Figure 44 : A gauche, le tétraèdre régulier, et la subdivision de ses faces autour de leurs centres, ici pour $q \approx 0,38$ pour les points situés sur les arêtes. A droite, la projection du tétraèdre sur la sphère circonscrite, la proportion sur les arêtes sphériques devenant $q' = 0,333$.

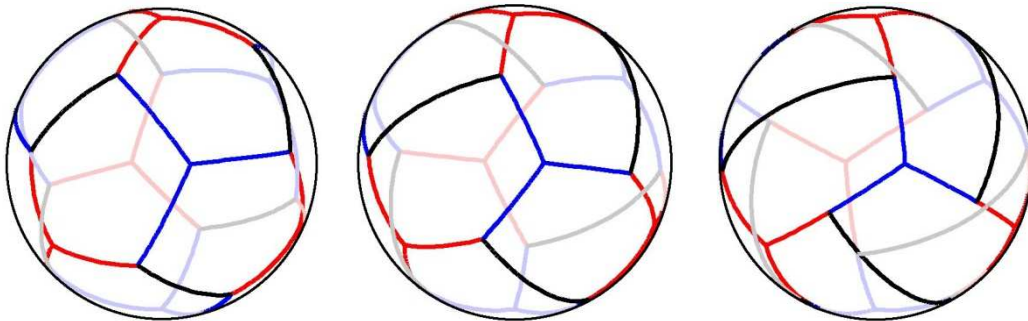
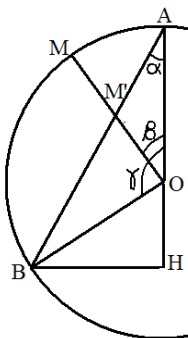


Figure 45 : Le pavage pentagonal, après des rotations de 20, 40 et 90 degrés autour des sommets du tétraèdre.

Exercice 3

Sur la sphère de rayon unité et de centre O , on considère un arc de grand cercle égal à l'angle au centre γ , avec la corde associée $[AB]$. Sur cet arc on place un point M tel que $\text{arc}AM = q \times \text{arc}AB$. Le rayon $[OM]$ coupe la corde $[AB]$ en M' , et l'on a $AM' = q' AB$. Déterminer q' en fonction de q .



Utilisons le dessin ci-contre. Sur l'axe (OA) orienté de O vers A , on a $HB = \sin \gamma$ et $\overline{OH} = \cos \gamma$, $HA = 1 - \cos \gamma$. On en déduit

$$\tan \alpha = HB / HA = \sin \gamma / (1 - \cos \gamma) = 2 \sin(\gamma/2) \cos(\gamma/2) / (2 \sin^2(\gamma/2)) \\ = \cotan(\gamma/2) \text{ et } \gamma/2 = \pi/2 - \alpha, \quad \alpha = \pi/2 - \gamma/2.$$

D'autre part $AB = 2 \sin(\gamma/2)$, et comme $\text{arc}AM = q \text{ arc}AB$, ou $\beta = q \gamma$.

Dans le triangle OAM' ,

$$AM' / \sin \beta = 1 / \sin(\pi - \alpha - \beta)$$

$$AM' / \sin \beta = 1 / \sin(\alpha + \beta).$$

Finalement

$$q' = AM' / AB$$

$$= \frac{\sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta) \sin(\gamma/2)} = \frac{\sin(q\gamma)}{2 \sin(\pi/2 - \gamma/2 + q\gamma) \sin(\gamma/2)}$$

$$= \frac{\sin(q\gamma)}{2 \sin(\pi/2 - \gamma/2 + q\gamma) \sin(\gamma/2)} = \frac{\sin(q\gamma)}{2 \cos(\gamma/2 - q\gamma) \sin(\gamma/2)}$$

Voici quelques exemples :

- Dans le cas particulier où M est au milieu de l'arc AB , et cela quel que soit γ , M' est aussi le milieu de $[AB]$, et l'on a bien $q' = q = 1/2$.
- Dans le cas du cube, où l'angle γ vaut $\pi/3$, on trouve, pour $q = 1/3$, $q' = 0,347$ et pour $q = 1/4$, $q' = 0,268$.
- Dans le cas du tétraèdre régulier, où l'angle γ vaut $\text{Arccos}(-1/3)$, on trouve, pour $q = 1/3$, $q' = 0,383$.
- Dans le cas de l'octaèdre régulier, où l'angle γ vaut $\pi/2$, on trouve, pour $q = 1/3$, $q' = 0,366$.

5.2. Les pavages par des pentagones de la forme a^2b^2c

La méthode de subdivision pentagonale, faite à partir du tétraèdre régulier pour donner un pavage pentagonal à 12 faces, est théorisée en 2018 dans [WAN2018], donnant lieu à la propriété suivante :

Si le pentagone du pavage est de la forme a^2b^2c , et sous réserve qu'aucun pavé n'ait tous ses sommets de degré 3, alors le pavage est une subdivision pentagonale d'un solide de Platon.

Cette propriété ne s'applique plus au tétraèdre régulier, dont le pavage associé a tous ses sommets de degré 3 mais ce n'est pas gênant puisque celui-ci est maintenant parfaitement connu. Et comme la subdivision pentagonale est la même pour les solides de Platon deux l'un de l'autre, il reste à étudier le cas de l'octaèdre régulier (dual du cube) et celui de l'icosaèdre régulier (dual du dodécaèdre régulier).

Ce qu'on obtient à partir de l'octaèdre régulier est indiqué sur la *figure 46*. On trouve encore une infinité de pavages à base de pentagones de la forme a^2b^2c , avec un nombre de faces égal à 24. Précisons qu'un des angles entre les côtés égaux vaut 90° , et que l'autre vaut $2\pi/3$.

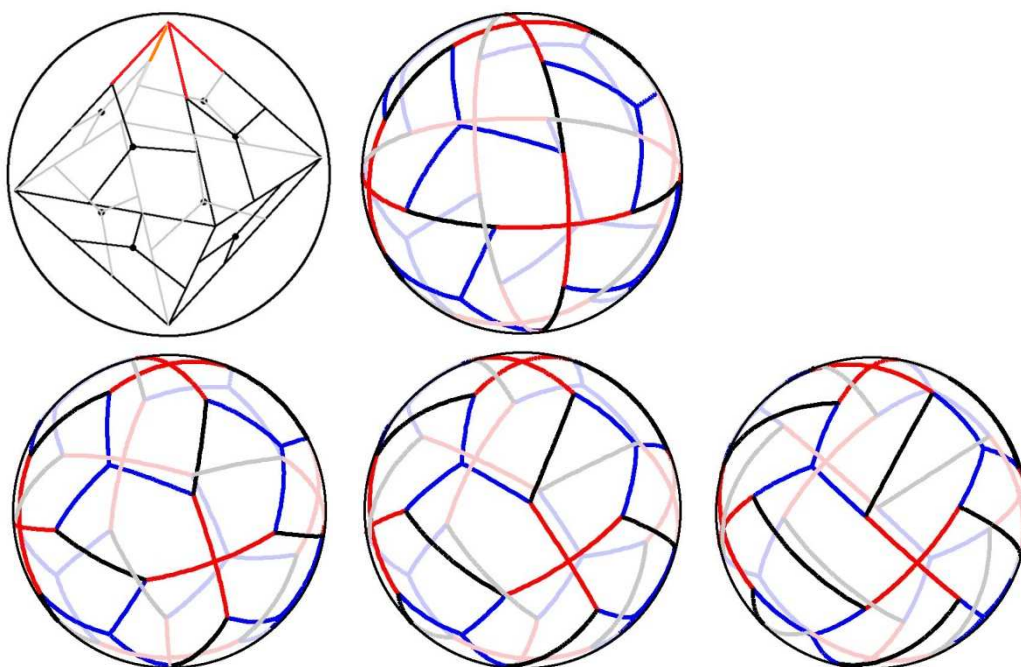
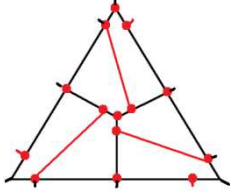


Figure 46 : En haut l'octaèdre régulier avec ses subdivisions pentagonales, et sa projection sur la sphère. En bas, les pavages pentagonaux obtenus après rotation des étoiles à quatre branches (en rouge) d'angles 15, 30 et 45 degrés. Dans ce dernier cas, il s'agit plutôt d'un pavage par 24 rectangles qui ne sont pas bord à bord.

On ferait de même à partir de l'icosaèdre régulier, ce qui donne un pavage à 60 faces, avec des pentagones de la forme a^2b^2c .

5.3. La méthode de la double subdivision pentagonale

La méthode de subdivision pentagonale précédente permettait de découper un triangle équilatéral en trois pentagones ayant deux de leurs côtés alignés.



Il existe une autre façon d'agir : on projette le centre du triangle équilatéral sur ses trois côtés, ce qui donne trois quadrilatères identiques, puis on les coupe en deux de façon à obtenir six pentagones avec deux de leurs côtés alignés, comme indiqué sur la figure ci-contre. Cela s'appelle la double subdivision pentagonale.

Dans [WAN2018] se trouve ce théorème : *Si le pentagone a une combinaison de côtés de la forme a^3bc (a, b, c distincts), et sous réserve qu'aucun pavé n'ait tous ses sommets de degré 3, alors le pavage correspond à une double subdivision pentagonale d'un solide de Platon.*

Comme la subdivision ne change pas si l'on remplace un polyèdre par son dual, il suffit d'appliquer ce théorème au tétraèdre régulier, à l'octaèdre régulier et à l'icosaèdre régulier. Nous allons traiter précisément le cas du tétraèdre régulier, même si l'on constate que le pentagone est de la forme a^3b^2 et non a^3bc , ce qui l'exclut du théorème, mais la méthode reste la même dans tous les cas.

Rappelons que nous partons de pseudo-pentagones plans, qui ne sont même pas isométriques, ceux de la figure ci-dessus. Nous allons voir, par projection sur la sphère, comment obtenir de vrais pentagones, tous isométriques, et de la forme a^3bc . Commençons par reprendre le graphe associé au découpage d'une face triangulaire. Il peut aussi bien s'appliquer à une face plane qu'à une face sphérique. Jusqu'ici aucune contrainte sur les arêtes ou sur les angles n'est prise en compte. Puis cherchons à y intégrer les six pentagones de la forme a^3bc , avec leurs sommets numérotés de 0 à 4, les trois côtés a allant de 1 à 4, le côté b étant 01 et le côté c 40 (figure 47 à gauche). On constate que c'est possible, y compris de part et d'autre des bordures (figure 47 à droite)

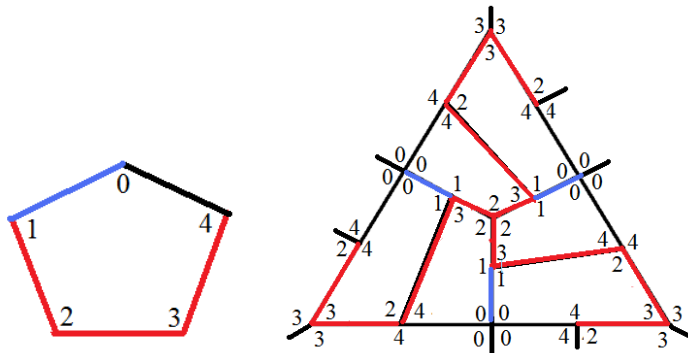


Figure 47 : Le pentagone a^3bc , et le pavage qu'il forme sur une face triangulaire, y compris de l'autre côté des bordures.

Des contraintes sur les angles apparaissent. D'abord $3 \text{ angle}3 = 2\pi$ pour le tétraèdre projeté sur la sphère (pour l'octaèdre on aurait $4 \text{ angle}3 = 2\pi$, et pour l'icosaèdre $5 \text{ angle}3 = 2\pi$).

$\text{angle}3 = 2\pi/3$. On a aussi ;

$4 \text{ angle}0 = 2\pi, \text{angle}0 = \pi/2$

$2 \text{ angle}1 + \text{angle}3 = 2\pi, \text{angle}1 = 2\pi/3$

$\text{angle}2 + 2 \text{ angle}4 = 2\pi$, et somme des 5 angles $= 3\pi + \pi/6$, d'où $\text{angle}2 = \text{angle}4 = 2\pi/3$

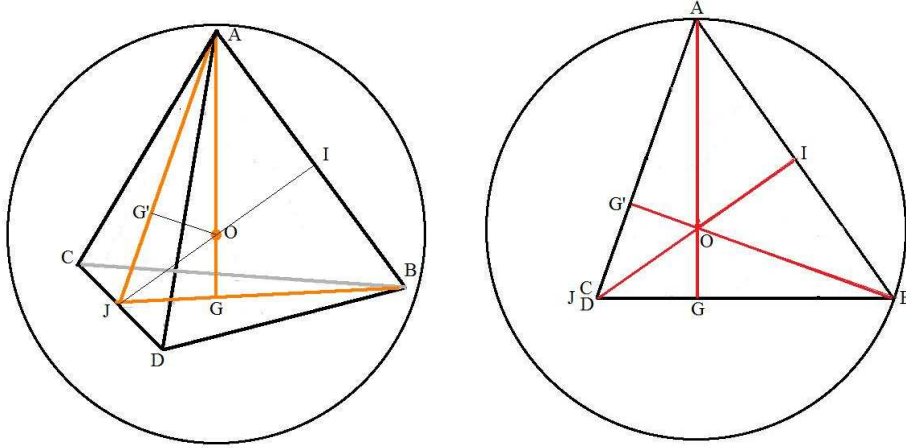
De part et d'autre du sommet 0, avec son angle droit, sont disposés 4 angles tous égaux, ce qui impose que le pentagone présente un axe de symétrie, d'où $b = c$.

Nous allons procéder à la fabrication correspondante du pavage sur la sphère sous forme de l'exercice suivant.

Exercice 4

Considérons le tétraèdre régulier $ABCD$ inscrit dans la sphère de centre O et de rayon unité

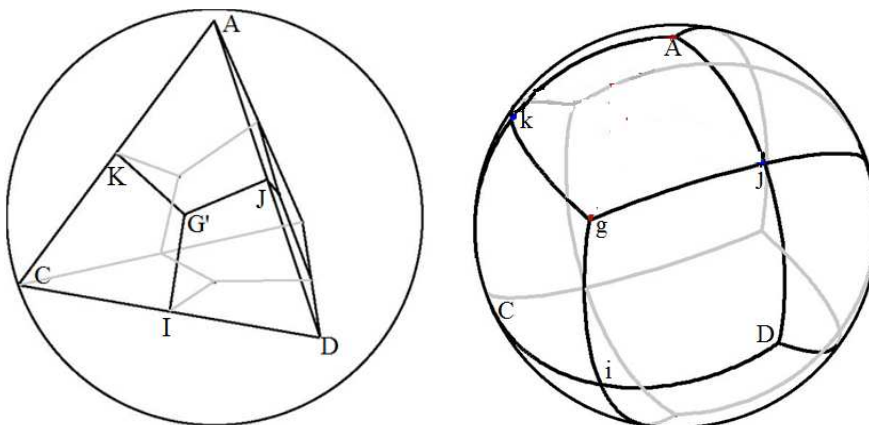
1) Calculer la longueur c de ses côtés, ainsi que les angles AOB et AOG' , G' étant la projection de O sur la face ACD .



On sait que O , comme isobarycentre, est aux $3/4$ de la hauteur $[AG]$ à partir du sommet A , avec G qui est le centre de gravité de la face BCD . Plaçons-nous dans le plan médiateur AJD (voir figure ci-dessus). Dans le triangle rectangle AGB , avec $AG = 4/3$, $GB = (2/3) c\sqrt{3}/2 = c/\sqrt{3}$, et $AB = c$, $c^2 = 16/9 + c^2/3$, d'où $c^2 = 8/3$, et $c = 2\sqrt{2}/\sqrt{3}$.¹⁸ En considérant le cercle de centre O et de rayon 1 comme le cercle trigonométrique avec pour axe des x l'axe allant de O vers A , l'angle AOB a pour cosinus $-OG = -1/3$, $\text{angle}(AOB) = \text{Arccos}(-1/3)$.

D'autre part, le triangle AJB est isocèle, avec O qui se projette au centre de gravité G' de la face ACD tout comme G est celui de la face BCD . Les points G et G' sont symétriques par rapport à (JI) et $OG' = OG = 1/3$. D'où $\cos(AOG') = 1/3$, et $\text{angle}(AOG') = \text{Arccos}(1/3)$.

2) Prenons par exemple la face ACD de centre G' . Par projection sur la sphère circonscrite, A , C , D restent fixes, le centre G' devient g , et les milieux des arêtes deviennent i , j , k milieux des arcs correspondants. Montrer que les trois quadrilatères qui découpent la face en trois forment sur la sphère des losanges isométriques dont on précisera les angles.



¹⁸ Accessoirement, pour la programmation, les coordonnées des points $ABCD$ sont, en prenant le repère de centre G ayant (GB) comme axe des x et (GA) comme axe des z : $A(0, 0, 1)$, $B(2\sqrt{2}/3, 0, -1/3)$, $C(-\sqrt{2}/3, \sqrt{2}/\sqrt{3}, -1/3)$, $D(-\sqrt{2}/3, -\sqrt{2}/\sqrt{3}, -1/3)$.

Les trois quadrilatères projetés sur la sphère sont isométriques. Il s'agit de montrer que leurs quatre côtés ont même longueur.

On a vu que l'arc AC mesure $\arccos(-1/3)$. Les arcs Ak et Aj mesurent $\alpha = (1/2)\arccos(-1/3)$, soit $2\alpha = \arccos(-1/3)$, $\cos(2\alpha) = -1/3$, $2\cos^2\alpha - 1 = -1/3$, $\cos^2\alpha = 1/3$, $1 + \tan^2\alpha = 3$, $\tan^2\alpha = 2$, $\tan\alpha = \sqrt{2}$.

Les arcs gj et gk ont aussi la même longueur, à savoir l'angle Ogk ou encore $OG'K$ (voir figure ci-dessus). On sait que $OG' = 1/3$. D'autre part $G'K = G'I = (1/3) \cdot \sqrt{3}/2 = \sqrt{2}/3$. Comme (OG') est perpendiculaire à la face ACD , le triangle $OG'K$ est rectangle : $\tan(OG'K) = G'K / OG' = \sqrt{2}$. Les deux arcs gj et gk ont la même longueur que Ak et Aj . On obtient bien un losange. Leurs angles opposés deux à deux sont égaux, et ils valent $2\pi/3$ et $\pi/2$.

3) Nous procédons maintenant à la deuxième subdivision. En reprenant la figure 47, on veut aller de A vers g sur la sphère suivant la ligne brisée $ASTg$ formée de trois arcs de longueur a , avec deux angles intermédiaires de $2\pi/3$. Déterminer une valeur approchée de a .

A cause des longueurs et des angles égaux, les arcs Ag et ST se coupent en leur milieu U qui est le centre du losange, point d'intersection des diagonales (en vert sur la figure 48). Celles-ci se coupent en leur milieu (et sont perpendiculaires). Dans le triangle ASU , dont les côtés ont pour longueur a , $a/2$, $\arccos(AOB')/2 = (1/2)\arccos(1/3)$, et dont on connaît l'angle S égal à $2\pi/3$, appliquons la formule des cosinus :

$$\cos((1/2)\arccos(1/3)) = \cos a \cos(a/2) + \sin a \sin(a/2) \cos(2\pi/3)$$

$$\cos a \cos \frac{a}{2} - \frac{1}{2} \sin a \sin \left(\frac{a}{2}\right) = \cos\left(\frac{1}{2}\arccos \frac{1}{3}\right)$$

$$(2\cos^2(a/2) - 1)\cos(a/2) - \sin^2(a/2)\cos(a/2) = 0,8165$$

$$3\cos^3(a/2) - 2\cos(a/2) = 0,8165$$

On en déduit une valeur approchée de a : $a = 0,467$.

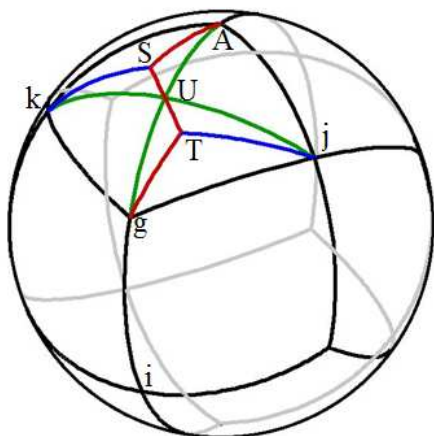


Figure 48 : La ligne brisée $ASTg$ (en rouge) avec ses trois segments de longueur a .

4) L'arc AUg forme une partie de méridien sur la sphère (en considérant A comme le pôle nord). Déterminer l'angle SAU , et en déduire la longueur de l'arc $b = SK$ (en bleu sur la figure 48).

Dans ASU , appliquons à nouveau la formule des cosinus :

$$\cos(a/2) = \cos(AU)\cos(a) + \sin(AU)\sin(a)\cos(SAU)$$

$$\cos(SAU) = \frac{\cos(a/2) - \cos((1/2)\arccos(1/3))\cos(a)}{\sin((1/2)\arccos(1/3))\sin(a)} \approx 0,938$$

d'où $\text{angle} SAU \approx 0,354$.

Plaçons-nous maintenant dans le triangle AkS , où l'angle en A vaut $\pi/3 - \text{angle} SAU \approx 0,693$ et $\text{arc} Ak = (1/2)\arccos(-1/3) \approx 0,955$. Par la formule des sinus :

$$\frac{\sin(0,693)}{\sin b} = \frac{\sin(0,955)}{\sin(2\pi/3)}, \text{ d'où } b \approx 0,745.$$

5) En déduire la construction du pavage.

A partir de l'arc AS de longueur a , on construit l'étoile à trois branches autour de A , puisque l'angle en A des pentagones vaut $2\pi/3$, et l'on fait de même à partir de l'arc gT autour de g . Puis à partir de l'arc kS de longueur b , on construit aussi l'étoile à quatre branches autour de k , et de même autour de j . Et ainsi de suite de proche en proche jusqu'au remplissage des 12 losanges. On trouve finalement le pavage de la *figure 49*, avec ses 24 pentagones isométriques. Précisons que ce pavage obtenu par double subdivision est unique, à la différence de ce que l'on trouvait par simple subdivision.

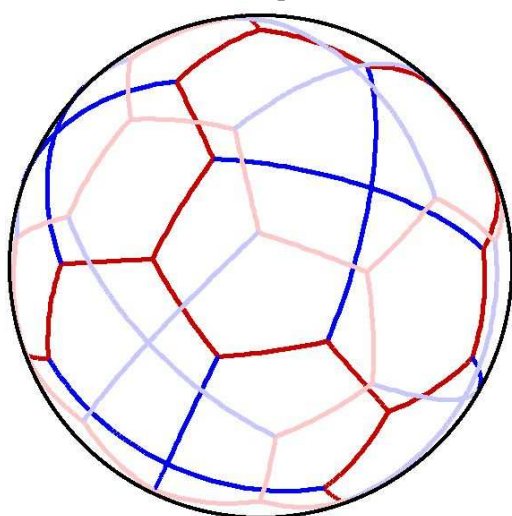


Figure 49 : Le pavage pentagonal final, avec ses pentagones de la forme a^3b^2 ayant un angle droit et quatre angles de $2\pi/3$.

Ce que l'on a fait à partir du tétraèdre, on peut aussi le faire à partir de l'octaèdre régulier avec 48 pentagones, et de l'icosaèdre régulier avec 120 pentagones, mais les calculs sont plus complexes.

Cela ne clôt pas le sujet des pavages pentagonaux. Par exemple, nous n'avons pas encore retrouvé les deux solides de Catalan à faces pentagonales, de la forme a^3b^2 . Le sujet est encore en cours d'investigation par les chercheurs chinois et japonais à l'heure qu'il est, en 2018. Nous nous contenterons pour conclure de donner quelques résultats généraux sur les pavages pentagonaux.

5.4. Quelques résultats sur les pavages pentagonaux

- Somme des cinq angles = $3\pi + 4\pi/F$.
- $V_3 = 20 + V_4 + 2V_5 + 3V_6 + \dots$ (la plupart des sommets sont de degré 3).
- $F/2 = 6 + V_4 + 2V_5 + 3V_6 + \dots$ (F est pair et ≥ 12).
- Il existe au moins un pavé avec 4 sommets de degré 3, et le 5^e de degré 3, 4 ou 5.
- Il existe six configurations possibles pour les arêtes d'un pentagone : a^2b^2c , $ababc$, a^3bc , a^3b^2 , a^4b , a^5 .

Bibliographie

[AKA2012-2013] Y. Akama, K. Nakamura, *Classification of spherical tilings by congruent quadrangles over pseudo-double wheels*, *Hiroshima Math. J.*, 43, 2012 et 2013.

[AKA2014] Y. Akama, M. Yan, *On deformed dodecahedron tiling*, 2014 (sur Internet).

[CHE2018] K.Y. Cheuk, H.M. Cheung, M. Yan, *Tilings of the Sphere by Congruent Pentagons I*, 2018 (Internet).

[DAV1967] H.L. Davies, *Packings of spherical triangles and tetrahedra*, *Proceedings of the Colloquium on Convexity*, Kobenhavns Univ. Math. Inst., Copenhagen, 1967.

[GAO2013] H. Gao, N. Shi, M. Yan, *Spherical tiling by 12 congruent pentagons*, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 120, 2013.

[GRU1981] B. Grünbaum, G.C. Shephard, *Spherical tilings with transitivity properties*, in *The geometric vein*, Springer, 1981.

[SAK2015] Y. Sakano, Y. Akama, *Anisohedral spherical triangles and classification of spherical tilings by congruent kites, darts and rhombi*, *Hiroshima Math. J.*, 45, 2015.

[SOM23] D.M.Y. Sommerville, *Division of space by congruent triangles and tetrahedra*, *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, 43, 1923.

[UEN2001] T. Ueno, Y. Agaoka, *Examples of spherical tilings by congruent quadrangles*, 2001.

[UEN2002] T. Ueno, Y. Agaoka, *Classification of tilings of the 2-dimensional sphere by congruent triangles*, *Hiroshima Math. J.*, 2002.

[WAN2018] E. Wang, M. Yan, *Tilings of Sphere by Congruent Pentagons II*, 2018.

[YAN2013] M. Yan, *Combinatorial tilings of the sphere by pentagons*, *Elec. J. of Combi.* 20, 2013.

***** Sur mon site pierreaudibert.fr :

- *Géométrie 3d*, dans *Enseignements/Cours graphisme et géométrie*.
(ou comment programmer facilement des formes sphériques en trois dimensions, les programmes étant faits en langage C (codeblocks) avec la bibliothèque graphique SDL)
- *Rotation en trois dimensions*, dans *Travaux complémentaires/Graphisme et géométrie*.
(pour disposer éventuellement de la matrice de rotation dans un contexte quelconque)
- *Formule de Burnside et cube*, dans *Travaux complémentaires/Graphisme et géométrie*.
(pour connaître le nombre de façons de placer une diagonale sur les faces carrées d'un cube)
- *Géométrie sphérique : plus courts chemins, théorème de Girard, relations trigonométriques, isométries de la sphère*, dans *Travaux complémentaires/Graphisme et géométrie*.
(pour disposer des rudiments essentiels sur la géométrie sphérique)
- *Tétraèdres équi-faciaux ou disphénoïdes*, dans *Travaux complémentaires/Graphisme et géométrie*.

- *Solides de Platon, solides d'Archimède, solides de Catalan, dans Travaux complémentaires/Graphisme et géométrie.*

(pour savoir comment sont construits les 13 solides de Catalan).

- *Pavage du plan avec un pavé polygonal convexe ou concave, dans Géométrie des pavages.*

(pour pouvoir comparer ce qui se passe dans un plan avec les pavages sur la sphère).

- *La géode, polyèdre proche de la sphère.*

(Pour vérifier que le découpage en de multiples triangles de la géode ne donne en fait ni des triangles équilatéraux en général, ni des triangles isométriques. On a vu en effet que le seul pavage à base de carrés isométriques compte seulement 6 carrés, et que ceux à base de triangles équilatéraux isométriques en comptent 4 (avec trois angles de $2\pi/3$) ou 8 (avec trois angles droits) ou 20 (avec des angles de $2\pi/5$), pas plus. Comme le constatait A. Badoureau en 1880 : « *Les divisions infinies de la sphère n'existent pas* », sous-entendu divisions en petits carrés, petits triangles ou petits hexagones isométriques, à la différence de ce qui se passe en géométrie plane et de ce que disait J. Gergonne à propos de la sphère vers 1815).