Fakultät Informatik

FORSCHUNGSAUFGABE:
QUANTITATIVE ENTSCHEIDUNGSLEHRE

Die N_{out}-Matrix

im Studiengang

Master - Wirtschaftsinformatik (Online)

vorgelegt von: Kevin André Bobzien
70248333

Prüfer: Prof. Dr. Torsten Sander

Abgabedatum: 25.08.2021

Ostfalia Hochschule für angewandte Wissenschaften
Fakultät Informatik

Inhalt

Aufgabenstellung

Mit dieser Forschungsaufgabe sollen Sie lernen, wie man mit Computerhilfe explorativ neue Erkenntnisse gewinnen, diese als Vermutungen festhalten und idealerweise dann stringent logisch beweisen kann. Als Forschungsgegenstand betrachten wir gerichtete Graphen.

Ist D ein gerichteter Graph D, so bezeichnen wir nachfolgend mit $A(D)$ dessen Adjazenzmatrix. Wir definieren ferner die Matrix $N_{out}(D) = A(D)A(D)^T$.

1. Teilaufgabe a)

„Begründen Sie, warum $N_{\mathrm{out}}(D)$ stets eine symmetrische, ganzzahlige Matrix ist."

Mit Hilfe der Adjazenzmatrix kann man ablesen, welche Knoten eines Graphen durch eine Kante verbunden sind. Da die Adjazenzmatrix für jeden Knoten eine Zeile und eine Spalte hat ergibt sich eine $n \times n$-Matrix, wenn man den Fall für n Knoten betrachtet.

$N_{out}(D)$ ist symmetrisch. Das kommt daher, dass eine Matrix multipliziert mit Ihrer transponierten Matrix stets symmetrisch ist.

Des Weiteren ist $N_{out}(D)$ stets ganzzahlig. Wir verwenden die „0" dafür, dass keine Kantenverbindung zwischen zwei Knotenpunkten besteht und die „1" dafür, dass eine Verbindung zwischen zwei Knotenpunkten besteht. Daraus resultiert, dass bei der Multiplikation und Addition von „1" und „0" nur eine Matrix aus ganzzahligen Zahlen entstehen kann.

Somit ist die N_{out} -Matrix stets symmetrisch und ganzzahlig.

2. Teilaufgabe b)

„Wenn $\mathrm{n_{ij}}$ der Eintrag an der Position $(i,)$ (Zeile i, Spalte j) der Matrix $\mathrm{N_{out}}(D)$ ist, was sagt sein Zahlenwert über das Verhältnis der Ecken Nr.i und j im zugehörigen Graphen D aus?"

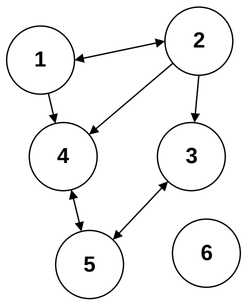
Wenn i=j ist, kann man den Eckengrad einer Ecke in der Diagonale ablesen.

N_{out}-Matrix Beispiel: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ecke „1" hat den Grad 2 - Es existieren 2 Kantenverbindungen zu anderen Ecken.

Ecke „2" hat den Grad 3 - Es existieren 3 Kantenverbindungen zu anderen Ecken usw.

n_{ij} allgemein sagt aus wie viele benachbarte Ecken i und j gemeinsam haben. So haben Ecke „5“ und „2“ genau 2 gleiche Ecken, nämliche Ecke „3“ und Ecke „4“. Analog dazu Ecke „5“ und „2“ ebenfalls. Deshalb ist die Matrix auch symmetrisch.



3. Teilaufgabe c)

„Unter einem Zickzackweg in D verstehen wir einen gerichteten Weg, der mit einer Kante in Wegrichtung beginnt, dann gegen die Wegrichtung usw. und am Ende mit einer Kante gegen die Wegrichtung abschließt. Ein Zickzackweg hat also immer eine gerade Anzahl an Kanten. Schreiben Sie ein Computerprogramm, das zu einer gegebenen Adjazenzmatrix und einer Startecke sämtliche Ecken ermitteln kann, die auf Zickzackwegen von der Startecke aus erreichbar sind.“

Die Teilaufgabe c) wurde als Computerprogramm umgesetzt und gehört zum Anhang dieser Forschungsaufgabe.

4. Teilaufgabe d)

„Verifizieren Sie die korrekte Funktionsweise Ihres Programms anhand einiger selbstgewählter Graphen. Ermitteln Sie zu jedem Testgraphen für jede einzelne Ecke x die Menge $Z(x)$ der per Zickzackweg erreichbaren Ecken. Was fällt auf, wenn Sie sämtliche für einen Graphen ermittelten Mengen vergleichen? Formulieren Sie eine entsprechende Vermutung und beweisen Sie diese.“

Die Vermutung beruht auf den gewählten Testgraphen, welche im Anhang zu finden sind. Bei den Zickzackwegmengen $Z(x)$ lassen sich die Mengen in Klassen unterscheiden. Zum einen haben wir die Klasse von Mengen bei denen die Zickzackwegmenge leer ist, d.h. keine Ecke per Zickzackweg erreichbar ist und die Klasse von Mengen bei denen jede Ecke bis auf die Ecken, welche eine leere Zickzackwegmenge aufweisen, erreichbar sind.

5. Teilaufgabe e)

„Offenkundig hängt die Gestalt der Adjazenzmatrix von der für D gewählten Eckennummerierung ab. Da eine Umnummerierung der Ecken den Graphen ja nicht strukturell verändert, können wir dies nutzen, um eine uns möglichst zweckdienliche Darstellung der Adjazenzmatrix bzw. daraus abgeleiteter Matrizen zu erhalten. Führen Sie Ihre Erkenntnisse aus b) und d) zusammen, so dass Sie für jeden gegebenen Digraphen D eine passende Eckennummerierung herleiten könnten, für die die Matrix $N_{out}(D)$ eine Blockdiagonalgestalt annimmt. Eine solche Gestalt liegt vor, wenn die Matrix sinngemäß aus einer Reihe von quadratischen Blöcken besteht, die entlang ihrer Hauptdiagonalen angeordnet sind (alle Einträge außerhalb der Blöcke sind Null). Beschreiben Sie Ihr Verfahren präzise, begründen Sie dessen Korrektheit und Illustrieren Sie dies mit Hilfe einiger aussagekräftiger Beispiele.“

Zur Herleitung der Blockdiagonalgestalt habe ich alle Ecken deren Menge Z(x)=∅ ist an die letzten Stellen der Nummerierung gesetzt. Daraus resultiert für jeden Graphen D die Blockdiagonalgestalt.

Im Beispiel 1 (siehe Anhang „Bsp. 1 Teilaufgabe d)“, sowie Anhang „Bsp. 1 Teilaufgabe e)“) wurde durch Eckenumnummerierung die Ecke „2“ mit der Ecke „7“ getauscht und die Ecke „4“ mit der Ecke „6“ getauscht. Dadurch ergab sich in der N_{out}-Matrix die Blockdiagonalgestalt in Form eines 5x5 Blocks und zwei Einzelblöcken (siehe farbige Markierung innerhalb der Matrix im Bsp. 1 Teilaufgabe e)).

Selbiges Prinzip habe ich die Beispiele 2-7 angewandt und so die Blockdiagonalgestalt erzeugt.

Anhang

Beispiele/Testgraphen zu Teilaufgabe d)

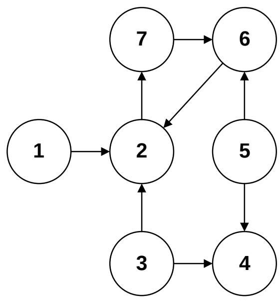
<u>Bsp. 1:</u>

Z(1) = {1,3,5,6,7} **Z(2)** = ∅ **Z(3)** = {1,3,5,6,7} **Z(4)** = ∅

Z(5) = {1,3,5,6,7} **Z(6)** = {1,3,5,6,7} **Z(7)** = {1,3,5,6,7}

$$A(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A(D)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N_{out}(D) = A(D) \cdot A(D)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

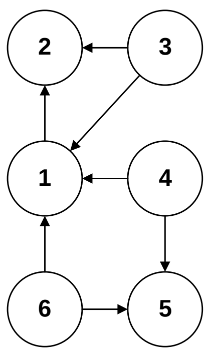


<u>Bsp. 2:</u>

Z(1) = {1,3,4,6} **Z(2)** = ∅ **Z(3)** = {1,3,4,6} **Z(4)** = {1,3,4,6}

Z(5) = ∅ **Z(6)** = {1,3,4,6}

$$A(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} A(D)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$N_{out}(D) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

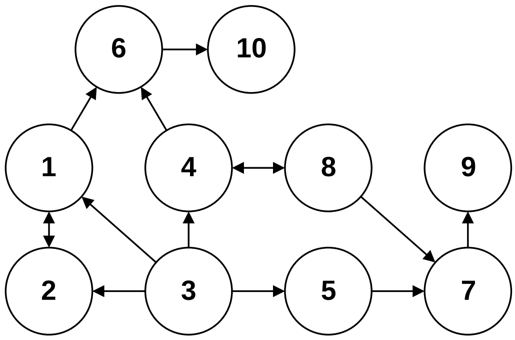
<u>Bsp. 3:</u>

Z(1) = {1,2,3,4,5,8} **Z(2)** = {1,2,3,4,5,8} **Z(3)** = {1,2,3,4,5,8} **Z(4)** = {1,2,3,4,5,8}

Z(5) = {1,2,3,4,5,8} **Z(6)** = ∅ **Z(7)** = ∅ **Z(8)** = {1,2,3,4,5,8}

Z(9) = ∅ **Z(10)** = ∅

$$A(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$A(D)^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N_{out}(D) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

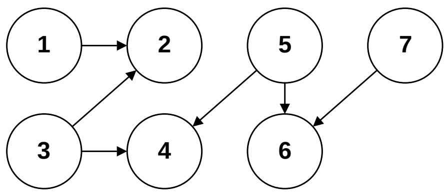
<u>Bsp. 4:</u>

Z(1) = {1,3,5,7} **Z(2)** = ∅ **Z(3)** = {1,3,5,7} **Z(4)** = ∅

Z(5) = {1,3,5,7} **Z(6)** = ∅ **Z(7)** = {1,3,5,7}

$$A(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} A(D)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N_{out}(D) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

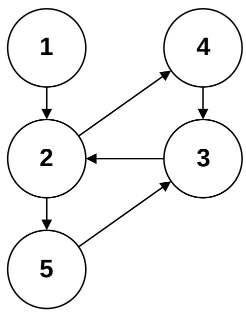


<u>Bsp. 5:</u>

Z(1) = {1,3} **Z(2)** = ∅ **Z(3)** = {1,3} **Z(4)** = {4,5}

Z(5) = {4,5}

$$A(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A(D)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$N_{out}(D) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

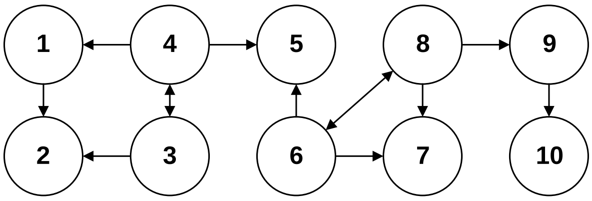
<u>Bsp. 6:</u>

Z(1) = {1,3} **Z(2)** = ∅ **Z(3)** = {1,3} **Z(4)** = {4,6,8}

Z(5) = ∅ **Z(6)** = {4,6,8} **Z(7)** = ∅ **Z(8)** = {4,6,8}

Z(9) = ∅ **Z(10)** = ∅

$$A(D) = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$



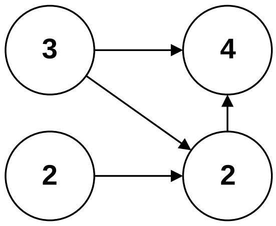
$$A(D)^T = \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$$

$$N_{out}(D) = \begin{pmatrix} 1&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&2&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&3&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&3&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&3&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Bsp. 7:

Z(1) = {1,2,3} **Z(2)** = {1,2,3} **Z(3)** = {1,2,3} **Z(4)** = ∅

$$A(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A(D)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$N_{out}(D) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiele/Testgraphen zu Teilaufgabe e) - Eckenumnummerierung

Bsp. 1:

Eckenumnummerierung: **2** ↔ **7** und **4** ↔ **6**

$$A(D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A(D)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N_{out}(D) = A(D) \cdot A(D)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bsp. 2:

Eckenumnummerierung: **2** ↔ **6**

$$A(D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A(D)^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N_{out}(D) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

<u>Bsp. 3:</u>

Eckenumnummerierung: $\mathbf{6} \leftrightarrow \mathbf{8}$

$$A(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(D)^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N_{out}(D) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

Bsp. 4:

Eckenumnummerierung: $\mathbf{2} \leftrightarrow \mathbf{7}$ und $\mathbf{4} \leftrightarrow \mathbf{5}$ - die „6“ steht bereits an vorletzter Stelle und muss somit nicht getauscht werden.

$$A(D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A(D)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N_{out}(D) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

Bsp. 5:

Eckenumnummerierung: $\mathbf{2} \leftrightarrow \mathbf{5}$

$$A(D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} A(D)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N_{out}(D) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

<u>Bsp. 6:</u>

Eckenumnummerierung: $\mathbf{2} \leftrightarrow \mathbf{8}$ und $\mathbf{5} \leftrightarrow \mathbf{6}$ - die „7“,“9“ und „10“ müssen auf Grund ihrer Position (wie bereits in bsp. 4) nicht getauscht werden.

$$A(D) \;=\; \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$A(D)^T \;=\; \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$$

$$N_{out}(D) = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&3&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&2&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&3&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&0&3&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&\boxed{0}&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&\boxed{0}&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&\boxed{1}&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&\boxed{0} \end{pmatrix}$$

<u>Bsp. 7:</u>

Keine Eckenumnummerierung notwendig, da die Blockdiagonalgestalt bereits besteht (siehe Anhang „Beispiele/Testgraphen zu Teilaufgabe d) – Bsp. 7“).