Επίλυση προβλήματος ωρολογίου προγράμματος για Γυμνάσιο/Λύκειο

Στα πλαίσια του μαθήματος: Γραμμική και Συνδυαστική Βελτιστοποίηση

Τσάμπρας Κωνσταντίνος, [up1083865@ac.upatras.gr](mailto:up1083865@ac.upatras.gr)

Επιβλέποντες: Δασκαλάκη Σοφία, Βαλουξής Χρήστος, Πέππας Παύλος

* Περιγραφή του προβλήματος:

Κάθε σχολείο που ανήκει στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση αντιμετωπίζει το ίδιο πρόβλημα σε κάθε νέα σχολική χρονιά. Το πρόβλημα αυτό είναι η δημιουργία ωρολογίου προγράμματος που να καλύπτει τις απαιτήσεις τόσο του προγράμματος της ύλης (πόσες ώρες την βδομάδα πρέπει η κάθε τάξη να διδάσκεται το κάθε μάθημα), τις απαιτήσεις και προτιμήσεις των καθηγητών αλλά και την πραγματικότητα ότι πολλοί καθηγητές εργάζονται σε πάνω από ένα σχολείο.

Σε αυτήν την πραγματικότητα προστίθεται το γεγονός ότι οι αναθέσεις καθηγητών σε σχολεία αργούν και συχνά αλλάζουν πολλές φορές μέσα στους πρώτους μήνες του σχολικού έτους.

Αυτή η κατάσταση, ουσιαστικά αποκλείει την δυνατότητα δημιουργίας του ωρολογίου προγράμματος με το χέρι -όπως γινόταν μέχρι πρόσφατα- και επιτάσσει την χρήση σύγχρονων μέσων για την αυτοματοποίηση της δημιουργίας του προγράμματος αυτού.

Δυστυχώς δεν υπάρχει κάποιο δωρεάν, ευρέως ( και νόμιμα) διαθέσιμο πρόγραμμα που να επιλύει το πρόβλημα αυτό.

Μια μέθοδος για την μοντελοποίηση και επίλυση του προβλήματος αυτού είναι ο γραμμικός προγραμματισμός. Η διαδικασία αυτή, της μοντελοποίησης και επίλυσης αυτού του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού, θα περιγραφεί σε αυτήν την αναφορά.

* Παραδοχές:

Για να μοντελοποιηθεί αυτό το σύνθετο πρόβλημα θα πρέπει αρχικά να οριστεί με ακρίβεια και πληρότητα. Για αυτόν τον σκοπό στην συνέχεια αναφέρονται οι παραδοχές που έγιναν και να φτιαχτεί ένα γενικό μοντέλο ωρολογίου προγράμματος (και των απαιτήσεων αυτού) για ένα σχολείου Γυμνασίου/Λυκείου.

1. Πλήθος τάξεων (3). Κάθε σχολείο αυτής της βαθμίδας έχει τρεις τάξης. Ενδέχεται, βέβαια η κάθε τάξη να έχει πάνω από ένα τμήμα, παρόλα αυτά, στην μοντελοποίηση μας αυτό επιλύεται απλά με την προσθήκη νέων τάξεων η οποίες απλά θα έχουν τις ίδιες απαιτήσεις (όσον αφορά την ύλη/ώρες ανά βδομάδα με κάθε καθηγητή).
2. Πλήθος ημερών (5). Κάθε σχολείο έχει, βεβαίως, 5 εργάσιμες ημέρες μέσα στην βδομάδα.
3. Πλήθος ωρών ανά ημέρα (5). Η συγκεκριμένη έχει αλλάξει πολλές φορές τις τελευταίες δεκαετίες και συχνά δεν είναι σταθερή μέσα σε μία βδομάδα (δηλαδή υπάρχουν περιπτώσεις όπου μία τάξη έχει 3 εξάωρα και 2 εφτάωρα μέσα σε μία βδομάδα). Αλλά για χάριν απλότητας και ευκολότερης επόπτευσης των εισόδων, των δεδομένων και της επίλυσης έχει επιλεχθεί η σταθερή διάρκεια μαθήματος ανά ημέρα των 5 ωρών (κάτι που εύκολα μπορούμε να αλλάξουμε, αφού στο πρόγραμμα είναι παραμετροποιήσιμο).
4. Ένας καθηγητής ανά τάξη ανά ώρα. Θεωρούμε την περίπτωση όπου δεν υπάρχουν μαθήματα στα οποία ένας καθηγητής διδάσκει δύο τάξεις ταυτόχρονα, ενώ ταυτόχρονα, δεν υπάρχουν μαθήματα τα οποία απαιτούν δύο καθηγητές να διδάξουν την ίδια τάξη την ίδια ώρα.
5. Ώρες ανά μάθημα ανά βδομάδα. Η ύλη του μαθήματος θα περιγράφεται από τον αριθμό ωρών που απαιτούνται κάθε βδομάδα για κάθε τάξη. Ο κάθε καθηγητής (που αντιπροσωπεύεται από ένα id και αντιστοιχεί σε ένα μάθημα) θα έχει μια λίστα με τον αριθμό των εβδομαδιαίων ωρών που πρέπει να αφιερώνει σε κάθε τάξη.
6. Δυνατότητα ορισμού μη διαθέσιμων ωρών καθηγητή. Υπάρχουν πολλοί λόγοι για τους οποίους ένας καθηγητής μπορεί να μην είναι διαθέσιμος κάποιες συγκεκριμένες ώρες μέσα στην βδομάδα. Για παράδειγμα μπορεί να:

* Βρίσκεται σε άλλο σχολείο για κάποιες ώρες/μέρες
* Να έχει προβλήματα υγείας για τα οποία πρέπει να έχει ελεύθερες συγκεκριμένες ώρες μέσα στην εβδομάδα
* Να έχει σοβαρούς προσωπικούς λόγους (αν και για αυτό ενδείκνυται η επόμενη κατηγορία)

1. Δυνατότητα δήλωσης προτιμήσεων ωρών/ημερών. Δίνεται δηλαδή η δυνατότητα τον κάθε καθηγητή να δηλώσει ώρες μέσα στην ημέρα, ή ημέρες, στις οποίες θα προτιμούσε να έχει (ή να μην έχει) μαθήματα. Γίνεται αντιληπτό βέβαια ότι δεν μπορούν πάντα να ικανοποιούνται όλες οι προτιμήσεις (για παράδειγμα είναι πιθανόν μεγάλο ποσοστό καθηγητών να ζητήσουν να μην έχουν πρώτες ώρες μάθημα, κάτι που αν προσπαθούσαμε να ικανοποιήσουμε για όλους τους καθηγητές θα οδηγούσε σε αδιέξοδο την δημιουργία προγράμματος), οπότε δεν θα υπάρχει εγγύηση ότι οι προτιμήσεις θα ικανοποιούνται, αλλά θα γίνεται «προσπάθεια» για να ικανοποιηθούν όσον το δυνατόν περισσότερες.
2. Ορισμός μέγιστου αριθμού ωρών ανά τάξη ανά μέρα. Σε πολλά μαθήματα είναι απαραίτητο οι ώρες ανά εβδομάδα να μην βρίσκονται όλες στην ίδια μέρα για μια τάξη. Κάτι τέτοιο δεν θα επέτρεπε την ομαλή διεξαγωγή του μαθήματος καθώς τόσο οι μαθητές όσο και ο καθηγητής δεν θα μπορούσαν να αφιερώσουν ικανοποιητική προσοχή και συγκέντρωση για 4 συνεχόμενες ώρες στο ίδιο μάθημα. Ενώ παράλληλα οι τυχόν ασκήσεις για το σπίτι δεν θα δίνονταν σταδιακά (2-3 φορές την εβδομάδα), αλλά μια φορά την εβδομάδα, κάτι που δεν είναι επιθυμητό για την αφομοίωση της ύλης. Έτσι ορίζεται ένας μέγιστος αριθμός ωρών ανά ημέρα για κάθε καθηγητή για κάθε τάξη.

Η επιθυμητή έξοδος του προγράμματος θα είναι η εκτύπωση ενός ωρολογίου προγράμματος για κάθε τάξη, καθώς και ο υπολογισμός ορισμένων στατιστικών για το πρόγραμμα αυτό (όπως μία εικόνα για το πλήθος των προτιμήσεων που καλύφθηκαν).

* Μοντελοποίηση:

1. Μεταβλητές απόφασης.

Για την μοντελοποίηση του προβλήματος αυτού, θα χρησιμοποιηθεί ένας πίνακας ο οποίος θα αποθηκεύει τις μεταβλητές απόφασης (οι οποίες είναι δυαδικές/ακέραιες μεταξύ 0 και 1) για τις ώρες και τις τάξεις διδασκαλίας του κάθε καθηγητή. Πιο συγκεκριμένα ο πίνακας θα έχει την μορφή:

Όπου:

* Ο δείκτης i εκφράζει το id (τον δείκτη) του κάθε καθηγητή.
* Ο δείκτης d εκφράζει την ημέρα (σύμφωνα με τα παραπάνω παίρνει ακέραιες τιμές μεταξύ 0 και 4).
* Ο δείκτης h εκφράζει την ώρα μέσα στην μέρα (σύμφωνα με τα παραπάνω παίρνει ακέραιες τιμές μεταξύ 0 και 4).
* Ο δείκτης c εκφράζει την τάξη ( σύμφωνα με τα παραπάνω παίρνει τις τιμές 0,1,2)

Για παράδειγμα το να έχει η παρακάτω μεταβλητή απόφασης τιμή 1

Μας υποδεικνύει ότι ο καθηγητής με id 3, την Δευτέρα (μέρα 0), την 5η (ώρα 4) ώρα, έχει μάθημα με την τάξη Β (τάξη 0).

Ενώ η έκφραση

Δείχνει ότι ο καθηγητής με id 3, την Δευτέρα, την 5η ώρα, δεν έχει μάθημα με την τάξη Α.

1. Περιορισμοί.

Με βάση τις παραπάνω παραδοχές εισάγονται οι παρακάτω περιορισμοί:

* Μια τάξη ανά καθηγητή ανά ώρα:
* Ένας καθηγητής ανά τάξη ανά ώρα:
* Κάλυψη της ύλης (ο πίνακας xi,c που ορίζει τις ώρες που πρέπει ο κάθε καθηγητής να διδάσκει την κάθε τάξη -ανά βδομάδα- είναι είσοδος για το πρόγραμμα). Σημειώνεται ότι αν θέλουμε το πρόγραμμα να βγάζει ως έξοδο ένα ημιτελές ωρολόγιο πρόγραμμα (όπως για παράδειγμα ένα πρόγραμμα στο οποίο μερικές ώρες δεν μπόρεσαν να συμπληρωθούν) γιατί οι περιορισμοί μας είναι πολύ περιοριστικοί, μπορούμε να θέσουμε την παρακάτω ισότητα ως ανισότητα (<=). Η περίπτωση αυτή θα αναλυθεί περεταίρω στον ορισμό της αντικειμενικής συνάρτησης:
* Μέγιστος αριθμός ωρών ανά ημέρα σε κάθε καθηγητή και τάξη (ομοίως ο πίνακας yi,c που ορίζει τον μέγιστο αριθμό ωρών για κάθε τάξη και κάθε καθηγητή είναι είσοδος για το πρόγραμμα):
* Ορισμός ωρών μη διαθεσιμότητας καθηγητών (το σύνολο Ζ αποτελεί και αυτό είσοδο του προγράμματος, κάθε στοιχείο του Ζ αντιστοιχεί σε έναν καθηγητή και είναι μια λίστα με δυάδες (d,h) που δηλώνουν το σύνολο των ωρών στις οποίες δεν θα είναι διαθέσιμος μέσα στην εβδομάδα:

1. Αντικειμενική συνάρτηση:

Στην αντικειμενική συνάρτηση θα τεθούν ως όροι προς βελτιστοποίηση οι προτιμήσεις των καθηγητών που αναφέρθηκαν παραπάνω.

Εκτός όμως από αυτό το κριτήριο στην αντικειμενική συνάρτηση, είναι ενδιαφέρον να εξετάσουμε και την περίπτωση όπου οι περιορισμοί (πχ μη διαθεσιμότητας καθηγητών) είναι τόσο περιοριστικοί, που δεν επιτρέπουν την πλήρη συμπλήρωση του ωρολογίου προγράμματος.

Μία προσέγγιση θα ήταν να τεθεί ως περιορισμός η πλήρης συμπλήρωση του προγράμματος, κάτι που θα σήμαινε ότι η αδυναμία συμπλήρωσης του προγράμματος απλά θα επέστρεφε ένα μήνυμα αδυναμίας επίλυσης του προβλήματος, χωρίς κάτι χρήσιμο. Αυτό όμως ενδεχομένως να μην είναι επιθυμητό σε όλες τις περιπτώσεις.

Έτσι επιλέχθηκε να τεθεί ως όρος στην αντικειμενική συνάρτηση το πλήθος των ωρών του ωρολογίου που έχουν συμπληρωθεί. Έτσι ο αλγόριθμος θα έχει «κίνητρο» να συμπληρώσει όσον το δυνατόν περισσότερες ώρες στο ωρολόγιο πρόγραμμα.

Όμως με αυτήν την προσέγγιση εμφανίζεται το πρόβλημα όπου η κάλυψη επιθυμιών/προτιμήσεων καθηγητών ενδέχεται να αντιτίθεται στην πλήρη κάλυψη του προγράμματος.

Για παράδειγμα ενδέχεται η προτίμηση ενός καθηγητή να μην διδάξει την Δευτέρα να μην επιτρέπει στον αλγόριθμο να γεμίσει όλες τις ώρες του προγράμματος, άρα ο αλγόριθμος αντιμετωπίζει ένα «δίλημμα», ποιο από τα δύο κριτήρια πρέπει να υπερισχύσει;

Για την διευθέτηση τέτοιων περιπτώσεων αποφασίστηκε να οριστούν παράμετροι για το βάρος των όρων στην αντικειμενική συνάρτηση, και -πιο συγκεκριμένα- οι όροι που αφορούν την πλήρη κάλυψη του προγράμματος να έχουν πολύ μεγαλύτερο βάρος από τους όρους που αφορούν προτιμήσεις καθηγητών.

Έτσι ο αλγόριθμος θα προσπαθεί πρώτα να μεγιστοποιήσει την κάλυψη και έπειτα να ικανοποιήσει όσες προτιμήσεις μπορεί.

(Σημειώνεται ότι, όπως αναφέρθηκε στους περιορισμούς, για να επιτρέψουμε την δυνατότητα μη ολοκληρωμένης συμπλήρωσης του ωρολογίου προγράμματος, ο περιορισμός κάλυψης της ύλης πρέπει να εκφράζει ανισότητα (<=) και όχι ισότητα)

Άρα έχουμε τους εξής όρους στην αντικειμενική συνάρτηση:

* Όροι κάλυψης. Ο συντελεστής c είναι η παράμετρος που αφορά την κάλυψη, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, πρέπει να έχει αρκετά μεγαλύτερο μέγεθος από τις παραμέτρους προτιμήσεων):
* Όροι αποφυγής ημερών. Ο κάθε καθηγητής μπορεί να επιλέξει ποιες ημέρες θέλει να αποφεύγει να έχει ώρες διδασκαλίας. Η επιλογή αυτή δεν εγγυάται την αποφυγή των ημερών αυτών. Ο συντελεστής p1 ορίζει το βάρος της αποφυγής των ημερών όπως αναφέρθηκε. Προφανώς υπάρχει δυνατότητα διαφοροποίησης των συντελεστών για τον κάθε καθηγητή ή για την κάθε προτίμηση:
* Όροι προτίμησης ημερών. Ομοίως ο κάθε καθηγητής μπορεί να επιλέξει τις μέρες στις οποίες προτιμάει να διδάσκει. Οι όροι θα έχουν βάρος ίσο με την αντίστοιχη παράμετρο:
* Όροι αποφυγής ωρών. Αντίστοιχα, δίνεται η δυνατότητα επιλογής ωρών τις οποίες επιθυμεί να αποφύγει ένας καθηγητής. Για παράδειγμα αποφυγή της πρώτη ώρας κάθε μέρας: