

# Átomos de Rydberg interactuando dentro de una cavidad óptica

Andrea Fernanda Rodríguez Rojas

«Universidad Nacional Autónoma de México»

# Índice general

I PREPARACIÓN TEÓRICA .....	3
1 Átomo cuántico interactuando con luz clásica .....	4
1.1. Átomo libre .....	4
1.2. Átomo en presencia de campo externo (Gerry-Knight) .....	4
1.3. Interacción semiclásica átomo-campo .....	6
2 .....	8
BIBLIOGRAFÍA .....	9

Parte I

# PREPARACIÓN TEÓRICA

# 1

## ÁTOMO CUÁNTICO INTERACTUANDO CON LUZ CLÁSICA

### 1.1. ÁTOMO LIBRE

Partimos del sistema más sencillo al suponer un átomo en ausencia de campos externos, cuyo Hamiltoniano está dado por

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2m} \hat{\mathbf{P}}^2 + V(r) \quad (1.1)$$

donde  $V(r)$  es la interacción coulombiana del electrón con el núcleo, y en la representación de espacio  $\hat{\mathbf{P}} = -i\nabla$  y  $r = |\mathbf{r}|$ . Además, como se trata de un átomo libre, podemos describir el sistema mediante la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}_0 \Psi \quad (1.2)$$

cuyas soluciones son los estados estacionarios

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi_n(\mathbf{r}) e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \quad (1.3)$$

donde  $\psi_n(\mathbf{r})$  es la parte espacial y representa a un átomo que se encuentra en un nivel de energía bien definido, llamada función de onda del estado  $|n\rangle$ ,  $e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}$  es un factor de fase y  $E_n$  la energía del estado  $|n\rangle$ .  $\psi_n(\mathbf{r})$  y  $E_n$  son las eigenfunciones y los eigenvalores de  $H_0$ , respectivamente

$$\hat{H}_0 \psi_n(\mathbf{r}) = E_n \psi_n(\mathbf{r}) \quad (1.4)$$

Y además las funciones de onda  $\psi_n(\mathbf{r})$  cumplen con la condición de ortonormalidad

$$\int d\mathbf{r} \psi_n^*(\mathbf{r}) \psi_m(\mathbf{r}) = \delta_{nm} \quad (1.5)$$

por lo que son una base en el espacio de Hilbert.

### 1.2. ÁTOMO EN PRESENCIA DE CAMPO EXTERNO (GERRY-KNIGHT)

En presencia de un campo electromagnético externo, el Hamiltoniano de una partícula con carga  $e$  y masa  $m$  está dado por

$$\hat{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2m} [\hat{\mathbf{P}} + e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]^2 - e\Phi(\mathbf{r}, t) + V(r) \quad (1.6)$$

donde  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  y  $\Phi(\mathbf{r}, t)$  son los potenciales vectorial y escalar, respectivamente, tales que definen a los campos como

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\nabla\Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)\end{aligned}\quad (1.7)$$

que son invariantes ante las transformaciones de gauge

$$\begin{aligned}\Phi'(\mathbf{r}, t) &= \Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial\chi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ \mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla\chi(\mathbf{r}, t)\end{aligned}\quad (1.8)$$

donde  $\chi(\mathbf{r}, t)$  es una función escalar arbitraria. Por lo tanto, podemos definir el Hamiltoniano

$$\hat{H}' = \frac{1}{2m} [\hat{\mathbf{P}} + e\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t)]^2 - e\Phi'(\mathbf{r}, t) + V(r) \quad (1.9)$$

que deja invariante el comportamiento del átomo en el campo.

Consideremos ahora una transformación de gauge muy particular, llamada transformación de Coulomb, con la cual se cumple  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  y  $\Phi = 0$ . Con esto hemos establecido que el potencial vectorial  $\mathbf{A}$  es puramente transversal (pues su divergencia es cero), y además podemos expresar  $\hat{H}'$  como

$$\hat{H}' = \frac{1}{2m} [\hat{\mathbf{P}} + e(\mathbf{A} + \nabla\chi)]^2 + e\frac{\partial\chi}{\partial t} + V(r) \quad (1.10)$$

Partiendo ahora de la ecuación de Ampere-Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.11)$$

sustituimos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{E}$  por sus expresiones en (1.7), y aplicamos la transformación de Coulomb

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \\ \Rightarrow \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} &= \mu_0 \mathbf{J} - \mu_0 \varepsilon_0 \nabla \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \\ \Rightarrow \nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{J}\end{aligned}\quad (1.12)$$

Como estamos suponiendo que no hay fuentes cerca, entonces no hay densidad de corriente  $\mathbf{J} = 0$ , y lo que queda es la ecuación de onda homogénea

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.13)$$

cuya solución general es  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \mathbf{A}_0^* e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ .

Luego, consideramos el vector de propagación de una onda con longitud  $\lambda$ , cuya magnitud es  $|\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$ ; en óptica,  $\lambda$  tiene típicamente valores de orden  $10^{-7}\text{m}$  (la luz visible se encuentra entre 380-750 nm) y  $|\mathbf{r}|$  tiene dimensiones atómicas, de orden  $10^{-10}\text{m}$ , entonces  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \ll 1$  (aproximación dipolar), provocando que el potencial vectorial sea uniforme en el espacio alrededor del átomo,  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \approx \mathbf{A}(t)$ .

Si ahora consideramos otra transformación de gauge, dada por  $\chi(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{r}$ , entonces

$$\begin{aligned}\nabla\chi(\mathbf{r}, t) &= -\mathbf{A}(t) \\ \frac{\partial}{\partial t}\chi(\mathbf{r}, t) &= -\mathbf{r} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t)\end{aligned}\quad (1.14)$$

por lo tanto

$$\hat{H}' = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2m} + V(r) + e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t) \quad (1.15)$$

Y finalmente, después de considerar la expresión del momento dipolar  $\mathbf{d} = -e\mathbf{r}$ , obtenemos el siguiente Hamiltoniano

$$\hat{H}' = \hat{H}_0 - \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}(t) \quad (1.16)$$

Para simplificar la notación, realizaremos un cambio de etiqueta a  $\hat{H}'$  y lo llamaremos simplemente  $\hat{H}$ , y al término  $-\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}(t)$  le vamos a asociar el Hamiltoniano de interacción denotado por  $\hat{H}_I(t)$ . Así, la expresión (1.16) queda reescrita como

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I(t) \quad (1.17)$$

### 1.3. INTERACCIÓN SEMICLÁSICA ÁTOMO-CAMPO

El planteamiento y desarrollo del contenido de esta sección fue tomado del capítulo 2 del libro *Quantum optics: including noise reduction, trapped ions, quantum trajectories, and decoherence* (Orszag, 2008).

Hasta ahora no hemos hablado nada acerca de la naturaleza del campo electromagnético, si es considerado clásico o cuántico, y la expresión (1.16) es válida para ambos casos. En el modelo semiclásico de interacción, es decir aquel que considera al campo electromagnético clásico con un átomo cuántico, queremos explorar las consecuencias de que la frecuencia del campo casi coincida con la diferencia de energía entre un par de niveles atómicos (fenómeno de cuasiresonancia), al que llamaremos **átomo de 2 niveles**.

El átomo de 2 niveles se caracteriza por un estado base  $|b\rangle$  y el estado excitado  $|a\rangle$ , con energías  $E_b = \hbar\omega_b$  y  $E_a = \hbar\omega_a$ , respectivamente. Exploraremos el caso donde el átomo interactúa con un campo eléctrico dado por una onda senoidal,  $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t)$ , siendo  $\omega$  la frecuencia de la radiación del campo y  $\mathbf{E}_0 = eE_0$ , donde  $e$  es el vector unitario de polarización del campo.

Así, definimos la *desintonía* como

$$\delta \equiv (\omega_a - \omega_b) - \omega \quad (1.18)$$

Ahora, tomamos el Hamiltoniano (1.17) para la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo de la interacción

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = [\hat{H}_0 + \hat{H}_I(t)] \psi(\mathbf{r}, t) \quad (1.19)$$

y usamos las soluciones de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo del átomo libre en (1.3) como base conveniente para descomponer a la función de onda de la interacción

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_n C_n(t) \psi(\mathbf{r}) e^{-i\omega_n t} \quad (1.20)$$

con  $\omega_n = \frac{E_n}{\hbar}$

## 2 |



## Parte 1.2

# BIBLIOGRAFÍA

- [1] M. Orszag, *Quantum Optics: Including Noise Reduction, Trapped Ions, Quantum Trajectories, and Decoherence*, 2nd ed. Berlin ; New York: Springer, 2008.