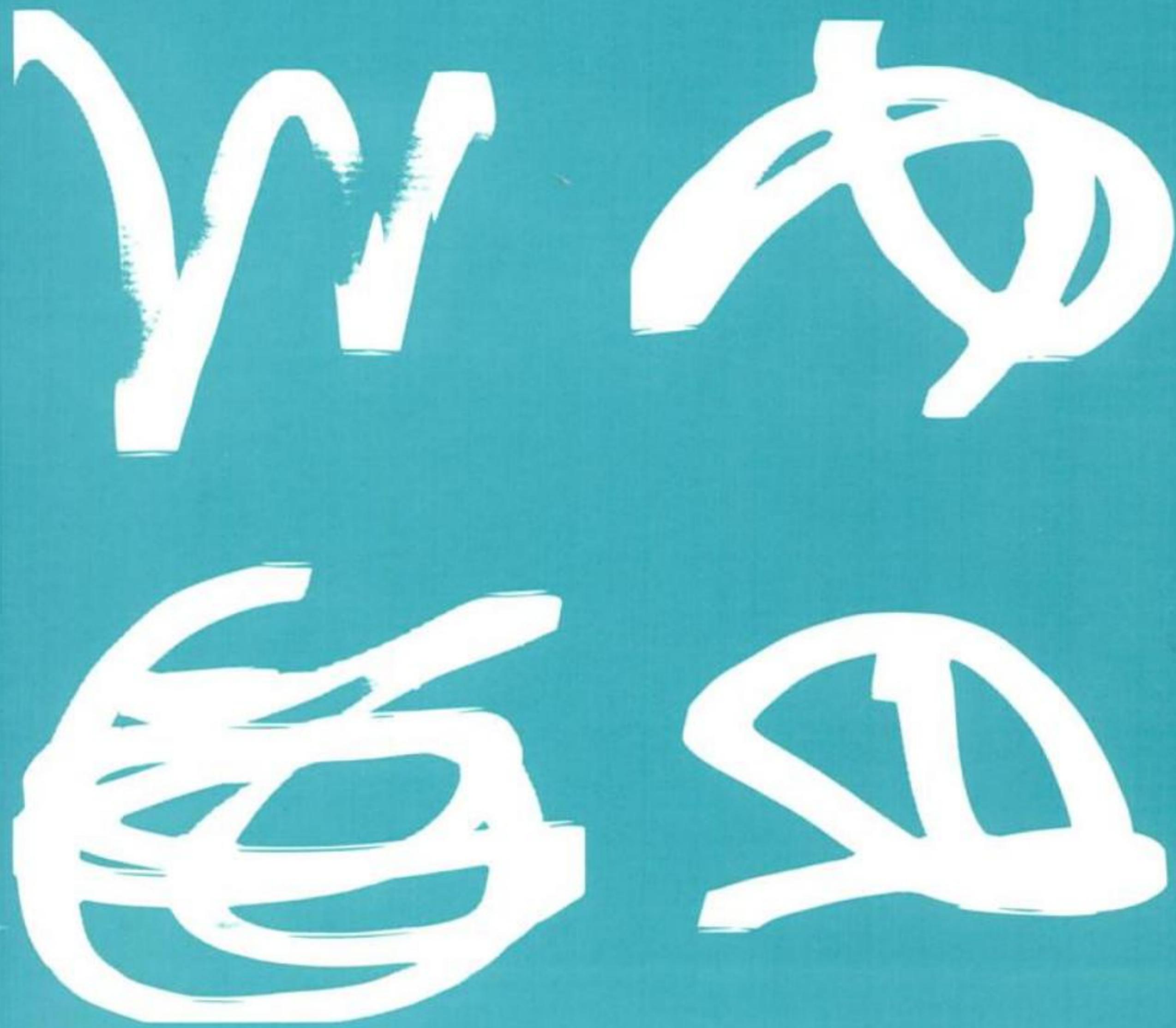


DINÁMICA CLÁSICA DE LAS PARTÍCULAS Y SISTEMAS

JERRY B. MARION



editorial reverté, s.a.

Material protegido por derechos de autor

Dinámica clásica de las partículas y sistemas

This One



GSHP-6L0-WBDH

Material protegido por derechos de autor

Dinámica clásica de las partículas y sistemas

JERRY B. MARION

UNIVERSITY OF MARYLAND
COLLEGE PARK



EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Barcelona - Bogotá - Buenos Aires - Caracas - México

Título de la obra original:

Classical Dynamics of Particles and Systems (2nd. edition)

Edición original en lengua inglesa publicada por:

Academic Press, New York y London

Copyright © by Academic Press, Inc.

Versión española por:

Dr. José Vilardel Coma

Ingeniero de Armamento y Construcción

Licenciado en Ciencias Físicas

Universidad Politécnica de Cataluña

Revisada por:

Dr. Julián Fernández Ferrer

Catedrático de Física de la Universidad Politécnica de Cataluña

Fellow of the Institute of Mathematics and its Applications

Propiedad de:

EDITORIAL REVERTÉ, S. A.

Loreto, 13-15, Local B

08029 Barcelona

Tel: (34) 93 419 33 36

Fax: (34) 93 419 51 89

E-mail: reverté@reverte.com

Internet: <http://www.reverte.com>

Reservados todos los derechos. La reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos, queda rigurosamente prohibida sin la autorización escrita de los titulares del copyright, bajo las sanciones establecidas por las leyes.

Edición en español

© EDITORIAL REVERTÉ, S. A., 1998

REIMPRESIÓN: Noviembre de 2003

Impreso en España - Printed in Spain

ISBN: 84-291-4094-8

Depósito legal: B-47502-2003

Impreso por Domingraf Impressors

Pol. Ind. Can Magarola

08100 Mollet del Vallés (Barcelona)

Índice analítico

PRÓLOGO A LA SEGUNDA EDICIÓN, XIII

PRÓLOGO A LA PRIMERA EDICIÓN, XV

Capítulo 1. Matrices, vectores y cálculo vectorial

- 1.1 Introducción, 1
- 1.2 Concepto de escalar, 3
- 1.3 Transformaciones de coordenadas, 3
- 1.4 Propiedades de las matrices de giro, 6
- 1.5 Operaciones con matrices, 10
- 1.6 Otras definiciones, 12
- 1.7 Interpretación geométrica de las matrices de transformación, 14
- 1.8 Definiciones de escalar y vector en función de sus comportamientos bajo las transformaciones, 21
- 1.9 Operaciones elementales con escalares y vectores, 21
- 1.10 Producto escalar de dos vectores, 22
- 1.11 Producto vectorial de dos vectores, 25
- 1.12 Versores, 29
- 1.13 Derivadas de un vector respecto de un escalar, 30

- 1.14 Ejemplos de derivadas. Velocidad y aceleración, 32
- 1.15 Velocidad angular, 36
- 1.16 Operador gradiente, 39
- 1.17 Integración de vectores, 43
- Referencias recomendadas, 45
- Problemas, 46

Capítulo 2. La mecánica de Newton

- 2.1 Introducción, 51
- 2.2 Leyes de Newton, 52
- 2.3 Sistemas de referencia, 56
- 2.4 Ecuación de movimiento de una partícula, 59
- 2.5 Teoremas de conservación, 70
- 2.6 Teoremas de conservación para un sistema de partículas, 75
- 2.7 Ley de la gravitación universal, 85
- 2.8 Potencial gravitatorio, 87
- 2.9 Líneas de fuerza y superficies equipotenciales, 89
- 2.10 Potencial gravitatorio de una esfera hueca, 91
- 2.11 ¿Cuándo es útil el concepto de potencial?, 94
- 2.12 Limitaciones de la mecánica de Newton, 95
- Referencias recomendadas, 97
- Problemas, 98

Capítulo 3. Oscilaciones lineales

- 3.1 Introducción, 103
- 3.2 El oscilador armónico simple u oscilador lineal, 104
- 3.3 Diagramas fásicos, 107
- 3.4 Oscilaciones armónicas en dos dimensiones, 110
- 3.5 Oscilaciones amortiguadas, 114
- 3.6 Oscilaciones eléctricas, 121
- Referencias recomendadas, 127
- Problemas, 127

Capítulo 4. Oscilaciones forzadas

- 4.1 Introducción, 131
- 4.2 Oscilador sometido a una fuerza impulsora senoidal, 132
- 4.3 Efectos transitorios, 138

- 4.4 Oscilaciones eléctricas forzadas, 139
- 4.5 Principio de superposición. Las series de Fourier, 145
- 4.6 Respuesta de los osciladores lineales a fuerzas pulsantes, 151
- 4.7 Método de la transformación de Laplace, 160
- Referencias recomendadas, 164
- Problemas, 164

Capítulo 5. Oscilaciones alineales

- 5.1 Introducción, 169
- 5.2 Oscilaciones en el caso de funciones potenciales de forma general, 170
- 5.3 Diagramas fásicos de los sistemas alineales, 176
- 5.4 Péndulo plano, 179
- 5.5 Oscilaciones alineales en un potencial asimétrico - Método de las perturbaciones, 186
- 5.6 El problema de los términos seculares en las soluciones aproximadas, 188
- 5.7 Aparición de subarmónicos, 193
- 5.8 Intermodulación y tonos de combinación, 194
- Referencias recomendadas, 196
- Problemas, 196

Capítulo 6. Procedimiento basado en el cálculo de variaciones

- 6.1 Introducción, 201
- 6.2 Enunciado del problema, 202
- 6.3 Ecuación de Euler, 206
- 6.4 Problemas de la braquistócrona, 208
- 6.5 «Segunda forma» de la ecuación de Euler, 210
- 6.6 Funciones de varias variables dependientes, 213
- 6.7 Ecuaciones de Euler con condiciones auxiliares, 213
- 6.8 El símbolo δ , 217
- Referencias recomendadas, 218
- Problemas, 219

Capítulo 7. El principio de Hamilton - Dinámica de Lagrange y de Hamilton

- 7.1 Introducción, 221

- 7.2 Principio de Hamilton, 223
- 7.3 Coordenadas generalizadas, 227
- 7.4 Las ecuaciones de movimiento de Lagrange en coordenadas generalizadas, 230
- 7.5 Empleo de los multiplicadores de Lagrange, 234
- 7.6 Equivalencia entre las formulaciones de Newton y de Lagrange, 238
- 7.7 Esencia de la dinámica de Lagrange, 239
- 7.8 Un teorema relativo a la energía cinética, 241
- 7.9 Conservación de la energía, 242
- 7.10 Conservación del ímpetu, 245
- 7.11 Conservación del momento cinético, 246
- 7.12 Ecuaciones canónicas de movimiento - La dinámica de Hamilton, 249
- 7.13 Algunos comentarios relativos a las variables dinámicas y a los cálculos variacionales en física, 256
- 7.14 El espacio fásico y el teorema de Liouville, 259
- 7.15 Teorema del virial, 264
- Referencias recomendadas, 266
- Problemas, 267

Capítulo 8. Movimiento en un campo de fuerzas centrales

- 8.1 Introducción, 275
- 8.2 Masa reducida, 276
- 8.3 Teoremas de conservación - Integrales primeras del movimiento, 277
- 8.4 Ecuaciones de movimiento, 280
- 8.5 Órbitas de un campo central, 282
- 8.6 Energía centrífuga y potencial efectivo, 284
- 8.7 Movimiento planetario - Problema de Kepler, 287
- 8.8 Ecuación de Kepler, 292
- 8.9 Solución aproximada a la ecuación de Kepler, 298
- 8.10 Ángulos apsidales y precesión, 300
- 8.11 Estabilidad de las órbitas circulares, 306
- 8.12 Problemas de los tres cuerpos, 315
- Referencias recomendadas, 322
- Problemas, 323

Capítulo 9. Cinemática del choque de dos partículas

- 9.1 Introducción, 329
- 9.2 Choques elásticos - Sistemas de coordenadas del centro de masa y del laboratorio, 330

- 9.3 Cinemática de los choques elásticos, 338
- 9.4 Secciones eficaces, 342
- 9.5 Fórmula de la dispersión de Rutherford, 348
- 9.6 Sección eficaz total, 350
- Referencias recomendadas, 351
- Problemas, 351

Capítulo 10. Teoría de la relatividad restringida

- 10.1 Introducción, 355
- 10.2 La invariancia de Galileo, 356
- 10.3 Transformaciones de Lorentz, 358
- 10.4 Ímpetu y energía en relatividad, 363
- 10.5 Algunas consecuencias de la transformación de Lorentz, 369
- 10.6 La lagrangiana en relatividad restringida, 374
- 10.7 Cinemática relativista, 375
- Referencias recomendadas, 380
- Problemas, 381

Capítulo 11. El movimiento en un sistema de referencia no inercial

- 11.1 Introducción, 387
- 11.2 Sistemas de coordenadas giratorias, 388
- 11.3 Fuerza de Coriolis, 390
- 11.4 El movimiento con relación a la Tierra, 393
- Referencias recomendadas, 405
- Problemas, 406

Capítulo 12. Dinámica de sistemas rígidos

- 12.1 Introducción, 409
- 12.2 Tensor de inercia, 410
- 12.3 Momento cinético, 415
- 12.4 Ejes principales de inercia, 418
- 12.5 Momentos de inercia para distintos sistemas de coordenadas del cuerpo, 423
- 12.6 Otras propiedades del tensor de inercia, 428
- 12.7 Ángulos de Euler, 438
- 12.8 Ecuaciones de Euler para un cuerpo rígido, 441

- 12.9 Movimiento de una peonza simétrica no sometida a fuerzas, 444
- 12.10 Movimiento de una peonza simétrica con un punto fijo, 448
- 12.11 Estabilidad de las rotaciones del cuerpo rígido, 455
- Referencias recomendadas, 458
- Problemas, 458

Capítulo 13. Oscilaciones acopladas

- 13.1 Introducción, 465
- 13.2 Acoplamiento de dos osciladores armónicos, 466
- 13.3 Acoplamiento débil, 471
- 13.4 Vibraciones forzadas de osciladores acoplados, 474
- 13.5 Circuitos eléctricos acoplados, 476
- 13.6 Teoría general de las oscilaciones acopladas, 478
- 13.7 Ortogonalidad de los vectores propios, 486
- 13.8 Las coordenadas normales, 488
- 13.9 Un ejemplo de degeneración: tres péndulos planos linealmente acoplados, 495
- 13.10 La cuerda discreta, 499
 - Referencias recomendadas, 510
 - Problemas, 510

Capítulo 14. La cuerda vibrante

- 14.1 Introducción, 515
- 14.2 La cuerda continua como caso límite de la discreta, 516
- 14.3 Energía de una cuerda vibrante, 520
- 14.4 Principio de Rayleigh, 524
- 14.5 Ecuación de onda, 529
- 14.6 Cuerda no uniforme. Funciones ortogonales y teoría de las perturbaciones, 530
- 14.7 Series de Fourier generalizadas, 540
 - Referencias recomendadas, 546
 - Problemas, 546

Capítulo 15. Ecuación de onda monodimensional

- 15.1 Introducción, 551
- 15.2 Soluciones generales de la ecuación de onda, 552

- 15.3 Separación de la ecuación de onda, 556
 - 15.4 Velocidad de fase, dispersión y atenuación, 561
 - 15.5 Analogías eléctricas. Circuitos filtro, 567
 - 15.6 Velocidad de grupo y paquetes de ondas, 570
 - 15.7 Representación de paquetes de ondas mediante integrales de Fourier, 575
 - 15.8 Propagación de la energía en la cuerda discreta, 582
 - 15.9 Ondas reflejadas y transmitidas, 586
 - 15.10 Ondas planas amortiguadas, 589
- Referencias recomendadas, 593
Problemas, 593

Apéndice A. Teorema de Taylor

Ejercicios, 602

Apéndice B. Números complejos

- B.1 Números complejos, 603
 - B.2 Representación geométrica de los números complejos, 604
 - B.3 Funciones trigonométricas de variable compleja, 606
 - B.4 Funciones hiperbólicas, 607
- Ejercicios, 608

Apéndice C. Ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

- C.1 Ecuaciones lineales homogéneas, 611
 - C.2 Ecuaciones lineales no homogéneas, 616
- Ejercicios, 620

Apéndice D. Fórmulas útiles

- D.1 Desarrollo del binomio, 621
- D.2 Relaciones trigonométricas, 622
- D.3 Series trigonométricas, 623
- D.4 Series exponenciales y logarítmicas, 623
- D.5 Funciones hiperbólicas, 624

Apéndice E. Integrales útiles

- E.1 Funciones algebraicas, 625
- E.2 Funciones trigonométricas, 626
- E.3 Funciones gamma, 627
- E.4 Integrales elípticas, 628

Apéndice F. Relaciones diferenciales en los distintos sistemas de coordenadas

- F.1 Coordenadas rectangulares, 629
- F.2 Coordenadas cilíndricas, 629
- F.3 Coordenadas esféricas, 631

Apéndice G. Una demostración de la relación $\sum_{\mu} x_{\mu}^2 = \sum_{\mu} x'^2_{\mu}$, 633

REFERENCIAS SELECCIONADAS, 635

BIBLIOGRAFÍA, 637

ÍNDICE ALFABÉTICO, 643

Prólogo a la segunda edición

La preparación de esta segunda edición nos ha deparado la oportunidad de hacer algunas adiciones y de aprovechar sugerencias para mejorar varias partes del texto. Hemos localizado y corregido unos pocos errores y suprimido en distintos lugares algunos párrafos superfluos. Hemos reestructurado determinados temas para ofrecerlos mediante desarrollos más ordenados. Dada la gran importancia de los fenómenos oscilatorios en casi todos los aspectos de la técnica y de las ciencias físicas actuales, en esta ocasión hemos añadido temas adicionales (por ejemplo, los métodos basados en la transformación de Laplace y aplicaciones más extensas a las oscilaciones eléctricas). Condensamos la discusión de los métodos vectoriales e incluimos únicamente los procedimientos de utilidad inmediata para los fines de este libro. La mecánica de Newton (incluida la teoría del potencial) queda cubierta en un solo capítulo. Hemos situado la relatividad en un punto del libro más adelantado incluyendo todas las consecuencias para la Mecánica que antes se hallaban dispersas a través de varios capítulos. También hemos añadido algunos problemas nuevos y suprimido otros que se juzgaron demasiado difíciles.

Prólogo a la primera edición

En este libro se presenta una recopilación moderna y razonablemente completa de la mecánica clásica de las partículas, de los sistemas de partículas y de los sistemas rígidos dirigida a los estudiantes de los cursos superiores de las carreras universitarias. Esbozado como texto para un curso de un año de tres horas de clase por semana, las materias esenciales pueden cubrirse, no obstante, en un curso de un semestre de tres horas por semana con una planificación cuidadosa y las omisiones adecuadas. Temas como las oscilaciones alineales, el teorema de Liouville, el problema de los tres cuerpos y los choques relativistas pueden omitirse perfectamente cuando la duración del curso no sea suficiente para permitir su inclusión. Confiamos, no obstante, en que estas materias no sean dadas de lado, ya que se trata de los temas «divertidos» de la Física clásica. Como alternativa, la obra puede utilizarse en las partes de los cursos de Física Matemática o teórica que traten la Mecánica. En este caso, los estudiantes que sigan estos cursos deberán poseer ya un curso de introducción a la Física y al Cálculo Integral.*

El propósito de este libro es triple: (a) Presentar un tratamiento moderno de los sistemas mecánicos clásicos, de tal forma que el paso a las teorías cuánticas pueda efectuarse con la menor dificultad posible. Para ello, se utiliza abundantemente la notación y la terminología actuales y, asimismo, se resaltan particularmente aquellos conceptos de importancia para la Física moderna. (b) Familiarizar

* Las secciones que pueden ser omitidas sin destruir la continuidad se indican de esta manera: ■

al estudiante con nuevas técnicas matemáticas siempre que sea posible, facilitándole práctica suficiente en la resolución de problemas para que llegue a hacerse razonablemente diestro en el empleo de aquéllas. (c) Dotar al estudiante, en el período crucial de su carrera entre la Física de «iniciación» y la «superior», de un cierto grado de perfeccionamiento en el manejo, tanto del formalismo de la teoría, como de las técnicas operativas de la resolución de problemas.

En este volumen se desarrollan métodos matemáticos nuevos a medida que la ocasión lo solicita. Sin embargo, esperamos que mientras sigan un curso con este libro, los lectores del mismo se encuentren siguiendo un curso aparte de matemáticas superiores. Si bien el estudiante de Física debe comprender y apreciar el rigor matemático, allí donde la continuidad de las ideas físicas pudiera ser estorbada por la insistencia en el rigor matemático y en las generalizaciones, se ha dado prioridad a la «física».

En el primer capítulo se desarrollan los métodos vectoriales que se utilizan a través de todo el libro, suponiéndose que el estudiante ya está familiarizado con la idea de vector como «segmento orientado». Por consiguiente, aquí adoptamos un punto de vista más conceptual y desarrollamos el análisis vectorial examinando las propiedades de los cambios de coordenadas, lo cual posee la ventaja de constituir una base firme para la transición posterior a los métodos tensoriales (capítulos 12 y 13). Para los estudiantes cuya formación tenga alguna deficiencia y para repaso de los que posean conocimientos más elevados, se han dispuesto apéndices acerca del empleo de números complejos y de la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias, así como acerca de otros métodos matemáticos.

En todas las materias que se desarrollan en este volumen, se incluyen ejemplos frecuentes. El lector encontrará que en esos ejemplos, así como en las deducciones, se ofrece una generosa cantidad de detalles y que la expresión «puede demostrarse que» se mantiene a un mínimo. Sin embargo, se han omitido, en caso necesario, algunas de las manipulaciones algebraicas más largas y tediosas, al objeto de que el estudiante no pierda de vista el substrato de la cuestión. Asimismo, los problemas forman un todo completo dentro del texto y el estudiante deberá resolver una parte sustancial de los que se ofrecen si espera adquirir un dominio aceptable de los distintos temas.

Un aspecto de esta obra que el autor encontró especialmente atractivo, fue la preparación de las notas históricas de los pies de página. La Historia de la Física ha sido casi eliminada de los planes de estudio actuales, resultando que el estudiante no suele estar al corriente de los antecedentes de un tema particular, inclusive hasta el punto de no serle familiares los nombres de los grandes maestros de la Matemática y de la Física que se esforzaron en el desarrollo de cada tema. Por consiguiente, estas notas se han incluido para estimular el apetito del estudiante y alentarlo a hacer averiguaciones dentro de la historia de esta rama de la ciencia. En general, se han omitido las referencias a la literatura original, a excepción de

los trabajos relativamente modernos (¡en inglés!) a los que puede esperarse que los estudiantes tengan acceso.

Al final de cada uno de los capítulos se encontrarán listas de «referencias recomendadas», clasificadas por materias y nivel de dificultad. Estas listas son frecuentemente extensas; no esperamos, por descontado, que los estudiantes hayan de consultar cada una de ellas, si bien se ofrecen en número suficiente para que exista una probabilidad razonable de que seamos capaces de localizar por lo menos alguna fuente de material complementario. El grueso de dichas listas está formado por textos relativamente recientes que probablemente serán más accesibles y atractivos para el estudiante.

El autor desea expresar su agradecimiento al Centro de Cálculo de la Universidad de Maryland por facilitarles el empleo del ordenador IBM 7090/1401 al objeto de calcular muchas de las curvas que aparecen en este libro.

Matrices, vectores y cálculo vectorial

1.1 Introducción

El método vectorial* proporciona la manera más concisa y elegante para realizar el análisis de los fenómenos físicos. Cuando aplicamos las «leyes» de la Física a situaciones particulares, es evidente que los resultados han de ser independientes del sistema de referencia elegido, sea éste, por ejemplo, cartesiano rectangular o cilíndrico bipolar, así como de donde situemos el origen de coordenadas; con el empleo de vectores cumplimos con este requisito de independencia respecto de las particularidades del sistema de referencia que, por las razones que sean, hayamos utilizado. Por lo tanto, podemos dar por sentado que una ley física dada estará siempre representada correctamente cualquiera que sea el sistema de referencia elegido, por conveniencia, para describir un problema particular. Además, la notación vectorial proporciona un método para expresar de forma compacta los resultados, incluso los más complicados.

* Todo el mérito por el desarrollo del análisis vectorial ha de atribuirse a Josiah Willard Gibbs (1839-1903) quien lo llevó a cabo, en su mayor parte, durante los años 1880-1882. La notación vectorial de hoy día se debe a Oliver Heaviside (1850-1925), ingeniero eléctrico inglés, y data de 1893 aproximadamente.

Si fuésemos a tratar del tema de los vectores desde un punto de vista elemental, podríamos comenzar la discusión estableciendo que «un vector es una magnitud que puede estar representada por un segmento rectilíneo orientado». Sin duda, este desarrollo nos daría resultados correctos, e incluso sería beneficioso para imprimir una cierta familiarización con la naturaleza física de los vectores. Ahora bien, aquí supondremos que el lector ya conoce todo este desarrollo, razón por la cual lo pasaremos por alto, ya que nuestro deseo es hacer hincapié en las relaciones que cumplen los vectores en las transformaciones de coordenadas. Para este fin, será conveniente que introduzcamos las matrices y la notación matricial para representar no sólo las transformaciones, sino también los vectores. Asimismo, presentaremos y utilizaremos aquí una forma de notación fácilmente adaptable a los tensores, si bien no vamos a encontrarnos con éstos hasta que el desarrollo normal de las materias tratadas haga necesario su empleo (capítulo 12).

No intentamos aquí hacer una exposición completa de los métodos vectoriales; por el contrario, sólo vamos a ocuparnos de aquellos temas que son necesarios para el estudio de los sistemas mecánicos. Así pues, en el capítulo presente vamos a tratar de los aspectos fundamentales del álgebra de matrices y vectores y del cálculo vectorial, pudiendo consultarse MARION, *Principles of Vector Analysis* (Ma65a), si se desea una exposición más completa del análisis vectorial desde el punto de vista de sus aplicaciones a los problemas de la Física. De este capítulo se han omitido muchas cuestiones de detalle y varias de las demostraciones más implicadas en el mismo, materias adicionales que el lector podrá encontrar en la referencia Ma65a.

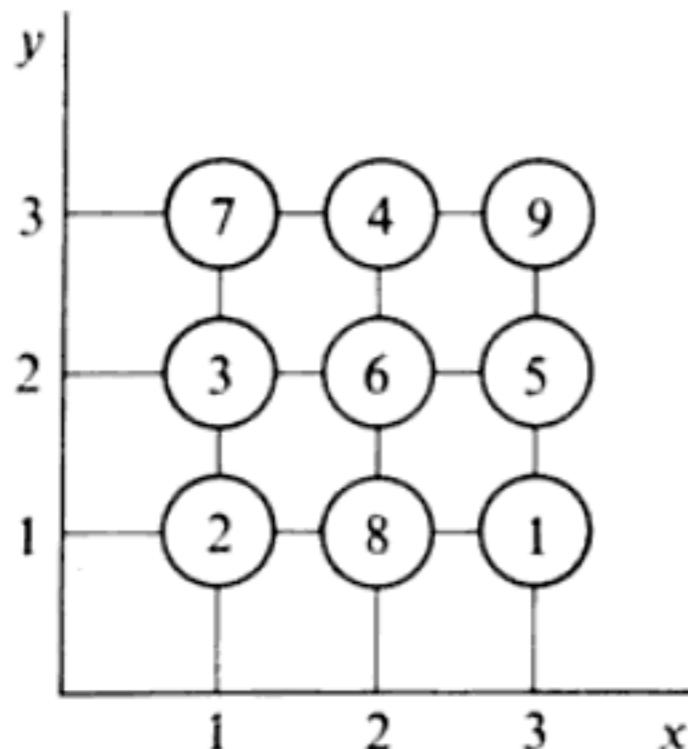


FIG. 1-1a

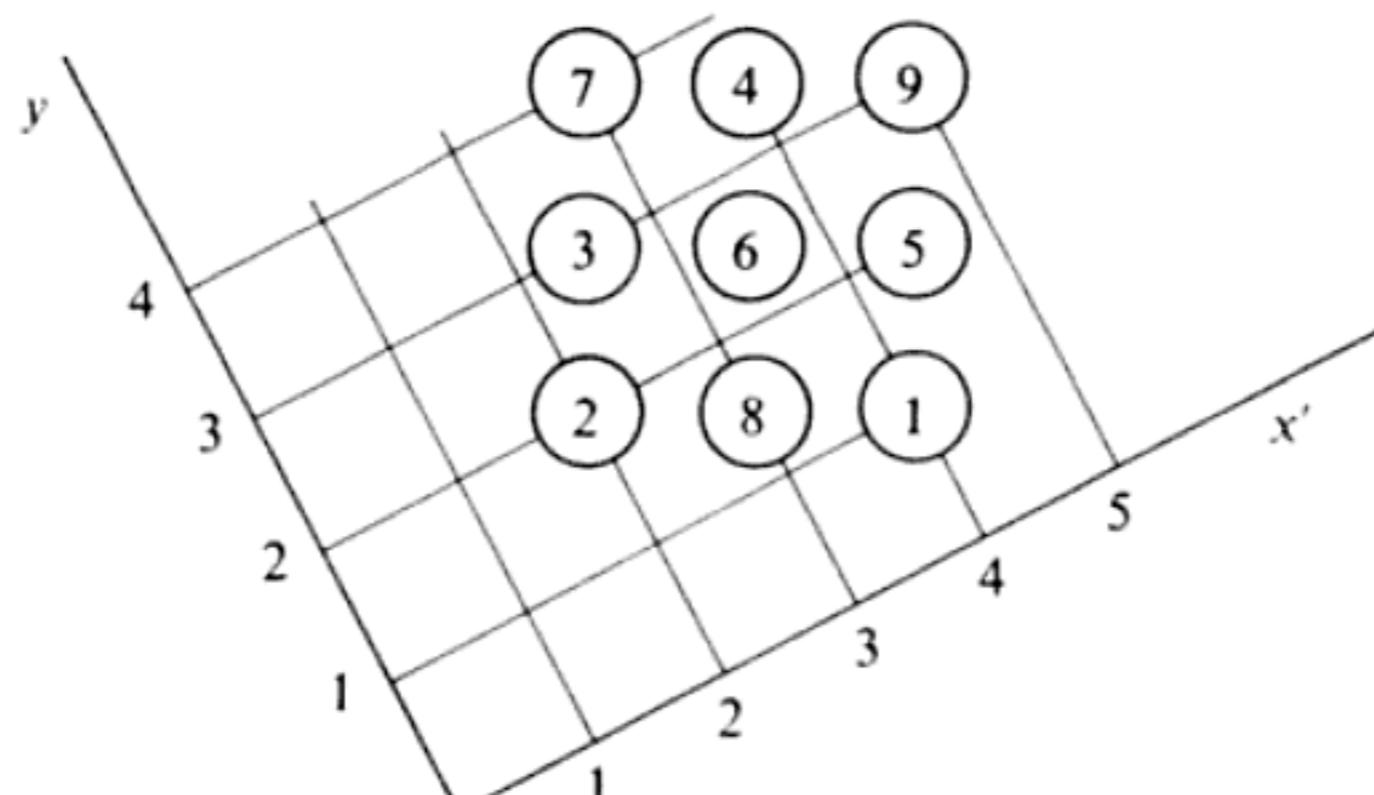


FIG. 1-1b

1.2 Concepto de escalar

Consideremos el conjunto de partículas ordenadas entre sí de la figura 1-1a, cada una de las cuales está señalada con un número que representa su masa en gramos. Los ejes de coordenadas están representados, de forma que es posible identificar cada una de las partículas mediante un par de números (x, y) , pudiéndose expresar la masa M , de la partícula situada en (x, y) por $M(x, y)$; así, la masa de la partícula situada en $x=2, y=3$ puede escribirse $M(x=2, y=3)=4$. Supongamos ahora que, tal como se indica en la figura 1-1b, los ejes han sufrido un giro y un desplazamiento. Vemos que la masa de 4 gramos está ahora situada en $x'=4, y'=3,5$; o sea, la masa se expresa $M(x'=4, y'=3,5)=4$. En general,

$$M(x, y) = M(x', y') \quad (1.1)$$

puesto que la masa de toda partícula no resulta afectada por los cambios de coordenadas. Las magnitudes que tienen la propiedad de permanecer *invariantes bajo las transformaciones de coordenadas*, es decir, aquellas que obedecen a relaciones de la forma 1.1, reciben el nombre de *escalares*.

Aunque es posible que la masa de una partícula (o su temperatura, o su velocidad, etc.) con relación a cualquier sistema de coordenadas esté dada por el mismo número, está claro que existen algunas propiedades físicas asociadas a dicha partícula (como la dirección de su movimiento o la de una fuerza que actúe sobre ella) que no se pueden expresar de una manera tan sencilla. Para la descripción de estas magnitudes más complicadas se hace necesario el uso de *vectores*. De la misma forma que un escalar se define como una magnitud que permanece invariante bajo una transformación de coordenadas, un vector puede definirse también en función de sus propiedades con relación a las transformaciones de coordenadas. Comenzaremos examinando de qué forma varían las coordenadas de un punto cuando el sistema de referencia sufre una rotación alrededor del origen.

1.3 Transformaciones de coordenadas

Sea el punto P , de coordenadas* x_1, x_2, x_3 respecto a un sistema de referencia determinado. Consideremos también otro sistema de referencia, producido por una rotación simple del anterior, y sean x'_1, x'_2, x'_3 las coordenadas de P respecto a este último sistema. En la figura 1-2 se ilustra esta situación en el caso bidimensional.

* Identificaremos los ejes por x_1, x_2, x_3 en lugar de x, y, z , al objeto de simplificar la notación cuando sea posible emplear el símbolo sumatorio. Por el momento nos limitaremos a tratar con sistemas de coordenadas cartesianas (o rectangulares).

La coordenada x'_1 , relativa al nuevo sistema, es igual a la suma de la proyección de x_1 sobre el eje x'_1 (segmento \overline{Oa}) más la proyección de x_2 sobre el eje x'_1 (segmento $\overline{ab} + \overline{bc}$). O sea,

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \cos \theta + x_2 \operatorname{sen} \theta \\&= x_1 \cos \theta + x_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\end{aligned}\quad (1.2a)$$

La nueva coordenada x'_2 se obtiene de forma similar: $x'_2 = \overline{Od} - \overline{de}$, siendo el segmento \overline{de} igual al segmento \overline{Of} . Por tanto,

$$\begin{aligned}x'_2 &= -x_1 \operatorname{sen} \theta + x_2 \cos \theta \\&= x_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + x_2 \cos \theta\end{aligned}\quad (1.2b)$$

Hagamos ahora el convenio siguiente: el ángulo formado por los ejes x'_1 y x_1 será representado por (x'_1, x_1) y, en general, representaremos por (x'_i, x_j) al ángulo que forman los ejes x'_i y x_j . Además, llamaremos λ_{ij} al coseno del ángulo (x'_i, x_j) .

$$\lambda_{ij} \equiv \cos(x'_i, x_j) \quad (1.3)$$

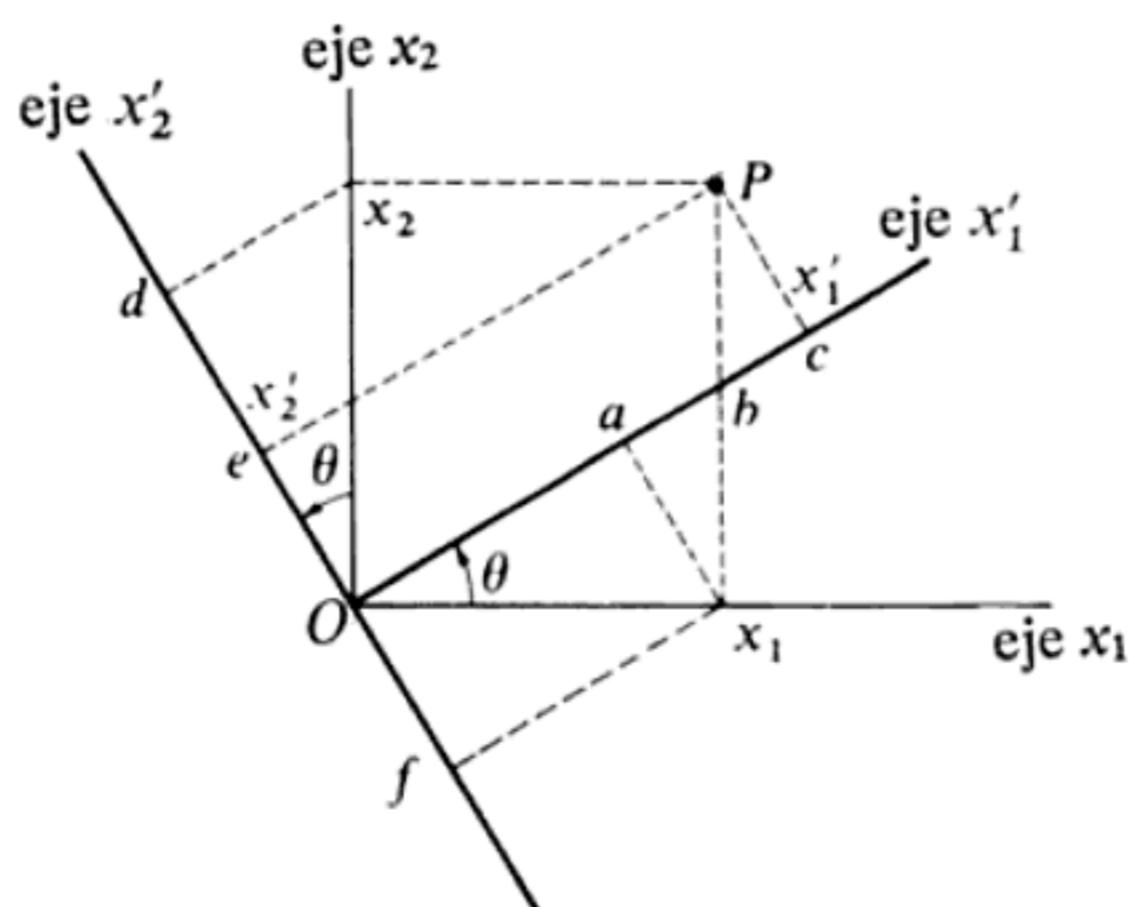


FIG. 1-2

Tenemos, por tanto, para el caso de la figura 1-2:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_{11} = \cos(x'_1, x_1) = \cos \theta \\ \lambda_{12} = \cos(x'_1, x_2) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta \\ \lambda_{21} = \cos(x'_2, x_1) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta \\ \lambda_{22} = \cos(x'_2, x_2) = \cos \theta \end{array} \right\} \quad (1.4)$$

Con esto, las fórmulas de transformación toman la forma

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos(x'_1, x_1) + x_2 \cos(x'_1, x_2) \\ &= \lambda_{11} x_1 + \lambda_{12} x_2 \end{aligned} \quad (1.5a)$$

$$\begin{aligned} x'_2 &= x_1 \cos(x'_2, x_1) + x_2 \cos(x'_2, x_2) \\ &= \lambda_{21} x_1 + \lambda_{22} x_2 \end{aligned} \quad (1.5b)$$

Y así, para el caso general de tres dimensiones tenemos

$$\left. \begin{array}{l} x'_1 = \lambda_{11} x_1 + \lambda_{12} x_2 + \lambda_{13} x_3 \\ x'_2 = \lambda_{21} x_1 + \lambda_{22} x_2 + \lambda_{23} x_3 \\ x'_3 = \lambda_{31} x_1 + \lambda_{32} x_2 + \lambda_{33} x_3 \end{array} \right\} \quad (1.6)$$

O bien, utilizando el símbolo sumatorio

$x'_i = \sum_{j=1}^3 \lambda_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, 3$

(1.7)

Para la transformación inversa tenemos

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1 \cos(x'_1, x_1) + x'_2 \cos(x'_2, x_1) + x'_3 \cos(x'_3, x_1) \\ &= \lambda_{11} x'_1 + \lambda_{21} x'_2 + \lambda_{31} x'_3 \end{aligned}$$

que en general es

$x_i = \sum_{j=1}^3 \lambda_{ji} x'_j, \quad i = 1, 2, 3$

(1.8)

La cantidad λ_{ij} es precisamente el llamado *coseno director* del eje x'_i respecto del eje x_j . Es conveniente disponer estas cantidades λ_{ij} según una ordenación en forma de cuadrado llamada *matriz*:

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

donde el símbolo λ será utilizado para representar a la totalidad de los elementos individuales λ_{ij} cuando se presentan en la forma indicada.

Las expresiones 1.7 y 1.8 nos dan las relaciones generales entre las coordenadas de un mismo punto respecto de ambos sistemas, una vez conocidos los cosenos directores que ligan a los mismos.

Cuando λ queda definida de la forma que acabamos de indicar, dejando especificadas las propiedades de transformación de las coordenadas de un punto, recibe el nombre de *matriz de transformación* o de *matriz de giro*.

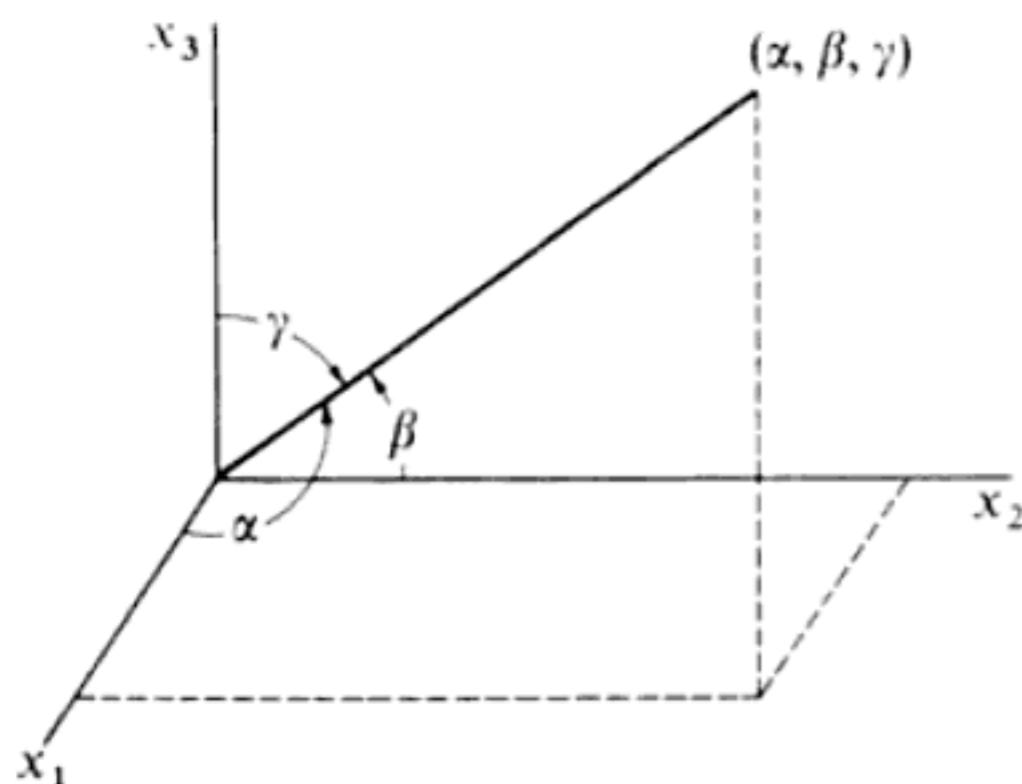


FIG. 1-3a

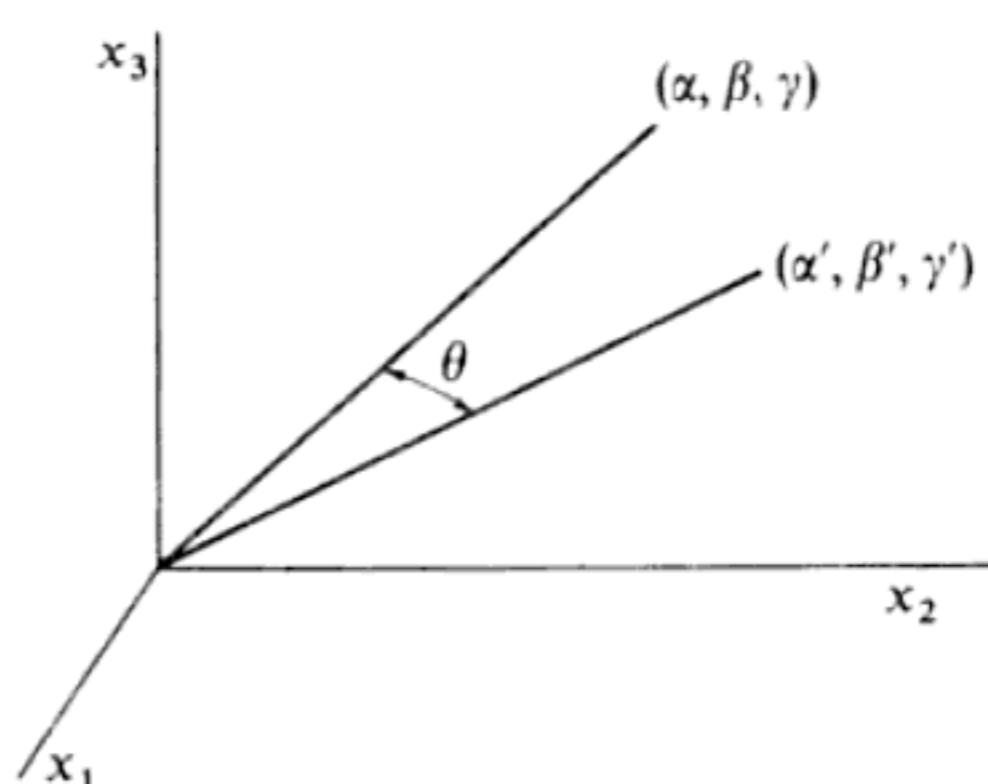


FIG. 1-3b

1.4 Propiedades de las matrices de giro

Es necesario que, para empezar, recordemos dos propiedades trigonométricas. Consideremos el segmento rectilíneo de la figura 1-3a, situado en el espacio según una cierta orientación; elijamos un sistema de referencia cuyo origen se encuentre sobre el segmento, de manera que éste formará con cada uno de los ejes coordenados un ángulo determinado. Llaremos α , β y γ , respectivamente, a los ángulos formados por el segmento con los ejes x_1 , x_2 y x_3 . Nos interesan

especialmente los cosenos de estos ángulos ($\cos \alpha$, $\cos \beta$ y $\cos \gamma$) los cuales reciben el nombre de *cosenos directores* del segmento rectilíneo. La primera propiedad que necesitaremos es la identidad

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (1.10)$$

La segunda es que el coseno del ángulo θ formado por dos rectas de cosenos directores $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ y $\cos \alpha'$, $\cos \beta'$, $\cos \gamma'$ (véase figura 1-3b) viene dado por

$$\cos \theta = \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma' \quad (1.11)$$

Tomemos ahora el sistema de ejes x_1 , x_2 , x_3 y démosle un giro en torno a un eje que pase por el origen, hasta situarlos en una nueva posición donde los identificaremos por x'_1 , x'_2 , x'_3 . El giro dado a este sistema de referencia puede especificarse dando los cosenos de los ángulos que forman entre sí los distintos ejes, es decir las cantidades λ_{ij} .

Las nueve cantidades λ_{ij} no son todas independientes; de hecho, sólo son independientes tres de ellas, puesto que utilizando las expresiones trigonométricas 1.10 y 1.11 es posible establecer entre las λ_{ij} seis relaciones.

Supongamos, primero que el eje x'_1 es una recta referida al sistema (x_1, x_2, x_3) para el que sus cosenos directores serán λ_{11} , λ_{12} y λ_{13} . Análogamente, los cosenos directores del eje x'_2 con relación al sistema (x_1, x_2, x_3) vienen dados por λ_{21} , λ_{22} y λ_{23} . Como el ángulo formado por los ejes x'_1 y x'_2 es $\pi/2$ tendremos que, según 1.11,

$$\lambda_{11}\lambda_{21} + \lambda_{12}\lambda_{22} + \lambda_{13}\lambda_{23} = \cos \theta = \cos(\pi/2) = 0$$

o bien*

$$\sum_j \lambda_{1j} \lambda_{2j} = 0$$

Y, en general,

$$\sum_j \lambda_{ij} \lambda_{kj} = 0, \quad i \neq k \quad (1.12a)$$

Esta expresión 1-12a nos da tres (una para cada uno de los valores que tomen i o k) de las seis relaciones que existen entre las λ_{ij} .

* Damos por entendido que los índices de los símbolos sumatorios varían de 1 a 3.

Como la suma de los cuadrados de los cosenos directores de una recta es igual a la unidad (1.10), tenemos, en el caso del eje x'_1 referido al sistema (x_1, x_2, x_3) ,

$$\lambda_{11}^2 + \lambda_{12}^2 + \lambda_{13}^2 = 1$$

o bien

$$\sum_j \lambda_{1j}^2 = \sum_j \lambda_{1j} \lambda_{1j} = 1$$

Y, en general,

$$\sum_j \lambda_{ij} \lambda_{kj} = 1, \quad i = k \quad (1.12b)$$

que son las tres relaciones restantes entre las λ_{ij} .

Los resultados contenidos en 1.12a y 1.12b pueden expresarse como sigue, en forma combinada,

$$\boxed{\sum_j \lambda_{ij} \lambda_{kj} = \delta_{ik}} \quad (1.13)$$

donde el símbolo δ_{ik} es la delta de Kronecker:^{*}

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq k \\ 1, & \text{si } i = k \end{cases} \quad (1.14)$$

La validez de 1.13 depende de que los ejes de cada uno de los sistemas sean perpendiculares entre sí. Este tipo de sistemas son los llamados *ortogonales* y 1.13 constituye la *condición de ortogonalidad*. Esta relación 1.13 la debe cumplir toda matriz de transformación λ que dé cuenta del giro de un sistema de referencia ortogonal cualquiera.

Si ahora considerásemos que los ejes x_i son rectas referidas al sistema de ejes x'_i y lleváramos a cabo un proceso de cálculo análogo al anterior, llegaríamos a la relación

$$\boxed{\sum_i \lambda_{ij} \lambda_{ik} = \delta_{jk}} \quad (1.15)$$

* Introducida por Leopold Kronecker (1823-1891).

Aparentemente, las dos condiciones de ortogonalidad 1.13 y 1.15, que acabamos de deducir, son diferentes. (Nótese que en 1.13 la suma se extiende sobre los *segundos* subíndices de las λ_{ij} , mientras que en 1.15 se extiende sobre los *primeros* subíndices.) De esta forma, parece que nos encontramos frente a un sistema de ecuaciones superabundante: doce ecuaciones* y nueve incógnitas. Sin embargo, no es éste el caso, puesto que las relaciones 1.13 y 1.15 no son en realidad «diferentes» y, de hecho, la validez de cualquiera de las dos implica la validez de la otra. Esto es evidente por consideraciones físicas (ya que las transformaciones en ambos sentidos entre los dos sistemas son equivalentes) y prescindimos aquí de una demostración formal.** Podemos, pues, considerar que tanto 1.13 como 1.15 nos dan las relaciones de ortogonalidad de nuestros sistemas de referencia.

En lo que acabamos de tratar con relación a las transformaciones de coordenadas y a las propiedades de las matrices de giro, hemos supuesto que el punto P se encuentra fijo, siendo el sistema de coordenadas el que sufre un giro. Esta hipótesis no es la única posible; igualmente pudimos suponer que los ejes se mantienen fijos y que el punto P gira (manteniendo siempre constante su distancia al origen). En cualquiera de los casos, la matriz de transformación es la misma. Por ejemplo, consideraremos las situaciones ilustradas en las figuras 1-4a y 1-4b. En la figura 1-4a, los ejes x_1 y x_2 constituyen el sistema de referencia y los x'_1 y x'_2 se obtienen de los anteriores mediante una rotación de ángulo θ . Por lo tanto, las coordenadas de P con relación a los ejes girados vienen dadas por (v. 1-2a y 1-2b)

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta \\ x'_2 &= -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

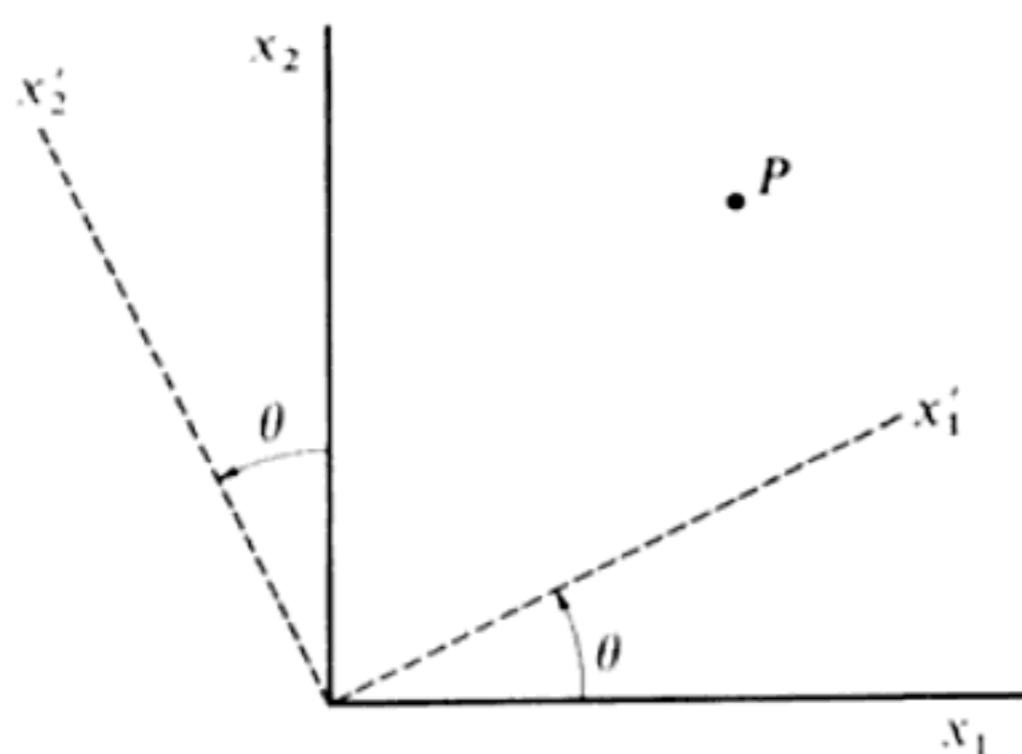


FIG. 1-4a

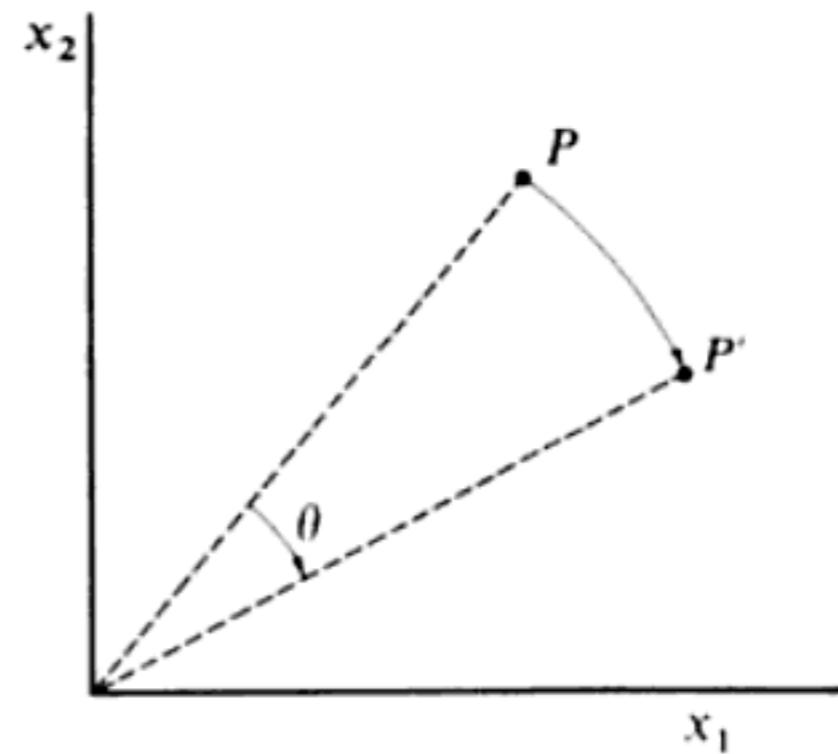


FIG. 1-4b

* Recuérdese que cada una de las relaciones de ortogonalidad representa seis ecuaciones.

** Puede encontrarse en MARION, Ma65a, sección 1.16.

Si, por otra parte, los ejes permanecen fijos y el punto gira (como se indica en la figura 1-4b) un ángulo θ en torno al origen (pero en sentido contrario al de los ejes), las coordenadas de P' vendrán dadas exactamente por las expresiones 1.16. Por lo tanto, a nuestra elección podemos decir, bien que la transformación actúa sobre el *punto*, cambiando su estado con relación a un sistema de referencia fijo (figura 1-4b), o bien que la transformación actúa sobre el *sistema de referencia*, como es el caso de la figura 1-4a. Matemáticamente, ambas interpretaciones son totalmente equivalentes.

1.5 Operaciones con matrices*

La matriz λ , definida en 1.9, tiene el mismo número de filas y columnas, por lo que decimos que es una *matriz cuadrada*. No es necesario en absoluto que una matriz sea cuadrada; así, por ejemplo, las coordenadas de un punto pueden escribirse en forma de matriz *columna*:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (1.17a)$$

o bien en forma de matriz *fila*:

$$\mathbf{x} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \quad (1.17b)$$

Debemos proceder ahora a establecer las reglas de multiplicación de dos matrices, reglas que habrán de ser compatibles con 1.7 y 1.8 cuando prefiramos expresar las x_i y las x'_i en forma matricial. Expresemos las coordenadas mediante una *matriz columna*, con lo cual tendremos las expresiones equivalentes siguientes:

$$x'_i = \sum_j \lambda_{ij} x_j \quad (1.18a)$$

$$\mathbf{x}' = \lambda \mathbf{x} \quad (1.18b)$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (1.18c)$$

* El primer desarrollo sistemático de la teoría de matrices fue realizado por A. CAYLEY en 1855, si bien muchas de sus ideas se deben a Sir William ROWAN HAMILTON quien ya en 1852 había tratado de los «operadores vectoriales lineales». El primero en utilizar el término «matriz» fue J. J. SILVESTER en 1850.

$$\left. \begin{array}{l} x'_1 = \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}x_2 + \lambda_{13}x_3 \\ x'_2 = \lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}x_2 + \lambda_{23}x_3 \\ x'_3 = \lambda_{31}x_1 + \lambda_{32}x_2 + \lambda_{33}x_3 \end{array} \right\} \quad (1.18d)$$

Las expresiones 1.18 definen completamente la operación de multiplicación o producto de matrices en el caso de una matriz de 3 filas y 3 columnas que multiplica a una matriz de 3 filas y 1 columna. (Por razones de compatibilidad con los convenios habituales del cálculo matricial, definimos \mathbf{x} y \mathbf{x}' como matrices columna; si \mathbf{x} y \mathbf{x}' fuesen matrices fila,* no estaría definido el producto del tipo 1.18c. Vamos a ampliar ahora la definición de producto al objeto de incluir las matrices de un número cualquiera de filas y columnas.

El producto de una matriz \mathbf{A} por una matriz \mathbf{B} sólo está definido si el número de *columnas* de \mathbf{A} es igual al número de *filas* de \mathbf{B} . (Los números de *filas* de \mathbf{A} y de *columnas* de \mathbf{B} pueden ser cualesquiera; ahora bien, solamente tendremos ocasión de considerar casos en los que \mathbf{A} sea una matriz cuadrada.) Así pues, por analogía con 1.18a, el producto \mathbf{AB} viene dado por

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB}$$

$$C_{ij} = [\mathbf{AB}]_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}$$

(1.19)

Resulta evidente de 1.19 que el producto de matrices no es conmutativo, por lo que, siendo \mathbf{A} y \mathbf{B} matrices cuadradas, las sumas

$$\sum_k A_{ik} B_{kj} \quad \text{y} \quad \sum_k B_{ik} A_{kj}$$

estarán definidas ambas, pero en general no serán iguales.

◆ Ejemplo 1.5 No conmutatividad de las matrices

Si \mathbf{A} y \mathbf{B} son las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

* Aunque siempre que λ aparezca multiplicando a \mathbf{x} , la matriz de las coordenadas \mathbf{x} debe expresarse en forma de matriz columna, es posible escribir \mathbf{x} en forma de matriz fila (x_1, x_2, x_3) , en otros casos.

es

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 13 & -8 \end{pmatrix} \quad (2)$$

pero

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 10 & -2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

1.6 Otras definiciones

Matriz traspuesta de una matriz dada es la que se obtiene de ésta permutando en ella filas por columnas; la *traspuesta* de una matriz \mathbf{A} se representa por \mathbf{A}^t . Según la definición, tenemos

$$\lambda_{ij}^t = \lambda_{ji} \quad (1.20)$$

y es evidente que

$$(\lambda')^t = \lambda \quad (1.21)$$

Por tanto, la relación 1.8 puede escribirse en la forma de una cualquiera de las siguientes expresiones equivalentes:

$$x_i = \sum_j \lambda_{ji} x'_j \quad (1.22a)$$

$$x_i = \sum_j \lambda_{ij}^t x'_j \quad (1.22b)$$

$$\mathbf{x} = \lambda' \mathbf{x}' \quad (1.22c)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{32} \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & \lambda_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \quad (1.22d)$$

La *matriz unidad* es por definición aquella matriz que al multiplicar a otra deja a ésta inalterada; esto es,

$$\mathbf{1A} = \mathbf{A}; \quad \mathbf{B1} = \mathbf{B} \quad (1.23)$$

o bien,

$$\mathbf{1A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}$$

Consideremos la matriz ortogonal de giro λ en el caso bidimensional,

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \lambda\lambda^t &= \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_{11}^2 + \lambda_{12}^2 & \lambda_{11}\lambda_{21} + \lambda_{12}\lambda_{22} \\ \lambda_{21}\lambda_{11} + \lambda_{22}\lambda_{12} & \lambda_{21}^2 + \lambda_{22}^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Al hacer uso de la relación de ortogonalidad 1.13, encontramos que

$$\begin{aligned} \lambda_{11}^2 + \lambda_{12}^2 &= \lambda_{21}^2 + \lambda_{22}^2 = 1 \\ \lambda_{21}\lambda_{11} + \lambda_{22}\lambda_{12} &= \lambda_{11}\lambda_{21} + \lambda_{12}\lambda_{22} = 0 \end{aligned}$$

de manera que en el caso particular de la matriz ortogonal de giro λ tenemos*

$$\lambda\lambda^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \quad (1.24)$$

La *inversa* de una matriz dada es, por definición, aquella que multiplicada por la original da la matriz unidad; la inversa de una matriz λ se representa por λ^{-1} :

$$\lambda\lambda^{-1} = 1 \quad (1.25)$$

Si comparamos 1.24 y 1.25, encontramos que

$\lambda^t = \lambda^{-1}$

en el caso de matrices ortogonales. (1.26)

Por lo tanto, la traspuesta y la inversa de la matriz de giro λ son iguales. Realmente, la traspuesta de *toda* matriz ortogonal es igual a la inversa de ésta.

Resumamos ahora algunas de las reglas del álgebra de matrices:

(a) En general, el producto de matrices no es commutativo:

$$AB \neq BA \quad (1.27a)$$

* Este resultado no es válido en general para todas las matrices; sólo es cierto en el caso de las matrices *ortogonales*.

Como caso particular citaremos el producto de una matriz por su inversa, que sí es conmutativo:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbf{1} \quad (1.27b)$$

La matriz unidad siempre conmuta:

$$\mathbf{1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{1} = \mathbf{A} \quad (1.27c)$$

(b) El producto de matrices es asociativo:

$$[\mathbf{AB}]\mathbf{C} = \mathbf{A}[\mathbf{BC}] \quad (1.28)$$

(c) La adición de dos matrices se lleva a cabo sumando los elementos correspondientes de ambas. Las componentes de la matriz suma $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ son

$$C_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \quad (1.29)$$

Por supuesto, la suma de matrices sólo está definida en el caso de que los sumandos sean de las mismas dimensiones.

1.7 Interpretación geométrica de las matrices de transformación

Consideremos el caso que se representa en la figura 1-5, donde los ejes de coordenadas han sufrido un giro de 90° en torno del eje x_3 en sentido contrario al de las agujas del reloj.* En esta rotación se verifica $x'_1 = x_2$, $x'_2 = -x_1$ y $x'_3 = x_3$.

Los únicos cosenos que no se anulan son

$$\cos(x'_1, x_2) = -1 = \lambda_{12}$$

$$\cos(x'_2, x_1) = 1 = \lambda_{21}$$

$$\cos(x'_3, x_3) = 1 = \lambda_{33}$$

De manera que la matriz λ es, en este caso,

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

* El sentido de giro se determina mirando, desde el plano que sufre la rotación, hacia la parte positiva del eje de giro. Este criterio coincide con la «regla de la mano derecha» según la cual el sentido positivo es el de avance de un tornillo a derechas cuando se le hace girar en el mismo sentido.

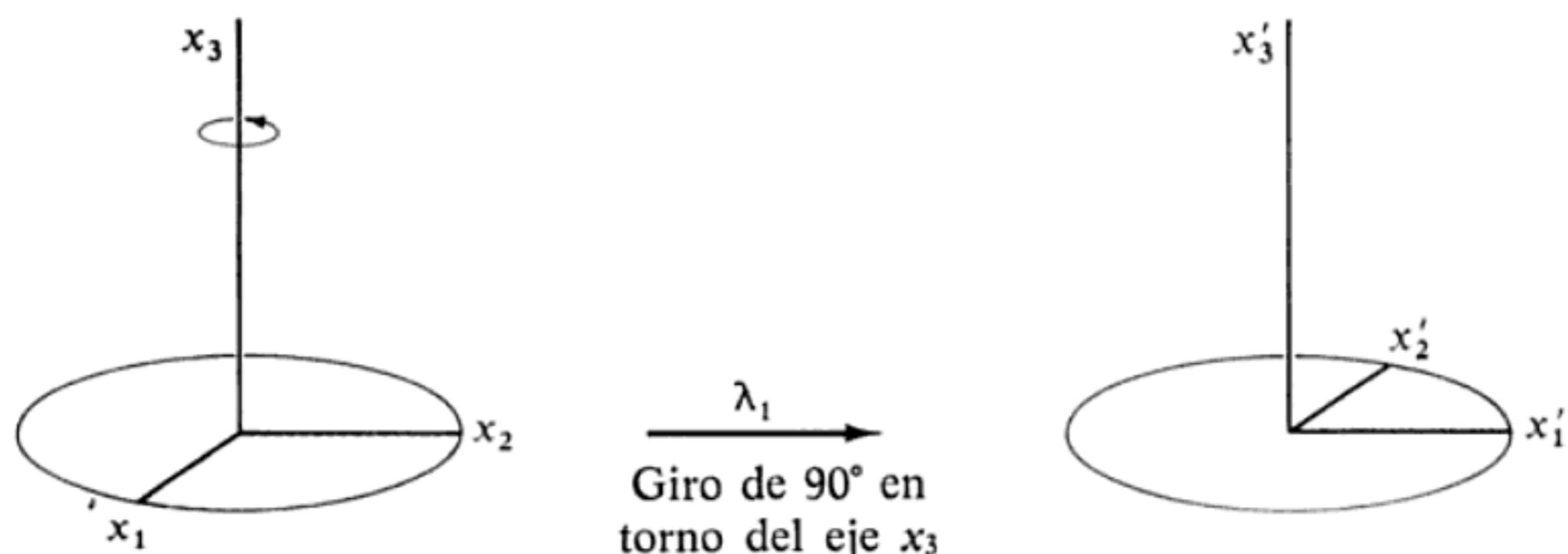


FIG. 1-5

Consideremos ahora la rotación de 90° en torno del eje x_1 y en sentido contrario al de las agujas del reloj, tal como se representa en la figura 1-6. En este caso tenemos $x'_1 = x_1$, $x'_2 = x_3$ y $x'_3 = -x_2$ y la matriz de transformación es

$$\lambda_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

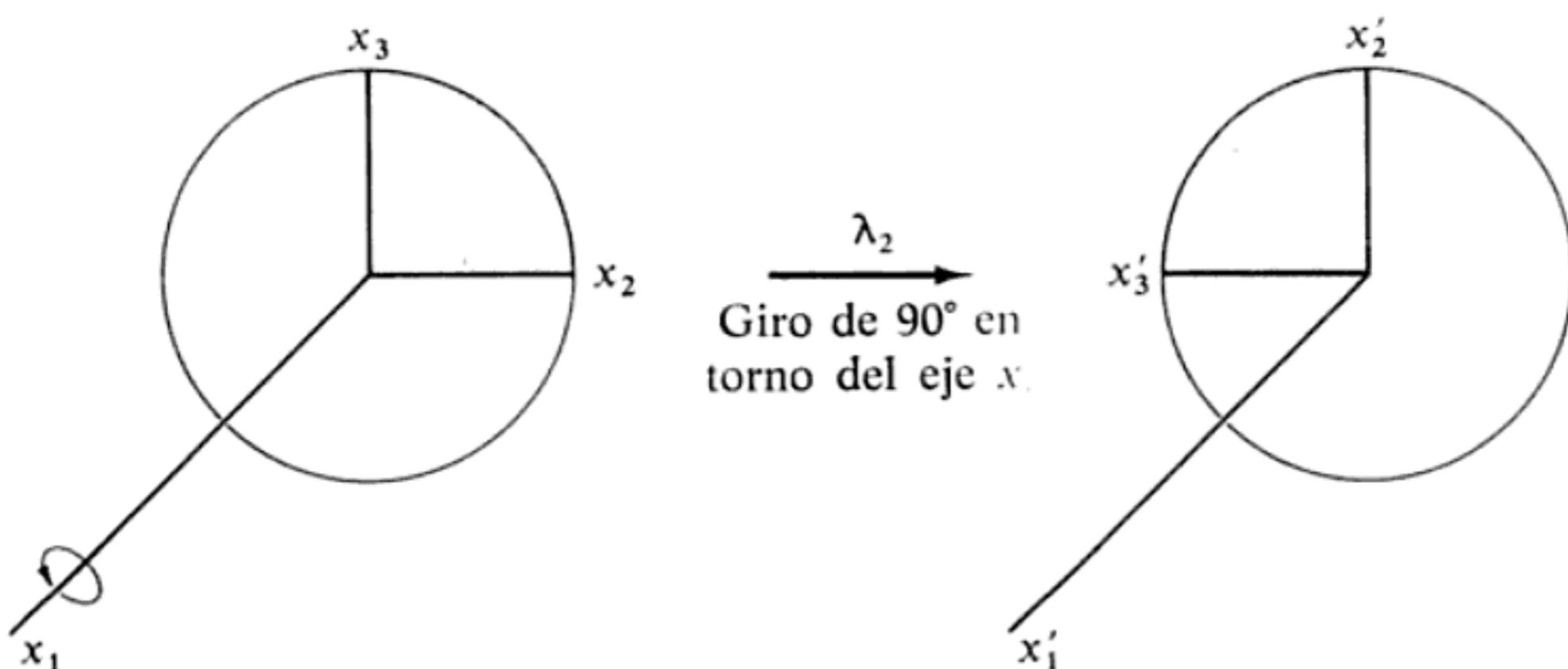


FIG. 1-6

Determinemos la matriz de transformación que da cuenta del efecto de la combinación de ambos giros, primero uno en torno del eje x_3 seguido de otro en torno del eje x_1 ; se tiene (v. figura 1-7)

$$\mathbf{x}' = \lambda_1 \mathbf{x} \quad (1.32a)$$

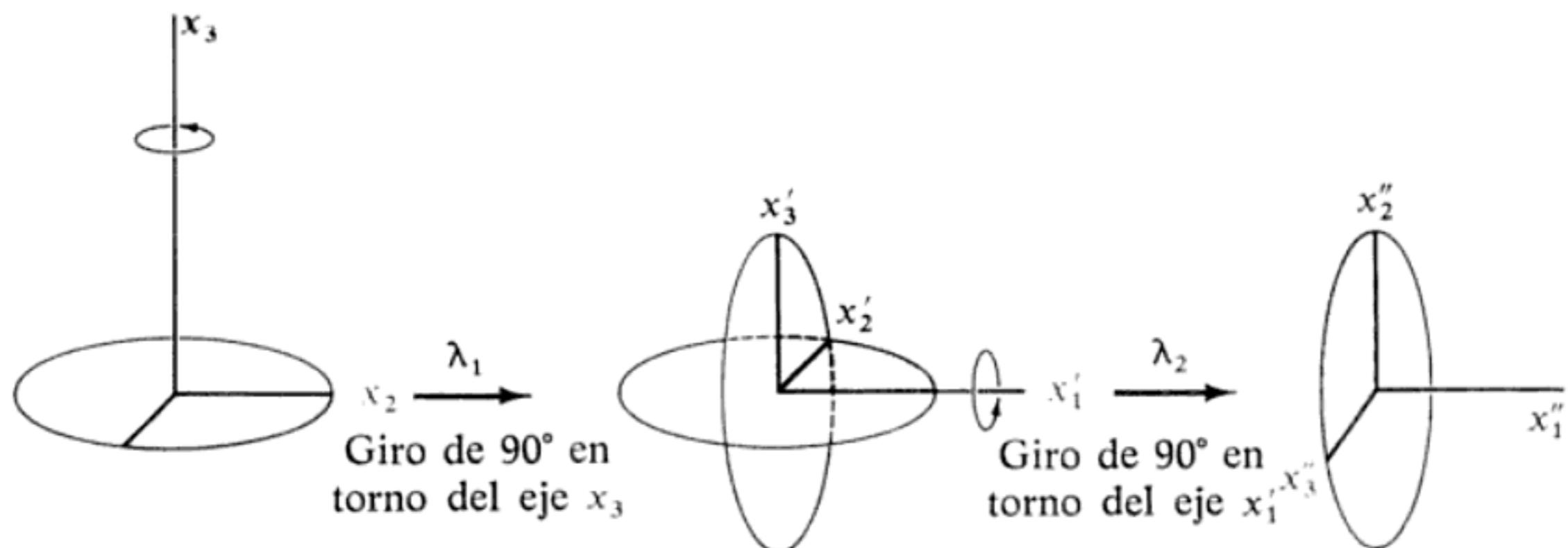


FIG. 1-7

$$\mathbf{y} \quad \mathbf{x}'' = \lambda_2 \mathbf{x}' \quad (1.32b)$$

y de ambas

$$\mathbf{x}'' = \lambda_2 \lambda_1 \mathbf{x} \quad (1.33a)$$

$$\begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad (1.33b)$$

Por lo tanto, las dos rotaciones de que hemos hablado antes pueden quedar representadas por una sola matriz de transformación:

$$\lambda_3 = \lambda_2 \lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

siendo la orientación final $x''_1 = x_2$, $x''_2 = x_3$ y $x''_3 = x_1$. Nótese la importancia que tiene el orden en que las matrices de transformación actúan sobre \mathbf{x} , puesto que el producto no es conmutativo; en efecto, si invertimos el orden

$$\begin{aligned} \lambda_4 &= \lambda_1 \lambda_2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \neq \lambda_3 \end{aligned} \quad (1.35)$$

y resulta una orientación final completamente distinta. En la figura 1-8 se ilustran las diferentes orientaciones finales que adquiere un paralelepípedo cuando sufre dos rotaciones, correspondientes a sendas matrices de giro λ_A y λ_B , aplicándose aquéllas sucesivamente en órdenes distintos. En la parte superior de la figura se representa el producto de matrices $\lambda_A\lambda_B$, mientras la parte inferior representa el efecto del producto $\lambda_B\lambda_A$.

Pasemos a considerar, a continuación, el giro representado en la figura 1-9 (que es el mismo de la figura 1-2). Los elementos de la matriz de transformación bidimensional vienen dados por los cosenos siguientes:

$$\cos(x'_1, x_1) = \cos \theta = \lambda_{11}$$

$$\cos(x'_1, x_2) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta = \lambda_{12}$$

$$\cos(x'_2, x_1) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta = \lambda_{21}$$

$$\cos(x'_2, x_2) = \cos \theta = \lambda_{22}$$

y, por lo tanto, la matriz es

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

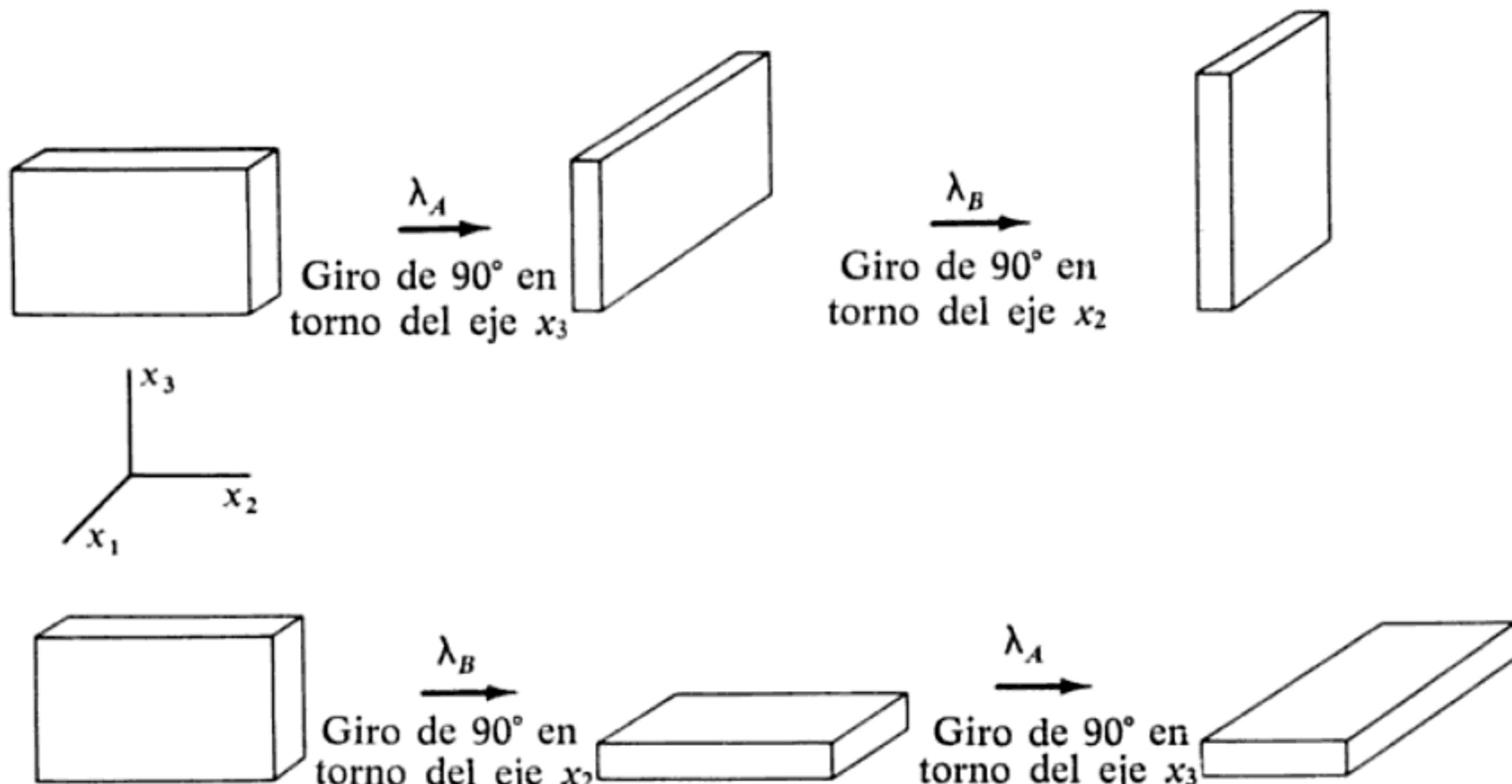
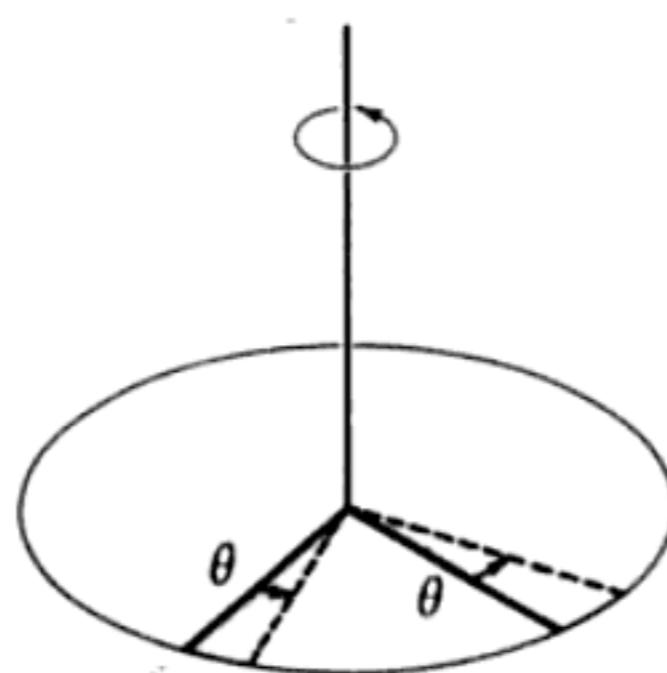


FIG. 1-8



1-8 - 1-9

Si hubiésemos supuesto que este giro tuviese lugar en tres dimensiones, siendo $x'_3 = x_3$, habríamos tenido entonces que tomar en cuenta a los cosenos adicionales siguientes

$$\cos(x'_1, x_3) = 0 = \lambda_{13}$$

$$\cos(x'_2, x_3) = 0 = \lambda_{23}$$

$$\cos(x'_3, x_3) = 1 = \lambda_{33}$$

$$\cos(x'_3, x_1) = 0 = \lambda_{31}$$

$$\cos(x'_3, x_2) = 0 = \lambda_{32}$$

y la matriz de transformación tridimensional sería

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.36a)$$

Como ejemplo final, consideremos la transformación cuyo resultado es la reflexión respecto del origen de todos los ejes, tal como se representa en la figura 1-10. Esta transformación recibe el nombre de *inversión*, verificándose $x'_1 = -x_1$, $x'_2 = -x_2$ y $x'_3 = -x_3$, y siendo

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

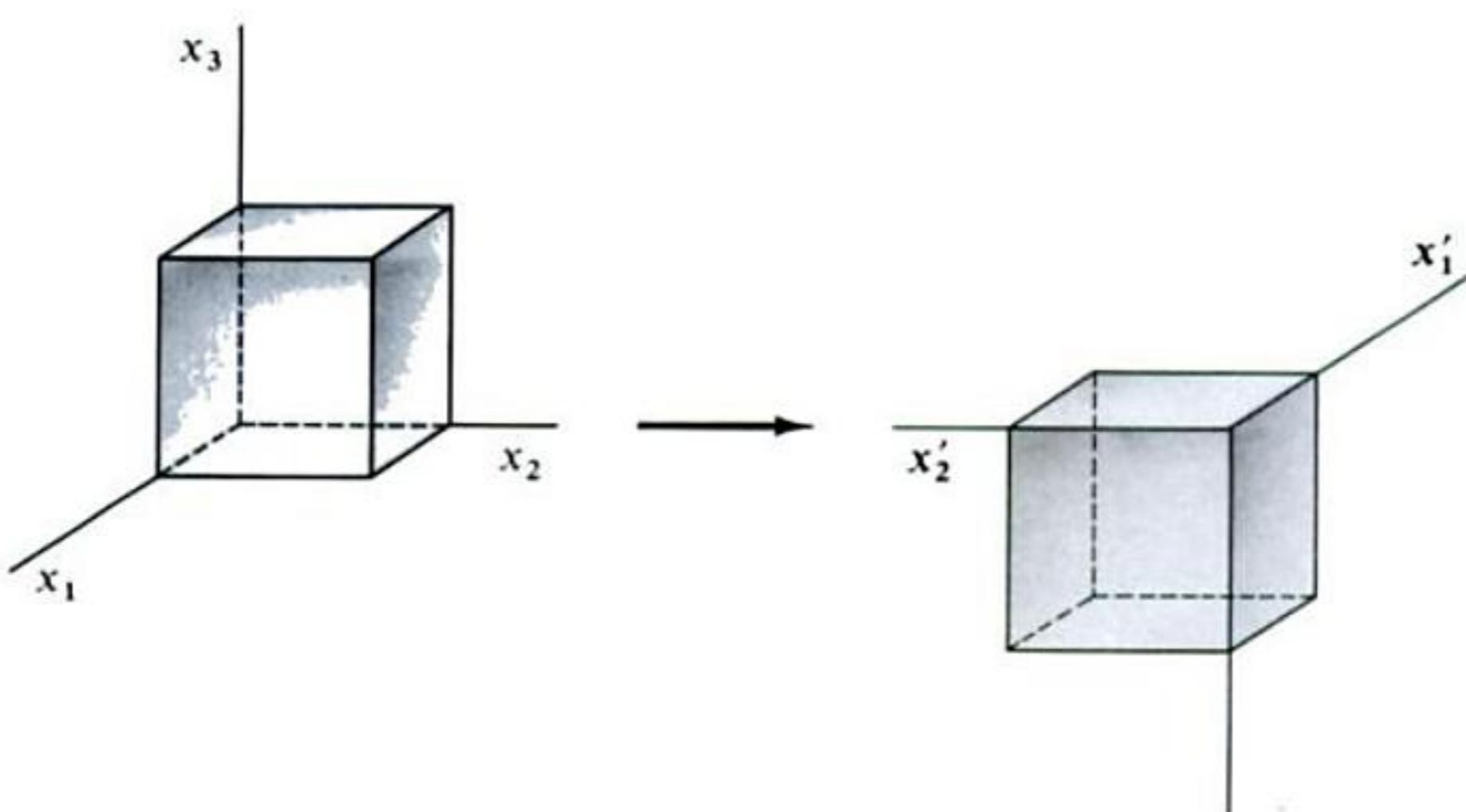


FIG. 1-10

En los ejemplos anteriores, la matriz de transformación λ_3 era, por definición, el resultado de dos giros aplicados sucesivamente, cada uno de los cuales era una transformación ortogonal: $\lambda_3 = \lambda_2 \lambda_1$. Es posible demostrar, como vamos a ver a continuación, que el resultado de la aplicación sucesiva de transformaciones ortogonales es siempre una transformación ortogonal. Supongamos

$$x'_i = \sum_j \lambda_{ij} x_j ; \quad x''_k = \sum_i \mu_{ki} x'_i$$

expresiones que, combinadas, nos dan

$$\begin{aligned} x''_k &= \sum_j \left(\sum_i \mu_{ki} \lambda_{ij} \right) x_j \\ &= \sum_j [\mu\lambda]_{kj} x_j \end{aligned}$$

Así pues, el paso de x_i a x''_i se obtiene haciendo actuar sobre x_i a la matriz $(\mu\lambda)$. Esta transformación combinada será ortogonal si cumple que $(\mu\lambda)^t = (\mu\lambda)^{-1}$. Como la traspuesta de una matriz producto es igual al producto de las matrices traspuestas tomadas en orden inverso (v. problema 1-3), es decir $(AB)^t = B^t A^t$, podemos escribir:

$$(\mu\lambda)^t = \lambda^t \mu^t \tag{1.38}$$

Ahora bien, λ y μ son ortogonales, luego $\lambda' = \lambda^{-1}$ y $\mu' = \mu^{-1}$ y, si ahora multiplicamos 1.38 por la derecha por $\mu\lambda$, tenemos

$$\begin{aligned} (\mu\lambda)' \mu\lambda &= \lambda' \mu' \mu\lambda \\ &= \lambda' 1 \lambda \\ &= \lambda' \lambda \\ &= 1 \\ &= (\mu\lambda)^{-1} \mu\lambda \end{aligned}$$

De aquí,

$$(\mu\lambda)' = (\mu\lambda)^{-1} \quad (1.39)$$

y la matriz $\mu\lambda$ es ortogonal.

Los determinantes de todas las matrices de giro de los ejemplos precedentes pueden calcularse mediante la regla ordinaria del cálculo de los determinantes de segundo y tercer órdenes:

$$|\lambda| = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{vmatrix} = \lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21} \quad (1.40)$$

$$\begin{aligned} |\lambda| &= \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{vmatrix} \\ &= \lambda_{11} \begin{vmatrix} \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{vmatrix} - \lambda_{12} \begin{vmatrix} \lambda_{21} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{33} \end{vmatrix} + \lambda_{13} \begin{vmatrix} \lambda_{21} & \lambda_{22} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (1.41)$$

donde el determinante de tercer orden se ha desarrollado por los elementos de la primera fila. Entonces, hallaremos

pero $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \dots = |\lambda_5| = 1$

$$|\lambda_6| = -1$$

Así pues, los determinantes de todas aquellas transformaciones que son el resultado de *giros que comienzan por el sistema de ejes original* son iguales a $+1$. Una *inversión*, sin embargo, no puede ser engendrada por serie alguna de rotaciones y el determinante de la matriz inversión vale -1 . Las transformaciones ortogonales cuyas matrices poseen determinantes de valor $+1$ reciben el nombre de *rotaciones propias*, y aquellas cuyas matrices poseen determinantes de valor -1 reciben el nombre de *rotaciones impropias*. Puede verse en MARION, Ma65a, sec-

ción 1.7, la demostración de que los determinantes de todas las matrices ortogonales son iguales a $+1$ o a -1 . A partir de aquí, reduciremos nuestra atención a los efectos de las rotaciones propias y no nos ocuparemos de las propiedades particulares que manifiestan los vectores en las rotaciones impropias. (De este último tema se trata con detalle en *Principles of Vector Analysis*.)

1.8 Definiciones de escalar y vector en función de sus comportamientos bajo las transformaciones

Sea una transformación de coordenadas del tipo

$$x'_i = \sum_j \lambda_{ij} x_j \quad (1.42)$$

con

$$\sum_j \lambda_{ij} \lambda_{kj} = \delta_{ik} \quad (1.43)$$

Llamaremos *escalar* (o *invariante escalar*) a toda magnitud φ que no resulte afectada por una de tales transformaciones.

Si un conjunto de magnitudes (A_1, A_2, A_3) se transforman al pasar del sistema x_i al sistema x'_i mediante una matriz de transformación λ , resultando

$$A'_i = \sum_j \lambda_{ij} A_j$$

(1.44)

transformándose, pues, las magnitudes A_i igual que las coordenadas de un punto (o sea, según 1.42), la magnitud $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ recibe el nombre de *vector*.

1.9 Operaciones elementales con escalares y vectores

En lo que sigue \mathbf{A} y \mathbf{B} serán vectores (de componentes A_i y B_i) y φ , ψ y ζ escalares

Suma

$$A_i + B_i = B_i + A_i \quad \text{Ley conmutativa} \quad (1.45)$$

$$A_i + (B_i + C_i) = (A_i + B_i) + C_i \quad \text{Ley asociativa} \quad (1.46)$$

$$\varphi + \psi = \psi + \varphi \quad \text{Ley conmutativa} \quad (1.47)$$

$$\varphi + (\psi + \xi) = (\varphi + \psi) + \xi \quad \text{Ley asociativa} \quad (1.48)$$

Multiplicación por un escalar ξ

$$\xi \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad \text{resulta un vector} \quad (1.49)$$

$$\xi \varphi = \psi \quad \text{resulta un escalar} \quad (1.50)$$

La expresión 1.49 puede demostrarse como sigue:

$$\begin{aligned} B'_i &= \sum_j \lambda_{ij} B_j = \sum_j \lambda_{ij} \xi A_j \\ &= \xi \sum_j \lambda_{ij} A_j = \xi A'_i \end{aligned} \quad (1.51)$$

transformándose $\xi \mathbf{A}$ como un vector. De forma similar, $\xi \varphi$ se transforma como un escalar.

1.10 Producto escalar de dos vectores

Por definición, el *producto escalar* de dos vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} es

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_i A_i B_i} \quad (1.52)$$

donde el punto situado entre \mathbf{A} y \mathbf{B} se emplea para identificar al producto *escalar*; a veces, esta operación recibe el nombre de *producto interno*.

Las componentes del vector \mathbf{A} son A_1 , A_2 y A_3 , siendo su módulo (o longitud)

$$|\mathbf{A}| = +\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \equiv A \quad (1.53)$$

en que $|\mathbf{A}|$ representará dicho módulo, a menos que no exista posibilidad de confusión, en cuyo caso lo representaremos sencillamente por A . Si dividimos ambos miembros de 1.52 por AB , tenemos

$$\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB} = \sum_i \frac{A_i}{A} \frac{B_i}{B} \quad (1.54)$$

Ahora, según podemos ver en la figura 1-11, resulta que A_1/A es el coseno del ángulo α formado por \mathbf{A} y el eje x_1 . En general, A_i/A y B_i/B son los cosenos Λ_i^A y Λ_i^B de los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} , respectivamente:

$$\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB} = \sum_i \Lambda_i^A \Lambda_i^B \quad (1.55)$$

La suma $\sum_i \Lambda_i^A \Lambda_i^B$ es precisamente el coseno del ángulo que forman \mathbf{A} y \mathbf{B} (véase 1.11):

$$\cos(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sum_i \Lambda_i^A \Lambda_i^B$$

o sea

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos(\mathbf{A}, \mathbf{B})} \quad (1.56)$$

Que el producto $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ es realmente un escalar puede demostrarse como sigue. Puesto que \mathbf{A} y \mathbf{B} son vectores, tendremos que

$$A'_i = \sum_j \lambda_{ij} A_j; \quad B'_i = \sum_k \lambda_{ik} B_k \quad (1.57)$$

y, por lo tanto, el producto $\mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}'$ se transforma en

$$\mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}' = \sum_i A'_i B'_i = \sum_i \left(\sum_j \lambda_{ij} A_j \right) \left(\sum_k \lambda_{ik} B_k \right)$$

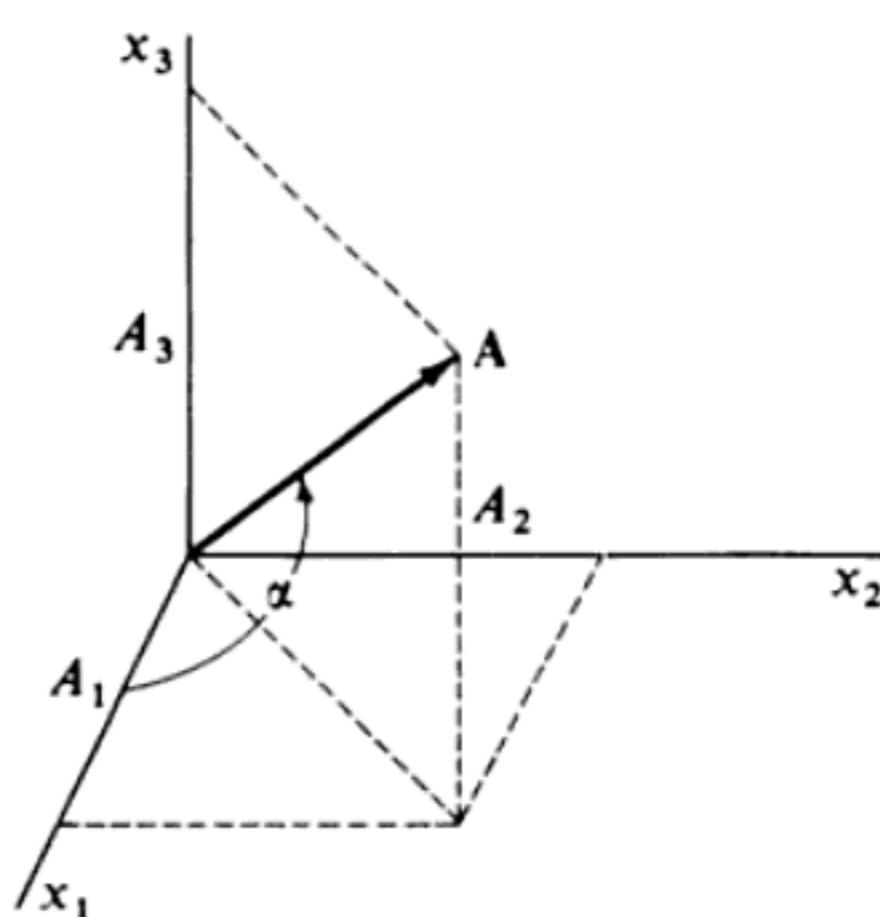


FIG. 1-11

Si ordenamos las sumas convenientemente, podemos escribir

$$\mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}' = \sum_{j,k} \left(\sum_i \lambda_{ij} \lambda_{ik} \right) A_j B_k$$

Pero, según la condición de ortogonalidad, el término entre paréntesis es precisamente δ_{ik} . Así pues,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}' &= \sum_j \left(\sum_k \delta_{jk} A_j B_k \right) \\ &= \sum_j A_j B_j \\ &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \end{aligned} \tag{1.58}$$

Puesto que el valor del producto no resulta alterado por la transformación de coordenadas, concluimos en que el mismo es un escalar.

Nótese que la distancia desde el origen hasta el punto (x_1, x_2, x_3) definido por el vector \mathbf{A} viene dada por

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{\sum_i x_i^2}$$

Análogamente, la distancia desde el punto (x_1, x_2, x_3) al punto $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ definido por el vector \mathbf{B} es

$$\sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x}_i)^2} = \sqrt{(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B})} = |\mathbf{A} - \mathbf{B}|$$

Es decir que, tal como se representa en la figura 1-12, podemos definir el vector que une dos puntos cualesquiera como el vector diferencia de los vectores que

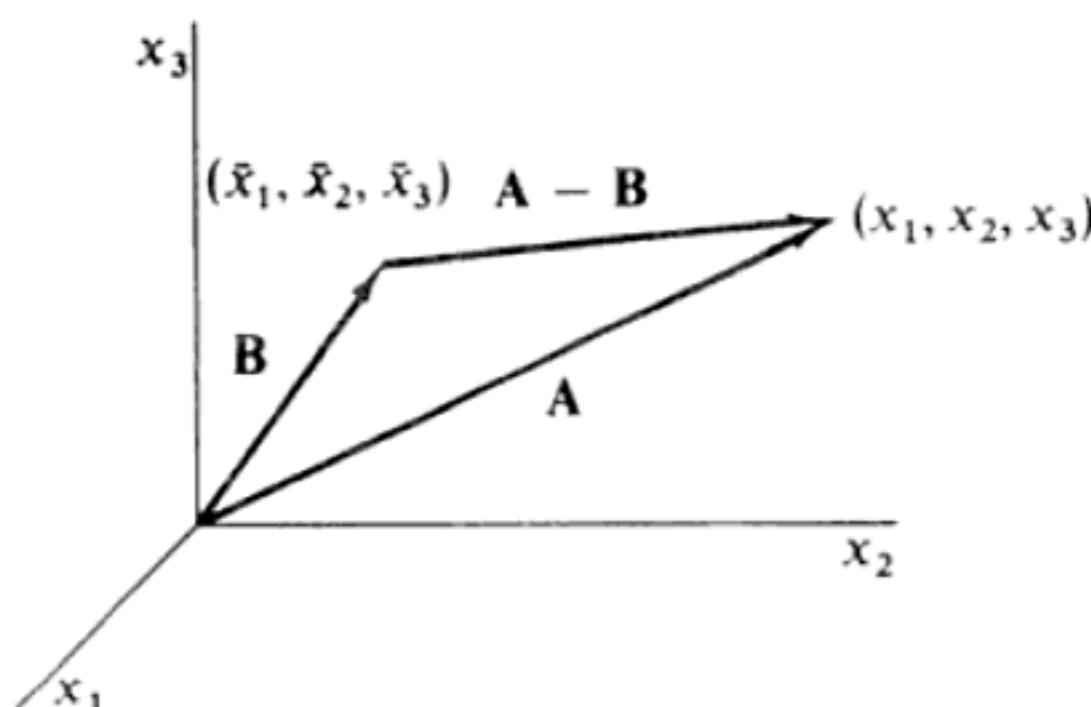


FIG. 1-12

definen a cada uno de los puntos. La distancia entre ambos puntos será la longitud del vector diferencia y como ésta es la raíz cuadrada de un producto escalar, resulta que la distancia es un invariante respecto de las transformaciones de coordenadas. Es éste un hecho de gran importancia que podemos resumir afirmando que *en las transformaciones ortogonales se conservan las distancias*. Es asimismo evidente que el ángulo formado por dos vectores también se conserva bajo una transformación ortogonal. Estos dos resultados serán claramente fundamentales si nos proponemos aplicar con éxito a los problemas físicos toda la teoría que hemos desarrollado acerca de las transformaciones de coordenadas.

El producto escalar obedece a las leyes conmutativa y distributiva:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_i A_i B_i = \sum_i B_i A_i = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (1.59)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= \sum_i A_i (B_i + C_i) = \sum_i A_i B_i + \sum_i A_i C_i \\ &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \end{aligned} \quad (1.60)$$

1.11 Producto vectorial de dos vectores

Pasemos a considerar a continuación otra forma de combinar dos vectores: el llamado *producto vectorial*. En primer lugar, afirmaremos que esta operación produce realmente un vector.* El producto vectorial de \mathbf{A} y \mathbf{B} se representa mediante un aspa \times ,**

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad (1.61)$$

donde \mathbf{C} es el vector que, según hemos afirmado, es el resultado de la operación. Por definición, las componentes de \mathbf{C} serán

$$C_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} A_j B_k \quad (1.62)$$

* En realidad, el vector producto vectorial es un vector *axial* pero emplearemos la expresión *producto vectorial* puesto que es la utilizada popularmente (v. MARION, Ma65a, sección 1.15).

** En otras notaciones, ya anticuadas, se escribe $[\mathbf{AB}]$, $[\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}]$, y $[\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}]$.

donde ϵ_{ijk} es el *símbolo alternante* (o *densidad de Levi-Civita*) cuyas propiedades son las siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} 0, \text{ si hay dos subíndices iguales} \\ \epsilon_{ijk} = +1, \text{ si } i, j, k \text{ forman una permutación par de } 1, 2, 3 \\ -1, \text{ si } i, j, k \text{ forman una permutación impar de } 1, 2, 3 \end{array} \right\} \quad (1.63)$$

Así pues,

$$\begin{aligned} \epsilon_{122} &= \epsilon_{313} = \epsilon_{211} = 0, \text{ etc.} \\ \epsilon_{123} &= \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = +1 \\ \epsilon_{132} &= \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1 \end{aligned}$$

Con esta notación podemos calcular explícitamente las componentes de \mathbf{C} . En el caso $i=1$, las únicas ϵ_{ijk} que no se anulan son ϵ_{123} y ϵ_{132} , o sea $j, k=2, 3$ tomados en ambos órdenes. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} C_1 &= \sum_{j, k} \epsilon_{1jk} A_j B_k = \epsilon_{123} A_2 B_3 + \epsilon_{132} A_3 B_2 \\ &= A_2 B_3 - A_3 B_2 \end{aligned} \quad (1.64a)$$

Y, análogamente,

$$C_2 = A_3 B_1 - A_1 B_3 \quad (1.64b)$$

$$C_3 = A_1 B_2 - A_2 B_1 \quad (1.64c)$$

Tomemos ahora la expresión $[AB \operatorname{sen}(\mathbf{A}, \mathbf{B})]^2 = (AB \operatorname{sen} \theta)^2$ y desarrollémosla:

$$\begin{aligned} A^2 B^2 \operatorname{sen}^2 \theta &= A^2 B^2 - A^2 B^2 \cos^2 \theta \\ &= \left(\sum_i A_i^2 \right) \left(\sum_i B_i^2 \right) - \left(\sum_i A_i B_i \right)^2 \\ &= (A_2 B_3 - A_3 B_2)^2 + (A_3 B_1 - A_1 B_3)^2 + (A_1 B_2 - A_2 B_1)^2 \end{aligned} \quad (1.65)$$

donde la última igualdad precisa de alguna elaboración matemática. En la última expresión identificamos en seguida las componentes de \mathbf{C} y, por lo tanto, podemos escribir

$$(AB \operatorname{sen} \theta)^2 = C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 = |\mathbf{C}^2| = C^2 \quad (1.66)$$

en la que tomaremos, en ambos miembros, los valores positivos de las raíces cuadradas,

$$C = AB \operatorname{sen} \theta \quad (1.67)$$

Según esta expresión, resulta que, si $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, el módulo de \mathbf{C} será igual al producto de los módulos de \mathbf{A} y \mathbf{B} multiplicado por el seno del ángulo que forman. Como se muestra en la figura 1-13, geométricamente $AB \operatorname{sen} \theta$ representa el área del paralelogramo definido por los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} .

Se verifica también que $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ ($= \mathbf{C}$) es normal al plano definido por \mathbf{A} y \mathbf{B} puesto que $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0$ y $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0$. Resulta así que toda superficie plana puede estar representada por un vector normal a ella y de módulo igual al área de la misma; es evidente que el vector \mathbf{C} sirve para este cometido. El sentido de \mathbf{C} será, por convenio, el de avance de un tornillo a derechas cuando gira en el sentido de \mathbf{A} a \mathbf{B} .

Habiéndose dado las componentes, el módulo y la interpretación geométrica del producto vectorial tenemos a éste ya completamente definido. Dentro de lo razonable, sólo nos queda ya esperar que sea realmente un vector; sin embargo, la prueba definitiva reside en el examen de las propiedades de transformación de \mathbf{C} . En MARION, Ma65a, sección 1.14, se demuestra que de hecho \mathbf{C} se transforma como un vector bajo una rotación propia.

Mencionemos las propiedades siguientes del producto vectorial, que son consecuencia de las definiciones:

$$(a) \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (1.68a)$$

pero, en general

$$(b) \quad \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \neq (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} \quad (1.68b)$$

Y otra relación importante es (véase problema 1-16)

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (1.69)$$

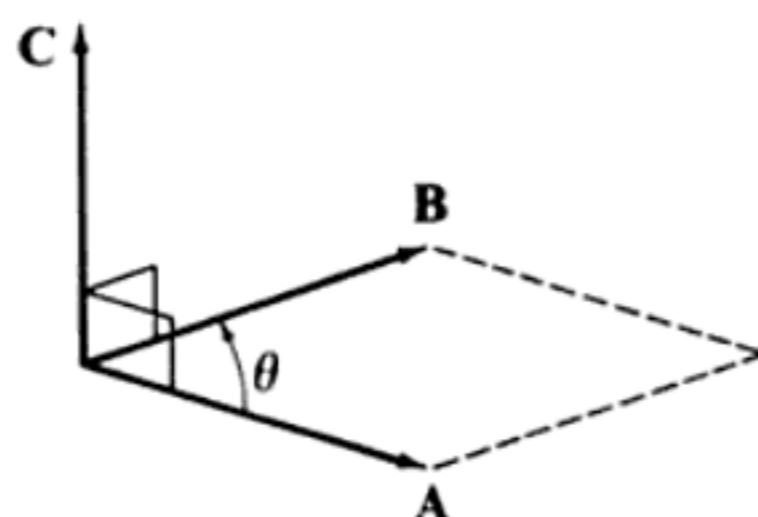


FIG. 1-13

◆ Ejemplo 1.11 Deducción de una identidad vectorial

El método habitual para demostrar relaciones vectoriales complicadas consiste en partir del resultado, conocido de antemano, y desarrollar por componentes ambos miembros de la igualdad, obteniéndose finalmente una identidad. Sin embargo, mediante el símbolo ϵ_{ijk} es posible deducir los resultados más complicados de forma inmediata. Por ejemplo, para determinar el producto $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})$ empezaremos escribiendo la componente i de cada producto vectorial, según la definición 1.62:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i = \sum_{j, k} \epsilon_{ijk} A_j B_k \quad (1)$$

$$(\mathbf{C} \times \mathbf{D})_i = \sum_{l, m} \epsilon_{ilm} C_l D_m \quad (2)$$

Según 1.52, el producto escalar será

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \sum_i \left(\sum_{j, k} \epsilon_{ijk} A_j B_k \right) \left(\sum_{l, m} \epsilon_{ilm} C_l D_m \right) \quad (3)$$

y si ordenamos las sumas convenientemente se tendrá

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \sum_{l, m} \left(\sum_i \epsilon_{jkl} \epsilon_{lmi} \right) A_j B_k C_l D_m \quad (4)$$

donde se han permutado los subíndices de las ϵ (dos veces cada uno para que no tenga lugar cambio de signo) de forma que el subíndice afectado por el símbolo sumatorio de dentro del paréntesis quede en el tercer lugar. Podemos ahora hacer uso de una importante propiedad de ϵ_{ijk} (véase problema 1-16):

$$\sum_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$$

(5)

con lo que la igualdad (4) se transforma en

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \sum_{j, k} \left(\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} \right) A_j B_k C_l D_m \quad (6)$$

Al efectuar las sumas que afectan a j y k , las deltas de Kronecker nos reducen esta expresión a

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \sum_{l, m} (A_l B_m C_l D_m - A_m B_l C_l D_m) \quad (7)$$

que puede disponerse como sigue

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \left(\sum_l A_l C_l \right) \left(\sum_m B_m D_m \right) - \left(\sum_l B_l C_l \right) \left(\sum_m A_m D_m \right) \quad (8)$$

Como cada uno de los términos entre paréntesis del segundo miembro es precisamente un producto escalar, se tiene por fin

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}) \quad (9)$$

1.12 Versores

Con gran frecuencia es aconsejable expresar un vector en función de sus componentes según los tres ejes de coordenadas, una vez establecido el convenio para la designación de estos últimos. A este propósito se definen los vectores unitarios correspondientes a los tres ejes rectangulares,* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, llamados *versores*. De esta forma un vector \mathbf{A} puede expresarse de las dos maneras equivalentes siguientes:

$$\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3) \quad \text{o} \quad \mathbf{A} = \mathbf{e}_1 A_1 + \mathbf{e}_2 A_2 + \mathbf{e}_3 A_3 = \sum_i \mathbf{e}_i A_i \quad (1.70)$$

obteniéndose las componentes de \mathbf{A} mediante proyecciones sobre los ejes

$$A_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A} \quad (1.71)$$

Ya hemos visto (expresión 1.56) que el valor del producto escalar de dos vectores es igual al producto de sus módulos multiplicado por el coseno del ángulo que forman:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \quad (1.72)$$

con lo que el producto escalar de dos versores cualesquiera puede expresarse, al ser éstos normales entre sí,

$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$

(1.73)

* Existen en uso muchas variantes para representar a los versores. Las notaciones más frecuentes son quizá $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ o $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ y en otros casos $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ e I_x, I_y, I_z .

Además, por la condición de ortogonalidad de los \mathbf{e}_i , es necesariamente

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_k, \quad i, j, k \text{ en orden cíclico} \quad (1.74)$$

Podemos utilizar el símbolo alternante para expresar esta relación como sigue

$$\boxed{\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_k \varepsilon_{ijk}} \quad (1.74a)$$

Ahora es posible expresar el producto vectorial $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ así:

$$\boxed{\mathbf{C} = \sum_{i, j, k} \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i A_j B_k} \quad (1.75)$$

Si desarrollamos la expresión 1.76 y la comparamos con la 1.75, podemos comprobar que dicho determinante constituye una expresión del producto vectorial:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \quad (1.76)$$

Admitiremos, sin demostración, las siguientes igualdades:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \equiv \mathbf{ABC} \quad (1.77)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (1.78)$$

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= \mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D})] \\ &= \mathbf{A} \cdot [(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D})\mathbf{C} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{D}] \\ &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \end{aligned} \right\} \quad (1.79)$$

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= [(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{D}]\mathbf{C} - [(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}]\mathbf{D} \\ &= (\mathbf{ABD})\mathbf{C} - (\mathbf{ABC})\mathbf{D} \end{aligned} \right\} \quad (1.80)$$

1.13 Derivadas de un vector respecto de un escalar

Cuando derivemos una función escalar $\varphi = \varphi(s)$ respecto de la variable escalar s , ninguna de las partes que componen la derivada podrá cambiar en una trans-

formación de coordenadas, por lo que tampoco variará la derivada, y ésta será un escalar. Tenemos que, en los sistemas de referencia x_i y x'_i , es $\varphi = \varphi'$ y $s = s'$, y por tanto $d\varphi = d\varphi'$ y $ds = ds'$; de aquí

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi'}{ds'} = \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)' \quad (1.81)$$

De forma similar, es posible una definición formal de la derivada de un vector \mathbf{A} respecto de un escalar s . Como las componentes de \mathbf{A} se transforman según

$$A'_i = \sum_j \lambda_{ij} A_j \quad (1.82)$$

al derivar, tenemos (puesto que las λ_{ij} no dependen de s'),

$$\frac{dA'_i}{ds'} = \frac{d}{ds'} \sum_j \lambda_{ij} A_j = \sum_j \lambda_{ij} \frac{dA_j}{ds'}$$

de donde, al ser iguales s y s' , resulta

$$\frac{dA'_i}{ds'} = \left(\frac{dA_i}{ds} \right)' = \sum_j \lambda_{ij} \left(\frac{dA_j}{ds} \right) \quad (1.83)$$

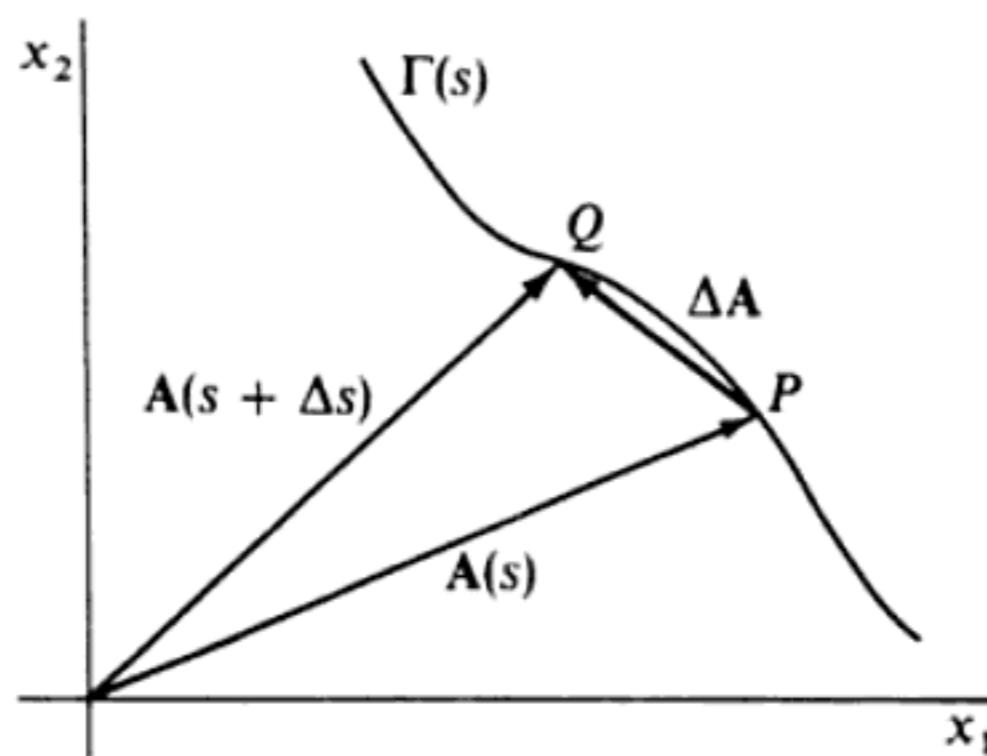


FIG. 1-14

Así pues, las cantidades dA_j/ds se transforman como las componentes de un vector, luego de ello podemos concluir que *son* las componentes de un vector que expresaremos por $d\mathbf{A}/ds$.

Veamos ahora cuál es la interpretación geométrica del vector $d\mathbf{A}/ds$. En primer lugar, para que $d\mathbf{A}/ds$ exista es condición necesaria que \mathbf{A} sea una función continua de la variable s : $\mathbf{A} = \mathbf{A}(s)$. Supongamos que esta función esté representada por la curva continua Γ de la figura 1-14, sobre la que en el punto P la

variable tiene el valor s y en el punto Q el valor $s + \Delta s$. En estas condiciones, la definición de la derivada de \mathbf{A} respecto de s se expresa

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{A}}{ds} &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta s} \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(s + \Delta s) - \mathbf{A}(s)}{\Delta s}\end{aligned}\quad (1.84a)$$

Las derivadas de sumas y productos de vectores obedecen las reglas ordinarias del cálculo; así, por ejemplo,

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{ds} + \frac{d\mathbf{B}}{ds} \quad (1.84b)$$

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{ds} + \frac{d\mathbf{A}}{ds} \cdot \mathbf{B} \quad (1.84c)$$

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{ds} + \frac{d\mathbf{A}}{ds} \times \mathbf{B} \quad (1.84d)$$

$$\frac{d}{ds}(\varphi \mathbf{A}) = \varphi \frac{d\mathbf{A}}{ds} + \frac{d\varphi}{ds} \mathbf{A} \quad (1.84e)$$

y análogamente en el caso de diferenciales totales y de derivadas parciales.

1.14 Ejemplos de derivadas. Velocidad y aceleración

De especial importancia en el desarrollo de la Dinámica de partículas (y de los sistemas de partículas) es la representación del movimiento de éstas mediante vectores. Para ello, necesitamos vectores que representen la posición, la velocidad y la aceleración de una partícula dada. La *posición* de una partícula, con relación a un cierto sistema de referencia, suele darse mediante un vector \mathbf{r} que en general será función del tiempo [$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$]. Por otra parte, la *velocidad* \mathbf{v} y la *aceleración* \mathbf{a} se definen de acuerdo con

$$\mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \quad (1.85)$$

$$\mathbf{a} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}} \quad (1.86)$$

donde un punto situado sobre una letra representa la derivada primera respecto del tiempo y dos puntos la derivada segunda respecto del tiempo. En coordenadas cartesianas rectangulares, \mathbf{r} , \mathbf{v} y \mathbf{a} se expresan

$$\mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 = \sum_i x_i \mathbf{e}_i \quad (1.87)$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \sum_i \dot{x}_i \mathbf{e}_i = \sum_i \frac{dx_i}{dt} \mathbf{e}_i \quad (1.88)$$

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = \sum_i \ddot{x}_i \mathbf{e}_i = \sum_i \frac{d^2x_i}{dt^2} \mathbf{e}_i \quad (1.89)$$

siendo su cálculo inmediato ya que los versores \mathbf{e}_i son constantes con el tiempo. Cuando el movimiento no se refiere a un sistema cartesiano rectangular, el cálculo de las expresiones para \mathbf{r} , \mathbf{v} y \mathbf{a} es diferente, pues entonces se utilizan unos vectores unitarios que no son constantes con el tiempo, como es el caso de los versores, y las derivadas de \mathbf{r} ya no adquieren la forma tan sencilla de las anteriores. No tendremos oportunidad de tratar de los sistemas de coordenadas curvilíneas generalizadas, si bien los sistemas de coordenadas *polares planas*, *esféricas* y *cilíndricas* revisten importancia suficiente para justificar aquí un estudio de la velocidad y la aceleración referidas a dichos sistemas.*

Para expresar \mathbf{v} y \mathbf{a} en coordenadas polares planas examinemos la figura 1-15, en la que se representa una curva $\mathbf{r}(t)$ a lo largo de la cual se mueve un punto que en el intervalo de tiempo $t_2 - t_1 = dt$ se desplaza de $P^{(1)}$ a $P^{(2)}$. Los vectores unitarios \mathbf{e}_r y \mathbf{e}_θ , normales entre sí, pasan de $\mathbf{e}_r^{(1)}$ a $\mathbf{e}_r^{(2)}$ y de $\mathbf{e}_\theta^{(1)}$ a $\mathbf{e}_\theta^{(2)}$. Entonces, la variación de \mathbf{e}_r es

$$\mathbf{e}_r^{(2)} - \mathbf{e}_r^{(1)} = d\mathbf{e}_r \quad (1.90)$$

que es un vector perpendicular a \mathbf{e}_r (y, por lo tanto, paralelo a \mathbf{e}_θ). De forma similar, la variación de \mathbf{e}_θ es

$$\mathbf{e}_\theta^{(2)} - \mathbf{e}_\theta^{(1)} = d\mathbf{e}_\theta \quad (1.91)$$

que es un vector perpendicular a \mathbf{e}_θ . Podremos, pues, escribir

$$d\mathbf{e}_r = d\theta \mathbf{e}_\theta \quad (1.92)$$

* La geometría de estos sistemas puede observarse en las figuras del apéndice F. En MARION, (Ma65a, capítulo 4), puede verse una exposición general de los sistemas de coordenadas curvilíneas.

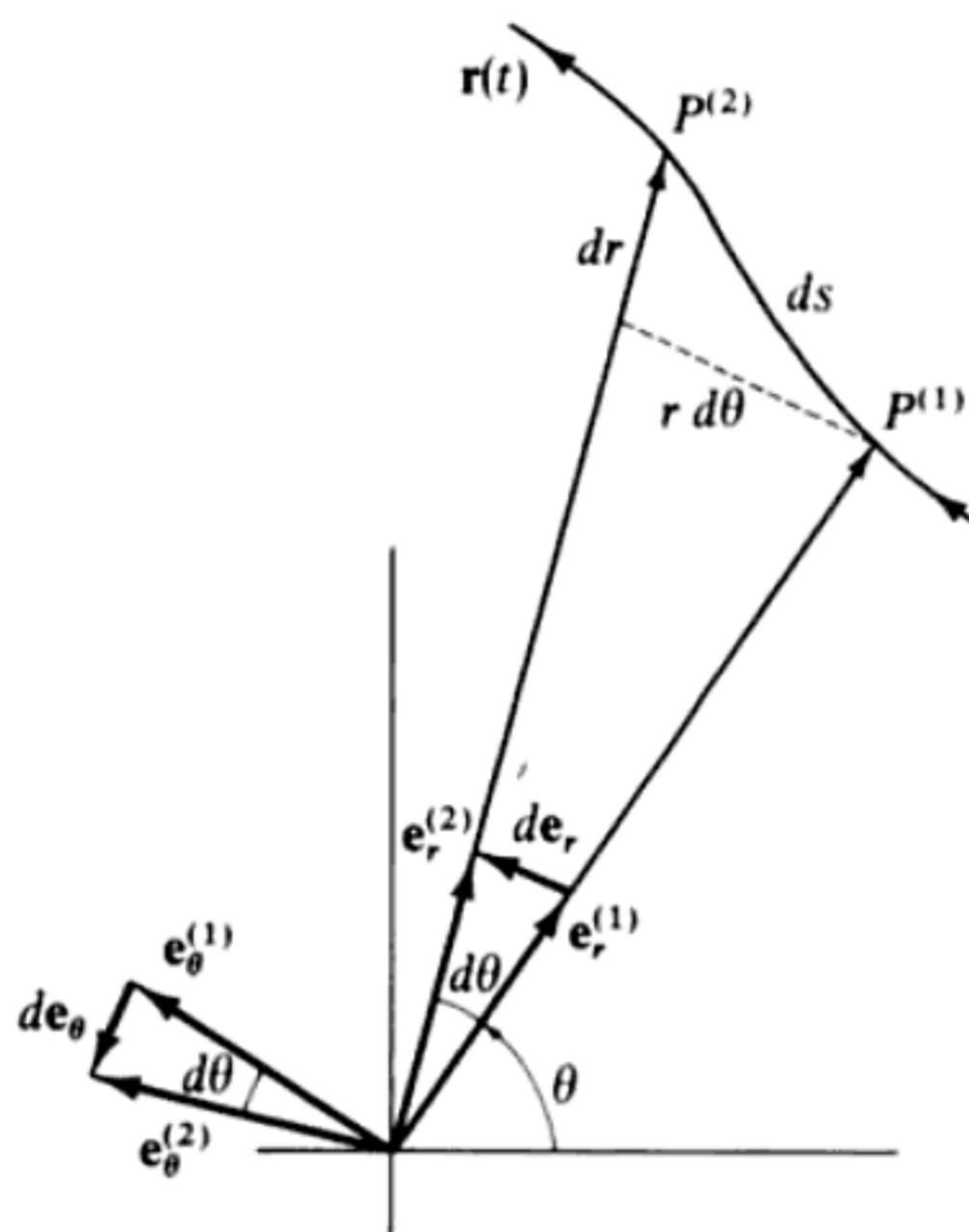


FIG. 1-15

y

$$d\mathbf{e}_\theta = -d\theta \mathbf{e}_r \quad (1.93)$$

donde el signo menos de 1.93 se debe a que el sentido de $d\mathbf{e}_\theta$ es *opuesto* al de \mathbf{e}_r (véase figura 1-15). Si dividimos ambos miembros de 1.92 y 1.93 por dt , tendremos

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta \quad (1.94)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta} \mathbf{e}_r \quad (1.95)$$

Si expresamos \mathbf{v} como sigue:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{e}_r) = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r \quad (1.96)$$

resulta inmediatamente, utilizando 1.94,

$$\boxed{\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta} \quad (1.97)$$

es decir, la velocidad se descompone en una componente *radial* \dot{r} y en una componente *angular* o *transversa* $r\dot{\theta}$.

Una segunda derivación nos dará la aceleración:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{d}{dt} (\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta) \\ &= \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta\end{aligned}\quad (1.98)$$

y así la aceleración se descompone en una componente radial ($\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$) y una componente angular o transversa ($r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$).

Las expresiones de ds^2 , v^2 y \mathbf{v} en los tres sistemas de coordenadas más importantes son (también en apéndice F):

Coordenadas cartesianas rectangulares

$$\left. \begin{aligned}ds^2 &= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \\ v^2 &= \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 \\ \mathbf{v} &= \dot{x}_1\mathbf{e}_1 + \dot{x}_2\mathbf{e}_2 + \dot{x}_3\mathbf{e}_3\end{aligned}\right\} \quad (1.99)$$

Coordenadas esféricas

$$\left. \begin{aligned}ds^2 &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \\ v^2 &= \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta \dot{\varphi}^2 \\ \mathbf{v} &= \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi\end{aligned}\right\} \quad (1.100)$$

(Las expresiones correspondientes a las coordenadas polares planas se deducen de las 1.100 sin más que hacer $d\varphi=0$.)

Coordenadas cilíndricas

$$\left. \begin{aligned}ds^2 &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 \\ v^2 &= \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 \\ \mathbf{v} &= \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{e}_z\end{aligned}\right\} \quad (1.101)$$

1.15 Velocidad angular

Puede considerarse que todo punto o partícula, que se mueve en el espacio de una forma cualquiera, se desplaza, *en un instante dado*, sobre una trayectoria plana y circular en torno de un cierto eje. Es decir, la trayectoria descrita por una partícula en un intervalo de tiempo infinitesimal δt puede estar representada por un arco infinitesimal de circunferencia. La recta que pasa por el centro de esta circunferencia y es perpendicular a la dirección instantánea del movimiento recibe el nombre de *eje instantáneo de rotación*. La variación por unidad de tiempo de la posición angular, a medida que la partícula se desplaza sobre la trayectoria circular, es la llamada *velocidad angular*:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \quad (1.102)$$

Sea una partícula que, en un instante dado, se desplaza sobre una circunferencia de radio R en torno a un eje normal al plano del movimiento, como se representa en la figura 1-16, y sea \mathbf{r} el vector de posición de la partícula respecto a un origen que situaremos en un punto cualquiera O del eje de rotación. La variación por unidad de tiempo de este radio vector es el vector velocidad lineal de la partícula, $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$, y en el caso de que el movimiento tenga lugar sobre una circunferencia de radio R , el *módulo* de la velocidad lineal viene dado por

$$v = R \frac{d\theta}{dt} = R\omega \quad (1.103)$$

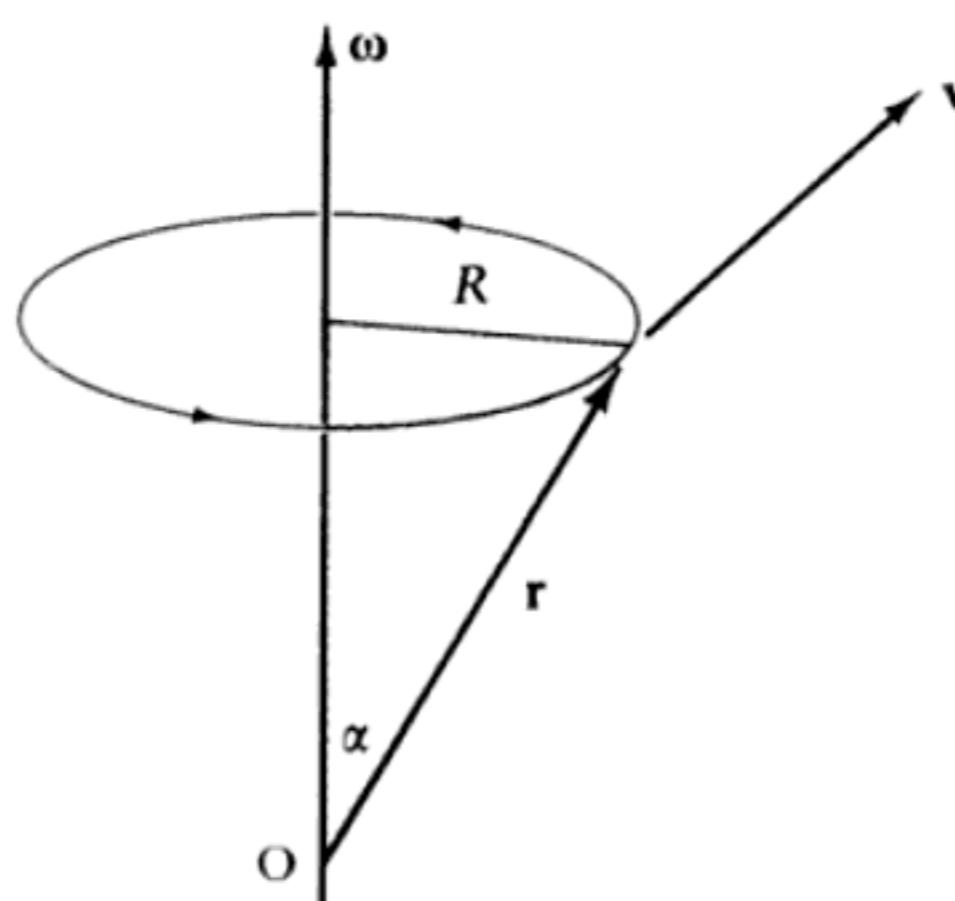


FIG. 1-16

La velocidad lineal está situada en el plano de la circunferencia y su *dirección* es normal a la de \mathbf{r} .

Ahora, sería muy oportuno que pudiéramos idear una representación vectorial de la velocidad angular (o sea, de ω), tal que todas las magnitudes de interés con relación al movimiento de la partícula pudieran ser descritas sobre una misma base. Podemos definir como sigue una *dirección* para la velocidad angular. Cuando, en un instante dado, la partícula se mueve sobre un plano, la normal a éste definirá de forma precisa una dirección en el espacio y *dos* sentidos. Podemos elegir *positivo* aquel sentido que corresponde al de avance de un tornillo a derechas cuando gira en el mismo sentido que el de rotación de la partícula (véase figura 1-16). Asimismo, podemos escribir el módulo de la velocidad lineal, teniendo en cuenta que $R=r \operatorname{sen} \alpha$; o sea

$$v = r\omega \operatorname{sen} \alpha \quad (1.104)$$

Definidos el módulo, la dirección y el sentido de la velocidad angular, observemos que al escribir

$$\boxed{\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}} \quad (1.105)$$

se satisfacen las definiciones, quedando así establecida la representación vectorial deseada de la velocidad angular.

Llegados a este punto, debemos hacer referencia a una importante distinción entre las rotaciones finitas e infinitesimales. Mientras que una *rotación infinitesimal* puede representarse mediante un vector (en realidad, un vector *axial*), una *rotación finita* no puede representarse así. La imposibilidad de describir una rotación finita mediante un vector procede del hecho de que tales rotaciones no son conmutativas (véase el ejemplo de la figura 1-8), por lo que, en general, se obtendrán resultados diferentes según el orden en que se hayan efectuado. Para ilustrar esta afirmación, consideremos la aplicación sucesiva de dos rotaciones finitas, representadas por las matrices de giro λ_1 y λ_2 . Supongamos ahora que es posible asociar los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} , respectivamente, a estas rotaciones. Ocurrirá entonces que el vector suma $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ equivaldrá a la matriz $\lambda_3 = \lambda_2 \lambda_1$; ahora bien, como la suma de vectores es conmutativa, tendremos que también $\mathbf{C} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$, al que equivaldrá la matriz $\lambda_4 = \lambda_1 \lambda_2$. Sabemos, sin embargo, que las operaciones con matrices no son conmutativas, por lo que en general $\lambda_3 \neq \lambda_4$. De aquí resulta que el vector \mathbf{C} no será único y por tanto no es posible asociar un vector a una rotación finita.

Mostraremos ahora que las rotaciones *infinitesimales* no presentan esta característica de no conmutatividad. Si es así, cabe esperar que toda rotación infinitesimal pueda ser representada por un vector. Aunque de hecho sea admisible

esta postura, no debemos olvidar que la prueba definitiva de la naturaleza vectorial de una magnitud reside en sus propiedades de transformación. Aquí nos limitaremos a una argumentación cualitativa, pudiendo estudiarse la demostración completa en MARION, Ma65a, sección 2.5.

Con relación a la figura 1-17, cuando el vector de posición de un punto pasa de \mathbf{r} a $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$ representaremos correctamente la situación geométrica si escribimos

$$\delta\mathbf{r} = \delta\theta \times \mathbf{r} \quad (1.106)$$

donde $\delta\theta$ es una cantidad cuyo valor es igual al ángulo de rotación infinitesimal y cuya dirección es la del eje instantáneo de rotación. El mero hecho de que la expresión 1.106 describa perfectamente la situación ilustrada en la figura 1-17 no basta por sí mismo para dejar establecido que $\delta\theta$ sea un vector. (Repetimos que la prueba auténtica debe basarse en las propiedades de transformación de $\delta\theta$.) Ahora bien, si podemos demostrar que dos «vectores», $\delta\theta_1$ y $\delta\theta_2$, que representen a sendas rotaciones infinitesimales realmente *comutan entre sí* habremos hecho desaparecer la única objeción a representar una rotación finita mediante un vector.

Supongamos que la rotación $\delta\theta_1$ hace pasar \mathbf{r} a $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}_1$ donde $\delta\mathbf{r}_1 = \delta\theta_1 \times \mathbf{r}$. Si a ésta sigue otra rotación $\delta\theta_2$ en torno a otro eje, el vector de posición inicial será entonces $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}_1$. Así pues,

$$\delta\mathbf{r}_2 = \delta\theta_2 \times (\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}_1),$$

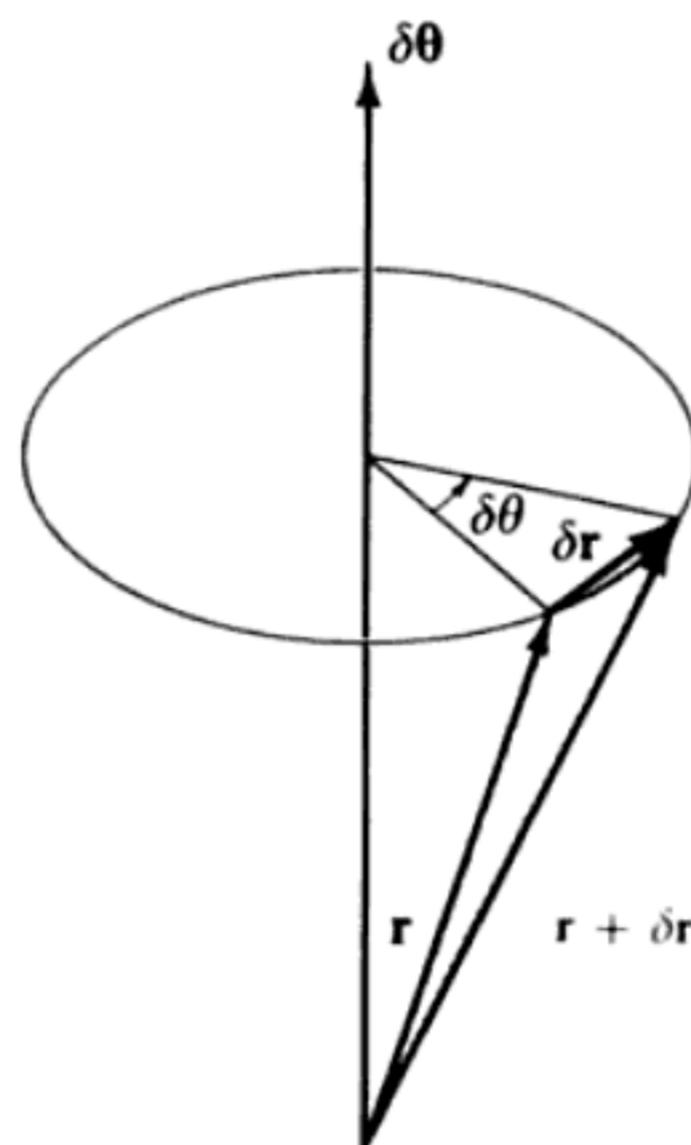


FIG. 1-17

y el vector de posición final, tras haber actuado $\delta\theta_1$, seguido de $\delta\theta_2$, es

$$\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r} + [\delta\theta_1 \times \mathbf{r} + \delta\theta_2 \times (\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}_1)]$$

que, despreciando los infinitésimos de segundo orden, queda

$$\delta\mathbf{r}_{12} = \delta\theta_1 \times \mathbf{r} + \delta\theta_2 \times \mathbf{r} \quad (1.107)$$

De forma similar, cuando actúe primero $\delta\theta_2$ seguido de $\delta\theta_1$, tendremos

$$\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r} + [\delta\theta_2 \times \mathbf{r} + \delta\theta_1 \times (\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}_2)]$$

que da

$$\delta\mathbf{r}_{21} = \delta\theta_2 \times \mathbf{r} + \delta\theta_1 \times \mathbf{r} \quad (1.108)$$

Evidentemente, $\delta\mathbf{r}_{12}$ y $\delta\mathbf{r}_{21}$ son iguales y los «vectores» de rotación $\delta\theta_1$ y $\delta\theta_2$ commutan entre sí. Por tanto, parece razonable que $\delta\theta$ de la expresión 1.106 sea realmente un vector.

El hecho de que $\delta\theta$ sea un vector nos permite representar la velocidad angular en forma de vector, ya que aquélla es el cociente entre un ángulo de rotación infinitesimal y un intervalo de tiempo infinitesimal:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\delta\theta}{\delta t}$$

Por lo tanto, al dividir 1.106 por δt , tendremos

$$\frac{\delta\mathbf{r}}{\delta t} = \frac{\delta\theta}{\delta t} \times \mathbf{r}$$

y, al pasar al límite, $\delta t \rightarrow 0$,

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

como antes.

11.6 Operador gradiente

Pasemos a tratar ahora del más importante de los miembros de los llamados *operadores vectoriales diferenciales*: el *operador gradiente*.

Sea el escalar φ , función continua, uniforme y explícita de las coordenadas x_i en toda una región del espacio determinada. Cuando tenga lugar una transformación de coordenadas que nos haga pasar de las x_i a las x'_i , sea $\varphi'(x'_1, x'_2, x'_3) = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ y, aplicando las reglas de derivación, podremos escribir

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x'_1} = \sum_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x'_1} \quad (1.109)$$

y lo mismo para $\partial \varphi' / \partial x'_2$ y $\partial \varphi' / \partial x'_3$, de manera que en general tendremos

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x'_i} = \sum_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \quad (1.110)$$

Tomemos ahora la transformación inversa de coordenadas

$$x_j = \sum_k \lambda_{kj} x'_k \quad (1.111)$$

cuya derivada es

$$\frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = \frac{\partial}{\partial x'_i} \left(\sum_k \lambda_{kj} x'_k \right) = \sum_k \lambda_{kj} \left(\frac{\partial x'_k}{\partial x'_i} \right) \quad (1.112)$$

y donde el término contenido en el último paréntesis es precisamente δ_{ik} , de forma que

$$\frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = \sum_k \lambda_{kj} \delta_{ik} = \lambda_{ij} \quad (1.113)$$

Al llevar 1.113 a 1.110 se obtiene

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x'_i} = \sum_j \lambda_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \quad (1.114)$$

resultando que la función $\partial \varphi / \partial x_j$ se transforma como la componente j de un vector. Este vector recibe el nombre de *gradiente* de la función φ . Nótese que si bien φ es un *escalar*, el *gradiente* de φ es un *vector*. El gradiente de φ se representa por **grad** φ , o bien $\nabla \varphi$ («nabla» de φ).

Como φ es una función escalar cualquiera, es conveniente que definamos el operador diferencial que acabamos de describir en función del *operador gradiente*:

$$(\text{grad})_i = \nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (1.115)$$

El operador vectorial se expresa en forma completa como sigue:

$$\boxed{\mathbf{grad} = \nabla = \sum_i \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}} \quad (1.116)$$

El operador gradiente puede (a) actuar directamente sobre una función escalar, como en el caso $\nabla \varphi$, (b) utilizarse formando un producto escalar con una función vectorial, como $\nabla \cdot \mathbf{A}$ (*divergencia de A*), o (c) utilizarse formando un producto vectorial con una función vectorial, como $\nabla \times \mathbf{A}$ (*rotacional de A*).

Con el fin de examinar la interpretación geométrica del gradiente de un escalar consideremos el mapa topográfico, representado en la figura 1-18, de un cono de revolución. Las circunferencias representarán líneas de igual altitud. Sea $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ la altitud de un punto cualquiera. Entonces

$$d\varphi = \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i = \sum_i (\mathbf{grad} \varphi)_i dx_i \quad (1.117)$$

Como los componentes del vector desplazamiento $d\mathbf{s}$ son los desplazamientos infinitesimales según los tres ejes coordenados:

$$d\mathbf{s} = (dx_1, dx_2, dx_3) \quad (1.118)$$

se tendrá

$$\boxed{d\varphi = (\mathbf{grad} \varphi) \cdot d\mathbf{s}} \quad (1.119)$$

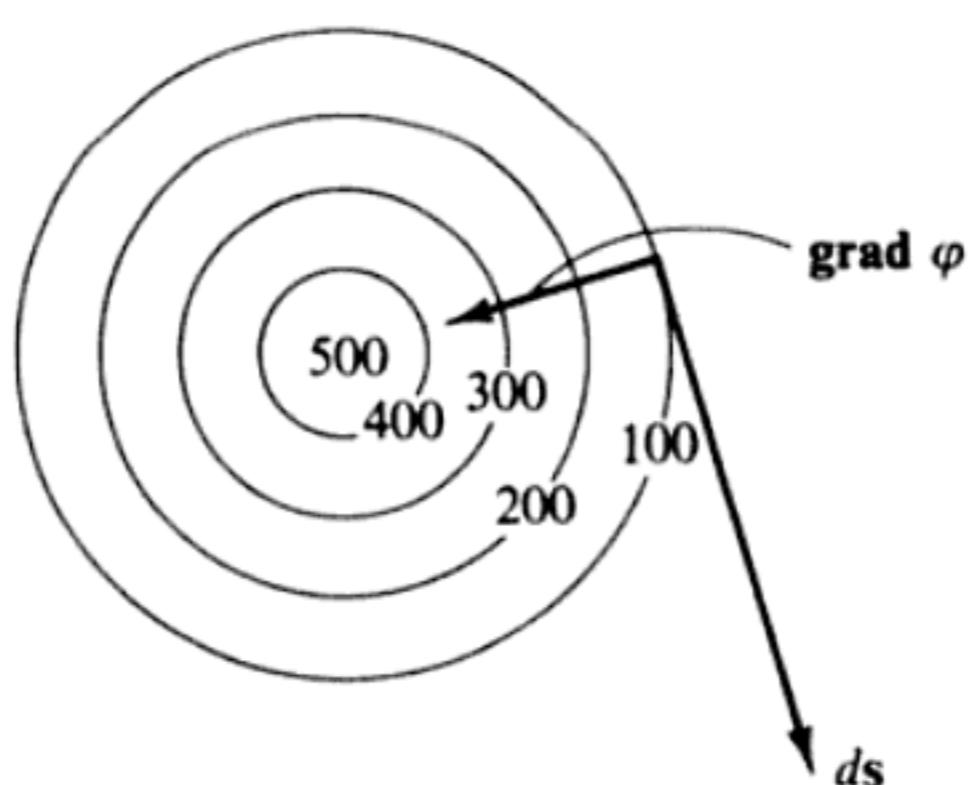


FIG. 1-18

Supongamos ahora que, tal como se indica en la figura 1-18, ds está dirigido según la tangente a una de las líneas de altitud constante. Como entonces es $\varphi = \text{cte}$, será $d\varphi = 0$ en este caso, pero al no ser en general nulos ni $\text{grad } \varphi$ ni ds , resultará en consecuencia que habrán de ser perpendiculares entre sí. Así pues, $\text{grad } \varphi$ es normal a las líneas (o a las superficies, en tres dimensiones) para las que $\varphi = \text{cte}$.

El valor máximo de $d\varphi$ corresponde al caso en que $\text{grad } \varphi$ y ds tienen la misma dirección; entonces

$$(d\varphi)_{\max} = |\text{grad } \varphi| ds, \quad \text{para } \text{grad } \varphi \parallel ds$$

o sea

$$|\text{grad } \varphi| = \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)_{\max} \quad (1.120)$$

Por lo tanto, $\text{grad } \varphi$ se orienta según la dirección de máxima variación de φ .

Resumamos estos resultados:

(a) El vector $\text{grad } \varphi$ es, en todo punto, normal a las líneas o superficies de $\varphi = \text{cte}$.

(b) La dirección del vector $\text{grad } \varphi$ es la de máxima variación de φ .

(c) Como toda orientación dentro del espacio se puede especificar en función del vector unitario \mathbf{n} correspondiente, φ variará según esa orientación según la razón $\mathbf{n} \cdot \text{grad } \varphi = \partial\varphi/\partial n$ (*derivada direccional* de φ).

La aplicación sucesiva del operador gradiente produce

$$\nabla \cdot \nabla = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (1.121)$$

Este importante operador recibe el nombre de *laplaciana** y se escribe también

$$\nabla^2 = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

(1.122)

Cuando la laplaciana actúa sobre un escalar tenemos

$$\nabla^2 \psi = \sum_i \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} \quad (1.123)$$

* En honor de Pierre Simon LAPLACE (1749-1827). La notación ∇^2 se debe a Sir William ROWAN HAMILTON.

Los otros operadores vectoriales diferenciales de importancia, *divergencia* y *rotacional*, no suelen aparecer* en el desarrollo de los temas de la Dinámica por lo que no llevaremos más adelante el tratamiento de los operadores vectoriales (véase apéndice F y MARION, Ma65a, capítulos 2 y 3).

1.17 Integración de vectores

La integral extendida a un volumen V de una función vectorial $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x_i)$ es un vector cuya expresión es**

$$\int_V \mathbf{A} dv = \left(\int_V A_1 dv, \int_V A_2 dv, \int_V A_3 dv \right) \quad (1.124)$$

Así pues, la integración del vector \mathbf{A} extendida a V se lleva a cabo sencillamente realizando tres integraciones ordinarias separadas.

La integral de superficie de la proyección de una función vectorial $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x_i)$ sobre una superficie S es, por definición**

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$$

donde, como se indica en la figura 1-19, $d\mathbf{a}$ es un elemento de superficie. Escribimos $d\mathbf{a}$ en forma de magnitud vectorial ya que podemos atribuirle no sólo un

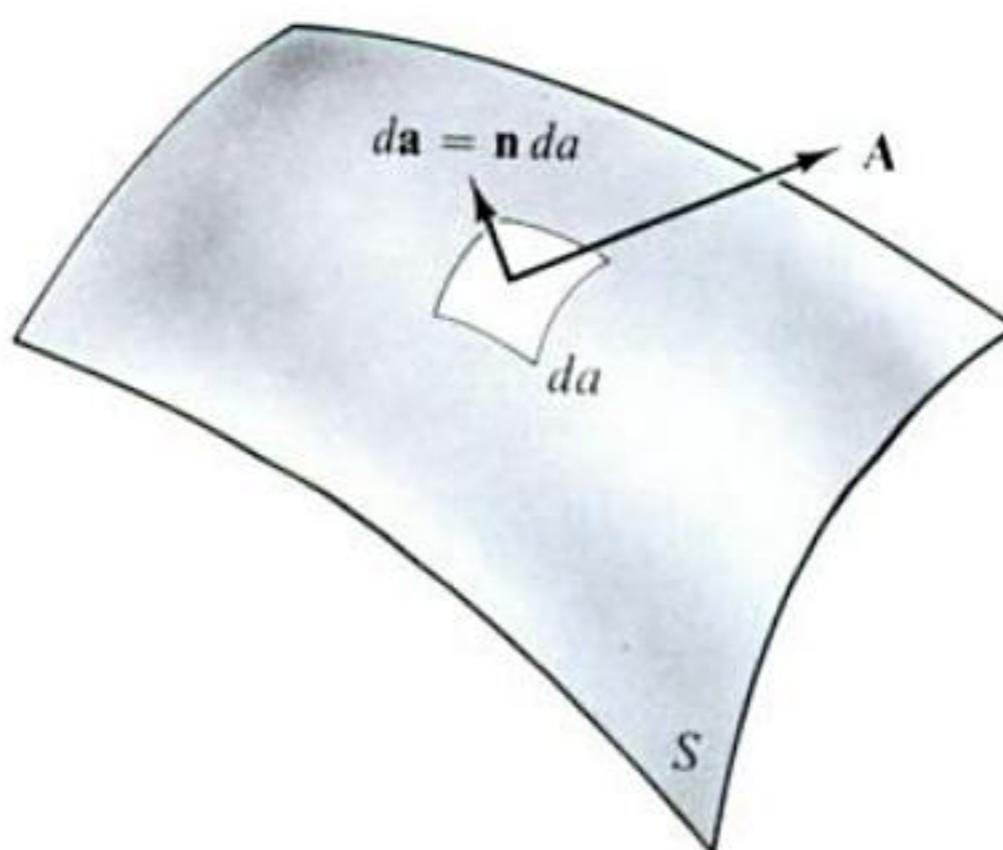


FIG. 1-19

* Sólo en una ocasión haremos alusión al *rotacional* (sección 2.5).

** En realidad el símbolo \int_V representa una integral *triple* extendida sobre un cierto volumen V . Igualmente, el símbolo \int_S representa una integral *doble* sobre una cierta superficie S .

módulo da sino también una dirección que corresponde a la de la normal a la superficie en el punto en cuestión. Si el vector unitario normal es \mathbf{n} , tendremos

$$d\mathbf{a} = \mathbf{n} da \quad (1.125)$$

O sea, las componentes de $d\mathbf{a}$ son las proyecciones del elemento de superficie sobre los tres planos mutuamente perpendiculares definidos por los ejes coordenados:

$$da_1 = dx_2 dx_3, \quad \text{etc.} \quad (1.126)$$

Por tanto tenemos

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} da \quad (1.127)$$

o bien,

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = \int_S \sum_i A_i da_i \quad (1.128)$$

La expresión 1.127 nos dice que la integral de \mathbf{A} sobre la superficie S es la integral de la componente de \mathbf{A} según la normal a la superficie, extendida a ésta.

La normal a una superficie puede estar dirigida en dos sentidos posibles («hacia arriba» o «hacia abajo»); es decir, el signo de \mathbf{n} es ambiguo. Cuando la superficie sea *cerrada*, admitiremos por convenio que la normal positiva será la dirigida *hacia fuera*.

La *integral curvilínea* de una función vectorial $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x_i)$ a lo largo de un camino que vaya del punto B al punto C viene dada por la integral de la componente de \mathbf{A} según el camino:

$$\int_{BC} \mathbf{A} \cdot ds = \int_{BC} \sum_i A_i dx_i \quad (1.129)$$

Como se indica en la figura 1-20, la cantidad ds es el elemento de longitud del camino. El sentido positivo de ds se toma en el mismo en que se recorre el camino. En la figura 1-20, el ángulo formado por ds y \mathbf{A} en el punto P es inferior a $\pi/2$ y por lo tanto $\mathbf{A} \cdot ds$ es positivo en este punto; mientras que en el punto Q este ángulo es mayor que $\pi/2$, por lo cual la contribución a la integral en ese punto será negativa.

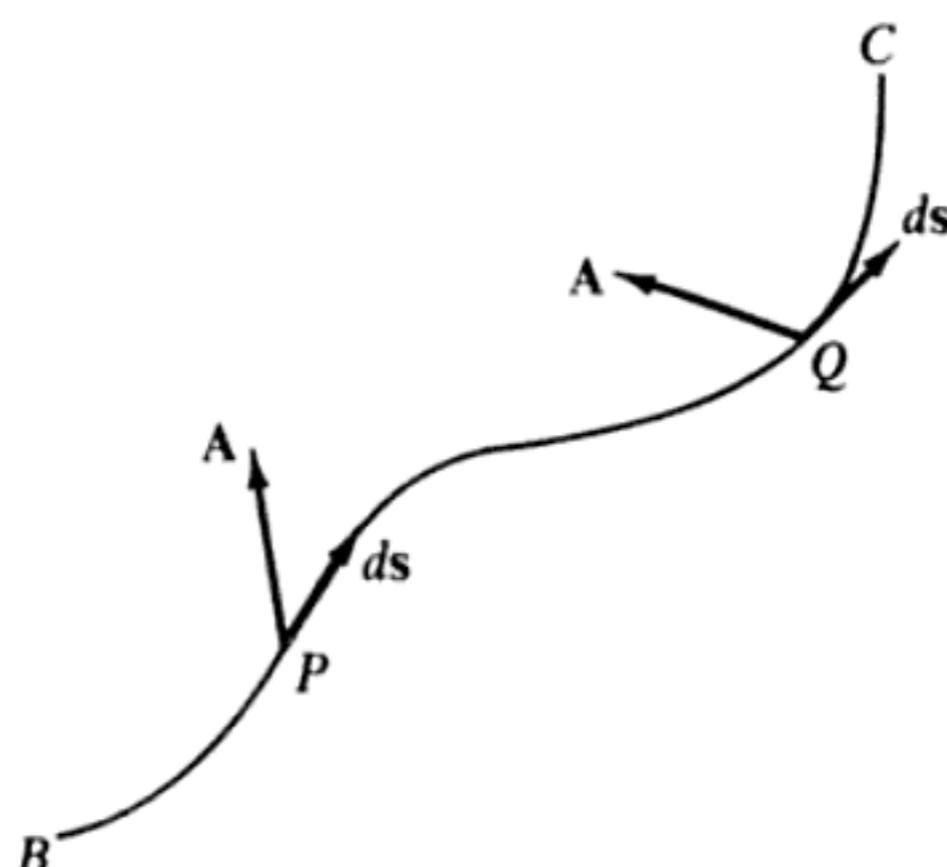


FIG. 1-20

Referencias recomendadas

Los textos de cálculo vectorial son abundantes. Una obra típica, citada frecuentemente, es la de PHILLIPS (Ph33). Una exposición del álgebra vectorial, breve y fácil de leer, puede encontrarse en CONSTANT (Co54, cap. 1). BARNETT y FUJII (Ba63) proporcionan un tratamiento detallado del álgebra vectorial. La obra de SPIEGEL (Sp59, cap. 1 y 3) es extensa y contiene muchos problemas y ejemplos resueltos. La obra más reciente de LINDGREN (Li64) es especialmente buena, al igual que la de DAVIS (Da61). ARFKEN (Ar66) presenta un buen análisis.

YEFIMOV (Ye64) tiene una buena introducción a los métodos matriciales y EISENMAN (Ei63) hace hincapié en la aplicación de los métodos matriciales al análisis vectorial.

En JEFFREYS y JEFFREYS (Je46, cap. 2 y 4) puede encontrarse un tratado extenso, aunque pedante, de vectores y matrices; se utiliza el símbolo ϵ_{ijk} .

DETTMAN (De62, cap. 1) y CORBEN y STEHLE (Co60, cap. 1 y ap. II) presentan una introducción formal a matrices, vectores y espacios vectoriales lineales. En GOLDSTEIN (Go50, cap. 4) podrá encontrarse también un análisis breve desde un punto de vista moderno.

Una de las mejores exposiciones del álgebra vectorial desde un punto de vista matemático es la presentada por KAPLAN (Ka52, cap. 1). Esta obra es altamente recomendable, no sólo por su contenido de métodos vectoriales, sino como libro de consulta general de matemáticas para los estudiantes de Física.

MORSE y FESHBACH (Mo53, cap. 1) nos dan un autorizado resumen de los métodos vectoriales cuya popularidad aumenta rápidamente.

La mayoría de los textos mencionados tratan del cálculo vectorial. En especial, véanse CONSTANT (Co54, cap. 2), KAPLAN (Ka52, cap. 3 y 5), LINDGREN (Li64) y SPIEGEL (Sp59, cap. 3, 4 y 5).

Los textos de electromagnetismo suelen ser fuentes excelentes de información acerca del cálculo vectorial; por ejemplo, unos tratamientos breves y de calidad son los

presentados por CORSON y LORRAIN (Co62, cap. 1) y por OWEN (Ow63, ap. A). La notación utilizada por Owen es muy parecida a la nuestra.

Problemas

1-1. Determinar la matriz de transformación que produce un giro de 120° a un sistema de coordenadas rectangular en torno de un eje que forma ángulos iguales con los tres coordenados originales.

1-2. Demostrar las expresiones 1.10 y 1.11 mediante consideraciones trigonométricas.

1-3. Demostrar

- (a) $(AB)^t = B^t A^t$.
- (b) $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

1-4. Desarrollando directamente demostrar que $|\lambda|^2 = 1$. Para mayor simplicidad, supóngase que λ es una matriz de transformación bidimensional.

1-5. Demostrar que la condición 1.15 puede obtenerse con la hipótesis de que la transformación no altere la longitud de un segmento rectilíneo.

1-6. Sea un cubo unitario, uno de cuyos vértices se encuentra en el origen de coordenadas y las tres aristas contiguas correspondientes situadas sobre los tres ejes de coordenadas. Determinar los vectores que representan a las diagonales del cubo. ¿Cuál es el ángulo formado por una pareja cualquiera de diagonales?

1-7. Sea \mathbf{A} un vector que une el origen a un punto fijo P del espacio y \mathbf{r} el vector que une el origen a un punto variable $Q(x_1, x_2, x_3)$. Demostrar que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = A^2$$

es la ecuación de un plano perpendicular a \mathbf{A} que pasa por P .

1-8. Demostrar que el *producto mixto* $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ se puede escribir

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

Demostrar también que el producto no varía a consecuencia de un intercambio en el orden de los productos escalar y vectorial, ni por una alteración en el orden en que se tomen \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} , mientras estén en orden cíclico; o sea,

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}. \quad \text{etc.}$$

Por tanto es posible representar por (\mathbf{ABC}) al producto mixto. Por último dar una interpretación geométrica de (\mathbf{ABC}) calculando el volumen del paralelepípedo definido por los tres vectores \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} .

1-9. Sean \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} tres vectores constantes que unen el origen con los puntos A , B y C . ¿Cuál es la distancia del origen al plano definido por A , B y C ? ¿Cuál es el área del triángulo ABC ?

1-10. Si \mathbf{X} es un vector desconocido que satisface las relaciones siguientes, en las que intervienen los vectores conocidos \mathbf{A} y \mathbf{B} y el escalar φ ,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{X} = \mathbf{B}; \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \varphi$$

expresar \mathbf{X} en función de \mathbf{A} , \mathbf{B} , φ y el módulo de \mathbf{A} .

1-11. Obtener la ley del coseno de Trigonometría plana interpretando el producto $(\mathbf{A}-\mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A}-\mathbf{B})$ y su desarrollo.

1-12. Obtener la ley del seno de Trigonometría plana interpretando el producto $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ y su otra representación posible $(\mathbf{A}-\mathbf{B}) \times \mathbf{B}$.

1-13. Utilizando álgebra vectorial, deducir las expresiones siguientes:

- (a) $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$
- (b) $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

1-14. Demostrar

$$(a) \sum_{i,j} \varepsilon_{ijk} \delta_{ij} = 0 \quad (b) \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ljk} = 2\delta_{il} \quad (c) \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6$$

1-15. Demostrar (ver también problema 1-8)

$$(\mathbf{ABC}) = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} A_i B_j C_k$$

1-16. Calcular la suma $\sum_k \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk}$ (que contiene 81 términos) examinando los resultados para todas las combinaciones posibles de i , j , l , m , o sea,

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| (a) $i = j$ | (b) $i = l$ |
| (c) $i = m$ | (d) $j = l$ |
| (e) $j = m$ | (f) $l = m$ |
| (g) $i \neq l \text{ o } m$ | (h) $j \neq l \text{ o } m$ |

Demostrar que

$$\sum_k \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$$

y utilizar a continuación este resultado para demostrar

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$$

1-17. Emplear el símbolo ϵ_{ijk} para deducir la identidad

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \mathbf{C}(\mathbf{ABC}) - \mathbf{D}(\mathbf{ABC})$$

1-18. Sea \mathbf{A} un vector cualquiera y \mathbf{e} un vector unitario según una cierta dirección fija. Demostrar que

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}) + \mathbf{e} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{e})$$

¿Qué significado tiene geométricamente cada uno de los dos términos del segundo miembro?

1-19. Determinar las componentes del vector aceleración \mathbf{a} en coordenadas esféricas y cilíndricas.

1-20. Una partícula se mueve con $v = \text{cte}$ a lo largo de la curva $r = k(1 + \cos \theta)$ (una *cardioide*). Determinar $\ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e}_r = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_r$, $|\mathbf{a}|$ y $\dot{\theta}$.

1-21. Demostrar que cuando \mathbf{r} y $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ son ambos funciones explícitas del tiempo

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{r} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{r})] = r^2 \mathbf{a} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} - (v^2 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{a})\mathbf{r}$$

1-22. Demostrar que

$$\mathbf{grad}(\ln |\mathbf{r}|) = \frac{\mathbf{r}}{r^2}$$

1-23. Determinar el ángulo que forman las superficies $r^2 = 9$ y $x + y + z^2 = 1$ en el punto $(2, -2, 1)$.

1-24. Demostrar que $\mathbf{grad}(\varphi\psi) = \varphi \mathbf{grad} \psi + \psi \mathbf{grad} \varphi$.

1-25. Demostrar que

$$(a) \mathbf{grad} r^n = nr^{n-2} \mathbf{r}$$

$$(b) \mathbf{grad} f(r) = \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{df}{dr}$$

$$(c) \nabla^2(\ln r) = \frac{1}{r^2}$$

1-26. Demostrar que

$$\int (2\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} + 2\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}) dt = r^2 + \dot{r}^2 + \text{const.}$$

donde \mathbf{r} es el vector que va desde el origen al punto (x_1, x_2, x_3) . Las cantidades r y \dot{r} son los módulos de los vectores \mathbf{r} y $\dot{\mathbf{r}}$ respectivamente.

1-27. Demostrar que

$$\int \left(\frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - \frac{\mathbf{r}\dot{r}}{r^2} \right) dt = \frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{C}$$

donde \mathbf{C} es un vector constante.

1-28. Calcular la integral

$$\int \mathbf{A} \times \ddot{\mathbf{A}} dt$$

1-29. Demostrar que el volumen común a los dos cilindros que se cortan definidos por

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \text{y} \quad x^2 + z^2 = a^2 \quad \text{es } V = 16a^3/3.$$

La mecánica de Newton

2.1 Introducción

El objeto de la mecánica es la búsqueda de una descripción, precisa y coherente, de la dinámica de las partículas y de los sistemas de partículas. Es decir, nuestro intento es descubrir un conjunto de leyes físicas que nos proporcionen un método para la descripción matemática de los movimientos de los cuerpos y de los grupos de cuerpos. Para ello, nos es necesario presentar algunos conceptos fundamentales. En la teoría de Newton está implícito el hecho de que el concepto de *distancia* es comprensible intuitivamente desde un punto de vista geométrico; además, se considera que el *tiempo* es una magnitud absoluta, susceptible de definición precisa por un observador cualquiera. Estas ideas de Newton deben, sin embargo, modificarse en la teoría de la relatividad (véase cap. 10). La combinación de los conceptos de distancia y tiempo nos permite definir la *velocidad* y la *aceleración* de una partícula. El tercer concepto fundamental, la *masa*, requiere cierta elaboración que efectuaremos al llevar a cabo el análisis de las leyes de Newton.

Todas las leyes físicas nuevas deben estar basadas en hechos experimentales. Una ley física podría caracterizarse por la afirmación de que «las cosas habrían podido ser de otra forma». Así, no existe *a priori* razón alguna para esperar que la atracción gravitatoria entre dos cuerpos deba variar exactamente como

la inversa del cuadrado de la distancia que los separa; ahora bien, la experiencia indica que así es. Una vez relacionados entre sí los datos experimentales y enunciado un postulado con relación a los fenómenos a los cuales se refieren aquellos datos, podrán deducirse distintas consecuencias. Si todas estas consecuencias reciben confirmación experimental, existirán razones para creer que lo postulado es cierto con toda generalidad y el postulado adquiere la categoría de *ley física*. Si algunas experiencias se muestran en desacuerdo con la ley, deberá modificarse la teoría al objeto de hacerla compatible con todos los hechos conocidos.

A Newton se deben las leyes fundamentales de la mecánica, que enunciaremos, en términos modernos, analizando su significado, y a continuación procederemos a deducir sus consecuencias en distintas situaciones. Sin embargo, debemos advertir que no es posible estructurar la lógica de la mecánica según un proceso único; así, existen otras líneas de razonamiento distintas a la que seguimos aquí.* No proseguiremos con detalles de la filosofía de la mecánica, sino únicamente llevaremos a cabo la elaboración suficiente de las leyes de Newton que nos permita adentrarnos en la dinámica clásica. La última parte del capítulo estará dedicada a la atracción gravitatoria y a los potenciales. En los capítulos inmediatamente siguientes dedicaremos nuestra atención al movimiento de las *partículas*; en el capítulo 12 consideraremos el tema del *sólido rígido* y en los capítulos 13, 14 y 15 la dinámica de los *sistemas* de partículas. Este capítulo finaliza con un análisis breve acerca de las limitaciones fundamentales y prácticas de las leyes de Newton.

2.2 Leyes de Newton

Comenzaremos simplemente por enunciar las leyes de Newton en su forma convencional:**

- I. Todo cuerpo permanece en reposo o en movimiento uniforme a menos que sobre él actúe una fuerza.
- II. Todo cuerpo sobre el que actúa una fuerza se mueve de tal forma que la variación de su ímpetu por unidad de tiempo es igual a la fuerza.
- III. Cuando dos cuerpos ejercen fuerzas entre sí, estas fuerzas son de intensidades iguales y sentidos opuestos.

* Ernst MACH (1838-1916) expuso sus puntos de vista en su famosa obra *The Science of Mechanics*, publicada por primera vez en 1883. Existe una traducción al inglés de una edición posterior (Ma60). Hay otras discusiones interesantes, por ejemplo las de LINDSAY y MARGENAU (Li36) y FEATHER (Fe59).

** Enunciadas por Sir Isaac NEWTON (1642-1727) en su *Principia*, 1687. Ya antes GALILEO había generalizado los resultados de sus experimentos con declaraciones equivalentes a las leyes primera y segunda, aunque no pudo completar la descripción de la Dinámica por no haberse dado cuenta del significado de la tercera ley y adolecer por tanto de imprecisión en su idea de fuerza.

Estas leyes son tan familiares que a veces tenderemos a perder de vista su significado auténtico (o nos faltará su comprensión) como tales leyes físicas. Por ejemplo, la primera ley carece de sentido desprovista del concepto de «fuerza». De hecho, por sí sola, esta primera ley únicamente contiene un significado preciso para una *fuerza nula*; o sea, lo correcto sería afirmar que todo cuerpo en reposo o en movimiento uniforme (es decir, rectilíneo y no acelerado) no está sometido a la acción de ninguna fuerza. De todo cuerpo que se mueve de esta forma se dice que es un *cuerpo libre* (o *partícula libre*). La cuestión del sistema de referencia respecto del cual haya de medirse el «movimiento uniforme» será tratada en la sección siguiente.

Al señalar la falta de contenido de la primera ley, Sir Arthur EDDINGTON* ha hecho la afirmación, algo jocosa, de que en realidad todo lo que aquella nos dice es que «toda partícula continúa en su estado de reposo o de movimiento uniforme según una recta hasta que deja de hacerlo». Si bien tal comentario no es muy justo con Newton, quien con su enunciado quiso decir algo muy definido, recalca bien el hecho de que la primera ley, por sí sola, únicamente puede darnos una noción cualitativa acerca de la «fuerza».

Una afirmación explícita acerca de la «fuerza» la proporciona la segunda ley, en la cual la fuerza se relaciona con la variación del *ímpetu* por unidad de tiempo. El ímpetu fue convenientemente definido por Newton (si bien él empleó la expresión «cantidad de movimiento») como el producto de la masa por la velocidad, o sea

$$\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v} \quad (2.1)$$

Por lo tanto, la segunda ley se expresará como sigue

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \quad (2.2)$$

La definición de fuerza sólo expresa algo completo y preciso cuando se define la «masa». Así pues, las leyes primera y segunda no son «principios» en el sentido que corrientemente se da al término en física; más bien pueden considerarse *definiciones*. La tercera ley, en cambio, es realmente un *principio*, ya que se trata de una declaración relativa al mundo físico real y contiene toda la física de que están dotadas las leyes del movimiento de Newton.**

* Sir Arthur EDDINGTON (Ed30, pág. 124).

** El razonamiento aquí presentado, o sea que las leyes primera y segunda son definiciones y que la Física está contenida en la tercera ley, no es la única interpretación posible. Por ejemplo, LINDSAY y MARGENAU (Li36) presentan las leyes primera y segunda como *principios* físicos y a continuación deducen la tercera ley como consecuencia.

Hemos de apresurarnos a añadir, sin embargo, que la tercera ley no es un principio *general* de la Naturaleza, puesto que sólo se aplica en el caso de que la fuerza ejercida por un objeto (punto) sobre otro objeto (punto) esté dirigida a lo largo de la recta que une a ambos. Son éstas las llamadas *fuerzas centrales* y a ellas se aplica la tercera ley, sean las fuerzas en cuestión atractivas o repulsivas. Centrales son las fuerzas gravitatorias y las electrostáticas, por lo cual las leyes de Newton podrán aplicarse a los problemas en los que intervengan fuerzas de esta naturaleza. A veces, las fuerzas elásticas (que, en realidad, son manifestaciones macroscópicas de fuerzas electrostáticas microscópicas) son centrales; por ejemplo, dos objetos puntuales unidos por un muelle recto o por una cuerda elástica están sometidos a fuerzas que cumplen la tercera ley. Toda fuerza que dependa de las velocidades de los cuerpos en interacción es no central esencialmente, no aplicándose la tercera ley en tales casos. Estas fuerzas que dependen de la velocidad son características de las interacciones que se propagan a velocidad finita. Así por ejemplo, la fuerza que se ejercen entre sí las cargas eléctricas *en movimiento* no obedece la tercera ley, puesto que dicha fuerza se propaga a la velocidad de la luz; incluso la fuerza gravitatoria que se ejercen entre sí los cuerpos *en movimiento* depende de la velocidad, pero el efecto de ésta es pequeño y difícil de detectar, siendo el único efecto observable la precesión del perihelio de los planetas más cercanos al Sol (véase sección 8.10). En esta obra nos ocuparemos exclusivamente de las fuerzas elásticas y gravitatorias, para tratar de las cuales la precisión dada por la tercera ley es más que suficiente.

Al objeto de poner de manifiesto la importancia de la tercera ley de Newton, enunciémosla de nuevo de la forma siguiente, a la cual se incorpora la definición adecuada de masa:

III'. Cuando dos cuerpos constituyen un sistema aislado ideal, las aceleraciones de dichos cuerpos tendrán siempre la misma dirección y sentidos opuestos, siendo constante el cociente de los módulos de las aceleraciones. Este cociente es el inverso del cociente de las masas de los dos cuerpos.

Con este enunciado estamos ya en posición de establecer una definición operativa de masa y, por tanto, de dar un significado preciso a las ecuaciones que resumen la dinámica de Newton. Cuando consideremos dos cuerpos aislados, 1 y 2, la tercera ley de Newton nos dirá que

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 \quad (2.3)$$

Utilizando la definición de fuerza contenida en la segunda ley, tendremos

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = -\frac{d\mathbf{p}_2}{dt} \quad (2.4a)$$

o bien,

$$m_1 \left(\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} \right) = m_2 \left(- \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} \right) \quad (2.4b)$$

y, puesto que la aceleración es la derivada de la velocidad respecto del tiempo,

$$m_1(\mathbf{a}_1) = m_2(-\mathbf{a}_2) \quad (2.4c)$$

De aquí,

$$\frac{m_2}{m_1} = - \frac{a_1}{a_2} \quad (2.5)$$

donde el signo negativo indica únicamente que las aceleraciones son vectores dirigidos según sentidos opuestos.

Siempre nos será posible establecer una *masa unidad*, por ejemplo m_1 , y determinar la masa de otro cuerpo comparando el cociente de aceleraciones cuando m_1 interactúe con éste. Por supuesto que para medir aceleraciones deberemos contar con los relojes y las reglas de medición apropiados; además, es necesario que elijamos un sistema de referencia adecuado. Esta cuestión del «sistema de referencia adecuado» será tratado en la sección siguiente.

Uno de los métodos más corrientes para determinar la masa de un cuerpo consiste en *pesarlo* —por ejemplo, comparando su peso con el de un patrón mediante una balanza de brazos—, procedimiento que hace uso del hecho de que en un campo gravitatorio el *peso* de un cuerpo es únicamente la fuerza gravitatoria que actúa sobre él mismo. En este caso, la expresión de la segunda ley de Newton $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ pasa a ser $\mathbf{W}=mg$, donde g es la aceleración debida a la gravedad. La validez del empleo de este procedimiento descansa sobre una hipótesis fundamental consistente en que la masa m que interviene en la fórmula de Newton, y definida según el enunciado III' precedente, es igual a la masa m que aparece en la expresión de la fuerza gravitatoria. Estas dos masas son, respectivamente, las llamadas *masa inerte* y *masa pesante*, las cuales se definen como sigue:

Masa inerte: Es aquella masa que determina la aceleración de un cuerpo sometido a una fuerza dada.

Masa pesante: Es aquella masa que determina las fuerzas gravitatorias que se ejercen entre un cuerpo y otros cuerpos.

El primero en comprobar la equivalencia entre masa inerte y masa pesante fue GALILEO con su experimento (quizás apócrifo) acerca de la caída de los cuerpos, realizado en la Torre de Pisa. Asimismo, NEWTON examinó el problema midiendo los períodos de péndulos de igual longitud y lentejas diferentes. Ninguno de los dos encontró diferencia alguna,* si bien los métodos eran muy grose-

* NEWTON, en sus experiencias, sólo habría podido detectar una diferencia de una parte por mil.

ros. En 1890 Eötvös* ideó un método ingenioso para comprobar la equivalencia de las masas inerte y pesante. Mediante dos objetos formados por materiales distintos, comparó el efecto producido por la fuerza gravitatoria terrestre (o sea, el *peso*) con el de la fuerza inercial debida a la rotación de la Tierra. La experiencia implicaba el empleo de un método *de cero* utilizando una balanza de torsión de gran sensibilidad capaz de una precisión elevada. En experiencias más recientes (en especial la de DICKE**), que siguieron esencialmente el mismo procedimiento, se mejoró la precisión, habiendo quedado establecido en la actualidad que las masas inerte y pesante son iguales dentro de unas pocas partes por 10^{11} . Es éste un resultado de importancia considerable para la teoría de la relatividad generalizada.*** El enunciado de la igualdad *exacta* entre las masas inerte y pesante constituye el llamado *principio de equivalencia*.

La tercera ley de Newton se enuncia haciendo referencia a dos cuerpos que constituyen un sistema aislado ideal. Esta situación ideal no es, desde luego, alcanzable en la realidad, ya que todos y cada uno de los cuerpos del Universo interactúan con todos los demás, aunque la fuerza de interacción sea sobradamente débil para que carezca de importancia práctica cuando las distancias que intervengan sean grandes. Newton evitó la cuestión de cómo han de desligarse los efectos deseados de todos los extraños, pero esta dificultad práctica sólo sirve para realzar la enorme trascendencia de la aserción contenida en su tercera ley. El hecho de que una conclusión basada en observaciones limitadas haya sostenido con éxito la prueba de casi 300 años de experiencias constituye un tributo a la profundidad de su percepción y de su visión del mundo físico. Sólo ha sido dentro de este siglo cuando se han hecho medidas con el detalle suficiente para revelar ciertas discrepancias respecto a las predicciones de la teoría de Newton. La búsqueda de los detalles de estas discrepancias han llevado al desarrollo de la teoría de la relatividad y de la mecánica cuántica.****

2.3 Sistemas de referencia

Newton comprendió la necesidad de elegir un sistema de referencia, respecto del cual sea posible medir los desplazamientos de los cuerpos, si es que las leyes del movimiento han de tener algún significado. Todo sistema de referencia se llama *inercial* cuando las leyes del movimiento de Newton son válidas en el mismo. Es decir, cuando encontramos que todo cuerpo libre de la acción de fuer-

* Roland von Eötvös (1848-1919), barón húngaro; sus investigaciones acerca de los problemas gravitatorios condujeron al desarrollo de un gravímetro que se utilizó en estudios geológicos.

** R. H. DICKE, *Science* 124, 621 (1959).

*** Véanse, por ejemplo, las discusiones de BERGMANN (Be46) o de WEBER (We61). En el texto de Weber (cap. 1) se ofrece asimismo un estudio del experimento de Eötvös.

**** Véase también la sección 2.12.

zas se mueve en línea recta a velocidad constante (o permanece en reposo), el sistema de coordenadas utilizado para estudiar este hecho será un sistema de referencia inercial. Es ésta una definición operacional bien delimitada y que es también resultado de la teoría de la relatividad generalizada.

Entonces, cuando las leyes de Newton sean válidas en un sistema de referencia, lo serán también en todo sistema que se mueva uniformemente (o sea, sin aceleración) respecto del primero.* Esto es consecuencia de que en la fórmula $F = m\ddot{r}$ interviene la segunda derivada de r respecto del tiempo de manera que todo cambio de coordenadas en el que intervenga una velocidad constante no alterará dicha fórmula; este hecho constituye el llamado *principio de la relatividad de Newton* o de la *invariancia de Galileo*.

La teoría de la relatividad ha demostrado que los conceptos de *reposo absoluto* y de sistema de referencia inercial *absoluto* carecen de sentido. Por ello, aun cuando convencionalmente adoptemos un sistema de referencia que se halle fijo respecto de las estrellas «fijas» —y realmente en un sistema como ése las fórmulas de Newton son válidas con un alto grado de precisión— tal sistema no es de hecho inercial. Sin embargo, podemos suponer que las estrellas «fijas» definen un sistema de referencia inercial «absoluto» con una precisión más que suficiente para nuestros fines actuales.

Aun cuando el sistema de referencia de las estrellas «fijas» sea un sistema susceptible de una definición concreta y sea adecuado para muchos propósitos, debemos recalcar que en la definición fundamental de sistema inercial no se hace mención alguna de estrellas, «fijas» o no. Cuando un cuerpo, libre de la acción de fuerzas, se mueve a velocidad constante respecto de un cierto sistema de coordenadas, diremos que ese sistema es inercial por definición.

Dado que la descripción exacta del movimiento de un objeto físico real dentro del mundo físico real es prácticamente imposible, debemos recurrir siempre a idealizaciones y aproximaciones de grado variable. En virtud de esto, generalmente despreciamos las fuerzas más débiles que actúan sobre un cuerpo cuando éstas no afectan de forma importante al movimiento del mismo. La situación más sencilla posible sería aquella en la cual la experiencia se llevase a cabo en un «vacío» absoluto, de forma que una partícula no fuese perturbada por fuerza extraña alguna. Sin embargo, como siempre deberemos postular algunas líneas de fe sobre las que basar un sistema de referencia (p. e., las estrellas «fijas» distantes), podemos ya introducir con ello una aproximación a la situación ideal, como es suponer que la influencia de la materia lejana es nula. Desde luego, tal aproximación no afectará seriamente a la descripción del movimiento de la partícula, pero a causa de la necesidad de un soporte del que suspender

* En el capítulo 11 trataremos de la modificación que ha de introducirse en las leyes de Newton cuando se deseé describir el movimiento de un cuerpo respecto de un sistema de referencia no inercial, es decir, un sistema acelerado con relación a un sistema inercial.

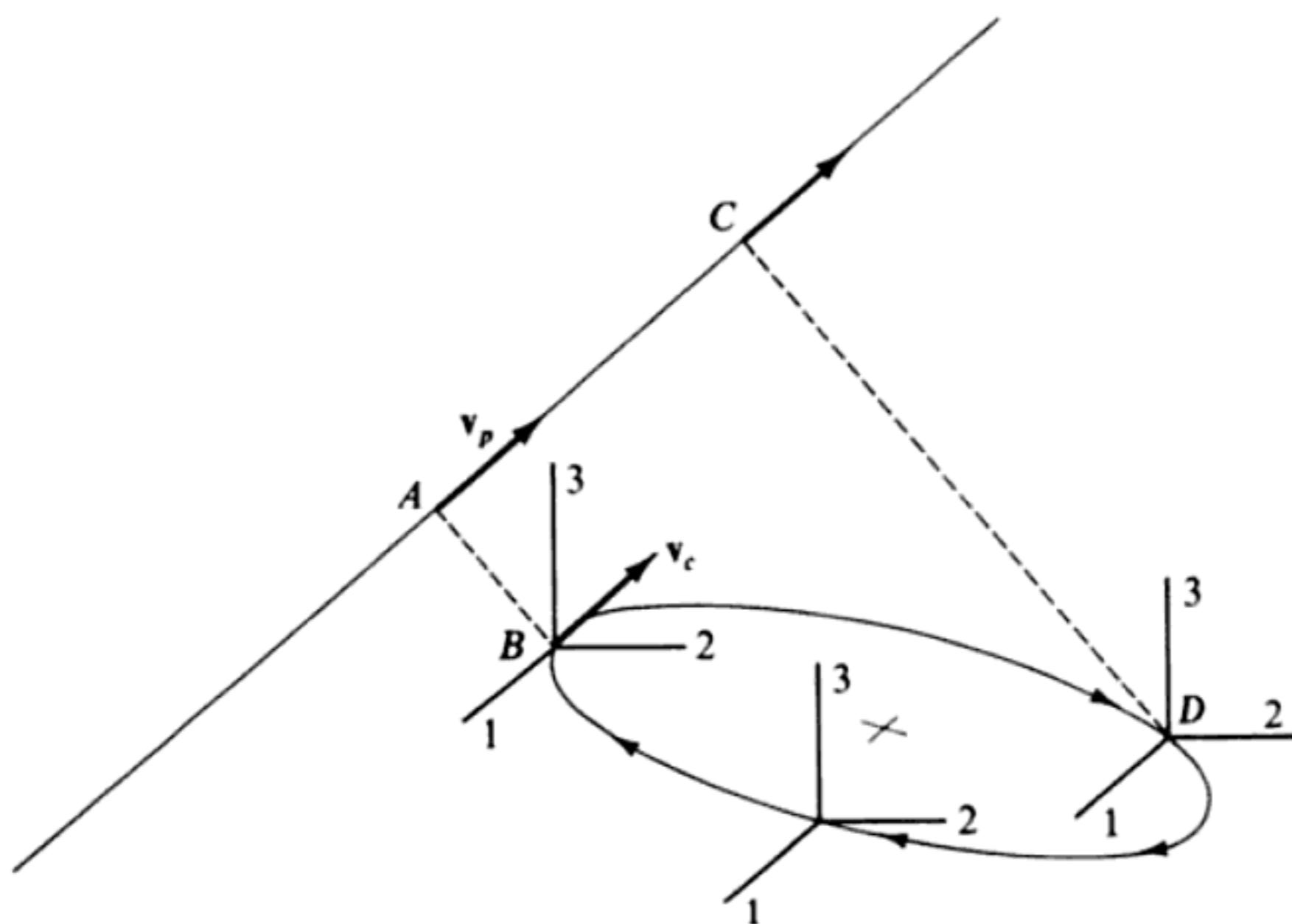


FIG. 2-1

el sistema de referencia, es conceptualmente imposible considerar medidas del desplazamiento de una partícula *completamente libre*. No obstante, la idea de partícula libre es útil por muchos conceptos.

Cuando deseemos describir el movimiento de, por ejemplo, una partícula libre, eligiendo para nuestro propósito un sistema de coordenadas situado dentro de un sistema inercial, será necesario que la ecuación (vectorial) de movimiento de la partícula sea independiente de la *posición* del origen del sistema de coordenadas y de la *orientación* de éste en el espacio. Es decir, es preciso que el *espacio* de un sistema inercial presente las propiedades de *homogeneidad* e *isotropía*. Además, es preciso que el *tiempo* sea homogéneo; o sea, toda partícula libre que se mueva a una cierta velocidad constante durante un cierto intervalo de tiempo en el interior del sistema de coordenadas, no debe ser hallada, en un intervalo de tiempo posterior, moviéndose a una velocidad distinta.

Con el ejemplo siguiente pondremos de manifiesto la importancia de estas propiedades. Supongamos, como se representa en la figura 2-1, que una partícula libre se mueve a lo largo de una trayectoria AC y que para describir este movimiento elegimos un sistema de coordenadas rectangulares cuyo origen se desplaza sobre una circunferencia, tal como se indica; para simplificar supondremos que la orientación de los ejes en el espacio no varía. La partícula se desplaza a una velocidad v_p con relación a un sistema de referencia inercial. Si el sistema se mueve a una velocidad lineal v_c cuando está en B y si $v_c = v_p$, resultará que para un observador situado en el sistema en movimiento, la partícula (en A)

parecerá estar *en reposo*. Sin embargo, pasado algún tiempo, cuando la partícula esté en *C* y el sistema de coordenadas en *D*, al observador le parecerá que la partícula se aleja acelerándose. Debemos concluir, por tanto, que el sistema de coordenadas en rotación no cumple las condiciones para ser un sistema inercial.

Sin embargo, las observaciones descritas no bastan para decidir si el tiempo es homogéneo, ya que para llegar a esta conclusión es necesario repetir las medidas en instantes distintos y en situaciones idénticas; resultados idénticos nos indicarían que el tiempo es homogéneo.

Las fórmulas de Newton no dan cuenta del movimiento de los cuerpos en los sistemas no inerciales. Sin embargo, podemos idear un método mediante el cual sea posible describir el movimiento de una partícula por medio de un sistema de coordenadas giratorio, si bien, como veremos en el capítulo 11, resultan unas ecuaciones que contienen algunos términos que no aparecen en la fórmula de Newton, $F=ma$. Por el momento, entonces, limitaremos nuestra atención a los sistemas de referencia inerciales para la descripción de la dinámica de las partículas.

2.4 Ecuación de movimiento de una partícula

La fórmula de Newton $F=d\mathbf{p}/dt$, puede expresarse también en la forma

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\ddot{\mathbf{r}} \quad (2.6)$$

si suponemos que la masa *m* no varía con el tiempo. Se trata de una ecuación diferencial de segundo orden en $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ que podrá integrarse cuando conozcamos la función \mathbf{F} y los valores iniciales de \mathbf{r} y de $\dot{\mathbf{r}}=\mathbf{v}$, los cuales nos servirán para determinar las dos constantes de integración. En los textos elementales pueden encontrarse muchos problemas de este tipo.

Debemos recalcar que la fuerza \mathbf{F} que aparece en 2.6 no es constante necesariamente y que, en la realidad, puede estar compuesta de varias partes diferentes. Por ejemplo, cuando una partícula cae en el seno de un campo gravitatorio constante, la fuerza gravitatoria será $\mathbf{F}_g=m\mathbf{g}$, donde \mathbf{g} es la aceleración de la gravedad. Cuando, además, existe una fuerza resistente \mathbf{F}_r , función cualquiera de la velocidad instantánea, la fuerza total será

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_r \\ &= m\mathbf{g} + \mathbf{F}_r(v) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Con frecuencia basta suponer sencillamente que $F_r(v)$ es proporcional a alguna potencia de la velocidad. En general, las fuerzas resistentes *reales* son más complicadas, pero esta hipótesis de proporcionalidad a una potencia de la velocidad se ha revelado útil en muchos casos en que ésta no varía excesivamente. (Abona este hecho la circunstancia de que si $F_r \propto v^n$, generalmente la ecuación de movimiento podrá integrarse directamente, mientras que si utilizásemos la expresión auténtica, posiblemente sería necesario recurrir a la integración numérica.) Admitida, pues, esta aproximación, podremos escribir

$$\mathbf{F} = mg - m k v^n \frac{\mathbf{v}}{v} \quad (2.7a)$$

donde k es una constante positiva responsable de la fuerza resistente y \mathbf{v}/v un vector unitario de igual dirección y sentido que \mathbf{v} . Experimentalmente se ha encontrado que en el caso de un objeto relativamente pequeño desplazándose en el aire, es $n \approx 1$ para velocidades inferiores a unos 2400 cm/s; a velocidades superiores, pero inferiores a la del sonido (33 000 cm/s), la fuerza resistente es aproximadamente proporcional al cuadrado de la velocidad.*

La importancia que la resistencia del aire tiene en balística es evidente, en especial para el cálculo de las trayectorias de los proyectiles de artillería. Por ello, se han realizado extensas tabulaciones, para distintos tipos de proyectiles, de la velocidad en función del tiempo de vuelo, siendo la de INGALLS** una de las más conocidas en Estados Unidos. Parte de estas tablas está dedicada a las características funcionales de un proyectil de una pulgada (2,54 cm) de diámetro y una libra (0,45 Kp) de peso, con una ojiva puntiaguda de forma especial.*** En la figura 2-2 se representa la fuerza resistente en función de la velocidad para este proyectil. En la curva superior está representada la región de las velocidades comprendidas entre cero y 1200 pies por segundo, unos 400 m/s. Es evidente que para representar esta curva se necesita al menos una función de segundo grado, aunque, en realidad, trozos de ella queden bien representados por pará-

* El movimiento de una partícula en un medio que ofrece una resistencia proporcional a la velocidad o al cuadrado de la velocidad (o a una combinación lineal de ambas) fue examinado por NEWTON en su *Principia* (1687). Johann BERNOULLI hizo la extensión a cualquier potencia de la velocidad en 1711. La expresión *ley de resistencia de Stokes* se aplica a veces a una fuerza proporcional a la velocidad; la *ley de resistencia de Newton* hace referencia a una fuerza resistente proporcional al cuadrado de la velocidad.

** Coronel James M. INGALLS, U. S. Army Artillery Circular M, 1918.

*** Realmente una ojiva de radio dos calibres. Según la forma de la ojiva, la fuerza resistente para cualquier velocidad puede ser el doble (si la ojiva es menos puntiaguda) o la mitad (si la ojiva es más puntiaguda) de la correspondiente a la ojiva de radio dos calibres.

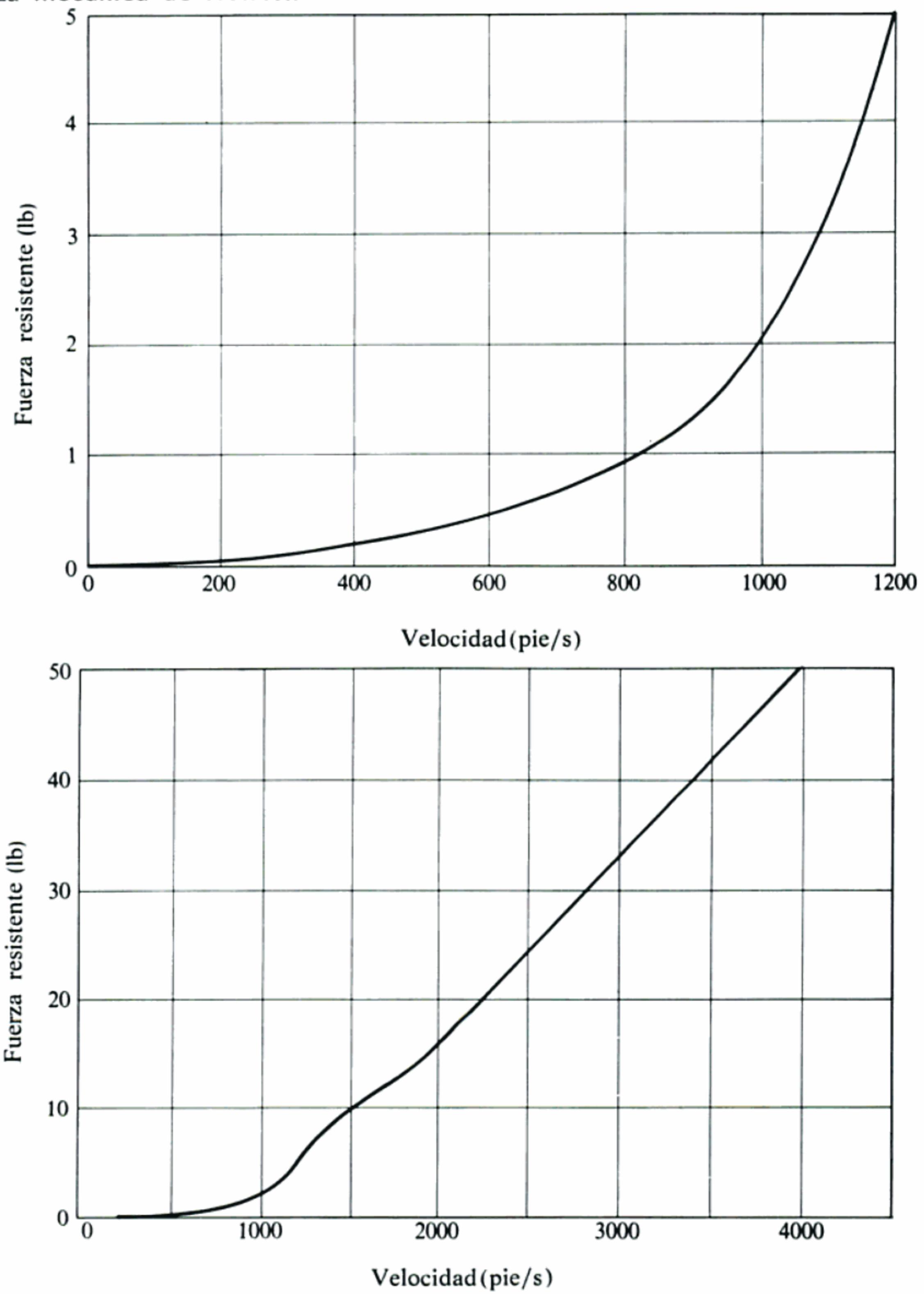


FIG. 2-2

bolas. La curva inferior muestra un intervalo de velocidades más amplio, poniendo de manifiesto que a velocidades superiores a unos 2000 pies s⁻¹ (660 m/s, aprox.), la variación de la fuerza resistente con la velocidad es aproximadamente lineal. Nótese la variación de la forma de la curva en la zona inmediata superior a la velocidad del sonido (1100 pies/s).

Veamos seguidamente algunos ejemplos del movimiento de una partícula sometida a distintas fuerzas.

◆ Ejemplo 2.4(a) Movimiento horizontal de una partícula en un medio resistente

Como ejemplo más sencillo del movimiento de una partícula en un medio resistente, examinemos el movimiento horizontal en un medio que ofrece una fuerza resistente proporcional a la velocidad. Una situación como ésta sería, por ejemplo, la de una partícula deslizante sometida a rozamiento. La fórmula de Newton $F=ma$, nos da la ecuación de movimiento

$$ma = m \frac{dv}{dt} = -kmv \quad (1)$$

donde kmv es el módulo de la fuerza resistente ($k=\text{cte}$). Entonces,

$$\begin{aligned} \int \frac{dv}{v} &= -k \int dt \\ \ln v &= -kt + C_1 \end{aligned} \quad (2)$$

Si establecemos la condición inicial $v(t=0)=v_0$, podremos calcular la constante de integración que aparece en 2, que resulta ser $C_1=\ln v_0$, con lo cual

$$v = v_0 e^{-kt} \quad (3)$$

Esta expresión puede integrarse para obtener el desplazamiento x en función del tiempo:

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} = v_0 e^{-kt} \\ x &= v_0 \int e^{-kt} dt = -\frac{v_0}{k} e^{-kt} + C_2 \end{aligned} \quad (4)$$

La condición $x(t=0)=0$ implica $C_2=v_0/k$; por tanto,

$$x = \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt}) \quad (5)$$

resultado que muestra que cuando $t \rightarrow \infty$, x tiende asintóticamente a v_0/k .

Asimismo, podemos obtener la velocidad en función del desplazamiento, escribiendo

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{1}{v} \quad (6)$$

de forma que

$$v \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dt} = -kv \quad (7)$$

o sea,

$$\frac{dv}{dx} = -k \quad (8)$$

de donde, aplicando las mismas condiciones iniciales,

$$v = v_0 - kx \quad (9)$$

Por lo tanto, la velocidad disminuye linealmente con el desplazamiento.

◆ Ejemplo 2.4(b) Movimiento vertical de una partícula en un medio resistente

Tratemos ahora el caso de una partícula dotada de movimiento vertical en el seno de un medio donde nuevamente la resistencia es proporcional a la velocidad. Supongamos que la partícula se lanza hacia abajo con una velocidad inicial v_0 desde una altura h en un campo gravitatorio constante. La ecuación de movimiento es

$$F = m \frac{dv}{dt} = -mg - kmv \quad (1)$$

donde $-kmv$ representa una fuerza *dirigida hacia arriba* ya que tomamos z y $v = \dot{z}$ positivos en ese sentido y el movimiento *se dirige hacia abajo*; o sea, $v < 0$ de forma que $-kmv > 0$. De 1 tenemos

$$\frac{dv}{kv + g} = -dt \quad (2)$$

que integrada y con la condición $v(t=0) \equiv v_0$ nos da

$$v = \frac{dz}{dt} = -\frac{g}{k} + \frac{kv_0 + g}{k} e^{-kt} \quad (3)$$

Integrando nuevamente y calculando la constante, haciendo $z(t=0) \equiv h$, encontramos

$$z = h - \frac{gt}{k} + \frac{kv_0 + g}{k^2} (1 - e^{kt}) \quad (4)$$

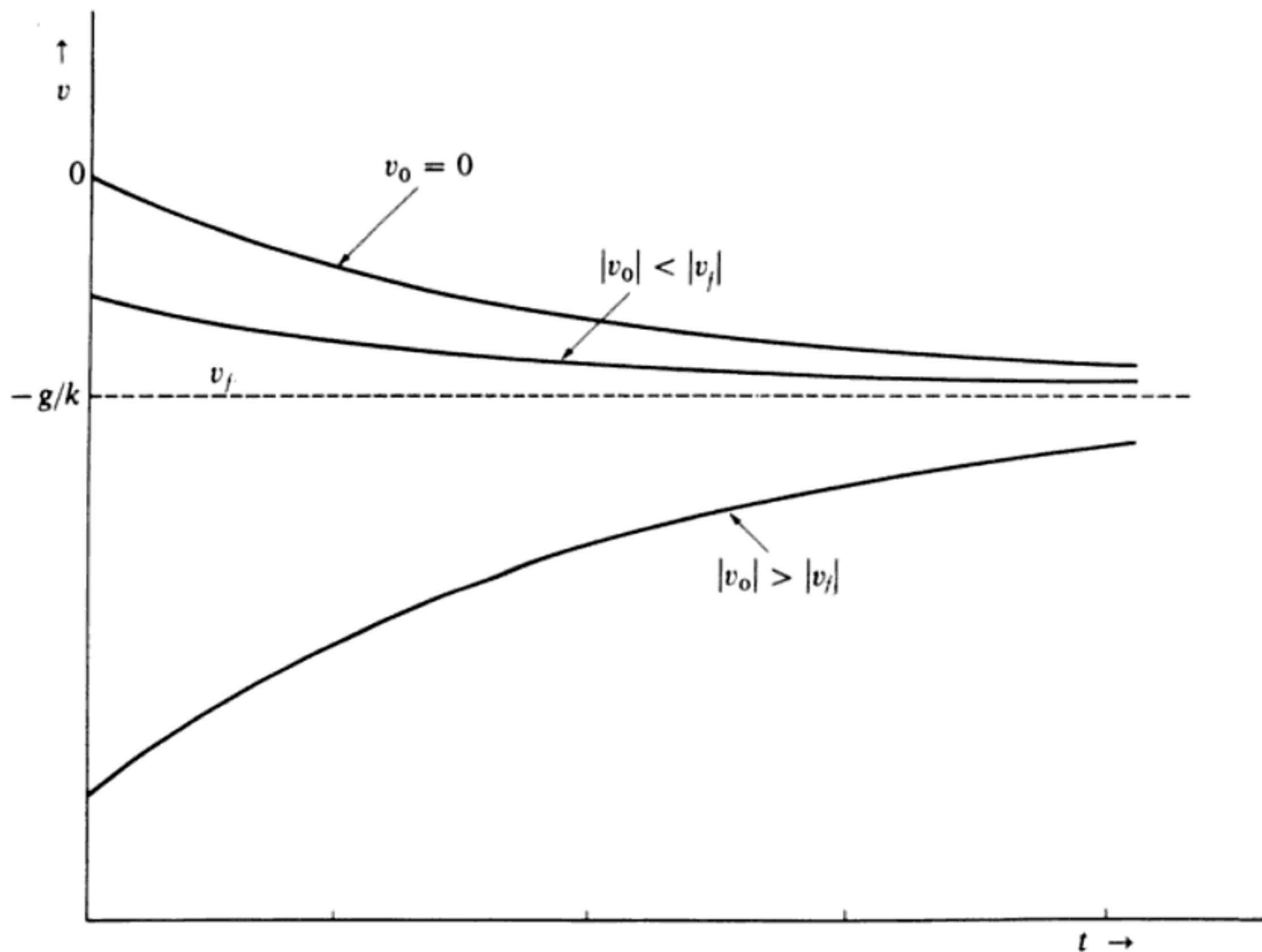


FIG. 2-3

La expresión 3 nos indica que a medida que el tiempo crece, la velocidad se va aproximando al valor límite $-g/k$, que es la llamada *velocidad final* v_f . Por otra parte, vemos en la ecuación 1 que cuando en ella hacemos $v = -g/k$, obtenemos el mismo resultado, ya que entonces la fuerza se anula y desaparece la aceleración. Cuando el módulo de la velocidad inicial sea mayor que el de la velocidad final, el cuerpo comenzará a moverse perdiendo velocidad y v tenderá hacia el valor de la velocidad final desde el sentido contrario. En la figura 2-3 se representan estos resultados.

◆ **Ejemplo 2.4(c) Movimiento de un proyectil en un medio resistente. Solución aproximada mediante un desarrollo en serie**

Examinemos a continuación el movimiento de un proyectil en la atmósfera, donde el aire origina una fuerza resistente que supondremos proporcional a la velocidad

instantánea. Como podemos descomponer el movimiento en las componentes horizontal y vertical, en este caso se combinan los resultados de los dos ejemplos precedentes. Nuestro deseo es calcular la disminución de alcance producida por la resistencia del aire. En la figura 2-4 se representa la situación para algunos valores de la constante de resistencia k (en unidades de un cierto valor normalizado, k_0).

Si son R y R' los alcances sin* y con resistencia del aire, respectivamente, la variación de aquél debida al aire será $R - R' = \Delta R$. Si α es la inclinación de la dirección del movimiento en el instante inicial, las condiciones iniciales podrán establecerse como sigue

$$\left. \begin{array}{l} x(t=0) = 0 = y(t=0) \\ \dot{x}(t=0) = v_0 \cos \alpha \equiv U \\ \dot{y}(t=0) = v_0 \sin \alpha \equiv V \end{array} \right\} \quad (1)$$

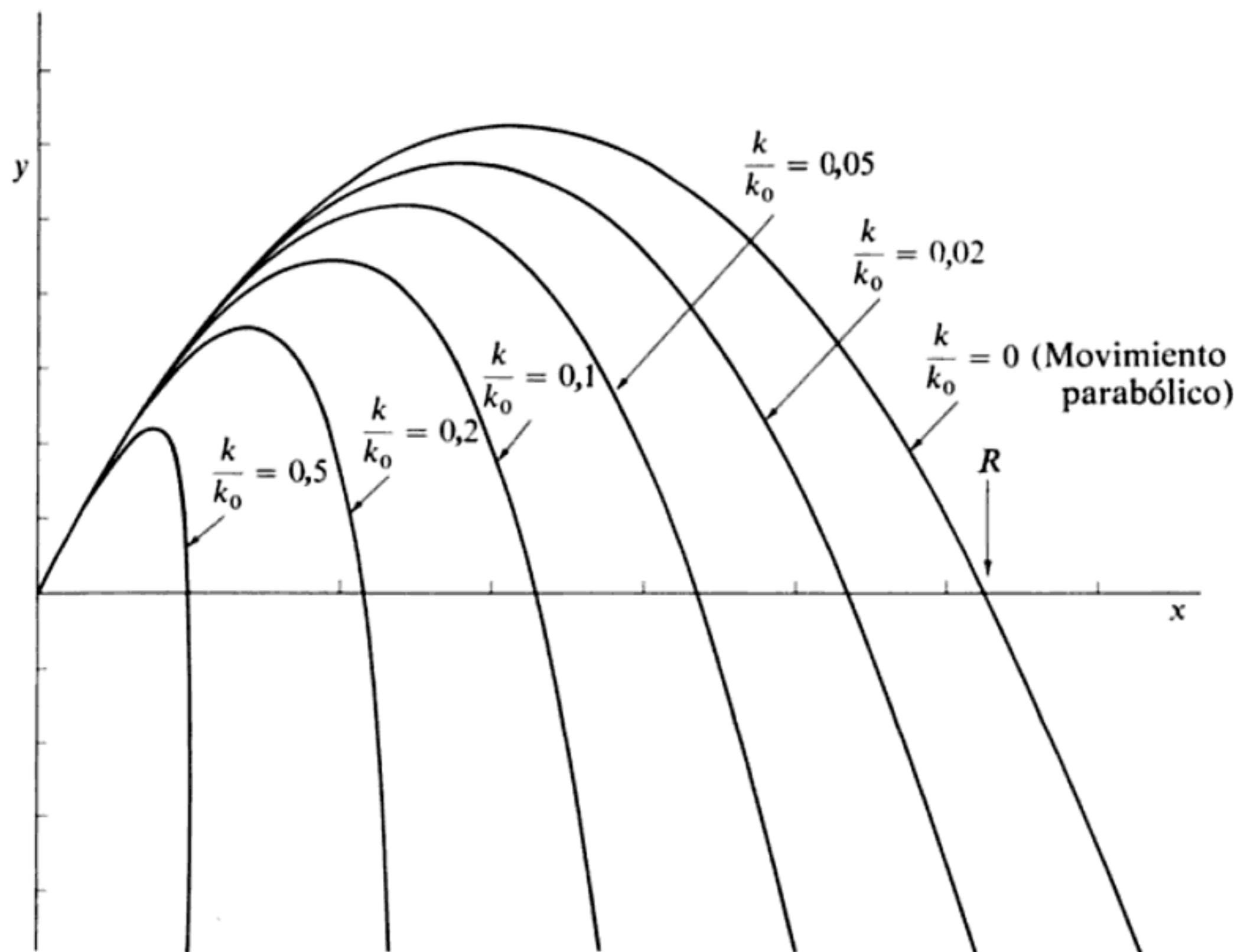


FIG. 2-4

* La trayectoria parabólica que sigue un proyectil en ausencia de resistencia fue obtenida por GALILEO en su *Discorsi*, 1638.

Las ecuaciones de movimiento son

$$m\ddot{x} = -km\dot{x} \quad (2)$$

$$m\ddot{y} = -km\dot{y} - mg \quad (3)$$

La ecuación 2 es exactamente la que hemos manejado en el ejemplo 2.4(a) y cuya solución es

$$x = \frac{U}{k} (1 - e^{-kt}) \quad (4)$$

De forma similar la ecuación 3 es la misma ecuación de movimiento del ejemplo 2.4(b), cuya solución podemos utilizar sin más que hacer $h=0$. (El hecho de que en el ejemplo 2.4(b) hayamos supuesto que la partícula se lanzaba hacia abajo carece de consecuencias ya que el signo de la velocidad inicial lo tendrá automáticamente en cuenta.) Por tanto,

$$y = -\frac{gt}{k} + \frac{kV + g}{k^2} (1 - e^{-kt}) \quad (5)$$

Podemos determinar el alcance R' calculando primero el tiempo T necesario para que la partícula recorra toda la trayectoria y sustituyendo a continuación este valor en la ecuación 4. El tiempo lo determinaremos teniendo en cuenta que al final de la trayectoria es $y=0$, o sea, $y(t=T)=0$. Entonces, de 5 tenemos

$$T = \frac{kV + g}{gk} (1 - e^{-kT}) \quad (6)$$

que es una ecuación transcendente, por lo cual no es posible obtener una expresión analítica de T y es preciso recurrir a un método aproximado. Desarrollemos primero la exponencial (véase D.34, ap. D):

$$T = \frac{kV + g}{gk} (kT - \frac{1}{2}k^2T^2 + \frac{1}{6}k^3T^3 - \dots) \quad (7)$$

Dividiendo ambos miembros por T , esta expresión puede disponerse como sigue

$$T = \frac{2V/g}{(1+kV/g)} + \frac{1}{3}kT^2 \quad (8)$$

La igualdad 8 muestra (al igual que el planteamiento elemental en el que se desprecia la resistencia del aire) que en el límite $k \rightarrow 0$, el tiempo de vuelo del proyectil es

$$T_0 = \frac{2V}{g}, \quad k \rightarrow 0 \quad (9)$$

Por tanto, si suponemos que k es pequeño (pero no nulo), entonces el tiempo de vuelo será *aproximadamente* igual a T_0 . Si a continuación introducimos este valor aproximado en el término de segundo grado de la ecuación 8, tendremos

$$T \cong \frac{2V}{g} \left(1 - \frac{kV}{g} \right) + \frac{1}{3}k \left(\frac{2V}{g} \right)^2 \quad (10)$$

de forma que

$$T \cong \frac{2V}{g} \left(1 - \frac{kV}{3g} \right) \quad (11)$$

que es la expresión aproximada del tiempo de vuelo que buscábamos.

Escribamos ahora la expresión de x (ecuación 4) en forma de serie

$$x = \frac{U}{k} (kt - \frac{1}{2}k^2t^2 + \frac{1}{6}k^3t^3 - \dots) \quad (12)$$

Como $x(t=T) \equiv R'$, el valor aproximado del alcance será,

$$R' \cong U(T - \frac{1}{2}kT^2) \quad (13)$$

expresión que podemos calcular utilizando el valor de T dado por 11. Si retenemos únicamente los términos de primer grado en k , encontramos

$$R' \cong \frac{2UV}{g} \left(1 - \frac{4kV}{3g} \right) \quad (14)$$

Ahora, la cantidad $2UV/g$ puede escribirse (utilizando las expresiones 1)

$$\frac{2UV}{g} = \frac{2v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \quad (15)$$

donde podrá reconocerse la expresión del alcance R del proyectil cuando se desprecia la resistencia del aire. Por lo tanto,

$$R' \approx R \left(1 - \frac{4kV}{3g} \right) \quad (16)$$

de manera que la variación del alcance, correcta hasta la primera potencia de k , es

$$\Delta R = R - R' \approx \frac{4kVR}{3g} \quad (17)$$

o bien,

$$\Delta R \approx \frac{4kv_0^3}{3g^2} \sin \alpha \sin 2\alpha \quad (18)$$

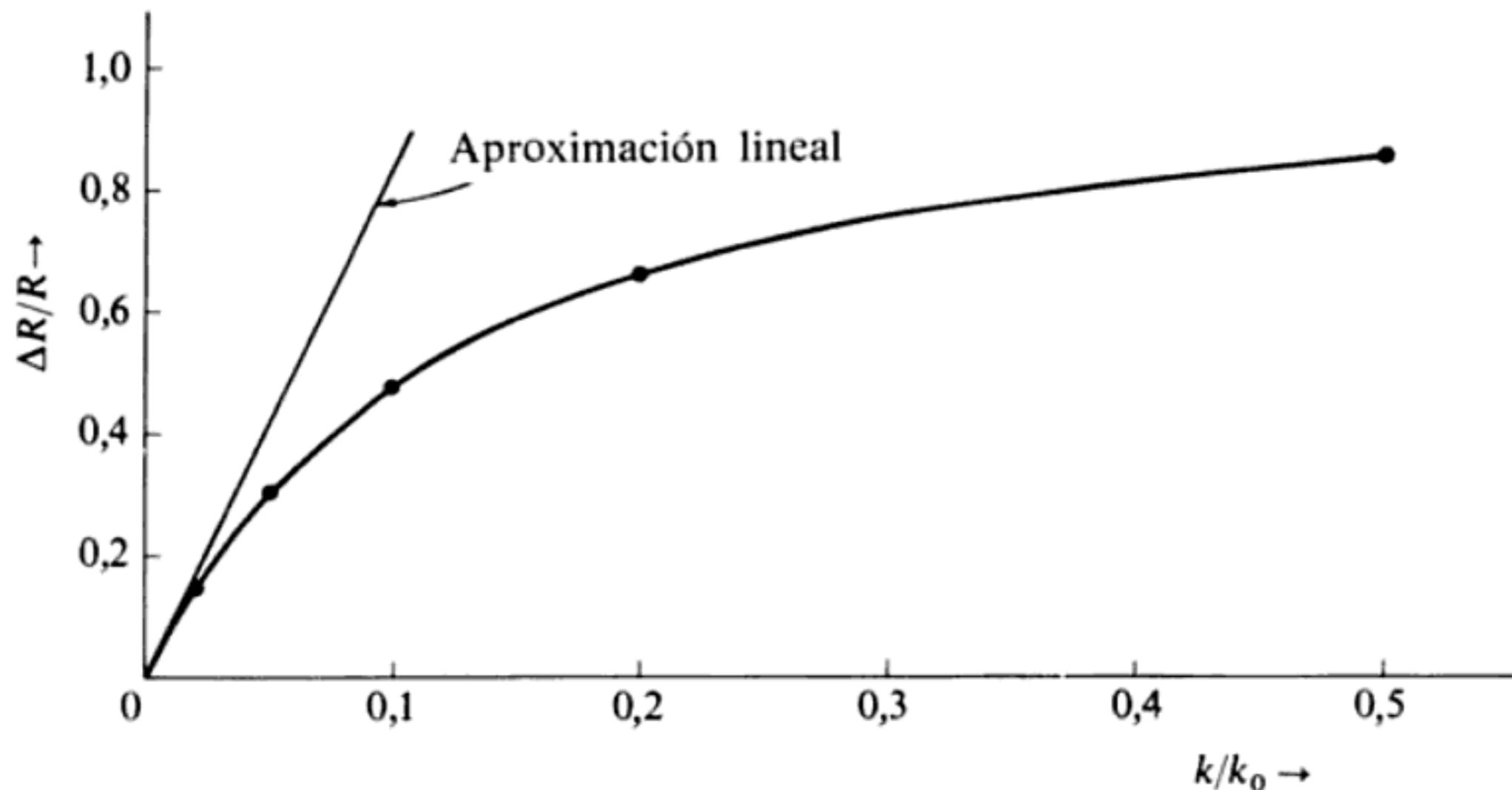


FIG. 2-5

En la figura 2.5, que se basa en los resultados del caso que se ilustra en la figura 2.4, se representa la variación del alcance ΔR en función de k/k_0 . (Los puntos señalados en la curva hacen referencia a las trayectorias que se representan en la figura 2.4.) Es evidente que el cálculo de ΔR mediante una aproximación lineal se hace bastante inexacto para $k/k_0 \gtrsim 0,02$.

◆ Ejemplo 2.4(d) Movimiento de una masa variable. «Ecuación del cohete»

Sea $v(t)$ la velocidad del cohete respecto de un cierto sistema de coordenadas fijo y sea $m(t)$ la masa del cohete (incluida la del combustible no consumido). Supon-

dremos que los gases de escape proyectados por el cohete para conseguir la propulsión se expulsan a una velocidad constante \mathbf{V} con relación al mismo. Por lo tanto, la velocidad de los gases de escape con relación al sistema de coordenadas fijo es $\mathbf{v}(t) + \mathbf{V}$. La variación de ímpetu que experimenta el cohete por unidad de tiempo es

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}_r = \frac{d}{dt} (m\mathbf{v}) = m\dot{\mathbf{v}} + \dot{m}\mathbf{v} \quad (1)$$

Asimismo, la variación de ímpetu que experimentan los gases expulsados por unidad de tiempo es

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}_e = (\mathbf{v} + \mathbf{V})|\dot{m}| = -(\mathbf{v} + \mathbf{V})\dot{m} \quad (2)$$

donde $\dot{m} < 0$ puesto que la masa disminuye. La variación del ímpetu total por unidad de tiempo será precisamente la fuerza *exterior* \mathbf{F} que actúa sobre el sistema:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{d}{dt} (\mathbf{p}_r + \mathbf{p}_e) \\ &= m\dot{\mathbf{v}} + \dot{m}\mathbf{v} - (\mathbf{v} + \mathbf{V})\dot{m} \\ &= m\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{V}\dot{m} \end{aligned} \quad (3)$$

o, lo que es lo mismo,

$$(\mathbf{F} + \mathbf{V}\dot{m}) = m\dot{\mathbf{v}} \quad (4)$$

La «fuerza» adicional $\mathbf{V}\dot{m}$ que aparece a causa de que la masa del cohete no permanezca constante con el tiempo recibe el nombre de *empuje*.

Cuando el cohete se mueva en el vacío, donde no existe fuerza exterior, podrá integrarse la ecuación de movimiento, resultando

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{V} \ln m + \text{cte.} \quad (5)$$

Si las condiciones iniciales son $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ y $m(0) = m_0$, tendremos

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = -\mathbf{V} \ln \frac{m_0}{m} \quad (6)$$

Entonces, si el cohete estuviera compuesto al comienzo de una estructura de masa M_0 y una carga de combustible de masa M , se tendrá $m_0 = M_0 + M$. Por tanto,

en el instante t_b en que el combustible se ha consumido por completo, la masa será $m(t_b)=M_0$, y en este punto se alcanzará la velocidad máxima. Así pues

$$v_{\max} = v_0 - V \ln \left(1 + \frac{M}{M_0} \right) \quad (7)$$

(Recuérdese que v y V son directamente opuestas.) Por tanto, si el cohete debe alcanzar velocidades superiores a V , será necesario que $M \gg M_0$; es decir, la razón combustible a carga útil debe ser muy grande.

2.5 Teoremas de conservación

Pasamos ahora a tratar con detalle la mecánica newtoniana de una partícula aislada deduciendo los importantes teoremas relacionados con la conservación de magnitudes. Se debe recalcar que aquí no vamos a demostrar la conservación de tales magnitudes, sino que sencillamente vamos a deducir las consecuencias de las leyes del movimiento de Newton. Estas consecuencias deben ser sancionadas por la comprobación experimental y esta comprobación dará la medida en que quedan confirmadas las leyes que son su origen. El hecho de que los teoremas de conservación se hayan encontrado realmente válidos en muchas situaciones proporciona una parte importante de la prueba de la corrección de las leyes de Newton, al menos por lo que a la física clásica concierne.*

El primero de los teoremas de conservación se refiere al ímpetu de una partícula. Cuando la partícula es *libre*, o sea cuando no está sometida a fuerza alguna, la fórmula 2.2 se transformará en $\dot{\mathbf{p}}=0$ sencillamente. Por lo tanto, \mathbf{p} será un vector que no varía con el tiempo y el *ímpetu de una partícula libre se conserva*.

Nótese que este resultado es consecuencia de una ecuación vectorial, $\dot{\mathbf{p}}=0$, y que por lo tanto será válido para cada una de las componentes del ímpetu. Con el fin de establecer este resultado en otros términos, supongamos que sea \mathbf{s} un vector constante cualquiera tal que $\mathbf{F} \cdot \mathbf{s}=0$, en todo instante. Entonces

$$\dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = 0$$

o bien, integrando respecto del tiempo,

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{s} = \text{cte} \quad (2.8)$$

* Para más comentarios sobre este punto, véase la discusión del final de la sección 2.6.

lo que nos dice que *la componente del ímpetu en una dirección en la cual la fuerza es nula permanece constante con el tiempo.*

El *momento cinético* \mathbf{L} de una partícula respecto de un punto desde el cual se mide \mathbf{r} es, por definición,

$$\boxed{\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p}} \quad (2.9)$$

El *momento* \mathbf{N} de la fuerza respecto del mismo punto es, por definición

$$\boxed{\mathbf{N} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F}} \quad (2.10)$$

o sea,

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}$$

Entonces,

$$\dot{\mathbf{L}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}) + (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}})$$

pero como

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} = \dot{\mathbf{r}} \times m\mathbf{v} = m(\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}) \equiv 0$$

resulta

$$\boxed{\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{N}} \quad (2.11)$$

Cuando sobre una partícula no actúe momento alguno (o sea, cuando $\mathbf{N}=0$), será $\dot{\mathbf{L}}=0$ y por tanto \mathbf{L} permanecerá constante con el tiempo. Es éste el segundo de los teoremas de conservación: *el momento cinético de una partícula libre de la acción de momentos se conserva.*

Cuando una fuerza \mathbf{F} realiza trabajo sobre una partícula llevándola desde la posición 1 a la posición 2, este trabajo será, por definición,

$$\boxed{W_{12} \equiv \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}} \quad (2.12)$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt \\ &= \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) dt = \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (v^2) dt \\ &= d(\frac{1}{2}mv^2)\end{aligned}\tag{2.13}$$

Por lo tanto, el integrando de 2.12 es una diferencial exacta y

$$W_{12} = (\frac{1}{2}mv^2) \Big|_1^2 = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = T_2 - T_1\tag{2.14}$$

donde $T = \frac{1}{2}mv^2$ es la energía cinética de la partícula. Si $T_1 > T_2$ será $W_{12} < 0$ y es la partícula quien habrá realizado trabajo con la disminución consiguiente de energía cinética. Es importante tener presente que la fuerza \mathbf{F} que aparece en 2.12 es la fuerza *total* (o sea, la resultante) ejercida sobre la partícula.

Estudiemos ahora la integral 2.12 desde otro punto de vista. Hay muchos problemas de la física en los cuales la fuerza \mathbf{F} presenta la particularidad de que el trabajo necesario para llevar una partícula desde una posición a otra, sin que varíe la energía cinética, depende sólo de las posiciones inicial y final, y no del camino seguido por la partícula. Esta propiedad la presentan, por ejemplo, las fuerzas debidas a campos gravitatorios constantes. Así pues, cuando una partícula de masa m se eleva a una altura h (siguiendo una trayectoria *cualquiera*), se habrá realizado sobre ella un trabajo mgh y habrá adquirido capacidad para realizar una cantidad igual de trabajo al volver a su posición original. Esta *capacidad para realizar trabajo* es la llamada *energía potencial* de la partícula.*

Podemos definir la energía potencial de una partícula en función del trabajo necesario para llevarla desde una posición 1 hasta una posición 2 (sin variación neta de energía cinética):

$$\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U_1 - U_2\tag{2.15}$$

* La energía potencial y el concepto general de potencial se tratan con detalle en secciones posteriores, comenzando en la 2.7.

Es decir, el trabajo realizado para mover la partícula es simplemente la diferencia de energía potencial U entre los dos puntos. Si ponemos \mathbf{F} en forma de gradiente de una función escalar U^* , la fórmula 2.15 puede volver a escribirse:

$$\boxed{\mathbf{F} = -\mathbf{grad} U} \quad (2.16)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= - \int_1^2 (\mathbf{grad} U) \cdot d\mathbf{r} \\ &= - \int_1^2 \sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i} dx_i \\ &= - \int_1^2 dU = U_1 - U_2 \end{aligned} \quad (2.17)$$

En la mayoría de los sistemas de interés, la energía potencial es una función de punto y, quizás, del tiempo: $U = U(\mathbf{r})$ o $U = U(\mathbf{r}, t)$. No consideraremos aquellos casos en los cuales la energía potencial sea función de la velocidad.**

Es importante tener presente que la energía potencial está completamente definida salvo una constante aditiva. O sea, la fuerza que define $-\mathbf{grad} U$ no se diferencia de la que define $-\mathbf{grad}(U + \text{cte})$. Por tanto, la energía potencial carece de significado absoluto y únicamente son las diferencias de energía potencial lo que tiene sentido físico (como en 2.15).

Cuando elijamos un sistema de referencia inercial para describir un proceso mecánico, las leyes del movimiento serán las mismas que en cualquier otro sistema de referencia que se encuentre en movimiento uniforme con relación al primero. En general, la velocidad de una partícula será diferente según el sistema de referencia inercial al cual estemos refiriendo el movimiento. Encuentramos, pues, que no es posible asignar una *energía cinética absoluta* a una partícula, exactamente de la misma forma que no es posible dotar de significado absoluto a la energía potencial. Estas dos limitaciones son resultado del hecho de que la elección del *origen* del sistema de coordenadas que se emplea para describir un proceso físico es siempre arbitraria. James CLERK MAXWELL resumió esta situación como sigue***:

* La condición necesaria y suficiente para que una función vectorial pueda ser representada por el gradiente de una función escalar es que su rotacional sea idénticamente nulo. (Véase MARION, Ma65a, cap. 3.)

** En ciertas ocasiones hacen falta potenciales que dependan de la velocidad, como ocurre en electromagnetismo (donde aparecen los llamados *potenciales de Liénard-Wiechert*).

*** *Matter and Motion*, Cambridge Univ. Press, 1877; reimpresión de Dover, New York, pág. 91.

Por tanto, debemos considerar que la energía de un sistema material es una magnitud de la cual podemos estar seguros que aumenta o disminuye cuando el sistema pasa de un estado definido a otro. El valor absoluto de la energía en el estado origen nos es desconocido, y de nada nos serviría conocerlo, puesto que todos los fenómenos dependen de las variaciones de energía y no de su valor absoluto.

La *energía total* de una partícula es, por definición, la suma de las energías cinética y potencial:

$$E \equiv T + U \quad (2.18)$$

La derivada total de E respecto del tiempo es

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} \quad (2.19)$$

Para calcular las derivadas respecto del tiempo que aparecen en el segundo miembro de esta igualdad, nótese primero que 2.13 puede escribirse

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = d(\frac{1}{2}mv^2) = dT \quad (2.20)$$

Dividiendo ambos miembros por dt ,

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} \quad (2.21)$$

Por otra parte, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} \\ &= \sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial U}{\partial t} \\ &= (\mathbf{grad} U) \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial U}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Sustituyendo 2.21 y 2.22 en 2.20, encontramos

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} + (\mathbf{grad} U) \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial U}{\partial t} \\ &= (\mathbf{F} + \mathbf{grad} U) \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial U}{\partial t} \\ &= \frac{\partial U}{\partial t}\end{aligned}\tag{2.23}$$

puesto que el término $\mathbf{F} + \mathbf{grad} U$ será nulo dada la definición de energía potencial (2.16).

Cuando U no sea función explícita del tiempo (o sea, cuando $\partial U / \partial t = 0$; recuérdese que no consideramos potenciales dependientes de la velocidad), diremos que el campo de fuerzas representado por \mathbf{F} es *conservativo*. En estas condiciones, obtenemos el tercer teorema de conservación: *la energía total E de una partícula en un campo de fuerzas conservativo es constante respecto del tiempo.**

2.6 Teoremas de conservación para un sistema de partículas

Vamos a extender ahora lo tratado acerca de una partícula aislada a un sistema formado por n partículas. Estas partículas pueden encontrarse formando parte de una reunión suelta, como un conjunto de píldoras, o bien de un cuerpo rígido en el que se haya impedido todo movimiento relativo de las partículas que lo constituyen. Representaremos por M la masa de este sistema:

$$M = \sum_{\alpha} m_{\alpha}\tag{2.24}$$

donde la suma extendida a α (como en todas las sumas denotadas por índices griegos) comprende los valores desde $\alpha=1$ hasta $\alpha=n$.

Si es \mathbf{r}_{α} el vector que une el origen con la partícula α -ésima, el vector de posición del centro de masa del sistema será

$$\boxed{\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha}}\tag{2.25}$$

* La ley general de la conservación de la energía fue formulada en 1847 por Hermann VON HELMHOLTZ (1821-1894). Sus conclusiones se basaban en gran parte en los experimentos calorimétricos de James PRESCOTT JOULE (1818-1889) que comenzaron en 1840.

Suele ser conveniente referir la posición de una partícula al centro de masa (véase figura 2-6); para ello definimos el vector \bar{r}_x como sigue

$$\bar{r}_x = \mathbf{r}_x - \mathbf{R} \quad (2.26)$$

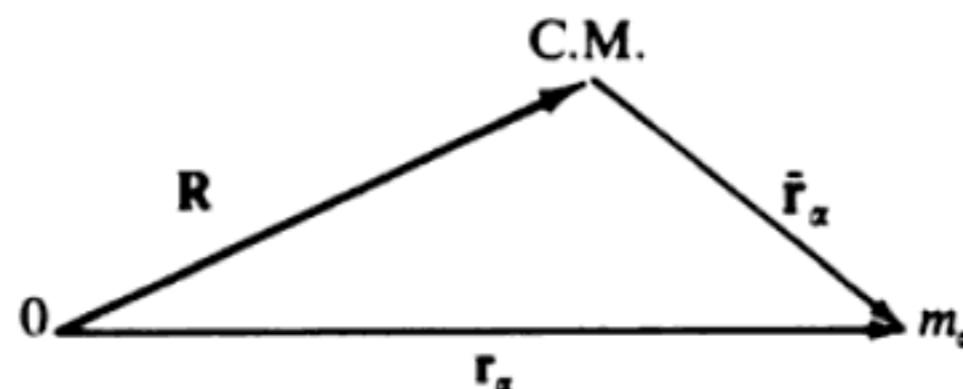


FIG. 2-6

Cuando se considera que un grupo de partículas dado constituye un *sistema*, la fuerza resultante que actúa sobre una de ellas (la α -ésima) se compondrá en general de dos partes. Una será la resultante de todas las fuerzas cuyo origen es exterior al sistema, la llamada *fuerza externa*, $\mathbf{F}_x^{(e)}$. La otra parte será la resultante de las fuerzas que tienen su origen en la interacción de las $n-1$ partículas restantes con la partícula α -ésima; ésta es la llamada *fuerza interna*, \mathbf{f}_x . Entonces, \mathbf{f}_x vendrá dada por la suma vectorial de todas las fuerzas individuales $\mathbf{f}_{\alpha\beta}$,

$$\sum_{\beta} \mathbf{f}_{\alpha\beta} = \mathbf{f}_x \quad (2.27)$$

donde $\mathbf{f}_{\alpha\beta}$ representa la fuerza que actúa *sobre* la partícula α -ésima *debida* a la partícula β -ésima. Por tanto, la fuerza total que actúa sobre la partícula α -ésima será

$$\mathbf{F}_x = \mathbf{F}_x^{(e)} + \mathbf{f}_x \quad (2.28)$$

Además, según la tercera ley de Newton*, tendremos

$$\mathbf{f}_{\alpha\beta} = -\mathbf{f}_{\beta\alpha} \quad (2.29)$$

La segunda ley de Newton referida a la partícula α -ésima será

$$\dot{\mathbf{p}}_x = m_x \ddot{\mathbf{r}}_x = \mathbf{F}_x^{(e)} + \mathbf{f}_x \quad (2.30)$$

o bien,

$$\frac{d^2}{dt^2} (m_x \mathbf{r}_x) = \mathbf{F}_x^{(e)} + \sum_{\beta} \mathbf{f}_{\alpha\beta} \quad (2.30a)$$

* Recuérdese que la tercera ley (y por tanto todos los estudios subsiguientes) no es válida para las cargas eléctricas en movimiento; las fuerzas electromagnéticas son *dependientes de la velocidad*.

Si escribimos la expresión anterior referida a cada una de las n partículas y sumamos las n expresiones resultantes, tendremos

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{(e)} + \sum_{\substack{\alpha \\ \beta \\ \alpha \neq \beta}} \sum_{\beta} \mathbf{f}_{\alpha\beta} \quad (2.31)$$

donde los términos de $\alpha=\beta$ no entran en la segunda suma del segundo miembro ya que $\mathbf{f}_{\alpha\alpha} = 0$. La suma del primer miembro es precisamente $M\mathbf{R}$ (véase 2.25) cuya derivada segunda respecto del tiempo es $M\ddot{\mathbf{R}}$. El primer término del segundo miembro es la suma de todas las fuerzas exteriores, que puede escribirse

$$\sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{(e)} \equiv \mathbf{F} \quad (2.32)$$

El segundo término del segundo miembro de 2.31 puede expresarse*

$$\sum_{\substack{\alpha \\ \beta \\ \alpha \neq \beta}} \sum_{\beta} \mathbf{f}_{\alpha\beta} \equiv \sum_{\alpha, \beta \neq \alpha} \mathbf{f}_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha < \beta} (\mathbf{f}_{\alpha\beta} + \mathbf{f}_{\beta\alpha})$$

que, según la igualdad 2.29, será nulo.** Así pues, llegamos al importante resultado siguiente

$$M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F} \quad (2.33)$$

* Esta igualdad puede comprobarse fácilmente calculando ambos miembros para un caso sencillo, como $n=3$. El último símbolo sumatorio significa «suma para todos los valores de α y β , con la restricción $\alpha < \beta$.»

** Nótese que la anulación de

$$\sum_{\substack{\alpha \\ \beta \\ \alpha \neq \beta}} \sum_{\beta} \mathbf{f}_{\alpha\beta}$$

puede demostrarse recurriendo al argumento siguiente. Como las sumas se llevan a cabo tanto sobre α como sobre β , estos índices son mudos; en particular, podemos intercambiar α y β sin afectar la suma. Con una notación más compacta, tenemos

$$\sum_{\alpha, \beta \neq \alpha} \mathbf{f}_{\alpha\beta} = \sum_{\beta, \alpha \neq \beta} \mathbf{f}_{\beta\alpha}$$

Pero, por hipótesis, $\mathbf{f}_{\alpha\beta} = -\mathbf{f}_{\beta\alpha}$, de forma que

$$\sum_{\alpha, \beta \neq \alpha} \mathbf{f}_{\alpha\beta} = -\sum_{\beta, \alpha \neq \beta} \mathbf{f}_{\alpha\beta}$$

y cuando una cantidad es igual a su opuesto es nula.

según el cual, *el centro de masa de un sistema se mueve como si fuese una partícula, de masa igual a la total del sistema, sobre la que actuase una fuerza igual a la resultante de las fuerzas exteriores e independientemente de la naturaleza de las fuerzas interiores* (mientras se cumpla que $\mathbf{f}_{\alpha\beta} = -\mathbf{f}_{\beta\alpha}$).

El ímpetu total del sistema es

$$\mathbf{P} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} = \frac{d}{dt} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} = \frac{d}{dt} (M\mathbf{R}) = M\dot{\mathbf{R}} \quad (2.34)$$

y

$$\dot{\mathbf{P}} = M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F} \quad (2.35)$$

Así pues, el ímpetu total del sistema se conserva cuando no hay fuerza externa. Podemos además observar que, según 2.34, *el ímpetu del sistema es el mismo que el de una partícula de masa M situada en la posición del centro de masa que se mueva de la misma forma que éste*.

El momento cinético de la partícula α -ésima respecto del origen es, según 2.9,

$$\mathbf{L}_{\alpha} = \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha} \quad (2.36)$$

Y para el sistema completo de las n partículas tenemos, utilizando 2.26,

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_{\alpha} \mathbf{L}_{\alpha} = \sum_{\alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha}) = \sum_{\alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} \times m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}) \\ &= \sum_{\alpha} (\bar{\mathbf{r}}_{\alpha} + \mathbf{R}) \times m_{\alpha} (\dot{\mathbf{r}}_{\alpha} + \dot{\mathbf{R}}) \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} [(\bar{\mathbf{r}}_{\alpha} \times \dot{\bar{\mathbf{r}}}_{\alpha}) + (\bar{\mathbf{r}}_{\alpha} \times \dot{\mathbf{R}}) + (\mathbf{R} \times \dot{\bar{\mathbf{r}}}_{\alpha}) + (\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}})] \end{aligned} \quad (2.37)$$

Los dos términos centrales pueden escribirse

$$\left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} \bar{\mathbf{r}}_{\alpha} \right) \times \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{R} \times \frac{d}{dt} \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} \bar{\mathbf{r}}_{\alpha} \right)$$

que es nulo, puesto que

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \bar{\mathbf{r}}_{\alpha} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{R}) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{R} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \\ &= M\mathbf{R} - M\mathbf{R} \equiv 0 \end{aligned}$$

Es decir, como $\sum_{\alpha} m_{\alpha} \bar{\mathbf{r}}_{\alpha}$ da la posición del centro de masa respecto del sistema de coordenadas del centro de masa, será un vector nulo. Así pues,

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= M\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} + \sum_{\alpha} \bar{\mathbf{r}}_{\alpha} \times \bar{\mathbf{p}}_{\alpha} \\ &= \mathbf{R} \times \mathbf{P} + \sum_{\alpha} \bar{\mathbf{r}}_{\alpha} \times \bar{\mathbf{p}}_{\alpha}\end{aligned}\quad (2.38)$$

resultando que *el momento cinético total es la suma del momento cinético del centro de masa respecto del origen y el momento cinético del sistema respecto del centro de masa.*

Según 2.11, la derivada respecto del tiempo del momento cinético de la partícula α -ésima es

$$\dot{\mathbf{L}}_{\alpha} = \mathbf{r}_{\alpha} \times \dot{\mathbf{p}}_{\alpha} \quad (2.39)$$

y, utilizando la igualdad 2.30a, tenemos

$$\dot{\mathbf{L}}_{\alpha} = \mathbf{r}_{\alpha} \times \left(\mathbf{F}_{\alpha}^{(e)} + \sum_{\beta} \mathbf{f}_{\alpha\beta} \right) \quad (2.40)$$

Y para el sistema de las n partículas, tendremos

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{\alpha} \dot{\mathbf{L}}_{\alpha} = \sum_{\alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{F}_{\alpha}^{(e)}) + \sum_{\alpha, \beta \neq \alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{f}_{\alpha\beta}) \quad (2.41)$$

Puede comprobarse fácilmente que el último término puede escribirse

$$\sum_{\alpha, \beta \neq \alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{f}_{\alpha\beta}) = \sum_{\alpha < \beta} [(\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{f}_{\alpha\beta}) + (\mathbf{r}_{\beta} \times \mathbf{f}_{\beta\alpha})] \quad (2.42)$$

Ahora, por definición, el vector que une las partículas α y β -ésimas es

$$\mathbf{r}_{\alpha\beta} \equiv \mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\beta} \quad (2.43)$$

y como $\mathbf{f}_{\alpha\beta} = -\mathbf{f}_{\beta\alpha}$, tendremos

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha, \beta \neq \alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{f}_{\alpha\beta}) &= \sum_{\alpha < \beta} (\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\beta}) \times \mathbf{f}_{\alpha\beta} \\ &= \sum_{\alpha < \beta} (\mathbf{r}_{\alpha\beta} \times \mathbf{f}_{\alpha\beta})\end{aligned}\quad (2.44)$$

Pero, como hemos limitado el estudio al caso de fuerzas centrales, $\mathbf{f}_{\alpha\beta}$ está dirigida según la recta que une m_α con m_β , es decir, según $\mathbf{r}_{\alpha\beta}$. De aquí,

$$\mathbf{r}_{\alpha\beta} \times \mathbf{f}_{\alpha\beta} \equiv 0 \quad (2.45)$$

y

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{\alpha} (\mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{F}_\alpha^{(e)}) \quad (2.46)$$

El segundo miembro de esta expresión es precisamente la suma de todos los momentos externos:

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{\alpha} \mathbf{N}_\alpha^{(e)} = \mathbf{N}^{(e)} \quad (2.47)$$

Así pues, cuando los momentos externos respecto de un eje se anulan, el momento cinético total del sistema respecto de dicho eje permanece constante con el tiempo.

Nótese asimismo que el término

$$\sum_{\beta} \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{f}_{\alpha\beta}$$

es el momento que actúa sobre la partícula α -ésima debido a todas las fuerzas interiores, o sea, es el *momento interno*. Como la suma de estos momentos extendida a la totalidad de las n partículas es nula (véase 2.44)

$$\sum_{\alpha, \beta \neq \alpha} (\mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{f}_{\alpha\beta}) = \sum_{\alpha < \beta} (\mathbf{r}_{\alpha\beta} \times \mathbf{f}_{\alpha\beta}) = 0$$

podremos dejar establecido que el *momento interno total debe ser nulo cuando las fuerzas interiores sean de naturaleza central*, o sea, cuando $\mathbf{f}_{\beta\alpha} = -\mathbf{f}_{\alpha\beta}$, no pudiendo alterarse el momento cinético de un sistema aislado sin la aplicación de fuerzas exteriores.

El último de los teoremas de conservación, el de la energía, puede deducirse como sigue. Consideremos el trabajo realizado sobre el sistema para llevarlo desde la configuración 1, de coordenadas \mathbf{r}_α dadas, hasta la configuración 2, de coordenadas \mathbf{r}'_α diferentes a las anteriores. (Obsérvese que, en un proceso como éste, las partículas pueden haberse distribuido de forma distinta y que, quizás, la posición del centro de masa podría haber quedado inalterada.) Por analogía con 2.12, escribimos

$$W_{12} = \sum_{\alpha} \int_1^2 \mathbf{F}_\alpha \cdot d\mathbf{r}_\alpha \quad (2.48)$$

Siguiendo un procedimiento similar al utilizado para obtener la fórmula 2.14, tenemos

$$W_{12} = \sum_{\alpha} \int_1^2 d(\frac{1}{2}m_{\alpha}v_{\alpha}^2) = T_2 - T_1 \quad (2.49)$$

donde

$$T = \sum_{\alpha} T_{\alpha} = \sum_{\alpha} \frac{1}{2}m_{\alpha}v_{\alpha}^2 \quad (2.50)$$

Con la relación (cf. 2.26)

$$\mathbf{r}_{\alpha} = \bar{\mathbf{r}}_{\alpha} + \mathbf{R} \quad (2.51)$$

tenemos

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} &= v_{\alpha}^2 = (\dot{\bar{\mathbf{r}}}_{\alpha} + \dot{\mathbf{R}}) \cdot (\dot{\bar{\mathbf{r}}}_{\alpha} + \dot{\mathbf{R}}) \\ &= (\dot{\bar{\mathbf{r}}}_{\alpha} \cdot \dot{\bar{\mathbf{r}}}_{\alpha}) + 2(\dot{\bar{\mathbf{r}}}_{\alpha} \cdot \dot{\mathbf{R}}) + (\dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{R}}) \\ &= \bar{v}_{\alpha}^2 + 2(\dot{\bar{\mathbf{r}}}_{\alpha} \cdot \dot{\mathbf{R}}) + V^2 \end{aligned} \quad (2.52)$$

donde $\bar{v} \equiv \dot{\bar{\mathbf{r}}}$ y V es la velocidad del centro de masa. Entonces,

$$\begin{aligned} T &= \sum_{\alpha} \frac{1}{2}m_{\alpha}v_{\alpha}^2 \\ &= \sum_{\alpha} \frac{1}{2}m_{\alpha}\bar{v}_{\alpha}^2 + \sum_{\alpha} \frac{1}{2}m_{\alpha}V^2 + \dot{\mathbf{R}} \cdot \frac{d}{dt} \sum_{\alpha} m_{\alpha}\bar{\mathbf{r}}_{\alpha} \end{aligned} \quad (2.53)$$

Pero, por la misma razón utilizada antes, $\sum_{\alpha} m_{\alpha}\bar{\mathbf{r}}_{\alpha} = 0$, anulándose el último término. Así pues,

$$T = \sum_{\alpha} \frac{1}{2}m_{\alpha}\bar{v}_{\alpha}^2 + \frac{1}{2}MV^2 \quad (2.54)$$

lo que establece que *la energía cinética total del sistema es igual a la suma de la energía cinética de una partícula de masa M que se mueva a la velocidad del centro de masa y la energía cinética del movimiento de las partículas individuales con relación al centro de masa.*

Ahora, podemos descomponer la fuerza total que aparece en 2.48, de la forma 2.30:

$$W_{12} = \sum_{\alpha} \int_1^2 \mathbf{F}_{\alpha}^{(c)} \cdot d\mathbf{r}_{\alpha} + \sum_{\alpha, \beta \neq \alpha} \int_1^2 \mathbf{f}_{\alpha\beta} \cdot d\mathbf{r}_{\alpha} \quad (2.55)$$

Cuando las fuerzas $\mathbf{F}_\alpha^{(e)}$ y $\mathbf{f}_{\alpha\beta}$ sean conservativas, derivarán de sendas funciones potenciales y podremos escribir

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}_\alpha^{(e)} &= -\mathbf{grad}_\alpha U_\alpha \\ \mathbf{f}_{\alpha\beta} &= -\mathbf{grad}_\alpha \bar{U}_{\alpha\beta} \end{aligned} \right\} \quad (2.56)$$

donde U_α y $\bar{U}_{\alpha\beta}$ son las funciones potenciales, que no han de ser necesariamente de la misma forma. El símbolo \mathbf{grad}_α significa que el gradiente se toma respecto de las coordenadas de la partícula α -ésima.

El primer término de 2.55 se transforma

$$\begin{aligned} \sum_\alpha \int_1^2 \mathbf{F}_\alpha^{(e)} \cdot d\mathbf{r}_\alpha &= - \sum_\alpha \int_1^2 (\mathbf{grad}_\alpha U_\alpha) \cdot d\mathbf{r}_\alpha \\ &= - \sum_\alpha U_\alpha \Big|_1^2 \end{aligned} \quad (2.57)$$

El segundo término de 2.55 es*

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha, \beta \neq \alpha} \int_1^2 \mathbf{f}_{\alpha\beta} \cdot d\mathbf{r}_\alpha &= \sum_{\alpha < \beta} \int_1^2 (\mathbf{f}_{\alpha\beta} \cdot d\mathbf{r}_\alpha + \mathbf{f}_{\beta\alpha} \cdot d\mathbf{r}_\beta) \\ &= \sum_{\alpha < \beta} \int_1^2 \mathbf{f}_{\alpha\beta} \cdot (d\mathbf{r}_\alpha - d\mathbf{r}_\beta) = \sum_{\alpha < \beta} \int_1^2 \mathbf{f}_{\alpha\beta} \cdot d\mathbf{r}_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (2.58)$$

donde, siguiendo la definición dada en la expresión 2.43, $d\mathbf{r}_{\alpha\beta} = d\mathbf{r}_\alpha - d\mathbf{r}_\beta$.

Ahora, como $\bar{U}_{\alpha\beta}$ es función únicamente de la distancia entre m_α y m_β y, por tanto, dependerá de seis variables, esto es, de las tres coordenadas de m_α (las $x_{\alpha,i}$) y de las tres coordenadas de m_β (las $x_{\beta,i}$), en la diferencial total de $\bar{U}_{\alpha\beta}$ intervendrán seis derivadas parciales y vendrá dada por

$$d\bar{U}_{\alpha\beta} = \sum_i \left(\frac{\partial \bar{U}_{\alpha\beta}}{\partial x_{\alpha,i}} dx_{\alpha,i} + \frac{\partial \bar{U}_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta,i}} dx_{\beta,i} \right) \quad (2.59)$$

* Obsérvese que, a diferencia de $\sum_{\alpha, \beta \neq \alpha} \mathbf{f}_{\alpha\beta}$ que aparece en 2.31, el término $\sum_{\alpha, \beta \neq \alpha} \int_1^2 \mathbf{f}_{\alpha\beta} \cdot d\mathbf{r}_\alpha$ no es antisimétrico en α y β y por lo tanto no se anula en general.

donde las $x_{\beta,i}$ se mantienen constantes en el primer sumando y las $x_{\alpha,i}$ en el segundo. Resulta, pues,

$$d\bar{U}_{\alpha\beta} = (\mathbf{grad}_x \bar{U}_{\alpha\beta}) \cdot d\mathbf{r}_\alpha + (\mathbf{grad}_\beta \bar{U}_{\alpha\beta}) \cdot d\mathbf{r}_\beta \quad (2.60)$$

Ahora, como

$$\mathbf{grad}_x \bar{U}_{\alpha\beta} = -\mathbf{f}_{\alpha\beta} \quad (2.61a)$$

pero $\bar{U}_{\alpha\beta} = \bar{U}_{\beta\alpha}$ de forma que

$$\mathbf{grad}_\beta \bar{U}_{\alpha\beta} = \mathbf{grad}_\beta \bar{U}_{\beta\alpha} = -\mathbf{f}_{\beta\alpha} = \mathbf{f}_{\alpha\beta} \quad (2.61b)$$

resulta

$$\begin{aligned} d\bar{U}_{\alpha\beta} &= -\mathbf{f}_{\alpha\beta} \cdot (d\mathbf{r}_\alpha - d\mathbf{r}_\beta) \\ &= -\mathbf{f}_{\alpha\beta} \cdot d\mathbf{r}_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (2.62)$$

Llevando este resultado a 2.58, tenemos

$$\sum_{\alpha, \beta \neq \alpha} \int_1^2 \mathbf{f}_{\alpha\beta} \cdot d\mathbf{r}_\alpha = - \sum_{\alpha < \beta} \int_1^2 d\bar{U}_{\alpha\beta} = - \sum_{\alpha < \beta} \bar{U}_{\alpha\beta} \Big|_1^2 \quad (2.63)$$

y, combinando 2.57 y 2.63, obtenemos que

$$W_{12} = - \sum_\alpha U_\alpha \Big|_1^2 - \sum_{\alpha < \beta} \bar{U}_{\alpha\beta} \Big|_1^2 \quad (2.64)$$

Esta expresión ha sido obtenida bajo la hipótesis de que tanto las fuerzas internas como las externas derivan de potenciales, en cuyo caso la *energía potencial total* del sistema puede escribirse

$$U = \sum_\alpha U_\alpha + \sum_{\alpha < \beta} \bar{U}_{\alpha\beta} \quad (2.65)$$

Entonces,

$$W_{12} = -U \Big|_1^2 = U_1 - U_2 \quad (2.66)$$

y, al combinar este resultado con 2.49, se obtiene

$$T_2 - T_1 = U_1 - U_2$$

o bien,

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2$$

de forma que

$$E_1 = E_2 \quad (2.67)$$

lo que expresa la conservación de la energía del sistema. Este resultado es válido para todo sistema en el cual todas las fuerzas deriven de potenciales explícitamente independientes del tiempo; de un sistema de esta clase diremos que es *conservativo*.

El término

$$\sum_{\alpha < \beta} \bar{U}_{\alpha\beta}$$

de 2.65 es la *energía potencial interna del sistema*. Cuando el sistema sea un cuerpo rígido en el que las partículas que lo forman están obligadas a mantener sus posiciones relativas, ocurrirá que, en todo proceso en el que intervenga el cuerpo, la energía potencial interna permanecerá constante y podrá ser ignorada en los cálculos relativos a la energía potencial total del sistema. Ello significará simplemente que el origen de energía potencial deberá ser nuevamente definido, pero, cualquiera que sea el caso, dicho origen es siempre arbitrario, ya que, tal como señalamos antes, es la *diferencia* de energías potenciales lo único significativo físicamente; el valor absoluto de la energía potencial es una cantidad arbitraria.

Debemos reiterar que no hemos *demonstrado* las leyes de conservación del ímpetu, del momento cinético y de la energía; únicamente hemos deducido diversas consecuencias de las leyes de Newton. Dicho de otra forma, si las leyes de Newton tienen validez en una cierta situación, el ímpetu y la energía se conservarán. Ahora bien, nos hemos enamorado de estos teoremas hasta tal extremo que los hemos elevado a la categoría de «principios», llegando a *insistir* en su validez para toda teoría física, incluso para aquellas que se aplican a situaciones en las cuales la mecánica de Newton no es válida, como son, por ejemplo, la interacción de cargas eléctricas en movimiento o los sistemas cuánticos. Para situaciones como estas últimas no tenemos realmente «principios» de conservación, sino más bien *postulados* de conservación que forzamos dentro de la teoría. Por ejemplo, cuando tengamos dos cargas eléctricas aisladas en movimiento, las fuerzas electromagnéticas que se ejerzan entre sí no serán conservativas. Por tanto, dotaremos al campo electromagnético de una cierta cantidad de energía al objeto de que la conservación de la energía se mantenga, procedimiento que únicamente será satisfactorio si las consecuencias no contradicen ningún hecho experimental, lo que en realidad es el caso de las cargas móviles. En consecuencia, lo que hacemos es extender el concepto habitual de energía para incluir a la «energía electromagnética», satisfaciendo así nuestra idea preconcebida de que la energía debe conservarse. Puede parecer ésta una decisión un tanto drástica y

arbitraria; ahora bien, tengamos en cuenta que si las cosas salen bien es por alguna razón y que, a este respecto, los «principios» de conservación han sido el conjunto de principios que con mayor éxito se han aplicado en física. La negativa a abandonar los principios de conservación del ímpetu y de la energía llevaron a PAULI a postular en 1930 la existencia del *neutrino* para dar cuenta de la energía y del ímpetu «que faltaban» en la desintegración radiactiva β . Esta postulación permitió a FERMI construir con éxito en 1934 una teoría acerca de la desintegración β , aunque la observación directa del neutrino no se llevó a cabo hasta 1953 cuando REINES y COWAN realizaron su famoso experimento. Así pues, manteniendo la convicción acerca de la conservación del ímpetu y de la energía fue posible descubrir una nueva partícula elemental que resultó de gran importancia para las teorías modernas de la física nuclear. Este descubrimiento es únicamente uno de los muchos avances en el conocimiento de las propiedades de la materia que son resultado directo de la aplicación de los principios de conservación.

2.7 Ley de la gravitación universal

La ley de la gravitación universal de Newton* afirma que una partícula de masa m , situada a una distancia r de otra masa M , experimenta una fuerza atractiva gravitatoria**

$$\boxed{\mathbf{F} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \mathbf{e}_r} \quad (2.68)$$

donde \mathbf{e}_r es el vector unitario que va desde M hasta m . (Al definir así \mathbf{e}_r , el signo negativo impone el carácter *atractivo* de la fuerza.) Bajo la forma 2.68, la aplicación estricta de la ley sólo puede hacerse a *masas puntuales* y cuando una de las dos partículas se sustituye por un cuerpo que ocupa una cierta extensión, deberemos hacer una hipótesis adicional antes de calcular la fuerza. Esta hipótesis consiste en que el campo de fuerzas gravitatorio es *lineal*; es decir, hemos de suponer que es posible calcular la fuerza gravitatoria total que se ejerce sobre

* NEWTON había formulado y comprobado numéricamente su ley de la gravitación en 1666, pero el resultado no se publicó hasta la aparición de sus *Principia* en 1687. (Véase nota al pie de pág. 92.) Henry CAVENDISH (1731-1810) realizó en 1798 una comprobación en laboratorio determinando el valor de γ , utilizando un método ideado por el reverendo John MICHELL. (CAVENDISH expresó en realidad sus resultados en función de la densidad media de la Tierra y no dando un valor de γ .)

** El valor de la constante de gravitación es $6,668 \pm 0,005 \times 10^{-8}$ dinas-cm²/g².

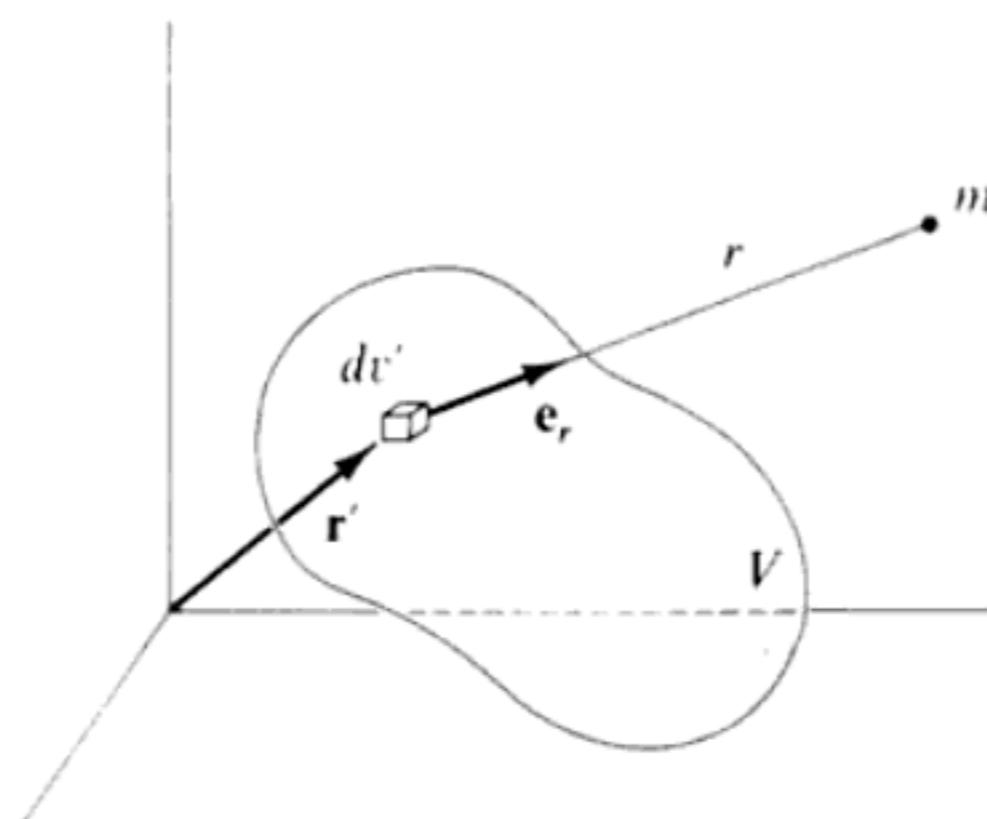


FIG. 2-7

una partícula, debida a la acción de otras muchas, simplemente efectuando la suma vectorial de todas las fuerzas individuales. En el caso de un cuerpo consistente en una distribución continua de materia, dicha suma se transformará en una integral (véase figura 2-7):

$$\mathbf{F} = -\gamma m \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') \mathbf{e}_r}{r^2} dv' \quad (2.69)$$

donde $\rho(\mathbf{r}')$ es la densidad de masa y dv' el elemento de volumen situado en la posición definida por el vector de posición \mathbf{r}' .

Cuando tanto el cuerpo de masa M como el de masa m sean extensos, será preciso realizar una segunda integración extendida al volumen de m para calcular la fuerza gravitatoria total.

Por definición, el *vector campo gravitatorio* \mathbf{g} representa la fuerza por unidad de masa que se ejerce sobre una partícula situada en el campo debido a un cuerpo de masa M . Entonces,

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -\gamma \frac{M}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (2.70)$$

o bien,

$$\mathbf{g} = -\gamma \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') \mathbf{e}_r}{r^2} dv'$$

(2.71)

La magnitud \mathbf{g} tiene las dimensiones de una *fuerza por unidad de masa*, o sea, de una *aceleración*. De hecho, en las proximidades de la superficie terrestre el

módulo de \mathbf{g} tiene un valor que es el que conocemos bajo el nombre de *aceleración de la gravedad*. Una medida realizada con un péndulo simple (o una variante de éste más perfeccionada) basta para poner de manifiesto que el valor de $|g|$ es aproximadamente 980 cm/s^2 en la superficie de la Tierra.

2.8 Potencial gravitatorio

El vector campo gravitatorio es proporcional a $1/r^2$ por lo cual cumple la condición que nos permite representarlo en forma de gradiente de una función escalar.* Por ello, podemos escribir

$$\mathbf{g} \equiv -\mathbf{grad} \Phi \quad (2.72)$$

donde Φ es el *potencial gravitatorio* cuyas dimensiones son (*fuerza por unidad de masa*) \times (*longitud*), o *energía por unidad de masa*.

Como la variación de \mathbf{g} es radial únicamente, el potencial Φ podrá variar a lo sumo sólo con r . Por tanto, si empleamos la expresión 2.70 de \mathbf{g} , tendremos

$$\mathbf{grad} \Phi = \frac{d\Phi}{dr} \mathbf{e}_r = \gamma \frac{M}{r^2} \mathbf{e}_r$$

que, integrando, nos da

$$\Phi = -\gamma \frac{M}{r} \quad (2.73)$$

Se ha suprimido la constante de integración puesto que el potencial está determinado salvo una constante aditiva; o sea, solamente las *diferencias* de potencial son significativas, no los valores concretos. Generalmente se suprime esta ambigüedad del valor del potencial imponiendo arbitrariamente que $\Phi \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$; con esto, 2.73 nos dará correctamente el potencial.

El potencial debido a una distribución continua de masa es

$$\Phi = -\gamma \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r} dv' \quad (2.74)$$

* Es decir que $\text{rot } \mathbf{g} = 0$. (Véase MARION, Ma65a, sección 3.7.)

Análogamente, si la masa está distribuida únicamente sobre una capa delgada (distribución *superficial*),

$$\Phi = -\gamma \int_S \frac{\rho_s}{r} da' \quad (2.75)$$

donde ρ_s es la densidad superficial de masa.

Finalmente, cuando la masa está distribuida a lo largo de una línea, con una densidad *lineal* ρ_l ,

$$\Phi = -\gamma \int_{\Gamma} \frac{\rho_l}{r} ds' \quad (2.76)$$

El significado físico del potencial gravitatorio quedará perfectamente claro si consideramos el trabajo por unidad de masa dW que deberá realizarse sobre un cuerpo situado en un campo gravitatorio para desplazarlo una distancia $d\mathbf{r}$. Entonces, el trabajo será igual al producto escalar de la fuerza por el desplazamiento; y, así pues, el trabajo efectuado *sobre* el cuerpo por unidad de masa será

$$\begin{aligned} dW &= -\mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} = (\mathbf{grad} \Phi) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i = d\Phi \end{aligned} \quad (2.77)$$

ya que Φ es función únicamente de las coordenadas del punto en que se mide: $\Phi = \Phi(x_1, x_2, x_3) = \Phi(x_i)$. Por tanto, la cantidad de trabajo por unidad de masa que debe efectuarse sobre un cuerpo para trasladarlo de un punto a otro dentro de un campo gravitatorio es igual a la diferencia de potencial entre los dos puntos.

Cuando la posición final esté más alejada de la masa fuente M que la inicial, se habrá realizado trabajo *sobre* la masa unitaria. Ahora, como las posiciones de ambos puntos son cualesquiera y podemos suponer que uno de ellos está en el infinito, si por definición admitimos que el potencial es cero en el infinito, podemos interpretar que Φ en un punto cualquiera es el trabajo por unidad de masa necesario para traer el cuerpo desde el infinito hasta dicho punto. La *energía potencial* será desde luego igual a la masa del cuerpo multiplicada por el potencial Φ . Si U es la energía potencial

$$U = m\Phi \quad (2.78)$$

y la fuerza que se ejerce sobre un cuerpo será el gradiente de la energía potencial de dicho cuerpo cambiado de signo,

$F = -\mathbf{grad} U$

(2.79)

que es precisamente la expresión que utilizamos antes en 2.16.

Notemos que tanto el potencial como la energía potencial *aumentan* cuando se realiza trabajo sobre el cuerpo. (El potencial, según nuestra definición es siempre negativo y sólo se aproxima a su valor máximo, es decir cero, cuando r tiende a infinito.)

Siempre que un cuerpo se sitúe en el campo gravitatorio de una masa fuente existirá una cierta energía potencial. Esta energía potencial tiene su asiento, desde luego, en el *campo*,* pero es costumbre en tales circunstancias hablar de la energía potencial «*del cuerpo*», práctica que aquí seguiremos. Asimismo, podemos considerar que la misma masa fuente posee una energía potencial propia, que es igual a la energía gravitatoria liberada cuando se formó el cuerpo, o, inversamente, igual a la energía que debe suministrarse (o trabajo que debe llevarse a cabo) para dispersar su masa sobre la esfera del infinito. Por ejemplo, cuando el gas interestelar se condensa para formar una estrella, la energía gravitatoria liberada sirve en su mayoría para el calentamiento inicial de la estrella y, a medida que desciende la temperatura, la energía es emitida en forma de radiación electromagnética. En todos los problemas que tratemos, se supondrá que la estructura de los cuerpos permanece inalterada durante el proceso en estudio, por lo que no habrá variación de la energía potencial propia, que podrá despreciarse a todos los efectos, cualesquiera que sean los cálculos que se lleven a efecto.

2.9 Líneas de fuerza y superficies equipotenciales

Consideremos una masa que es origen de un campo gravitatorio cuyo vector campo es \mathbf{g} . Tracemos una línea, desde la superficie de la masa hacia fuera, de tal forma que la dirección de la línea en cada punto coincida con la dirección de \mathbf{g} en dicho punto. Esta línea, que se extiende desde la superficie de la masa hasta el infinito, recibe el nombre de *línea de fuerza*.

Trazando líneas similares desde cada elemento de superficie de la masa podemos dejar indicada la dirección del campo en todos los puntos del espacio. Evidentemente, las líneas de fuerza correspondientes a una masa puntual serán todas rectas que se extienden desde la masa hasta el infinito. Definidas de esta forma, las líneas de fuerza únicamente dan cuenta de la *dirección* del campo en un punto; sin embargo, podemos suponer que la *densidad* de tales líneas, o sea el número de ellas que atraviesan una unidad de volumen en el espacio, sea proporcional al *módulo* de la fuerza en ese volumen. Por tanto, esta imagen de las líneas de fuerza es una manera muy adecuada de visualizar tanto el módulo como la dirección (es decir, la naturaleza *vectorial*) del campo.

* Véase, sin embargo, las observaciones del final de la sección 2.6, acerca de la energía de los campos.

Ahora, como la función potencial está definida en todos los puntos del espacio (salvo en los ocupados por masas puntuales) la ecuación

$$\Phi = \Phi(x_1, x_2, x_3) = \text{const.} \quad (2.80)$$

definirá una superficie en cuyos puntos el potencial es constante y que recibe el nombre de *superficie equipotencial*. Dado que el vector campo \mathbf{g} es igual al gradiente de Φ , \mathbf{g} no podrá tener componente alguna *sobre* la superficie equipotencial. De esto resulta que las líneas de fuerza deben ser normales a las superficies equipotenciales y, así, el campo no efectúa trabajo sobre un cuerpo que se mueva sobre una superficie equipotencial. Como la función potencial es uniforme, dos superficies equipotenciales no podrán cortarse. Las superficies equipotenciales que rodean a una masa puntual única y aislada (o a toda masa con simetría esférica) son siempre esferas. Consideremos dos masas puntuales M separadas una cierta distancia; si r_1 es la distancia de una de ellas a un punto del espacio y r_2 la distancia de la otra al mismo punto, la expresión

$$\Phi = -\gamma M \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = \text{cte}$$

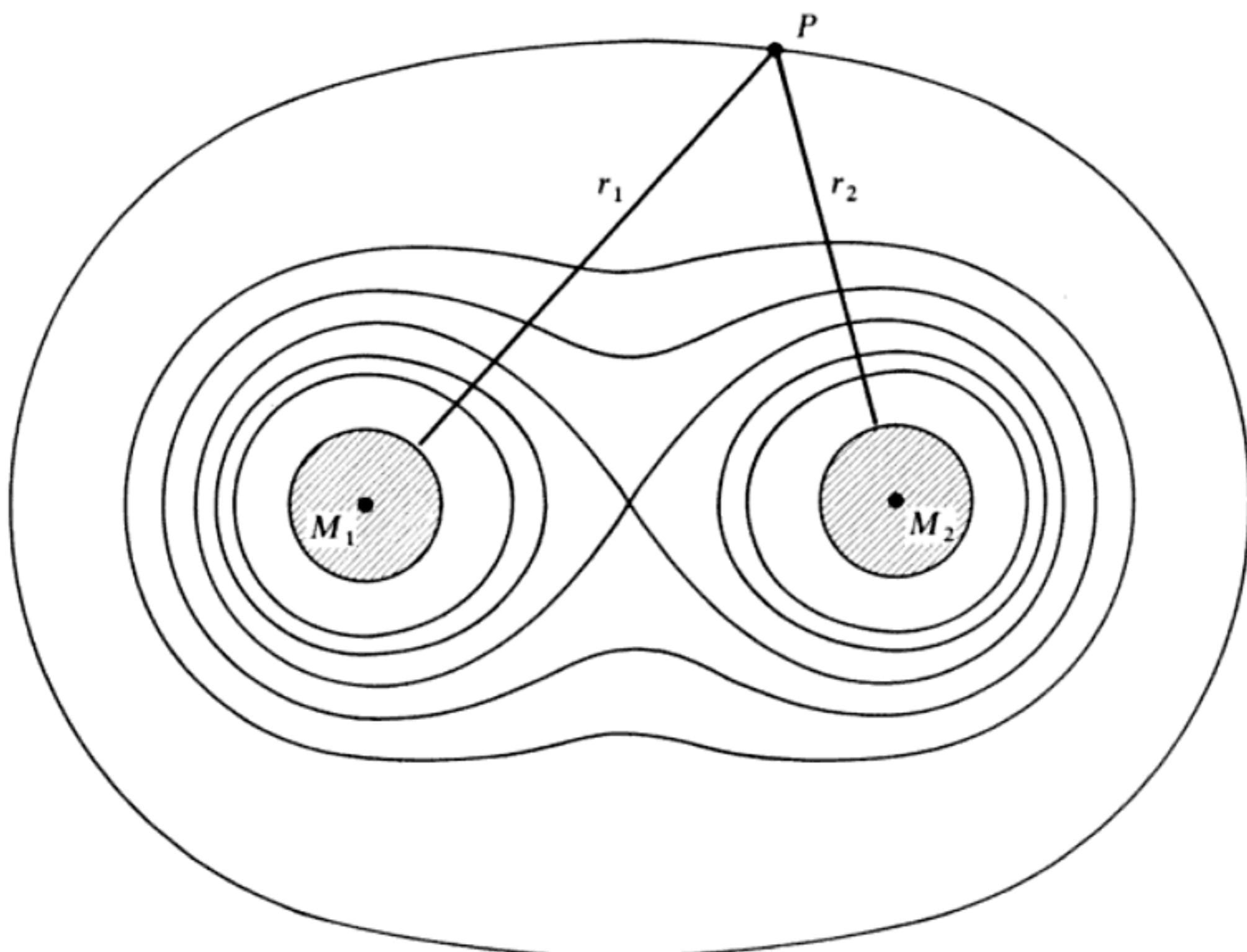


FIG. 2-8

definirá las superficies equipotenciales, alguna de las cuales se representan en sección en la figura 2-8. Para obtener las superficies en tres dimensiones habrá que hacer girar el dibujo en torno a la recta que une ambas masas.

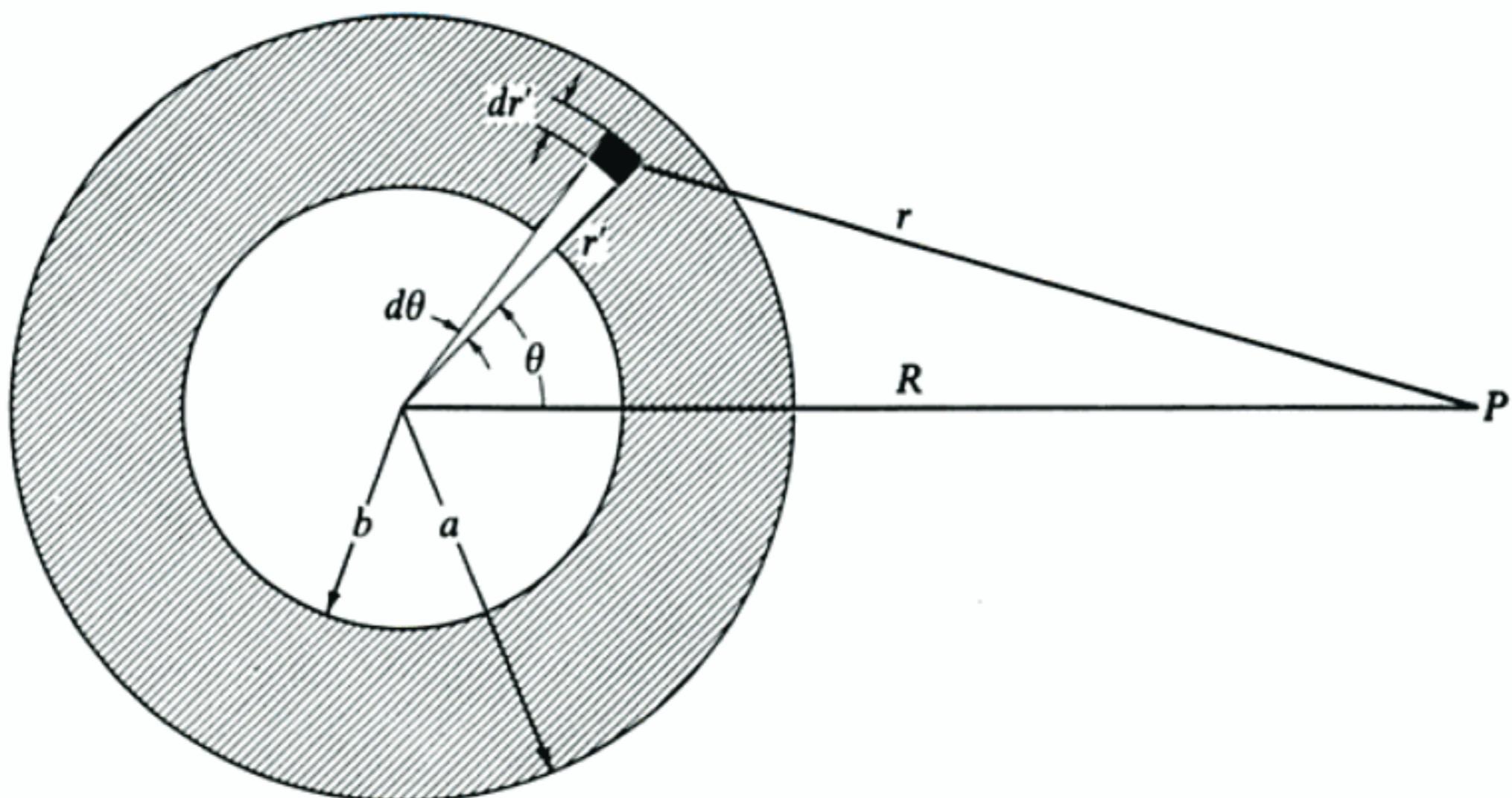


FIG. 2-9

2.10 Potencial gravitatorio de una esfera hueca

Uno de los problemas más importantes de la teoría gravitatoria es el relativo al cálculo de la fuerza gravitatoria debida a una esfera homogénea. Claramente, este problema es un caso particular del más general del cálculo relativo a una esfera hueca homogénea en su espesor. La solución a este último puede obtenerse calculando la fuerza directamente (véase problema 2-23), pero es más fácil seguir el método del potencial.

Consideraremos una esfera hueca de radios exterior a y interior b , respectivamente, y calcularemos el potencial en un punto P situado a una distancia R del centro de la esfera (figura 2-9). Como el problema presenta claramente simetría en torno a la recta que une el centro de la esfera con el punto P , el ángulo acimutal φ no se representa en la figura 2-9, pudiéndose integrar inmediatamente la expresión del potencial respecto de $d\varphi$. Entonces,

$$\begin{aligned}\Phi &= -\gamma \int_V \frac{\rho(r')}{r} dv' \\ &= -2\pi\gamma\rho \int_b^a r'^2 dr' \int_0^\pi \frac{\sin\theta}{r} d\theta\end{aligned}\quad (2.81)$$

Según la ley del coseno $r^2 = r'^2 + R^2 - 2r'R \cos \theta$ (2.82)

que, al ser R constante, podrá diferenciarse para un r' dado, obteniéndose

$$2r dr = 2r' R \sin \theta d\theta$$

o bien,

$$\frac{\sin \theta}{r} d\theta = \frac{dr}{r'R} \quad (2.83)$$

y, llevando esta expresión a 2.81, tenemos

$$\Phi = -\frac{2\pi\gamma\rho}{R} \int_b^a r' dr' \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dr \quad (2.84)$$

donde los límites de la integral sobre dr dependen de la posición del punto P . Si P está *fueras* de la esfera,

$$\begin{aligned} \Phi(R > a) &= -\frac{2\pi\gamma\rho}{R} \int_b^a r' dr' \int_{R-r'}^{R+r'} dr \\ &= -\frac{4\pi\gamma\rho}{R} \int_b^a r'^2 dr' \\ &= -\frac{4}{3} \frac{\pi\gamma\rho}{R} (a^3 - b^3) \end{aligned} \quad (2.85)$$

y como la masa M del cuerpo es

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho(a^3 - b^3) \quad (2.86)$$

el potencial será

$$\boxed{\Phi(R > a) = -\frac{\gamma M}{R}} \quad (2.87)$$

Este resultado nos dice que el potencial en un punto exterior a una distribución de materia esféricamente simétrica (hueca o maciza) es independiente del tamaño de la misma. Por tanto, a efectos del cálculo del potencial (o de la fuerza), la totalidad de la masa puede considerarse concentrada en el centro.*

* Esto constituye la clave de la teoría gravitatoria de Newton. Si bien NEWTON ya había formulado correctamente su teoría en 1666, no le fue posible justificar su método de cálculo numérico (en el que consideraba la Tierra y la Luna masas puntuales) hasta que hubo probado este teorema (1685). La teoría, así establecida, se publicó en *Principia*, 1687.

Si el punto se encuentra en el hueco de la esfera

$$\begin{aligned}\Phi(R < b) &= -\frac{2\pi\gamma\rho}{R} \int_b^a r' dr' \int_{r'-R}^{r'+R} dr \\ &= -4\pi\gamma\rho \int_b^a r' dr' \\ &= -2\pi\gamma\rho(a^2 - b^2)\end{aligned}\quad (2.88)$$

de donde resulta que el potencial es constante e independiente del punto del interior del hueco.

Finalmente, si deseamos calcular el potencial en los puntos situados *dentro* de la masa del cuerpo, basta con sustituir el límite inferior de integración por la variable R en la expresión de $\Phi(R < b)$, y el límite superior de integración por R en la expresión de $\Phi(R > a)$, sumando después los resultados. Con ello,

$$\begin{aligned}\Phi(b < R < a) &= -\frac{4\pi\gamma\rho}{3R}(R^3 - b^3) - 2\pi\gamma\rho(a^2 - R^2) \\ &= -4\pi\gamma\rho\left(\frac{a^2}{2} - \frac{b^3}{3R} - \frac{R^2}{6}\right)\end{aligned}\quad (2.89)$$

Vemos que cuando $R \rightarrow a$, la expresión 2.89 nos dará el mismo resultado que 2.87. Igualmente, cuando $R \rightarrow b$, las fórmulas 2.88 y 2.89 dan los mismos resul-

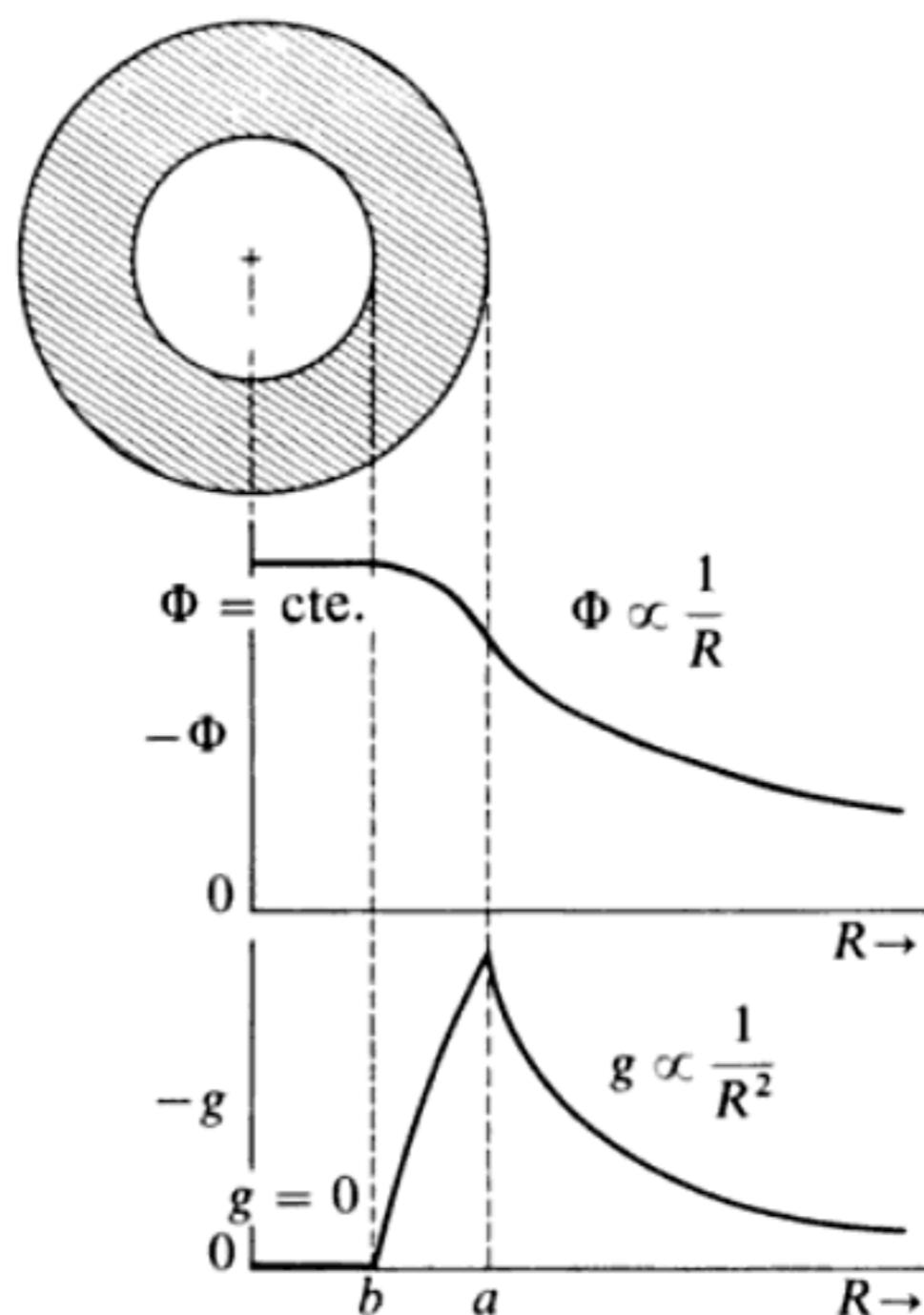


FIG. 2-10

tados. Quiere decir esto que el potencial es *continuo*. Por otra parte, si el potencial no fuese continuo en un punto, su gradiente, y también la fuerza, serían infinitos en ese punto y como en la realidad física no se dan fuerzas infinitas, concluimos en que las funciones potenciales deben de ser siempre continuas.

El módulo del vector de campo \mathbf{g} en cada una de las tres regiones puede calcularse a partir de $g = -d\Phi/dR$, con los resultados

$$\left. \begin{aligned} g(R < b) &= 0 \\ g(b < R < a) &= \frac{4\pi\gamma\rho}{3} \left(\frac{b^3}{R^2} - R \right) \\ g(R > a) &= -\gamma \frac{M}{R^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.90)$$

Vemos que no es continuo únicamente el potencial, sino también el vector de campo (y por ende la fuerza). La *derivada* del vector de campo, sin embargo, no es continua sobre las dos superficies, interior y exterior, del cuerpo.

En la figura 2-10 se resumen los resultados obtenidos para el potencial y el vector de campo.

2.11 ¿Cuándo es útil el concepto de potencial?

El empleo de funciones potenciales para dar cuenta de los efectos de las fuerzas de «acción a distancia» constituye un procedimiento de gran importancia y muy eficaz. No debemos perder de vista, sin embargo, que su justificación reside esencialmente en el hecho de que es capaz de proporcionarnos un medio para calcular la fuerza que se ejerce sobre un cuerpo, ya que es la *fuerza* y no el *potencial* lo físicamente significativo. Puede ocurrir así que, en muchos casos, sea más fácil calcular directamente la fuerza que un potencial del que después haya de tomarse el gradiente. La ventaja del método del potencial debe buscarse en que el mismo es una magnitud *escalar** y no es necesario proceder a la descomposición de un vector en componentes, complicación adicional, hasta que no se haya efectuado la operación de tomar gradiente. Cuando la fuerza se calcula directamente, sus componentes han de arrastrarse a lo largo de todo el proceso de cálculo. Resulta, pues, evidente que será necesaria alguna habilidad para determinar cuál es en cada caso el método más adecuado. Por ejemplo, cuando un

* En el capítulo 7 veremos otro ejemplo de función escalar de la que se derivan resultados vectoriales. Es ésta la *función de Lagrange* o *lagrangiana* la cual, para recalcar la similitud, se llama a veces (particularmente en textos más antiguos) *potencial cinético*.

problema presente una cierta simetría que, por consideraciones físicas, nos permita establecer que la fuerza está en una dirección determinada, tomando ésta como una de las direcciones coordenadas quedará reducido el cálculo vectorial a un cálculo escalar sencillo. En casos como éste, el cálculo de la fuerza puede ser lo bastante inmediato como para que no sea necesario seguir el método del potencial. En todos los problemas en los que aparezca el cálculo de una fuerza, es preciso realizar un examen previo para determinar qué método es el más idóneo para llevarlo a cabo.

2.12 Limitaciones de la mecánica de Newton

En este capítulo hemos presentado conceptos tales como *posición, tiempo, ímpetu y energía*. Queda implícito el hecho de que todas ellas son magnitudes medibles con la precisión que se deseé, cualquiera que sea; precisión que dependerá únicamente del grado de perfección de nuestros instrumentos de medida. Ciertamente, este hecho parece estar comprobado por nuestra experiencia acerca de todos los objetos macroscópicos. Por ejemplo, en un instante dado, nos es posible medir con gran precisión la posición de un planeta en su órbita alrededor del Sol y una sucesión de medidas de esta clase permite determinar (con gran precisión, asimismo) la velocidad del planeta en cualquier posición dada.

Ahora bien, cuando intentemos llevar a cabo medidas de precisión sobre objetos microscópicos, nos encontraremos que existe una limitación esencial en la precisión de los resultados. Así, por ejemplo, imaginemos que queramos determinar la posición de un electrón obligándole a dispersar un fotón luminoso. La naturaleza ondulatoria de éste excluye una medida *exacta*, por lo que la posición del electrón quedará determinada únicamente dentro de una incertidumbre Δx que está relacionada con la *extensión* (o sea, la longitud de onda) del fotón. Sin embargo, por el mismo acto de medir hemos provocado una alteración del estado del electrón, ya que la dispersión del fotón comunicará a aquél un cierto ímpetu. Este ímpetu estará indeterminado en una cantidad Δp . El producto $\Delta x \Delta p$ es una medida de la precisión con la cual podemos determinar simultáneamente la posición y el ímpetu del electrón; con $\Delta x \rightarrow 0$ y $\Delta p \rightarrow 0$ se implica una medida con toda la precisión imaginable. HEISENBERG demostró en 1927 que este producto debe ser siempre superior a un cierto valor mínimo.* Quiere decir esto que no podemos determinar, simultáneamente, con infinita precisión la posición y el ímpetu del electrón, de forma que cuando $\Delta x \rightarrow 0$, deberá ocurrir que

* Esto es también válido para la medida de la *energía* en un *instante dado*, en cuyo caso el producto de las incertidumbres es $\Delta E \Delta t$ (que tiene las mismas dimensiones que $\Delta x \Delta p$).

$\Delta p \rightarrow \infty$ al objeto de que el *principio de indeterminación* de Heisenberg se cumpla.

El valor mínimo de $\Delta x \Delta p$ es del orden de 10^{-27} erg-s, cantidad extremadamente pequeña a escala macroscópica, por lo que en el orden de tamaños de los objetos de laboratorio no existe dificultad práctica para medir posiciones e ímpetus simultáneamente y las leyes de Newton podrán aplicarse como si la posición y el ímpetu pudieran determinarse con toda precisión. Ahora bien, a causa del principio de indeterminación de Heisenberg, la mecánica de Newton no es aplicable a los sistemas microscópicos y por esta dificultad básica comenzó a desarrollarse en 1926 un nuevo método para tratar con fenómenos de esta naturaleza. Posteriormente, los trabajos de SCHRÖDINGER, HEISENBERG, BORN, DIRAC y otros colocaron la nueva disciplina sobre unas bases firmes. Así pues, mientras la mecánica de Newton se adecua perfectamente a la descripción de los fenómenos a gran escala, la nueva mecánica (la *mecánica cuántica*) es necesaria para el estudio de los procesos que ocurren en el dominio atómico. A medida que el tamaño del sistema aumenta, la mecánica cuántica va adquiriendo la forma de la de Newton, que puede considerarse caso límite de aquélla.

Además de las limitaciones esenciales que presenta la mecánica de Newton frente a los objetos microscópicos, existe otra dificultad intrínseca en las ideas de Newton, la cual concierne al concepto de *tiempo*. Según Newton, el tiempo es un concepto *absoluto* es decir, se supone que siempre es posible determinar sin ambigüedad si dos sucesos han ocurrido a la vez, o bien si uno ha precedido al otro. Para que sea posible siempre decidir acerca de la secuencia de los acontecimientos en el tiempo, es necesario que los dos observadores de los sucesos se encuentren en comunicación instantánea a través de algún sistema de señales o bien situando sendos relojes perfectamente sincronizados en los puntos de observación. Pero poner perfectamente en hora estos dos relojes supone conocer el tiempo de tránsito de una señal que vaya de un observador a otro *en uno de los dos sentidos posibles*. (Lo que ocurriría si ya dispusiéramos de relojes perfectamente sincronizados, lo cual constituye un círculo vicioso.) Sin embargo, cuando realmente medimos velocidades de señales, obtenemos siempre la velocidad *media* de propagación en los dos sentidos e idear una experiencia para medir la velocidad *sólo en un sentido* nos conduce inevitablemente a introducir alguna hipótesis nueva que no es posible comprobar con anterioridad a la experiencia.

Sabemos que la comunicación instantánea mediante señales es imposible ya que las interacciones entre los cuerpos materiales se propagan a velocidad finita y que es necesario que tenga lugar una interacción de alguna clase para que se transmita una señal. La velocidad *máxima* a la cual puede propagarse una señal es la de la luz en el vacío, o sea $c \approx 3 \times 10^{10} \text{ cm/s}$.*

* Exactamente, $c \approx 2,997925 \pm 0,000001 \times 10^{10} \text{ cm.s}^{-1}$.

Las dificultades que aparecen cuando intentamos establecer una escala de tiempos entre puntos distintos del espacio nos lleva a pensar que el tiempo no es quizá, después de todo, un concepto absoluto y que el espacio y el tiempo se encuentran relacionados íntimamente de alguna forma. La solución al dilema fue encontrada en 1904-1905 por LORENTZ, POINCARÉ y EINSTEIN y se encuentra incorporada a la *teoría de la relatividad*. En el capítulo 10 trataremos de algunos aspectos de esta teoría.

Por tanto, la mecánica de Newton se encuentra sujeta a limitaciones sustanciales cuando aparecen pequeñas distancias o grandes velocidades. Pero existe, asimismo, una dificultad de índole *práctica* que aparece cuando el número de cuerpos que constituye el sistema es grande. Como veremos en el capítulo 8, no podemos obtener una solución general en forma explícita para el caso del movimiento de un sistema de más de dos cuerpos en interacción, ni siquiera para el caso, relativamente sencillo, de interacción gravitatoria. Para calcular el movimiento de un sistema de tres cuerpos, hemos de recurrir a métodos de aproximación numérica y aunque éstos, en principio, pueden dar cualquier precisión que se desee, necesitan un trabajo de desarrollo considerable. El movimiento de sistemas aún más complejos (como el formado por todos los cuerpos mayores del Sistema Solar) puede calcularse también por este procedimiento, si bien el mismo se hace inmanejable al pasar a sistemas de mayor entidad. Calcular el movimiento de cada una de las 10^{19} moléculas contenidas aproximadamente en un centímetro cúbico de gas es algo que claramente se sale por completo de nuestras posibilidades. En la última parte del siglo XIX, BOLTZMANN, MAXWELL, GIBBS, LIOUVILLE y otros desarrollaron con éxito un método para calcular las propiedades *medias* de sistemas estadísticos. Mediante ellos pudo estudiarse la mecánica de sistemas a partir del cálculo de probabilidades, desarrollándose así la *mecánica estadística*. En la sección 7.15 se encontrarán algunas puntualizaciones acerca de la utilización de conceptos estadísticos en la mecánica.

Referencias recomendadas

Los fundamentos de la mecánica de Newton se presentan, por ejemplo, en LINDSAY y MARGENAU (Li36, cap. 3) y en FEATHER (Fe59, cap. 8). El texto clásico es, desde luego, el de MACH (Ma60). *Principia* de NEWTON aún puede leerse con provecho; hay traducciones al inglés (p. e., la de F. Cajori, Univ. of California Press, 1946). Las obras que tratan de la mecánica de Newton, a todos los niveles y desde muchos puntos de vista, son numerosas. Algunas de las que se sitúan en el nivel medio son las de CONSTANT (Co54, cap. 5 al 8), Joos y FREEMAN (Jo50, cap. 5 y 6), KONOPINSKI (Ko69, cap. 2), PAGE (Pa52, cap. 1) y SYMON (Sy60, cap. 1 y 4). En BECKER (Be54, cap. 1, 6 y 8) pueden encontrarse numerosos ejemplos. A nivel superior, los tratados de CORBEN y STEHLE (Co60, cap. 2) y de GOLDSTEIN (Go50, cap. 1) son concisos y elegantes.

La teoría general del potencial se relaciona con las funciones armónicas y las soluciones a la ecuación de Laplace. El tratado clásico es el de KELLOGG (Ke29) que constituye un texto de lectura fácil por lo general. Asimismo, a nivel superior están las obras breves de JEFFREYS y JEFFREYS (Je46, cap. 6) y de MENZEL (Me53, secciones 11 a la 19).

A nivel intermedio, véase el libro de RAMSEY (Ra40), si bien está algo pasado de moda. SYMON (Sy60, cap. 6) presenta un estudio breve y moderno.

En FEATHER (Fe59, cap. 10) puede hallarse una interesante revisión histórica de los problemas gravitatorios.

Problemas

2-1. Supóngase que la fuerza actuante sobre una partícula es factorizable en una de las formas siguientes:

$$(a) \quad F(x_i, t) = f(x_i)g(t) \quad (b) \quad F(\dot{x}_i)g = f(\dot{x}_i)g(t) \quad (c) \quad F(x_i, \dot{x}_i) = f(x_i)g(\dot{x}_i)$$

¿En qué casos son integrables las ecuaciones de movimiento?

2-2. Una partícula de masa m se mueve sobre la superficie de una esfera de radio R bajo la influencia de una fuerza \mathbf{F} . Escribir la ecuación de movimiento.

2-3. Se dispara un proyectil desde el origen de un sistema de coordenadas con una velocidad inicial v_0 en una dirección que forma un ángulo α con la horizontal. Calcular el tiempo necesario para que el proyectil cruce la recta que pasa por el origen y forma un ángulo $\beta < \alpha$ con la horizontal.

2-4. Se dispara un proyectil con una velocidad v_0 tal que pasa por dos puntos situados ambos a una distancia h sobre el plano horizontal. Demostrar que cuando el cañón se ajusta al máximo alcance, la distancia entre los puntos es

$$d = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 - 4gh}$$

2-5. Considérese un proyectil que se dispara verticalmente en un campo gravitatorio constante. Suponiendo que las velocidades iniciales sean iguales, comparar los tiempos necesarios para que el proyectil alcance su altura máxima

(a) cuando la fuerza resistente es nula,

(b) cuando la fuerza resistente es proporcional a la velocidad instantánea del proyectil.

2-6. Con velocidad inicial v_0 se lanza verticalmente hacia arriba una partícula. Demostrar que si existe una fuerza resistente proporcional al cuadrado de la ve-

locidad instantánea, entonces la velocidad de la partícula, cuando vuelva a la posición inicial, será

$$\frac{v_0 v_f}{\sqrt{v_0^2 + v_f^2}}$$

donde v_f es la velocidad final.

2-7. Considérese una partícula de masa m que inicia el movimiento desde el reposo en un campo gravitatorio constante. Suponiendo que encuentre una fuerza resistente proporcional al cuadrado de la velocidad (o sea, kmv^2), demostrar que la distancia recorrida s por la partícula al acelerarse desde v_0 hasta v_1 es

$$s(v_0 \rightarrow v_1) = \frac{1}{2k} \ln \left[\frac{g - kv_0^2}{g - kv_1^2} \right]$$

2-8. Se dispara un proyectil con una velocidad inicial v_0 . Determinar la expresión del alcance máximo cuando se mide la distancia pendiente arriba de una recta que forma un ángulo β con la horizontal. (El proyectil se dispara desde un punto situado sobre la misma recta.)

2-9. Una partícula se mueve dentro de un medio bajo la influencia de una fuerza que vale $mk(v^3 + a^2v)$, donde k y a son constantes. Demostrar que para todo valor de la velocidad inicial la partícula no se desplazará nunca una distancia superior a $\pi/2ka$ y que únicamente alcanza el reposo para $t \rightarrow \infty$.

2-10. Una gota de agua que cae dentro de la atmósfera es de forma esférica. Cuando atraviesa una nube adquiere masa a una velocidad proporcional a su sección transversal. Considérese una gota de radio inicial r_0 que penetra en una nube a una velocidad v_0 . Suponiendo que no existe fuerza resistente, demostrar

- (a) que el radio aumenta linealmente con el tiempo y
- (b) que cuando r_0 sea despreciable la velocidad dentro de la nube aumentará linealmente con el tiempo.

2-11. Una partícula de masa m se desliza hacia abajo sobre un plano inclinado bajo la influencia de la gravedad. Si al movimiento se opone una fuerza $f = kmv^2$, demostrar que el tiempo necesario para que se desplace una distancia d desde el reposo es

$$t = \frac{\operatorname{arcosh} (e^{kd})}{\sqrt{kg \operatorname{sen} \theta}}$$

donde θ es el ángulo de inclinación del plano.

2-12. Con velocidad inicial v_0 se lanza una partícula hacia arriba por una pendiente que forma un ángulo α con la horizontal. Suponiendo que el movimiento

se efectúa sin rozamiento, determinar el tiempo que transcurre para que la partícula vuelva a su posición original.

2-13. Si un proyectil se mueve de forma que su distancia al punto de lanzamiento aumenta continuamente, determinar el ángulo máximo sobre la horizontal bajo el cual tuvo lugar el lanzamiento. (Supóngase que no hay resistencia del aire.)

2-14. Un cañón dispara un proyectil del tipo al que se refieren las curvas de la figura 2-2. La velocidad en boca es 150 m/s. ¿Cuál ha de ser el ángulo de elevación del tubo si se desea dar en un blanco situado en la misma horizontal que la pieza y a 1000 m de distancia? Comparar los resultados con los que se obtienen en caso de que no haya resistencia.

2-15. Demostrar que la variación de momento cinético por unidad de tiempo en torno al origen para un proyectil disparado desde éste es igual al momento de la fuerza respecto del origen.

2-16. La fuerza de atracción entre dos partículas es

$$\mathbf{f}_{12} = k \left[(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - \frac{r}{v_0} (\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1) \right]$$

donde k es una constante, v_0 es una velocidad constante y $r = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$. Calcular el momento interno del sistema; ¿por qué no se anula esta cantidad? ¿Es conservativo el sistema?

2-17. El movimiento de una partícula cargada en un campo electromagnético puede obtenerse de la *ecuación de Lorentz** que da la fuerza que actúa sobre la partícula dentro de uno de tales campos. Si es \mathbf{E} el vector de campo eléctrico y \mathbf{B} el vector inducción magnética, la fuerza sobre una partícula de masa m que lleva una carga e y una velocidad \mathbf{v} vendrá dada por (en el sistema de unidades de Gauss)

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

donde c es la velocidad de la luz y se supone que $v \ll c$.

(a) Si no existe campo eléctrico y la partícula penetra en el campo magnético en una dirección normal a las líneas de flujo, demostrar que la trayectoria es un círculo de radio

$$r = \frac{cmv}{eB} = \frac{v}{\omega_c}$$

donde $\omega_c = eB/mc$ es la *pulsación ciclotrónica*.

* Véase, por ejemplo, MARION, *Classical Electromagnetic Radiation* (Ma65b, sec. 1-6).

(b) Sitúese el eje z en la dirección de \mathbf{B} y el plano $y-z$ en el formado por \mathbf{E} y \mathbf{B} . Con esto,

$$\mathbf{B} = B \mathbf{e}_z; \quad \mathbf{E} = E_y \mathbf{e}_y + E_z \mathbf{e}_z$$

Demostrar que la componente z del movimiento es

$$z(t) = z_0 + \dot{z}_0 t + \frac{eE_z}{2m} t^2$$

donde

$$z(0) \equiv z_0 \quad \text{y} \quad \dot{z}(0) \equiv \dot{z}_0$$

(c) Proseguir los cálculos obteniendo las expresiones de $x(t)$ e $y(t)$. Mostrar que los *valores medios* en el tiempo de estas componentes de la velocidad son

$$\langle \dot{x} \rangle = \frac{cE_y}{B}; \quad \langle \dot{y} \rangle = 0$$

(Demostrar que el movimiento es periódico y después calcular el valor medio en un período completo.)

(d) Integrar las expresiones de la velocidad determinadas en (c) y demostrar que (con una elección adecuada de las condiciones iniciales)

$$x(t) = \frac{A}{\omega_c} \operatorname{sen} \omega_L t + \frac{cE_y}{B} t; \quad y(t) = \frac{A}{\omega_c} (\cos \omega_L t - 1)$$

que son las ecuaciones paramétricas de una *trocoide*. Trazar la proyección de la trayectoria sobre el plano $x-y$ en los casos (i) $A > |cE_y/B|$, (ii) $A < |cE_y/B|$ y (iii) $A = |cE_y/B|$. (El último caso da una *cicloide*.)

2-18. Trazar las superficies equipotenciales y las líneas de fuerza correspondientes a dos masas puntuales separadas una cierta distancia. Supóngase después que uno de los puntos posee una masa ficticia $-M$; trazar las superficies equipotenciales y las líneas de fuerza para este caso. ¿A qué clase de situaciones se aplican estas superficies equipotenciales y líneas de fuerza? (Nótese que las líneas de fuerza poseen *sentido*; indíquese con las flechas adecuadas.)

2-19. Si el vector de campo es independiente de la distancia radial en el interior de una esfera, determinar la función que describe la densidad $\rho = \rho(r)$ de la esfera.

2-20. Bajo la hipótesis de que la resistencia del aire carece de importancia, calcular la velocidad mínima que debe poseer una partícula en la superficie de la Tierra para escapar al campo gravitatorio de ésta. Obténgase un valor numérico para el resultado. (Esta velocidad se llama *velocidad de escape*.)

2-21. Un centro de fuerzas atrae a una partícula de acuerdo con la ley $F = -mk^2/x^3$. Demostrar que el tiempo necesario para que la partícula llegue al centro de fuerzas desde una distancia d es d^2/k .

2-22. Una partícula cae desde una gran altura hacia la Tierra partiendo del reposo. Sin tener en cuenta la resistencia del aire, demostrar que se precisan aproximadamente $\frac{9}{11}$ del tiempo de caída total para recorrer la primera mitad de la distancia.

2-23. Calcular directamente la fuerza gravitatoria ejercida sobre una masa unitaria colocada en un punto exterior a una distribución esférica homogénea de materia.

2-24. Demostrar que el potencial gravitatorio de un disco circular de radio a y densidad superficial ρ_s viene dado por

$$\Phi(z) = -2\pi\gamma\rho_s[\sqrt{z^2 + a^2} - |z|]$$

en los puntos del eje normal al disco a una distancia z .

2-25. Calcular el potencial gravitatorio debido a una varilla delgada de longitud l y masa M a una distancia R del centro de la misma y en dirección normal a ella.

2-26. Calcular el vector de campo gravitatorio debido a un cilindro homogéneo en los puntos situados exteriormente en el eje del cilindro. Realícese el cálculo
 (a) calculando la fuerza directamente y
 (b) calculando primero el potencial.

2-27. Calcular el potencial producido por un anillo circular delgado de radio a y masa M en los puntos situados en su plano y fuera de su perímetro. El resultado puede expresarse en forma de integral elíptica.* Supóngase que la distancia del centro del anillo hasta el punto donde se calcula el potencial es grande comparada con el radio del anillo. Desarrollar la expresión del potencial y determinar el primer término correctivo.

2-28. Determinar el potencial en los puntos situados fuera del eje de un anillo circular delgado de radio a y masa M . Sea R la distancia desde el centro del anillo hasta el punto donde se calcula el potencial y θ el ángulo formado por la recta que une el centro del anillo con dicho punto y el eje del anillo. Supóngase $R \gg a$ de forma que los términos que contengan $(a/R)^3$ y potencias de grado superior puedan despreciarse.

2-29. Considérese un cuerpo material de forma cualquiera y una superficie esférica exterior al mismo. Demostrar que el valor medio del potencial en la superficie esférica es igual a su valor en el centro de la misma.

* En el apéndice E.4 puede encontrarse una lista de algunas integrales elípticas.

Oscilaciones lineales

3.1 Introducción

Comenzaremos examinando el movimiento oscilatorio de una partícula limitada a moverse en una sola dimensión. Haremos la hipótesis de que para esta partícula existe una posición de equilibrio estable, punto éste que designaremos origen. Cuando la partícula sufre un desplazamiento desde el origen (en cualquier sentido de los dos posibles), aparece una cierta fuerza que tiende a llevarla de nuevo a su posición original y que, en general, será una función complicada del desplazamiento y quizás de la velocidad, o incluso de alguna derivada de orden superior de la coordenada de posición respecto del tiempo. Aquí sólo tendremos en cuenta aquellos casos en que la fuerza recuperadora sea función únicamente del desplazamiento: $F = F(x)$.

Supondremos que la función $F(x)$ que describe la fuerza recuperadora posee derivadas continuas de todos los órdenes, de forma que se puede desarrollar en serie de Taylor:

$$F(x) = F_0 + x \left(\frac{dF}{dx} \right)_0 + \frac{1}{2} x^2 \left(\frac{d^2F}{dx^2} \right)_0 + \dots \quad (3.1)$$

donde F_0 es el valor de $F(x)$ en el origen ($x=0$) y $(d^n F/dx^n)_0$ el de la derivada de orden n también en el origen. Como el origen es, por definición, el punto de equilibrio, F_0 debe ser nula y, si reducimos nuestra atención a desplazamientos de la partícula suficientemente pequeños, podremos despreciar todos los términos en los que aparezca x^2 y potencias superiores de x . Nos queda, por tanto, la relación aproximada siguiente:

$$F(x) = -kx \quad (3.2)$$

donde se ha hecho la sustitución $k = -(dF/dx)_0$. Al estar la fuerza recuperadora dirigida siempre hacia la posición de equilibrio (origen), la derivada $(dF/dx)_0$ es negativa y por lo tanto la constante k es positiva. Como en $F(x)$ únicamente aparece la primera potencia del desplazamiento, la fuerza recuperadora es, en esta aproximación, una fuerza *lineal*.

De los sistemas físicos que quedan descritos por una expresión del tipo de la 3.2 se dice que obedecen la *ley de Hooke*.* Uno de los fenómenos físicos que pueden tratarse mediante la aplicación de la ley de Hooke es el relativo a las deformaciones elásticas. Mientras los desplazamientos sean pequeños y no se sobrepasen los límites de elasticidad, podrán utilizarse fuerzas restauradoras lineales para resolver problemas concernientes a muelles tensados, muelles elásticos, vigas que flexionan, etc.; si bien debemos recalcar que los cálculos sólo serán aproximados, ya que todas las fuerzas recuperadoras que aparecen en la naturaleza son esencialmente más complicadas que lo expresado simplemente por la ley de Hooke. Así pues, deberemos tener siempre presente el hecho de que las fuerzas lineales son únicamente aproximaciones útiles y que su validez se limita a aquellos casos en que las amplitudes de las oscilaciones son pequeñas. (Véase, por ejemplo, el problema 3-8.) En el capítulo 5 trataremos del caso más real (y más complicado) de las oscilaciones alineales.

3.2 El oscilador armónico simple u oscilador lineal

La ecuación de movimiento del oscilador armónico simple puede obtenerse sustituyendo la expresión de la ley de Hooke en la expresión de la segunda ley de Newton, $F=ma$. De esta forma,

$$-kx = m\ddot{x} \quad (3.3)$$

* Robert HOOKE (1635-1703). La forma equivalente de esta ley fue expresada originalmente por Hooke en 1676 en forma de criptograma latino: *CEIIINOSSTTUV, ut tensio sic vis*.

Si, por definición, tomamos

$$\omega_0^2 \equiv k/m \quad (3.4)$$

la ecuación 3.3 se transforma en

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (3.5)$$

Según los resultados que se exponen en el apéndice C, la solución a esta ecuación puede expresarse en cualquiera de las dos formas

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega_0 t - \delta) \quad (3.6a)$$

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t - \phi) \quad (3.6b)$$

donde, por supuesto, las fases δ y ϕ difieren en $\pi/2$. (La alteración del ángulo de fase correspondería a un cambio del instante en que suponemos $t=0$, origen de la escala de tiempos.) Las expresiones 3.6 constituyen la descripción del comportamiento senoidal bien conocido del oscilador armónico simple.

La relación entre la energía total del oscilador y la amplitud del movimiento puede obtenerse como sigue. Utilizando 3.6a para $x(t)$, se tiene para la energía cinética

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t - \delta) \\ &= \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega_0 t - \delta) \end{aligned} \quad (3.7)$$

La energía potencial puede obtenerse calculando el trabajo necesario para desplazar la partícula una distancia x . El trabajo elemental dW necesario para mover la partícula una distancia elemental dx en contra de la fuerza recuperadora F es

$$dW = -F dx = kx dx \quad (3.8)$$

Integrando de 0 a x e igualando el trabajo efectuado sobre la partícula a la energía potencial, tenemos

$$U = \frac{1}{2}kx^2 \quad (3.9)$$

y entonces,

$$U = \frac{1}{2}kA^2 \operatorname{sen}^2(\omega_0 t - \delta) \quad (3.10)$$

Al combinar las expresiones de T y U para determinar la energía total E , tendremos

$$E = T + U = \frac{1}{2}kA^2 \quad (3.11)$$

de forma que la energía total es proporcional al *cuadrado de la amplitud*, lo que constituye un resultado general para todos los sistemas lineales. Nótese asimismo que E es independiente del tiempo; es decir, la energía se conserva. (La conservación de la energía está, desde luego, asegurada puesto que hemos considerado un sistema carente de pérdidas por rozamiento.)

Por definición, el período τ_0 del movimiento es el intervalo de tiempo comprendido entre dos repeticiones sucesivas de la posición de la partícula y del sentido de su movimiento. Ello ocurrirá cuando el argumento del seno de 3.6a aumente en 2π :

$$\omega_0 \tau_0 = 2\pi \quad (3.12)$$

o sea,

$$\tau_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (3.13)$$

De esta expresión, así como de la 3.6a, resulta evidente que ω_0 representa la *pulsación* del movimiento, la cual está relacionada con la frecuencia v_0 por*

$$\omega_0 = 2\pi v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.14)$$

$$v_0 = \frac{1}{\tau_0} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.15)$$

Nótese que el período del oscilador armónico simple es independiente de la amplitud (o de la energía total); todo sistema que exhibe esta propiedad se dice que es *isocrono*.

* En adelante, representaremos la pulsación por ω (radianes por unidad de tiempo) y la frecuencia por v (oscilaciones o ciclos por unidad de tiempo o Hertz, Hz). Generalmente, nos referiremos a ω como a la «pulsación», si bien también suele llamarse «frecuencia angular».

3.3 Diagramas fásicos

El estado de movimiento de un oscilador unidimensional, como el tratado en la sección precedente, quedará determinado completamente como función del tiempo cuando se den *dos* cantidades: el desplazamiento $x(t)$ y la velocidad $\dot{x}(t)$. (Se necesitan *dos* cantidades porque la ecuación diferencial del movimiento es de *segundo* orden.) Podemos suponer que las cantidades $x(t)$ y $\dot{x}(t)$ sean las coordenadas de un punto en un espacio bidimensional, llamado *espacio fásico*, de forma que, con el transcurso del tiempo, el punto $P(x, \dot{x})$, representante del estado de la partícula en oscilación, se desplaza sobre una trayectoria del espacio fásico. (En dos dimensiones, el espacio fásico se reduce, desde luego, a un *plano* fásico, pero en el caso general de un oscilador de n grados de libertad el espacio fásico tendrá $2n$ dimensiones.) Las distintas trayectorias del espacio fásico representan los movimientos del oscilador para diferentes condiciones iniciales, de forma que una trayectoria dada representará toda la historia del oscilador para un conjunto determinado de condiciones iniciales y la totalidad de las trayectorias constituye el llamado *espectro* o *diagrama fásico* del oscilador.*

De acuerdo con los resultados de la sección anterior, en el caso del oscilador armónico tenemos

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega_0 t - \delta) \quad (3.16a)$$

$$\dot{x}(t) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t - \delta) \quad (3.16b)$$

de las que, al eliminar t entre ambas, obtendremos la trayectoria en el espacio fásico:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{A^2\omega_0^2} = 1 \quad (3.17)$$

Esta ecuación representa una familia de elipses,** algunas de las cuales se representan en la figura 3-1. Ahora, como sabemos que la energía total E del oscilador es $\frac{1}{2}kA^2$ (3.11) y dado que $\omega_0 = k/m$, la ecuación 3.17 podrá escribirse

$$\frac{x^2}{2E/k} + \frac{\dot{x}^2}{2E/m} = 1 \quad (3.18)$$

* Estas consideraciones no se reducen a partículas o sistemas en oscilación, ya que el concepto de espacio fásico se aplica extensamente en diversos campos de la Física, especialmente en la Mecánica estadística.

** A veces, en el eje de ordenadas del espacio fásico se lleva \dot{x}/ω_0 en vez de \dot{x} , con lo que las trayectorias serán circunferencias.

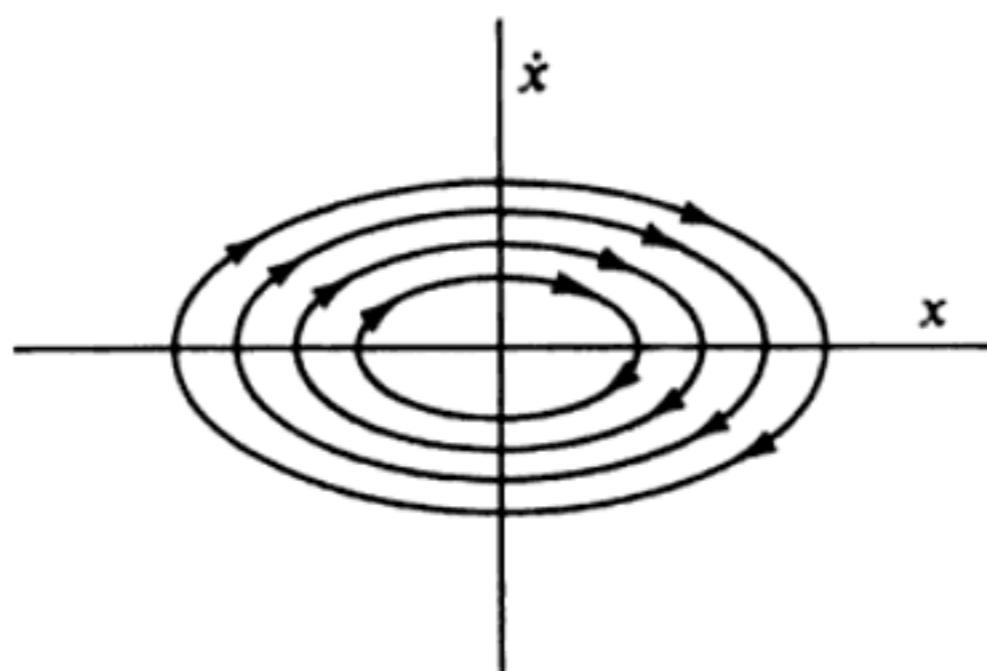


FIG. 3-1

Es decir, cada trayectoria del espacio fásico corresponde a un valor definido de la energía total del oscilador, resultado que cabía esperar puesto que se trata de un sistema conservativo (es decir, con $E = \text{cte}$).

Dos trayectorias del espacio fásico no pueden cortarse. Si se cortaran, ello implicaría que, para un conjunto dado de condiciones iniciales, $x(t_0)$ y $\dot{x}(t_0)$ (o sea, las coordenadas del punto de corte), el movimiento podría tener lugar según trayectorias diferentes del espacio fásico, lo cual es imposible puesto que la solución de la ecuación diferencial es única.

Cuando los ejes de coordenadas del espacio fásico se sitúan de la forma indicada en la figura 3-1, el *punto representativo* $P(x, \dot{x})$ se desplazará siempre en el sentido de las agujas del reloj, ya que cuando $x > 0$ la velocidad \dot{x} es siempre decreciente y cuando $x < 0$ la velocidad es siempre creciente.

Para obtener las expresiones 3.16 de $x(t)$ y $\dot{x}(t)$ es necesario integrar una ecuación diferencial de segundo orden:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad (3.19)$$

Sin embargo, la ecuación de la trayectoria en el espacio fásico puede obtenerse mediante un procedimiento más sencillo, ya que 3.19 puede sustituirse por el par de ecuaciones:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}; \quad \frac{d\dot{x}}{dt} = -\omega_0^2 x \quad (3.20)$$

que, al dividir la segunda por la primera, nos dan

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = -\omega_0^2 \frac{x}{\dot{x}} \quad (3.21)$$

que es una ecuación diferencial de *primer orden* en $\dot{x} = \dot{x}(x)$ y cuya solución es precisamente 3.17. En el caso del oscilador armónico simple no existe, desde luego, dificultad alguna para la obtención de la expresión temporal del movimiento como solución a una ecuación diferencial de segundo orden, pero en situaciones más complicadas resulta a veces considerablemente más fácil encontrar directamente la trayectoria en el espacio fásico $\dot{x} = \dot{x}(x)$ sin pasar por el cálculo de $x(t)$.

Aunque es siempre posible, para todo sistema, escribir una ecuación en $d\dot{x}/dx$ de la forma

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = f(x, \dot{x}) \quad (3.22)$$

ésta puede no ser integrable mediante funciones elementales. En tales casos, puede procederse a construir el diagrama de las fases por el *método de las isoclinas* que pasamos a exponer. La cantidad $d\dot{x}/dx$ representa la pendiente de la trayectoria en el espacio fásico; por tanto, si ξ es un parámetro, la expresión

$$f(x, \dot{x}) = \xi \quad (3.23)$$

será la ecuación de una curva que cortará a las trayectorias del espacio fásico en puntos donde las pendientes de cada una de las mismas sean iguales a ξ . Así pues, eligiendo un intervalo de variación para ξ , resolviendo 3.23 y representando las curvas correspondientes (las isoclinas), será posible construir el diagrama fásico deseado. En el caso del oscilador armónico simple, la ecuación 3.23 es

$$-\omega_0^2 \frac{x}{\dot{x}} = \xi \quad (3.24)$$

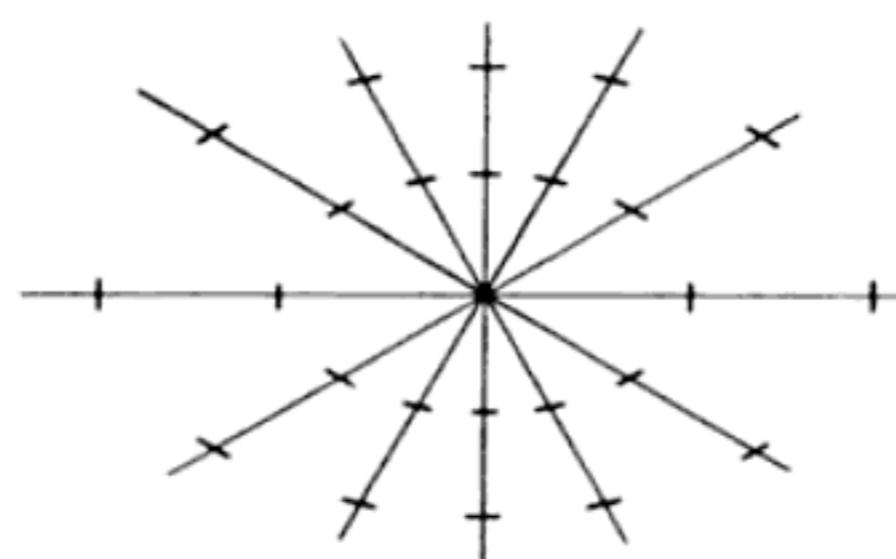


FIG. 3-2

de forma que todas las isoclinas serán rectas que pasen por el origen, algunas de las cuales se representan en la figura 3-2. Evidentemente, las curvas que cortan a las isoclinas bajo las pendientes adecuadas serán elipses.

3.4 Oscilaciones armónicas en dos dimensiones

Examinaremos a continuación el movimiento de una partícula que posee dos grados de libertad. Supondremos que la fuerza recuperadora es proporcional a la distancia de la partícula al origen, donde situaremos el centro de atracción, y que está dirigida hacia el mismo:

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r} \quad (3.25)$$

expresión que, en coordenadas polares, se descompone en

$$\left. \begin{array}{l} F_x = -kr \cos \theta = -kx \\ F_y = -kr \sin \theta = -ky \end{array} \right\} \quad (3.26)$$

siendo las ecuaciones de movimiento

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \end{array} \right\} \quad (3.27)$$

donde, como antes, $\omega_0^2 = k/m$. Las soluciones son

$$\left. \begin{array}{l} x(t) = A \cos(\omega_0 t - \alpha) \\ y(t) = B \cos(\omega_0 t - \beta) \end{array} \right\} \quad (3.28)$$

Así pues, el movimiento se compone de sendas oscilaciones armónicas en cada una de las dos direcciones, de la misma frecuencia, pero probablemente de amplitudes y fases diferentes. Si eliminamos el tiempo t entre las dos ecuaciones 3.28 obtendremos la ecuación de la trayectoria de la partícula. Comencemos escribiendo

$$\begin{aligned} y(t) &= B \cos[\omega_0 t - \alpha + (\alpha - \beta)] \\ &= B \cos(\omega_0 t - \alpha) \cos(\alpha - \beta) - B \sin(\omega_0 t - \alpha) \sin(\alpha - \beta) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Sea $\delta = \alpha - \beta$ y teniendo en cuenta que $\cos(\omega_0 t - \alpha) = x/A$, tendremos

$$y = \frac{B}{A} x \cos \delta - B \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{A^2}\right)} \sin \delta$$

o bien,

$$Ay - Bx \cos \delta = -B \sqrt{A^2 - x^2} \sin \delta \quad (3.30)$$

que, elevada al cuadrado, se transforma en

$$A^2 y^2 - 2ABxy \cos \delta + B^2 x^2 \cos^2 \delta = A^2 B^2 \sin^2 \delta - B^2 x^2 \sin^2 \delta$$

que es

$$B^2 x^2 - 2ABxy \cos \delta + A^2 y^2 = A^2 B^2 \sin^2 \delta \quad (3.31)$$

Si hacemos δ igual a $\pm\pi/2m$, esta ecuación adquiere la forma, fácilmente reconocible, de la de una elipse:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1; \quad \delta = \pm\pi/2 \quad (3.32)$$

Cuando las amplitudes sean iguales, $A=B$, y $\delta=\pm\pi/2$, tendremos el caso particular de movimiento circular:

$$x^2 + y^2 = A^2; \quad A = B; \quad \delta = \pm\pi/2 \quad (3.33)$$

Otro caso particular resulta cuando δ se anule, en que tendremos

$$B^2 x^2 - 2ABxy + A^2 y^2 = 0; \quad \delta = 0$$

de forma que

$$(Bx - Ay)^2 = 0$$

expresión de la ecuación de una recta:

$$y = \frac{B}{A} x; \quad \delta = 0 \quad (3.34)$$

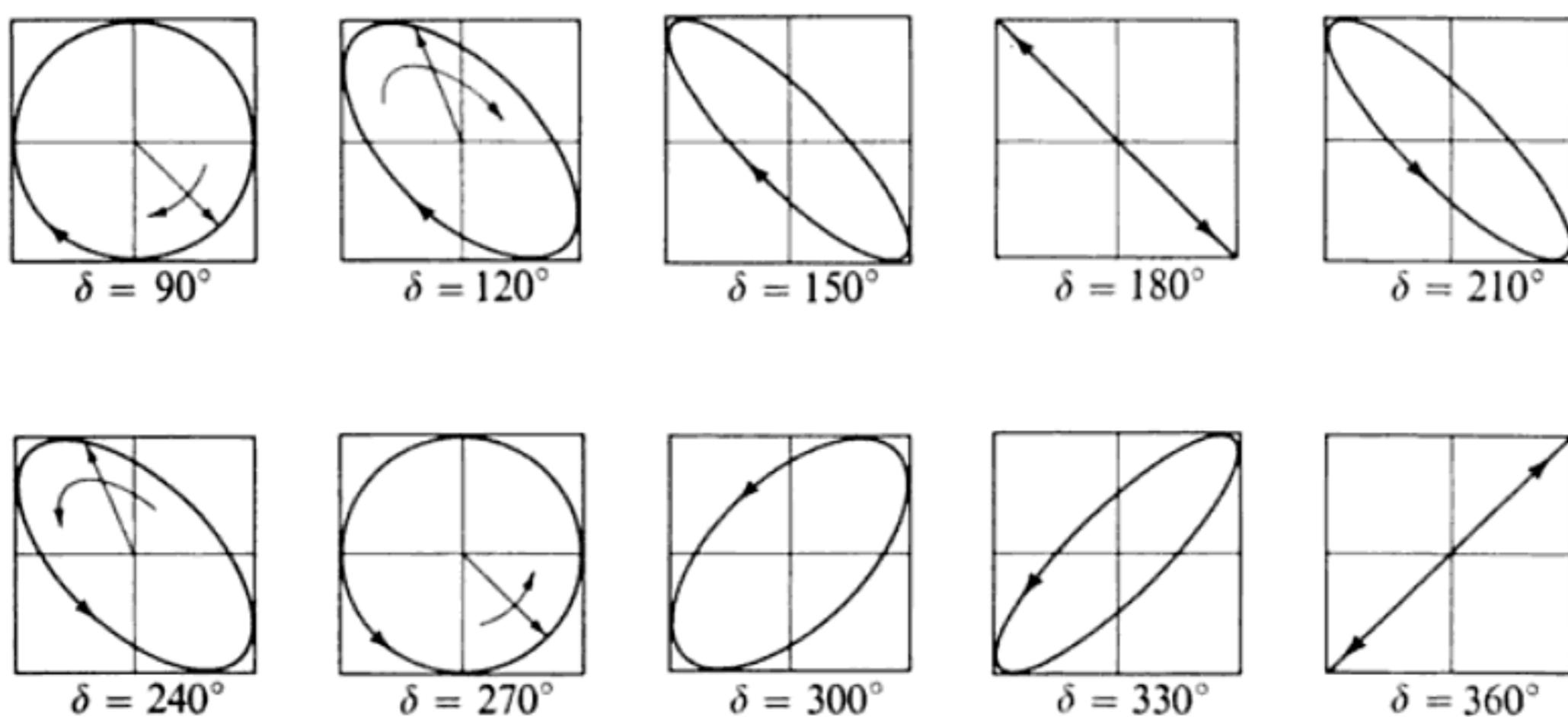


FIG. 3-3

De forma similar, la fase $\delta = \pm\pi$ nos da la recta de pendiente opuesta:

$$y = -\frac{B}{A}x; \quad \delta = \pm\pi \quad (3.35)$$

En la figura 3-3 se representan algunas de las curvas 3.31 correspondientes al caso $A=B$; cuando δ vale 90° o 270° la curva es una circunferencia y cuando vale 180° o 360° (0°) la curva se reduce a una recta, mientras que los demás valores de δ dan elipses.

En general, las oscilaciones bidimensionales no tienen por qué poseer las mismas pulsaciones en los movimientos según las direcciones x e y , de forma que las ecuaciones (3.28) se convierten en

$$\left. \begin{array}{l} x(t) = A \cos(\omega_x t - \alpha) \\ y(t) = B \cos(\omega_y t - \beta) \end{array} \right\} \quad (3.36)$$

y la trayectoria ya no es una elipse, sino una de las llamadas *curvas de Lissajous*.*

Estas curvas serán *cerradas* cuando el movimiento se repita sobre sí mismo a intervalos regulares de tiempo, lo cual sólo será posible cuando las pulsaciones ω_x y ω_y sean *commensurables*, o sea cuando ω_x/ω_y sea una fracción racional. En la figura 3-4 se representa uno de estos casos, para el cual $\omega_y = \frac{3}{4}\omega_x$ (y, asimismo, $A=B$ y $\alpha=\beta$). En caso de que el cociente de las pulsaciones no sea una fracción racional, la curva será *abierta*; es decir, la partícula no pasará dos veces por el mismo punto a la misma velocidad. Para este último caso puede demostrarse que, una vez transcurrido un tiempo suficientemente largo, la curva pa-

* Demostrado por primera vez en 1857 por Jules LISSAJOUS (1822-1880).

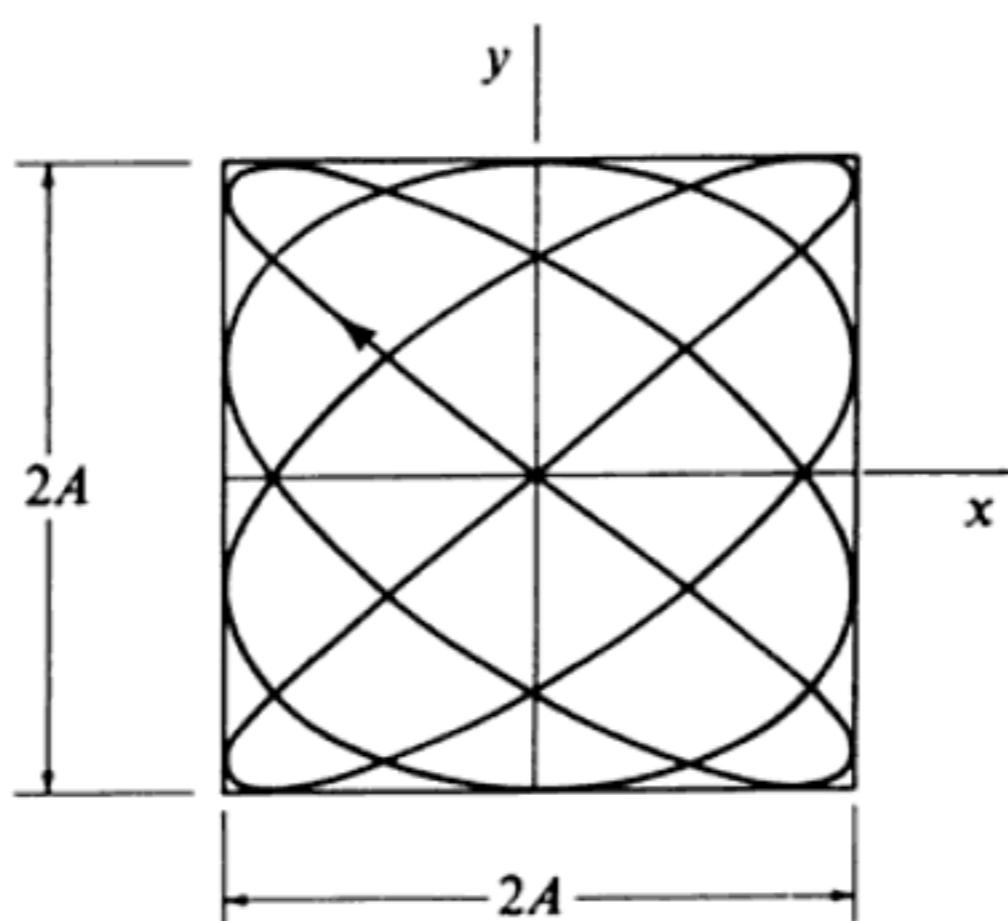


FIG. 3-4

sará tan cerca como se quiera de todo punto dado situado en el interior del rectángulo $2A \times 2B$, «rellenándolo» de esta forma.*

Es interesante señalar que el oscilador bidimensional constituye un modelo de sistema en el cual un cambio infinitesimal puede dar por resultado un tipo de movimiento cualitativamente distinto. Aunque el movimiento siga una trayectoria cerrada si ambas pulsaciones son commensurables, cuando el cociente de éstas deja de ser una fracción racional, incluso en una cantidad infinitesimal, la trayectoria deja de ser cerrada, pasando a «rellenar» el rectángulo. Para que la trayectoria sea cerrada, debemos tener la certeza total de que el cociente de pulsaciones es exactamente una fracción racional.

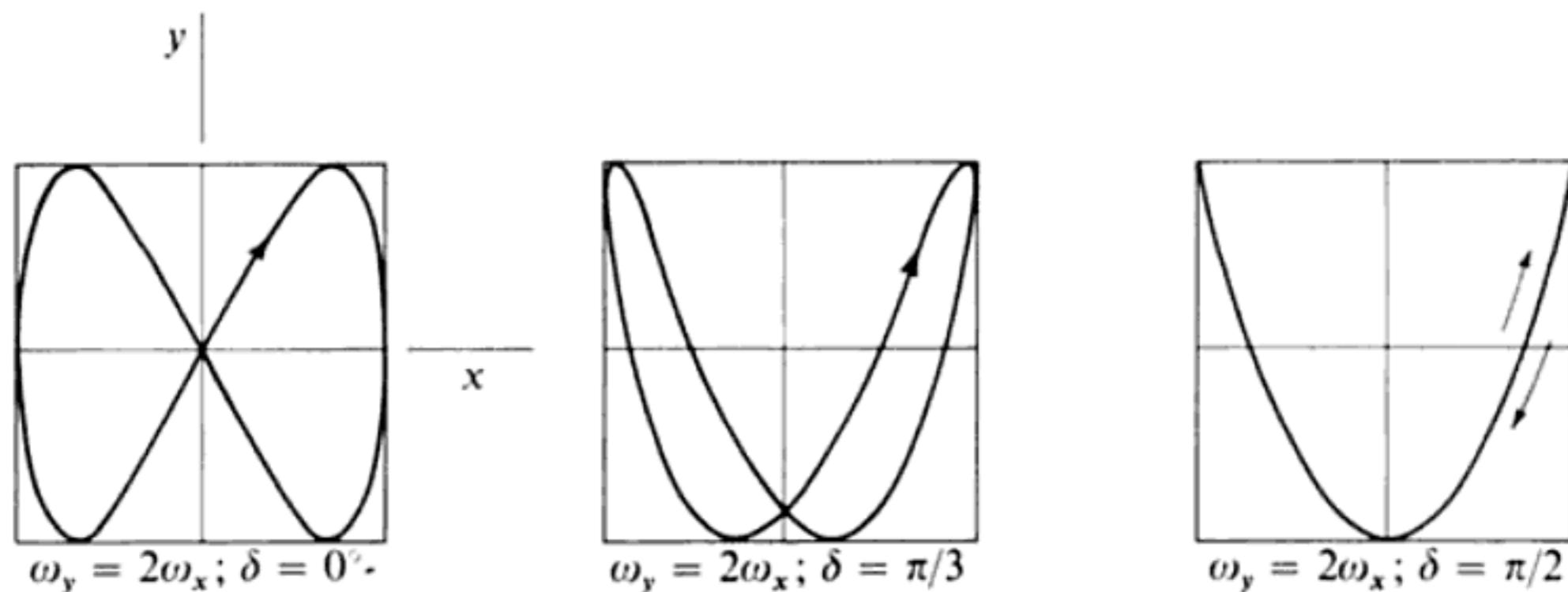


FIG. 3-5

* Puede encontrarse la demostración en HAAg (Ha62, pág. 36).

Cuando las pulsaciones de los movimientos en las direcciones x e y sean diferentes, la forma de la curva de Lissajous resultante* depende mucho de la diferencia de fase $\delta \equiv \alpha - \beta$. En la figura 3-5 se muestran los resultados en el caso $\omega_y = 2\omega_x$, para las diferencias de fase 0, $\pi/3$ y $\pi/2$.

3.5 Oscilaciones amortiguadas

El movimiento ejecutado por el oscilador armónico simple recibe el nombre de *oscilación libre* y es tal que, una vez iniciado, no cesa nunca. Por supuesto, se trata de una simplificación del caso físico real en el que las fuerzas disipativas o de rozamiento acabarían por extinguir finalmente el movimiento, desapareciendo las oscilaciones. Este caso puede estudiarse introduciendo en la ecuación diferencial un término que sea responsable de la fuerza de amortiguamiento. No parece razonable que ésta deba depender en general del desplazamiento, sino que más bien podría ser una función de la velocidad o de alguna derivada de orden superior del desplazamiento respecto del tiempo. La hipótesis más frecuente es que la fuerza amortiguadora es una función lineal de la velocidad,** $F_d = \alpha v$. Solamente vamos a considerar aquí las oscilaciones amortiguadas unidimensionales, por lo cual podremos representar por $-b\dot{x}$ el término responsable del amortiguamiento, donde b es una constante que debe ser *positiva* para que la fuerza amortiguadora sea realmente *resistente*. (Una fuerza $-b\dot{x}$ con $b < 0$ tendría el mismo sentido que la fuerza recuperadora, no el opuesto al de ésta.)

Tenemos, pues, una partícula de masa m sometida a la acción combinada de una fuerza recuperadora lineal $-kx$ y una fuerza resistente $-b\dot{x}$ siendo, por tanto, la ecuación de movimiento correspondiente

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad (3.37)$$

que puede escribirse en la forma

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0} \quad (3.38)$$

* Representaciones de curvas de Lissajous para cocientes de las pulsaciones y diferencias de fase diferentes pueden encontrarse, por ejemplo, en SEARS (Se58, pág. 313).

** En la sección 2.4 puede verse una discusión acerca de la dependencia de las fuerzas resistentes con la velocidad.

donde $\beta = b/2m$ es el *factor de amortiguamiento* y $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ es la pulsación propia o pulsación en ausencia de amortiguamiento. Las raíces de la ecuación característica son (cf. ec. C.8, ap. C):

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \\ r_2 &= -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

y, por tanto, la integral general de la ecuación 3.38 es

$$x(t) = e^{-\beta t} [A_1 \exp(\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t) + A_2 \exp(-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t)] \quad (3.40)$$

Los casos de interés son tres:

- (a) Movimiento oscilatorio amortiguado: $\omega_0^2 > \beta^2$
- (b) Movimiento aperiódico crítico: $\omega_0^2 = \beta^2$
- (c) Movimiento aperiódico o sobreamortiguado: $\omega_0^2 < \beta^2$

Como veremos, sólo en el caso (a) el movimiento es oscilatorio. Pasamos ahora a examinar estos tres casos por separado.

(a) **MOVIMIENTO OSCILATORIO AMORTIGUADO.** En este caso es conveniente definir

$$\omega_1^2 \equiv \omega_0^2 - \beta^2 \quad (3.41)$$

donde $\omega_1^2 > 0$; con lo cual los exponentes de la expresión entre corchetes de 3.40 serán imaginarios y la solución se transforma en

$$x(t) = e^{-\beta t} [A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{-i\omega_1 t}] \quad (3.42)$$

que puede volver a escribirse*

$$x(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t - \delta) \quad (3.43)$$

Diremos que ω_1 es la *pulsación del oscilador amortiguado*, aunque, hablando estrictamente, no sea posible definir una pulsación cuando exista amortiguamiento ya que el movimiento no es periódico; o sea, el oscilador no pasa nunca dos

* Véase ejercicio B.6, ap. B.

veces por el mismo punto a la misma velocidad. Cuando el amortiguamiento es débil, será

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \cong \omega_0$$

con lo cual podremos utilizar el término «pulsación», pero sin un significado preciso a menos que $\beta=0$. No obstante, para simplificar, nos referiremos a ω_1 como a la «pulsación» del oscilador amortiguado, haciendo notar que su valor es inferior al de la pulsación del oscilador en ausencia de amortiguamiento.

La amplitud máxima del movimiento del oscilador amortiguado decrece con el tiempo a causa del factor $\exp(-\beta t)$, en el que $\beta>0$, teniendo la curva que da el desplazamiento en función del tiempo una envolvente que viene expresada por

$$x_{en} = \pm Ae^{-\beta t} \quad (3.44)$$

que se representa en la figura 3-6 junto con la anterior para el caso $\delta=0$. Asimismo, en esta figura se incluye la senoide correspondiente al movimiento no amortiguado ($\beta=0$). Al comparar ambas curvas resulta evidente que la pulsación cuando hay amortiguamiento es menor (o sea, el período es *mayor*) que cuando éste no existe.

El cociente de las amplitudes de oscilación correspondientes a dos máximos sucesivos es

$$\frac{Ae^{-\beta T}}{Ae^{-\beta(T+\tau_1)}} = e^{\beta\tau_1} \quad (3.45)$$

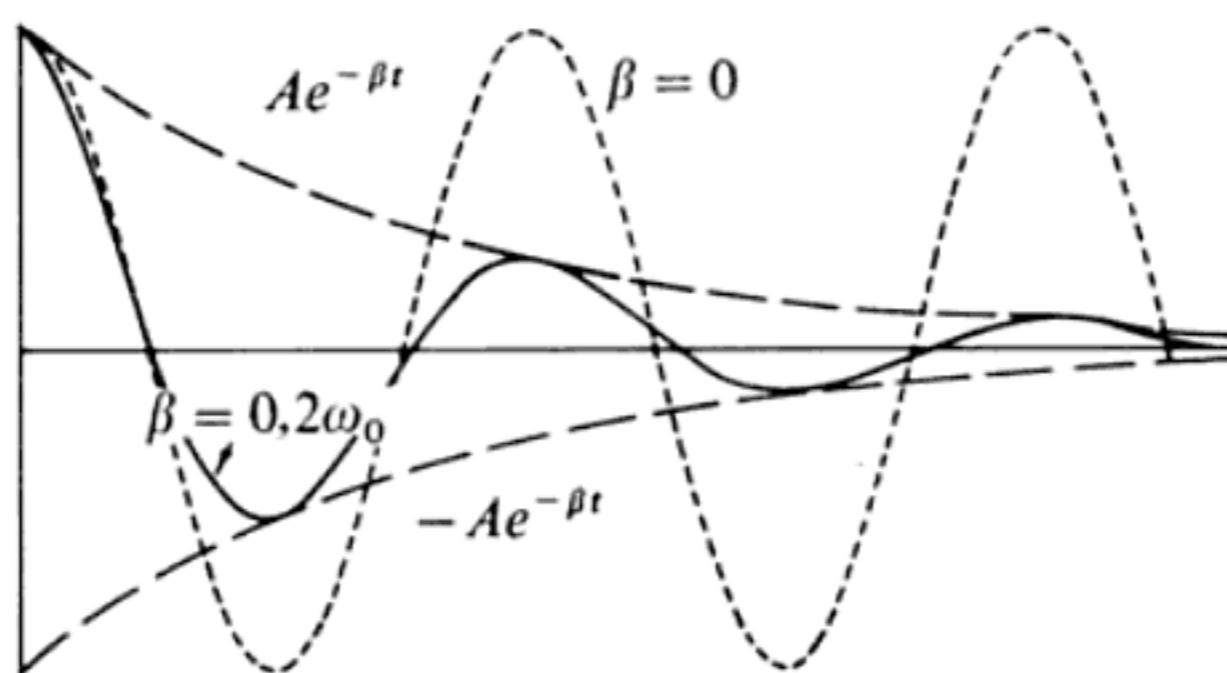


FIG. 3-6

y los dos primeros máximos tienen lugar en el tiempo $t=T$ y $\tau_1=2\pi/\omega_1$. La cantidad $\exp(-\beta\tau_1)$ es el llamado *decremento* del movimiento y su logaritmo natural, es decir, $\beta\tau_1$, se conoce por el nombre de *decremento logarítmico*.

En contraste con el oscilador armónico simple, del que tratamos antes, la energía del oscilador amortiguado no permanece constante con el tiempo, sino que es cedida continuamente al medio amortiguante y disipada en forma de calor (o, a veces, en la emisión de ondas fluidas). La pérdida de energía por unidad de tiempo es proporcional al cuadrado de la velocidad (véase problema 3-11), por lo que la energía no disminuye uniformemente. Esta pérdida por unidad de tiempo será máxima cuando la partícula alcance su velocidad máxima en las proximidades de la posición de equilibrio (pero no exactamente en ella) y se hará nula instantáneamente cuando se encuentre en la posición de amplitud máxima, en que la velocidad es cero. En la figura 3-7 se representan la energía total y la pérdida de energía por unidad de tiempo del oscilador amortiguado.

El diagrama fásico del oscilador amortiguado puede construirse como sigue. Escribamos primero las expresiones del desplazamiento y de la velocidad:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= Ae^{-\beta t} \cos(\omega_1 t - \delta) \\ \dot{x}(t) &= -Ae^{-\beta t} [\beta \cos(\omega_1 t - \delta) + \omega_1 \sin(\omega_1 t - \delta)] \end{aligned} \right\} \quad (3.46)$$

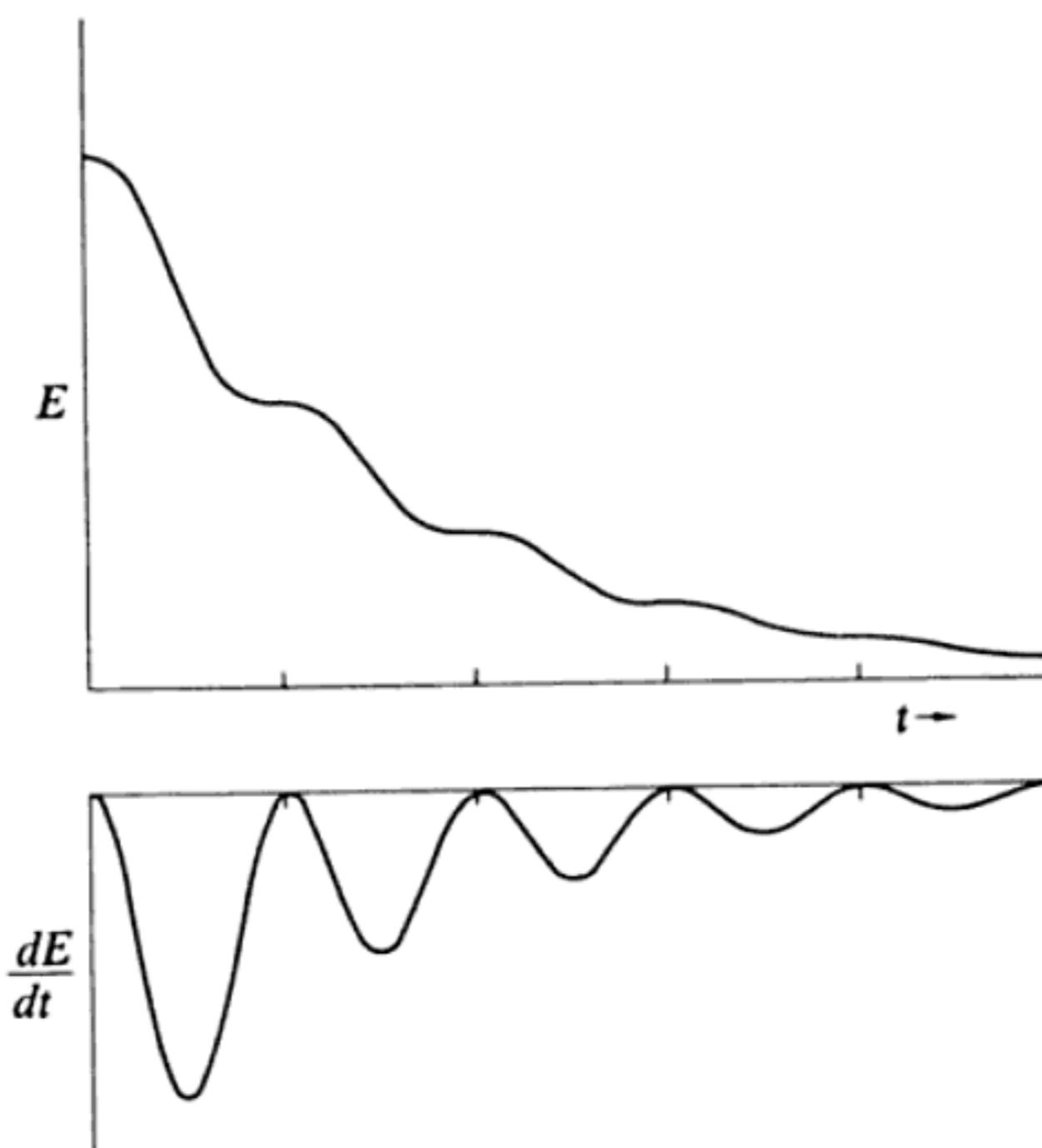


FIG. 3-7

Estas expresiones pueden adoptar una forma más sencilla sin más que realizar el cambio de variables representado por la transformación lineal siguiente:

$$u = \omega_1 x; \quad w = \beta x + \dot{x} \quad (3.47)$$

Entonces,

$$\left. \begin{array}{l} u = \omega_1 A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t - \delta) \\ w = -\omega_1 A e^{-\beta t} \sin(\omega_1 t - \delta) \end{array} \right\} \quad (3.48)$$

y si representamos u y w en coordenadas polares (véase figura 3-8), tendremos

$$\rho = \sqrt{u^2 + w^2}; \quad \varphi = \omega_1 t \quad (3.49)$$

y de aquí

$$\rho = \omega_1 A e^{-(\beta/\omega_1)\varphi} \quad (3.50)$$

que es la ecuación de una espiral logarítmica. Como la transformación de x, \dot{x} a u, w es lineal, la trayectoria en el espacio fásico tiene básicamente la misma forma en el plano fásico que en el $u-w$. En la figura 3-9 se representa una trayectoria espiral en el espacio fásico del oscilador amortiguado. El módulo del vector de posición del punto representativo en el plano fásico decrece continuamente, lo cual indica siempre que el movimiento del oscilador es amortiguado.

(b) MOVIMIENTO APERIÓDICO CRÍTICO. Cuando la fuerza amortiguadora es suficientemente grande (o sea, cuando $\beta^2 > \omega_0^2$), el sistema no puede ejecutar un movimiento oscilatorio. Si la velocidad inicial es nula, el desplazamiento disminuye

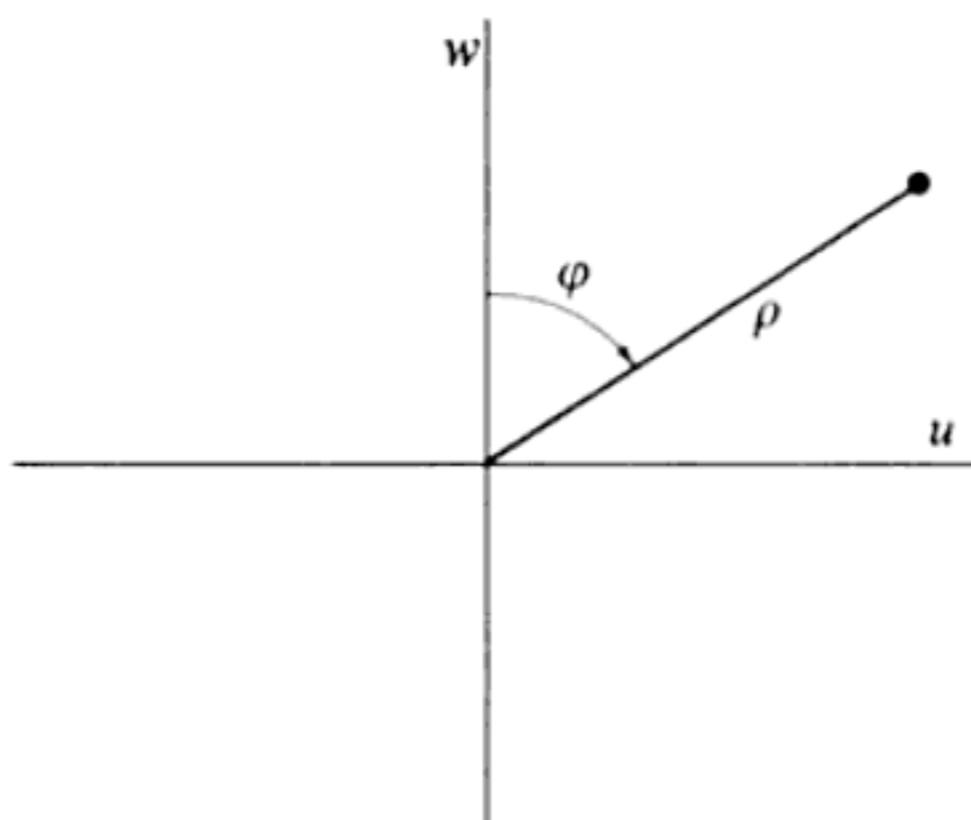


FIG. 3-8

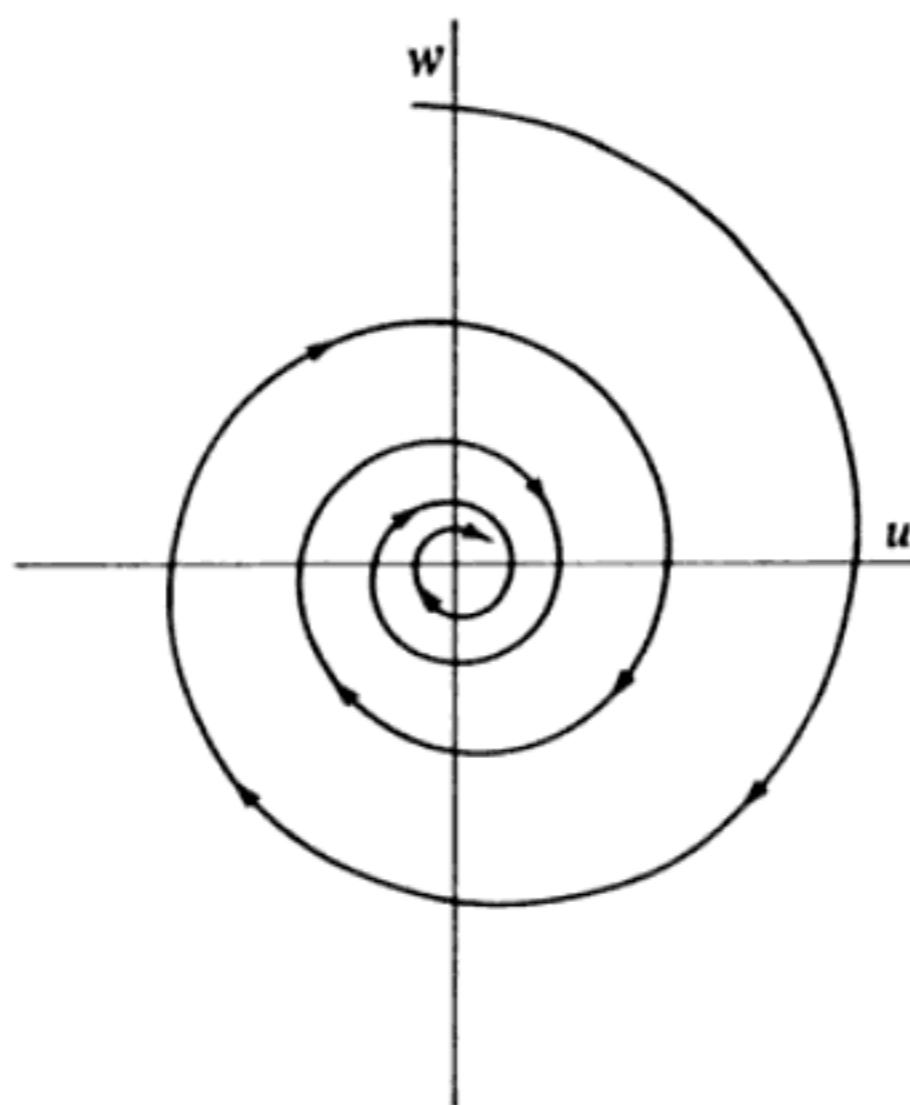


FIG. 3-9

monótonamente desde su valor inicial hasta el de la posición de equilibrio ($x=0$). La situación de *amortiguamiento crítico* tiene lugar cuando β^2 es exactamente igual a ω_0^2 . En este caso, las raíces de la ecuación característica serán iguales y la expresión de x será (cf. ec. C.11, ap. C):

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\beta t} \quad (3.51)$$

En la figura 3-10 se representa la curva del desplazamiento en el caso de amortiguamiento crítico para una velocidad inicial nula. Para unas mismas condiciones iniciales, un oscilador amortiguado críticamente se acercará al equilibrio con mayor rapidez que un oscilador amortiguado oscilatorio y que un oscilador sobre-amortiguado. Este hecho es importante para el proyecto de algunos sistemas oscillatorios reales (como galvanómetros) cuando se desea que el sistema vuelva al equilibrio con la mayor rapidez posible.

(c) MOVIMIENTO APERIÓDICO O SOBREAMORTIGUADO. Cuando el factor de amortiguamiento β sea mayor que ω_0 aparecerá el sobreamortiguamiento; en este caso, al ser $\beta^2 > \omega_0^2$, las exponenciales de 3.40 pasarán a ser reales:

$$x(t) = e^{-\beta t}[A_1 e^{\omega_2 t} + A_2 e^{-\omega_2 t}] \quad (3.52)$$

donde

$$\omega_2 = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad (3.53)$$

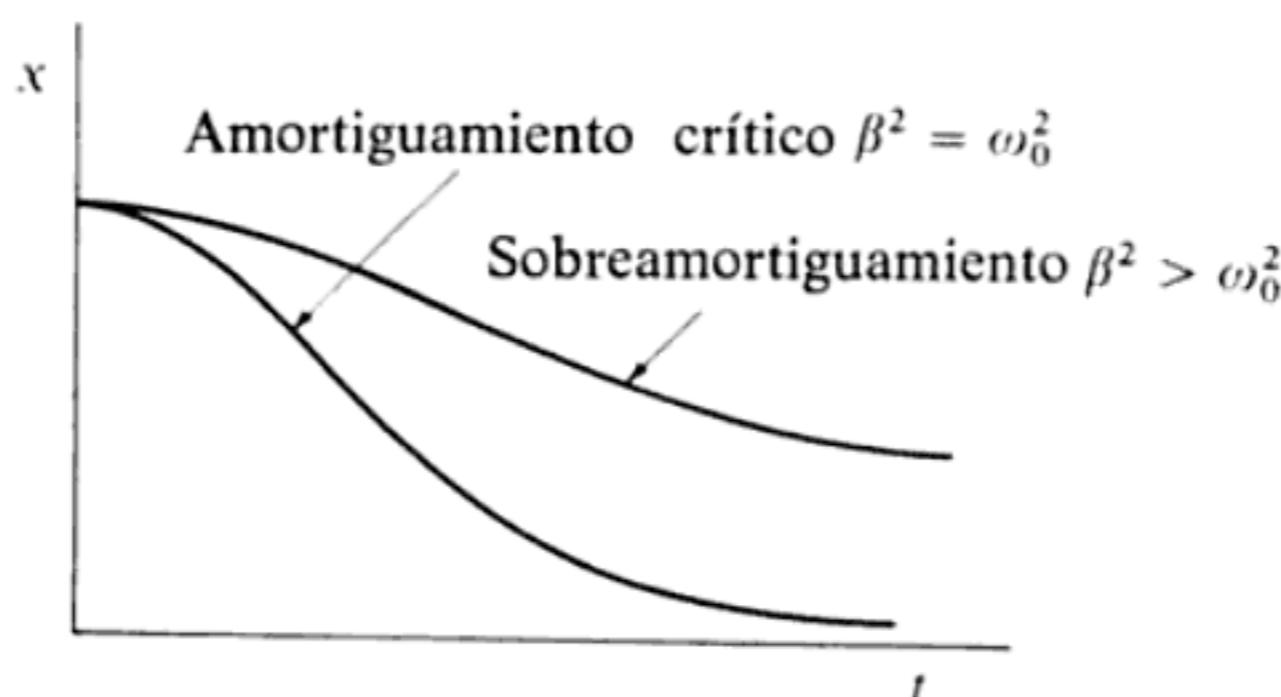


FIG. 3-10

Nótese que ω_2 no representa una «pulsación» al no ser periódico el movimiento ya que, tal como se indica en la figura 3-10, el desplazamiento tiende asintóticamente a la posición de equilibrio.

El sobreamortiguamiento se traduce en un movimiento no oscilatorio en el cual la amplitud tiende a anularse asintóticamente, pero según sea el valor inicial de la velocidad puede ocurrir que x cambie de signo antes de que el desplazamiento se aproxime al valor nulo. Si nos limitamos a considerar desplazamientos iniciales positivos, $x(0) = x_0 > 0$, existen tres casos interesantes por lo que a la velocidad inicial respecta [$\dot{x}(0) = \dot{x}_0$]:

- I. $\dot{x}_0 > 0$, entonces $x(t)$ alcanza un máximo en algún instante $t > 0$, antes de tender a cero.
- II. $\dot{x}_0 < 0$, entonces $x(t)$ tiende monótonamente a cero.
- III. $\dot{x}_0 < 0$, pero de valor absoluto suficientemente grande para que $x(t)$ cambie de signo, alcanzando un mínimo, y después tienda a cero.

En la figura 3-11 se representan estos tres casos. El plano fásico quedará dividido en seis regiones (tres para $x_0 > 0$ y tres para $x_0 < 0$), en correspondencia con los valores iniciales de la velocidad que acabamos de reseñar. En la figura 3-12 aparecen algunas trayectorias en el espacio fásico representativas de cada una de estas regiones. Puede demostrarse (véase problema 3-15) que la recta $\dot{x} = -(\beta + \omega_2)x$ separa las regiones II y III. Asimismo, es evidente que la trayectoria en el espacio fásico en el caso de velocidad inicial nula comienza en el eje x en el punto correspondiente a x_0 , atravesando después la región II hacia el origen. Los movimientos aperiódicos han de asociarse a curvas del tipo de las representadas en la figura 3-12, más que a trayectorias espirales como la de la figura 3-9, puesto que no son oscilatorios.

En el capítulo 5 trataremos de los diagramas fásicos en el caso de los sistemas oscilatorios alineales.

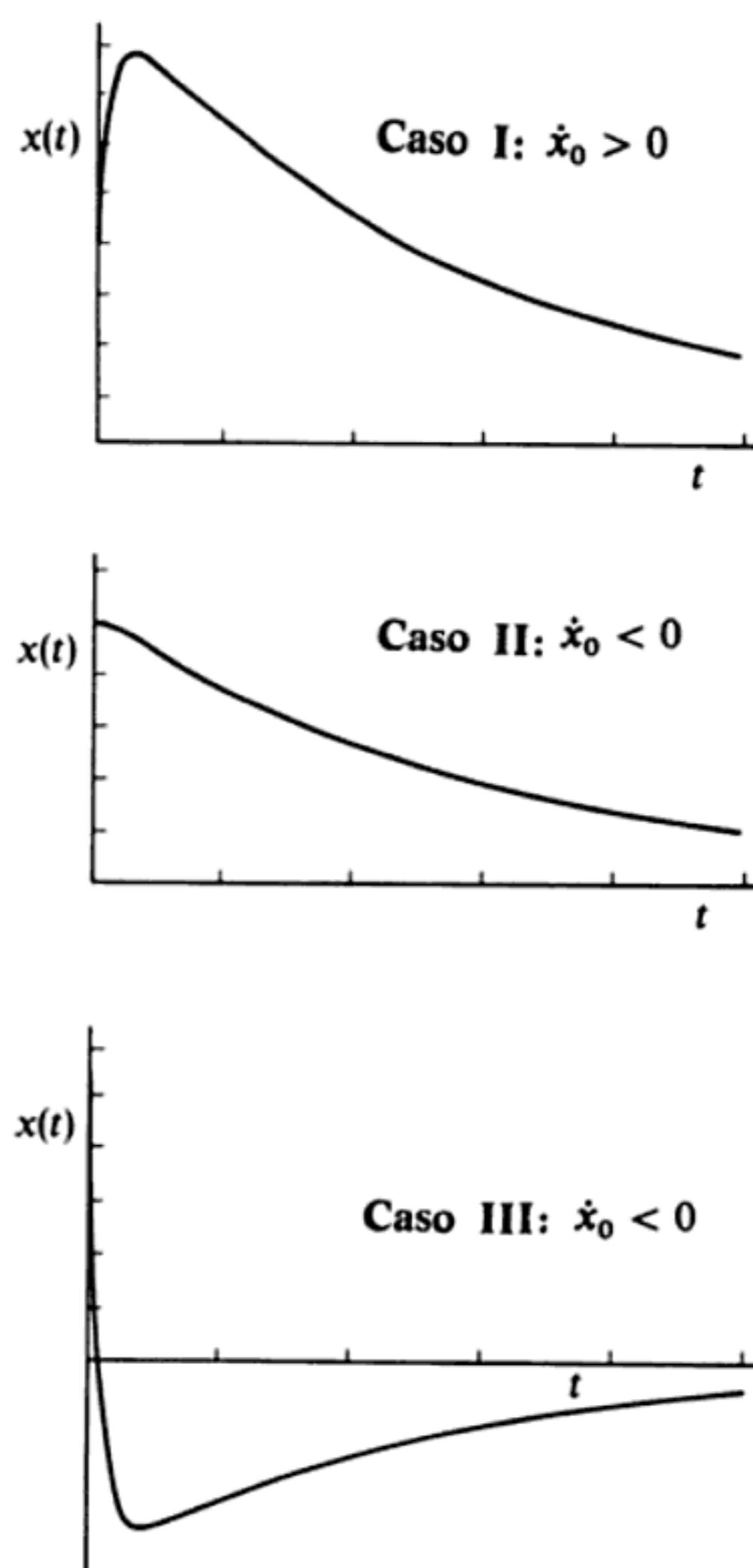


FIG. 3-11

3.6 Oscilaciones eléctricas

Hasta aquí, los fenómenos oscilatorios han sido tratados exclusivamente en lo que concierne al movimiento de una partícula. Sin embargo, los resultados obtenidos no hacen referencia exclusivamente a esta sencilla situación, ya que son muchos los *sistemas* oscilatorios que se comportan de forma muy parecida a como lo hace una partícula. Un ejemplo típico lo constituyen las oscilaciones de un circuito eléctrico, dado que las ecuaciones que las describen poseen una analogía

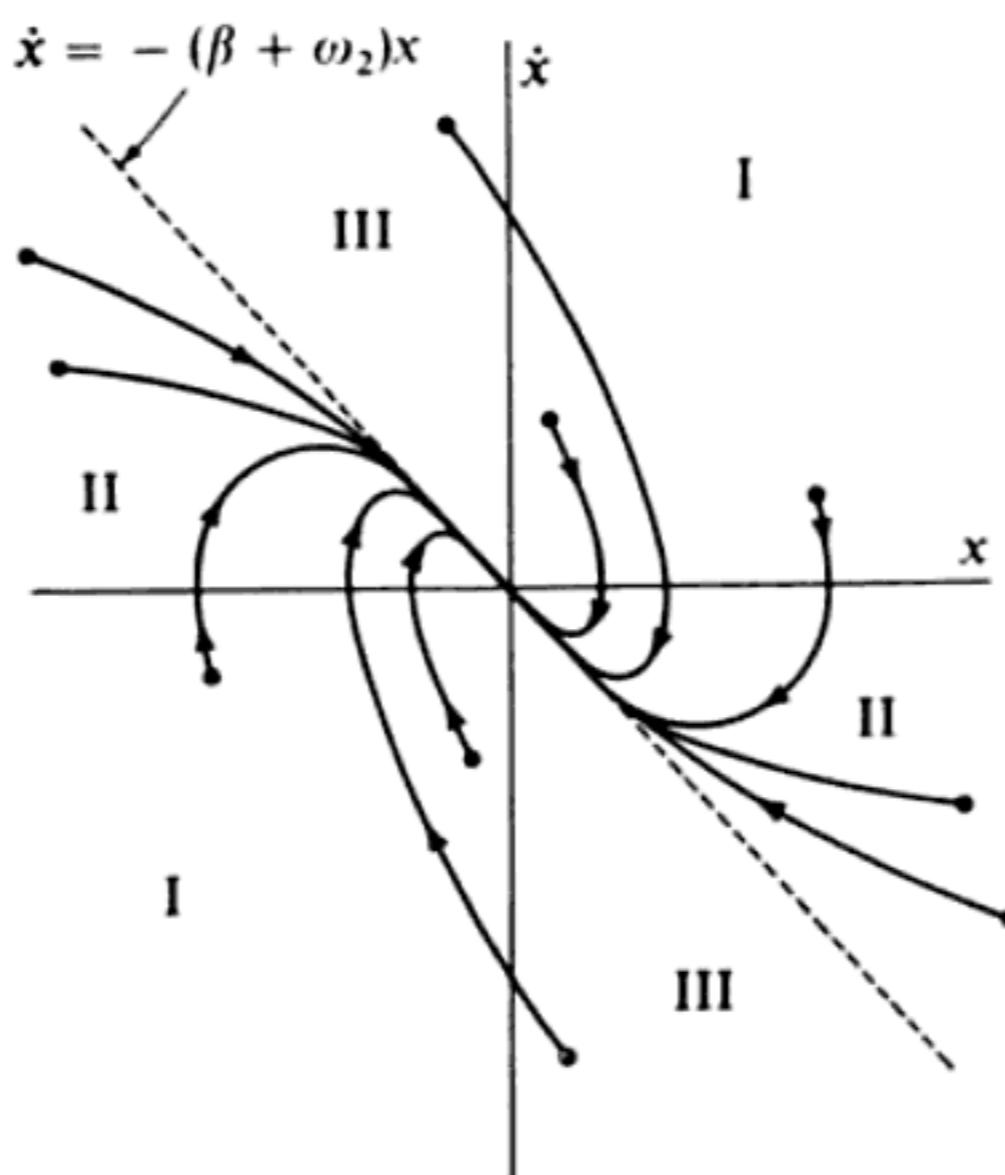


FIG. 3-12

mecánica exacta. En realidad, a causa de su gran importancia práctica, este caso se ha estudiado tan concienzudamente que con frecuencia se invierte la situación, analizándose las vibraciones mecánicas en función del «circuito eléctrico equivalente».

Consideremos el oscilador mecánico sencillo, representado en la figura 3-13a, cuya masa m se desliza sobre una plataforma lisa. Sabemos que la ecuación de movimiento es

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (3.54)$$

y que la pulsación del movimiento oscilatorio viene dada por

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.55)$$

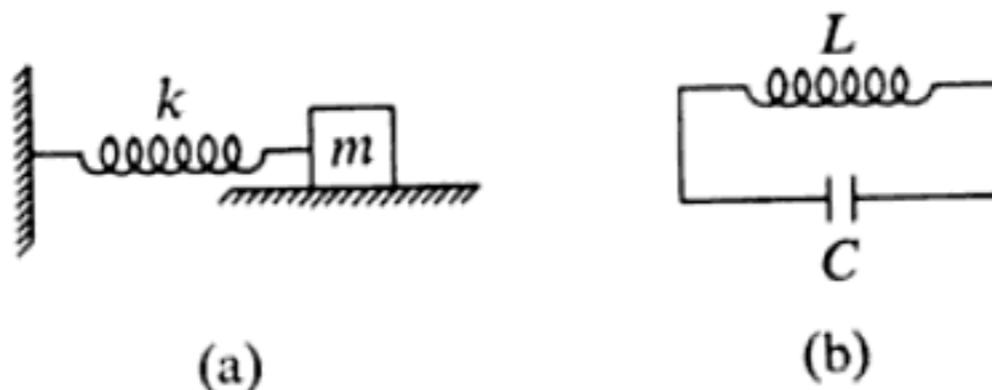


FIG. 3-13

Consideremos ahora el circuito eléctrico de la figura 3-13b. En un instante dado t la carga del condensador de capacidad C será $q(t)$ y la corriente que atraviesa la bobina de inductancia L será $I(t) = \dot{q}$. Al aplicar la ley de Kirchhoff a este circuito tendremos

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int I dt = 0 \quad (3.56)$$

o bien, en función de q ,

$$L\ddot{q} + \frac{1}{C} q = 0 \quad (3.57)$$

Esta ecuación es exactamente de la misma forma que la 3.54, por lo cual su solución será

$$q(t) = q_0 \cos \omega_0 t \quad (3.58)$$

siendo la pulsación

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (3.59)$$

y donde la fase es nula puesto que hemos establecido que $q(t=0)=q_0$ y que $I(t=0)=0$.

Si comparamos término a término las ecuaciones 3.54 y 3.57, veremos que el análogo de la masa (o inercia) es la *inductancia* y que la *elasticidad* del muelle, representada por la inversa de la constante de recuperación k , se corresponde con la *capacidad* C . En conjunto, tenemos

$$\begin{aligned} m &\rightarrow L, & x &\rightarrow q \\ \frac{1}{k} &\rightarrow C, & \dot{x} &\rightarrow I \end{aligned}$$

Derivando la expresión de $q(t)$, tenemos

$$\dot{q} = I(t) = -\omega_0 q_0 \operatorname{sen} \omega_0 t \quad (3.60)$$

y si elevamos al cuadrado $q(t)$ e $I(t)$, podemos escribir

$$\frac{1}{2} LI^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C} = \text{cte.} \quad (3.61)$$

El término $\frac{1}{2}LI^2$ representa la energía almacenada en la bobina (y se corresponde con la energía cinética), mientras que el término $\frac{1}{2}(q^2/C)$ representa la energía almacenada en el condensador (y se corresponde con la energía potencial mecánica). La suma de ambas energías es constante, lo que indica que el sistema es conservativo. Como veremos ahora, un circuito eléctrico sólo puede ser conservativo cuando no contenga resistencia (situación ideal y que nunca se da en la realidad).

El conjunto de la masa con el muelle que se ilustra en la figura 3-14a se diferencia del que aparece en la figura 3-13a en que sobre la masa del primero actúa una fuerza constante debida al peso de la misma, $F_1 = mg$. En ausencia de esta fuerza gravitatoria la posición de equilibrio se encontraría en $x=0$, pero la presencia de la misma produce una extensión del muelle $h=mg/k$, desplazando la posición de equilibrio a $x=h$. Por tanto, la ecuación de movimiento es precisamente la 3.54 sustituyendo x por $x-h$:

$$m\ddot{x} + kx = kh \quad (3.62)$$

y cuya solución es

$$x(t) = h + A \cos \omega_0 t \quad (3.63)$$

habiéndose impuesto las condiciones iniciales $x(t=0)=h+A$ y $\dot{x}(t=0)=0$.

En la figura 3-14b se representa el mismo circuito eléctrico que en la figura 3-13b al que se ha añadido una batería con fem \mathcal{E} . La ley de Kirchhoff nos da en este caso

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int I dt = \mathcal{E} = \frac{q_1}{C} \quad (3.64)$$

donde q_1 es la carga que debe aplicarse a C para producir una tensión \mathcal{E} . Si ponemos $I=\dot{q}$, tendremos

$$L\ddot{q} + \frac{q}{C} = \frac{q_1}{C} \quad (3.65)$$

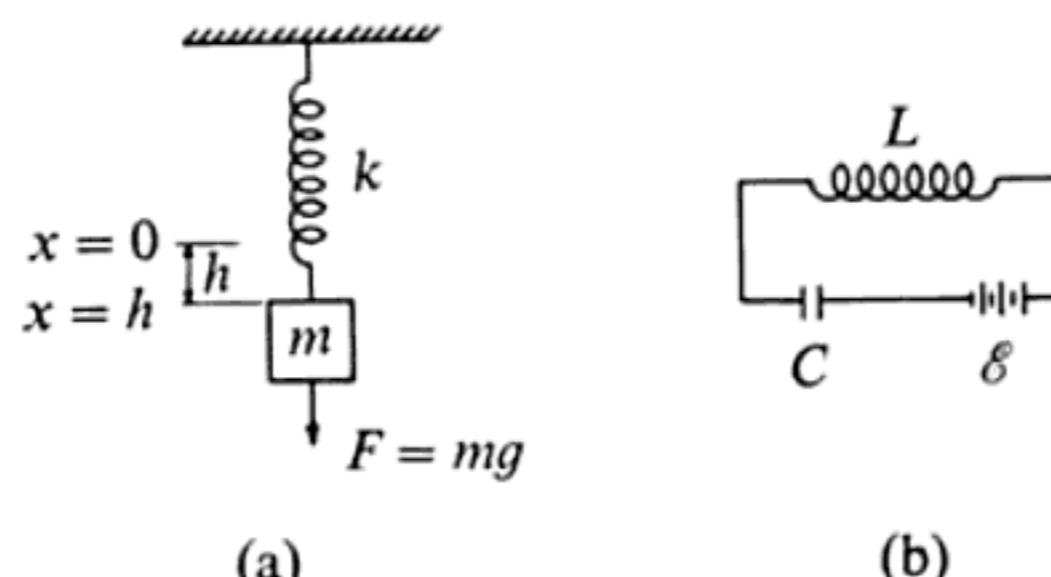


FIG. 3-14

y, si $q = q_0$ e $I = 0$ cuando $t = 0$, la solución será

$$q(t) = q_1 + (q_0 - q_1)\cos \omega_0 t \quad (3.66)$$

que es la analogía eléctrica exacta de 3.63.

La acción del amortiguamiento sobre el oscilador mecánico de la figura 3-13a puede representarse mediante un «amortiguador» lleno de algún líquido viscoso, tal como se indica en la figura 3-15a. La ecuación de movimiento es

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0. \quad (3.67)$$

y la ley de Kirchhoff nos da para el circuito eléctrico análogo de la figura 3-15b

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0 \quad (3.68)$$

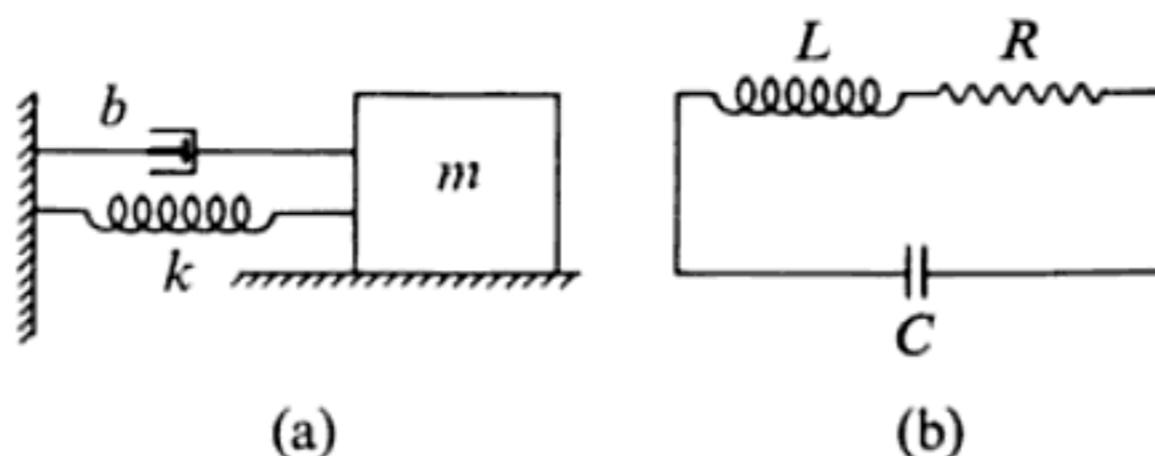


FIG. 3-15

de forma que la resistencia eléctrica R está en correspondencia con la constante de amortiguamiento b . En la tabla 3-1 se resumen las analogías entre las magnitudes mecánicas y eléctricas.

Tabla 3-1

Mecánica	Electricidad
x	q Carga
\dot{x}	$\dot{q} = I$ Corriente
m	L Inductancia
b	R Resistencia
$1/k$	C Capacidad
F	\mathcal{E} Amplitud de la fem aplicada

A causa de la naturaleza recíproca de la correspondencia entre el coeficiente de elasticidad y la resistencia eléctrica, la colocación de muelles y condensadores ha de llevarse a cabo de formas diferentes para que produzcan los mismos efectos. Por ejemplo, consideremos la masa de la figura 3-16a a la que se han sujetado dos muelles en serie. Cuando apliquemos una fuerza F , el muelle 1 se alargará una longitud $x_1 = F/k_1$, mientras que el muelle 2 se alargará una longitud $x_2 = F/k_2$, y el alargamiento total será

$$x = x_1 + x_2 = F \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) \quad (3.69)$$

La analogía eléctrica de esta expresión es (véase figura 3-16b)

$$q = \mathcal{E}(C_1 + C_2) \quad (3.70)$$

Así pues, los muelles que actúan *en serie* equivalen a los condensadores que actúan *en paralelo*. De forma similar, los muelles en paralelo se comportan igual que los condensadores en serie (véanse figuras 3-16c y d).

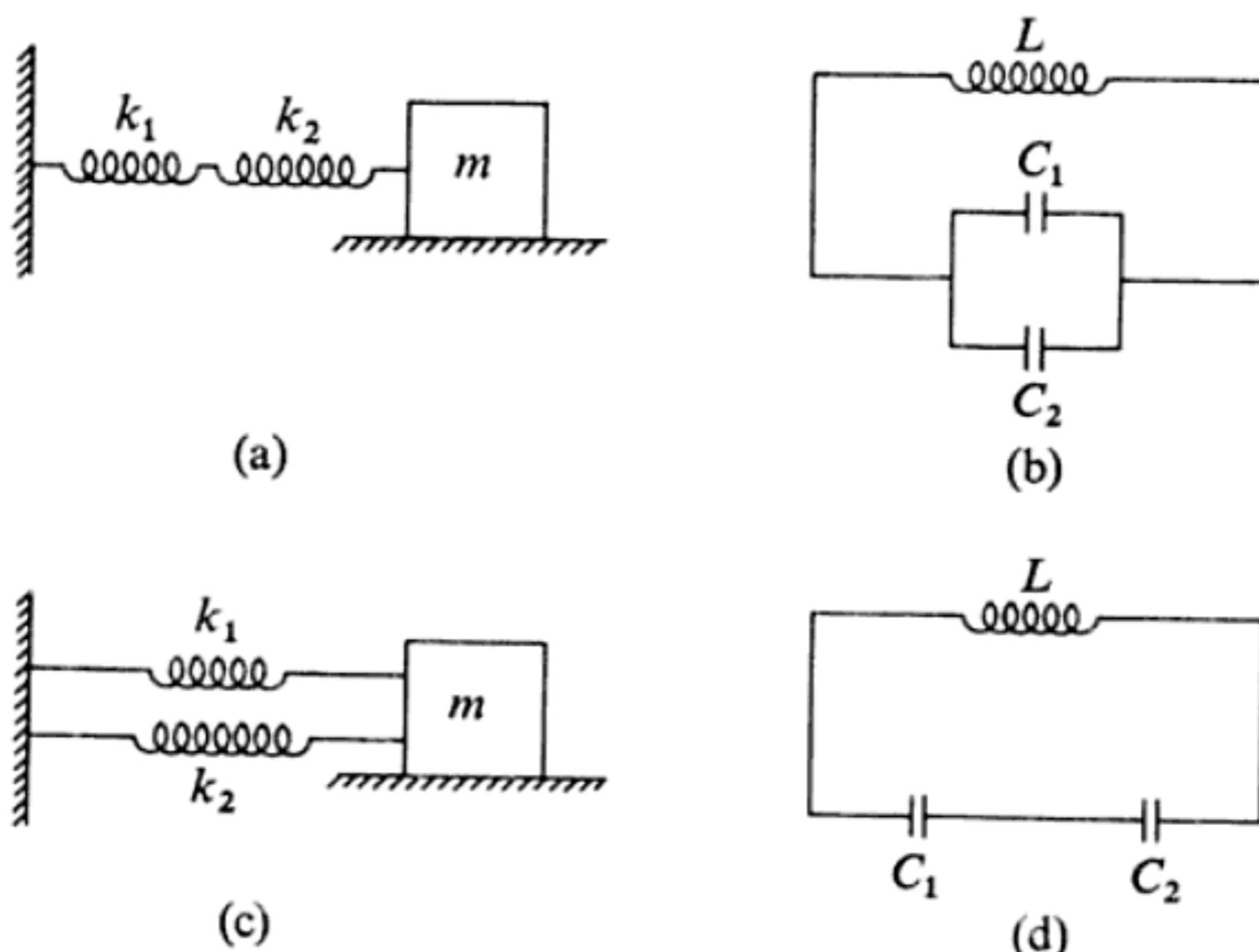


FIG. 3-16

Referencias recomendadas

Las oscilaciones armónicas constituyen un tema tratado en la mayoría de los textos de mecánica. Los autores siguientes incluyen más o menos la misma materia a nivel intermedio: BLASS (Bl62, cap. 2), BRADBURY (Br68, cap. 4), CONSTANT (Co54, vol. 1, cap. 6), HAUSER (Ha65, cap. 4), HOUSTON (Ho48, cap. 4), Joos y FREEMAN (Jo50, cap. 5), PAGE (Pa52, secc. 27), SLATER y FRANK (Sl47, cap. 2), SOMMERFELD (So50, cap. 3), SYMON (Sy60, cap. 2) y WANGNESS (Wa63, cap. 5).

Más detalles que en las obras citadas en el párrafo anterior pueden encontrarse en BECKER (Be54, cap. 7), MAGNUS (Ma65c, caps. 1 y 2) y HALFMAN (Ha62a, vol. 1, cap. 7).

LANDAU y LIFSHITZ (La60, cap. 5) tratan el tema, a nivel superior, de forma breve pero muy elegante. Una obra consagrada acerca de los fenómenos vibratorios es la de MORSE (Mo48, véase, en especial, el capítulo 2). El pequeño texto de McLACHLAN (Mc51) contiene una gran variedad de temas (en los capítulos 1 y 2 trata de los sistemas lineales monodimensionales). La excelente obra de ANDRONOW y CHAIKIN (An49, cap. 1) proporciona un extenso estudio.

Problemas

3-1. Un oscilador armónico se compone de una masa de 100 gramos sujetada a un muelle de constante recuperadora 10^4 dinas/cm. Se desplaza la masa una distancia de 3 cm, soltándose desde el reposo. Calcular: (a) la frecuencia propia ν_0 y el período τ_0 , (b) la energía total y (c) la velocidad máxima.

3-2. Supongamos que en el problema anterior el movimiento tiene lugar en un medio resistente, encontrándose que después de estar oscilando el sistema durante 10 segundos, la amplitud ha disminuido a la mitad de su valor inicial. Calcular: (a) el factor de amortiguamiento β , (b) la frecuencia ν_1 (comparar con la frecuencia no amortiguada ν_0) y (c) el decremento.

3-3. El oscilador del problema 3-1 se pone en movimiento a partir de su posición de equilibrio con una velocidad de 1 cm/s. Calcular: (a) el desplazamiento máximo y (b) la energía potencial máxima.

3-4. Calcular los valores medios temporales en un ciclo de las energías cinética y potencial de un oscilador armónico simple, demostrando que ambos son iguales. ¿Por qué cabía esperar este resultado? Calcular a continuación los valores medios *espaciales* de las energías potencial y cinética. Discutir los resultados.

3-5. Obtener una expresión de la fracción de un período completo durante la cual un oscilador armónico simple permanece en un pequeño intervalo Δx en la posición x . Representar gráficamente esta expresión en función de x para distintas amplitudes y analizar el significado físico de los resultados. Comentar los valores de las áreas abarcadas bajo las distintas curvas.

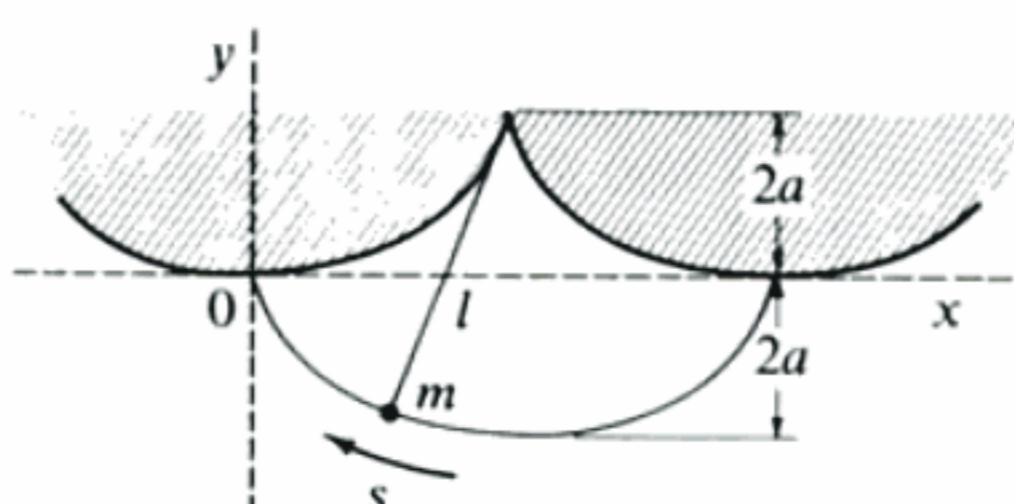
3-6. Dos masas, m_1 y m_2 , unidas entre sí por un muelle de constante recuperadora k , pueden deslizarse libremente sobre una superficie horizontal lisa. Determinar la pulsación del movimiento oscilatorio ejecutado por este sistema.

3-7. Un cuerpo de sección normal constante A y densidad ρ flota en un líquido, desplazando un volumen V en el equilibrio. Demostrar que el período de pequeñas oscilaciones en torno a la posición de equilibrio es

$$\tau = 2\pi\sqrt{V/gA}$$

donde g es la aceleración de la gravedad.

3-8. Un péndulo se suspende de uno de los puntos de retroceso de una cicloide* tallada en material rígido, tal como se muestra en la figura. La trayectoria des-



crita por la lenteja del péndulo es cicloidal y viene dada por

$$x = a(\varphi - \sin \varphi); \quad y = a(\cos \varphi - 1)$$

donde la longitud del péndulo es $l=4a$, siendo φ el ángulo girado por la circunferencia que genera la cicloide. Demostrar que las oscilaciones son isocronas de pulsación $\omega_0 = \sqrt{g/l}$, independiente de la amplitud.

3-9. Una partícula en reposo de masa m cuelga del extremo de un muelle (constante recuperadora $= k$) que se halla suspendido de un punto fijo. En el instante $t=0$ se aplica a la masa una fuerza F constante dirigida hacia abajo que actúa durante un tiempo t_0 . Demostrar que, una vez retirada la fuerza, el desplazamiento de la masa de su posición de equilibrio ($x=x_0$) es

$$x - x_0 = \frac{F}{k} [\cos \omega(t - t_0) - \cos \omega t]$$

donde $\omega^2 = k/m$.

* El lector no familiarizado con las propiedades de las cicloides deberá consultar un texto de Geometría Analítica.

- 3-10.** Demostrar que cuando la amplitud de un oscilador amortiguado se hace $1/e$ de su valor inicial después de n períodos, la pulsación debe ser aproximadamente $[1 - (8\pi^2 n^2)^{-1}]$ multiplicado por la pulsación del oscilador no amortiguado correspondiente.
- 3-11.** Deducir las expresiones de las curvas de energía y de pérdida de energía correspondientes al oscilador amortiguado que se muestran en la figura 3-7. Calcular la pérdida media de energía por unidad de tiempo (o sea, calcular la media temporal en un ciclo).
- 3-12.** Un péndulo simple consiste en una masa m suspendida de un punto fijo mediante una varilla inextensible sin peso, de longitud l . Obtener la ecuación de movimiento y, suponiendo $\sin \theta \approx \theta$, demostrar que la pulsación propia es $\omega_0 = \sqrt{g/l}$, donde g es la aceleración debida a la gravedad. Analizar el movimiento en el caso de que éste tenga lugar en un medio viscoso que produzca una fuerza resistente de $2m\sqrt{gl}\dot{\theta}$.
- 3-13.** Demostrar que la expresión 3.51 es realmente la solución del caso de amortiguamiento crítico suponiendo una solución de la forma $x(t) = y(t)\exp(-\beta t)$ y determinando la función $y(t)$.
- 3-14.** Expresar el desplazamiento $x(t)$ y la velocidad $\dot{x}(t)$ del oscilador sobre-amortiguado utilizando funciones hiperbólicas.
- 3-15.** Con relación a la figura 3-12 demostrar que la ecuación de la recta que separa las regiones II y III del plano fásico es $\dot{x} = -(\beta + \omega_2)x$. Seguir el procedimiento siguiente: Para evitar confusiones, supóngase $x_0 > 0$. Demuéstrese que si $x(t)$ se anula durante algún espacio de tiempo positivo t_1 , éste será una raíz de la ecuación

$$e^{(q_2 - q_1)t_1} = 1 - \frac{x_0(q_2 - q_1)}{\dot{x}_0 + q_2 x_0}$$

donde $q_1 = \beta - \omega_2$ y $q_2 = +\beta + \omega_2$. Demuéstrese que la condición para que t_1 sea positiva es

$$\frac{x_0}{\dot{x}_0 + q_2 x_0} \leq 0$$

lo que conduce a la ecuación de la recta buscada. ¿Qué trayectoria es la seguida por un punto representativo cuyo estado inicial es tal que $\dot{x}_0 = -(\beta + \omega_2)x_0$? Representar $x(t)$ en este caso.

- 3-16.** Estudiar el movimiento de una partícula cuando en la ecuación de movimiento 3.37 es $b < 0$ (es decir, cuando la constante de amortiguamiento es *negativa*).

- 3-17.** Calcular la frecuencia de las oscilaciones del circuito de la figura 3-15b cuando $L=0,1$ henry, $C=10$ microfarad y $R=100$ ohm.
- 3-18.** Demostrar que en un circuito $R-L-C$ cuya resistencia es pequeña el decremento logarítmico de las oscilaciones es aproximadamente $\pi R \sqrt{C/L}$.
- 3-19.** Un circuito $R-L-C$ (véase figura 3-15b) contiene una inductancia de 0,01 henry y una resistencia de 100 ohm. La frecuencia de oscilación es de 1 kHz. Si, en el instante $t=0$, la tensión en el condensador es de 10 volt y la intensidad de corriente es cero, determinar la intensidad de corriente 0,2 milisegundos más tarde.

Oscilaciones forzadas

4.1 Introducción

Vimos en el capítulo anterior que toda partícula o circuito eléctrico que experimente oscilaciones libres (es decir, no amortiguadas) seguirá en movimiento indefinidamente. Sin embargo, en la realidad existe siempre algo de rozamiento (o de resistencia eléctrica) que finalmente acaba por anular el movimiento, llevando el sistema al reposo.* Este amortiguamiento de las oscilaciones podrá evitarse cuando pueda dotarse al sistema de un mecanismo que suministre energía, procedente de una fuente exterior, en una cantidad por unidad de tiempo igual a la absorbida por el medio amortiguador; esta clase de movimientos reciben el nombre de *oscilaciones forzadas*. Como hemos preferido examinar únicamente sistemas *lineales* en esta fase de nuestra exposición, el estudio de las oscilaciones forzadas (o *mantenidas*) no presenta dificultades, siendo muchos los métodos existentes que pueden aplicarse, algunos de los cuales utilizaremos en este capítulo.

* Queda claro, pues, que un término de amortiguamiento de la forma $-b\dot{x}$ no puede representar exactamente la situación real puesto que el mismo sólo llevaría al sistema al reposo después de un tiempo *infinito*.

4.2 Oscilador sometido a una fuerza impulsora senoidal

El caso más sencillo de oscilaciones forzadas lo constituye aquel en que se aplica al oscilador una fuerza impulsora exterior que varía armónicamente con el tiempo. La fuerza total que actúa sobre la partícula será

$$F = -kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t \quad (4.1)$$

donde suponemos la existencia de una fuerza recuperadora lineal y una fuerza de amortiguamiento viscoso, además de la fuerza impulsora. La ecuación de movimiento queda

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t \quad (4.2)$$

o bien, en nuestra notación anterior,

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = A \cos \omega t \quad (4.3)$$

donde es $A = F_0/m$ y ω la pulsación de la fuerza impulsora. Como se expone en el apéndice C, la *integral general* de la ecuación 4.3 es la suma de la integral general $x_g(t)$ de dicha ecuación sin segundo miembro más una *integral particular* $x_p(t)$ de la ecuación 4.3 completa. Evidentemente $x_g(t)$ será la misma que se expresó en 3.40:

$$x_g(t) = e^{-\beta t} [A_1 \exp(\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t) + A_2 \exp(-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t)] \quad (4.4)$$

Como integral particular ensayemos

$$x_p(t) = D \cos(\omega t - \delta) \quad (4.5)$$

por sustitución en 4.3, desarrollando $\cos(\omega t - \delta)$ y $\sin(\omega t - \delta)$, lo que nos da

$$\begin{aligned} & \{A - D[(\omega_0^2 - \omega^2)\cos \delta + 2\omega\beta \sin \delta]\}\cos \omega t \\ & - \{D[(\omega_0^2 - \omega^2)\sin \delta - 2\omega\beta \cos \delta]\}\sin \omega t = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Dado que $\sin \omega t$ y $\cos \omega t$ son funciones linealmente independientes, esta ecuación sólo podrá satisfacerse en general cuando todos los coeficientes sean idénticamente nulos. Del coeficiente de $\sin \omega t$ tenemos

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{2\omega\beta}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (4.7)$$

por lo cual, podemos escribir

$$\left. \begin{aligned} \sin \delta &= \frac{2\omega\beta}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}} \\ \cos \delta &= \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}} \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

Y del coeficiente de $\cos \omega t$ tenemos

$$\begin{aligned} D &= \frac{A}{(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \delta + 2\omega\beta \sin \delta} \\ &= \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Así pues, la integral particular será

$$x_p(t) = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}} \cos(\omega t - \delta) \quad (4.10)$$

siendo

$$\delta = \arctg \left(\frac{2\omega\beta}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \quad (4.11)$$

La integral general será

$$x(t) = x_g(t) + x_p(t) \quad (4.12)$$

donde $x_g(t)$ representa los *efectos transitorios* (es decir, aquellos efectos que dependen de las condiciones iniciales), anulándose al cabo del tiempo sus términos a causa del factor $\exp(-\beta t)$. El término $x_p(t)$ representa los efectos estacionarios y contiene toda la información para el caso en que t sea grande en comparación con $1/\beta$. Así,

$$x(t \gg 1/\beta) = x_p(t)$$

La solución estacionaria es de gran importancia práctica.

La cantidad δ (véase fórmula 4.11) representa la diferencia de fase entre la fuerza impulsora y el movimiento resultante; es decir, realmente existe un retraso

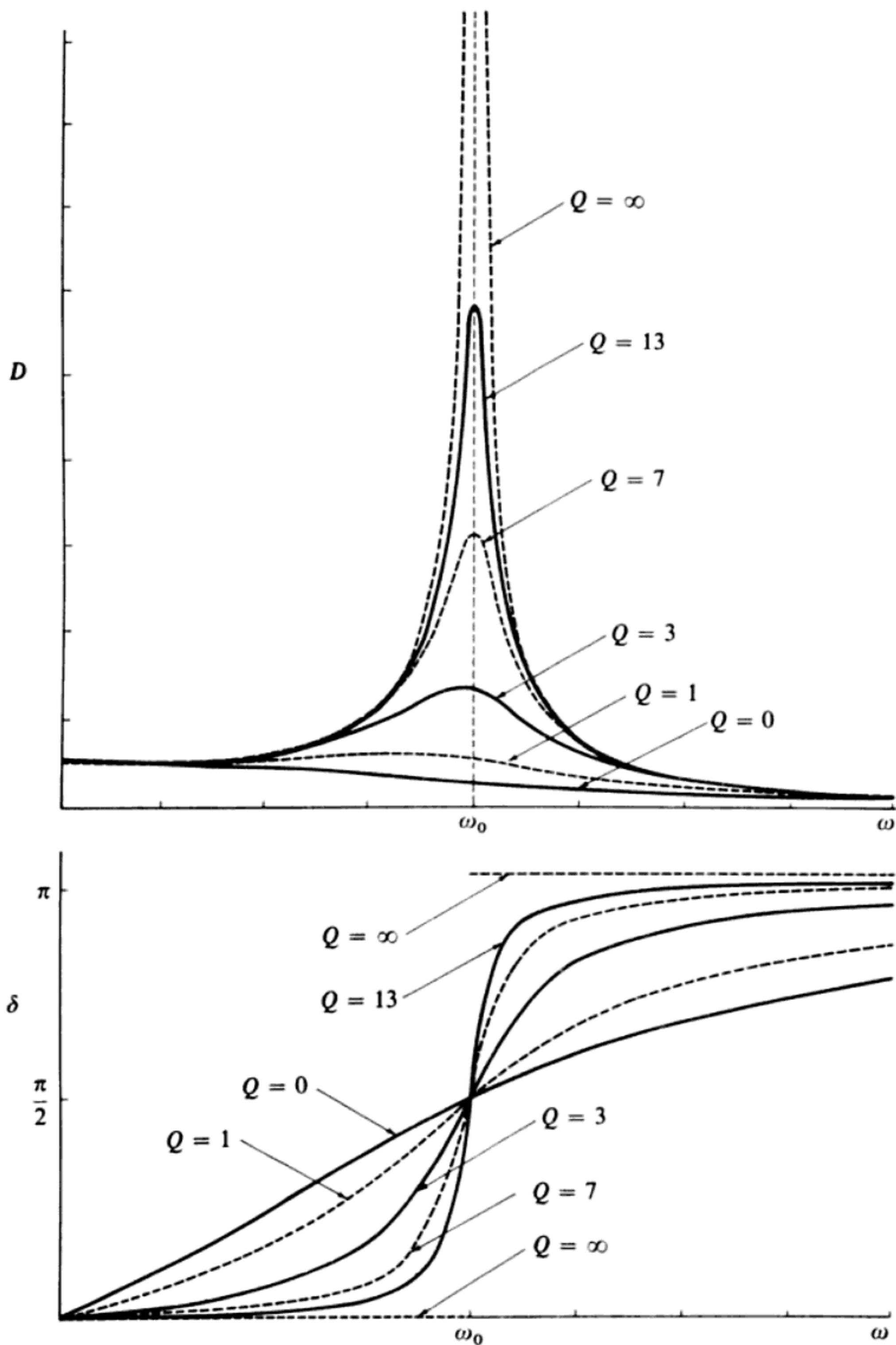


FIG. 4-1

entre la acción de la fuerza impulsora y la respuesta del sistema. Dado un valor fijo de ω_0 , cuando ω aumenta desde 0, la fase aumenta desde $\delta=0$ en $\omega=0$ hasta $\delta=\pi/2$ en $\omega=\omega_0$ y hasta π cuando $\omega \rightarrow \infty$. En la figura 4-1 se representa la variación de δ con ω .

Para hallar la pulsación ω_R para la cual la amplitud D es máxima (o sea, la *pulsación de resonancia en amplitud*), hagamos

$$\frac{dD}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_R} = 0$$

Efectuando la derivación, encontramos

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (4.13)$$

Resulta, pues, que la pulsación de resonancia disminuye cuando el factor de amortiguamiento crece. Cuando $\beta > \omega_0^2/2$ no existirá resonancia evidentemente, ya que ω_R será imaginaria y D disminuirá monótonamente a medida que ω aumente.

Comparemos ahora las pulsaciones de oscilación correspondientes a los distintos casos que hemos examinado:

(a) Oscilaciones libres, no amortiguadas:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \{ \text{fórm. 3.4} \}$$

(b) Oscilaciones libres, amortiguadas:

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2 \quad \{ \text{fórm. 3.41} \}$$

(c) Oscilaciones forzadas, amortiguadas:

$$\omega_R^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2 \quad \{ \text{fórm. 4.13} \}$$

Vemos que $\omega_0 > \omega_1 > \omega_R$.

El grado de amortiguamiento de un sistema oscilatorio se acostumbra a definir en función del «factor de calidad» o « Q » del sistema:

$$Q \equiv \frac{\omega_R}{2\beta} \quad (4.14)$$

Cuando el amortiguamiento es pequeño, Q será muy grande y la forma de la curva de resonancia se aproximará a la del oscilador no amortiguado, pudiendo, por el contrario, desaparecer completamente la resonancia cuando el amortiguamiento sea grande y Q muy pequeña. En la figura 4-1 se representan las curvas de resonancia y de fase para algunos valores de Q , en las que puede observarse que la pulsación de resonancia disminuye cuando Q disminuye (y, por tanto, aumenta el factor de amortiguamiento β). Este efecto no es, sin embargo, muy acusado, ya que la pulsación se desvía en menos del 3 %, incluso para valores de Q tan bajos como 3, siendo esta desviación del 18 %, aproximadamente, cuando $Q=1$.

En el caso de un oscilador poco amortiguado, se demuestra fácilmente que (véase problema 4-3)

$$Q \cong \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad (4.15)$$

en que $\Delta\omega$ representa el intervalo de pulsaciones que separa a los puntos de la curva de resonancia en amplitud para los cuales ésta es $1/\sqrt{2}=0,707$ de la máxima.

Los valores de Q que se encuentran en la realidad son muy variables. Así, en los sistemas mecánicos más corrientes (como altavoces) los valores se sitúan entre unas pocas unidades y unas 100, mientras que los osciladores de cristal de cuarzo pueden tener una Q del orden de 10^4 , y los circuitos eléctricos muy sintonizados, que incluyan cavidades resonantes, pueden llegar a 10^4-10^5 . Puede asimismo definirse una Q en el caso de algunos sistemas atómicos. Según la imagen clásica, la oscilación de los electrones en el interior de los átomos produce una radiación óptica, la definición de cuyas rayas espectrales está limitada por el amortiguamiento debido a la pérdida de energía por radiación (*amortiguamiento por radiación**). La anchura mínima se puede calcular clásicamente, encontrándose que es* $\Delta\omega \cong 2 \times 10^{-8}\omega$, y por tanto a este oscilador corresponde una Q de 5×10^7 aproximadamente. Los mayores valores conocidos de Q se encuentran en la resonancia que tiene lugar en los *lasers* gaseosos, aparatos** en los cuales las medidas efectuadas han dado unos valores de Q del orden de 10^{14} .

La expresión 4.13 nos da la pulsación de resonancia *en amplitud*. Pasemos ahora a calcular la frecuencia correspondiente a la resonancia *en energía cinética*.

La energía cinética es $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$, donde \dot{x} puede obtenerse de 4.10

$$\dot{x} = \frac{-A\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}} \operatorname{sen}(\omega t - \delta) \quad (4.16)$$

de forma que

$$T = \frac{mA^2}{2} \cdot \frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2} \operatorname{sen}^2(\omega t - \delta) \quad (4.17)$$

* Ver MARION (Ma65b, secciones 9.9 y 11.5).

** *Laser*: anagrama de «light amplification by stimulated emission of radiation».

Véase, p. e., A. JAVAN, E. A. BALLIK y W. L. BOND, *J. Opt. Soc. Am.* **52**, 96 (1962).

Para obtener una expresión de T que sea independiente del tiempo, calculamos el valor medio de la misma en un período completo; esto es

$$\langle T \rangle = \frac{mA^2}{2} \cdot \frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2} \langle \sin^2(\omega t - \delta) \rangle \quad (4.18)$$

Entonces, como el valor medio del cuadrado de la función seno en un período es*

$$\begin{aligned} \langle \sin^2(\omega t - \delta) \rangle &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2(\omega t - \delta) dt \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (4.19)$$

resultará

$$\langle T \rangle = \frac{mA^2}{4} \cdot \frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2} \quad (4.20)$$

El valor de ω correspondiente a $\langle T \rangle$ máximo se representa ω_E , obteniéndose de

$$\left. \frac{d\langle T \rangle}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_E} = 0 \quad (4.21)$$

por lo que, al derivar 4.20 e igualar el resultado a cero, tendremos

$$\omega_E = \omega_0 \quad (4.22)$$

de forma que la resonancia en energía cinética tiene lugar para una pulsación igual a la propia no amortiguada del sistema.

Vemos, pues, que la resonancia en amplitud ocurre para una pulsación $\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ mientras que la resonancia en energía cinética ocurre para una pulsación ω_0 . Como la energía potencial es proporcional al cuadrado de la amplitud, la resonancia en energía potencial deberá ocurrir también para una pulsación $\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$. El hecho de que las resonancias en energías cinética y potencial tengan lugar para pulsaciones diferentes es una consecuencia de que el oscilador amortiguado no es un sistema conservativo, ya que existe un intercambio continuo de energía con el mecanismo impulsor y una transferencia de energía al medio amortiguador.

* El lector deberá comprobar que, en un período, el valor medio de $\sin^2 \omega t$ o de $\cos^2 \omega t$ es igual a $\frac{1}{2}$: $\langle \sin^2 \omega t \rangle = \langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$, lo que constituye un resultado muy importante.

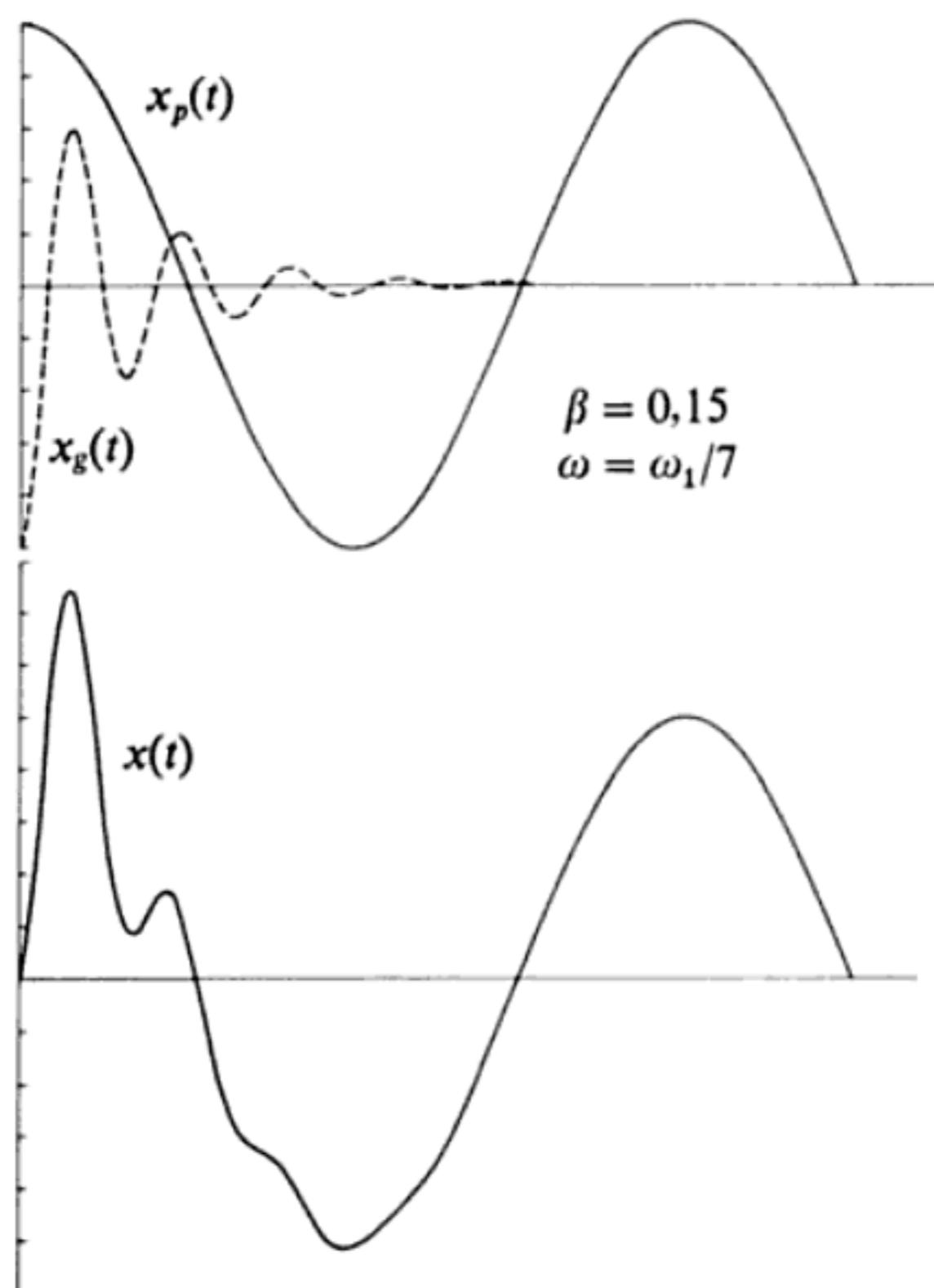


FIG. 4-2a

4.3 Efectos transitorios

Aunque en la sección precedente hayamos hecho hincapié en el movimiento estacionario del oscilador forzado, los efectos transitorios son a menudo de importancia considerable, particularmente en ciertos tipos de circuitos eléctricos.

Los detalles del movimiento durante el tiempo anterior a la desaparición de los efectos transitorios (o sea, cuando $t \lesssim 1/\beta$) dependen mucho del estado del oscilador en el instante en que comienza a aplicarse la fuerza impulsora y también de los valores relativos de la pulsación impulsora ω y la pulsación de las oscilaciones libres amortiguadas $\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$. En la figura 4-2 se representa el movimiento transitorio de un oscilador cuando se aplican pulsaciones impulsoras inferiores y superiores a $\omega_1 = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$. Cuando $\omega < \omega_1$ (figura 4-2a), la respuesta transitoria del sistema distorsiona considerablemente la forma senoidal de la función fuerza durante el intervalo de tiempo inmediatamente siguiente a la aplicación de la fuerza impulsora, mientras que cuando $\omega > \omega_1$ (figura 4-2b), el efecto es una modulación de la función fuerza con poca distorsión de las oscilaciones senoidales de alta frecuencia.

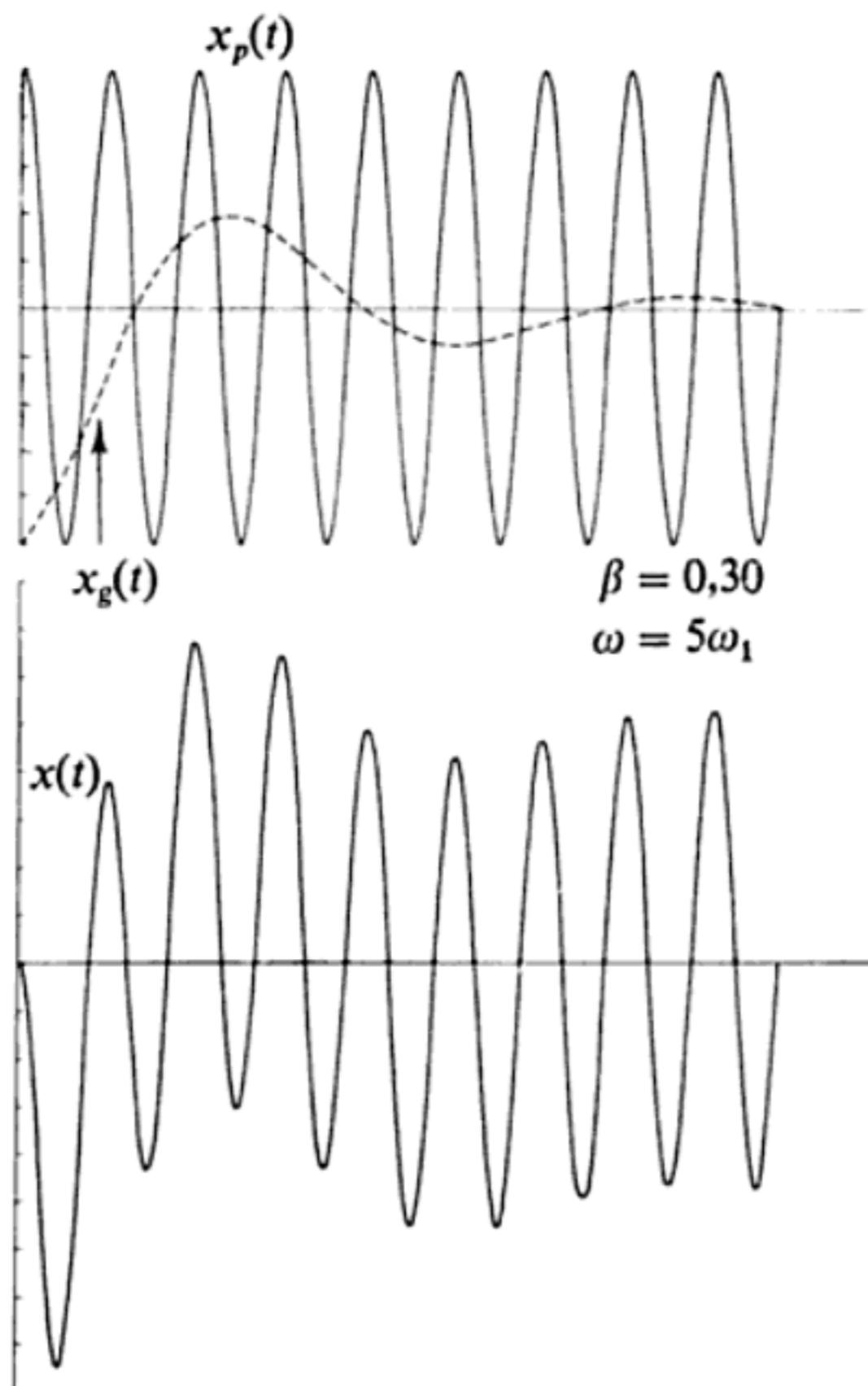


FIG. 4-2b

4.4 Oscilaciones eléctricas forzadas

En la figura 4-3 se muestra el circuito eléctrico equivalente al oscilador que hemos tratado. La ecuación de este circuito es

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = \mathcal{E}_0 \cos \omega t \quad (4.23)$$

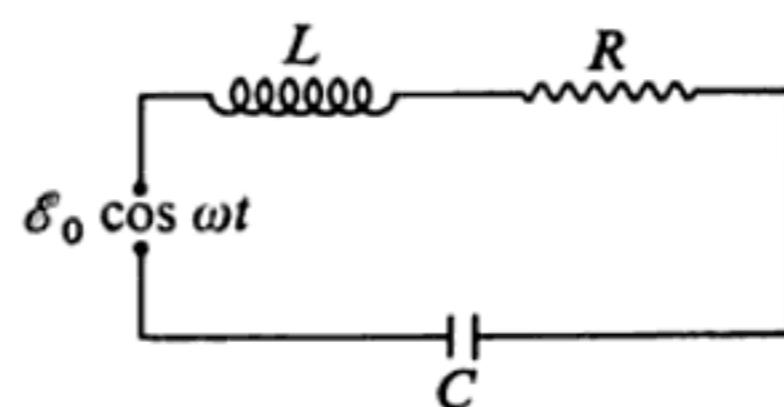


FIG. 4-3.

Será conveniente utilizar en lo sucesivo una herramienta matemática adecuada para simplificar los cálculos. De acuerdo con la fórmula de Euler (ap. B, B.13a) toda función exponencial compleja puede expresarse como sigue

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t \quad (4.24)$$

De aquí, la parte real de $\exp(i\omega t)$ será

$$\operatorname{Re} e^{i\omega t} = \cos \omega t \quad (4.25)$$

Por lo tanto, podemos escribir $\exp(i\omega t)$ en lugar de $\cos \omega t$, si dejamos sobreentendido que únicamente habrá de tenerse en cuenta la parte real de las expresiones resultantes cuando éstas se apliquen a los problemas reales. Una de las varias ventajas de este procedimiento se hace evidente al derivar $\exp(i\omega t)$ respecto del tiempo

$$\frac{d}{dt} e^{i\omega t} = i\omega e^{i\omega t}$$

O sea, el operador d/dt puede sustituirse simplemente por $i\omega$.

La ecuación 4.23 podrá escribirse ahora

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C} q = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t} \quad (4.26)$$

Dado que, al manejar circuitos eléctricos, rara vez se mide directamente la carga de un condensador, sino que la magnitud que generalmente interesa es la *intensidad de corriente*, o simplemente *corriente*, podemos derivar 4.26 respecto al tiempo, con lo cual, recordando que $\dot{q}(t) = I(t)$, tendremos

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C} I = i\omega \mathcal{E}_0 e^{i\omega t} \quad (4.27)$$

Como la fem aplicada es armónica, probaremos una solución estacionaria que sea de la misma forma, es decir,

$$I(t) = I_0 e^{i\omega t} \quad (4.28)$$

donde I_0 puede ser compleja. Al sustituir esta expresión en 4.27 resulta

$$\left(-L\omega^2 + iR\omega + \frac{1}{C} \right) I_0 e^{i\omega t} = i\omega \mathcal{E}_0 e^{i\omega t} \quad (4.29)$$

y dividiendo por $i\omega \exp(i\omega t)$ se obtiene

$$\left[R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right] I_0 = \mathcal{E}_0 \quad (4.30)$$

Esta ecuación tendrá la misma forma que la ley de Ohm, $RI = \mathcal{E}$, si, en el lugar de la resistencia normal, identificamos el coeficiente de la amplitud de corriente con una magnitud que llamaremos *impedancia* Z :

$$ZI_0 = \mathcal{E}_0 \quad (4.31)$$

donde

$$Z = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (4.32)$$

La impedancia de un circuito está compuesta de una parte real y una parte imaginaria. La parte real es la resistencia R y la parte imaginaria es la *reactancia* X . A su vez, la reactancia se compone de la reactancia *inductiva*, $X_L = \omega L$, y de la reactancia *capacitiva*, $X_C = -1/\omega C$. El hecho de que la impedancia sea compleja quiere decir que generalmente la corriente no estará en fase con la fem aplicada (véase más adelante).

La impedancia puede escribirse en función de un módulo y un argumento

$$Z = |Z|e^{i\phi} \quad (4.33)$$

donde

$$|Z| = \left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.34a)$$

y

$$\phi = \arctg \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right) \quad (4.34b)$$

Con esto, la intensidad de corriente puede expresarse

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{|Z|} e^{i(\omega t - \phi)} \quad (4.35)$$

y como únicamente la parte real de esta expresión tiene significado físico, la corriente auténtica será

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{|Z|} \cos(\omega t - \phi) \quad (4.36)$$

De la forma de esta expresión resulta evidente que $I(t)$ alcanzará su valor máximo cuando $|Z|$ sea mínimo, es decir, cuando $\omega L - 1/\omega C = 0$. Por tanto, la condición de resonancia en intensidad es

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (4.37)$$

que es idéntica a la obtenida en otro lugar para el caso del circuito $L-C$ en serie (fórmula 3.59). Asimismo, de 4.34b resulta que $\phi=0$ cuando hay resonancia, debiendo notarse que, en tal situación, la reactancia se anula y la impedancia se hace puramente resistiva.

El significado del ángulo de fase ϕ es el siguiente:

- $\phi > 0$: La intensidad alcanza su valor máximo *después* que la tensión; es decir, la corriente está *retrasada* respecto de la tensión.
- $\phi < 0$: La intensidad alcanza su valor máximo *antes* que la tensión; es decir, la corriente está *adelantada* respecto de la tensión.
- $\phi = 0$: La tensión y la corriente están *en fase*; es decir, el circuito es *resonante*.

En un circuito $R-L-C$ la energía es alternativamente almacenada y liberada por la bobina y el condensador, pero es *disipada* por efecto Joule a través de la resistencia. La cantidad de energía que se disipa por unidad de tiempo es la *potencia disipada*, cuyo valor instantáneo es*

$$P(t) = [\operatorname{Re} I(t)][\operatorname{Re} \mathcal{E}(t)] \quad (4.38)$$

* Para calcular una cantidad física real, como la potencia, debemos utilizar siempre las componentes reales de la expresión. O sea, $P(t)$ es el producto de la *parte real* de $I(t)$ por la *parte real* de $\mathcal{E}(t)$; $P(t)$ no es $\operatorname{Re}(I\mathcal{E})$.

Una magnitud de mayor utilidad es la potencia *media* disipada, es decir, la media temporal de $P(t)$ en un ciclo completo

$$\langle P \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau P(t) dt \quad (4.39)$$

Como es

$$\operatorname{Re} \mathcal{E}(t) = |\mathcal{E}_0| \cos \omega t \quad (4.40)$$

de manera que

$$\begin{aligned} I(t) &= I_0 e^{i\omega t} \\ &= \frac{\mathcal{E}_0}{|Z|} e^{i(\omega t - \phi)} \end{aligned} \quad (4.41)$$

y, por otra parte,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} I(t) &= \frac{\mathcal{E}_0}{|Z|} \cos(\omega t - \phi) \\ &= |I_0| \cos(\omega t - \phi) \end{aligned} \quad (4.42)$$

resulta

$$\langle P \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau |I_0| \cdot |\mathcal{E}_0| \cos \omega t \cos(\omega t - \phi) dt \quad (4.43)$$

Desarrollando $\cos(\omega t - \phi)$ y calculando las dos integrales resultantes

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} |I_0| \cdot |\mathcal{E}_0| \cos \phi \quad (4.44)$$

En un circuito puramente resistivo, la potencia media disipada es igual a $\frac{1}{2} |I_0| \cdot |\mathcal{E}_0|$; y el otro factor que aparece en la expresión de $\langle P \rangle$, es decir, $\cos \phi$, recibe el nombre de *factor de potencia* (f.p.) del circuito. De forma explícita

$$\text{f.p.} = \cos \phi = \frac{R}{\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{R}{|Z|} \quad (4.45)$$

La Q de un circuito eléctrico se define en función de la pulsación de resonancia *en intensidad*.* En el caso del circuito $R-L-C$ en serie de la figura 4-3, tenemos

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 R C} \quad (4.46)$$

puesto que $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Por lo tanto, el factor de potencia puede expresarse como sigue

$$\text{f.p.} = \frac{R}{|Z|} = \left[1 + Q^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (4.47)$$

En la figura 4-4 se representan las curvas del factor de potencia, mediante las cuales quedan mejor representadas las características de resonancia del circuito $R-L-C$ en serie. La anchura total de cada una de las curvas medida entre los puntos en que $R/|Z| = 1/\sqrt{2}$ (los puntos de *potencia mitad*) viene dada por

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} \quad (4.48)$$

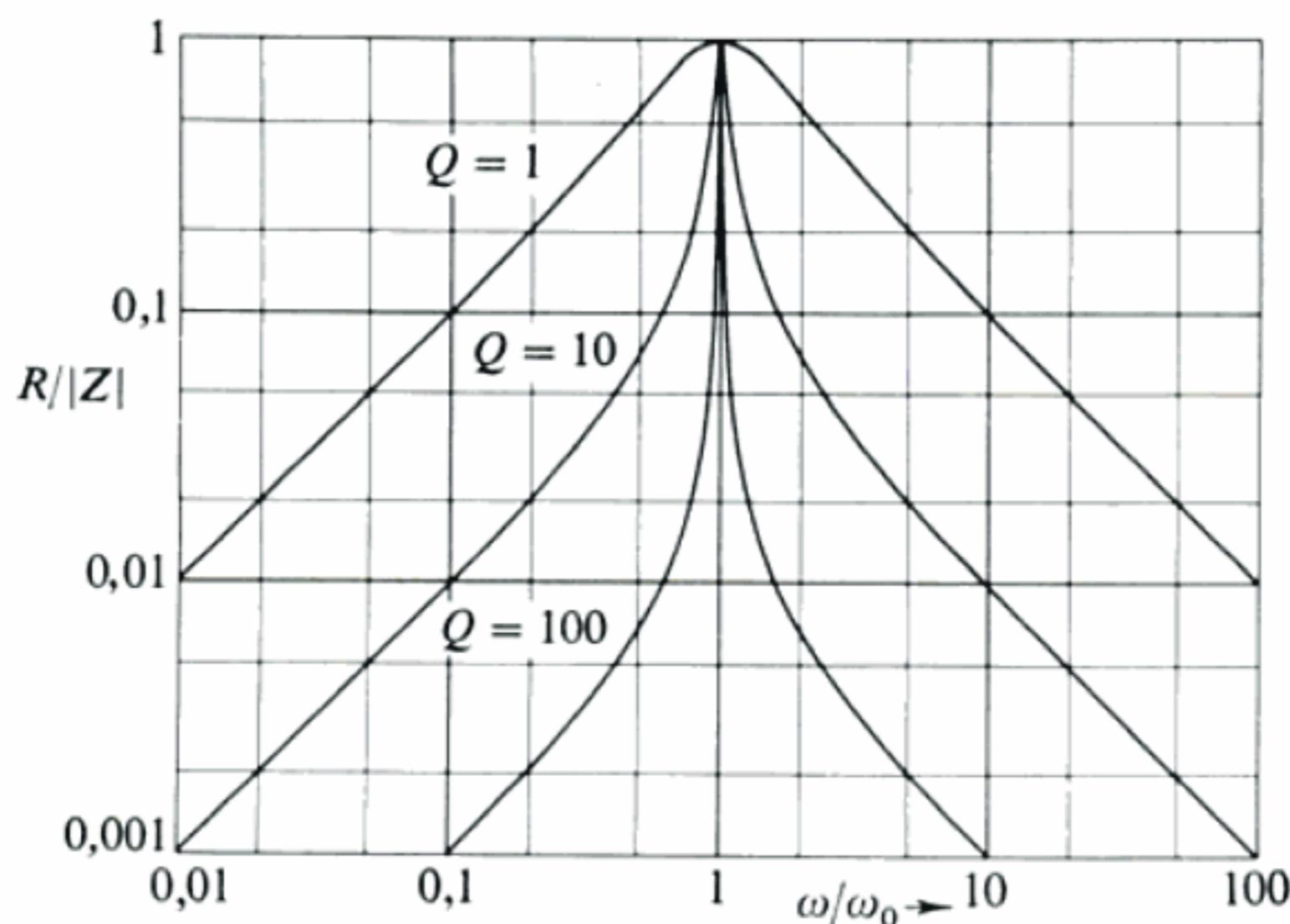


FIG. 4-4

* Existe, por tanto, una diferencia entre los casos mecánico y eléctrico. En el primero, Q se define en función de la resonancia en amplitud (4.14): $Q = \omega_R/2\beta$. En el segundo, al importarnos más la *corriente* que la *carga*, la pulsación de resonancia interesante será ω_0 y no ω_R ; la resonancia en intensidad se corresponde con la resonancia en energía cinética (o velocidad) del caso mecánico. En el caso de un sistema de Q grande es $\omega_R \approx \omega_0$, no resultando esta distinción de tanta importancia.

La *anchura de banda* del circuito es

$$\text{anchura de banda} = \Delta v = \frac{\omega_0}{2\pi Q} = \frac{R}{2\pi L} \quad (4.49)$$

En el caso de que R , L y C se conecten de forma distinta a la disposición en serie de la figura 4-3, las distintas cantidades que hemos calculado adquirirán expresiones diferentes. En los problemas se examinan otros circuitos de interés.

4.5 Principio de superposición. Las series de Fourier

Las oscilaciones que hemos estudiado obedecen a una ecuación diferencial de la forma

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + a \frac{d}{dt} + b \right) x(t) = A \cos \omega t \quad (4.50)$$

La expresión entre paréntesis del primer miembro es un *operador lineal* que podemos representar por \mathbf{L} . Para una función fuerza del tiempo cualquiera, la ecuación de movimiento puede escribirse

$$\mathbf{L}x = F(t) \quad (4.51)$$

Una propiedad muy importante de los operadores lineales es que cumplen el *principio de superposición*, como consecuencia del hecho de ser distributivo; o sea,

$$\mathbf{L}(x_1 + x_2) = \mathbf{L}(x_1) + \mathbf{L}(x_2) \quad (4.52)$$

Por tanto, cuando tengamos dos soluciones, $x_1(t)$ y $x_2(t)$, correspondientes a dos funciones fuerza diferentes, $F_1(t)$ y $F_2(t)$,

$$\mathbf{L}x_1 = F_1(t), \quad \mathbf{L}x_2 = F_2(t) \quad (4.53)$$

podremos sumar estas ecuaciones (multiplicadas por las constantes arbitrarias α_1 y α_2) obteniendo

$$\mathbf{L}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 F_1(t) + \alpha_2 F_2(t) \quad (4.54)$$

Evidentemente, podemos extender este razonamiento a un conjunto de soluciones $x_n(t)$, que correspondan cada una de ellas a una $F_n(t)$ dada:

$$\mathbf{L} \left(\sum_{n=1}^N x_n x_n(t) \right) = \sum_{n=1}^N x_n F_n(t) \quad (4.55)$$

Esta ecuación es precisamente la 4.51, sin más que identificar

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=1}^N \alpha_n x_n(t) \\ F(t) &= \sum_{n=1}^N \alpha_n F_n(t) \end{aligned} \quad (4.56)$$

Cuando cada una de las $F_n(t)$ sea una función armónica del tiempo, como $\cos \omega_n t$, la solución $x_n(t)$ correspondiente será de la forma dada por 4.10; por lo tanto, si $F(t)$ es de la forma

$$F(t) = \sum_n \alpha_n \cos(\omega_n t - \phi_n) \quad (4.57)$$

la solución estacionaria es

$$x(t) = \frac{1}{m} \sum_n \frac{\alpha_n}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + 4\omega_n^2 \beta^2}} \cos(\omega_n t - \phi_n - \delta_n) \quad (4.58)$$

donde

$$\delta_n = \arctg \left(\frac{2\omega_n \beta}{\omega_0^2 - \omega_n^2} \right) \quad (4.59)$$

Es evidente que podremos escribir soluciones similares en el caso de que $F(t)$ esté representada por una serie de términos $\sin(\omega_n t - \phi_n)$. Llegamos así a la importante conclusión de que si una función fuerza cualquiera $F(t)$ puede expresarse mediante una serie (finita o infinita) de términos armónicos, la solución completa podrá asimismo escribirse en forma de una serie similar de términos armónicos. Es éste un resultado de gran utilidad ya que, según el teorema de Fourier, toda función periódica, cualquiera que sea su forma (sometida a ciertas condiciones no muy restrictivas) puede representarse mediante una serie de términos armónicos.* Así pues, en el caso más corriente en que $F(t)$ sea periódica, de período $\tau = 2\pi/\omega$,

$$F(t + \tau) = F(t) \quad (4.60)$$

* Las series de Fourier se tratan nuevamente en la sección 14.7.

tendremos

$$F(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \operatorname{sen} n\omega t) \quad (4.61)$$

donde

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\tau} \int_0^\tau F(t') \cos n\omega t' dt' \\ b_n &= \frac{2}{\tau} \int_0^\tau F(t') \operatorname{sen} n\omega t' dt' \end{aligned} \right\} \quad (4.62)$$

O bien, como $F(t)$ tiene un período τ , podemos sustituir los límites de integración 0 y τ por los límites $-\frac{1}{2}\tau = -\pi/\omega$ y $+\frac{1}{2}\tau = +\pi/\omega$:

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{\omega}{\pi} \int_{-\pi/\omega}^{+\pi/\omega} F(t') \cos n\omega t' dt' \\ b_n &= \frac{\omega}{\pi} \int_{-\pi/\omega}^{+\pi/\omega} F(t') \operatorname{sen} n\omega t' dt' \end{aligned} \right\} \quad (4.62a)$$

Antes de estudiar la respuesta de los sistemas amortiguados a otros tipos de funciones fuerza (en la sección siguiente), daremos dos ejemplos de la representación de Fourier de funciones periódicas.

◆ Ejemplo 4.5(a) Fuerza impulsora en diente de sierra

En la figura 4-5 se representa una función diente de sierra. En este caso $F(t)$ es una función *ímpar*, ya que $F(-t) = -F(t)$, cuya expresión es

$$F(t) = A \cdot \frac{t}{\tau} = \frac{\omega A}{2\pi} t, \quad -\tau/2 < t < \tau/2 \quad (1)$$

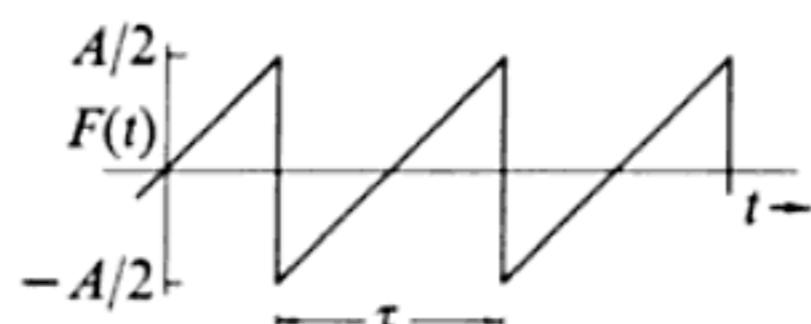


FIG. 4-5

Por ser $F(t)$ impar, todos los coeficientes a_n son nulos, mientras que los b_n vienen dados por

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{\omega^2 A}{2\pi^2} \int_{-\pi/\omega}^{+\pi/\omega} t' \operatorname{sen} n\omega t' dt' \\ &= \frac{\omega^2 A}{2\pi^2} \left[-\frac{t' \cos n\omega t'}{n\omega} + \frac{\operatorname{sen} n\omega t'}{n^2 \omega^2} \right]_{-\pi/\omega}^{+\pi/\omega} \\ &= \frac{\omega^2 A}{2\pi^2} \cdot \frac{2\pi}{n\omega^2} \cdot (-1)^{n+1} = \frac{A}{n\pi} (-1)^{n+1} \end{aligned} \quad (2)$$

donde el factor $(-1)^{n+1}$ da cuenta del hecho de que

$$-\cos n\pi = \begin{cases} +1, & n \text{ impar} \\ -1, & n \text{ par} \end{cases} \quad (3)$$

Por lo tanto, tenemos

$$F(t) = \frac{A}{\pi} \left[\operatorname{sen} \omega t - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\omega t + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3\omega t - \dots \right] \quad (4)$$

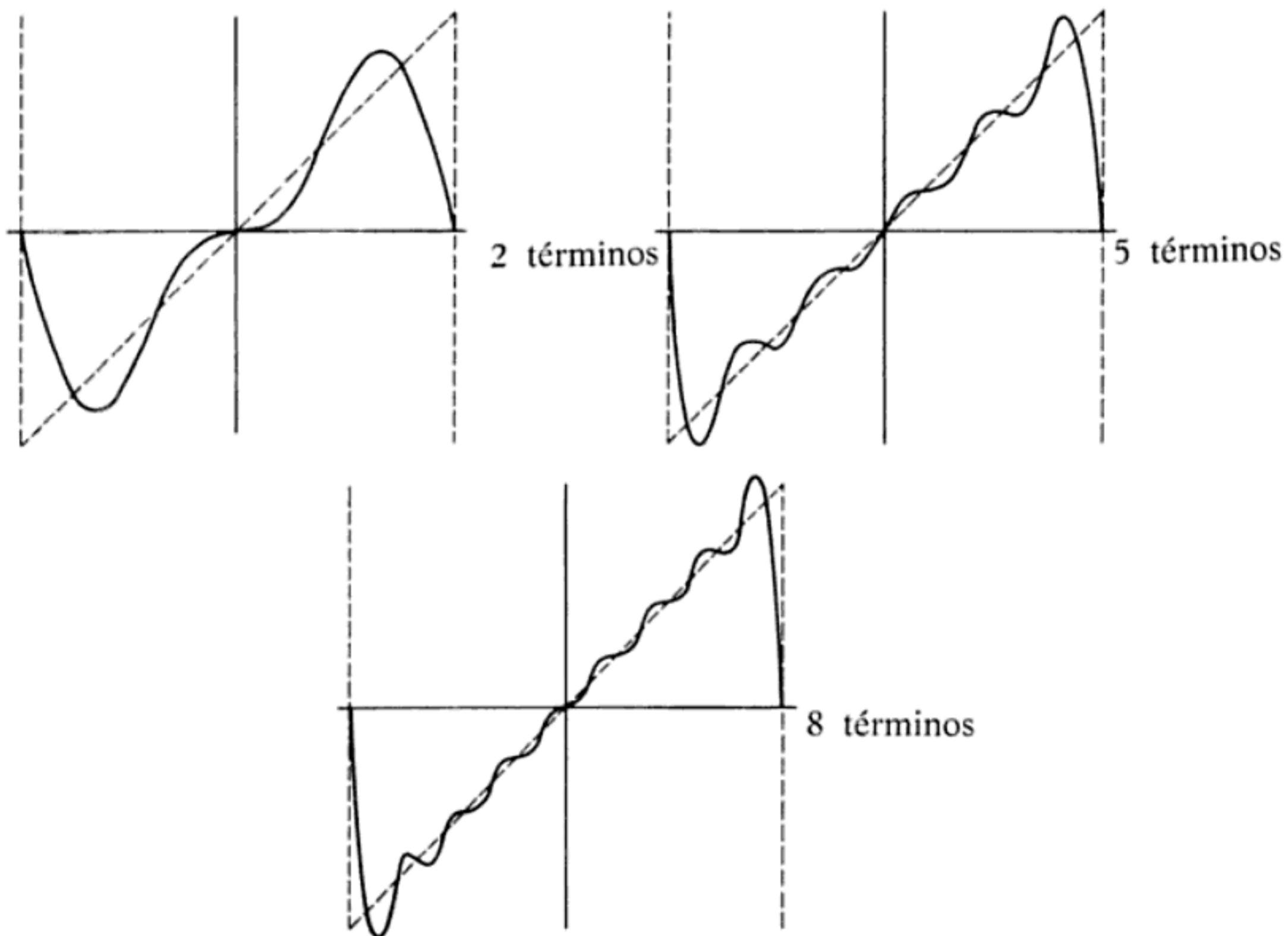


FIG. 4-6

En la figura 4-6 se muestran los resultados según que tomemos dos, cinco u ocho términos del desarrollo y en ella puede verse claramente que la convergencia hacia la función diente de sierra no es muy rápida. Es preciso que hagamos aquí dos observaciones acerca de este desarrollo. En los puntos de discontinuidad ($t = \pm\pi/2$) la serie da el valor medio de la función (cero, en este caso) y en la zona inmediatamente contigua a dichos puntos el desarrollo «sobre pasa» el valor auténtico. Esto último constituye el llamado *fenómeno de Gibbs** que tiene lugar cualquiera que sea el orden de aproximación. Este exceso de Gibbs vale aproximadamente un 9 % a cada uno de los lados de toda discontinuidad, incluso en el límite de una serie infinita.

◆ Ejemplo 4.5(b) Fuerza impulsora en forma de media sinusode

Consideremos la función representada en la figura 4-7 compuesta de las porciones positivas de una función senoidal. (Una función como ésta representa, por ejemplo, la salida de un circuito rectificador de media onda.) Para el primer período completo tenemos

$$F(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} \omega t, & 0 < t < \pi/\omega \\ 0, & \pi/\omega < t < 2\pi/\omega \end{cases} \quad (1)$$

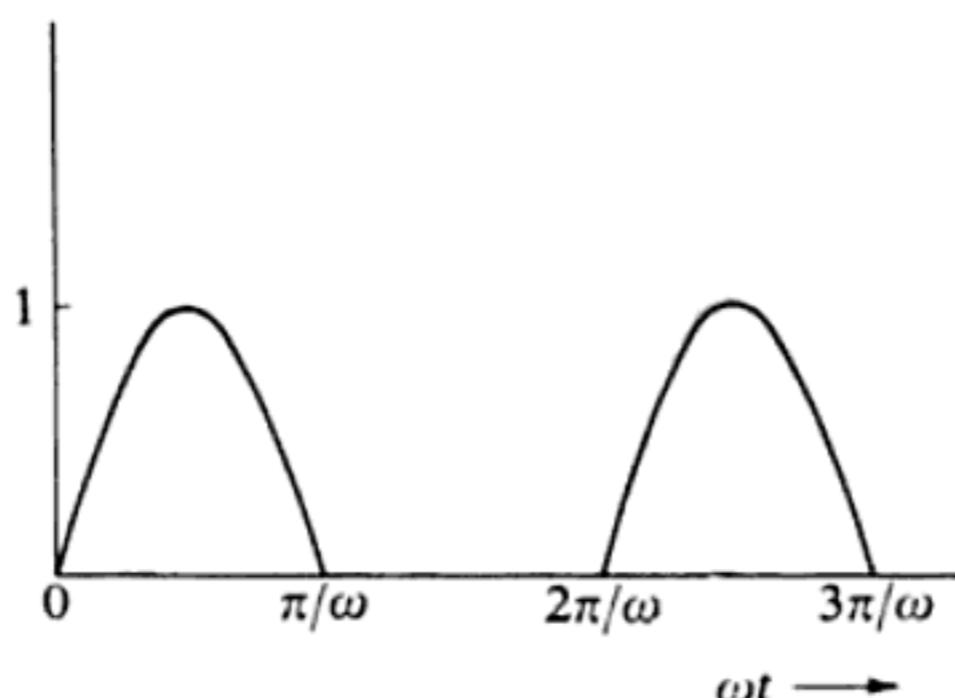


FIG. 4-7

* Josiah WILLARD GIBBS (1839-1903) descubrió empíricamente este efecto en 1898. Un estudio detallado puede encontrarse, p. e., en DAVIS (Da63, págs. 113-118). El exceso es en realidad del 8,9490...%.

El cálculo de los coeficientes de Fourier nos da los resultados siguientes:

$$a_r = \begin{cases} -\frac{2}{\pi(r^2 - 1)}, & r \text{ par (ó 0)} \\ 0, & r \text{ impar} \end{cases}$$

$$b_1 = \frac{1}{2}$$

$$b_r = 0, \quad r \geq 2$$

La curva de trazo continuo de la figura 4-8 representa la función

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{2}a_0 + b_1 \sin \omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_4 \cos 4\omega t \\ &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin \omega t - \frac{2}{3\pi} \cos 2\omega t - \frac{2}{15\pi} \cos 4\omega t \end{aligned} \quad (2)$$

mientras que la de trazo discontinuo es la función exacta. Es evidente que incluso unos pocos términos de los primeros del desarrollo dan una aproximación a la función bastante ajustada; la función original es ahora «más suave» que la diente de sierra del ejemplo anterior, por lo cual la convergencia de la serie de Fourier es más rápida. Esto constituye un resultado general: una función fuertemente discontinua sólo puede ser aproximada con precisión razonable, mediante una serie de Fourier, cuando se utilice un número de términos elevado. Es decir, la representación de una función irregular contiene muchos armónicos de la frecuencia fundamental.

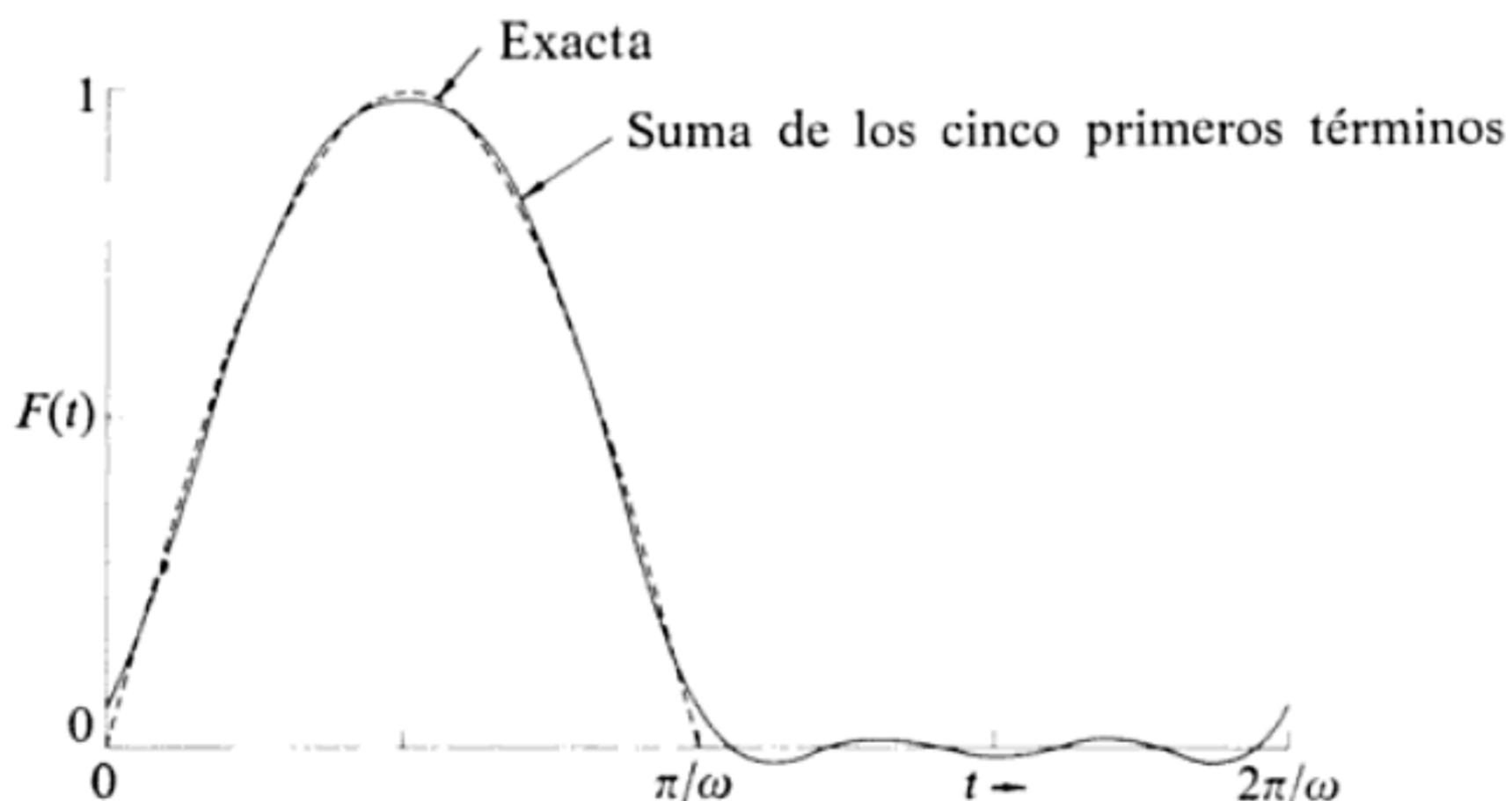


FIG. 4-8

4.6 Respuesta de los osciladores lineales a fuerzas pulsantes

En lo previamente tratado hemos estado considerando fundamentalmente oscilaciones estacionarias. Ahora bien, existen muchos problemas (en especial los relacionados con circuitos oscilantes) en los cuales los efectos transitorios son de gran importancia; en tales casos, puede ocurrir que la solución transitoria sea realmente la de interés predominante. En esta sección estudiaremos el comportamiento transitorio de un oscilador lineal sometido a la acción de una fuerza impulsora que actúa de forma discontinua. Desde luego, una fuerza «discontinua» es una idealización, dado que siempre será necesario un tiempo finito para aplicar una fuerza; ahora bien, cuando el tiempo de aplicación sea pequeño en comparación con el período propio del oscilador, los resultados que se obtienen del caso idealizado constituyen una buena aproximación a la situación real.

La ecuación diferencial que describe el movimiento de un oscilador amortiguado es

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m} \quad (4.63)$$

cuya integral general es la suma de la integral general $x_g(t)$ de la ecuación sin segundo miembro más una integral particular $x_p(t)$ de la ecuación completa:

$$x(t) = x_g(t) + x_p(t) \quad (4.64)$$

$x_g(t)$ puede escribirse

$$x_g(t) = e^{-\beta t}(A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \operatorname{sen} \omega_1 t) \quad (4.65)$$

donde

$$\omega_1 \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (4.66)$$

y la integral particular $x_p(t)$ depende de la naturaleza de la función fuerza $F(t)$.

Existen dos funciones fuerza discontinuas ideales de interés considerable; se trata de la *función escalón* (o *función de Heaviside*) y de la *función pulso*, que, respectivamente, se representan en las figuras 4-9a y 4-9b. La función escalón H se expresa:

$$H(t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ a, & t > t_0 \end{cases} \quad (4.67)$$

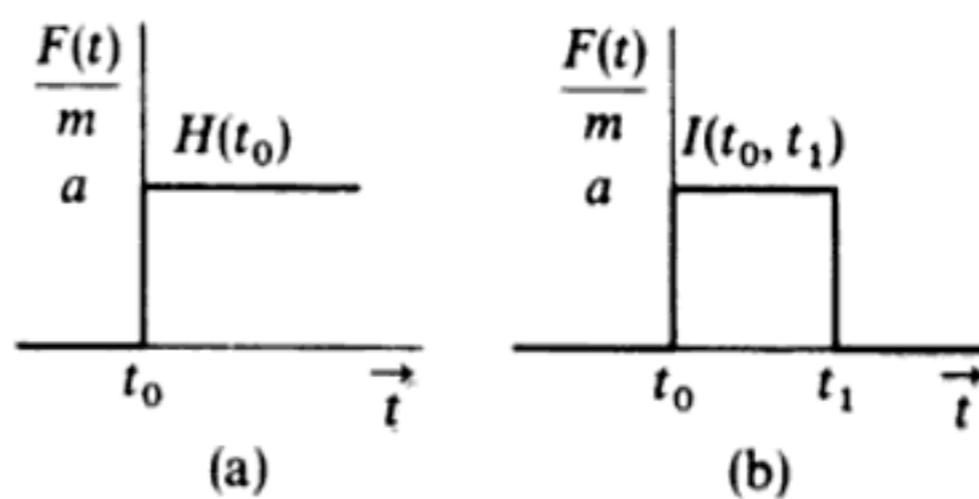


FIG. 4.9

donde a es una constante que tiene las dimensiones de aceleración, y el argumento t_0 indica que el instante de aplicación de la fuerza es el $t=t_0$.

La función pulso I puede considerarse como una función escalón aplicada en el instante $t=t_0$ seguida de una función escalón negativa aplicada en un instante posterior t_1 . Así pues,

$$I(t_0, t_1) = H(t_0) - H(t_1)$$

$$I(t_0, t_1) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ a, & t_0 < t < t_1 \\ 0, & t > t_1 \end{cases} \quad (4.68)$$

Aunque para simplificar escribamos las funciones de Heaviside y pulso de la forma $H(t_0)$ e $I(t_0, t_1)$, éstas son por supuesto funciones del tiempo t y por ello la forma correcta de escribirlas sería $H(t; t_0)$ e $I(t; t_0, t_1)$.

(a) RESPUESTA A UNA FUNCIÓN ESCALÓN. En este caso la ecuación diferencial del movimiento es

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = a, \quad t > t_0 \quad (4.69)$$

con las condiciones iniciales $x(t_0)=0$ y $\dot{x}(t_0)=0$, que suponemos. La integral particular se reduce a una constante que, de la simple inspección de 4.69, resulta ser a/ω_0^2 . Por tanto, la integral general para $t>t_0$ es

$$x(t) = e^{-\beta(t-t_0)}[A_1 \cos \omega_1(t-t_0) + A_2 \operatorname{sen} \omega_1(t-t_0)] + \frac{a}{\omega_0^2} \quad (4.70)$$

Aplicando las condiciones iniciales tenemos

$$A_1 = -\frac{a}{\omega_0^2}; \quad A_2 = -\frac{\beta a}{\omega_1 \omega_0^2} \quad (4.71)$$

y, en consecuencia, para $t > t_0$

$$x(t) = \frac{a}{\omega_0^2} \left[1 - e^{-\beta(t-t_0)} \cos \omega_1(t-t_0) - \frac{\beta e^{-\beta(t-t_0)}}{\omega_1} \sin \omega_1(t-t_0) \right] \quad (4.72)$$

siendo, desde luego, $x(t)=0$ para $t < t_0$.

Si, para simplificar, hacemos $t_0=0$, la solución se expresa

$$x(t) = \frac{H(0)}{\omega_0^2} \left[1 - e^{-\beta t} \cos \omega_1 t - \frac{\beta e^{-\beta t}}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right] \quad (4.72a)$$

En la figura 4-10 se representa esta función para $\beta=0,2\omega_0$. En ella puede observarse que el estado final del oscilador (es decir, su estado estacionario) es simplemente una separación a/ω_0^2 de su posición de reposo en ausencia de fuerza impulsora.

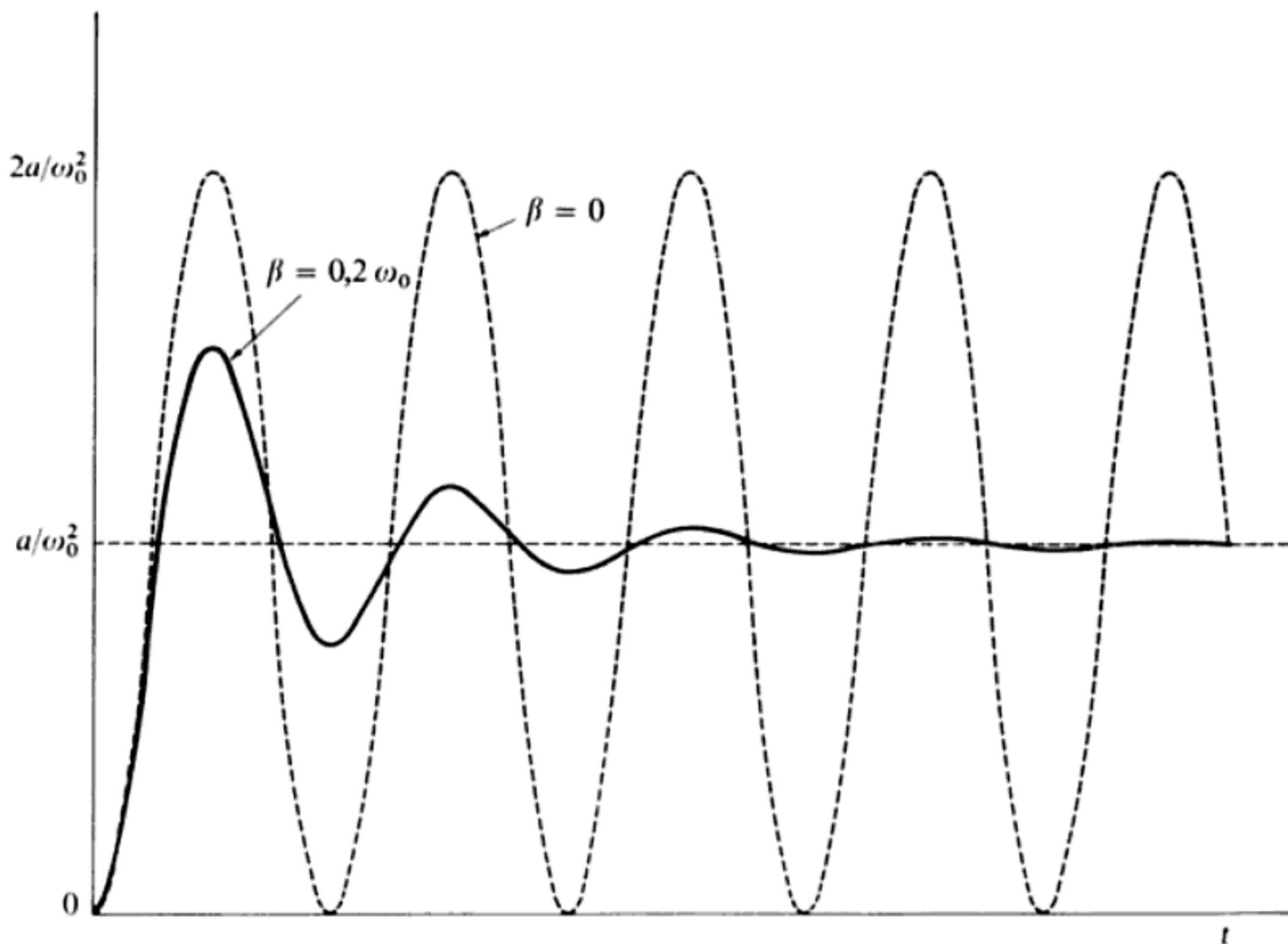


FIG. 4-10

Cuando no haya amortiguamiento, $\beta=0$ y $\omega_1=\omega_0$, y para $t_0=0$ tendremos

$$x(t) = \frac{H(0)}{\omega_0^2} [1 - \cos \omega_0 t], \quad \beta = 0 \quad (4.73)$$

y la oscilación será senoidal de amplitudes extremas $x=0$ y $x=2a/\omega_0^2$ (véase figura 4-10).

(b) RESPUESTA A UNA FUNCIÓN PULSO. Si consideramos la función pulso como diferencia de dos funciones escalón separadas un intervalo $t_1-t_0=\tau$, como el sistema es lineal, la integral general para $t>t_1$ vendrá dada por la superposición de las soluciones correspondientes a las funciones escalón (4.72) tomadas individualmente:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a}{\omega_0^2} \left[1 - e^{-\beta(t-t_0)} \cos \omega_1(t-t_0) - \frac{\beta e^{-\beta(t-t_0)}}{\omega_1} \sin \omega_1(t-t_0) \right] \\ &\quad - \frac{a}{\omega_0^2} \left[1 - e^{-\beta(t-t_0-\tau)} \cos \omega_1(t-t_0-\tau) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta e^{-\beta(t-t_0-\tau)}}{\omega_1} \sin \omega_1(t-t_0-\tau) \right] \\ &= \frac{ae^{-\beta(t-t_0)}}{\omega_0^2} \left[e^{\beta\tau} \cos \omega_1(t-t_0-\tau) - \cos \omega_1(t-t_0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta e^{\beta\tau}}{\omega_1} \sin \omega_1(t-t_0-\tau) - \frac{\beta}{\omega_1} \sin \omega_1(t-t_0) \right], \quad t > t_1 \end{aligned} \quad (4.74)$$

En la figura 4-11 se representa la respuesta *total* (o sea, 4.72 y 4.74) del sistema a una función pulso de duración $\tau=5\times2\pi/\omega_1$ aplicada en el instante $t=t_0$ para el caso $\beta=0,2\omega_0$.

Cuando tienda a cero la duración de la función pulso, la función respuesta tenderá a hacerse infinitamente pequeña. Pero si hacemos que $a\rightarrow\infty$ mientras $\tau\rightarrow 0$ de forma tal que el producto $a\tau$ permanezca constante, la respuesta será finita. Es éste un caso límite especial de importancia considerable puesto que constituye la aproximación al caso en que se aplica una fuerza impulsora en

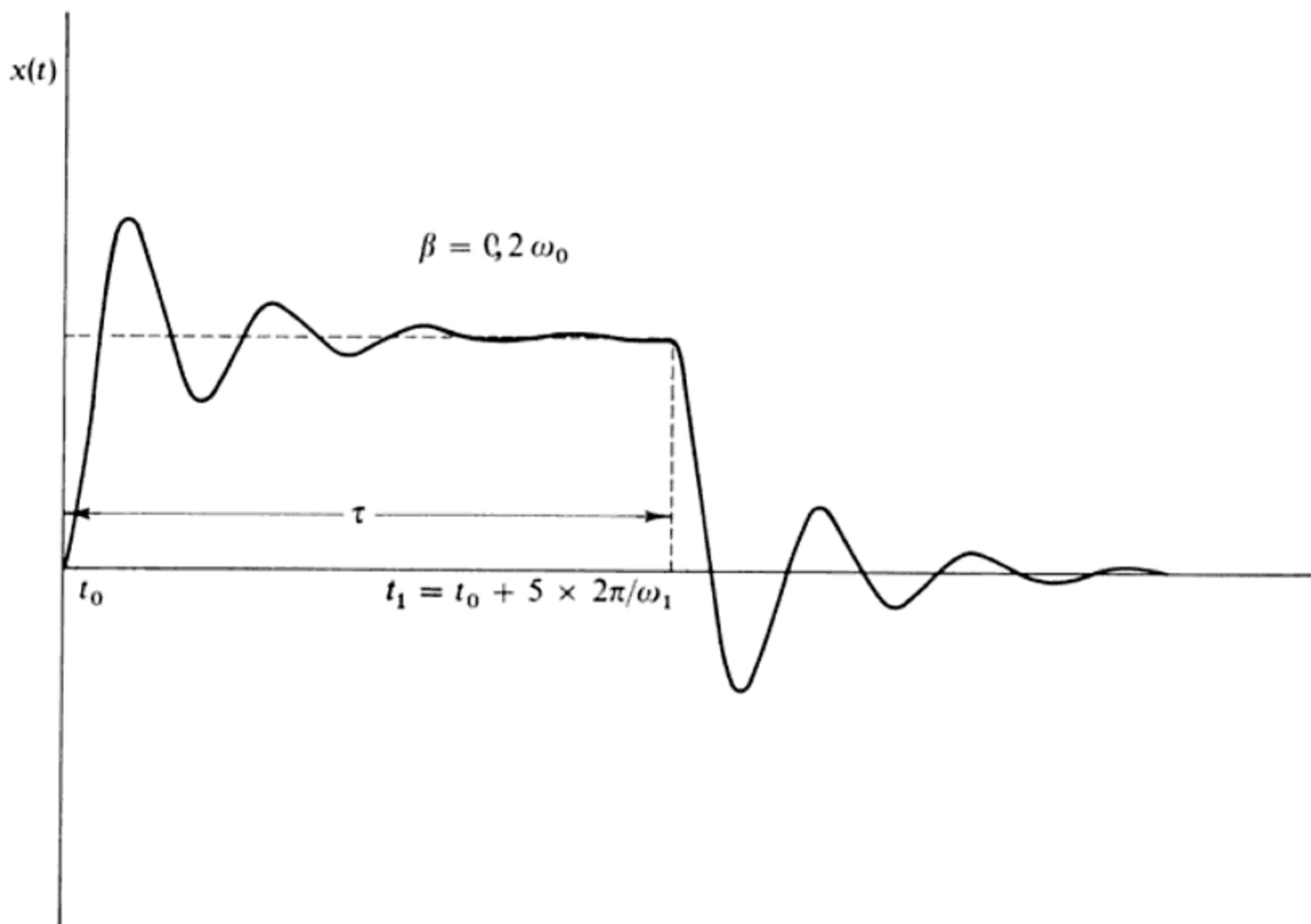


FIG. 4-11

forma de «pico» en el instante $t=t_0$ (es decir, $\tau \ll 2\pi/\omega_1$).* Si desarrollamos 4.74 y hacemos que $\tau \rightarrow 0$ con $a\tau=b$, obtenemos

$$x(t) = \frac{b}{\omega_1} e^{-\beta(t-t_0)} \operatorname{sen} \omega_1(t-t_0), \quad t > t_0 \quad (4.75)$$

* Un «pico» de esta clase suele recibir el nombre de *función delta* y se escribe $\delta(t-t_0)$. La función delta presenta la propiedad de que $\delta(t)=0$ para $t \neq 0$ y $\delta(0)=\infty$, pero

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) dt = 1$$

Por tanto, no es propiamente una función en sentido matemático, pero puede definirse como límite de una función bien definida y fuertemente localizada (como una función de Gauss) cuando el parámetro de anchura tiende a cero. Véase también MARION (Ma65b, sección 1.11).

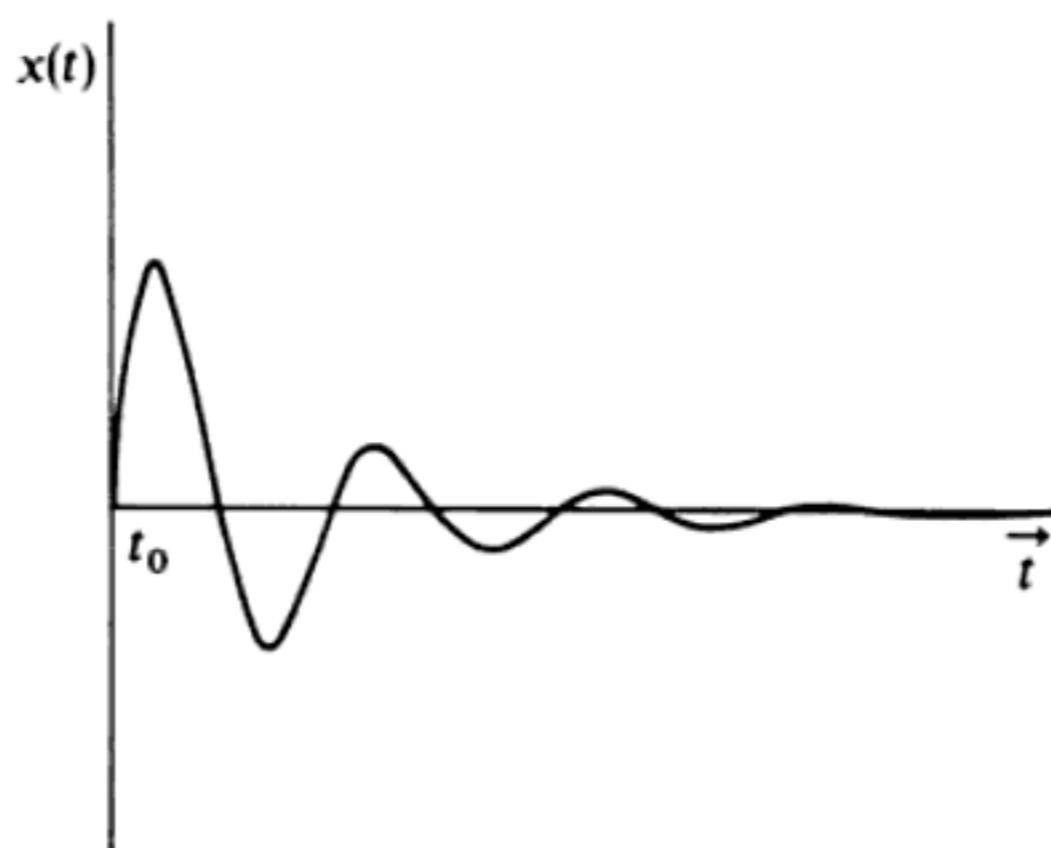


FIG. 4-12

En la figura 4-12 se representa esta función respuesta para $\beta = 0,2\omega_0$ y en ella se ve claramente que a medida que t aumenta, el oscilador vuelve hacia su posición de equilibrio original.

El hecho de que la respuesta de un oscilador lineal a un pulso instantáneo pueda representarse de la forma sencilla 4.75 nos coloca frente a un poderoso procedimiento para manejar funciones fuerzas de cualquier índole, el cual fue desarrollado por George Green.* El fundamento del método de Green reside en la representación de una función fuerza cualquiera en forma de una serie de pulsos, tal como se muestra esquemáticamente en la figura 4-13. Cuando el sistema forzado sea lineal, será válido el principio de superposición, siendo posible expresar la parte inhomogénea de la ecuación diferencial en forma de suma de funciones fuerza individuales $F_n(t)/m$, que en el método de Green serán pulsos:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F_n(t)}{m}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(t) \quad (4.76)$$

donde

$$I_n(t) = I(t_n, t_{n+1})$$

$$= \begin{cases} a_n(t_n), & t_n < t < t_{n+1} \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (4.77)$$

* George GREEN (1793-1841), matemático inglés autodidacta.

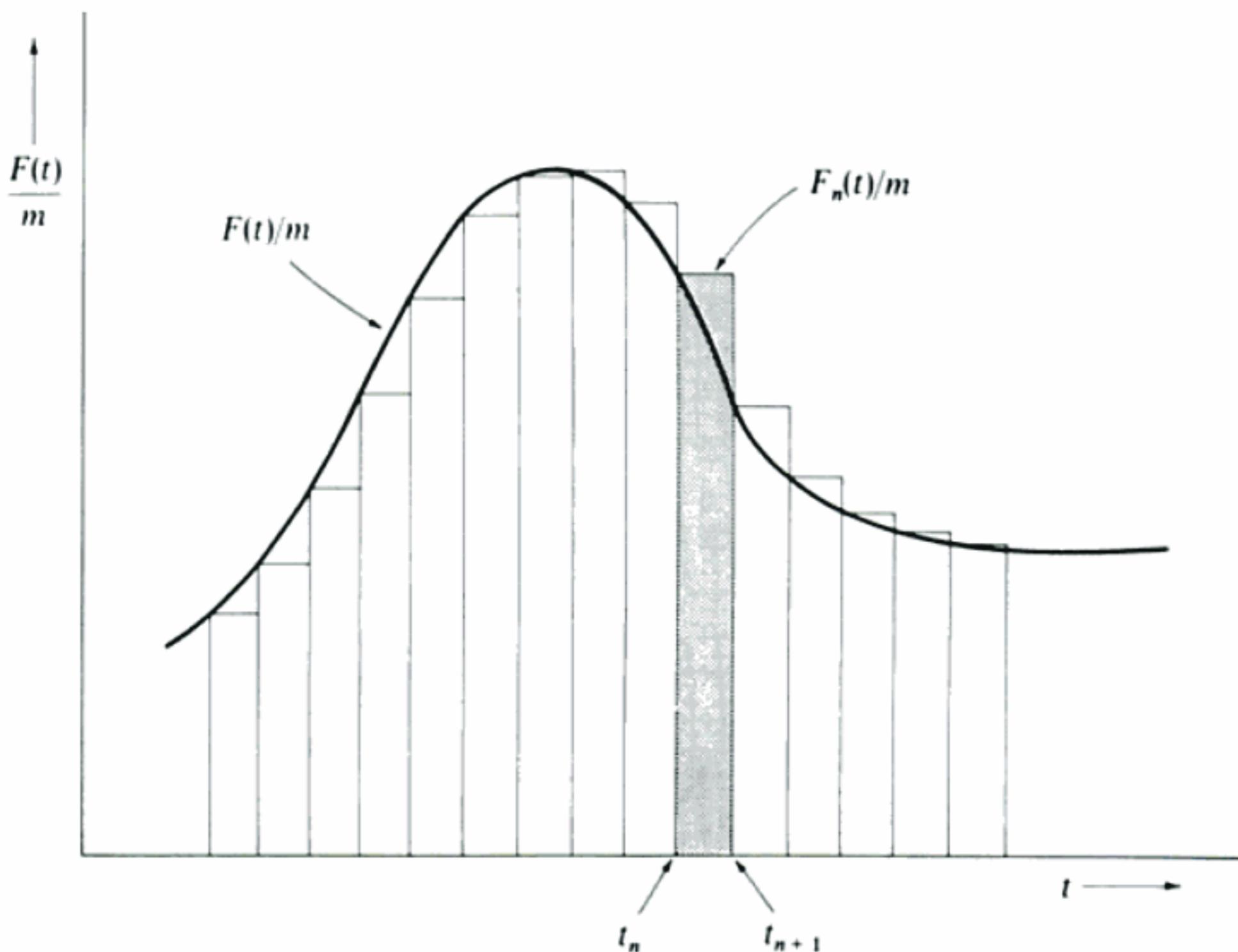


FIG. 4-13

El intervalo de tiempo durante el cual I_n actúa es $t_{n+1} - t_n = \tau$, con $\tau \ll 2\pi/\omega_1$. Según 4.75 la solución correspondiente al pulso n -ésimo es

$$x_n(t) = \frac{a_n(t_n)\tau}{\omega_1} e^{-\beta(t-t_n)} \operatorname{sén} \omega_1(t-t_n), \quad t > t_n + \tau \quad (4.78)$$

y la correspondiente a todos los pulsos hasta el N -ésimo inclusive es

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^N \frac{a_n(t_n)\tau}{\omega_1} e^{-\beta(t-t_n)} \operatorname{sén} \omega_1(t-t_n), \quad t_N < t < t_{N+1} \quad (4.79)$$

Cuando el intervalo τ tienda a cero, la suma se convertirá en la integral siguiente, donde hemos escrito t' en lugar de t_n :

$$x(t) = \int_{-\infty}^t \frac{a(t')}{\omega_1} e^{-\beta(t-t')} \operatorname{sén} \omega_1(t-t') dt' \quad (4.80)$$

Si hacemos, por definición

$$G(t, t') \equiv \begin{cases} \frac{1}{m\omega_1} e^{-\beta(t-t')} \operatorname{sen} \omega_1(t-t'), & t \geq t' \\ 0, & t < t' \end{cases} \quad (4.81)$$

como

$$ma(t') = F(t') \quad (4.82)$$

tendremos

$$x(t) = \int_{-\infty}^t F(t') G(t, t') dt' \quad (4.83)$$

La función $G(t, t')$ se conoce por el nombre de *función de Green* correspondiente a la ecuación del oscilador lineal (4.63). La solución expresada por 4.83 sólo es válida para un oscilador inicialmente en reposo en su posición de equilibrio, ya que la solución empleada para cada uno de los pulsos (4.75) fue obtenida precisamente para dichas condiciones iniciales. Para unas condiciones iniciales distintas podrá obtenerse la solución de forma similar.

El método de Green es útil en general para la resolución de ecuaciones diferenciales lineales inhomogéneas y su ventaja principal reside en el hecho de que la función $G(t, t')$, que es la solución de la ecuación para un elemento infinitesimal de la parte inhomogénea, *ya contiene las condiciones iniciales*, por lo cual la integral general, expresada por la integral de $F(t')G(t, t')$, contendrá también automáticamente las condiciones iniciales.

◆ Ejemplo 4.6 Una aplicación del método de Green

Sea la función fuerza, decreciente exponencialmente con origen en $t=0$,

$$F(t) = F_0 e^{-\gamma t}, \quad t > 0 \quad (1)$$

Según el método de Green, la solución $x(t)$ es

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_1} \int_0^t e^{-\gamma t'} e^{-\beta(t-t')} \operatorname{sen} \omega_1(t-t') dt' \quad (2)$$

Con el cambio de variables $z = \omega_1(t - t')$, encontramos

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{F_0}{m\omega_1^2} \int_0^{\omega_1 t} e^{-\gamma z} e^{[(\gamma - \beta)/\omega_1]z} \sin z \, dz \\&= \frac{F_0/m}{(\gamma - \beta)^2 + \omega_1^2} \left[e^{-\gamma t} - e^{-\beta t} \left(\cos \omega_1 t - \frac{\gamma - \beta}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \right]\end{aligned}\quad (3)$$

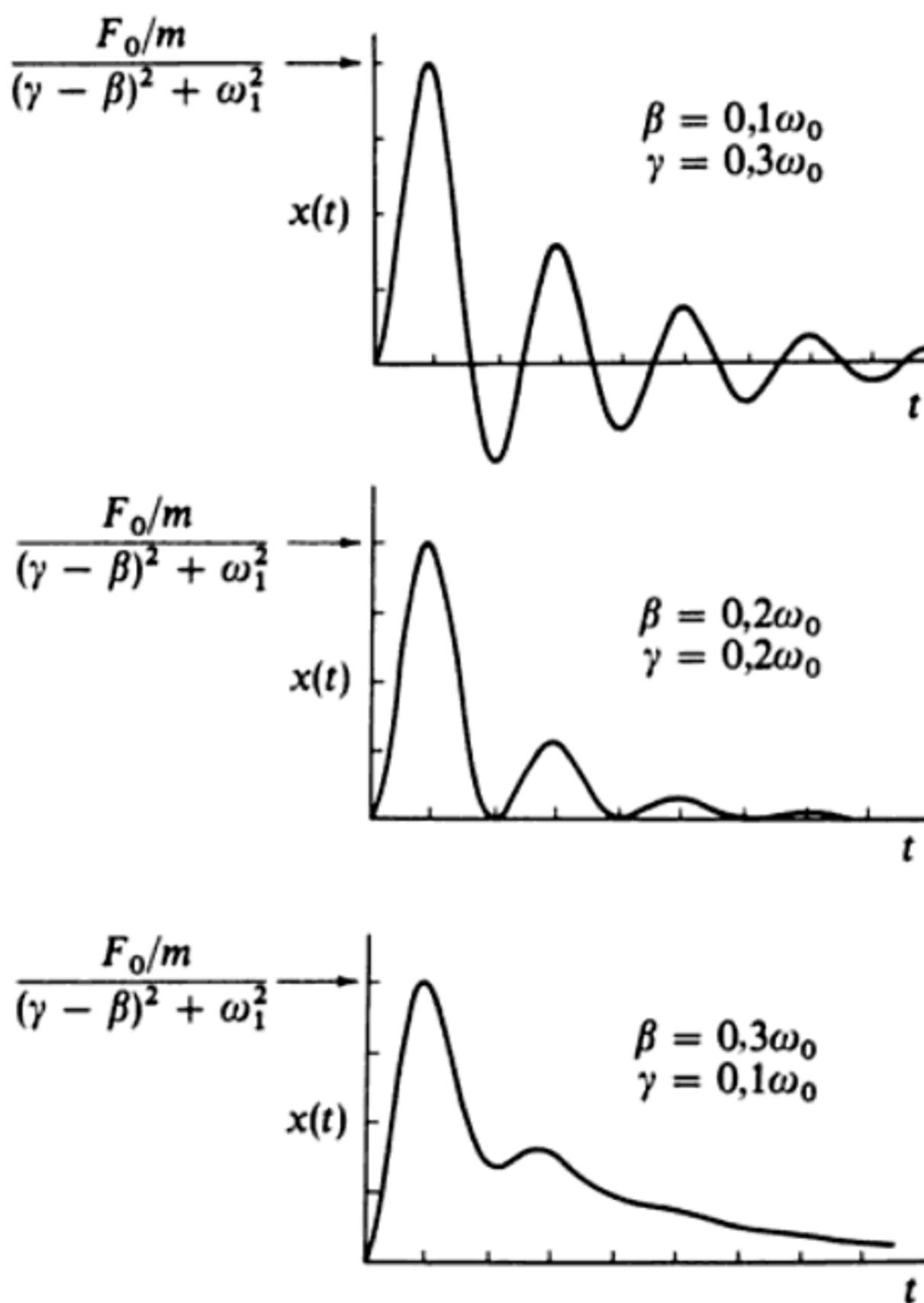


FIG. 4-14

En la figura 4-14 se representa esta función respuesta para tres combinaciones diferentes de los parámetros responsables del amortiguamiento, β y γ . Cuando γ es grande comparada con β , y si ambos son pequeños comparados con ω_0 , la respuesta será muy parecida a la correspondiente a un «pico», lo que puede comprobarse comparando la figura 4-12 con la curva representada en la parte superior de la figura 4-14. Cuando γ es pequeño comparado con β , la respuesta adquiere una forma parecida a la de la misma función fuerza, es decir, un incremento inicial seguido de un decrecimiento exponencial. La curva representada en la parte inferior

de la figura 4-14 exhibe una amplitud decreciente a la que se superpone una oscilación residual. Cuando β y γ son iguales, la solución 3 queda de la forma

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_1^2} e^{-\beta t} (1 - \cos \omega_1 t), \quad \beta = \gamma \quad (4)$$

y, entonces, la respuesta es osculatoria con un período igual a $2\pi/\omega_1$, pero con una amplitud decreciente exponencialmente, tal como se representa en la curva central de la figura 4-14.

Una respuesta del tipo descrito por la solución 3 sería la dada, por ejemplo, por un circuito electrónico inactivo, pero intrínsecamente oscilatorio, al que se aplicase bruscamente la tensión decreciente de un condensador.

4.7 Método de la transformación de Laplace

En las secciones precedentes hemos seguido métodos fundamentalmente directos para resolver las ecuaciones diferenciales que describen los movimientos oscilatorios. El procedimiento ha consistido en obtener una solución general e imponer a continuación las condiciones iniciales al objeto de obtener la solución particular deseada. El método de Green (sección 4.6) permite incluir automáticamente las condiciones iniciales. Otro *método*, relacionado con el anterior, que permite obtener directamente la solución particularizada es el de la *transformación de Laplace*. El método de la transformación de Laplace resulta muy útil en general para resolver ecuaciones diferenciales lineales, lo que se consigue transformando las ecuaciones *diferenciales* en ecuaciones *algebraicas* con la consiguiente disminución de complejidad. Por definición, la *transformada de Laplace* $f(p)$ de una función $F(t)$ es

$$f(p) = \int_0^\infty e^{-pt} F(t) dt \quad (4.84)$$

La transformada de Laplace de una función $F(t)$ existe si $F(t)$ es continua en todo intervalo finito de t , siendo $0 < t < \infty$, y si $F(t)$ crece menos rápidamente que una función exponencial cuando t tiende a infinito. El parámetro p puede ser, en general, complejo, pero no habrá ocasión aquí de tener en cuenta tal caso. La transformada de Laplace de una función $F(t)$ será representada por $\mathcal{L}[F(t)] = f(p)$.

La mayoría de las transformadas de Laplace interesantes pueden calcularse por métodos de integración elementales. Por ejemplo, para $F(t) = 1$,

$$\mathcal{L}[1] = \int_0^\infty e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^\infty = \frac{1}{p}, \quad p > 0$$

Análogamente, para $F(t) = e^{-at}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{-at}] &= \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{-at} dt = -\frac{1}{p+a} e^{-(p+a)t} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{p+a}, \quad p+a > 0\end{aligned}$$

La lista de transformadas que aparece en la tabla 4.1 puede comprobarse mediante cálculos similares.*

Algunas de las propiedades importantes de la transformada de Laplace son las siguientes:

I. La transformación de Laplace es lineal. Si α y β son constantes, entonces

$$\mathcal{L}[\alpha F(t) + \beta G(t)] = \alpha \mathcal{L}[F(t)] + \beta \mathcal{L}[G(t)] \quad (4.85)$$

Tabla 4-1
ALGUNAS TRANSFORMADAS DE LAPLACE IMPORTANTES

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{p}, \quad p > 0$$

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{p-a}, \quad p > a$$

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad p > 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\mathcal{L}[t^n e^{at}] = \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}, \quad p > 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\mathcal{L}[\operatorname{sen} \omega t] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad p > 0$$

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \quad p > 0$$

$$\mathcal{L}[e^{-at} \operatorname{sen} \omega t] = \frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}, \quad p+a > 0$$

$$\mathcal{L}[e^{-at} \cos \omega t] = \frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}, \quad p+a > 0$$

* Una tabla muy útil de transformadas de Laplace se incluye, por ejemplo, en CHURCHILL (Ch44). En ERDÉLYI (Er54) puede encontrarse una extensa lista.

II. La transformada de Laplace de la derivada de $F(t)$ viene dada por

$$\mathcal{L}[\dot{F}(t)] = p\mathcal{L}[F(t)] - F(0) \quad (4.86)$$

Para probarlo basta hacer una integración por partes:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\dot{F}(t)] &= \int_0^\infty e^{-pt} \frac{dF}{dt} dt \\ &= F(t)e^{-pt} \Big|_0^\infty + p \int_0^\infty e^{-pt} F(t) dt \\ &= -F(0) + p\mathcal{L}[F(t)]\end{aligned}$$

De forma similar pueden calcularse las transformadas de derivadas de orden superior; por ejemplo

$$\mathcal{L}[\ddot{F}(t)] = p^2\mathcal{L}[F(t)] - pF(0) - \dot{F}(0) \quad (4.87)$$

III. Cuando $F(t)=0$ para $t<\tau$ siendo $\tau>0$, suele ser recomendable trasladar el origen de tiempos al instante $t=\tau$. Ello puede hacerse como sigue. Como $F(t-\tau)=0$ para $t<\tau$, se define una nueva variable $t'=t-\tau$ de forma que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[F(t-\tau)] &= \int_0^\infty e^{-pt} F(t-\tau) dt = \int_0^\infty e^{-p(t'+\tau)} F(t') dt' \\ &= e^{-p\tau} f(p) = e^{-p\tau} \mathcal{L}[F(t)]\end{aligned} \quad (4.88)$$

IV. Cuando $F(t)$ se multiplica por e^{-at} , ello se corresponde con sustituir el parámetro p por $p+a$ en la transformada. Por ejemplo

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \quad p > 0$$

de forma que

$$\mathcal{L}[e^{-at} \cos \omega t] = \frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}, \quad p+a > 0$$

◆ **Ejemplo 4.7 Respuesta de un circuito lineal amortiguado a una función escalón**

La ecuación de movimiento será precisamente la 4.69,

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = a, \quad t > 0 \quad (1)$$

donde las condiciones iniciales son $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=0$. Multiplicando por $\exp(-pt)$ e integrando:

$$\int_0^\infty e^{-pt} \ddot{x} dt + 2\beta \int_0^\infty e^{-pt} \dot{x} dt + \omega_0^2 \int_0^\infty e^{-pt} x dt = a \int_0^\infty e^{-pt} dt \quad (2)$$

Aplicando la transformación de Laplace, tenemos

$$p^2 f(p) + 2\beta p f(p) + \omega_0^2 f(p) = a/p \quad (3)$$

de donde

$$f(p) = \frac{a}{p(p^2 + 2\beta p + \omega_0^2)} \quad (4)$$

que, desarrollada en fracciones simples, es

$$f(p) = \frac{a}{\omega_0^2} \left[\frac{1}{p} - \frac{p + 2\beta}{p^2 + 2\beta p + \omega_0^2} \right] \quad (5)$$

Operando con el segundo término resulta

$$f(p) = \frac{a}{\omega_0^2} \left[\frac{1}{p} - \frac{p + 2\beta}{(p + \beta)^2 + \omega_0^2 - \beta^2} \right] \quad (6)$$

que puede volver a escribirse como sigue

$$f(p) = \frac{a}{\omega_0^2} \left[\frac{1}{p} - \frac{p + \beta}{(p + \beta)^2 + \omega_1^2} - \frac{\beta}{\omega_1} \frac{\omega_1}{(p + \beta)^2 + \omega_1^2} \right] \quad (7)$$

donde, como de costumbre,

$$\omega_1^2 \equiv \omega_0^2 - \beta^2 \quad (8)$$

Si ahora buscamos los distintos términos de 7 en la tabla 4.1 encontraremos

$$F(t) = x(t) = \frac{a}{\omega_0^2} \left[1 - e^{-\beta t} \cos \omega_1 t - \frac{\beta e^{-\beta t}}{\omega_1} \operatorname{sen} \omega_1 t \right], \quad t > 0 \quad (9)$$

que es la misma expresión que la 4.72a.

Referencias recomendadas

Todas las obras citadas como referencia en el capítulo 3 contienen materia sobre oscilaciones forzadas. La discusión de HALFMAN (Ha62a, vol. 1, cap. 7) reviste interés particular y en ella se tratan las funciones respuesta con un enfoque hacia las aplicaciones técnicas. MAGNUS (Ma65c, cap. 5) da también muchos detalles.

Los textos de nivel intermedio de electricidad y magnetismo suelen tocar el tema de las oscilaciones eléctricas en relación con el análisis de circuitos de c.a.; véanse, p. e., PECK (Pe53, cap. 11), REITZ y MILFORD (Re60, cap. 13) y SCOTT (Sc59, cap. 9). Para mayores detalles pueden consultarse textos de ingeniería eléctrica.

Las funciones de Green son tratadas, por ejemplo, por CHURCHILL (Ch58, cap. 9) incluidas dentro de un tratado general de métodos operacionales para la resolución de ecuaciones diferenciales. ARFKEN (Ar66, sección 16.5) da una introducción breve, mientras que DETTMAN (De62, cap. 4) trata el tema extensamente.

Problemas

4-1. Demostrar, en el caso de un oscilador amortiguado forzado, que la energía cinética media es la misma para una frecuencia situada un cierto número de octavas* por encima de la resonancia, que para una frecuencia situada el mismo número de octavas por debajo.

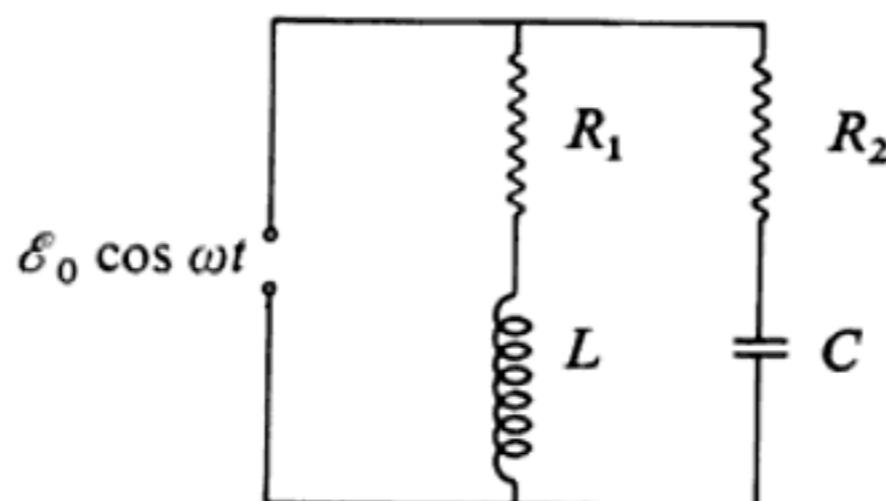
4-2. Demostrar que cuando un oscilador forzado está sólo ligeramente amortiguado, la Q del sistema es aproximadamente

$$Q \cong 2\pi \times \left(\frac{\text{Energía total}}{\text{Pérdida de energía en un período}} \right)$$

* Una octava es un intervalo de frecuencias en la cual la mayor de ellas es el doble de la menor.

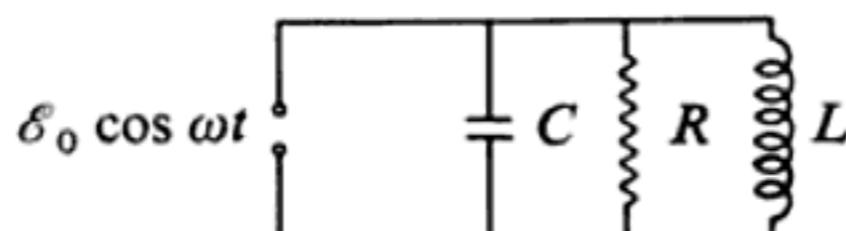
- 4-3.** Demostrar que, para un oscilador ligeramente amortiguado, $Q \approx \omega_0 / \Delta\omega$ (4.15)
- 4-4.** Construir la curva de resonancia en velocidad de un oscilador amortiguado de $Q=6$ y demostrar que la anchura total de la curva entre los puntos correspondientes a $\dot{x}_{\max} / \sqrt{2}$ es aproximadamente igual a $\omega_0/6$.
- 4-5.** Un circuito eléctrico se compone de una resistencia R y una capacidad C conectadas en serie a una fem alterna. Determinar la expresión de la intensidad de corriente en función del tiempo y demostrar que tiende a cero cuando la frecuencia de la fem alterna tiende a cero.
- 4-6.** Demostrar que la tensión en bornes de la bobina de un circuito $R-L-C$ en serie, en función de la frecuencia de la fem, alcanza un máximo para una frecuencia diferente a la de resonancia $1/\sqrt{LC}$. Obtener la expresión de esta frecuencia.
- 4-7.** Una fem alterna se conecta a dos impedancias en serie, Z_1 y Z_2 . Determinar la expresión de la potencia disipada en Z_2 .
- 4-8.** Calcular la impedancia del circuito de la figura suponiendo que las dos ramas (de impedancias Z_1 y Z_2) están conectadas en paralelo, de forma que

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

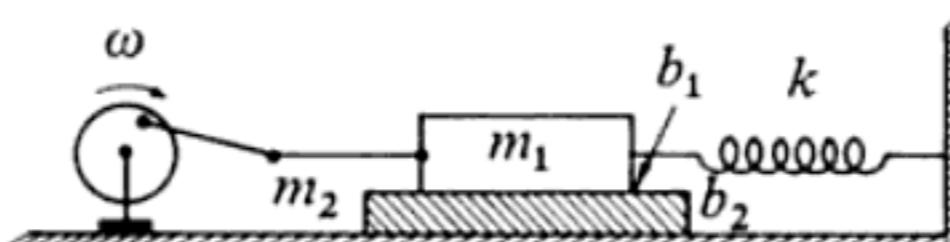


Obtener una expresión de la intensidad total cuando esté *en fase* con la fem (o sea, cuando el circuito esté en resonancia). Demostrar que la corriente se anula cuando $R_1=R_2=0$. Interpretar físicamente este resultado.

- 4-9.** Sea el circuito $R-L-C$ en paralelo de la figura. Calcular su impedancia y demostrar que para $\omega=\omega_0=1/\sqrt{LC}$, la intensidad es mínima (es decir, el circuito es *antirresonante*). ¿Cuál es la Q del circuito? Representar $|Z|/R$ linealmente en función de la pulsación, tomando para ésta una escala logarítmica. Demostrar que en este caso la curva es *simétrica*.



- 4-10.** En la figura se representa una masa m_1 movida por una fuerza senoidal de pulsación ω . Esta masa m_1 está unida a un soporte rígido por intermedio de un muelle de constante recuperadora k y se desliza sobre una segunda masa m_2 .



La fuerza de rozamiento entre m_1 y m_2 está representada por la constante de amortiguamiento b_1 y la fuerza de rozamiento entre m_2 y el soporte está representada por b_2 . Construir la analogía eléctrica de este sistema y calcular su impedancia.

- 4-11.** Demostrar que la serie de Fourier expresada en 4.61 puede representarse

$$F(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t - \phi_n)$$

y relacionar los coeficientes c_n con los a_n y b_n de las fórmulas 4.62.

- 4-12.** Obtener el desarrollo en serie de Fourier de la función

$$F(t) = \begin{cases} -1, & -\pi/\omega < t < 0 \\ +1, & 0 < t < \pi/\omega \end{cases}$$

en el intervalo $-\pi/\omega < t < \pi/\omega$. Calcular y representar las sumas de los dos primeros términos, los tres primeros términos y los cuatro primeros términos para poner de manifiesto la convergencia de la serie.

- 4-13.** Obtener la serie de Fourier correspondiente a la función

$$F(t) = \begin{cases} 0, & -2\pi/\omega < t < 0 \\ \operatorname{sén} \omega t, & 0 < t < 2\pi/\omega \end{cases}$$

- 4-14.** Obtener la representación de Fourier de la salida de un rectificador de onda completa. Representar los tres primeros términos del desarrollo y comparar la función exacta.

- 4-15.** Un oscilador lineal amortiguado, inicialmente en reposo en su posición de equilibrio, está sometido a una función fuerza dada por

$$\frac{F(t)}{m} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ a \times (t/\tau), & 0 < t < \tau \\ a, & t > \tau \end{cases}$$

Determinar la función respuesta. Hágase $\tau \rightarrow 0$ y demostrar que entonces la solución se transforma en la correspondiente a una función escalón.

4-16. Obtener la respuesta de un oscilador lineal a una función escalón y a una función pulso (en el límite $\tau \rightarrow 0$) en el caso de sobreamortiguamiento. Trazar las funciones respuesta.

4-17. Calcular los valores máximos de las amplitudes de las funciones respuesta representadas en las figuras 4-10 y 4-12. Obtener valores numéricos (en unidades a/ω_0^2 para $\beta = 0,2 \omega_0$).

4-18. Sea un oscilador lineal no amortiguado de pulsación propia ω_0 . Calcular y trazar la función respuesta a una función fuerza pulsatoria que actúa durante un tiempo $\tau = 2\pi/\omega_0$. Dar una interpretación física a los resultados.

4-19. Obtener la respuesta de un oscilador lineal a la función fuerza

$$\frac{F(t)}{m} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ a \operatorname{sen} \omega t, & 0 < t < \pi/\omega \\ 0, & t > \pi/\omega \end{cases}$$

4-20. Deducir una expresión del desplazamiento de un oscilador lineal análogo a la 4.75, pero para las condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$ y $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$.

4-21. Deducir la respuesta por el método de la función de Green a una función fuerza cualquiera suponiendo que la función se compone de una serie de funciones escalón; o sea, partiendo de 4.72 en vez de 4.75.

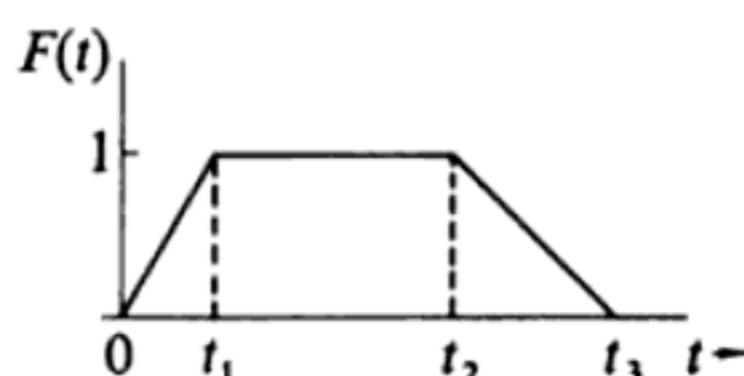
4-22. Mediante el método de Green obtener la respuesta de un oscilador amortiguado a una función fuerza de la forma

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ F_0 e^{-\gamma t} \operatorname{sen} \omega t, & t > 0 \end{cases}$$

4-23. Comprobar mediante integración directa las transformadas de Laplace reseñadas en los lugares tercero a sexto de la tabla 4-1.

4-24. Utilizar el método de la transformación de Laplace para obtener la respuesta de un circuito $R-L-C$ en serie a una tensión $t=0$ en forma de función escalón.

4-25. Calcular la transformada de Laplace del pulso trapezoidal representado en la figura.



4-26. Resolver el ejemplo 4.6 por el método de la transformación de Laplace.

Oscilaciones alineales

5.1 Introducción

El extenso estudio de los sistemas oscilantes lineales llevado a cabo en los dos capítulos anteriores está justificado por la gran importancia que en muchas ramas de la ciencia y de la técnica tienen los fenómenos oscilatorios. Es frecuente que para el estudio de dichos sistemas sea posible utilizar aproximaciones lineales, de forma que la utilidad de estos estudios se debe en gran medida al hecho de que por lo común puedan emplearse métodos *analíticos*. Sin embargo, en general, cuando se fuerza a la Naturaleza a exhibir mayores detalles, ésta se manifiesta reiteradamente en forma *alineal*.

Cuando se pasa de los sistemas lineales a los alineales, deben ponerse en juego ciertas precauciones ya que muchos de los resultados de mayor aplicación del análisis lineal no son válidos para los sistemas alineales. De la mayor importancia es el hecho de que el principio de superposición no es aplicable a las ecuaciones diferenciales alineales, por lo cual, cuando determinemos la respuesta de un sistema alineal a dos funciones fuerza diferentes, la suma de ambas respuestas no servirá como respuesta a la aplicación de una combinación de las dos funciones fuerza. Esto hace difícil la generalización de las soluciones de las ecuaciones alineales y, en esencia, cada problema deberá tratarse como caso particular. En consecuencia, al objeto de hacer frente a la resolución de esta clase de ecua-

ciones se han desarrollado un gran número de procedimientos analíticos, de algunos de los cuales trataremos en este capítulo. Comenzaremos con algunas consideraciones de orden cualitativo que pueden expresarse gráficamente mediante *diagramas fásicos*, prosiguiendo después con algunos métodos de carácter más cuantitativo. Veremos que algunos tipos de ecuaciones alineales pueden resolverse exactamente en función de *integrales elípticas*, si bien lo más frecuente es que hayamos de recurrir a distintos procedimientos de aproximación. Algunos de estos procedimientos serán tratados con detalle.

5.2 Oscilaciones en el caso de funciones potenciales de forma general

Examinemos el movimiento de una partícula dentro de un campo de fuerzas conservativo cualquiera, en el cual la energía potencial de la partícula pueda representarse en función de su desplazamiento mediante una curva como la de la figura 5-1. Entonces, tendremos que, en general para un sistema conservativo,

$$E = T + U = \text{cte}$$

o bien,

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) \quad (5.1)$$

de donde

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]} \quad (5.2)$$

Si la partícula posee la energía total E , que se indica en la figura 5-1 mediante una recta horizontal de trazo discontinuo, en su movimiento podremos distinguir varios casos posibles:

(a) $x < x_1$. En esta región la energía potencial es superior a la energía total, de forma que, según 5.2, la velocidad es imaginaria. Por tanto, esta región está prohibida para la partícula.

(b) $x_1 < x < x_2$. En esta región la energía total es superior a la energía potencial de forma que la partícula puede moverse dentro de los límites $x = x_1$ y $x = x_2$. En estos dos puntos, es $E = U$ y por tanto la velocidad es nula. Son estos los llamados *puntos de inversión* del movimiento, ya que en ellos la partícula debe invertir su movimiento al alcanzar la *barrera de potencial* situada en cada extremo. Por consiguiente, tiene lugar un movimiento oscilatorio en el interior del *pozo de potencial* definido por $U(x)$ entre $x = x_1$, y $x = x_2$.

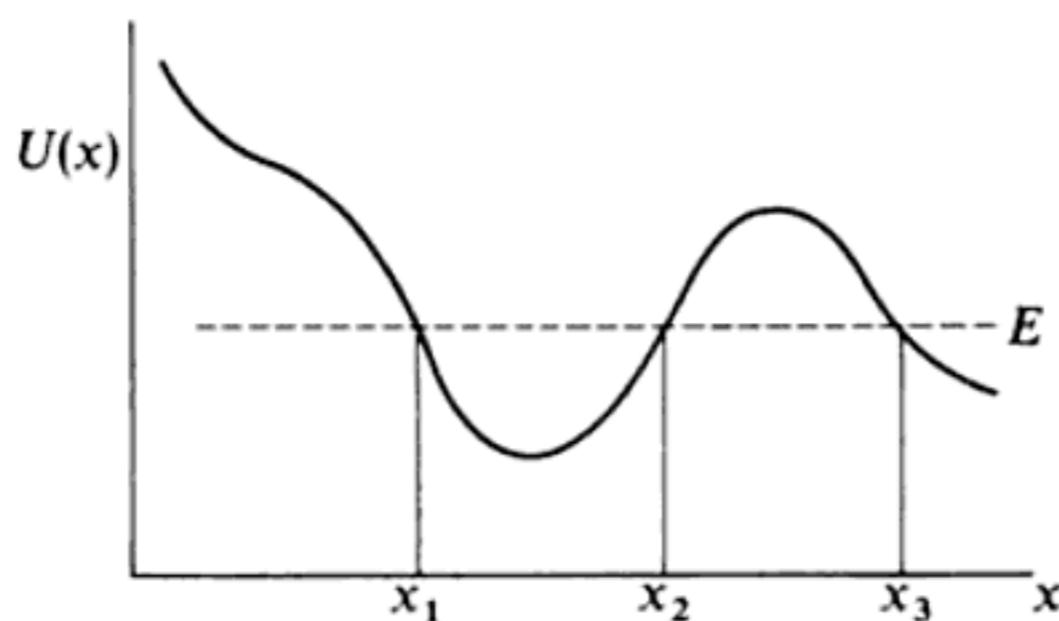


FIG. 5-1

(c) $x_2 < x < x_3$. Esta región está también prohibida, ya que $E < U$.

(d) $x > x_3$. Cuando $U(x)$ sea siempre inferior a su valor en x_3 , toda la región comprendida entre x_3 y $x \rightarrow \infty$ estará permitida y si se acerca a $x = x_3$ desde un punto de x mayor, se reflejará al encontrar la barrera de potencial, retrocediendo nuevamente sin impedimento hacia el infinito.

Integrando la ecuación 5.2 podemos obtener el período de movimiento en un pozo de potencial:

$$\tau = \int dt = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U)}} \quad (5.3)$$

Si consideramos $E = \text{cte}$ como parámetro del movimiento, al ser simétrico éste, el período será igual al doble del tiempo de tránsito desde $x = x_1$ a $x = x_2$:

$$\tau(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \quad (5.4)$$

donde los puntos de inversión, $x = x_1$ y $x = x_2$, vienen dados por las raíces de la ecuación 5.2 cuando hacemos $\dot{x} = 0$, o sea cuando $U(x) = E$. Obsérvese que ésta es una *integral impropia* (el integrando se hace infinito en los límites), pero por motivos físicos la integral debe de *existir* ya que el movimiento se efectúa por completo en el interior del pozo de potencial.

Cuando la energía potencial sea de la forma

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad (5.5a)$$

la fuerza correspondiente será

$$F(x) = -kx \quad (5.5b)$$

que es precisamente el caso del oscilador armónico simple tratado en la sección 3.2. Entonces, cuando una partícula se mueva dentro de un pozo de potencial que sea una función cualquiera de la distancia, en la proximidad del mínimo del pozo, la función podrá generalmente ser representada aproximadamente mediante una parábola y, cuando la energía de la partícula sea sólo ligeramente superior a U_{\min} , únicamente serán posibles pequeñas oscilaciones y el movimiento será aproximadamente armónico simple. Si la energía es apreciablemente superior a U_{\min} , de forma que la amplitud del movimiento no pueda considerarse pequeña, la aproximación $U(x) \approx \frac{1}{2}kx^2$ podrá no dar ya la precisión suficiente y deberemos tratar con una fuerza *alineal*.

En muchas situaciones reales la desviación de la fuerza respecto de la linealidad presenta simetría en torno de la posición de equilibrio (que tomamos en $x=0$). Es decir, el *módulo* de la fuerza que se ejerce sobre una partícula es la misma en $-x$ que en x , y su sentido, opuesto en ambos casos. En consecuencia,

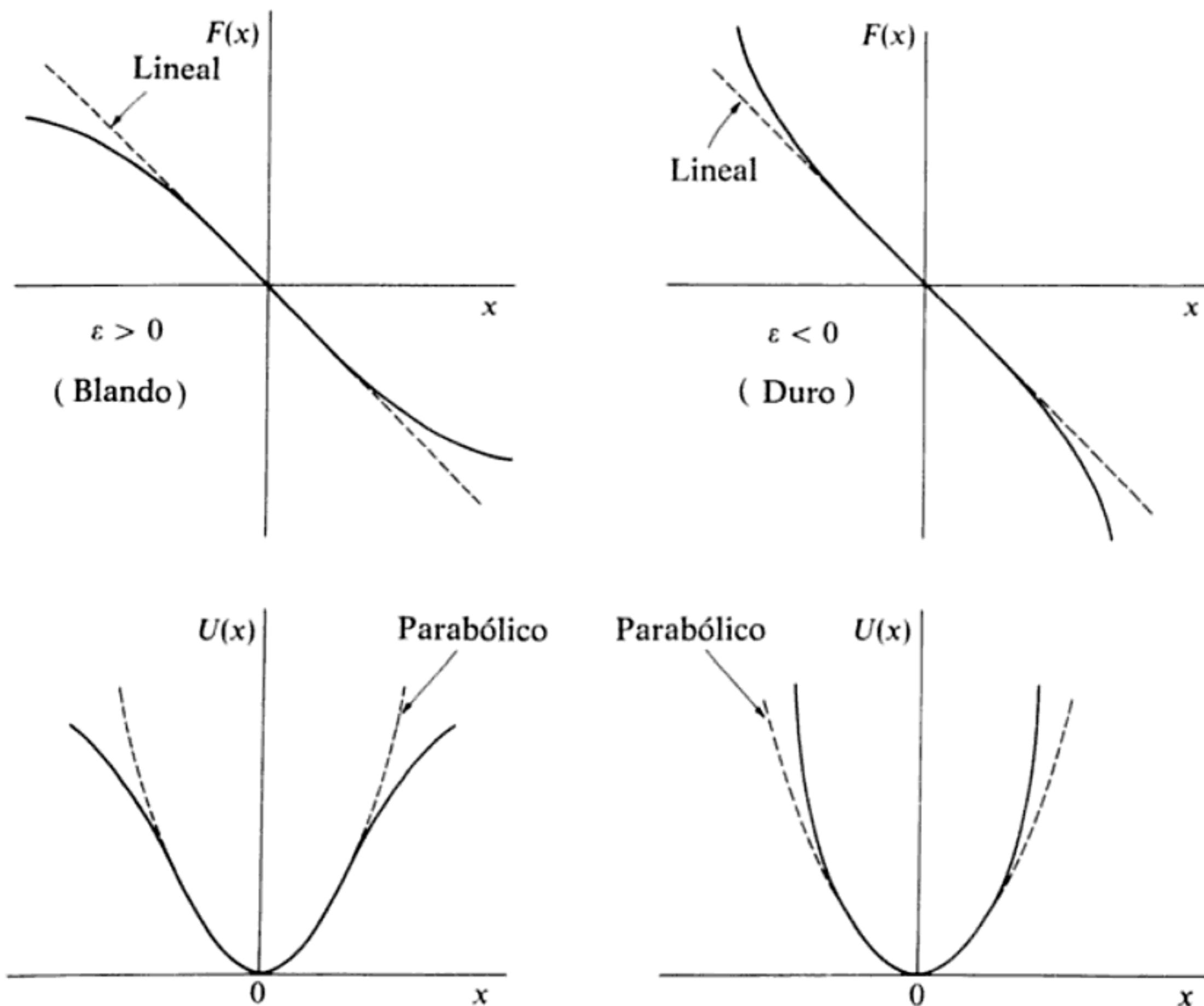


FIG. 5-2

cuando aparece simetría, la primera corrección que debe hacerse sobre una fuerza lineal es introducir un término proporcional a x^3 ; de aquí,

$$F(x) \cong -kx + \epsilon x^3 \quad (5.6a)$$

donde ϵ es generalmente una cantidad pequeña. El potencial que corresponde a una fuerza como ésta es

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{4}\epsilon x^4 \quad (5.6b)$$

Según sea el signo de ϵ , la fuerza puede tener un valor superior o inferior que el correspondiente a la aproximación lineal. Si $\epsilon > 0$, la fuerza será inferior al término lineal solo y se dice que el sistema es *blando*; si $\epsilon < 0$, la fuerza será superior y el sistema será *duro*. En la figura 5-2 se muestran las formas de la fuerza y del potencial para un sistema *blando* y para uno *duro*.

◆ Ejemplo 5.2 Sistema de muelles intrínsecamente alineal

Consideremos una partícula de masa m suspendida entre dos muelles iguales, tal como se representa en la figura 5-3a. Si ambos muelles están sin deformar (o sea, sin tensión y, por tanto, sin energía potencial los dos) cuando la partícula se encuentre en su posición de equilibrio, al desplazarse de ésta (figura 5-3b), y si despreciamos las fuerzas gravitatorias, cada uno de los muelles ejercerá una fuerza $-k(s-l)$ sobre

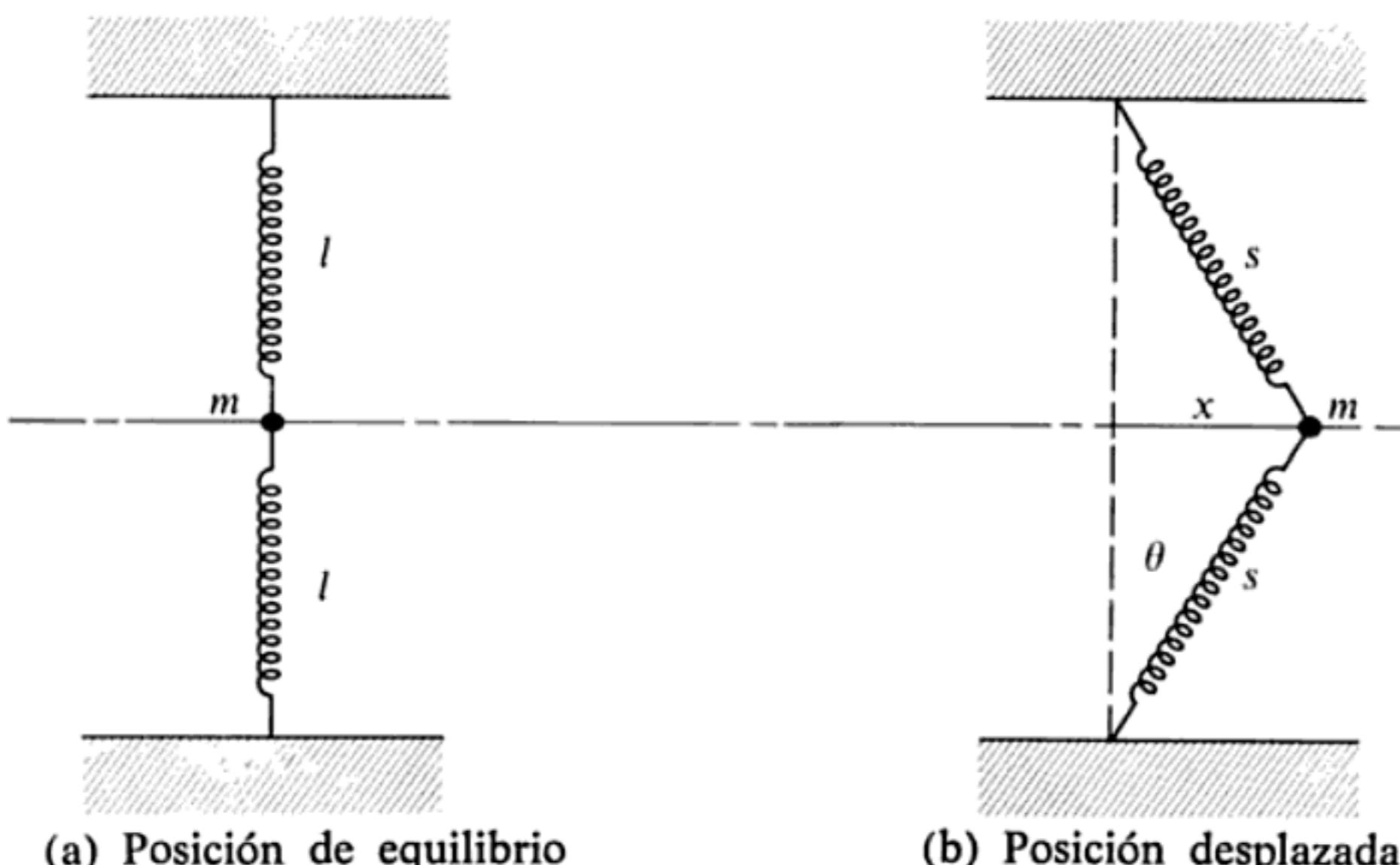


FIG. 5-3

la partícula (k es la constante de recuperación de cada muelle). La fuerza resultante (horizontal) que actúa sobre la partícula es

$$F = -2k(s - l)\sin\theta \quad (1)$$

Como

$$s = \sqrt{l^2 + x^2} \quad (2)$$

de forma que

$$\sin\theta = \frac{x}{s} = \frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}} \quad (3)$$

resulta

$$\begin{aligned} F &= -\frac{2kx}{\sqrt{l^2 + x^2}} \cdot (\sqrt{l^2 + x^2} - l) \\ &= -2kx \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (x/l)^2}} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

Si suponemos que x/l es pequeño y desarrollamos en serie el radical, tendremos

$$F = -kl \left(\frac{x}{l} \right)^3 \left[1 - \frac{3}{4} \left(\frac{x}{l} \right)^2 + \dots \right] \quad (5)$$

y cuando despreciamos todos los términos, salvo el primero, será

$$F(x) \cong -(k/l^2)x^3 \quad (6)$$

Por lo tanto, aun en el caso de que la amplitud se reduzca lo bastante como para que x/l pueda considerarse pequeño, resulta que la fuerza es todavía proporcional a x^3 y, en consecuencia, el sistema es *intrínsecamente alineal*. Por otra parte, si ha sido necesario alargar cada muelle una distancia d para sujetar a ellos la masa en su posición de equilibrio, la fuerza será (véase problema 5-2)

$$F(x) \cong -2(kd/l)x - [k(l-d)/l^3]x^3 \quad (7)$$

apareciendo un término lineal.

Examinando la expresión de la fuerza (7) se deduce que

$$\varepsilon = -k(l-d)/l^3 < 0 \quad (8)$$

con lo que el sistema resulta ser *duro* y en el caso de oscilaciones de pequeña amplitud el movimiento será aproximadamente armónico simple.

Frecuentemente en la realidad se presenta el caso de fuerzas y potenciales simétricos, aunque también aparecen las formas asimétricas en ocasiones; por ejemplo,

$$F(x) = -kx + \lambda x^2 \quad (5.7a)$$

a la que corresponde un potencial

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{3}\lambda x^3 \quad (5.7b)$$

En la figura 5-4 se representa este caso, en que el sistema es *duro* para $x > 0$ y *blando* para $x < 0$.

En la sección 5.5 estudiaremos algunos detalles relativos al movimiento en un potencial asimétrico.

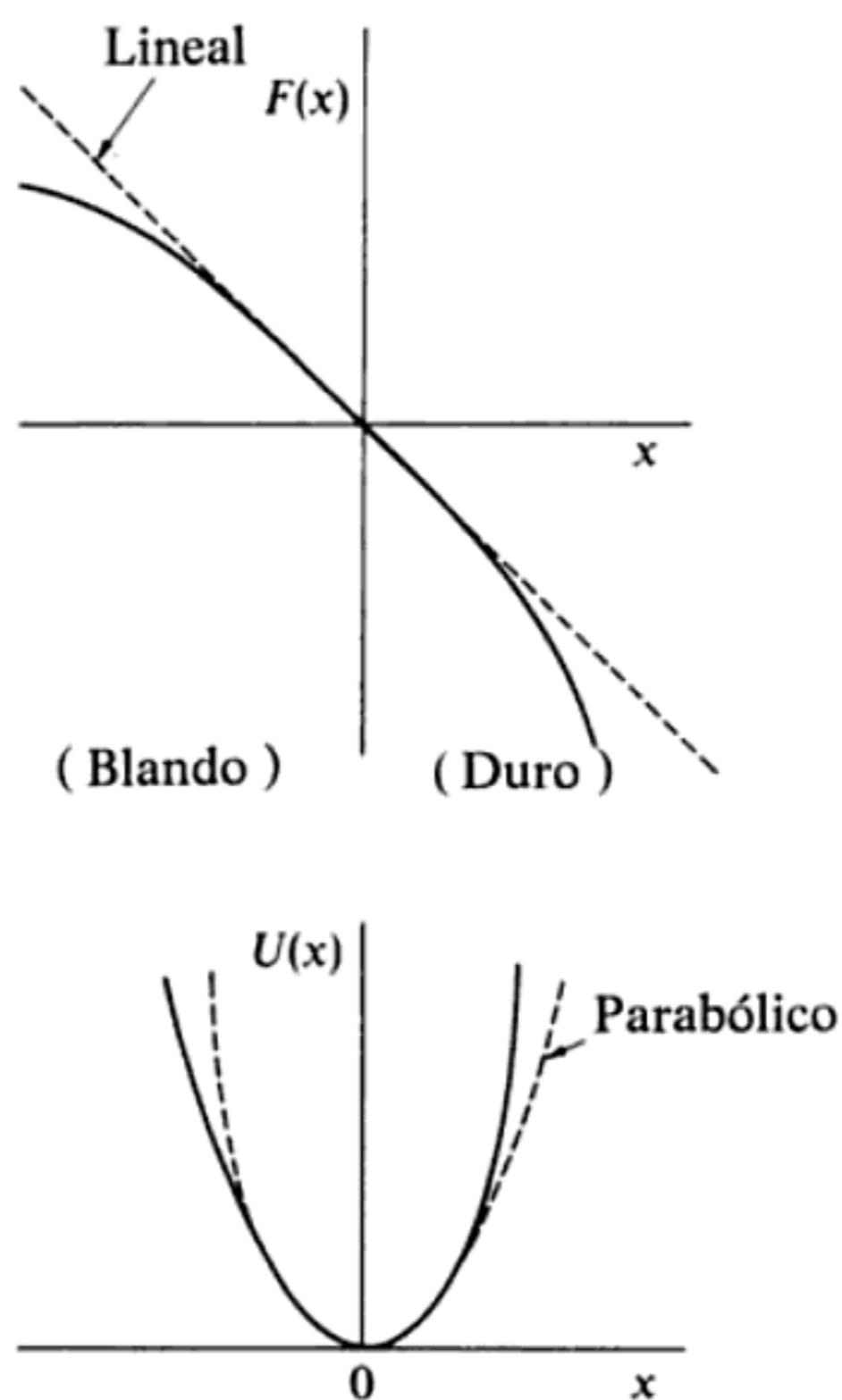


FIG. 5-4

5.3 Diagramas fásicos de los sistemas alineales

La construcción de un diagrama fásico de un sistema alineal puede llevarse a cabo utilizando la expresión 5.2, según la cual

$$\dot{x}(x) \propto \sqrt{E - U(x)}$$

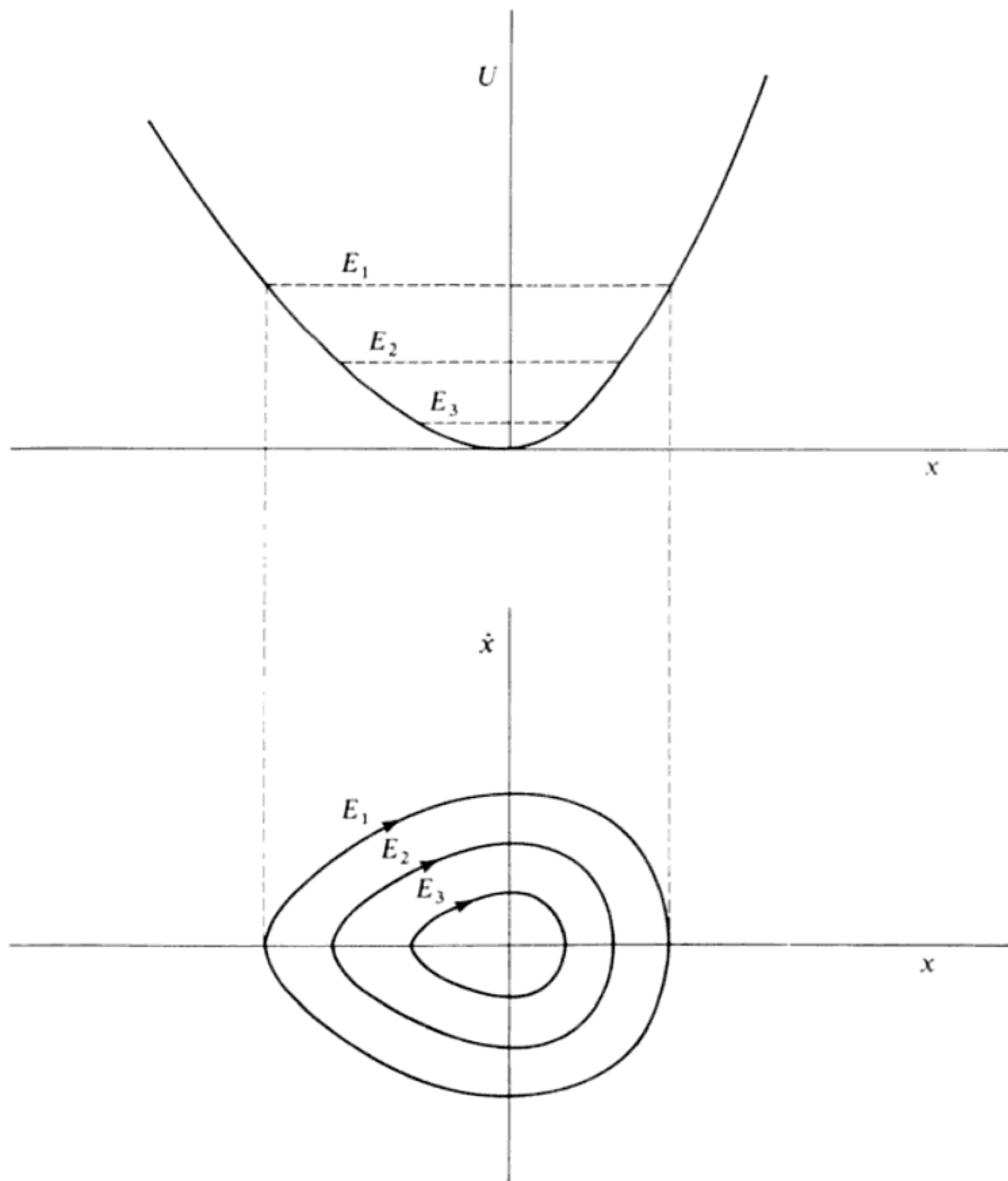


FIG. 5-5

Dado que en la generalidad de los casos $U(x)$ será una función complicada, sólo en raras ocasiones será posible obtener una expresión analítica de $\dot{x}(x)$ por lo que corrientemente habrá de recurrirse a métodos de aproximación. Por otra parte, es relativamente sencillo obtener una imagen cualitativa del diagrama fásico del movimiento de una partícula en un potencial cualquiera. Por ejemplo, consideremos el potencial asimétrico representado en la parte superior de la figura 5-5, que corresponde a un sistema *blando* para $x < 0$ y *duro* para $x > 0$. Cuando no haya amortiguamiento, al ser \dot{x} proporcional a $\sqrt{E - U(x)}$, es evidente que el diagrama fásico deberá exhibir una forma como la representada en la parte inferior de la figura. Las trayectorias del espacio fásico son ovaladas y se han trazado tres de ellas, que corresponden a los tres valores de la energía total que se indican mediante rectas de trazo discontinuo en el diagrama del potencial. Para valores de la energía total sólo ligeramente superiores al valor mínimo del potencial, la forma de las trayectorias se aproxima a la de una elipse. Cuando el sistema sea amortiguado, la partícula oscilante «describirá en espiral el pozo de potencial» llegando finalmente al reposo en la posición de equilibrio, $x = 0$.

Para el caso representado en la figura 5-5, si la energía total E de la partícula es inferior a la altura hasta la que llega el potencial a ambos lados de $x = 0$, la partícula quedará «atrapada» dentro del pozo de potencial (cfr. la región $x_1 < x < x_2$ de la figura 5-1). El punto $x = 0$ es una posición de equilibrio *estable*. En un capítulo posterior examinaremos algunos detalles relativos a la cuestión de la *estabilidad*. Por el momento nos basta con afirmar que una posición de equilibrio es estable, por definición, cuando una pequeña perturbación dé por resultado un movimiento *confinado* localmente, lo que claramente es el caso de la figura 5-5.

Como se muestra en la figura 5-6, en las proximidades de un *máximo* de potencial tiene lugar un tipo de movimiento cualitativamente distinto. En este caso, el punto $x = 0$ es de equilibrio *inestable* ya que toda pequeña perturbación aplicada a una partícula que se encuentre en reposo en él, dará por resultado un movimiento de la misma *no confinado* localmente.*

Si el potencial de la figura 5-6 fuese parabólico, o sea si $U(x) = -\frac{1}{2}kx^2$, entonces las trayectorias del espacio fásico correspondientes a la energía E_0 serían rectas y las correspondientes a las energías E_1 y E_2 hipérbolas. Por tanto, es éste el límite al que tenderían las trayectorias de la figura 5-6 cuando el término alineal del potencial tendiese a cero.

Partiendo de las trayectorias del espacio fásico correspondientes a los potenciales de las figuras 5-5 y 5-6, es posible construir rápidamente el diagrama fásico de un potencial cualquiera (como el de la figura 5-1).

* Es evidente que la definición de inestabilidad debe hacerse en función de un movimiento no confinado *localmente*, pues si existen otros máximos del potencial superiores al de $x = 0$, el movimiento quedará confinado por esas otras barreras de potencial.

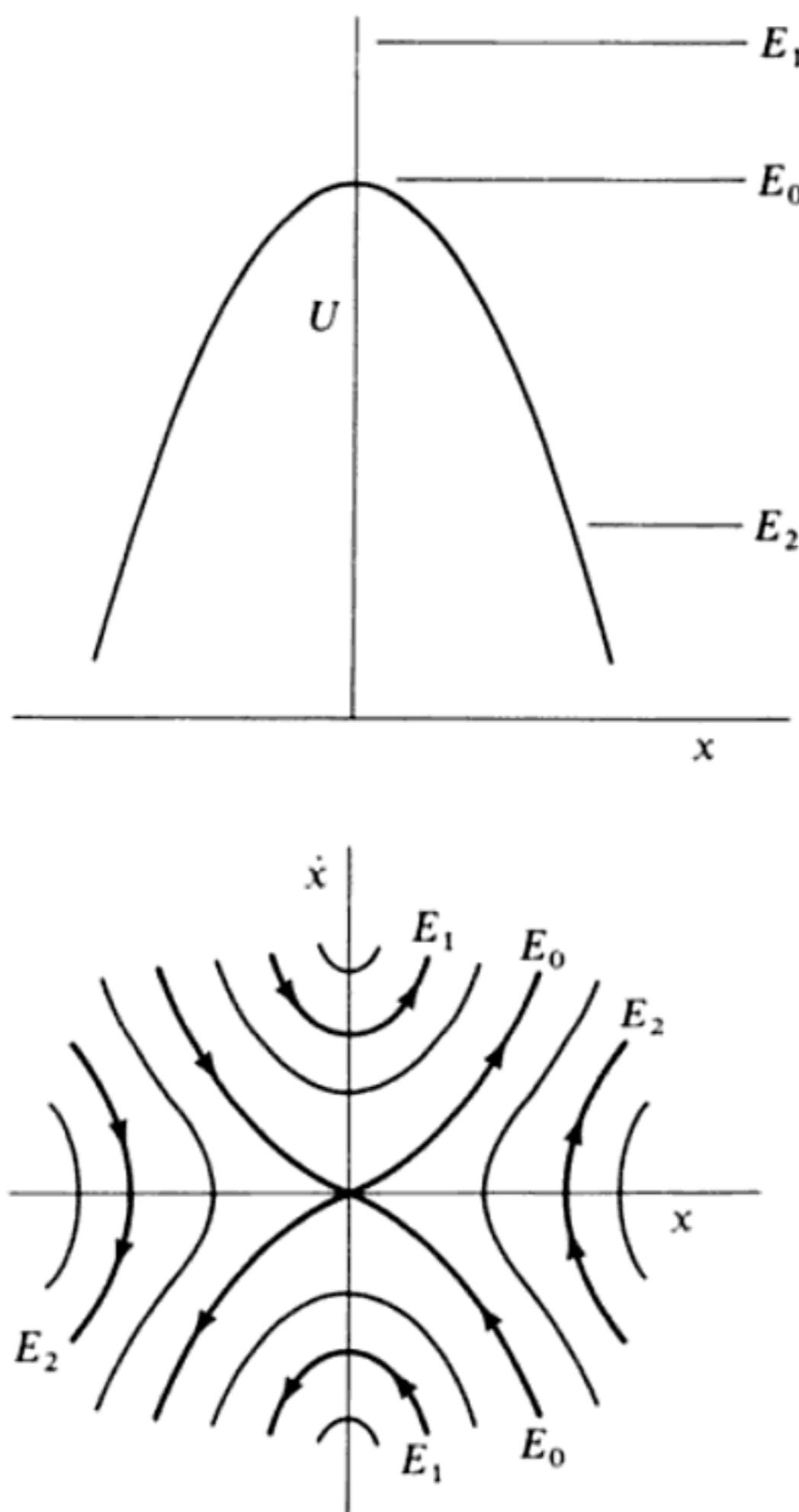


FIG. 5-6

Un importante tipo de ecuación lineal fue ampliamente estudiado por VAN DER POL en relación con la investigación de las oscilaciones en los circuitos de válvulas de vacío.* Esta ecuación es de la forma

$$\ddot{x} - \mu(x_0^2 - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (5.8)$$

donde μ es un parámetro positivo de pequeño valor. Los sistemas descritos por una ecuación de van der Pol presentan una propiedad muy interesante. Si la

* B. VAN DER POL, *Phil. Mag.* **2**, 978 (1926). Extensos estudios de la ecuación de van der Pol pueden encontrarse, por ejemplo, en MINORSKY (Mi47) o en ANDRONOW y CHAIKIN (An49); LINDSAY (Li51, págs. 64 a 66) y PIPES (Pi46, págs. 606 a 610) tratan el tema brevemente.

amplitud $|x|$ excede el valor crítico $|x_0|$, el coeficiente de \dot{x} será positivo y el sistema estará *amortiguado*. En cambio, si $|x| < |x_0|$, habrá *amortiguamiento negativo*, es decir, la amplitud del movimiento irá en *aumento*. Cabe esperar entonces que exista un cierto valor de la amplitud, para el cual el movimiento no sea

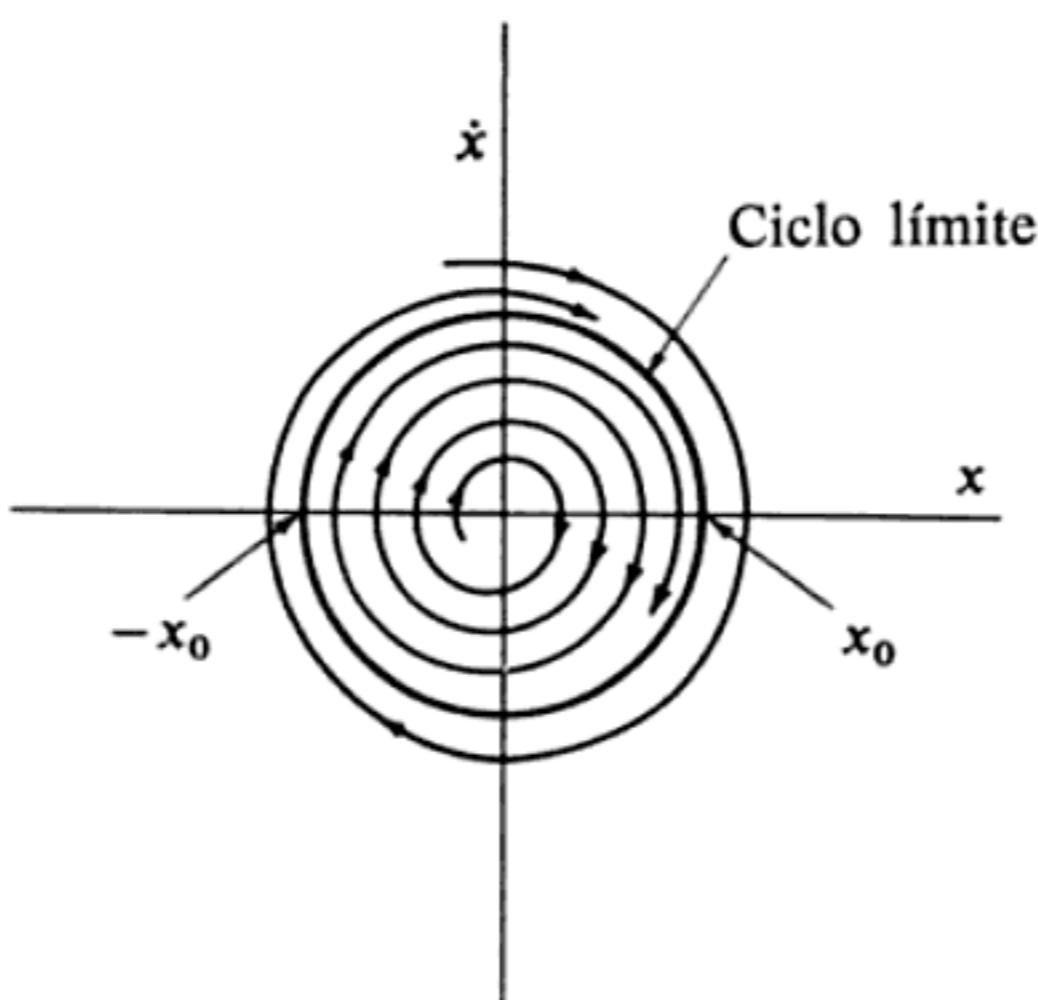


FIG. 5-7

creciente ni decreciente con el tiempo. La trayectoria correspondiente en el plano fásico recibe el nombre de *ciclo límite** (véase figura 5-7). Las trayectorias situadas en el exterior del ciclo límite son espirales que se recorren hacia dentro, mientras que las situadas en el interior son espirales que se recorren hacia fuera. En tanto que el ciclo límite defina un movimiento *confinado* localmente, podemos calificar de *estable* a la situación representada por él.

Todos los sistemas descritos por una ecuación de van der Pol son *autolimitantes*; es decir, una vez puestos en actividad bajo condiciones de amplitud creciente, el valor de ésta no crece indefinidamente, sino que su crecimiento sin límites queda evitado automáticamente. Esta propiedad es exhibida por estos sistemas, sea la amplitud inicial mayor o menor que la crítica (límite), x_0 .

5.4 Péndulo plano

El *péndulo plano* constituye un ejemplo de ciertos tipos de problemas de oscilaciones alineales, cuya solución puede expresarse en forma explícita mediante

* La expresión fue introducida por POINCARÉ, por lo que a menudo se dice *ciclo límite de Poincaré*.

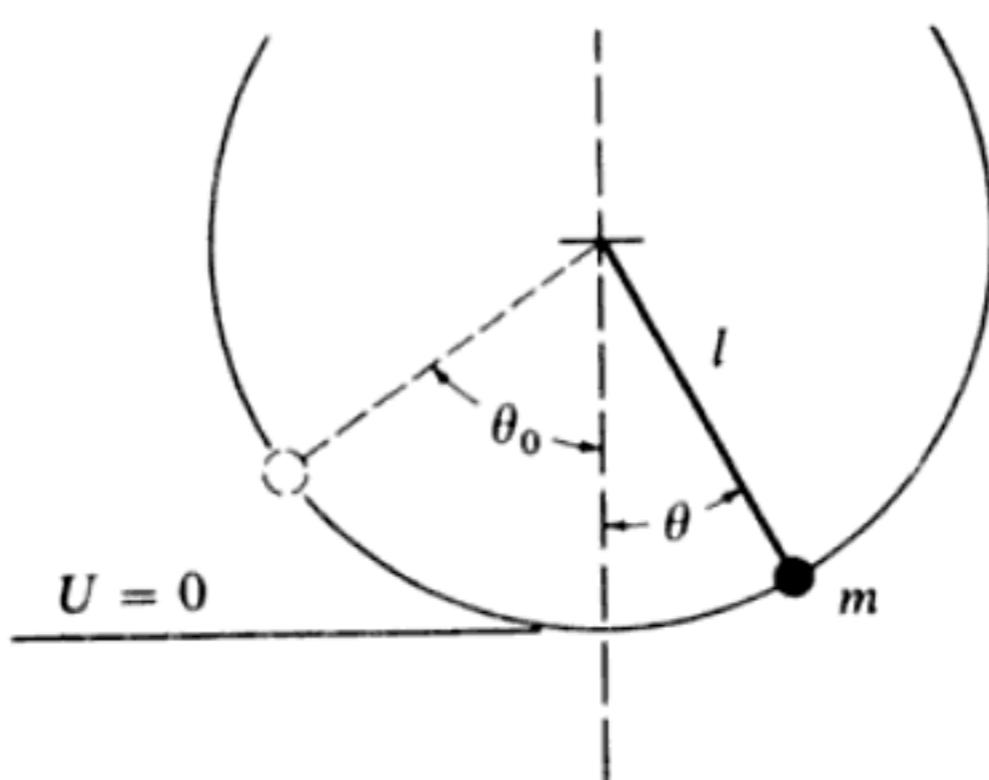


FIG. 5-8

integrales elípticas.* Supongamos una partícula de masa m limitada a moverse sobre una circunferencia vertical de radio l , por medio de una varilla inextensible y sin peso, tal como se representa en la figura 5-8. La fuerza gravitatoria

Aproximación lineal

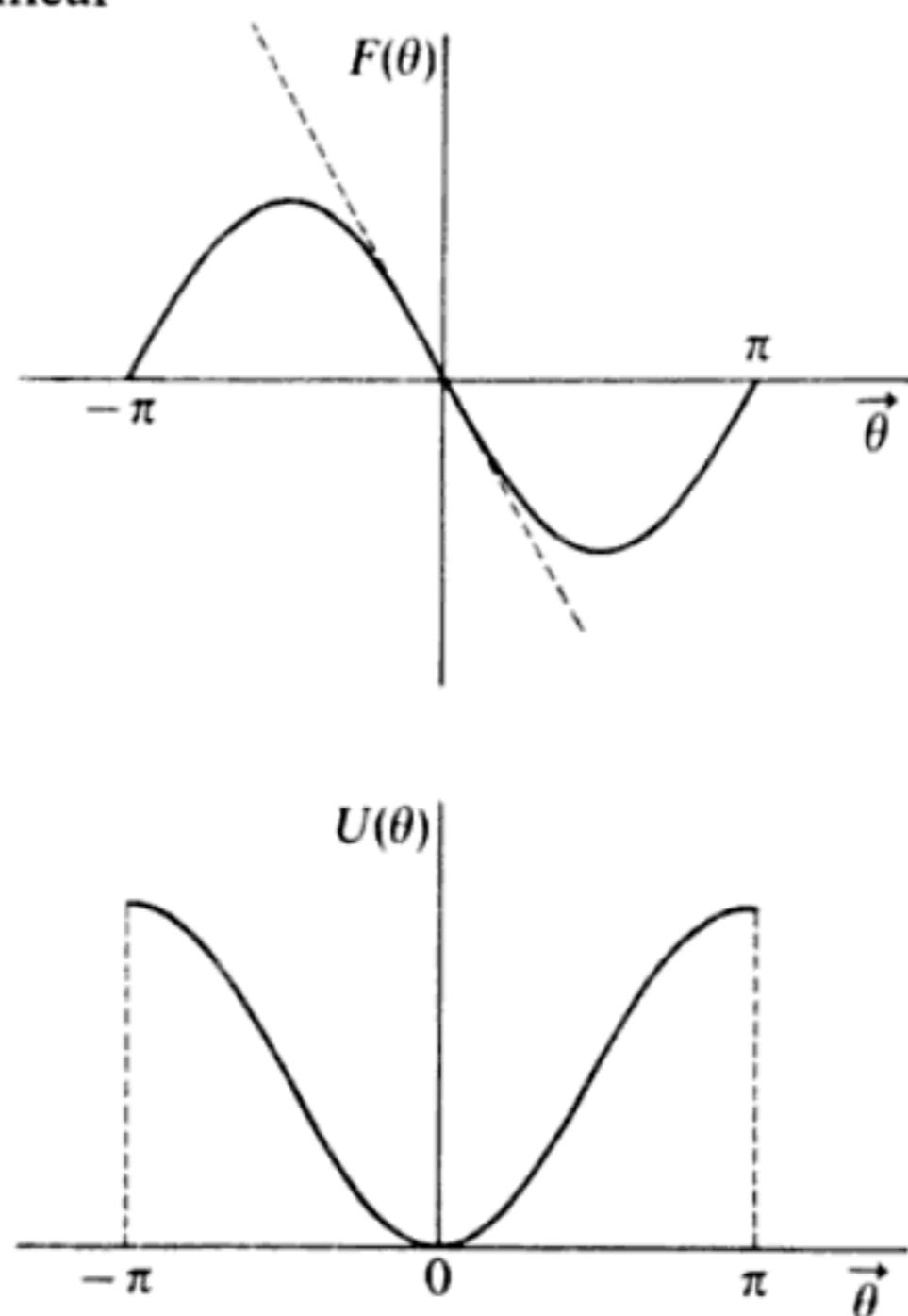


FIG. 5-9

* En el apéndice E.4 puede encontrarse una lista de integrales elípticas.

actúa, por supuesto, hacia abajo, pero la componente de esta fuerza responsable del movimiento es la *perpendicular* a la varilla. Esta componente, que se representa en la figura 5-9, vale simplemente $F(\theta) = -mg \operatorname{sen} \theta$. Claramente, el péndulo plano es un sistema alineal con una fuerza recuperadora simétrica, en el que sólo podrá utilizarse la aproximación lineal en caso de desviaciones angulares pequeñas.

La ecuación de movimiento del péndulo plano se obtiene con mayor facilidad igualando el momento de la fuerza respecto del eje de suspensión al producto de la aceleración angular por el momento de inercia respecto del mismo eje:

$$I\ddot{\theta} = IF \quad (5.9)$$

o bien, como $I = ml^2$,

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \operatorname{sen} \theta = 0 \quad (5.10)$$

donde

$$\omega_0^2 \equiv \frac{g}{l} \quad (5.11)$$

Cuando la amplitud del movimiento sea pequeña, podemos tomar $\operatorname{sen} \theta \approx \theta$, adquiriendo la ecuación del movimiento la expresión de la correspondiente al oscilador lineal:

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0 \quad (5.12)$$

Con esta simplificación, el período viene dado por la expresión conocida

$$\tau \cong 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (5.13)$$

Si queremos obtener la expresión del período en el caso general de que la amplitud sea finita, podemos empezar a partir de la ecuación 5.10. Sin embargo, como el sistema es *conservativo*, podemos hacer uso del hecho que

$$T + U = E = \text{cte.} \quad (5.14)$$

para obtener la solución manejando la energía del sistema, en vez de mediante la resolución de la ecuación de movimiento.

Si fijamos el origen de energía potencial en el punto más bajo de la trayectoria circular descrita por la lenteja del péndulo (o sea, en $\theta=0$; véase la figura 5-9), las energías cinética y potencial pueden expresarse

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \\ U &= mgl(1 - \cos \theta) \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

Si hacemos $\theta=\theta_0$ en el punto más alto del movimiento, entonces

$$\left. \begin{aligned} T(\theta = \theta_0) &= 0 \\ U(\theta = \theta_0) &= E = mgl(1 - \cos \theta_0) \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

Con la identidad trigonométrica

$$\cos \theta = 1 - 2 \operatorname{sen}^2(\theta/2)$$

tenemos

$$E = 2mgl \operatorname{sen}^2(\theta_0/2) \quad (5.17a)$$

y

$$U = 2mgl \operatorname{sen}^2(\theta/2) \quad (5.17b)$$

Si expresamos la energía cinética como diferencia entre la energía total y la energía potencial, tendremos

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 = 2mgl[\operatorname{sen}^2(\theta_0/2) - \operatorname{sen}^2(\theta/2)]$$

o sea,

$$\dot{\theta} = 2\sqrt{\frac{g}{l}} [\operatorname{sen}^2(\theta_0/2) - \operatorname{sen}^2(\theta/2)]^{\frac{1}{2}} \quad (5.18)$$

de donde

$$dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} [\operatorname{sen}^2(\theta_0/2) - \operatorname{sen}^2(\theta/2)]^{-\frac{1}{2}} d\theta \quad (5.19)$$

que integrada nos dará el período τ . Como el movimiento es simétrico, la integración desde $\theta=0$ hasta $\theta=\theta_0$ dará $\tau/4$; por tanto,

$$\tau = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\theta_0} [\operatorname{sen}^2(\theta_0/2) - \operatorname{sen}^2(\theta/2)]^{-\frac{1}{2}} d\theta \quad (5.20)$$

y que ésta es una *integral elíptica de primera especie** podrá apreciarse más claramente haciendo las sustituciones

$$z = \frac{\operatorname{sen}(\theta/2)}{\operatorname{sen}(\theta_0/2)}; \quad k = \operatorname{sen}(\theta_0/2) \quad (5.21)$$

Entonces,

$$dz = \frac{\cos(\theta/2)}{2\operatorname{sen}(\theta_0/2)} d\theta = \frac{\sqrt{1-k^2 z^2}}{2k} d\theta \quad (5.22)$$

de donde resulta

$$\tau = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^1 [(1-z^2)(1-k^2 z^2)]^{-\frac{1}{2}} dz \quad (5.23)$$

En diversas tablas pueden encontrarse los valores numéricos de las integrales de esta clase.

Para que haya movimiento oscilatorio ha de ser $\theta_0 < \pi$, o, lo que es igual, $\operatorname{sen}(\theta_0/2) = k < 1$. En este caso, la integral 5.23 podrá calcularse desarrollando $(1-k^2 z^2)^{-\frac{1}{2}}$ en serie de potencias:

$$(1-k^2 z^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{k^2 z^2}{2} + \frac{3k^4 z^4}{8} + \dots \quad (5.24)$$

La expresión del período se transformará en

$$\begin{aligned} \tau &= 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^1 \frac{dz}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}} \left[1 + \frac{k^2 z^2}{2} + \frac{3k^4 z^4}{8} + \dots \right] \\ &= 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left[\frac{\pi}{2} + \frac{k^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{3k^4}{8} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{\pi}{2} + \dots \right] \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9k^4}{64} + \dots \right] \end{aligned} \quad (5.25)$$

Cuando k sea grande (o sea, próximo a 1), serán necesarios muchos términos para conseguir un resultado razonablemente preciso. Sin embargo, para k pe-

* Acúdase a las ecuaciones E.28a y E.28b, apéndice E.

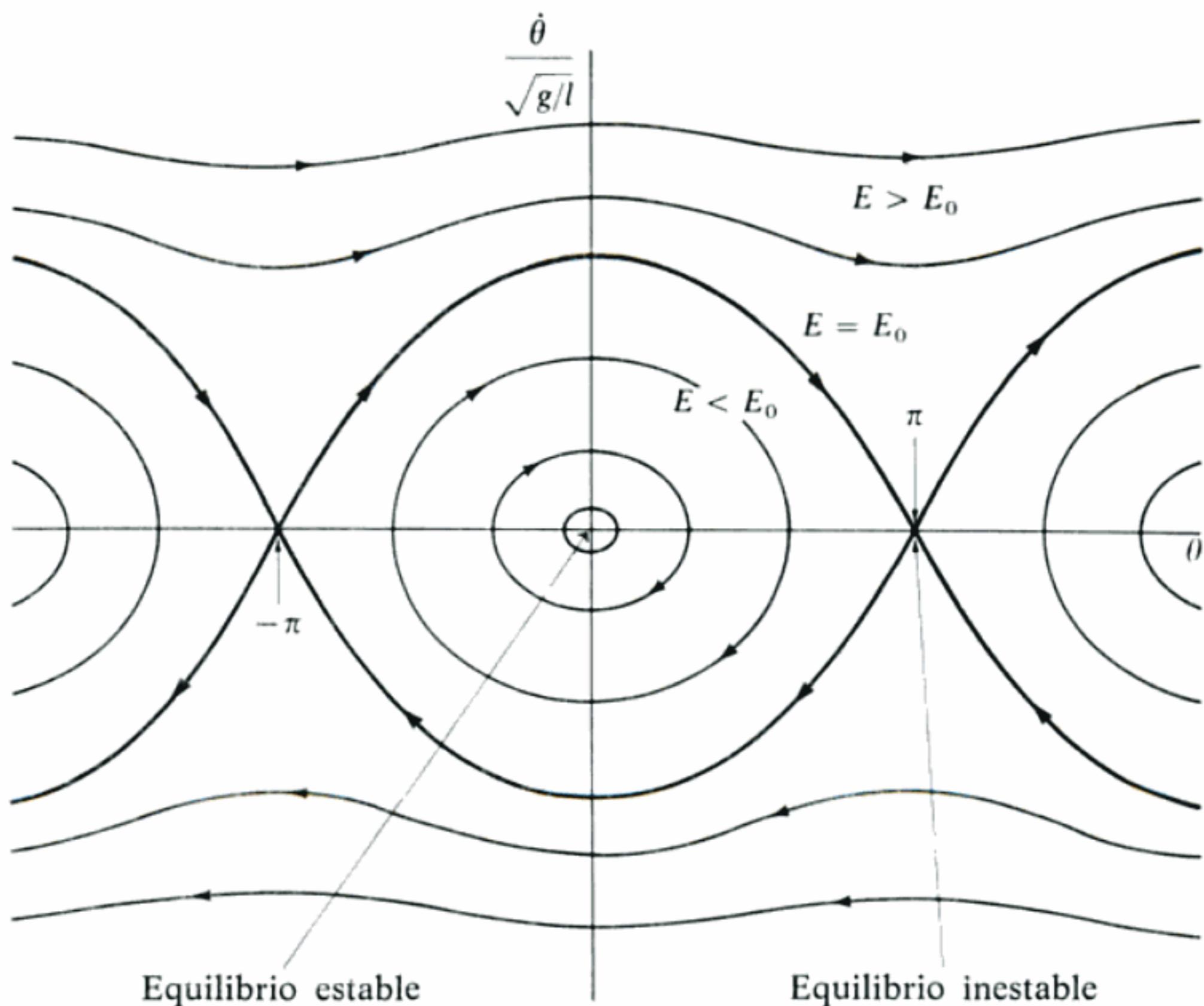


FIG. 5-10

queña, el desarrollo converge rápidamente y, como $k = \sin(\theta_0/2)$, tendremos $k \approx (\theta_0/2) - (\theta_0^3/48)$ y el resultado, correcto hasta la cuarta potencia, será

$$\tau \cong 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 + \frac{11}{3072} \theta_0^4 \right] \quad (5.26)$$

Vemos, pues, que aunque el péndulo plano no es isocrono, lo es muy aproximadamente en el caso de oscilaciones de amplitud pequeña.*

El diagrama fásico del péndulo plano (figura 5-10) es fácil de construir ya que la ecuación 5.18 nos da la relación necesaria, $\dot{\theta} = \dot{\theta}(\theta)$. El parámetro θ_0 repre-

* Hecho descubierto por GALILEO en la catedral de Pisa en 1581. La fórmula del período de las pequeñas oscilaciones fue obtenida por HUYGENS en 1673. El primero en estudiar las oscilaciones finitas fue EULER en 1736.

senta la energía total a través de 5.17a. Si θ y θ_0 son ángulos pequeños, la ecuación 5.18 podrá escribirse

$$\left(\sqrt{\frac{l}{g}}\dot{\theta}\right)^2 + \theta^2 \cong \theta_0^2 \quad (5.27)$$

O sea, si las coordenadas del plano fásico son θ y $\dot{\theta}/\sqrt{g/l}$, las trayectorias cercanas a $\theta=0$ serán aproximadamente circulares. Cabía esperar este resultado, ya que para θ_0 pequeño el movimiento es armónico simple aproximadamente.

En caso de que $-\pi < \theta < \pi$ y $E < 2mgl = E_0$, la situación es equivalente a la de una partícula prisionera en el pozo de potencial $U(\theta) = mgl(1 - \cos \theta)$ (véase figura 5-9). Por lo tanto, en esta región las trayectorias del plano fásico serán curvas cerradas que vienen dadas por 5.18. Como el potencial es periódico en θ , en las regiones $\pi < \theta < 3\pi$, $-3\pi < \theta < -\pi$, etc., existirán exactamente las mismas trayectorias. Los puntos $\theta = \dots, -2\pi, 0, 2\pi, \dots$ a lo largo del eje θ serán posiciones de equilibrio *estable*.

Para valores de la energía total superiores a E_0 , el movimiento ya no es oscilatorio, si bien continúa siendo periódico. Esta situación corresponde al caso de que el péndulo ejecute revoluciones completas en torno de su eje de suspensión.

Cuando la energía total sea igual a E_0 , podremos deducir por 5.17a que $\theta_0 = \pi$. En este caso, la ecuación 5.18 se reduce a

$$\dot{\theta} = \pm 2\sqrt{\frac{g}{l}} \cos(\theta/2)$$

y así, en el caso de que $E = E_0$, las trayectorias del plano fásico serán funciones coseno (obsérvense las curvas de trazo grueso de la figura 5-10). Existen dos ramas, según sea el sentido del movimiento.

En realidad, las trayectorias del plano fásico para $E = E_0$ no representan estados posibles de movimiento continuo del péndulo. Si el péndulo se encontrase en reposo, por ejemplo en $\theta = \pi$ (que es un punto de las trayectorias $E = E_0$), ocurriría que cualquier pequeña perturbación ocasionaría un movimiento que seguiría una trayectoria *muy próxima* a una de las que nacen en $\theta = \pi$, pero no exactamente una de éstas, ya que la energía total sería $E = E_0 + \delta$, donde δ es una cantidad muy pequeña pero no nula. Si el movimiento tuviera lugar a lo largo de una de las trayectorias $E = E_0$, el péndulo alcanzaría uno de los puntos $\theta = n\pi$ a una velocidad exactamente nula, ¡pero después de un tiempo infinito! (Lo que puede comprobarse calculando 5.20 para $\theta_0 = \pi$; el resultado es $\tau \rightarrow \infty$.)

La trayectoria del plano fásico que separa regiones de movimiento confinado localmente de las de movimiento no confinado localmente recibe el nombre de *separatriz*. Una *separatriz* pasará siempre por un punto de equilibrio inestable.

■ 5.5 Oscilaciones alineales en un potencial asimétrico — Método de las perturbaciones

Examinemos ahora un caso en el que el potencial pueda expresarse

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{3}m\lambda x^3 \quad (5.28)$$

donde la fuerza es

$$F(x) = -kx + m\lambda x^2 \quad (5.29)$$

y la ecuación diferencial que da cuenta de las oscilaciones libres sin amortiguamiento de una partícula que se mueve bajo la influencia de una fuerza como ésta es

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \lambda x^2 = 0 \quad (5.30)$$

De esta ecuación obtendremos una solución aproximada por el método de las *perturbaciones*. Ahora, λ es por hipótesis una cantidad pequeña, por lo que el movimiento de la partícula ha de ser muy parecido al de un oscilador armónico simple.* Por tanto, podemos expresar la diferencia entre el movimiento auténtico y el del oscilador armónico simple en forma de serie de potencias de λ . Entonces, la solución podrá escribirse

$$x(t) = x_0 + \lambda x_1 + \lambda^2 x_2 + \dots \quad (5.31)$$

donde x_0 es la solución correspondiente al oscilador armónico simple y x_1, x_2, \dots , son funciones del tiempo que se han de determinar. Vamos a limitar nuestros cálculos a la aproximación de primer orden; es decir, supondremos que λ es lo bastante pequeña para que la aproximación

$$x(t) \cong x_0 + \lambda x_1 \quad (5.32)$$

sea aceptable. Al llevar esta expresión a 5.30, encontramos

$$\ddot{x}_0 + \lambda \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_0 + \omega_0^2 \lambda x_1 - \lambda x_0^2 - 2\lambda^2 x_0 x_1 - \lambda^3 x_1^2 = 0 \quad (5.33)$$

* Hay que tener cuidado al hacer afirmaciones como ésta con relación a las ecuaciones alineales. Las razones basadas en la experiencia con ecuaciones lineales no son necesariamente válidas cuando se trata con ecuaciones alineales. Simplemente nos limitamos a suponer que es posible hacer un desarrollo en serie como el indicado. En la sección siguiente trataremos de una dificultad fundamental que tiene este planteamiento.

pero, como λ es una cantidad pequeña, podemos despreciar los términos en λ^2 y λ^3 . (Este orden de aproximación es el mismo que nos permite pasar de 5.31 a 5.32 despreciando potencias de λ de los mismos grados y superiores.) Entonces, agrupando términos,

$$(\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0) + \lambda(\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 - x_0^2) = 0 \quad (5.34)$$

Esta ecuación debe ser válida cualquiera que sea λ (en tanto λ sea pequeña); de aquí resulta que cada uno de los términos entre paréntesis debe anularse por separado

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0 \quad (5.35a)$$

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = x_0^2 \quad (5.35b)$$

El procedimiento a seguir será obtener la expresión de $x_0(t)$ mediante la ecuación 5.35a, llevándola después a la 5.35b y, resolviendo ésta, hallar $x_1(t)$. Primera-mente, tenemos

$$x_0(t) = A \cos \omega_0 t \quad (5.36)$$

donde, para simplificar, se ha despreciado la fase δ . Entonces

$$\begin{aligned} x_0^2 &= A^2 \cos^2 \omega_0 t \\ &= \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2} \cos 2\omega_0 t \end{aligned} \quad (5.37)$$

Al sustituir x^2 en la ecuación 5.35b resulta

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2} \cos 2\omega_0 t \quad (5.38)$$

Como la integral general de 5.38 sin segundo miembro ya aparece en la solución hallada para $x_0(t)$ y puesto que la expresión final de $x(t)$ implica una combinación de $x_0(t)$ y $x_1(t)$, únicamente necesitaremos examinar una integral particular para $x_1(t)$. Escogemos

$$x_1(t) = B \cos 2\omega_0 t + C \quad (5.39)$$

y, entonces,

$$-3\omega_0^2 B \cos 2\omega_0 t + \omega_0^2 C = \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2} \cos 2\omega_0 t \quad (5.40)$$

Por tanto,

$$B = -\frac{A^2}{6\omega_0^2}; \quad C = \frac{A^2}{2\omega_0^2} \quad (5.41)$$

y así, la función de primer orden queda

$$x_1(t) = -\frac{A^2}{6\omega_0^2} \cos 2\omega_0 t + \frac{A^2}{2\omega_0^2} \quad (5.42)$$

y la solución de $x(t)$, correcta hasta la primera potencia de λ , será

$$x(t) = A \cos \omega_0 t - \lambda \cdot \frac{A^2}{6\omega_0^2} (\cos 2\omega_0 t - 3) \quad (5.43)$$

Por tanto, vemos que la inclusión de un término $m\lambda x^2$ en la expresión de la fuerza introduce en el movimiento una pulsación $2\omega_0$, o sea un segundo armónico de la pulsación propia o fundamental ω_0 . Si en 5.32 hubiéramos dejado términos de potencias de λ mayores, habría aparecido la serie de armónicos $2\omega_0, 3\omega_0, 4\omega_0, \dots$.

■ 5.6 El problema de los términos seculares en las soluciones aproximadas

El procedimiento expuesto en la sección anterior para resolver ecuaciones alineales tuvo su origen en POISSON y fue ampliado por POINCARÉ. El desarrollo efectuado es correcto *en cuanto que sirve*, pero si intentamos obtener la solución con el orden de aproximación siguiente (o sea, x_2) se hace evidente inmediatamente que el método de Poisson-Poincaré está sometido a una dificultad básica. El problema consiste en que, en la solución, aparece un término proporcional al tiempo (llamado un término *secular*, que siempre aumenta con el tiempo). Por otra parte, el movimiento confinado de una partícula en un potencial unidimensional conservativo es claramente *periódico*, por lo que ningún término de la solución $x(t)$ que sea proporcional a t (o a alguna potencia de t) tendrá significado físico. La razón por la cual aparece este término es fácil de comprender. Cuando el término alineal es cero, la solución es periódica de período $2\pi/\omega$. No obstante, la inclusión del término alineal puede hacer periódica la solución, si bien con un período diferente de $2\pi/\omega$. Por ejemplo, si la pulsación de la solución no perturbada es ω_0 y si la

alinealidad del sistema altera esta pulsación en una pequeña cantidad δ , el desarrollo de $\sin(\omega_0 + \delta)t$ será

$$\sin(\omega_0 + \delta)t = \sin \omega_0 t + t\delta \cos \omega_0 t - \frac{t^2 \delta^2}{2} \sin \omega_0 t - \dots$$

y, por tanto, si la aproximación se da por terminada después de un número finito de términos, los términos seculares aparecerán inevitablemente.

En el ejemplo tratado en la sección 5.5 el término secular sólo aparece cuando se intenta determinar una solución aproximada de segundo orden (véase problema 5-10), pero en el caso del potencial simétrico simple esta dificultad aparece ya dentro de la aproximación de *primer* orden. Es posible comprobar esto en forma explícita como sigue. La ecuación de movimiento es

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon x^3 \quad (5.44)$$

a la que intentaremos dar una solución perturbada (de primer orden) escribiendo

$$x(t) \cong x_0 + \varepsilon x_1 \quad (5.45)$$

con lo cual la ecuación de movimiento se separará en (cfr. ecuaciones 5.35)

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0 \quad (5.46a)$$

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = x_0^3 \quad (5.46b)$$

Para solución de orden cero tomamos

$$x_0(t) = A \cos \omega_0 t \quad (5.47)$$

de forma que la ecuación 5.46b queda

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 &= A^3 \cos^3 \omega_0 t \\ &= \frac{1}{4} A^3 (3 \cos \omega_0 t + \cos 3\omega_0 t) \end{aligned} \quad (5.48)$$

cuya solución es

$$x_1(t) = \frac{A^3}{32\omega_0^2} (12\omega_0 t \sin \omega_0 t - \cos 3\omega_0 t) \quad (5.49)$$

y el término secular aparece en la solución de primer orden. Este término, carente de significado físico, debe ser eliminado de la solución. Procedimientos de carácter general para enfrentarse con términos seculares indeseables pueden encontrarse en ANDRONOW y CHAIKIN (An49) y en MINORSKY (Mi47), entre otros.

Vamos a describir ahora un procedimiento para la eliminación del término secular aplicando a la ecuación 5.44 el método debido a KRYLOFF y BOGOLIUBOFF, que es una derivación del de GYLDE y LINDSTEDT utilizado en mecánica celeste. Desarrollemos, como antes, $x(t)$

$$x(t) = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots \quad (5.50a)$$

y desarrollemos también (el cuadrado de) la pulsación

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2 + \dots \quad (5.50b)$$

donde las constantes α_n serán determinadas con la condición de que los términos seculares desaparezcan. Sustituyendo 5.50a y 5.50b en la ecuación 5.44 e igualando a cero los coeficientes de las potencias iguales de ε , tendremos

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0 \quad (5.51a)$$

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = x_0^3 - \alpha_1 x_0 \quad (5.51b)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = 3x_0^2 x_1 - \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_0 \quad (5.51c)$$

que nos darán una solución correcta hasta la segunda potencia de ε ; llevando adelante el procedimiento podrán obtenerse mayores aproximaciones.

Las condiciones iniciales son

$$x(0) = A; \quad \dot{x}(0) = 0$$

las cuales, a la vista de 5.50a, nos llevan a

$$x_0(0) = A, \quad \dot{x}_0(0) = 0$$

$$x_i(0) = 0, \quad \dot{x}_i(0) = 0; \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

La ecuación 5.51a nos da la solución de orden cero (o *generatriz*)

$$x_0(t) = A \cos \omega t \quad (5.52)$$

que satisface las condiciones iniciales. Llevando esta expresión de x_0 a 5.51b tenemos

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= A^3 \cos^3 \omega t - \alpha_1 A \cos \omega t \\ &= (\frac{3}{4}A^3 - \alpha_1 A) \cos \omega t + \frac{1}{4}A^3 \cos 3\omega t\end{aligned}\quad (5.53)$$

ecuación en la que es el término proporcional a $\cos \omega t$ el responsable del término secular. La solución a una ecuación de esta forma se compone de dos partes, una que es la integral general de la ecuación homogénea más una integral particular (es decir, un término o términos que reproduzcan el segundo miembro). En general, un término proporcional a $\cos \omega t$ será necesario para la integral particular, pero en el caso de la ecuación 5.53 este término ya aparecerá en la integral general de la ecuación homogénea y, por tanto,* será preciso que incluyamos un término proporcional a $t \cos \omega t$ en la integral particular. Es éste el término secular y podrá eliminarse igualando a cero el coeficiente de $\cos \omega t$ en la ecuación 5.53. Con esto, α_1 deberá ser

$$\alpha_1 = \frac{3}{4}A^2$$

y la ecuación 5.53 se reducirá así a

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \frac{1}{4}A^3 \cos 3\omega t \quad (5.54)$$

cuya solución, satisfechas las condiciones iniciales, será

$$x_1(t) = \frac{A^3}{32\omega^2} (\cos \omega t - \cos 3\omega t) \quad (5.55)$$

y, por tanto, la solución completa, correcta hasta la primera potencia de ϵ , resulta ser

$$x(t) = \left(1 + \frac{\epsilon A^2}{32\omega^2}\right) A \cos \omega t - \frac{\epsilon A^3}{32\omega^2} \cos 3\omega t \quad (5.56)$$

Asimismo, al llevar el valor de α_1 a 5.50b, obtenemos la expresión de la pulsación, correcta hasta el primer orden de aproximación en ϵ ,

$$\begin{aligned}\omega_0 &= (\omega^2 + \alpha_1 \epsilon)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\omega^2 + \frac{3}{4}A^2 \epsilon)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

* Véase sección C.2, apéndice C.

Desarrollando en serie el radical y despejando ω , encontramos

$$\omega \cong \omega_0 \left(1 - \frac{3A^2}{8\omega_0^2} \varepsilon \right) \quad (5.57)$$

Para obtener la solución de segundo orden sustituimos los valores de x_0 y x_1 dados por 5.52 y 5.54, respectivamente, en la ecuación 5.51c:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 &= \frac{3A^5}{32\omega^2} \cos^2 \omega t (\cos \omega t - \cos 3\omega t) \\ &= -\frac{3A^5}{128\omega^2} (\cos \omega t - \cos 3\omega t) - \alpha_2 A \cos \omega t \end{aligned} \quad (5.58)$$

Con las igualdades

$$\left. \begin{aligned} \cos^3 \omega t &= \frac{3}{4} \cos \omega t + \frac{1}{4} \cos 3\omega t \\ \cos^2 \omega t \cos 3\omega t &= \frac{1}{4} \cos \omega t + \frac{1}{2} \cos 3\omega t + \frac{1}{4} \cos 5\omega t \end{aligned} \right\} \quad (5.59)$$

los términos de 5.58 que contienen $\cos 3\omega t$ desaparecen y tenemos

$$\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = \left(\frac{3A^5}{128\omega^2} - \alpha_2 A \right) \cos \omega t - \frac{3A^5}{128\omega^2} \cos 5\omega t \quad (5.60)$$

Por las mismas razones que antes, el coeficiente de $\cos \omega t$ debe anularse, resultando

$$\alpha_2 = -\frac{3A^4}{128\omega^2}$$

y la solución de 5.60, una vez impuestas las condiciones iniciales, será

$$x_2(t) = -\frac{A^5}{1024\omega^4} (\cos \omega t - \cos 5\omega t) \quad (5.61)$$

Por su parte, la solución completa al problema, correcta hasta la segunda potencia de ϵ , será

$$\begin{aligned}x(t) = & \left(1 + \frac{\epsilon A^2}{32\omega^2} - \frac{\epsilon^2 A^4}{1024\omega^4}\right) A \cos \omega t \\& + \left(-\frac{\epsilon A^2}{32\omega^2}\right) A \cos 3\omega t + \left(\frac{\epsilon^2 A^4}{1024\omega^4}\right) A \cos 5\omega t\end{aligned}\quad (5.62)$$

y para la pulsación, con igual orden de aproximación, tendremos

$$\omega_0 = \left(\omega^2 + \frac{3}{4} A^2 \epsilon - \frac{3A^4}{128\omega^2} \epsilon^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

o bien,

$$\omega \cong \omega_0 \left(1 - \frac{3A^2}{8\omega_0^2} \epsilon + \frac{3A^4}{256\omega_0^4} \epsilon^2\right)\quad (5.63)$$

Evidentemente, el método es ampliable al orden de aproximación que se desee.

■ 5.7 Aparición de subarmónicos

En el estudio llevado a cabo en las secciones precedentes se ha puesto de manifiesto el hecho de que los términos alineales que aparezcan en la expresión de la fuerza que actúa sobre una partícula oscilante dan origen a pulsaciones de oscilación que son múltiplos de la pulsación impulsora del sistema. Bajo ciertas condiciones pueden aparecer, además de los armónicos, pulsaciones que son fracciones racionales de la fundamental, los *subarmónicos*. Vamos a poner de manifiesto este fenómeno examinando las condiciones en que se produce el subarmónico de orden 3 (o sea, la pulsación $\omega/3$). Elijamos una fuerza alineal simétrica, de forma que la ecuación de movimiento sea

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \epsilon x^3 = B \cos \omega t\quad (5.64)$$

Probemos la función

$$x_1(t) = C \cos \omega t + D \cos(\omega/3)t\quad (5.65)$$

Cuando llevemos esta expresión de $x_1(t)$ a 5.64 y utilicemos las igualdades trigonométricas adecuadas para simplificar el resultado, la condición de que el coeficiente de $\cos(\omega/3)t$ debe ser nulo dará

$$D \left[\left(\omega_0^2 - \frac{\omega^2}{9} \right) - \frac{3}{4} \varepsilon (D^2 + CD + 2C^2) \right] = 0 \quad (5.66)$$

que si ha de cumplirse para $D \neq 0$, debe ser

$$\omega_0^2 - \frac{\omega^2}{9} = \frac{3}{4} \varepsilon (D^2 + CD + 2C^2) \quad (5.67)$$

ecuación de segundo grado en D , cuya solución es

$$D = -\frac{C}{2} \pm \frac{1}{2} \left[\frac{16}{27\varepsilon} (9\omega_0^2 - \omega^2) - 7C^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.68)$$

Como D ha de ser real, el discriminante ha de ser positivo o cero, de forma que

$$\frac{16}{27\varepsilon} (9\omega_0^2 - \omega^2) \geq 7C^2 \quad (5.69)$$

Por lo cual, la restricción en ω es

$$\omega \leq 3 \sqrt{\omega_0^2 - \frac{21\varepsilon C^2}{16}}, \quad \varepsilon > 0 \quad (5.70a)$$

de donde resulta

$$\omega \geq 3 \sqrt{\omega_0^2 + \frac{21\varepsilon C^2}{16}}, \quad \varepsilon < 0 \quad (5.70b)$$

Bajo ciertas condiciones estarán presentes los subarmónicos únicamente (véase problema 5-13).

5.8 Intermodulación y tonos de combinación

Todo oscilador lineal cumple con el principio de superposición. Es decir, cuando se conozca la respuesta de uno de tales osciladores a dos funciones fuerza que

actúen por separado, la respuesta del mismo a la aplicación simultánea de ambas será precisamente la suma de las respuestas individuales. Los sistemas alineales no exhiben esta propiedad. Por ejemplo, es sabido que el oído humano tiene una respuesta alineal, de modo que cuando se producen dos tonos a la vez, se perciben estos dos tonos originales junto con otros adicionales originados por la alinealidad de dicho órgano. Estos últimos son los llamados *tonos de combinación* y resultan de la *intermodulación* de los tonos aplicados.

La respuesta del oído humano queda razonablemente bien descrita incluyendo en la ecuación del oscilador un término alineal proporcional al cuadrado del desplazamiento. Por tanto, nos es posible estudiar la situación descrita antes buscando la solución de la ecuación

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^2 = A \cos \omega_1 t + B \cos \omega_2 t \quad (5.71)$$

donde A y B son amplitudes de los tonos aplicados, cuyas pulsaciones son ω_1 y ω_2 . Como, por hipótesis, β es pequeño podemos probar como solución la misma que resultaría en caso de que $\beta=0$. Así, pues, en el estado estacionario, tendremos

$$x_1(t) = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \cos \omega_1 t + \frac{B}{\omega_0^2 - \omega_2^2} \cos \omega_2 t \quad (5.72)$$

y llevando esta expresión al término βx^2 de 5.71 encontraremos, tras desarrollar los cuadrados de los cosenos

$$\begin{aligned} & -\beta \left\{ \frac{A^2}{2(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2} (\cos 2\omega_1 t + 1) + \frac{B^2}{2(\omega_0^2 - \omega_2^2)^2} (\cos 2\omega_2 t + 1) \right. \\ & \left. + \frac{AB}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)(\omega_0^2 - \omega_2^2)} [\cos(\omega_1 + \omega_2)t - \cos(\omega_1 - \omega_2)t] \right\} \end{aligned} \quad (5.73)$$

Sin necesidad de escribir la solución de esta ecuación, es evidente que la solución contendrá términos de las pulsaciones siguientes: ω_1 y ω_2 , las pulsaciones originales (o *generadoras*); $2\omega_1$ y $2\omega_2$, los segundos armónicos; y $\omega_1 \pm \omega_2$, los tonos de combinación. Podríamos proseguir con las aproximaciones siguientes, generando soluciones que presenten pulsaciones adicionales, pero las pulsaciones nuevas que aparecen en las soluciones de órdenes de aproximación mayores serían de amplitudes más pequeñas.

Aunque la aplicación de dos tonos produce en el oído dos tonos de combinación y dos armónicos de segundo orden, únicamente el tono diferencial, de pul-

sación $\omega_1 - \omega_2$, puede ser de frecuencia inferior a la de cualquiera de los tonos originales. En consecuencia, el tono diferencial se percibe e identifica con mayor facilidad, por lo que constituye el más importante de los tonos adicionales. Sin embargo, cuando los tonos generadores están separados más de una octava, el tono diferencial ya no es de frecuencia inferior a las de los generadores, en cuyo caso es difícil percibirlo. Por su parte, los tonos de pulsaciones $\omega_1 + \omega_2$, $2\omega_1$ y $2\omega_2$ son siempre difíciles de percibir.

Para transmitir señales audibles mediante ondas de radio de amplitud modulada se utilizan frecuencias de combinación producidas en dispositivos alineales. La señal portadora (de radiofrecuencia ω_1) se modula mediante la señal de audiofrecuencia (de pulsación ω_2) y ambas componentes se mezclan en un circuito alineal de válvulas de vacío o de transistores. Esta señal sirve para alimentar un amplificador de banda estrecha que deja pasar las pulsaciones próximas a ω_1 . Entonces, la salida de éste se compone de la pulsación portadora ω_1 y de las *bandas laterales* de pulsaciones $\omega_1 \pm \omega_2$. En el receptor se invierte el proceso entregándose al auditorio una señal de radiofrecuencia.

Referencias recomendadas

El tema de las oscilaciones alineales es uno de los problemas más difíciles de la física clásica y de sus aplicaciones modernas y la totalidad de la literatura relativa a este campo es sumamente complicada. Algunos de los textos que no son del todo complicados son los de ANDRONOW y CHAIKIN (An49, cap. 2), HAYASHI (Ha64, caps. 1 y 2), KU (Ku58, caps. 1 al 4), McCUSKY (Mc59, cap. 6) y STOKER (St50, caps. 2, 4 y 5); se hace un gran uso de los diagramas fásicos. Otro clásico de este tema es el de Minorsky (Mi47).

De interés especial son los trabajos de VAN DER POL, pionero en este campo (va60, en especial los trabajos 15, 27, 40, 58 y 76).

CONSTANT (Co54, cap. 6), SHARMAN (Sh63, cap. 3) y HALFMAN (Ha62, cap. 7) tratan el tema brevemente a nivel intermedio. PIPES (Pi46, cap. 22) trata de algunos métodos para la resolución de problemas alineales incluyendo la transformación de Laplace.

Planteamientos modernos de los problemas alineales que hacen hincapié en el punto de vista matemático (pero que se leen con facilidad) son los de BELLMAN (Be64) y HOCHSTADT (Ho64, caps. 6 y 7).

Problemas

- 5-1.** Demostrar que el período de oscilación de una partícula de masa m en un potencial $U = A|x|^n$ es

$$\tau = \frac{2}{n} \sqrt{\frac{2\pi m}{E}} \cdot \left(\frac{E}{A}\right)^{1/n} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)}$$

Hágase $n=2$, calcúlense las funciones gamma* y demostrar así que τ adquiere la expresión corriente que corresponde a un potencial parabólico.

5-2. Véase el ejemplo 5.2. Demostrar que cuando cada uno de los muelles debe alargarse una distancia d al objeto de mantener la partícula en su posición de equilibrio (o sea, cuando la partícula está en la posición de equilibrio, se encuentra sometida a dos fuerzas iguales y directamente opuestas de módulo kd) la partícula se mueve dentro de un potencial que vale aproximadamente

$$U(x) \cong (kd/l)x^2 + [k(l-d)/4l^3]x^4$$

5-3. Construir el diagrama fásico correspondiente al potencial de la figura 5.1.

5-4. Construir el diagrama fásico correspondiente al potencial $U(x)=-(\lambda/3)x^3$.

5-5. Lord Rayleigh utilizó la ecuación

$$\ddot{x} - (a - b\dot{x}^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

para estudiar los efectos alineales en los fenómenos acústicos.** Demostrar que derivando esta ecuación respecto del tiempo y haciendo la sustitución $y=y_0\sqrt{3b/a}\dot{x}$, resulta la ecuación de van der Pol

$$\ddot{y} - \frac{a}{y_0^2} (y_0^2 - y^2)\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

5-6. Deducir la expresión de las trayectorias del plano fásico correspondientes a un péndulo plano en el caso de que la energía total sea $E>2mgl$. Obsérvese que éste es precisamente el caso de una partícula que se mueva en un potencial periódico $U(\theta)=mgl(1-\cos\theta)$.

5-7. Resolver por el método de aproximaciones sucesivas obteniendo un resultado correcto con cuatro cifras significativas

- (a) $x + x^2 + 1 = \operatorname{tg} x, \quad 0 \leq x \leq \pi/2$
- (b) $x(x+3) = 10 \operatorname{sen} x, \quad x > 0$
- (c) $1 + x + \cos x = e^x, \quad x > 0$

* Las funciones gamma están definidas en el apéndice E.3.

** J. W. S. RAYLEIGH, *Phil. Mag.* 15 (abril, 1883); véase también Ra94, sección 68a.

(Puede ser provechoso hacer una representación gráfica grosera con el fin de elegir una primera aproximación razonable.)

5-8. Considérese el movimiento libre de un péndulo plano en el caso de que la amplitud no sea pequeña. Demostrar que la *componente horizontal* del movimiento puede representarse por

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \varepsilon x^3 = 0$$

aproximadamente, donde $\omega_0^2 = g/l$ y $\varepsilon = g/2l^3$, siendo l igual a la longitud de la suspensión. Resolver esta ecuación alineal mediante aproximaciones sucesivas y mostrar cómo se relaciona la pulsación del movimiento con su amplitud.

5-9. Estudiar el movimiento de una partícula no amortiguada sometida a una fuerza de forma

$$F(x) = \begin{cases} -kx, & |x| < a \\ -(k + \delta)x + \delta a, & |x| > a \end{cases}$$

donde k y δ son constantes positivas.

5-10. Obtener la solución de

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \lambda x^2 = 0$$

correcta hasta el segundo orden, escribiendo

$$x(t) = x_0 + \lambda x_1 + \lambda^2 x_2$$

mediante el método de las perturbaciones. Demostrar que en la solución de segundo orden aparece un término secular.

5-11. Considérese un oscilador amortiguado cuyo movimiento venga descrito por

$$\ddot{x} + \lambda \dot{x} |\dot{x}| + \omega_0^2 x = 0$$

siendo $x(0)=a$ y $\dot{x}(0)=0$ las condiciones iniciales. Emplear el método de las perturbaciones descrito en la sección 5.6 y demostrar con una precisión de orden λ que la amplitud de un medio ciclo cualquiera es inferior a la del medio ciclo precedente según el cociente $a_{n+1}/a_n = 1 - 4\lambda a_n/3$.

5-12. Una masa m se mueve en una sola dimensión sometida a una fuerza constante que vale $+F_0$ cuando $x < 0$ y otra $-F_0$ cuando $x > 0$. Describir el movi-

miento mediante el diagrama fásico. Calcular el período del movimiento en función de m , F_0 y la amplitud A . (Despreciar el amortiguamiento.)

5-13. Consultese la sección 5.7. Determinar en qué condiciones el subarmónico de pulsación $\omega/3$ es la única oscilación presente. Demostrar que existen tres oscilaciones permitidas que difieren sólo en la fase.

5-14. Estudiar los tonos de combinación que se producen cuando el término βx^2 de la ecuación 5.71 se sustituye por βx^3 . Demostrar que existen seis tonos de combinación de segundo orden.

Procedimiento basado en el cálculo de variaciones

6.1 Introducción

En el capítulo siguiente formularemos nuevamente las ecuaciones de movimiento de Newton bajo una forma más general que recibe el nombre de *ecuaciones de Lagrange*, demostrando, asimismo, que éstas pueden deducirse del principio variacional* llamado *principio de Hamilton*. Si bien no es necesario utilizar el principio variacional de Hamilton para obtener las ecuaciones de Lagrange, la formulación de la dinámica en tales términos permite unificar de forma elegante la mecánica y proporciona un método eficaz para ampliar la teoría incluyendo los fenómenos de campo. Este último tema se sale del alcance de esta obra, pero no obstante parece adecuado que en este punto dejemos sentadas las bases para un estudio más general de la *mecánica*. Por tanto, aun cuando sólo utilizaremos métodos variacionales en una pequeña parte de lo que sigue, tales métodos revisten suficiente importancia en física para que quede justificado aquí un estudio breve de sus fundamentos.

* El desarrollo del cálculo de variaciones fue iniciado por NEWTON (1686) y ampliado por Johann y Jakob BERNOULLI (1696) y EULER (1744). LEGENDRE (1786), LAGRANGE (1788), HAMILTON (1833) y JACOBI (1837) hicieron contribuciones importantes. Los nombres de DIRICHLET y WEIERSTRASS están asociados particularmente al establecimiento de una base matemática rigurosa de la cuestión.

En las secciones siguientes únicamente examinaremos las condiciones *necesarias* implicadas en los métodos variacionales; las condiciones *suficientes* constituyen un tema complicado, por lo cual remitimos al lector interesado en detalles a los textos sobre cálculo de variaciones. En consecuencia, el estudio que vamos a realizar en el capítulo presente quedará limitado a aquellos aspectos de la teoría de variaciones que posean una relación directa con los sistemas clásicos.

6.2 Enunciado del problema

El problema fundamental del cálculo de variaciones es determinar la función $y(x)$ con la condición de que la integral

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f\{y(x), y'(x); x\} dx \quad (6.1)$$

sea un *extremal* (o sea, que tenga un valor máximo o mínimo). En la expresión 6.1, es $y'(x) \equiv dy/dx$ y el punto y coma de f separa la variable independiente x de la variable dependiente $y(x)$ y de su derivada $y'(x)$. Se supone que el funcional f^* está dado y que los límites de integración son fijos**; en estas condiciones habrá de hacerse variar $y'(x)$ hasta que J adquiera un valor extremo. Esto implica que si una función $y=y(x)$ da a la integral J un valor mínimo, toda *función vecina*, tan próxima a $y(x)$ como se quiera, hará que J tome un valor superior. La definición de función vecina puede ser la siguiente. Demos todas las funciones posibles y una representación paramétrica $y=y(\alpha, x)$, de tal forma que cuando $\alpha=0$, $y=y(0, x)=y(x)$, sea la función que nos da el extremal de J . Podemos, pues, escribir

$$y(\alpha, x) = y(0, x) + \alpha\eta(x) \quad (6.2)$$

donde $\eta(x)$ es una función de x cuya primera derivada es continua y que se anula en x_1 y x_2 , puesto que la función variada $y(\alpha, x)$ debe ser idéntica a $y(x)$ en los extremos de la curva: $\eta(x_1)=\eta(x_2)=0$. Esta situación se representa esquemáticamente en la figura 6-1.

* La cantidad f depende de la forma funcional de la variable dependiente $y(x)$ recibiendo el nombre de *funcional*.

** No es necesario suponer que los límites de integración sean fijos. Cuando puedan variar, el problema consistirá en la determinación no sólo de $y(x)$, sino también en la de x_1 y x_2 tales que J sea un extremal.

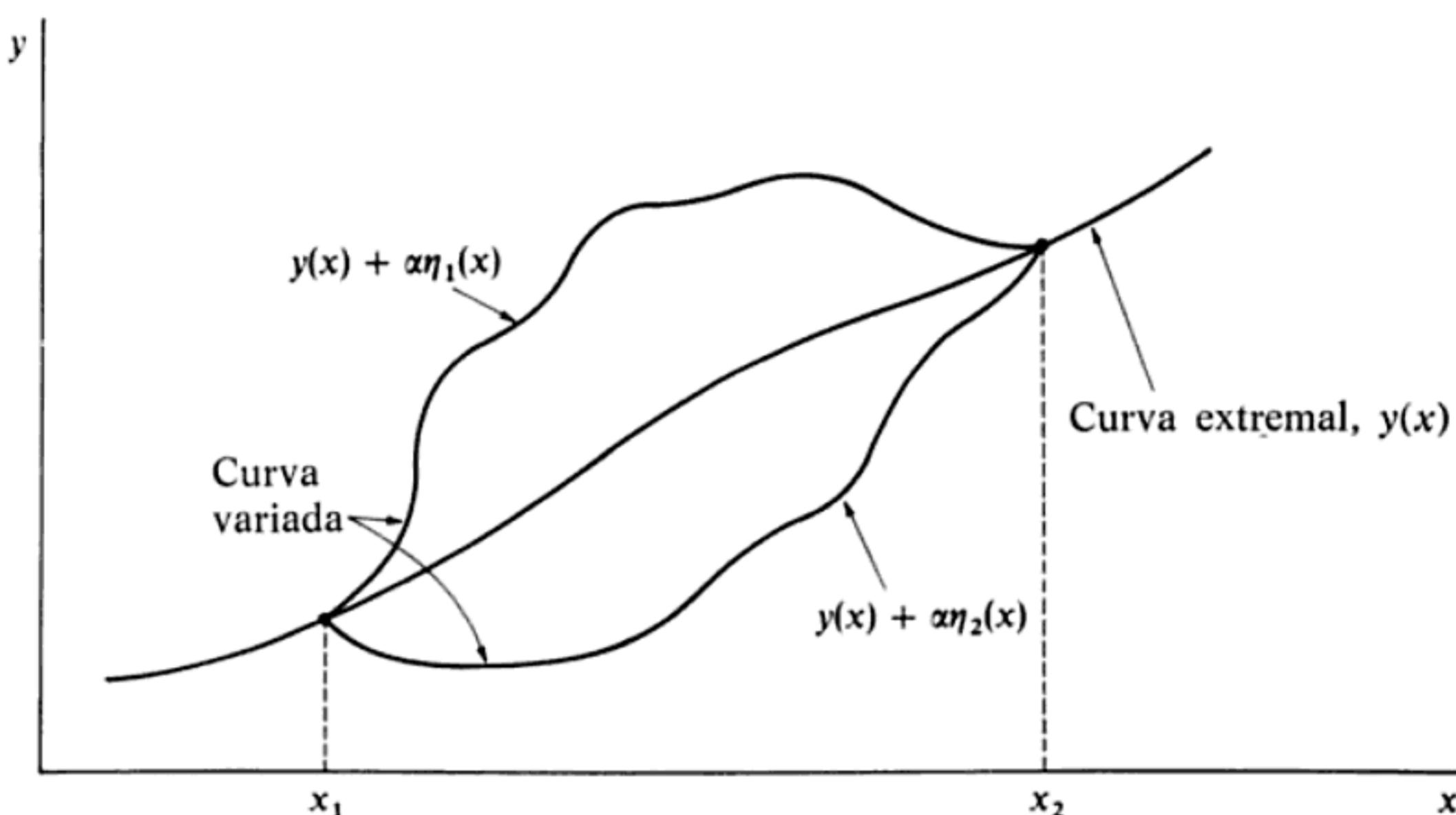


FIG. 6-1

Al hacer intervenir funciones del tipo representado por 6.2, la integral J pasa a ser una función del parámetro α :

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f\{y(\alpha, x), y'(\alpha, x); x\} dx \quad (6.3)$$

Para que la integral presente un *valor estacionario* (o sea, que resulte un extremal) ha de cumplirse la condición de que J sea independiente de α en primer orden o, lo que es equivalente, que

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = 0 \quad (6.4)$$

para toda $\eta(x)$. Esto constituye únicamente una condición *necesaria*, pero no suficiente; aunque, como dijimos antes, no vamos a seguir aquí el estudio de las condiciones suficientes.

◆ Ejemplo 6.2 Dos problemas variacionales

(a) Como primer ejemplo de lo que significan una curva variada y la condición de extremal, examinaremos la función sencilla

$$y(x) = x \quad (1)$$

para la que construiremos las curvas vecinas que resultan de añadir a $y(x)$ una variación senoidal:

$$y(\alpha, x) = x + \alpha \operatorname{sen} x \quad (2)$$

En la figura 6-2 se representan estas curvas para $\alpha=0$ y dos valores de α no nulos. Veamos a continuación cuál es el valor de la integral de $f=(dy/dx)^2$ entre los límites $x=0$ y $x=2\pi$. Es evidente que la función $\eta(x)=\operatorname{sen} x$ cumple las condiciones en los límites, o sea $\eta(0)=\eta(2\pi)=0$ y, por lo tanto,

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \alpha \cos x \quad (3)$$

pasando a ser la integral

$$\begin{aligned} J(\alpha) &= \int_0^{2\pi} (1 + 2\alpha \cos x + \alpha^2 \cos^2 x) dx \\ &= 2\pi + \alpha^2 \pi \end{aligned} \quad (4)$$

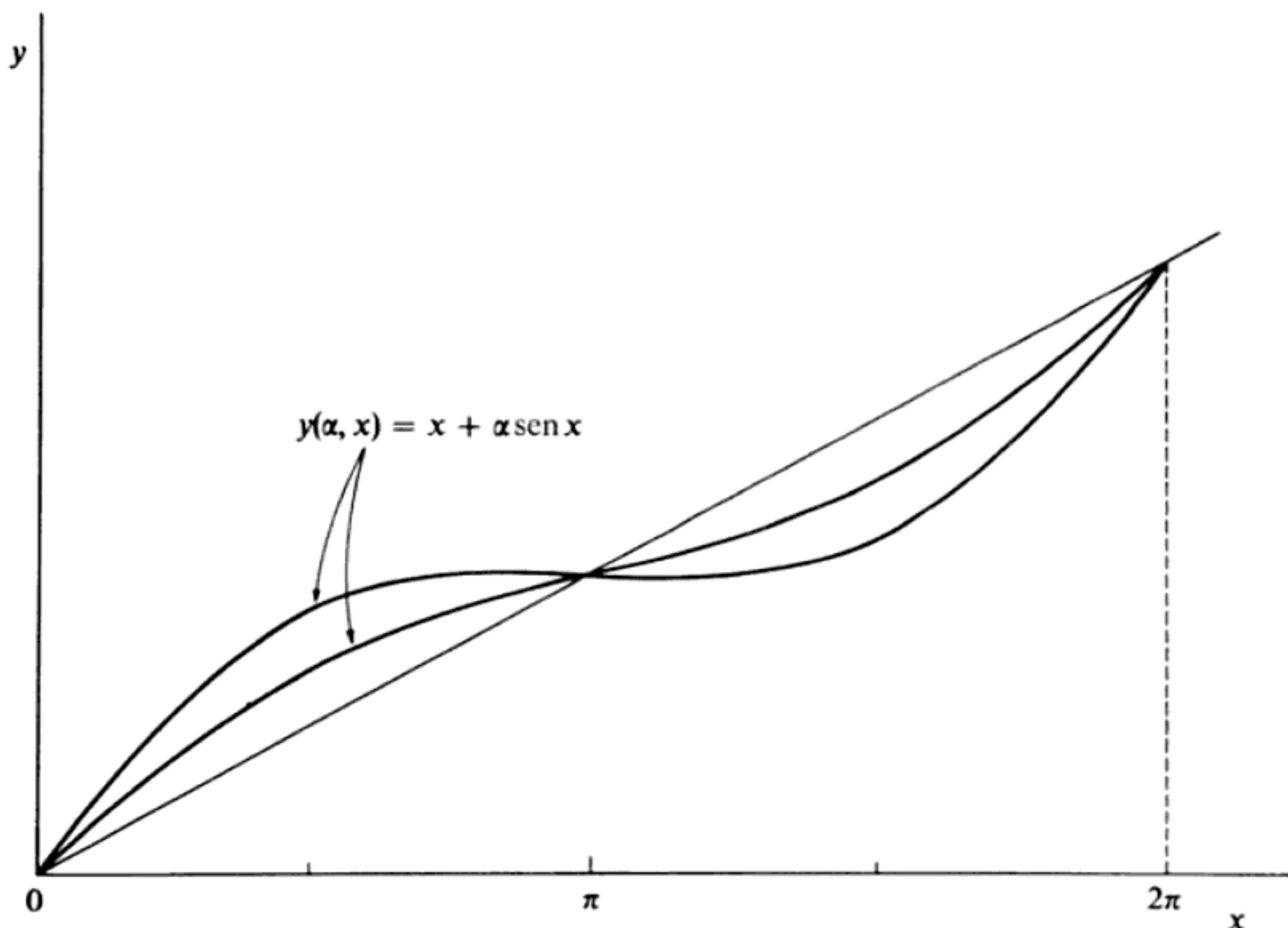


FIG. 6-2

Así, pues, vemos que el valor de $J(\alpha)$ es siempre mayor que $J(0)$, cualquiera que sea el valor (positivo o negativo) que demos a α . Esto puede expresarse

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 \quad (5)$$

que es precisamente la condición 6.4.

(b) Ahora, consideremos la ecuación de la curva que da la distancia menor entre los puntos $(x_1, y_1)=(0, 0)$ y $(x_2, y_2)=(1, 0)$. Evidentemente, dicha ecuación es

$$y(x) = 0 \quad (1)$$

es decir, precisamente el eje x . A continuación, introduzcamos la variación correspondiente de la siguiente forma

$$\begin{aligned} y(\alpha, x) &= y(0, x) + \alpha \eta(x) \\ &= 0 + \alpha(x^2 - x) \end{aligned} \quad (2)$$

y, entonces, la función original $y=0$, que sabemos desde un principio que nos da la trayectoria de longitud mínima, sufre una variación de $\alpha(x^2 - x)$. La función $\eta(x) = (x^2 - x)$ cumple la condición $\eta(x_1) = \eta(0) = 0$ y $\eta(x_2) = \eta(1) = 0$.

El aumento de distancia es

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx \quad (3)$$

siendo la longitud total de la curva

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (4)$$

Ahora, como

$$y' = \frac{dy}{dx} = \alpha(2x - 1) \quad (5)$$

resulta que

$$s = \int_0^1 [(4\alpha^2)x^2 + (-4\alpha^2)x + (\alpha^2 + 1)]^{1/2} dx \quad (6)$$

que es una integral de la forma

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx$$

que puede calcularse utilizando las fórmulas E.11 y E.8b (véase apéndice E):

$$s = \frac{1}{2} \sqrt{\alpha^2 + 1} + \frac{1}{2\alpha} \operatorname{arcsenh} \alpha \quad (7)$$

Como sólo estamos considerando las curvas vecinas, α será una cantidad pequeña y, por consiguiente, tanto el radical como $\operatorname{arcsenh} \alpha$ podrán desarrollarse en serie

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\alpha^2}{2} + \dots \right) + \frac{1}{2\alpha} \left(\alpha - \frac{1}{6} \alpha^3 + \dots \right) \\ &= 1 + \frac{\alpha^2}{6} + O(\alpha^4) \end{aligned} \quad (8)$$

donde $O(\alpha^4)$ significa «términos de cuarto grado y superiores en α ».

Si identificamos con $J(\alpha)$ la cantidad $s(\alpha)$ precedente (véase expresión 6.3) y determinamos su valor mínimo:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \frac{\partial s}{\partial \alpha} = \frac{\alpha}{3} + O(\alpha^3) \quad (9)$$

lo que quiere decir que $\alpha=0$ anulará a $\partial J / \partial \alpha$ y por tanto dará un mínimo para J (o s). Entonces,

$$J(\alpha = 0) = s(\alpha = 0) = 1 \quad (10)$$

como debe ser, ya que es precisamente la distancia desde $(0, 0)$ hasta $(1, 0)$. Resulta, pues, que la condición expresada en 6.4 se cumple en este caso: al imponer que $(\partial J / \partial \alpha)|_{\alpha=0} = 0$ aparece un extremal de J .

6.3 Ecuación de Euler

Tomemos ahora la expresión 6.3 y apliquemos a ella la condición 6.4. Con ello

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{x_1}^{x_2} f\{y, y'; x\} dx$$

Como los límites de integración son fijos, la derivación afectará únicamente al integrando; por lo tanto,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right) dx \quad (6.5)$$

De 6.2 resulta

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \eta(x); \quad \frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \frac{d\eta}{dx} \quad (6.6)$$

con lo que 6.5 se transforma en

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d\eta}{dx} \right) dx \quad (6.7)$$

donde el segundo término del integrando puede integrarse por partes:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d\eta}{dx} dx = \frac{\partial f}{\partial y'} \eta(x) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) dx$$

El primer término del segundo miembro de esta última expresión es nulo, ya que $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, y por ello 6.5 queda

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \alpha} &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) dx \end{aligned} \quad (6.8)$$

Puede parecer que la integral que aparece en 6.8 es independiente de α ; no obstante, ha de tenerse en cuenta que las funciones y e y' , respecto de las cuales se deriva f , son por su parte funciones de α . Sin embargo, cuando $\alpha=0$, será $y(\alpha, x)=y(0, x)=y(x)$ desapareciendo la dependencia respecto de α .

Como $(\partial J / \partial \alpha)|_{\alpha=0}$ ha de anularse y $\eta(x)$ es una función cualquiera (sometida a las condiciones establecidas antes), el integrando de 6.8 deberá anularse cuando $\alpha=0$:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

(6.9)

donde ahora y e y' serán las funciones originales independientes de α . Este resultado se conoce con el nombre de *ecuación de Euler** y constituye una condición necesaria para que J sea un extremal.

* Deducida por primera vez por EULER en 1744. Cuando se aplica a sistemas mecánicos se conoce como *ecuación de Euler-Lagrange*.

6.4 Problema de la braquistócrona

◆ **Ejemplo 6.4** Uno de los problemas clásicos que se resuelve más fácilmente utilizando el cálculo de variaciones es el de la *braquistócrona*.* Considérese una partícula que se traslada, dentro de un campo de fuerzas constante, desde un punto (x_1, y_1) , donde inicialmente se halla en reposo, hasta otro punto (x_2, y_2) más bajo que el primero. El problema consiste en determinar la trayectoria que permita a la partícula trasladarse de uno a otro punto en el menor tiempo posible. Situaremos el sistema de referencia de tal forma que el origen esté en el punto (x_1, y_1) y el eje x sea paralelo al campo, como se indica en la figura 6-3.

Como la fuerza que se ejerce sobre la partícula es constante, si no tomamos en cuenta fuerzas de rozamiento el campo será conservativo, siendo la energía total de la partícula $T+U=\text{cte}$. Si colocamos en el punto $x=0$ el origen de potenciales [o sea, $U(x=0)=0$], entonces, como la partícula parte del reposo, será $T+U=0$. La energía cinética es $T=\frac{1}{2}mv^2$ y la energía potencial es $U=-Fx=-mgx$, donde g es la aceleración producida por la fuerza. Así pues,

$$v = \sqrt{2gx} \quad (1)$$

El tiempo necesario para que la partícula se traslade desde el origen hasta el punto (x_2, y_2) es

$$\begin{aligned} t &= \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \frac{ds}{v} = \int \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}{(2gx)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \int_{x_1=0}^{x_2} \left(\frac{1+y'^2}{2gx} \right)^{\frac{1}{2}} dx \end{aligned} \quad (2)$$

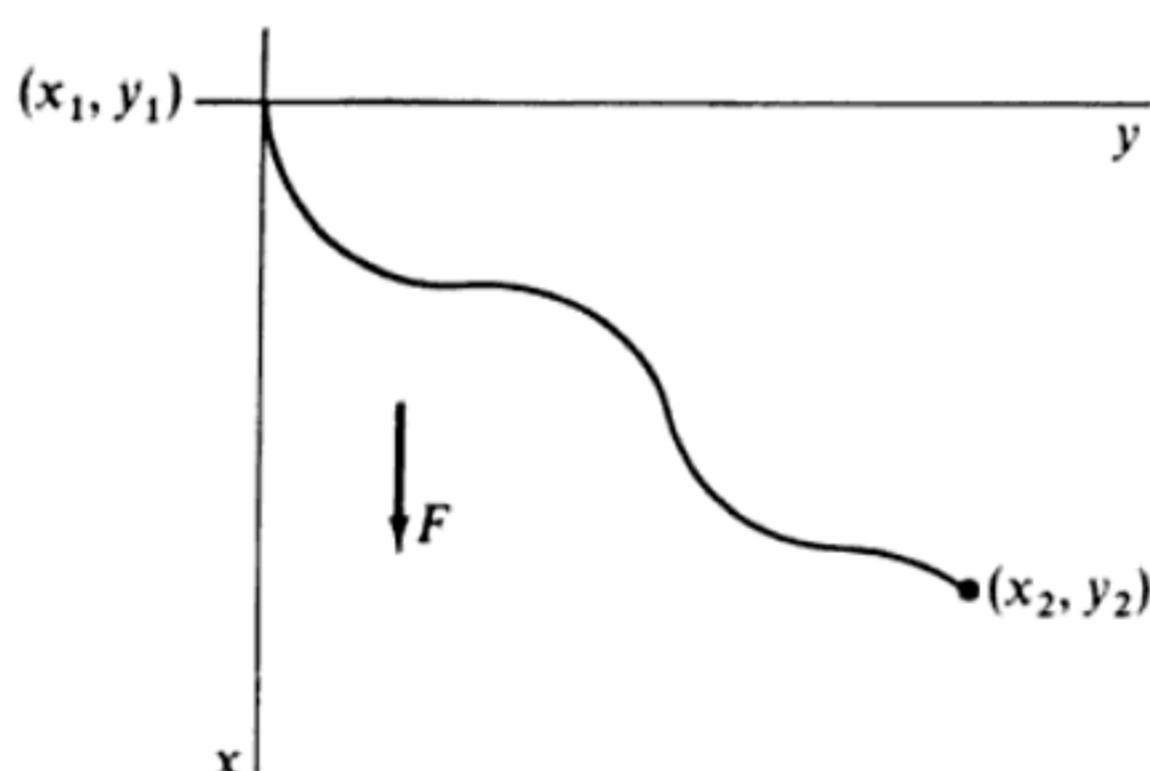


FIG. 6-3

* Resuelto por primera vez por Johann BERNOULLI en 1696.

que es la cantidad que deseamos sea mínima. Como $(2g)^{-\frac{1}{2}}$ es una constante que no afecta a la ecuación final, podemos admitir que el funcional f es

$$f = \left(\frac{1+y'^2}{x} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

y así, dado que $\partial f / \partial y = 0$, la ecuación de Euler queda

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

o bien,

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \text{cte.} \equiv (2a)^{-\frac{1}{2}} \quad (4)$$

Derivando f y elevando al cuadrado tendremos

$$\frac{y'^2}{x(1+y'^2)} = \frac{1}{2a} \quad (5)$$

que puede ponerse en la forma

$$y = \int \frac{x \, dx}{(2ax - x^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (6)$$

Hagamos ahora el cambio de variable

$$\begin{aligned} x &= a(1 - \cos \theta) \\ dx &= a \sin \theta \, d\theta \end{aligned} \quad (7)$$

con lo cual la integral se transformará en

$$y = \int a(1 - \cos \theta) \, d\theta$$

y

$$y = a(\theta - \sin \theta) + \text{cte.} \quad (8)$$

Las ecuaciones paramétricas de una *cicloide* que pasa por el origen son

$$\left. \begin{aligned} x &= a(1 - \cos \theta) \\ y &= a(\theta - \sin \theta) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

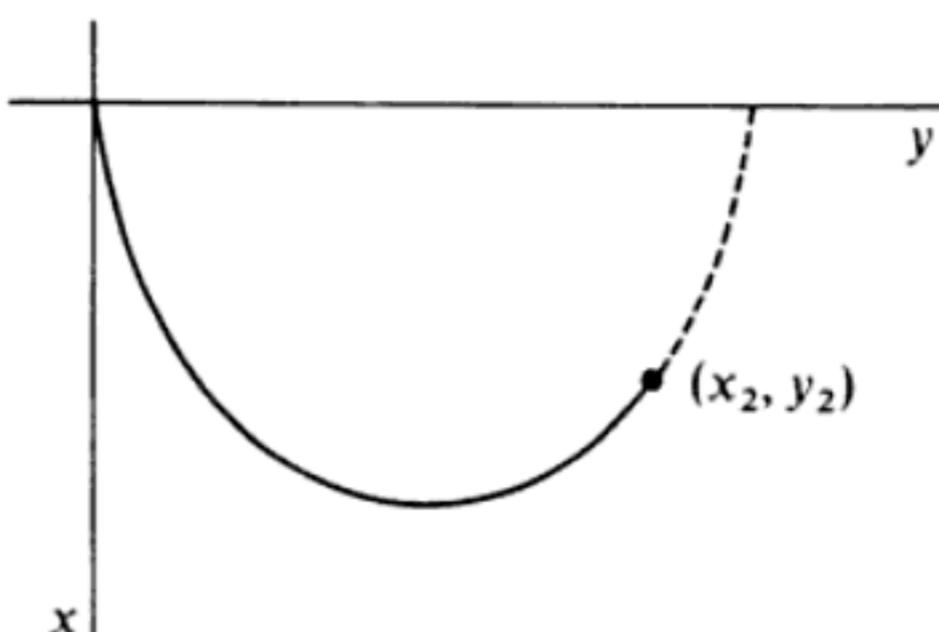


FIG. 6-4

que es precisamente la solución encontrada y , por tanto, la constante de integración es nula. La trayectoria será entonces como se representa en la figura 6-4, debiendo determinarse el valor de la constante a para que la cicloide pase por el punto (x_2, y_2) . La solución al problema de la braquistócrona da verdaderamente la trayectoria que la partícula recorre en el tiempo *mínimo*. No obstante, debe observarse que los procedimientos basados en el cálculo variacional se han establecido únicamente para determinar extremales de máximo o de mínimo. En dinámica casi siempre suele buscarse una condición de mínimo.

6.5 «Segunda forma» de la ecuación de Euler

Observemos primero que

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f\{y, y'; x\} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{dy'}{dx} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} + y'' \frac{\partial f}{\partial y'} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Por otra parte,

$$\frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = y'' \frac{\partial f}{\partial y'} + y' \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'}$$

de donde, al sustituir en ella el valor de $y''(\partial f / \partial y')$ que nos da 6.10, resulta

$$\frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = \frac{df}{dx} - \frac{\partial f}{\partial x} - y' \frac{\partial f}{\partial y} + y' \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \quad (6.11)$$

cuyos dos últimos términos pueden escribirse

$$y' \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

que será nulo si se cumple la ecuación de Euler (6.9). Por tanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx} \left(f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad (6.12)$$

Es ésta la llamada «segunda forma» de la ecuación de Euler que se utiliza en aquellos casos en que f no es función explícita de x por lo que $\partial f / \partial x = 0$; y entonces,

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = \text{cte.} \quad \left(\text{ya que } \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \right) \quad (6.13)$$

◆ Ejemplo 6.5 Geodésicas de una esfera

«Geodésica» es la línea que representa la trayectoria más corta entre dos puntos cualesquiera, cuando dicha trayectoria ha de pertenecer a una superficie determinada. El elemento de longitud sobre una superficie esférica de radio ρ viene dado por (véase fórmula 1.104, con $dr=0$):

$$ds = \rho(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

Por lo tanto, la distancia entre los puntos 1 y 2 es

$$s = \rho \int_1^2 \left[\left(\frac{d\theta}{d\varphi} \right)^2 + \sin^2 \theta \right]^{\frac{1}{2}} d\varphi \quad (2)$$

y, si s ha de ser mínima, identificamos a f por

$$f = (\theta_\varphi^2 + \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

donde $\theta_\varphi = d\theta/d\varphi$. Como $\partial f / \partial \varphi = 0$, podemos utilizar la segunda forma de la ecuación de Euler (6.13), la cual nos dará

$$(\theta_\varphi^2 + \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}} - \theta_\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial \theta_\varphi} (\theta_\varphi^2 + \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}} = \text{cte.} \equiv a \quad (4)$$

que, al efectuar la derivación y multiplicando ambos miembros por f , queda

$$\operatorname{sen}^2 \theta = a(\theta_\phi^2 + \operatorname{sen}^2 \theta)^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

De aquí, podemos deducir la expresión de $d\varphi/d\theta = \theta_\varphi^{-1}$, que resulta ser

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{a \operatorname{cosec}^2 \theta}{(1 - a^2 \operatorname{cosec}^2 \theta)^{\frac{1}{2}}} \quad (6)$$

y que, integrada, nos dará φ

$$\varphi = \operatorname{arsen} \left(\frac{\operatorname{ctg} \theta}{\beta} \right) + \alpha \quad (7)$$

donde α es la constante de integración y $\beta^2 = (1 - a^2)/a^2$. La expresión 7 puede escribirse de nuevo como sigue

$$\operatorname{ctg} \theta = \beta \operatorname{sen}(\varphi - \alpha) \quad (8)$$

Para interpretar este resultado, pasaremos esta expresión a coordenadas rectangulares multiplicando ambos miembros por $\rho \operatorname{sen} \theta$, obteniendo, tras desarrollar $\operatorname{sen}(\varphi - \alpha)$,

$$(\beta \cos \alpha) \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi - (\beta \operatorname{sen} \alpha) \rho \operatorname{sen} \theta \cos \varphi = \rho \cos \theta \quad (9)$$

Como α y β son constantes, podemos escribir

$$\beta \cos \alpha \equiv A; \quad \beta \operatorname{sen} \alpha \equiv B \quad (10)$$

y con esto la expresión 9 se transforma en

$$A(\rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi) - B(\rho \operatorname{sen} \theta \cos \varphi) = (\rho \cos \theta) \quad (11)$$

Las cantidades que aparecen entre paréntesis son precisamente las expresiones de y , x y z , respectivamente, en coordenadas esféricas (véase figura F-3, apéndice F); por tanto, la ecuación 11 puede escribirse

$$Ay - Bx = z \quad (12)$$

que es la ecuación de un plano que pasa por el centro de la esfera. Entonces, la geodésica de la esfera será la curva que determina dicho plano en su intersección con la superficie de la esfera, o sea, un círculo máximo. Obsérvese que el círculo máximo es la distancia «en línea recta» máxima, y también mínima, entre dos puntos de la superficie de una esfera.

6.6 Funciones de varias variables dependientes

La ecuación de Euler deducida anteriormente constituye la solución al problema variacional de determinar la función de una sola variable $y(x)$ tal que la integral del funcional f sea un extremal. El caso que con mayor frecuencia se da en mecánica es aquel en que f es un funcional de varias variables dependientes:

$$f = f\{y_1(x), y'_1(x), y_2(x), y'_2(x), \dots; x\} \quad (6.14)$$

o sencillamente,

$$f = f\{y_i(x), y'_i(x); x\}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.14a)$$

Entonces, por analogía con 6.2, podemos escribir

$$y_i(\alpha, x) = y_i(0, x) + \alpha \eta_i(x) \quad (6.15)$$

Efectuando un desarrollo exactamente igual al llevado a cabo anteriormente, llegamos al resultado (cfr. ec. 6.8),

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) \eta_i(x) dx \quad (6.16)$$

Como las variaciones individuales, es decir las $\eta_i(x)$, son todas independientes, para que 6.16 se anule para el valor particular $\alpha=0$ es necesario que se anulen cada una de las expresiones entre paréntesis:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

(6.17)

6.7 Ecuaciones de Euler con condiciones auxiliares

Cuando se desea determinar, por ejemplo, la trayectoria más corta entre dos puntos pertenecientes a una superficie, será necesario que, además de las condiciones tratadas anteriormente, se cumpla que la trayectoria satisfaga la ecuación de la superficie, o sea, $g\{y_i; x\}=0$. La presencia de esta ecuación quedaba

implícita en la resolución del problema de las geodésicas de una esfera, donde la condición era

$$g = \sum_i x_i^2 - \rho^2 = 0$$

o bien,

$$r = \rho = \text{cte.}$$

En el caso general, sin embargo, será necesario utilizar explícitamente una o varias ecuaciones auxiliares, que también reciben el nombre de *ecuaciones de ligadura*. Estudiemos el caso en que

$$f = f\{y_i, y'_i; x\} = f\{y, y', z, z'; x\} \quad (6.18)$$

Entonces, la ecuación correspondiente a la 6.8 para el caso de *dos* variables será

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial z'} \right) \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right] dx \quad (6.19)$$

Ahora, existe también una ecuación de ligadura de la forma

$$g\{y_i; x\} = g\{y, z; x\} = 0 \quad (6.20)$$

no siendo ya independientes las variaciones $\partial y / \partial \alpha$ y $\partial z / \partial \alpha$, por lo que las expresiones entre paréntesis de 6.19 no se anularán por separado para $\alpha = 0$.

Diferenciando la g dada por 6.20, tendremos

$$dg = \left(\frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right) d\alpha = 0 \quad (6.21)$$

donde no aparecerá término alguno en x , ya que $\partial x / \partial \alpha = 0$. Por otra parte

$$\begin{cases} y(\alpha, x) = y(x) + \alpha \eta_1(x) \\ z(\alpha, x) = z(x) + \alpha \eta_2(x) \end{cases} \quad (6.22)$$

y, por lo tanto,

$$\frac{\partial g}{\partial y} \eta_1(x) = - \frac{\partial g}{\partial z} \eta_2(x) \quad (6.23)$$

transformándose 6.19 en

$$\frac{\partial J}{\partial x} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta_1(x) + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial z'} \right) \eta_2(x) \right] dx$$

Sacando $\eta_1(x)$ factor común de los corchetes y escribiendo 6.23 como sigue:

$$\frac{\eta_2(x)}{\eta_1(x)} = - \frac{\partial g / \partial y}{\partial g / \partial z}$$

tendremos

$$\frac{\partial J}{\partial x} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial z'} \right) \left(\frac{\partial g / \partial y}{\partial g / \partial z} \right) \right] \eta_1(x) dx \quad (6.24)$$

En esta última ecuación tenemos ahora la función $\eta_1(x)$, que puede ser cualquiera y que no está condicionada en absoluto por las 6.22, por lo que deberá anularse, para $\alpha=0$, la expresión contenida en el corchete. Así, pues

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^{-1} = \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial z'} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial z} \right)^{-1} \quad (6.25)$$

Vemos ahora que el primer miembro de esta ecuación contiene únicamente derivadas de f y de g respecto de y y de y' , y que el segundo miembro contiene únicamente derivadas respecto de z y z' . Como y y z son ambas funciones de x , los dos miembros de 6.25 podrán igualarse a una misma función de x , que denominaremos $\lambda(x)$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} + \lambda(x) \frac{\partial g}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial z'} + \lambda(x) \frac{\partial g}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.26)$$

La resolución completa del problema reside ahora en la determinación de *tres* funciones, $y(x)$, $z(x)$ y $\lambda(x)$, pudiéndose hacer uso de *tres* relaciones, las dos ecuaciones 6.26 y la ecuación de ligadura 6.20, cuyo número es suficiente para

obtener la solución completa deseada. Obsérvese que aquí suponemos que $\lambda(x)$ es *indeterminada** obteniéndose como parte de la solución.

En el caso general de varias variables dependientes y varias condiciones auxiliares, resulta el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_i} + \sum_j \lambda_j(x) \frac{\partial g_j}{\partial y_i} = 0 \quad (6.27)$$

$$g_j\{y_i; x\} = 0 \quad (6.28)$$

Si $i=1, 2, \dots, m$ y $j=1, 2, \dots, n$, la expresión 6.27 representa m ecuaciones con $m+n$ incógnitas, pero como existen también las n ecuaciones de ligadura 6.28, resulta que tenemos un sistema de $m+n$ ecuaciones con $m+n$ incógnitas, que podrá tener solución.

La ecuación 6.28 equivale, desde luego, al sistema de n ecuaciones diferenciales

$$\sum_i \frac{\partial g_j}{\partial y} dy_i = 0, \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (6.29)$$

siendo mucho más frecuente en mecánica que las ecuaciones de ligadura sean ecuaciones diferenciales en vez de ecuaciones algebraicas. En consecuencia, las ecuaciones del tipo 6.29 son en ocasiones más útiles que las representadas por 6.28. (Véase la sección 7.5 para una ampliación de este punto.)

◆ Ejemplo 6.7 Disco que rueda sobre un plano inclinado

Consideremos un disco que rueda sin deslizar sobre un plano inclinado, tal como se representa en la figura 6-5. La configuración de este sistema queda, en cada instante, determinada sin ambigüedad en función de las «coordenadas»** y y θ . Estas dos coordenadas están relacionadas por

$$y = R\theta \quad (1)$$

* La función $\lambda(x)$ es uno de los llamados *multiplicadores de Lagrange*, introducidos por LAGRANGE en 1788 en su *Mechanique Analytique*.

** Éstas son en realidad las *coordenadas generalizadas* de que se trata en la sección 7.5; puede verse también el ejemplo 7.5(b).

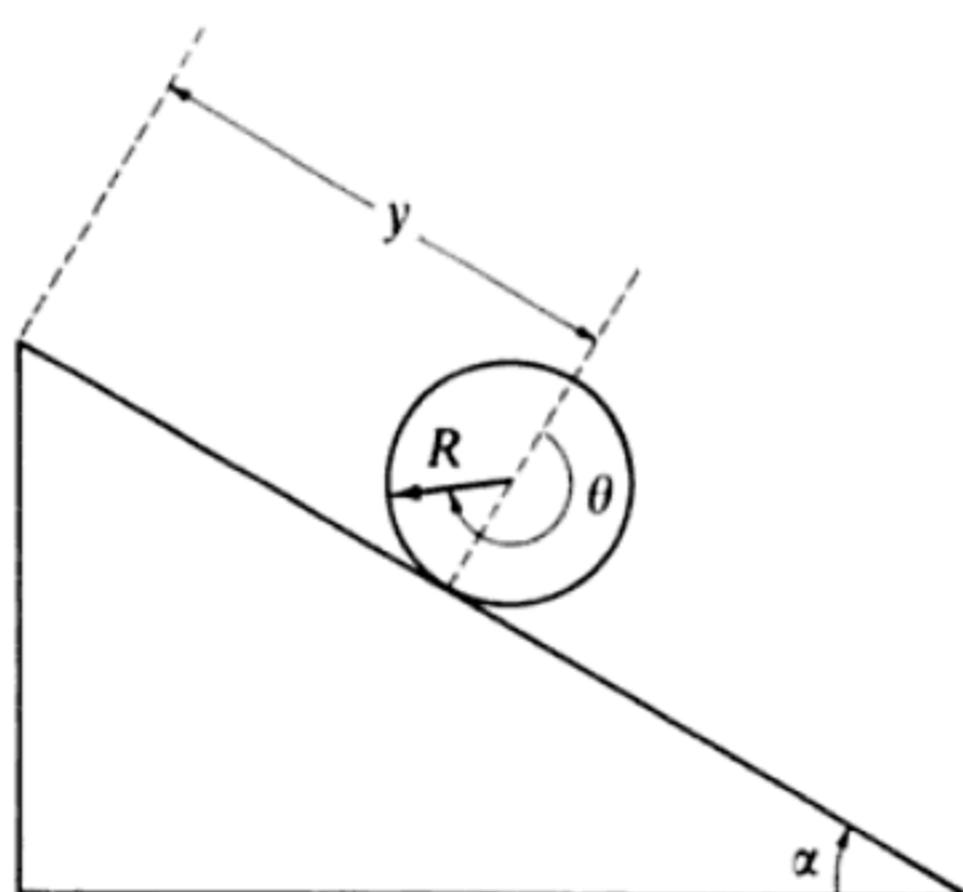


FIG. 6-5

donde R es el radio del disco. Según esto, la ecuación de ligadura es

$$g(y, \theta) = y - R\theta = 0 \quad (2)$$

y

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = -R \quad (3)$$

son las cantidades asociadas a λ , único multiplicador en este caso.

6.8 El símbolo δ

En los estudios en que se hace uso del cálculo variacional se acostumbra representar la variación mediante una notación abreviada. Entonces, la ecuación 6.8, que se puede escribir

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} d\alpha = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha dx \quad (6.30)$$

puede expresarse así,

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y dx \quad (6.31)$$

donde

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \alpha} d\alpha &\equiv \delta J \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha &\equiv \delta y \end{aligned} \right\} \quad (6.32)$$

Con esto, la condición de extremal quedará

$$\delta J = \delta \int_{x_1}^{x_2} f\{y, y'; x\} dx = 0 \quad (6.33)$$

Llevando el símbolo de variación al interior de la integral (ya que, por hipótesis, los límites de integración no están afectados por la variación), tendremos

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{x_1}^{x_2} \delta f dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' \right) dx \end{aligned} \quad (6.34)$$

pero,

$$\delta y' = \delta \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} (\delta y) \quad (6.35)$$

de forma que

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} (\delta y) \right) dx \quad (6.36)$$

Al integrar por partes el segundo término, como antes, tendremos

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y dx \quad (6.37)$$

Como la variación δy es arbitraria, la condición de extremal, $\delta J = 0$, impone que el integrando se anule, resultando así la ecuación de Euler (6.9).

Como el símbolo δ aparece con mucha frecuencia, es importante tener presente que se trata únicamente de la expresión abreviada de cantidades diferenciales perfectamente definidas.

Referencias recomendadas

Estudios del cálculo de variaciones a nivel medio, enfocados hacia la aplicación del principio de Hamilton pueden encontrarse, por ejemplo, en BRADBURY (Br68, ca-

pítulo 11), GOLDSTEIN (Go50, cap. 2), HOUSTON (Ho48, cap. 5) y MARGENAU y MURPHY (Ma43, cap. 6).

Uno de los textos más útiles que trata de los métodos variacionales en mecánica es el de LANCZOS (La49).

La obra de HALFMAN (Ha62a, vol. II, cap. 10 y 11) incluye un estudio de la optimización de características operativas y varias aplicaciones al campo de la física técnica.

A nivel medio-superior, tenemos la exposición de IRVING y MULLINEUX (Ir59, cap. 7) donde se incluyen aplicaciones de varios métodos variacionales. Otra obra del mismo nivel con muchos ejemplos es la de WEINSTOCK (We52). Véase también ARFKEN (Ar66, cap. 17).

DETTMAN (De62, cap. 2) tiene una exposición matemática breve. Una de las obras clásicas, desde un punto de vista matemático, es la de BLISS (Bl46). El estudio de COURANT y HILBERT (Co53, cap. 4) es de nivel superior, pero está dirigido hacia las aplicaciones a la física.

Problemas

6-1. Considérese la trayectoria que une $(x_1, y_1) = (0, 0)$ con $(x_2, y_2) = (1, 1)$. Demostrar de forma explícita que la función $y(x) = x$ proporciona una trayectoria de longitud mínima utilizando la función variada $y(\alpha, x) = x + \alpha \operatorname{sen} \pi(1-x)$. Emplear los primeros términos del desarrollo en serie de la integral elíptica resultante para poner de manifiesto que se cumple la condición 6.4.

6-2. Demostrar que la distancia más corta entre dos puntos de un plano es la línea recta.

6-3. Demostrar que la distancia más corta entre dos puntos del espacio (tridimensional) es la línea recta.

6-4. Demostrar que las geodésicas de una superficie cilíndrica de revolución son hélices.

6-5. Considérese la superficie generada al hacer girar una línea que une dos puntos fijos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , en torno de un eje situado en el mismo plano que dichos puntos. Determinar la ecuación de la línea que une los puntos, tal que el área de la superficie engendrada por el giro (o sea, el área de la superficie de revolución) sea un mínimo. Obtener la solución utilizando la ecuación 6.12. (El resultado es una *catenaria*.)

6-6. Resolver el problema 6-5 utilizando la ecuación 6.9.

6-7. Volviendo al problema de la braquistócrona (ejemplo 6.4) demostrar que el tiempo mínimo que necesita una partícula para trasladarse (sin rozamiento) al punto de *mínimo* de la cicloide es $\pi \sqrt{a/g}$, *independientemente* del punto de partida.

- 6-8.** Determinar las dimensiones del paralelepípedo de volumen máximo circunscrito por (a) una esfera de radio R , y (b) un elipsoide de semiejes a , b y c .
- 6-9.** Determinar una expresión que incluya la función $\phi(x_1, x_2, x_3)$, el cuadrado de cuyo gradiente tenga un valor medio mínimo en el interior de un cierto volumen V del espacio.
- 6-10.** Determinar el cociente entre el radio R y la altura H de un cilindro de revolución de volumen fijo V que haga mínima el área A de la superficie.
- 6-11.** Un disco de radio R rueda sin deslizar por el interior de la parábola $y=ax^2$. Determinar la ecuación de ligadura. Expresar la condición para que el disco ruede con un punto de contacto, y sólo uno, con la parábola, cualquiera que sea su posición.

El principio de Hamilton Dinámica de Lagrange y de Hamilton

7.1 Introducción

La experiencia ha demostrado que, cuando sea posible despreciar los efectos relativistas, el movimiento de una partícula dentro de un sistema de referencia inercial queda correctamente descrito mediante la fórmula de Newton $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$. Cuando suceda que la partícula no haya de ejecutar un movimiento complicado y se utilicen coordenadas rectangulares para describirlo, generalmente las ecuaciones de movimiento serán relativamente sencillas; ahora bien, si no se verifica ninguna de estas condiciones, las ecuaciones pueden hacerse bastante complicadas y difíciles de manejar. Así, por ejemplo, cuando una partícula está limitada a moverse sobre la superficie de una esfera, las ecuaciones de movimiento se obtienen proyectando la fórmula vectorial de Newton sobre dicha superficie resultando que, como podrá aseverar todo lector que haya resuelto el problema 1-19, aparece una expresión de la aceleración en coordenadas esféricas realmente formidable.

Más aún, cuando una partícula está limitada a moverse sobre una superficie dada, deben existir ciertas fuerzas (llamadas *fuerzas de ligadura*) que mantengan la partícula en contacto con dicha superficie y que, en el caso de una partícula que se mueva sobre una superficie horizontal lisa, será simplemente $\mathbf{F}_c = -mg$. Ahora bien, si la partícula es, por ejemplo, una bolita que se desliza hacia abajo

por un alambre curvo, la fuerza de ligadura puede ser muy complicada. En realidad, puede haber casos especiales en que sea difícil, e incluso imposible, obtener la expresión explícita de las fuerzas de ligadura. No obstante, al resolver un problema aplicando las leyes de Newton es necesario conocer la *totalidad* de las fuerzas, ya que la cantidad \mathbf{F} , que aparece en la fórmula fundamental, es la fuerza *resultante* que actúa sobre el cuerpo.

Con el fin de soslayar algunas de las dificultades de índole práctica que aparecen al aplicar las fórmulas de Newton a ciertos problemas, pueden desarrollarse otros procedimientos. Esencialmente, todos estos procedimientos de abordar los problemas son *a posteriori*, puesto que sabemos de antemano que hemos de obtener resultados equivalentes a las fórmulas de Newton. Entonces, no es necesario formular una nueva teoría de la mecánica —la teoría de Newton es suficientemente correcta— para efectuar una simplificación, sino que basta con idear otro método que nos permita abordar problemas complicados de forma general. El *principio de Hamilton* contiene un método de este carácter y las ecuaciones de movimiento que resultan de la aplicación del mismo se llaman *ecuaciones de Lagrange*.

Si las ecuaciones de Lagrange han de constituir una descripción adecuada de la dinámica de las partículas, deberán ser equivalentes a las ecuaciones que resulten de las fórmulas de Newton. Por otra parte, el principio de Hamilton es de aplicación a una amplia gama de fenómenos físicos (en especial los relativos a *campos*) con los que generalmente no se relacionan las fórmulas de Newton. Es seguro que cada una de las consecuencias que pueden extraerse del principio de Hamilton fue deducida *primero*, al igual que las fórmulas de Newton, relacionando entre sí hechos experimentales. El principio de Hamilton no nos proporciona teoría física nueva alguna, pero nos ha permitido unificar satisfactoriamente muchas teorías separadas, partiendo de un postulado fundamental sencillo. Ello no constituye un ejercicio fútil de habilidad, puesto que el objetivo de la Física no es únicamente dar una formulación matemática precisa para los fenómenos observados, sino también describir sus efectos con ahorro de postulados fundamentales y de la manera más unificada posible. Dentro de esta tónica, el principio de Hamilton constituye uno de los más elegantes y de mayor alcance de la Física.

A la vista de la gran zona de aplicabilidad que el principio de Hamilton ha revelado poseer (aun cuando sea un descubrimiento basado en hechos consumados), no resulta poco razonable afirmar que el principio de Hamilton es más «fundamental» que las fórmulas de Newton. En consecuencia, procederemos primero a postular el principio de Hamilton, para obtener a continuación las ecuaciones de Lagrange, demostrando que las mismas son equivalentes a las fórmulas de Newton.

Puesto que ya hemos tratado (en los capítulos del 2 al 5) con alguna extensión de los fenómenos disipativos, reduciremos nuestra atención a partir de aquí

a los sistemas *conservativos* y, en consecuencia, no trataremos del sistema más general de ecuaciones de Lagrange que da cuenta de los efectos de las fuerzas no conservativas. Para estos detalles el lector puede consultar la literatura de referencia.*

7.2 Principio de Hamilton

La historia de los principios de mínimo dentro de la física es larga e interesante. La investigación de tales principios se argumenta sobre la idea de que la Naturaleza actúa siempre de tal forma que determinadas cantidades de importancia resultan siempre minimizadas cuando tiene lugar un proceso físico. El primero de estos principios de mínimo se desarrolló en el campo de la óptica. Fue HERÓN de Alejandría quien, en el siglo II a. de J.C., encontró que la ley que rige la reflexión de la luz puede obtenerse admitiendo que un rayo luminoso, que viaje de un punto a otro reflejándose en un espejo plano, recorre siempre el camino más corto posible. Una sencilla construcción geométrica servirá para comprobar que este principio de mínimo conduce verdaderamente a la igualdad de los ángulos de incidencia y reflexión de un rayo luminoso reflejado en un espejo plano. No obstante, el principio del *camino más corto* de Herón no puede proporcionar una expresión correcta de la *ley de la refracción*. En 1657, FERMAT** formuló nuevamente el principio postulando que los rayos luminosos viajan siempre de un punto a otro de un medio siguiendo el camino que requiera el menor tiempo. Este principio del *tiempo mínimo* de Fermat conduce inmediatamente, no sólo a la ley correcta de la reflexión, sino también a la ley de la refracción de Snell.***

Los estudios acerca de los principios de mínimo continuaron y, en la última parte del siglo XVII, NEWTON, LEIBNIZ y los hermanos BERNOULLI iniciaron el desarrollo del cálculo variacional con la resolución de problemas como el de la braquistócrona (véase sección 6-4) y el de la forma de una cuerda suspendida (*catenaria*).

La primera aplicación de un principio general de mínimo a la mecánica fue llevado a cabo en 1747 por MAUPERTUIS,**** quien afirmó que el movimiento

* Véase, por ejemplo, GOLDSTEIN (Go50, cap. 2), o bien, si se desea un tratado exhaustivo, WHITTAKER (Wh37, cap. 8).

** Pierre DE FERMAT (1601-1665), abogado, lingüista y matemático aficionado francés.

*** En 1661, FERMAT dedujo correctamente la ley de la refracción que había sido descubierta experimentalmente hacia 1621 por Willebrord SNELL (1591-1626), prodigioso matemático holandés. En MAGIE (Ma35, págs. 278 a 280) puede encontrarse una reproducción del trabajo original de Fermat; asimismo LINDSAY y MARGENAU (Li36, pág. 135) efectúan la deducción completa.

**** Pierre-Louis MOREAU DE MAUPERTUIS (1698-1759), astrónomo y matemático francés. La primera aplicación que dio Maupertuis al principio de la mínima acción fue rehacer la deducción hecha por Fermat de la ley de la refracción (1744).

dinámico tiene siempre lugar bajo una acción mínima. Este principio de la *mínima acción* de Maupertuis se basaba en consideraciones teológicas (la acción es minimizada por la «sabiduría de Dios»), siendo su idea de la acción un tanto vaga. (Recuérdese que acción es una magnitud de dimensiones *longitud* × *ímpetu* o bien *energía* × *tiempo*). Más adelante este principio recibió de LAGRANGE una base matemática sólida (1760). Si bien constituye una forma útil para efectuar el paso de la mecánica clásica a la óptica y a la mecánica cuántica, el principio de la mínima acción es menos general que el de Hamilton y, en realidad, puede deducirse de éste. Aquí, no vamos a estudiarlo en detalle.*

En 1828 GAUSS desarrolló un método para estudiar la mecánica mediante su principio de la *ligadura mínima*; una modificación posterior del mismo fue realizada por HERTZ e incorporada a su principio de la *curvatura mínima*. Estos principios** están estrechamente relacionados con el de Hamilton y nada añaden a la formulación de éste, que es más general; si aquí los hemos mencionado ha sido únicamente para recalcar la preocupación continua que ha existido siempre en la física para los principios de mínimo.

En sendos trabajos, publicados en 1834 y 1835, Hamilton*** expuso el principio dinámico sobre el cual es posible fundamentar toda la mecánica y, a decir verdad, la mayor parte de la física clásica. El principio de Hamilton puede formularse como sigue****:

De toda las trayectorias posibles (compatibles con las ligaduras), que puede seguir un sistema dinámico para desplazarse de un punto a otro en un intervalo de tiempo determinado, la trayectoria verdaderamente seguida es aquella que hace mínima la integral temporal de la diferencia entre las energías cinética y potencial.

En términos de análisis variacional, el principio de Hamilton se expresa

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0 \quad (7.1)$$

Esta formulación variacional del principio impone únicamente que $T - U$ sea un *extremal*, no un *mínimo* necesariamente, si bien en casi todas las aplicaciones de importancia en la dinámica se obtiene una condición de mínimo.

* Véase, por ejemplo, GOLDSTEIN (Go50, págs. 228 a 235) o SOMMERFELD (So50, páginas 204 a 209).

** Véase, por ejemplo, LINDSAY y MARGENAU (Li36, págs. 112 a 120) o SOMMERFELD (So50, págs. 210 a 214).

*** Sir William Rowan HAMILTON (1805-1865), matemático y astrónomo escocés, y, posteriormente, Astrónomo Real de Irlanda.

**** El significado general de «trayectoria de un sistema» se aclarará en la sección 7.3.

La energía cinética de una partícula expresada en un sistema de coordenadas rectangulares fijo es sólo función de las \dot{x}_i y cuando la partícula se mueva en un campo de fuerzas conservativo, la energía potencial será función de las x_i únicamente

$$T = T(\dot{x}_i); \quad U = U(x_i)$$

Si, por definición, la diferencia de estas cantidades es

$$\begin{aligned} L &\equiv T - U \\ &= L(x_i, \dot{x}_i) \end{aligned} \tag{7.2}$$

La expresión 7.1 quedará

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(x_i, \dot{x}_i) dt = 0 \tag{7.3}$$

La función L que aquí aparece puede ser identificada con el funcional f de la integral variacional (véase sección 6.6)

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} f\{y_i(x), y'_i(x); x\} dx$$

haciendo los cambios

$$\begin{aligned} x &\rightarrow t \\ y_i(x) &\rightarrow x_i(t) \\ y'_i(x) &\rightarrow \dot{x}_i(t) \\ f\{y_i(x), y'_i(x); x\} &\rightarrow L(x_i, \dot{x}_i) \end{aligned}$$

En consecuencia, las ecuaciones de Euler-Lagrange (6.17), que corresponden a la expresión 7.3, serán

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \tag{7.4}$$

que son las *ecuaciones de movimiento de Lagrange* para la partícula, siendo L la llamada *función de Lagrange o lagrangiana* de la partícula.

A título de ejemplo, obtengamos la ecuación de movimiento de Lagrange correspondiente al oscilador armónico unidimensional. Mediante las conocidas expresiones de las energías cinética y potencial, resulta

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

y aplicando la ecuación 7.4 resulta

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

que es idéntica a la ecuación de movimiento de Newton.

Puede parecer que el método de Lagrange es demasiado complicado si únicamente ha de servir para duplicar los resultados de la teoría de Newton. No obstante, continuemos ilustrando el método examinando el caso del péndulo plano (véase sección 5.4). Las expresiones 7.15 de T y U nos darán la lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos \theta)$$

Si ahora tratamos θ como si fuese una coordenada rectangular y efectuamos las operaciones indicadas en la ecuación 7.4 obtenemos

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta = 0$$

y nuevamente resulta una expresión idéntica a la que daria la fórmula de Newton. Este resultado es verdaderamente importante, ya que ha sido obtenido calculando las energías cinética y potencial en función de θ en vez de x , y efectuando después una serie de operaciones indicadas para coordenadas rectangulares y no angulares. Por tanto, nos vemos obligados a sospechar que quizá las ecuaciones de Lagrange sean más generales de lo que puedan indicar las ecuaciones 7.4. En la sección 7.4 proseguiremos con esta cuestión.

Otra particularidad importante del método seguido en los dos ejemplos precedentes reside en que en ningún punto del desarrollo se ha hecho mención alguna relativa a la fuerza. Así pues, las ecuaciones de movimiento se han obtenido únicamente especificando determinadas propiedades asociadas a las partículas (las energías cinética y potencial) y sin necesidad de tener en cuenta explícitamente el hecho de que existía un agente externo actuando sobre la partícula (la fuerza). En consecuencia, en tanto que la energía pueda definirse independientemente de las ideas de Newton, el principio de Hamilton permite establecer las ecuaciones de movimiento de un cuerpo sin recurrir en absoluto a la teoría de Newton. En las secciones 7.5 y 7.7 volveremos sobre este importante punto.

7.3 Coordenadas generalizadas

Busquemos ahora beneficiarnos de la flexibilidad en la especificación de las coordenadas que los dos ejemplos de la sección anterior parecen sugerirnos ser inherentes a las ecuaciones de Lagrange.

Consideremos un sistema mecánico de carácter más general compuesto de un conjunto discreto de n puntos materiales, algunos de los cuales podrían estar unidos entre sí formando cuerpos rígidos. Para dejar especificado el estado de un sistema como éste en un instante dado serán necesarios n vectores de posición y, como cada uno de ellos está compuesto de una terna de números, deberán darse $3n$ cantidades para describir las posiciones de todas las partículas. Cuando existan ecuaciones de ligadura que relacionen algunas de estas coordenadas con otras (como sería el caso, por ejemplo, de que algunas de las partículas estuvieran unidas formando cuerpos rígidos o que el movimiento estuviera obligado a realizarse sobre una cierta curva o superficie), las $3n$ coordenadas no serán independientes entre sí. Ocurre que, si existen m ecuaciones de ligadura, el número de coordenadas independientes es $3n - m$ y se dice que el sistema posee $3n - m$ grados de libertad.

Es importante observar que cuando en un caso determinado se necesiten $s = 3n - m$ coordenadas, no será necesario elegir precisamente s coordenadas rectangulares, o ni siquiera s coordenadas curvilíneas (esféricas, cilíndricas, etc.); basta con elegir s parámetros cualesquiera, mientras definan por completo el estado del sistema. Ni siquiera es preciso que estas s cantidades tengan dimensiones de longitud y, según sea la naturaleza del problema en cada caso, puede ser más conveniente que algunos de los parámetros tengan dimensiones de energía, algunos de (*longitud*)², que otros sean adimensionales, etc.; así, en el ejemplo 6.7 se describía el movimiento de un disco que rueda por un plano inclinado en función de una coordenada que era una longitud y de otra que era un ángulo. La expresión sistema de *coordenadas generalizadas* designa todo conjunto de cantidades que deje completamente especificado el estado del sistema y es costumbre representarlas por q_1, q_2, \dots o simplemente q_i . Un sistema de coordenadas generalizadas independientes de número igual al de grados de libertad del sistema y no limitadas por las ligaduras recibirá el nombre de sistema *propio* de coordenadas generalizadas. En ciertas ocasiones puede ser ventajoso utilizar coordenadas generalizadas en número superior al de grados de libertad, teniendo en cuenta explícitamente las relaciones de ligadura utilizando los multiplicadores de Lagrange. Éste sería el caso, por ejemplo, si deseáramos calcular fuerzas de ligadura [véase ejemplo 7.5(b)].

El conjunto de coordenadas generalizadas que puede describir un sistema no es único; en general, existirán muchos conjuntos de cantidades (*infinitos*, de hecho) que dejen especificado por completo el estado de un sistema dado. Por ejemplo, en el caso del disco rodando hacia abajo por un plano inclinado, pode-

mos elegir como coordenadas la altura del centro de masa del disco por encima de un plano de referencia y la distancia recorrida por un punto del borde del disco desde el comienzo del movimiento. La prueba final de la «conveniencia» de un conjunto determinado de coordenadas generalizadas resultará de que las ecuaciones de movimiento correspondientes sean o no lo bastante sencillas para permitir una interpretación inmediata. Por desgracia, no es posible establecer reglas generales para escoger las coordenadas generalizadas «más adecuadas» a cada problema particular, por lo que, para ello, es preciso adquirir una cierta habilidad mediante la experiencia.

Además de las coordenadas generalizadas, podemos definir otro conjunto de cantidades que se compone de las derivadas temporales de las q_j : $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots$ o simplemente \dot{q}_j . Por analogía con las coordenadas rectangulares, llamaremos a las \dot{q}_j *velocidades generalizadas*.

Si tenemos en cuenta la posibilidad de que las ecuaciones que ligan las $x_{\alpha,i}$ y las q_j contengan explícitamente al tiempo, el sistema de ecuaciones de transformación vendrá dado por*

$$\begin{aligned} x_{\alpha,i} &= x_{\alpha,i}(q_1, q_2, \dots, q_s, t), & \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1, 2, \dots, n \\ i = 1, 2, 3 \end{array} \right. \\ &= x_{\alpha,i}(q_j, t), & j = 1, 2, \dots, s \end{aligned} \quad (7.5a)$$

En general, las componentes rectangulares de las velocidades dependerán de las coordenadas generalizadas, de las velocidades generalizadas y del tiempo:

$$\dot{x}_{\alpha,i} = \dot{x}_{\alpha,i}(q_j, \dot{q}_j, t) \quad (7.5b)$$

Asimismo, las ecuaciones de la transformación inversa son

$$q_j = q_j(x_{\alpha,i}, t) \quad (7.5c)$$

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(x_{\alpha,i}, \dot{x}_{\alpha,i}, t) \quad (7.5d)$$

a las que corresponden $m=3n-s$ ecuaciones de ligadura de la forma

$$f_k = f_k(x_{\alpha,i}, t), \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (7.6)$$

* En el capítulo presente, con el propósito de simplificar, reservaremos el subíndice i para representar ejes rectangulares; por tanto, será siempre $i=1, 2, 3$.

◆ **Ejemplo 7.3 Partícula en movimiento sobre una superficie semiesférica**

Supongamos un punto material que se mueve sobre la superficie de una semiesfera de radio R cuyo centro se encuentra en el origen de coordenadas. Entonces, el movimiento tiene lugar en la superficie de ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0, \quad z \geq 0 \quad (1)$$

Como coordenadas generalizadas tomaremos los cosenos directores de la recta que une el origen con la partícula; o sea,

$$q_1 = \frac{x}{R}; \quad q_2 = \frac{y}{R}; \quad q_3 = \frac{z}{R} \quad (2)$$

y como la suma de los cuadrados de los cosenos directores es igual a la unidad, tendremos

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \quad (3)$$

Por lo tanto, este sistema de coordenadas generalizadas no constituirá un sistema propio, ya que podemos escribir q_3 en función de q_1 y q_2 :

$$q_3 = \sqrt{1 - q_1^2 - q_2^2} \quad (4)$$

No obstante, podemos tomar $q_1 = x/R$ y $q_2 = y/R$ como coordenadas generalizadas propias y éstas, junto con la ecuación de ligadura 4, que ahora será

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

serán suficientes para especificar únicamente la posición de la partícula. Este resultado es obvio ya que es evidente que sólo son necesarias dos coordenadas (p. e., latitud y longitud) para situar un punto en la superficie de una esfera, pero este ejemplo sirve para poner de manifiesto el hecho de que las ecuaciones de ligadura pueden siempre utilizarse para reducir un sistema de coordenadas de ensayo a un sistema propio de coordenadas generalizadas.

El estado de un sistema compuesto de n partículas y sometido a m ligaduras que relacionen entre sí a algunas de las $3n$ coordenadas rectangulares queda especificado por completo mediante $s = 3n - m$ coordenadas generalizadas. Es posible, pues, representar el estado de tal sistema por un punto de un espacio de s

dimensiones que llamaremos *espacio de configuraciones*, correspondiendo cada una de las dimensiones de este espacio a una de las q_j . La historia, o evolución a través del tiempo, del sistema, estará representada por una curva del espacio de configuraciones, cada uno de cuyos puntos representará la *configuración* del sistema en un instante determinado. Por cada uno de estos puntos pasará un número infinito de curvas que representarán movimientos posibles del sistema, correspondiendo cada una de estas curvas a un conjunto particular de condiciones iniciales. Podemos, por lo tanto, hablar de la «trayectoria» de un sistema cuando el mismo «se desplaza» a través del espacio de configuraciones, pero debemos tener cuidado para no confundir estos términos con los que se aplican al movimiento de una partícula sobre una trayectoria del espacio tridimensional ordinario.

Debe observarse, asimismo, que toda trayectoria del espacio de configuraciones, cuando éste está formado por un sistema propio de coordenadas generalizadas, es compatible automáticamente con las ligaduras del sistema, ya que en tal caso las coordenadas se habrán elegido en correspondencia sólo con movimientos posibles del sistema.

7.4 Las ecuaciones de movimiento de Lagrange en coordenadas generalizadas

A la vista de las definiciones presentadas en las secciones precedentes, podemos formular nuevamente el principio de Hamilton como sigue:

De todas las trayectorias posibles a través de las cuales puede pasar un sistema desde un punto a otro del espacio de configuraciones en un intervalo de tiempo dado, aquella realmente seguida será la que haga mínima la integral temporal de la lagrangiana del sistema.

Al objeto de establecer el principio de Hamilton para coordenadas generalizadas en forma variacional podemos aprovechar una importante propiedad de la lagrangiana que hasta el momento no hemos resaltado. Por definición, la lagrangiana de un sistema es la diferencia entre las energías cinética y potencial y, siendo la *energía* un escalar, la *lagrangiana será una función escalar*. Por lo tanto, la lagrangiana debe ser *invariante respecto de los cambios de coordenadas* y, cualquiera que sean las coordenadas generalizadas elegidas para la descripción de un sistema, dicha función poseerá el mismo valor para un estado determinado del mismo.* Así pues, aunque la lagrangiana puede estar representada por *fun-*

* Por «estado determinado del sistema» se entiende que conocemos la posición y la velocidad de cada partícula.

ciones muy distintas, según las coordenadas generalizadas utilizadas, su *valor* es único* para un estado dado. En consecuencia, carece de importancia que expresemos la lagrangiana en función de las $x_{\alpha,i}$ y $\dot{x}_{\alpha,i}$ o de las q_j y \dot{q}_j :

$$\begin{aligned} L &= T(\dot{x}_{\alpha,i}) - U(x_{\alpha,i}) \\ &= T(q_j, \dot{q}_j, t) - U(q_j, t) \end{aligned} \quad (7.7a)$$

o bien,

$$\begin{aligned} L &= L(q_1, q_2, \dots, q_s; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s; t) \\ &= L(q_j, \dot{q}_j, t) \end{aligned} \quad (7.7b)$$

Entonces, el principio de Hamilton se expresará

$$\boxed{\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j, t) dt = 0} \quad (7.8)$$

Si hacemos uso de las definiciones de la sección 6.6 y efectuamos las identificaciones

$$\begin{aligned} x &\rightarrow t \\ y_i(x) &\rightarrow q_j(t) \\ y'_i(x) &\rightarrow \dot{q}_j(t) \\ f\{y_i, y'_i; x\} &\rightarrow L(q_j, \dot{q}_j, t) \end{aligned}$$

las ecuaciones de Euler 6.17, para el problema variacional formulado por la condición 7.8, se transformarán en

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s} \quad (7.9)$$

que son las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange (generalmente llamadas *ecuaciones de Lagrange* simplemente**). El número de estas ecuaciones será s y

* Como la energía potencial está determinada, salvo una constante aditiva, la lagrangiana estará en el mismo caso.

** Deducidas por primera vez para un sistema mecánico (aunque no, desde luego, mediante el principio de Hamilton) por Joseph Louis LAGRANGE (1736-1813) quien las presentó en su famosa obra *Mécanique Analytique* en 1788. En este trabajo monumental, que abarca todos los aspectos de la mecánica (estática, dinámica, hidrostática e hidrodinámica), logró con éxito situar la cuestión sobre una base matemática firme y unificada. La naturaleza del tratado es más matemática que física; Lagrange se enorgullecía de que en toda la obra no hubiese una sola figura.

junto con las m ecuaciones de ligadura y las condiciones iniciales impuestas*, describirán completamente el movimiento del sistema.

Es importante comprender, que la validez de las ecuaciones de Lagrange impone el cumplimiento de las dos condiciones siguientes:

(1) las fuerzas que actúen sobre el sistema (aparte de las de ligadura) deben derivar de un potencial (o de varios potenciales); y

(2) las ecuaciones de ligadura deben ser relaciones que liguén las coordenadas de las partículas y pueden ser funciones del tiempo; es decir, las condiciones de ligadura deben estar expresadas por relaciones de la forma 7.6. Cuando las ligaduras puedan expresarse de esta forma diremos que son ligaduras *holónomas*. Cuando las ecuaciones de ligadura no contengan explícitamente al tiempo, diremos que las ligaduras son *fijas* o *esclerónomas*; las ligaduras móviles son *reónomas*.

Como ya dijimos anteriormente, sólo estudiaremos el movimiento de los sistemas sometidos a fuerzas conservativas, las cuales derivan siempre de un potencial con lo que se cumple la condición (1). Esta condición no tiene carácter restrictivo con relación al principio de Hamilton y a las ecuaciones de Lagrange, ya que la teoría puede ampliarse fácilmente para incluir fuerzas no conservativas. Análogamente, el principio de Hamilton puede formularse de manera que incluya ciertas clases de ligaduras no holónomas, pero aquí sólo vamos a estudiar los sistemas holónomos.**

◆ Ejemplo 7.4 Partícula sobre una superficie cónica

Consideremos una partícula de masa m limitada a moverse sobre la superficie de un cono de semiángulo α y sometida a la acción de la gravedad. Como se indica en la figura 7-1, el eje del cono se encuentra sobre el eje z y su vértice coincide con el origen. Dado que el problema presenta simetría cilíndrica, tomaremos r , θ y z como coordenadas generalizadas y la condición de ligadura será

$$z = r \operatorname{ctg} \alpha \quad (1)$$

de forma que el sistema posee dos grados de libertad únicamente y, por tanto, sólo habrá dos coordenadas generalizadas propias. La ecuación 1 puede emplearse para eliminar la coordenada z o la r ; nosotros eliminaremos la primera de ellas. Con ello, el cuadrado de la velocidad es (véase ecuaciones 1.101):

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{r}^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha = \dot{r}^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha + r^2 \dot{\theta}^2 \quad (2)$$

* Al ser s ecuaciones diferenciales de segundo orden, serán necesarias 2s condiciones iniciales para determinar el movimiento unívocamente.

** Para mayores detalles sobre estos temas véanse las referencias recomendadas de «nivel superior» a final del capítulo.

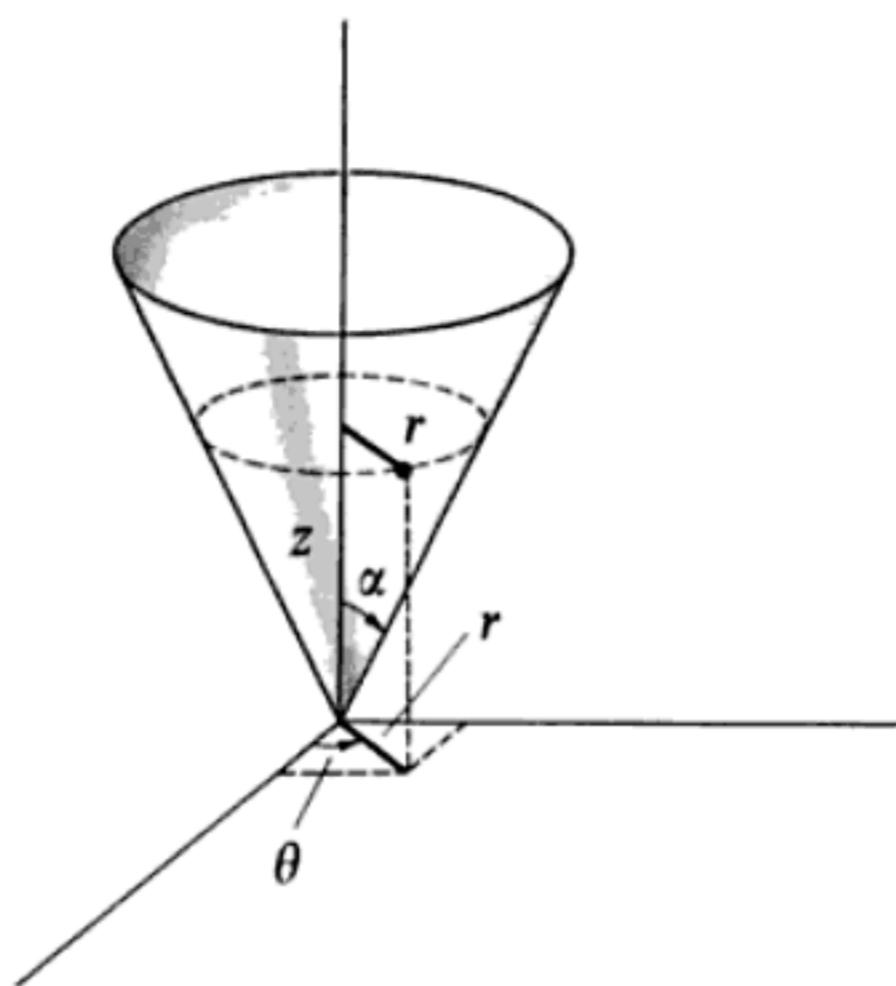


FIG. 7-1

La energía potencial es (si hacemos $U=0$ en $z=0$)

$$U = mgz = mgr \operatorname{ctg} \alpha \quad (3)$$

y, por tanto, la lagrangiana será

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha + r^2\dot{\theta}^2) - mgr \operatorname{ctg} \alpha \quad (4)$$

Observemos primeramente que L no contiene explícitamente a $\dot{\theta}$, por lo cual $\partial L / \partial \dot{\theta} = 0$ y la ecuación de Lagrange correspondiente a esta coordenada será

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \quad (5)$$

de donde,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = \text{cte.} \quad (6)$$

Como $mr^2\dot{\theta} = mr^2\omega$ es precisamente el momento cinético relativo al eje z , la ecuación 6 expresará la conservación del momento cinético en torno al eje de simetría del sistema.

La ecuación de Lagrange correspondiente a r es

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 0 \quad (7)$$

que, una vez efectuadas las derivaciones, nos da

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + g \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 0 \quad (8)$$

que es la ecuación de movimiento para la coordenada r .

En la sección 8.11 volveremos sobre este ejemplo examinando el movimiento con más detalle.

■ 7.5 Empleo de los multiplicadores de Lagrange

Las ligaduras holónomas son aquellas que pueden expresarse en forma de relaciones algebraicas entre las coordenadas. Cuando un sistema se halla sometido únicamente a esta clase de ligaduras, puede determinarse siempre un sistema propio de coordenadas generalizadas en función de las cuales las ecuaciones de movimiento están desprovistas de toda referencia explícita a las ligaduras.

Todas las ligaduras que deban expresarse en función de las *velocidades* de las partículas del sistema son de la forma

$$f_i(x_{\alpha,i}, \dot{x}_{\alpha,i}, t) = 0 \quad (7.10)$$

y constituirán ligaduras *no* holónomas, a menos que las ecuaciones puedan integrarse para dar relaciones entre las coordenadas.*

◆ Ejemplo 7.5(a) Una ligadura holónoma

Supongamos una condición de ligadura de la forma

$$\sum_i A_i \dot{x}_i + B = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

que constituye una ecuación no integrable en general, por lo cual la ligadura no es holónoma. Pero cuando A_i y B sean de las formas

$$A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}; \quad B = \frac{\partial f}{\partial t}; \quad f = f(x_i, t) \quad (2)$$

la ecuación 1 podrá escribirse

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

* A veces, las ligaduras de este tipo reciben el nombre de *semiholónomas*.

Pero esta expresión es precisamente

$$\frac{df}{dt} = 0 \quad (4)$$

que puede integrarse dando

$$f(x_t, t) - \text{cte.} = 0 \quad (5)$$

y resulta que la ligadura es realmente holónoma.

Del ejemplo anterior, deducimos que las ligaduras expresables en forma diferencial como sigue

$$\sum_j \frac{\partial f_k}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial f_k}{\partial t} dt = 0 \quad (7.11)$$

son equivalentes por completo a aquellas de la forma 7.6.

Cuando las condiciones de ligadura de un problema vengan expresadas en forma diferencial en vez de como relaciones algebraicas, será posible incorporarlas directamente a las ecuaciones de Lagrange mediante los multiplicadores (véase sección 6.7) sin necesidad de efectuar primeramente las integraciones. Es decir, en el caso de ligaduras expresables en la forma 6.29.

$$\sum_j \frac{\partial f_k}{\partial q_j} dq_j = 0 \quad \begin{cases} j = 1, 2, \dots, s \\ k = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (7.12)$$

las ecuaciones de Lagrange son (ec. 6.27):

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_k \lambda_k(t) \frac{\partial f_k}{\partial q_j} = 0} \quad (7.13)$$

De hecho, como el proceso de variación implicado en el principio de Hamilton mantiene constante el tiempo en los puntos extremos, podríamos añadir a la ecuación 7.12 un término $(\partial f_k / \partial t) dt$ sin que las ecuaciones de movimiento resulten afectadas. Así pues, las ligaduras expresadas en la forma dada por 7.11 también conducen a las ecuaciones de Lagrange que se expresan en 7.13.

La gran ventaja de la formulación de la mecánica según Lagrange reside en que no es necesario incluir explícitamente las fuerzas de ligadura. Es decir, se hace hincapié en la dinámica del sistema más que en el cálculo de las fuerzas que actúan en cada una de las partes del mismo. No obstante, dado que en

ciertas ocasiones puede ocurrir que se desee conocer las fuerzas de ligadura, será conveniente señalar que los multiplicadores $\lambda_s(t)$, que aparecen en las ecuaciones de Lagrange cuando se expresan en la forma 7.13, son precisamente esas fuerzas de ligadura.*

◆ Ejemplo 7.5(b) Disco que rueda por un plano inclinado

Examinemos nuevamente el caso del disco que rueda hacia abajo por un plano inclinado (véanse ejemplo 6.7 y figura 6-5). Su energía cinética puede descomponerse en dos términos, uno de traslación y otro de rotación**:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 \end{aligned} \quad (1)$$

donde M es la masa y R el radio del disco: $I = \frac{1}{4}MR^2$ es el momento de inercia del disco respecto del eje que pasa por su centro. La energía potencial es

$$U = Mg(l - y) \operatorname{sen} \alpha \quad (2)$$

donde l es la longitud del plano inclinado, suponiéndose que la energía potencial del disco es cero al pie de aquél. Por lo tanto, la lagrangiana será

$$\begin{aligned} L &= T - U \\ &= \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + Mg(y - l) \operatorname{sen} \alpha \end{aligned} \quad (3)$$

y la ecuación de ligadura

$$f(y, \theta) = y - R\theta = 0 \quad (4)$$

Si ahora continuamos admitiendo que la rodadura tiene lugar sin deslizamiento, podemos tomar y , o bien θ , como coordenada propia, utilizando la ecuación 4 para eliminar la otra. Por otro lado, también nos es posible tomar *ambas* variables, y y θ , como coordenadas generalizadas y seguir el método de los multiplicadores de Lagrange. En este caso, las ecuaciones de Lagrange son

* Véase, por ejemplo, GOLDSTEIN (Go50, pág. 42). En BECKER (Be54, cap. 11 y 13) y en SYMON (Sy60, págs. 374 y ss.) puede verse el cálculo de las expresiones explícitas de las fuerzas de ligadura en algunos problemas particulares.

** Con esto adelantamos un resultado bien conocido de la dinámica del sólido rígido, que se tratará en el capítulo 12.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

y, efectuando las derivaciones, obtenemos

$$Mg \operatorname{sen} \alpha - M\ddot{y} + \lambda = 0 \quad (6a)$$

$$- \frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} - \lambda R = 0 \quad (6b)$$

Asimismo, por la ecuación de ligadura, tenemos

$$y = R\theta \quad (6c)$$

Las tres ecuaciones 6 forman un sistema soluble en las tres incógnitas y , θ y λ . Si derivamos la ecuación de ligadura 6c, tenemos

$$\ddot{\theta} = \ddot{y}/R \quad (7)$$

y de aquí, combinando 6b y 7, encontramos

$$\lambda = -\frac{1}{2}M\ddot{y} \quad (8)$$

expresión que utilizada en 6a nos dará

$$\ddot{y} = \frac{2g \operatorname{sen} \alpha}{3} \quad (9)$$

con

$$\lambda = -\frac{Mg \operatorname{sen} \alpha}{3} \quad (10)$$

de forma que 6b resulta

$$\ddot{\theta} = \frac{2g \operatorname{sen} \alpha}{3R} \quad (11)$$

De esta manera hemos obtenido tres expresiones de \ddot{y} , $\ddot{\theta}$ y λ que son inmediatamente integrables.

Observemos que si el disco rodase sin rozamiento, tendríamos $\ddot{y} = g \operatorname{sen} \alpha$, con lo cual la condición de rodadura reduce la aceleración a los $\frac{2}{3}$ del valor que toma al deslizar sin rozamiento. El módulo de la fuerza de rozamiento que da origen a la ligadura es precisamente λ , o sea $(Mg/3) \operatorname{sen} \alpha$.

Nótese que puede hacerse desaparecer $\dot{\theta}$ de la lagrangiana sustituyendo $\dot{\theta}$ por \ddot{y}/R según la ecuación de ligadura

$$L = \frac{3}{4}M\dot{y}^2 + Mg(y - l) \operatorname{sen} \alpha \quad (12)$$

con lo cual la lagrangiana quedará expresada en función de una coordenada propia únicamente, obteniéndose inmediatamente de 7.9 una sola ecuación de movimiento

$$Mg \operatorname{sen} \alpha - \frac{3}{2}M\ddot{y} = 0 \quad (13)$$

que es idéntica a la 9. Aunque este procedimiento es más sencillo, no sirve para determinar la fuerza de ligadura.

7.6 Equivalencia entre las formulaciones de Newton y de Lagrange

Como ya hemos recalcado desde el comienzo, las formulaciones de la mecánica hechas por Newton y por Lagrange son equivalentes y, si bien difieren en los puntos de vista, los contenidos son iguales. Ahora vamos a poner de manifiesto de forma explícita esta equivalencia demostrando que los dos sistemas de ecuaciones de movimiento son de hecho iguales.

Si las coordenadas generalizadas que se utilizan en 7.9 son rectangulares, las ecuaciones de Lagrange (para una sola partícula) se reducirán a

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (7.14)$$

o bien,

$$\frac{\partial(T - U)}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial(T - U)}{\partial \dot{x}_i} = 0$$

Pero, en coordenadas rectangulares y en el caso de un sistema de fuerzas conservativo, tenemos que $T = T(\dot{x}_i)$ y $U = U(x_i)$, con lo que

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i} = 0$$

y, por tanto, las ecuaciones de Lagrange quedarán en la forma

$$-\frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \quad (7.15)$$

Asimismo, tenemos que (por ser el sistema conservativo)

$$-\frac{\partial U}{\partial x_i} = F_i$$

y

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} m \dot{x}_j^2 \right) = \frac{d}{dt} (m \dot{x}_i) = \dot{p}_i$$

de forma que, como queríamos, la ecuación 7.14 nos da la fórmula de Newton:

$$F_i = \dot{p}_i \quad (7.16)$$

Resulta, pues, que las ecuaciones de Lagrange y de Newton son iguales en el caso de que las coordenadas generalizadas sean las coordenadas rectangulares.

7.7 Esencia de la dinámica de Lagrange

En las secciones precedentes se hicieron algunas afirmaciones importantes de carácter general relativas a la formulación de la mecánica de Lagrange. Antes de proseguir más adelante, nos parece necesario resumir tales puntos al objeto de hacer hincapié en las diferencias que existen entre los puntos de vista de Newton y de Lagrange.

Históricamente, las ecuaciones de movimiento de Lagrange expresadas en coordenadas generalizadas fueron deducidas con anterioridad al enunciado del principio de Hamilton.* Si aquí hemos preferido deducir las ecuaciones de Lagrange postulando el principio de Hamilton se debe a que ello constituye el método más directo y el procedimiento formal a través del cual es posible la unificación de la dinámica clásica.

Primero y principal, debemos reiterar que la dinámica de Lagrange no es, en modo alguno, una teoría *nueva*, ya que los resultados obtenidos estudiando un problema por el método de Lagrange han de ser iguales a los que proporcione la aplicación de las fórmulas de Newton, cualquiera que sea el sistema mecánico de que se trate; únicamente es diferente el procedimiento seguido para la obtención de tales resultados.

* Las ecuaciones de Lagrange, 1788; el principio de Hamilton, 1834.

Mientras que con el procedimiento de Newton se coloca el énfasis sobre el agente exterior que actúa *sobre* un cuerpo (la *fuerza*), con el de Lagrange se manejan magnitudes asociadas *al* cuerpo (las *energías* cinética y potencial). De hecho, en ningún lugar de la formulación de Lagrange aparece la idea de *fuerza*, lo que constituye algo especialmente importante por diversas razones. En primer lugar, puesto que la energía es una magnitud escalar, la lagrangiana de un sistema será invariante respecto de los cambios de coordenadas. Realmente, estos cambios no están reducidos a los que puedan tener lugar entre distintos sistemas ortogonales del espacio ordinario; puede, asimismo, tratarse de transformaciones entre coordenadas *ordinarias* y *generalizadas*. Con esto, nos es posible pasar del espacio ordinario (en el que las ecuaciones de movimiento pueden ser muy complicadas) a un espacio de configuraciones elegido de tal forma, para cada problema, que dé lugar a una simplificación máxima. Estamos acostumbrados a pensar en los sistemas mecánicos en términos de magnitudes *vectoriales* tales como fuerza, velocidad, ímpetu, momento, etc., pero en la formulación de Lagrange, las ecuaciones de movimiento se obtienen por completo en función de operaciones *escalares* en un espacio de configuraciones.

Otro aspecto importante de esta confrontación entre fuerza y energía reside en que, en ciertas ocasiones, ni siquiera es posible establecer de forma explícita todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo (como a veces es el caso de las fuerzas de ligadura), mientras que sigue siendo posible obtener expresiones de las energías cinética y potencial. Es precisamente este hecho lo que hace al principio de Hamilton muy útil para los sistemas cuánticos, en los que a veces las fuerzas no son conocidas, pero sí las energías.

La constitución de la mecánica, hecha en forma diferencial en la formulación de Newton y en la forma integral que entraña el principio de Hamilton (y las ecuaciones de Lagrange resultantes), se ha mostrado ser equivalente en ambos casos, por lo que no puede haber diferencia alguna entre ambos puntos de vista que se fundamentan en la descripción de *efectos físicos*. No obstante, desde una posición filosófica es posible establecer una diferencia. En la formulación de Newton se supone que una fuerza determinada que actúa sobre un cuerpo produce un movimiento definido; es decir, un *efecto* definido está siempre asociado a una cierta *causa*. Sin embargo, según el principio de Hamilton, puede suponerse que el movimiento de un cuerpo resulta de la tendencia que tiene la Naturaleza hacia la consecución de un cierto *propósito*, siendo éste el de hacer mínima la integral temporal de la diferencia entre las energías cinética y potencial. Evidentemente, la resolución operativa de problemas de mecánica no depende de que se adopte uno u otro punto de vista, pero históricamente estas consideraciones tuvieron una influencia profunda en la evolución de la mecánica (como, por ejemplo, en el principio de Maupertuis, mencionado en la sección 7.2). Al lector interesado le señalamos la excelente obra de MARGENAU (Ma50, cap. 19) donde encontrará una discusión de estos temas.

7.8 Un teorema relativo a la energía cinética

Cuando la energía cinética se expresa en coordenadas rectangulares fijas, el resultado es una función homogénea de segundo grado de las $\dot{x}_{\alpha,i}$:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{i=1}^3 m_{\alpha} \dot{x}_{\alpha,i}^2 \quad (7.17)$$

Queremos ahora determinar cómo depende T de las coordenadas y velocidades generalizadas. Las ecuaciones que ligan las coordenadas rectangulares con las coordenadas generalizadas son (véanse ecuaciones 7.5a)

$$x_{\alpha,i} = x_{\alpha,i}(q_j, t), \quad j = 1, 2, \dots, s \quad (7.18)$$

y, de aquí,

$$\dot{x}_{\alpha,i} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} \quad (7.19)$$

Por otra parte, tenemos

$$\dot{x}_{\alpha,i}^2 = \sum_{j,k} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k + 2 \sum_j \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} \dot{q}_j + \left(\frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} \right)^2 \quad (7.20)$$

con lo cual la energía cinética queda

$$T = \sum_{\alpha} \sum_{i,j,k} \frac{1}{2} m_{\alpha} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{\alpha} \sum_{i,j} m_{\alpha} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} \dot{q}_j + \sum_{\alpha} \sum_i \frac{1}{2} m_{\alpha} \left(\frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} \right)^2 \quad (7.21)$$

Entonces, con los convenios de notación evidente, tenemos, en general,

$$T = \sum_{j,k} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_j b_j \dot{q}_j + c \quad (7.22)$$

Veamos ahora el caso concreto en que el sistema sea *esclerónico*, con lo que el tiempo no aparecerá explícitamente en las ecuaciones de transformación 7.18 y las derivadas parciales respecto del tiempo se anularán:

$$\frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} = 0; \quad b_j = 0; \quad c = 0$$

Por lo tanto, en estas condiciones, la energía cinética es una *función homogénea de segundo grado* de las velocidades generalizadas

$$T = \sum_{j,k} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (7.23)$$

Derivemos ahora 7.23 respecto de \dot{q}_l :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = \sum_k a_{lk} \dot{q}_k + \sum_j a_{jl} \dot{q}_j$$

Multiplicando esta igualdad por \dot{q}_l y sumando las correspondientes a todos los valores de l , tendremos

$$\sum_l \dot{q}_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{k,l} a_{lk} \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_{j,l} a_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l$$

Ahora, como *todos* los índices son mudos, los dos términos del segundo miembro serán iguales

$$\sum_l \dot{q}_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = 2 \sum_{j,k} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k = 2T \quad (7.24)$$

Este importante resultado constituye un caso particular del *teorema de Euler*, según el cual cuando $f(y_k)$ sea una función homogénea de grado n de las y_k , se tendrá

$$\sum_k y_k \frac{\partial f}{\partial y_k} = nf \quad (7.25)$$

7.9 Conservación de la energía

De acuerdo con nuestros razonamientos anteriores,* el *tiempo* es homogéneo en un sistema de referencia inercial. Por tanto, toda lagrangiana que describa un *sistema cerrado* (o sea, un sistema que no interactúe con nada exterior al mismo) no puede ser función explícita del tiempo.** O sea,

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

* Véase sección 2.3.

** Igualmente, la lagrangiana será independiente del tiempo cuando el sistema se encuentre en un campo de fuerzas uniforme.

y la derivada total de la lagrangiana quedará

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \quad (7.26)$$

donde el término habitual $\partial L / \partial t$ no aparece ahora. Pero como por las ecuaciones de Lagrange sabemos que

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (7.27)$$

sustituyendo en 7.26 la expresión de $\partial L / \partial q_j$ dada por 7.27 tendremos

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \dot{q}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j$$

o sea

$$\frac{dL}{dt} - \sum_j \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0$$

de forma que

$$\frac{d}{dt} \left(L - \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0 \quad (7.28)$$

En consecuencia, la cantidad que aparece entre paréntesis, que representaremos por $-H$, permanece constante con el tiempo:

$$L - \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = -H = \text{cte.} \quad (7.29)$$

Si la energía potencial U no es función explícita de las velocidades $\dot{x}_{\alpha,i}$ o del tiempo t , será $U = U(x_{\alpha,i})$. Entonces, como las relaciones que ligan las coordenadas rectangulares con las generalizadas son de la forma $x_{\alpha,i} = x_{\alpha,i}(q_j)$ o $q_j = q_j(x_{\alpha,i})$, de las que se excluye toda posibilidad de dependencia temporal explícita, tendremos que $U = U(q_j)$ y $\partial U / \partial \dot{q}_j = 0$. Así, pues,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial(T - U)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$$

y la ecuación 7.29 podrá escribirse

$$(T - U) - \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = -H \quad (7.30)$$

que, utilizando la igualdad 7.24, nos da

$$(T - U) - 2T = -H$$

o sea,

$$T + U = E = H = \text{cte.} \quad (7.31)$$

resultando que, en este caso, la energía total E es una constante del movimiento.

La función H es la llamada *hamiltoniana* del sistema, pudiendo definirse como se hace en la igualdad 7.29 (pero véanse también los comentarios de la sección 7.12). Es importante observar que la hamiltoniana H sólo es igual a la energía total E del sistema cuando se cumplen las condiciones siguientes:

- (a) Las ecuaciones 7.18 que ligan las coordenadas rectangulares y generalizadas deben ser independientes del tiempo, con lo cual es seguro que la energía cinética será una función homogénea de segundo grado de las \dot{q}_j .
- (b) La energía potencial debe ser independiente de la velocidad, desapareciendo así los términos $\partial U / \partial \dot{q}_j$ de la expresión de H (7.30).

En consecuencia, las preguntas *¿Cómo es $H=E$ en este sistema?* y *¿Se conserva la energía de este sistema?* pertenecen a aspectos *distintos* del problema, debiendo examinarse cada una por separado. Por ejemplo, puede haber casos en los que la hamiltoniana no sea igual a la energía total y, sin embargo, se conserve la energía. Supongamos, entonces, un sistema conservativo que se describa en función de unas coordenadas generalizadas que se encuentren en movimiento con relación a unos ejes rectangulares fijos, en cuyo caso las ecuaciones de transformación contendrán el tiempo, y la energía cinética ya no será una función homogénea de segundo grado de las velocidades generalizadas. Evidentemente, la elección de un sistema de coordenadas generalizadas, matemáticamente conveniente, no puede alterar el hecho físico de que la energía se conserve, pero en el sistema de coordenadas móvil la hamiltoniana ya no será igual a la energía total.

7.10 Conservación del ímpetu

Como el espacio de un sistema de referencia inercial es *homogéneo*, la lagrangiana de un sistema cerrado no resultará afectada por una traslación de todo el sistema dentro del espacio. Consideremos una traslación infinitesimal de todos los vectores de posición \mathbf{r}_α tal que $\mathbf{r}_\alpha \rightarrow \mathbf{r}_\alpha + \delta\mathbf{r}$, lo que equivale a trasladar una distancia $\delta\mathbf{r}$ al sistema entero. Para simplificar, examinemos un sistema compuesto de una partícula única (con una sumatoria en α podríamos considerar un sistema de n partículas de forma exactamente igual) y escribamos su lagrangiana en coordenadas cartesianas, $L = L(x_i, \dot{x}_i)$. La variación de L producida por un desplazamiento infinitesimal $\delta\mathbf{r} = \sum_i \delta x_i \mathbf{e}_i$ es

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i = 0 \quad (7.32)$$

Como sólo estamos considerando un *desplazamiento*, de forma que las δx_i no son funciones del tiempo, implícitas o explícitas, tendremos que

$$\delta \dot{x}_i = \delta \frac{dx_i}{dt} = \frac{d}{dt} \delta x_i \equiv 0 \quad (7.33)$$

y, por lo tanto, δL quedará

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i = 0 \quad (7.34)$$

Dado que cada una de las δx_i es un desplazamiento independiente, δL sólo se anulará idénticamente cuando se anule cada una de las derivadas parciales de L :

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0. \quad (7.35)$$

Entonces, de acuerdo con las ecuaciones de Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 \quad (7.36)$$

y,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \text{cte.} \quad (7.37)$$

o bien

$$\begin{aligned}\frac{\partial(T - U)}{\partial \dot{x}_i} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left(\frac{1}{2} m \sum_j \dot{x}_j^2 \right) \\ &= m \ddot{x}_i = p_i = \text{cte.}\end{aligned}\quad (7.38)$$

Así pues, la homogeneidad del espacio implica que el ímpetu \mathbf{p} de un sistema cerrado permanece constante con el tiempo.

Este resultado puede quedar también establecido en los siguientes términos: Cuando la lagrangiana de un sistema (no necesariamente *cerrado*) sea invariante respecto a la traslación en una cierta dirección, el ímpetu del sistema según dicha dirección permanece constante con el tiempo.

7.11 Conservación del momento cinético

En la sección 2.3 afirmamos que una de las características de los sistemas inerciales es que en ellos el espacio es *isótropo*; es decir, las propiedades mecánicas de un sistema cerrado no resultan afectadas por la orientación del sistema. En concreto, la lagrangiana de un sistema cerrado no variará cuando éste reciba un giro infinitesimal.*

Cuando un sistema gira un ángulo infinitesimal $\delta\theta$ en torno a un cierto eje (véase figura 7-2), el vector de posición \mathbf{r} respecto de un punto dado pasará a

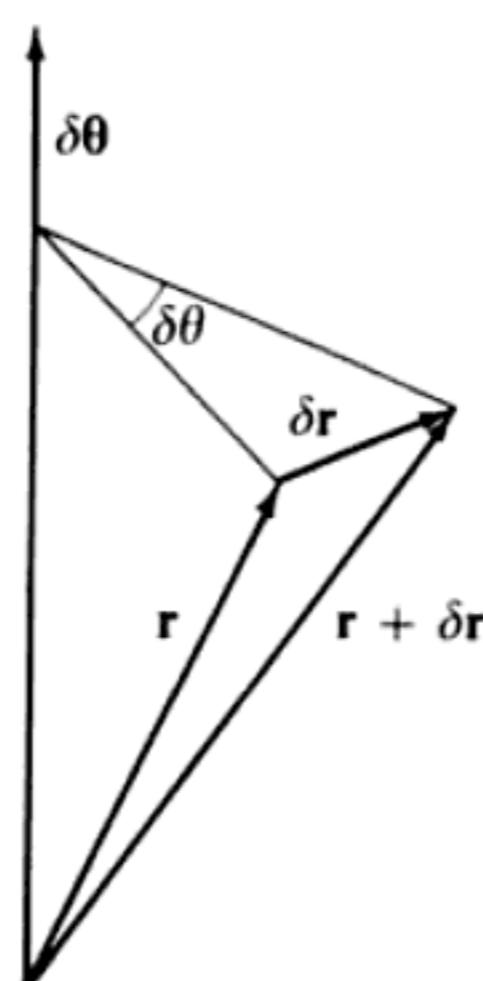


FIG. 7-2

* Hacemos que el giro sea infinitesimal ya que deseamos que pueda representarse por un vector (véase sección 1.15).

ser $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$, donde (véase ec. 1.106)

$$\delta\mathbf{r} = \delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r} \quad (7.39)$$

y, entonces, las velocidades cambiarán también con el giro del sistema y como las ecuaciones de transformación son las mismas para todos los vectores, tendremos

$$\delta\dot{\mathbf{r}} = \delta\boldsymbol{\theta} \times \dot{\mathbf{r}} \quad (7.40)$$

Como en la sección 7.10, sólo consideraremos una partícula expresando su lagrangiana en coordenadas cartesianas rectangulares. La variación de L debida a la rotación infinitesimal es

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i = 0 \quad (7.41)$$

Por las expresiones 7.37 y 7.38, vemos que las componentes del ímpetu en coordenadas cartesianas vienen dadas por

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \quad (7.42)$$

con lo que las ecuaciones de Lagrange se expresarán

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial x_i} \quad (7.43)$$

y la ecuación 7.41 pasará a ser

$$\delta L = \sum_i \dot{p}_i \delta x_i + \sum_i p_i \delta \dot{x}_i = 0 \quad (7.44)$$

o sea

$$\dot{\mathbf{p}} \cdot \delta\mathbf{r} + \mathbf{p} \cdot \delta\dot{\mathbf{r}} = 0 \quad (7.45)$$

que, utilizando 7.39 y 7.40 puede escribirse

$$\dot{\mathbf{p}} \cdot (\delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}) + \mathbf{p} \cdot (\delta\boldsymbol{\theta} \times \dot{\mathbf{r}}) = 0 \quad (7.46)$$

En un producto mixto puede cambiarse cíclicamente el orden de los factores sin que varíe su valor; entonces

$$\delta\theta \cdot (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}) + \delta\theta \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}) = 0$$

o sea,

$$\delta\theta \cdot [(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}) + (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p})] = 0 \quad (7.47)$$

donde los términos encerrados en el paréntesis son precisamente el resultado de derivar $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ respecto del tiempo

$$\delta\theta \cdot \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = 0 \quad (7.48)$$

Como $\delta\theta$ es cualquiera, deberá ser

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = 0$$

con lo que

$$\mathbf{r} \times \mathbf{p} = \text{cte.} \quad (7.49)$$

Ahora bien, como $\mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{L}$, el momento cinético de la partícula permanecerá constante con el tiempo.

Una importante consecuencia de este teorema es la siguiente. Si suponemos un sistema dentro de un campo de fuerzas exteriores que posea un eje de simetría, su lagrangiana será invariante respecto de los giros en torno a dicho eje. En consecuencia, el momento cinético del sistema respecto del eje de simetría permanecerá constante con el tiempo. Es este exactamente el caso tratado en el ejemplo 7.4: el sistema poseía un eje de simetría vertical respecto del cual encontramos que el momento cinético se conservaba.

Difícilmente puede hacerse hincapié suficiente en la importancia de la relación entre las propiedades de *simetría* y la *invariancia* de magnitudes físicas, la cual va más allá de la conservación del ímpetu, y realmente más allá de los sistemas clásicos, aplicándose ampliamente en las teorías modernas de los fenómenos de campo y partículas elementales.

En la tabla 7.1 se resumen los resultados que hemos podido deducir, sin más que tener en cuenta las propiedades de los sistemas inerciales, con relación a los teoremas de conservación aplicados a los sistemas cerrados.

Tabla 7.1

<i>Características del sistema inercial</i>	<i>Propiedades de la lagrangiana</i>	<i>Magnitud que se conserva</i>
Homogeneidad del tiempo	No es función explícita del tiempo	Energía total
Homogeneidad del espacio	Invariancia respecto de traslaciones	Ímpetu
Isotropía del espacio	Invariancia respecto de los giros	Momento cinético

Resulta, pues, que hay siete constantes (o integrales primeras) en el movimiento de los sistemas cerrados: la energía total, las tres componentes del ímpetu y las tres componentes del momento cinético. Éstas y sólo éstas poseen la propiedad de ser *aditivas* respecto de las partículas que componen el sistema, exhibiendo dicha propiedad haya o no interacción entre las partículas.

7.12 Ecuaciones canónicas de movimiento — La dinámica de Hamilton

En la sección 7.10 encontramos que cuando la energía potencial de un sistema sea independiente de la velocidad, las componentes del ímpetu en coordenadas cartesianas vendrán dadas por

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \quad (7.50)$$

Por analogía, podemos ampliar este resultado al caso en que la lagrangiana esté expresada en coordenadas generalizadas, definiendo los *ímpetus generalizados** según

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

(7.51)

* Los términos «coordenadas generalizadas», «velocidades generalizadas» e «ímpetus generalizados» fueron introducidos en 1867 por Sir William THOMSON (más tarde, Lord Kelvin) y P. G. TAIT en su famoso tratado *Natural Philosophy*.

(Por desgracia, se acostumbra a representar con la misma letra el ímpetu ordinario y el generalizado, aun cuando ambas magnitudes pueden ser muy diferentes.) Entonces, las ecuaciones de movimiento de Lagrange se expresarán

$$\boxed{\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}} \quad (7.52)$$

Si en la expresión 7.29 de la hamiltoniana introducimos la definición de ímpetu generalizado, tendremos

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L \quad (7.53)$$

Se supone ahora que la lagrangiana es una función de las coordenadas y velocidades generalizadas y posiblemente del tiempo. Esta dependencia de la lagrangiana con el tiempo puede aparecer, bien cuando las ligaduras sean función del tiempo, bien cuando en las ecuaciones de transformación que ligan las coordenadas cartesianas y generalizadas esté contenido el tiempo explícitamente. (Recuérdese que no tomamos en consideración potenciales dependientes del tiempo.) Las ecuaciones 7.51 pueden utilizarse para despejar las velocidades generalizadas, expresándose éstas

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(q_k, p_k, t) \quad (7.54)$$

Entonces, en 7.53 podemos pasar del sistema de variables (q_j, \dot{q}_j, t) al $(q_j, p_j, t)^*$ y la hamiltoniana se expresará

$$\boxed{H(q_k, p_k, t) = \sum_j p_j \dot{q}_j - L(q_k, \dot{q}_k, t)} \quad (7.55)$$

Esta igualdad se ha escrito de forma que resalte bien el hecho de que *la hamiltoniana se considera siempre función del sistema (q_k, p_k, t) , mientras que la lagrangiana es función del sistema (q_k, \dot{q}_k, t)* :

$$\boxed{H = H(q_k, p_k, t); \quad L = L(q_k, \dot{q}_k, t)} \quad (7.56)$$

* Este cambio de variables es similar a los que con tanta frecuencia se encuentran en termodinámica y que caen dentro del tipo general de las llamadas *transformaciones de Legendre* (utilizadas por primera vez por EULER e incluso por LEIBNIZ). En LANZOS (La49, cap. 6) puede encontrarse un estudio general de las transformaciones de Legendre, recalmando su importancia en la mecánica.

Por lo tanto, la diferencial total de H será

$$dH = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (7.57)$$

y, según 7.55, podremos escribir también

$$dH = \sum_k \left(\dot{q}_k dp_k + p_k d\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (7.58)$$

Si utilizamos 7.51 y 7.52, los sumandos segundo y cuarto del paréntesis se anulan entre sí y la expresión 7.58 queda

$$dH = \sum_k (\dot{q}_k dp_k - \dot{p}_k dq_k) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (7.59)$$

Cuando identifiquemos los coeficientes* de dq_k , dp_k y dt de 7.57 y 7.59 encontraremos

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad (7.60)$$

$$-\dot{p}_k = \frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (7.61)$$

y

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (7.62)$$

Además, si llevamos 7.60 y 7.61 a 7.57, se anularán cada uno de los sumandos entre paréntesis, resultando que

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (7.63)$$

* En la sección siguiente examinaremos las hipótesis contenidas implícitamente en este procedimiento.

Las igualdades 7.60 y 7.61 son las *ecuaciones de movimiento de Hamilton** que, por su aspecto simétrico, se conocen asimismo como *ecuaciones canónicas de movimiento*. La descripción del movimiento mediante estas ecuaciones recibe el nombre de *dinámica de Hamilton*.

La ecuación 7.63 nos dice que cuando H no sea función explícita del tiempo, la hamiltoniana será una constante del movimiento. Como vimos antes (sección 7.9), la hamiltoniana será igual a la energía total $T+U$ en caso de que la energía potencial sea independiente de la velocidad y de que las ecuaciones de transformación entre las $v_{x,i}$ y las q_j no contengan explícitamente al tiempo. En tales condiciones, y cuando $\partial H/\partial t=0$, será $H=E=\text{cte.}$

Tenemos $2s$ ecuaciones canónicas en sustitución de las s ecuaciones de Lagrange (recordemos que $s=3n-m$ es el número de grados de libertad de un sistema), pero las primeras son ecuaciones diferenciales de *primer orden*, mientras que las de Lagrange son de *segundo orden*.** Para hacer uso de las ecuaciones canónicas en la resolución de un problema, debe formarse primeramente la hamiltoniana en función de las coordenadas e ímpetus generalizados, lo cual, aunque en ocasiones pueda hacerse directamente, en casos más complicados puede hacer necesario plantear primero la lagrangiana y después obtener los ímpetus generalizados según 7.51. Entonces, las ecuaciones de movimiento vendrán dadas por las ecuaciones canónicas.

◆ Ejemplo 7.12 Partícula en movimiento sobre una superficie cilíndrica

Como ejemplo de cómo se plantea un problema por el método de Hamilton, consideramos una partícula de masa m limitada a moverse sobre la superficie del cilindro definido por la ecuación

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (1)$$

La partícula está sometida a una fuerza dirigida hacia el origen y proporcional a la distancia entre éste y la partícula:

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r} \quad (2)$$

* Este sistema de ecuaciones fue obtenido por primera vez por LAGRANGE en 1809, deduciéndolo asimismo POISSON unas ecuaciones similares en el mismo año, pero ninguno de los dos reconoció en ellas un sistema fundamental de ecuaciones de movimiento; fue CAUCHY quien se dio cuenta de este extremo en 1831. HAMILTON las dedujo por primera vez en 1834 a partir de un principio variacional fundamental, constituyéndolas en base de una teoría de gran alcance para la dinámica. Así, pues, la denominación ecuaciones *de Hamilton* es totalmente merecida.

** Este hecho no tiene nada de particular; todo sistema de s ecuaciones de segundo orden puede sustituirse siempre por un sistema de $2s$ ecuaciones de primer orden.

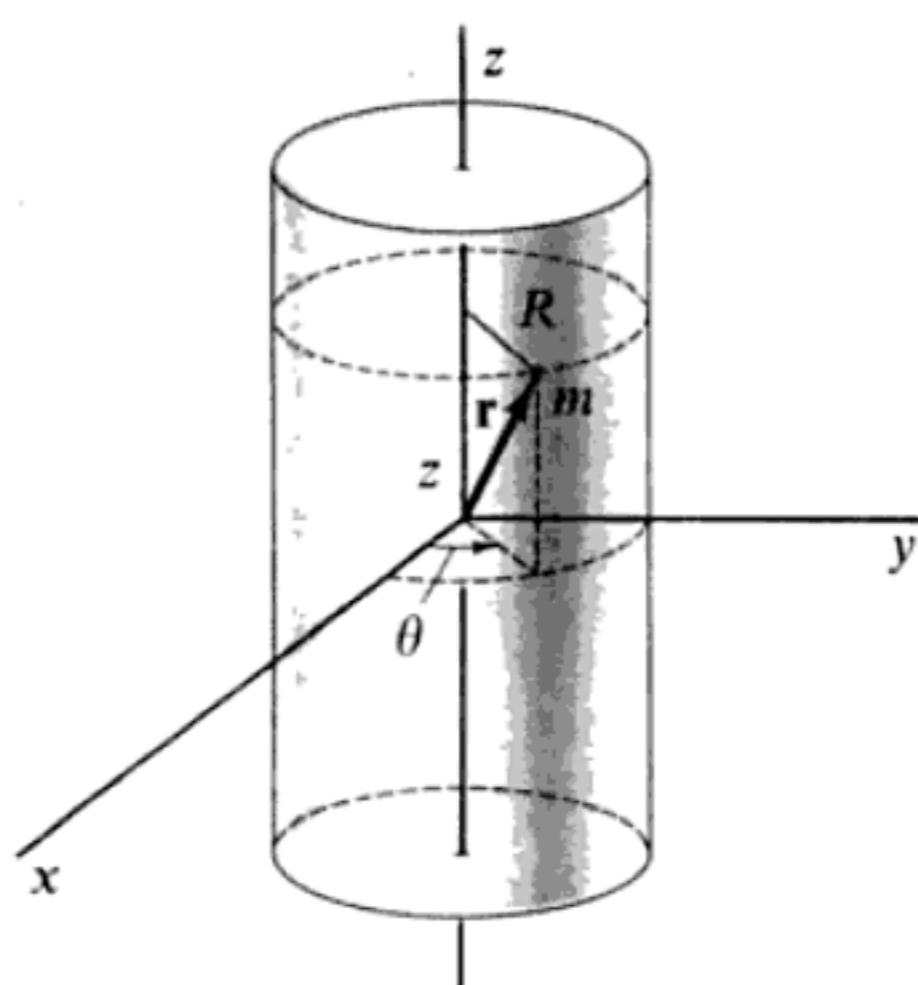


FIG. 7-3

En la figura 7-3 se representa esta situación. El potencial que corresponde a la fuerza \mathbf{F} es

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) \\ &= \frac{1}{2}k(R^2 + z^2) \end{aligned} \quad (3)$$

El cuadrado de la velocidad en coordenadas cilíndricas es (1.101)

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 \quad (4)$$

pero, como aquí $r=R$ es constante, la energía cinética será

$$T = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) \quad (5)$$

Con esto, podemos ya escribir la lagrangiana en la forma

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}k(R^2 + z^2) \quad (6)$$

Las coordenadas generalizadas son θ y z los ímpetus generalizados, son por tanto

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta} \quad (7a)$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \quad (7b)$$

Dado que el sistema es conservativo y las ecuaciones de transformación entre las coordenadas rectangulares y cilíndricas no contienen explícitamente al tiempo, la hamiltoniana H será precisamente la energía total expresada en función de las variables θ , p_θ , z y p_z , si bien θ no aparece explícitamente, de forma que

$$\begin{aligned} H(z, p_\theta, p_z) &= T + U \\ &= \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2}kz^2 \end{aligned} \quad (8)$$

donde se ha suprimido el término constante $\frac{1}{2}kR^2$. Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento se determinarán a partir de las ecuaciones canónicas

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \quad (9a)$$

$$\dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -kz \quad (9b)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2} \quad (9c)$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m} \quad (9d)$$

Las ecuaciones 9c y 9d son idénticas a las 7a y 7b. Por su parte, la ecuación 9a nos da

$$p_\theta = mR^2\dot{\theta} = \text{cte.} \quad (10)$$

resultando que el momento cinético respecto al eje z es una constante del movimiento, lo que era de esperar ya que el eje z es de simetría para este problema. Si combinamos las ecuaciones 7b y 9b, encontramos

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0 \quad (11)$$

donde

$$\omega_0^2 \equiv k/m \quad (12)$$

Por lo tanto, el movimiento según la dirección z será armónico simple.

Para este problema, podríamos haber determinado las mismas ecuaciones de movimiento siguiendo el método de Lagrange y haciendo uso de la función L definida por la ecuación 6. En este caso, las ecuaciones de movimiento de Lagrange son más fáciles de obtener que las canónicas y, de hecho, es muy frecuente que

el método de Lagrange lleve más directamente a las ecuaciones de movimiento que el de Hamilton. No obstante, a causa de que la elección de las variables puede hacerse con mayor libertad al plantear un problema siguiendo el método de Hamilton (las q_k y las p_k son independientes, mientras que las q_k y las \dot{q}_k no lo son), encontraremos a veces cierta ventaja de índole práctica siguiendo este método. Así, por ejemplo, en mecánica celeste, especialmente cuando ocurre que los movimientos están sometidos a perturbaciones producidas por la influencia de otros objetos, ha quedado demostrada la conveniencia de abordar los problemas con ayuda de la dinámica de Hamilton. Por regla general, sin embargo, la mayor eficacia del enfoque de la dinámica por el método de Hamilton no se manifiesta en la simplificación de la solución de los problemas de mecánica; más bien debe buscarse en el hecho de que proporciona los fundamentos a partir de los cuales pueden llevarse a cabo las ampliaciones a otros campos.

De la coordenada generalizada q_k y del ímpetu generalizado p_k se dice que son magnitudes *canónicamente conjugadas*. Según las ecuaciones 7.60 y 7.61, cuando q_k no aparezca en la hamiltoniana, será $\dot{p}_k = 0$ y el ímpetu conjugado p_k constituirá una constante del movimiento. Diremos que una coordenada es *cíclica* cuando no se encuentre de forma explícita en las expresiones de T y U . Toda coordenada cíclica en H lo es también en L ; sin embargo, aun cuando q_k no esté presente en L , la velocidad generalizada correspondiente \dot{q}_k sí lo estará en general. Entonces,

$$L = L(q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t)$$

no habiéndose efectuado reducción alguna en los grados de libertad del sistema, aun cuando una de las coordenadas es cíclica y subsistiendo todavía s ecuaciones de segundo orden que habrán de resolverse. Por otra parte, en la formulación canónica, si q_k es cíclica, p_k será constante, $p_k = \alpha_k$, y

$$H = H(q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_s, p_1, \dots, p_{k-1}, \alpha_k, p_{k+1}, \dots, p_s, t)$$

resultando que habrá que resolver $2s - 2$ ecuaciones de primer orden habiéndose, de hecho, reducido la complicación del problema; en efecto, sólo quedarán $s - 1$ grados de libertad. La coordenada q_k ha quedado aislada por completo y puede ser ignorada por lo que al resto del problema concierne. La constante α_k se calcula aplicando las condiciones iniciales, siendo la ecuación de movimiento correspondiente a la coordenada cíclica,

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial \alpha_k} \equiv \omega_k \quad (7.64)$$

que se puede integrar inmediatamente, dando

$$q_k(t) = \int \omega_k dt \quad (7.65)$$

Por tanto, la solución correspondiente a una coordenada cíclica es trivial y se reduce a una cuadratura. En consecuencia, la formulación canónica de Hamilton es especialmente bien adecuada para tratar con aquellos problemas en los cuales una, o más de una, de las coordenadas sea cíclica. Es evidente que la más sencilla de las soluciones de un problema aparecería si éste pudiera plantearse de manera que *todas* las coordenadas fuesen cíclicas, pues entonces cada una de las coordenadas quedaría representada de la forma trivial 7.65. De hecho, es posible determinar transformaciones que hagan cíclicas todas las coordenadas,* métodos que llevan de forma natural a un planteamiento de la dinámica especialmente útil para la formulación de las teorías modernas acerca de la materia. No obstante, el estudio de estos temas cae fuera del alcance de esta obra.**

7.13 Algunos comentarios relativos a las variables dinámicas y a los cálculos variacionales en física.

Hemos comenzado obteniendo las ecuaciones de movimiento de Lagrange mediante la formulación del principio de Hamilton en forma de integral variacional y haciendo uso, a continuación, de los resultados que se obtuvieron en el capítulo anterior en relación con el cálculo de variaciones. Dado el camino que seguimos entonces, el método y su aplicación quedaron separados y por ello puede ser, quizás, interesante desarrollar de nuevo los razonamientos de forma ordenada, aunque resumida.

El principio de Hamilton se expresa

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j, t) dt = 0 \quad (7.66)$$

y aplicando el procedimiento variacional expuesto en la sección 6.8, tendremos,

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt = 0 \quad (7.67)$$

* Las transformaciones de esta clase fueron ideadas por Carl Gustav Jacob JACOBI (1804-1851), cuyos estudios ampliaron en gran medida la utilidad de los métodos de Hamilton y se conocen con el nombre de *teoría de Hamilton-Jacobi*.

** Véase, por ejemplo, GOLDSTEIN (Go50, cap. 9).

Seguidamente, hagamos la hipótesis de que las δq_j y las $\delta \dot{q}_j$ no sean independientes, de manera que la variación y la derivación respecto del tiempo serán intercambiables:

$$\delta \dot{q}_j = \delta \left(\frac{dq_j}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \delta q_j \quad (7.68)$$

Con esto, la integral variada se transforma en (después de integrar por partes igualando a cero en los extremos las δq_j)

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j \, dt = 0 \quad (7.69)$$

donde, al tener en cuenta la condición de que las δq_j sean variaciones independientes, resultarán inmediatamente las ecuaciones de Lagrange.

Aunque en el principio de Hamilton, expresado por la integral variacional 7.66, la lagrangiana sea una función de las coordenadas y velocidades generalizadas, sólo las primeras se consideran variables *independientes*, puesto que las segundas son únicamente las derivadas de aquéllas respecto del tiempo. Cuando la integral se pasa a la forma dada por 7.69 decimos que las δq_j son variaciones *independientes*, con lo que el integrando debe ser idénticamente nulo, resultando las ecuaciones de Lagrange. En consecuencia, podemos plantear la pregunta siguiente: Puesto que el movimiento queda completamente determinado por las condiciones iniciales, ¿cuál es el significado de las variaciones δq_j ? Quizá sea suficiente contestar que sólo se consideran aquellas variaciones *geométricamente posibles* dentro de las limitaciones impuestas por las ligaduras, aunque no sean *dinámicamente posibles*. Es decir, cuando sigamos un método variacional para obtener las ecuaciones de Lagrange, es aconsejable ignorar temporalmente el hecho de que estemos tratando con un *sistema físico* cuyo movimiento se encuentra totalmente determinado y no sometido a variación alguna, suponiendo en su lugar que nos enfrentamos a un cierto problema *matemático abstracto*. Lo cierto es que es con este ánimo que deberemos llevar a cabo todo cálculo variacional concerniente a los procesos físicos, punto de vista que, al ser adoptado, nos permite despreocuparnos en general del hecho de que el método variacional puede ser opuesto a algunas de las propiedades conocidas del sistema.(Por ejemplo, la energía no se conserva generalmente cuando pasamos de la trayectoria auténtica a la variada.) Sencillamente, todo cálculo variacional ensaya *posibles* soluciones a un problema, prescribiendo un procedimiento para escoger la *correcta*.

Las ecuaciones canónicas de movimiento pueden obtenerse asimismo directamente a través de un cálculo variacional que se basa en el llamado *principio de Hamilton modificado*. Según la expresión 7.53, la lagrangiana puede escribirse

$$L = \sum_j p_j \dot{q}_j - H(q_j, p_j, t) \quad (7.70)$$

y la formulación del principio de Hamilton contenido en la ecuación 7.66 podrá modificarse, escribiéndose

$$\boxed{\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_j p_j \dot{q}_j - H \right) dt = 0} \quad (7.71)$$

Si variamos esta expresión en la forma ya conocida, obtendremos

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left(p_j \delta \dot{q}_j + \dot{q}_j \delta p_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \delta q_j - \frac{\partial H}{\partial q_j} \delta p_j \right) dt = 0 \quad (7.72)$$

en donde, al utilizar la hamiltoniana, se supone que las q_i y las p_i son independientes. Como siempre, las \dot{q}_j no son independientes de las q_i y puede utilizarse la expresión 7.68 para escribir como sigue el primer término de la ecuación 7.72

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_j p_j \delta \dot{q}_j dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_j p_j \frac{d}{dt} \delta q_j dt \quad (7.73)$$

Al integrar por partes, el término no integral resultante se anula y queda

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_j p_j \delta \dot{q}_j dt = - \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \dot{p}_j \delta q_j dt \quad (7.74)$$

con lo cual, la ecuación 7.72 se transformará en

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left\{ \left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) \delta p_j - \left(\dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \delta q_j \right\} dt = 0 \quad (7.75)$$

Cuando las δq_j y las δp_j representen *variaciones independientes*, los respectivos coeficientes entre paréntesis de las mismas deberán anularse independientemente, resultando las ecuaciones canónicas de Hamilton.

En la sección precedente obtuvimos las ecuaciones canónicas escribiendo dos expresiones distintas de la diferencial total de la hamiltoniana (7.57 y 7.59) e igualando a continuación los coeficientes de dq_j y dp_j . Tal procedimiento es válido cuando las q_j y las p_j sean variables independientes; en consecuencia, tanto en la deducción anterior como en el cálculo variacional que acabamos de hacer, las

ecuaciones canónicas se han obtenido estudiando la naturaleza independiente de las coordenadas e ímpetus generalizados.

Por otra parte, lo cierto es que coordenadas e ímpetus no son «independientes» en sentido estricto, ya que, cuando se conozca la dependencia temporal de cada una de las coordenadas, $q_i = q_i(t)$, el problema estará resuelto por completo. Las velocidades generalizadas pueden calcularse a partir de

$$\dot{q}_j(t) = \frac{d}{dt} q_j(t)$$

y los ímpetus generalizados son

$$p_j = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} L(q_j, \dot{q}_j, t)$$

Lo esencial es que, mientras que las q_i y las \dot{q}_i están relacionadas a través de una sencilla derivada respecto del tiempo, cualquiera que sea el comportamiento del sistema, la relación entre las q_i y las p_i está constituida por las *mismas ecuaciones de movimiento*. Por lo tanto, determinar las relaciones que ligan las q_i y las p_i (eliminando así la supuesta independencia de estas magnitudes) es equivalente a resolver el problema.

■ 7.14 El espacio fásico y el teorema de Liouville

Como ya indicamos antes, las coordenadas generalizadas q_i pueden utilizarse para definir un *espacio de configuraciones* s -dimensional, cada uno de cuyos puntos represente un estado determinado del sistema. Análogamente, los *ímpetus generalizados* p_i definen un *espacio de ímpetus* s -dimensional, cada uno de cuyos puntos representará un determinado estado de movimiento del sistema. Un punto dado del espacio de configuraciones sólo especifica la *posición* de cada una de las partículas del sistema, no pudiendo deducirse nada relativo al *movimiento* de las mismas. La recíproca es cierta, por supuesto, para el espacio de ímpetus. En los capítulos 3, 4 y 5 encontramos provechoso representar geométricamente la dinámica de sistemas oscilantes sencillos mediante *diagramas fásicos*. Si nos adueñamos de esta idea para emplearla en sistemas más complicados, entonces un espacio $2s$ -dimensional formado por las q_i y las p_i permitirá la representación, tanto de las posiciones como de los ímpetus de todas las partículas. Con esta generalización hemos creado el llamado *espacio fásico de Hamilton* o simplemente *espacio fásico*.*

* Anteriormente, habíamos representado en los diagramas fásicos la posición en función de una cantidad proporcional a la velocidad. En el espacio fásico de Hamilton esta última cantidad es el ímpetu generalizado.

◆ Ejemplo 7.14 Un diagrama en el espacio fásico

El diagrama fásico correspondiente al movimiento de la partícula del ejemplo 7.12 puede construirse como sigue. Como la partícula posee dos grados de libertad (θ, z), el espacio fásico tendrá cuatro dimensiones: θ, p_θ, z, p_z . Pero p_θ es constante y, por tanto, puede suprimirse. En la dirección del eje z el movimiento es armónico simple, por lo que la proyección de la trayectoria fásica sobre el plano $z-p_z$ para todo valor de la energía total H , será una elipse. Como $\theta = \text{cte.}$, la trayectoria fásica debe representar un movimiento que aumente uniformemente con θ . Así, pues, tal como se representa en la figura 7-4, la trayectoria fásica en toda superficie $H = \text{cte.}$ será una *espiral elíptica de paso constante*.

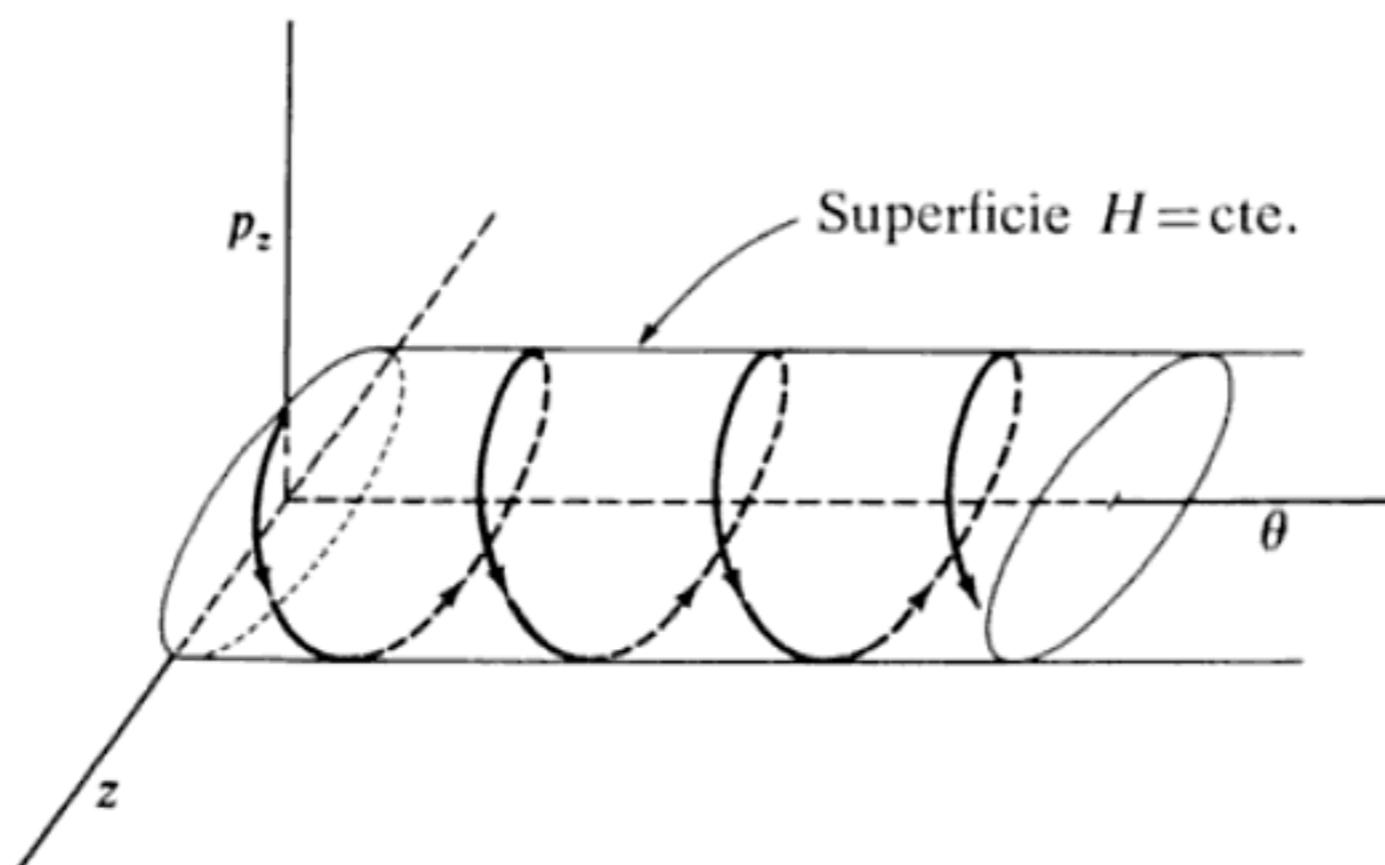


FIG. 7-4

Cuando, en un instante dado, se conozcan las posiciones y los ímpetus de todas las partículas que formen un sistema, entonces, con tales cantidades como condiciones iniciales, estará completamente determinado el movimiento subsiguiente del sistema; es decir, a partir de un punto $q_i(0), p_i(0)$ del espacio fásico, el punto representativo del sistema se desplazará a lo largo de una trayectoria fásica única. En principio, este procedimiento puede seguirse siempre, obteniéndose una solución; ahora bien, cuando el número de grados de libertad del sistema sea grande, podrá ocurrir que el sistema de ecuaciones de movimiento sea excesivamente complicado para que pueda resolverse en un tiempo razonable. Además, en el caso de sistemas muy complejos, como un volumen gaseoso, es evidente la imposibilidad práctica de determinar las condiciones iniciales de cada una de las moléculas constituyentes y, al no ser posible ya designar un punto del espacio fásico para representar las condiciones reales del sistema en un instante dado, nos vemos en la necesidad de idear otro procedimiento al que recurrir para abordar el estudio de dichos sistemas. Llegamos así al punto de partida de la *mecánica estadística*.

Para llevar a cabo el estudio de sistemas complejos, la formulación de la dinámica en los términos establecidos por Hamilton resulta sumamente idónea, lo que ahora vamos a poner de manifiesto en parte demostrando un teorema fundamental para tales estudios.

En el caso de una agrupación muy grande de partículas, tales como moléculas gaseosas, no nos es posible designar un punto del espacio fásico que represente correctamente al sistema. No obstante, sí nos es posible llenar el espacio fásico con un conjunto de puntos, cada uno de los cuales represente un estado *posible* del sistema. Dicho de otra forma, podemos imaginar un gran número de sistemas (compatible cada uno con las ligaduras conocidas), cualquiera de los cuales pudiera ser, conceiblemente, el sistema real y, como nos es imposible entrar en el estudio detallado del movimiento de las partículas del mismo, lo sustituimos por el estudio de un *conjunto de sistemas equivalentes*. Entonces, cada uno de los puntos del espacio fásico representará a cada uno de los estados de dicho conjunto y el movimiento de cada uno de tales puntos representará el movimiento independiente del sistema correspondiente. Así, pues, no podrá haber nunca dos trayectorias del espacio fásico que se corten.

Podemos suponer que los puntos representativos sean suficientemente numerosos para que podamos definir una *densidad fásica* ρ . Por supuesto, los elementos de volumen del espacio fásico que utilicemos para definir la densidad deberán ser lo bastante grandes para que contengan un número elevado de puntos representativos, pero también deben ser lo bastante pequeños para que pueda suponerse que la densidad varía de forma continua. El número N de sistemas cuyos puntos representativos se encuentran dentro de un elemento de volumen dv del espacio fásico es

$$N = \rho dv$$

donde

$$dv = dq_1 dq_2 \cdots dq_s dp_1 dp_2 \cdots dp_s$$

Como antes, s es el número de grados de libertad de cada uno de los sistemas del conjunto.

Consideremos un elemento de superficie del plano $q_k - p_k$ del espacio fásico, como se indica en la figura 7-5. El número de puntos representativos que penetran en el elemento por unidad de tiempo a través del lado izquierdo es

$$\rho \frac{dq_k}{dt} dp_k = \rho \dot{q}_k dp_k$$

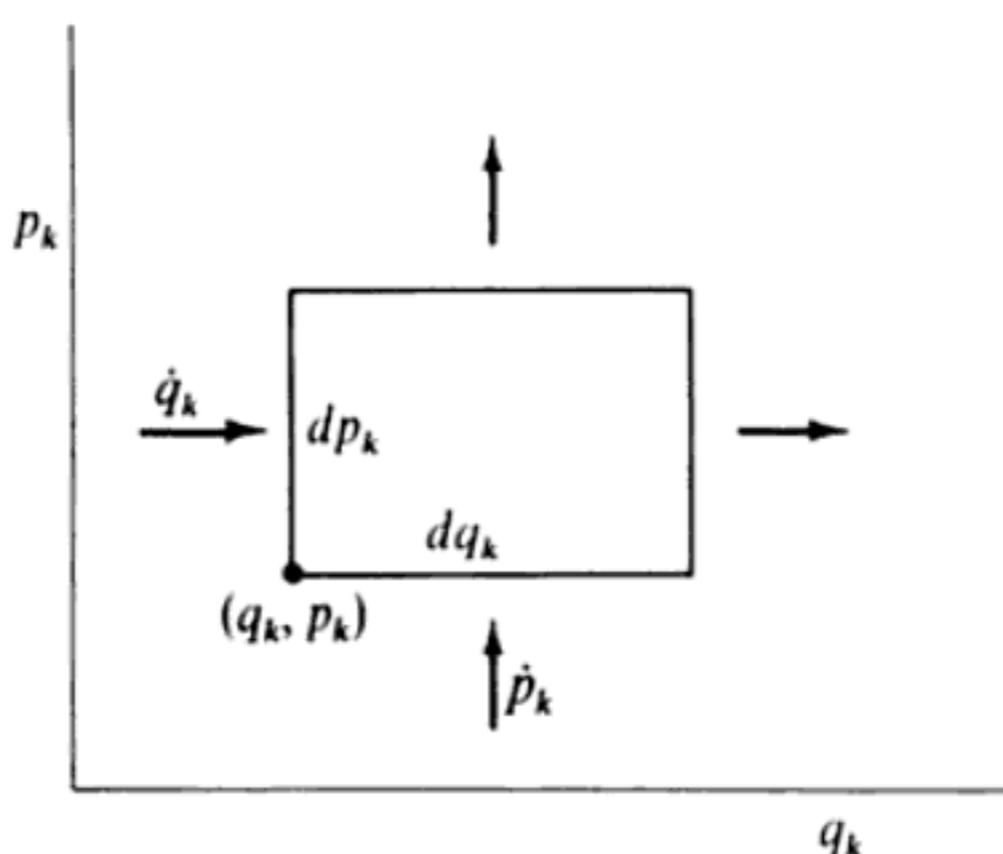


FIG. 7-5

y, a través del lado inferior,

$$\rho \frac{dp_k}{dt} dq_k = \rho \dot{p}_k dq_k$$

de forma que el número total de puntos representativos que penetran en el elemento $dq_k dp_k$ por unidad de tiempo es

$$\rho(\dot{q}_k dp_k + \dot{p}_k dq_k)$$

Un desarrollo en serie de Taylor nos dará el número aproximado de puntos que abandonan el elemento por unidad de tiempo

$$\left(\rho \dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial q_k} (\rho \dot{q}_k) dq_k \right) dp_k + \left(\rho \dot{p}_k + \frac{\partial}{\partial p_k} (\rho \dot{p}_k) dp_k \right) dq_k$$

Por tanto, el aumento total de densidad en $dq_k dp_k$ por unidad de tiempo será

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dq_k dp_k = - \left(\frac{\partial}{\partial q_k} (\rho \dot{q}_k) + \frac{\partial}{\partial p_k} (\rho \dot{p}_k) \right) dq_k dp_k$$

y, sumando todas las expresiones correspondientes a todos los valores de k , resultará

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^s \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_k} \dot{q}_k + \rho \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k} + \frac{\partial \rho}{\partial p_k} \dot{p}_k + \rho \frac{\partial \dot{p}_k}{\partial p_k} \right) = 0 \quad (7.76)$$

Entonces, de las ecuaciones de Hamilton 7.60 y 7.61, tendremos (si las derivadas parciales segundas de H son continuas)

$$\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k} + \frac{\partial \dot{p}_k}{\partial p_k} = 0 \quad (7.77)$$

de forma que 7.76 se transforma en

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial t} \right) = 0 \quad (7.78)$$

Pero como ésta es precisamente la derivada total de ρ respecto del tiempo, resultará que

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} = 0} \quad (7.79)$$

Este importante resultado, conocido como *teorema de Liouville*,* establece que la densidad de puntos representativos del espacio fásico correspondientes al movimiento de un sistema de partículas permanece constante durante el movimiento. Debemos recalcar que, si hemos sido capaces de dejar establecida la invariancia de la densidad ρ , ha sido únicamente porque el problema se formuló en el *espacio fásico*; en el espacio de configuraciones no existe un teorema equivalente. Resulta, pues, que es necesario hacer uso de la dinámica de Hamilton (mejor que la de Lagrange) para estudiar los conjuntos de mecánica estadística.

De acuerdo con el teorema de Liouville, si imaginamos dos superficies (en realidad *hipersuperficies* en el espacio de $2s$ dimensiones) correspondientes a las energías E y $E+dE$, y consideramos la densidad de puntos representativos en una pequeña región comprendida entre ambas superficies,** dicha densidad permanecerá constante con el tiempo mientras se mueva el sistema. En la figura 7-6 se muestra este par de superficies y una región que posee una extensión $\Delta q_k \Delta p_k$ en un cierto instante t_1 . En instantes posteriores, t_2 y t_3 , los valores relativos de Δq_k y Δp_k deben variar, como se indica, al objeto de que la densidad fásica permanezca constante. Este hecho es de aplicación inmediata, por ejemplo al enfoque de haces de electrones u otras partículas cargadas. (Véase problema 7-27.)

* Publicado en 1838 por Joseph LIOUVILLE (1809-1882).

** Todo conjunto para el que la densidad fásica sea cero salvo en la región comprendida entre E y $E+dE$ fue llamado por GIBBS *conjunto microcanónico*.

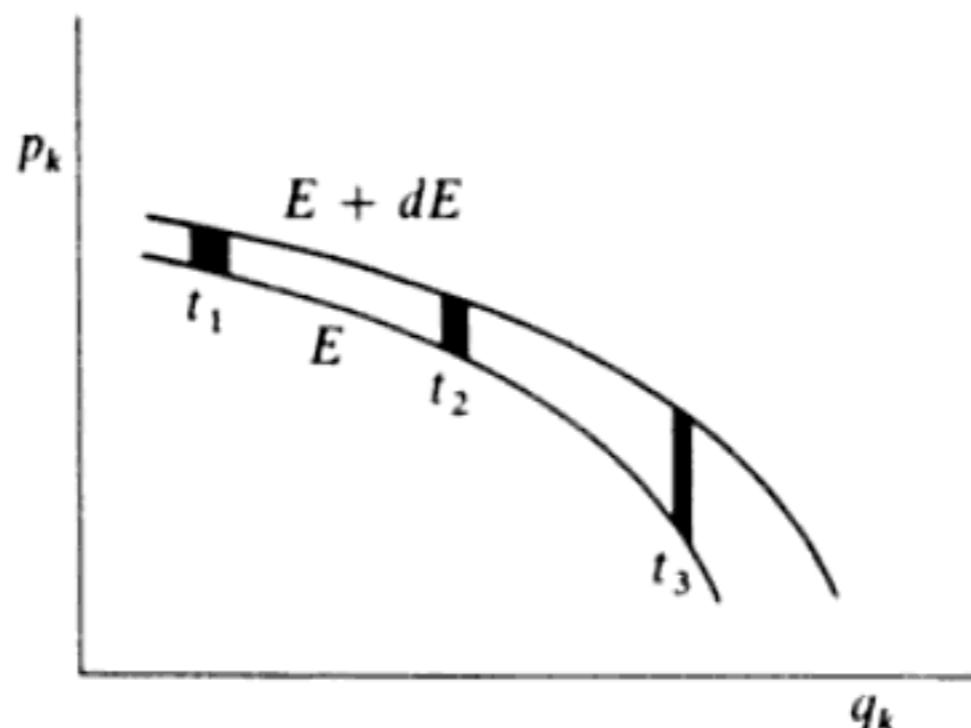


FIG. 7-6

La importancia del teorema de Liouville no se reduce a las agrupaciones de partículas microscópicas y a los temas que se relacionan con las mismas, como son la mecánica estadística de los sistemas gaseosos o el problema del enfoque en los aceleradores de partículas cargadas, sino que también es de aplicación a determinados sistemas macroscópicos. Así, por ejemplo, en la dinámica estelar el problema se plantea al revés y estudiando la función de distribución ρ de las estrellas de una galaxia puede deducirse el potencial U del campo gravitatorio galáctico.

7.15 Teorema del virial

Es conveniente que hagamos mención de otra importante cuestión de naturaleza estadística. Sea un conjunto de partículas cuyos vectores de posición \mathbf{r}_α e ímpetus \mathbf{p}_α estén ambos *acotados* (o sea, sean finitos para todo valor del tiempo). Definamos la magnitud

$$S \equiv \sum_{\alpha} \mathbf{p}_{\alpha} \cdot \mathbf{r}_{\alpha} \quad (7.80)$$

cuya derivada temporal de S será

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{\alpha} (\mathbf{p}_{\alpha} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} + \dot{\mathbf{p}}_{\alpha} \cdot \mathbf{r}_{\alpha}) \quad (7.81)$$

Si calculamos el valor medio de dS/dt en un intervalo de tiempo τ , tendremos

$$\left\langle \frac{dS}{dt} \right\rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \frac{dS}{dt} dt = \frac{S(\tau) - S(0)}{\tau} \quad (7.82)$$

Si ocurre que el movimiento del sistema es periódico y si τ es un múltiplo entero del período, $S(\tau) = S(0)$ y $\langle \dot{S} \rangle$ se anulará. No obstante, aun cuando el sistema no exhiba periodicidad alguna, como S es por hipótesis una función acotada, podremos hacer $\langle \dot{S} \rangle$ tan pequeña como queramos sin más que dejar que el tiempo τ se haga lo suficientemente largo. Por lo tanto, la media temporal del segundo miembro de 7.81 puede siempre hacerse nula (o al menos *tendente* a cero). Entonces, en este límite, tendremos

$$\left\langle \sum_{\alpha} \mathbf{p}_{\alpha} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} \right\rangle = - \left\langle \sum_{\alpha} \dot{\mathbf{p}}_{\alpha} \cdot \mathbf{r}_{\alpha} \right\rangle \quad (7.83)$$

En el primer miembro de esta igualdad $\mathbf{p}_{\alpha} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}$ es el doble de la energía cinética y en el segundo miembro $\dot{\mathbf{p}}_{\alpha}$ es la fuerza \mathbf{F}_{α} ejercida sobre la partícula α -ésima. De aquí,

$$\left\langle 2 \sum_{\alpha} T_{\alpha} \right\rangle = - \left\langle \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha} \cdot \mathbf{r}_{\alpha} \right\rangle \quad (7.84)$$

y como la suma extendida a las T_{α} es la energía cinética total T del sistema, se obtiene el resultado de carácter general

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha} \cdot \mathbf{r}_{\alpha} \right\rangle \quad (7.85)$$

El segundo miembro de esta igualdad fue llamado por CLAUSIUS,* *virial* del sistema, enunciándose como sigue el *teorema del virial*: la energía cinética media de un sistema es igual a su virial.

El teorema del virial resulta especialmente útil en la teoría cinética de los gases; así, la ecuación de estado de los gases perfectos (ley de Boyle) puede deducirse a partir del mismo sin más que hacer unas pocas consideraciones adicionales.**

Cuando las fuerzas \mathbf{F}_{α} deriven de potenciales U_{α} , la igualdad 7.85 podrá volver a escribirse

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2} \left\langle \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \cdot \mathbf{grad} U_{\alpha} \right\rangle \quad (7.85a)$$

* Rudolph Julius Emmanuel CLAUSIUS (1822-1888), físico alemán, uno de los fundadores de la termodinámica.

** Véase, p. e., LINDSAY (Li61, págs. 164-167).

Como caso de interés especial citemos el de dos partículas que interactúen según una fuerza central, proporcional a una potencia de la distancia: $F \propto r^n$. Entonces, el potencial es de la forma

$$U = kr^{n+1} \quad (7.86)$$

y, por tanto,

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{grad} U = r \frac{dU}{dr} = k(n+1)r^{n+1} = (n+1)U \quad (7.87)$$

transformándose el teorema del virial en

$$\boxed{\langle T \rangle = \frac{n+1}{2} \langle U \rangle} \quad (7.88)$$

Si la interacción entre las partículas es de tipo gravitatorio, será $n = -2$, y

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle U \rangle, \quad n = -2$$

relación muy útil, por ejemplo, para cálculos energéticos en los movimientos planetarios.

Referencias recomendadas

Remitimos nuevamente al lector a LINDSAY y MARGENAU (Li36, cap. 3) para un estudio de los fundamentos de la mecánica; en las secciones 3.12 a 3.14 podrán encontrarse los principios de mínimo a partir de los cuales pueden obtenerse las dinámicas de Lagrange y de Hamilton. En LANCZOS (La49) puede encontrarse un estudio completo y detallado (aunque de lectura fácil) de los principios variacionales en mecánica; véase también YOURGRAU y MANDELSTAM (Yo60, caps. 1 a 5).

BYERLY (By13, cap. 2) ofrece un interesante tratamiento de las coordenadas generalizadas en la mecánica de Lagrange.

LANDAU y LIFSHITZ (La60), cap. 1) «deducen» de una forma muy interesante la lagrangiana.

Las ecuaciones de Lagrange pueden obtenerse de muchas maneras. Uno de los procedimientos utilizados con mayor frecuencia implica el empleo del *principio de D'Alembert*; véanse, por ejemplo, GOLDSTEIN (Go50, cap. 1) o JOOS y FREEMAN (Jo50, cap. 6). SLATER y FRANK (S147, cap. 4) y SYMON (Sy60, cap. 9) incluyen las consecuencias relativas a los trabajos virtuales; véase también KONOPINSKI (Ko69, cap. 7).

La obra clásica de dinámica a nivel superior es la de WHITTAKER (Wh37); véanse, especialmente, en los capítulos 1 a 4, el método de Lagrange y diversas aplicaciones.

La mecánica de Hamilton es estudiada a nivel medio-superior por CORBEN y STEHLE (Co60, cap. 10), GOLDSTEIN (Go50, cap. 7), KONOPINSKI (Ko69, cap. 8) y McCUSKEY (Mc59, cap. 6); el trabajo de TOLMAN (To38, cap. 2) es especialmente claro.

Para trabajos de introducción a la mecánica estadística clásica (conjuntos, teorema de Liouville, teoría cinética; etc.) véanse CRAWFORD (Cr63, cap. 16), HOUSTON (Ho48, cap. 11), JOOS y FREEMAN (Jo50, caps. 33 y 34), LINDSAY (Li61, cap. 7) y MORSE (Mo62, caps. 16 a 23). Los primeros capítulos de TOLMAN (To38) constituyen una exposición clara de la ampliación de la dinámica de Hamilton a la mecánica estadística.

Problemas

7-1. Un disco rueda sin deslizar sobre un plano horizontal permaneciendo su plano vertical pero de tal forma que puede girar en torno a un eje vertical. ¿Cuáles son las coordenadas generalizadas que podemos utilizar para describir el movimiento? Escribir una ecuación diferencial que describa la ligadura que representa la condición de rodadura. ¿Es integrable dicha ecuación? Justificar la respuesta mediante razonamiento físico. ¿Es holónoma la ligadura?

7-2. Se suelta un cuerpo desde una altura de 21 m y 2 segundos más tarde llega al suelo. Podemos admitir que la ecuación del tiempo de caída t desde una altura s sea de una cualquiera de las formas (en cada una de las cuales g tiene dimensiones diferentes)

$$s = gt; \quad s = \frac{1}{2}gt^2; \quad s = \frac{1}{4}gt^3$$

todas las cuales nos dan $s=21$ m para $t=2$ s. Demuéstrese que la expresión correcta produce un mínimo en la integral variacional de Hamilton.

7-3. Una esfera de radio ρ está obligada a rodar sin deslizar sobre la mitad inferior de la superficie interior de un cilindro hueco de radio interno R . Determinar la lagrangiana, la ecuación de ligadura y las ecuaciones de movimiento de Lagrange. Determinar la frecuencia de las pequeñas oscilaciones.

7-4. Una partícula se mueve en un plano bajo la influencia de una fuerza $f = -Ar^{\alpha-1}$, dirigida hacia el origen; A y α ($\neq 0$ ó 1) son constantes. Tomar unas coordenadas generalizadas adecuadas y supóngase cero el potencial en el origen. Determinar las ecuaciones de movimiento de Lagrange. ¿Se conserva el momento cinético respecto del origen? ¿Se conserva la energía total?

7-5. Supóngase un plano vertical dentro de un campo gravitatorio y que el origen de coordenadas se encuentra en un punto de este mismo plano. Sobre este plano

se mueve una partícula de masa m bajo la influencia de la gravedad y de una fuerza adicional $f = -Ar^{\alpha-1}$ dirigida hacia el origen. (r es la distancia al origen; A y α ($\neq 0$ ó 1) son constantes.) Tomar unas coordenadas generalizadas adecuadas y suponer que la energía potencial gravitatoria es nula sobre una línea horizontal que pasa por el origen. Determinar las ecuaciones de movimiento de Lagrange. ¿Se conserva el momento cinético respecto del origen? Dar una explicación.

7-6. Un aro de masa m y radio R rueda sin deslizar pendiente abajo de un plano inclinado de masa M que forma un ángulo α con la horizontal. Determinar las ecuaciones de Lagrange y las integrales del movimiento para el caso en que el plano pueda deslizarse sin rozamiento sobre una superficie horizontal.

7-7. Un péndulo doble se compone de dos péndulos simples, uno de los cuales está suspendido de la lenteja del otro. Determinar las ecuaciones de movimiento de Lagrange correspondientes al caso en que ambos péndulos sean de la misma longitud, tengan lentejas de la misma masa y estén obligados a moverse en el mismo plano.

7-8. Consideremos una región del espacio dividida en dos partes por un plano. La energía potencial de una partícula en la región 1 es U_1 y en la región 2 es U_2 . Si una partícula de masa m situada en la región 1 con una velocidad v_1 pasa desde ésta a la región 2, de tal forma que su trayectoria en la región 1 forma un ángulo θ_1 con la normal al plano de separación y un ángulo θ_2 con la misma normal en la región 2, demuéstrese que

$$\frac{\operatorname{sen} \theta_1}{\operatorname{sen} \theta_2} = \left[1 + \frac{U_1 - U_2}{T_1} \right]^{\frac{1}{2}}$$

donde $T_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$. ¿Cuál es la analogía óptica de este problema?

7-9. Un disco de masa M y radio R rueda sin deslizar hacia abajo por un plano inclinado que forma un ángulo α con la horizontal. El disco está dotado de un eje corto, sin peso y de radio despreciable, del que se cuelga un péndulo simple de longitud $l < R$ cuya lenteja es de masa m . Supóngase que el movimiento del péndulo tiene lugar en el plano del disco y determinense las ecuaciones de movimiento de Lagrange de este sistema.

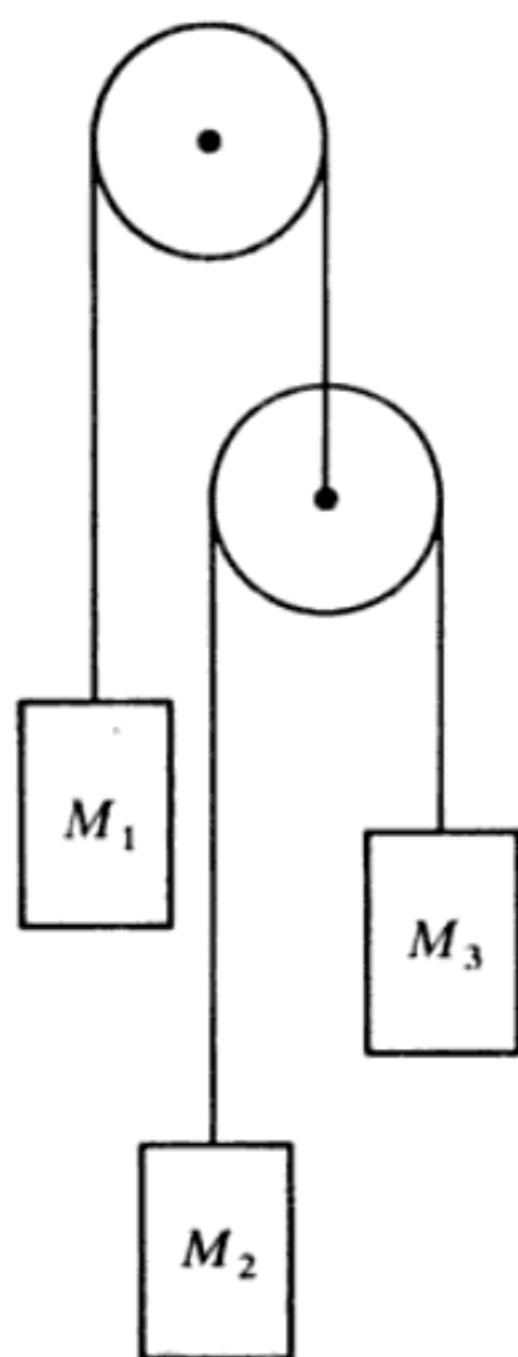
7-10. Dos bloques, de masa M cada uno, están unidos por una cuerda inextensible de longitud l . Uno de ellos se encuentra sobre una superficie horizontal lisa, mientras que el otro cuelga sobre el vacío en el extremo opuesto de la cuerda, la cual pasa por una polea sin rozamiento. Describir el movimiento del sistema cuando (a) la masa de la cuerda sea despreciable y (b) cuando la cuerda tenga una masa m .

7-11. Una partícula de masa m está limitada a moverse sobre un círculo de radio R que gira en el espacio alrededor de uno de los puntos de dicho círculo.

El giro tiene lugar en el plano del círculo a una velocidad angular constante ω . En ausencia de fuerza gravitatoria, demuéstrese que el movimiento de la partícula en torno del extremo de un diámetro que pase por el punto de suspensión y el centro del círculo es idéntico al de un péndulo plano situado en un campo gravitatorio uniforme. Explicar por qué cabía esperar este resultado.

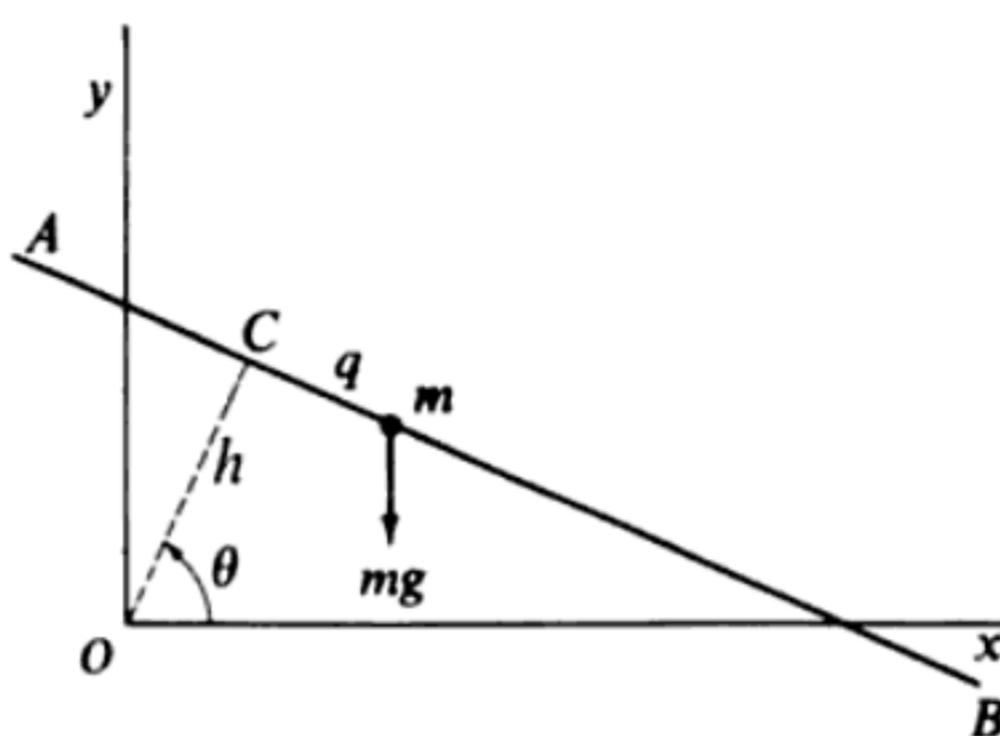
7-12. Un punto material se desliza sin rozamiento por la superficie de una esfera, partiendo del reposo desde el punto más alto de la misma. Demostrar que el punto material se separa de la esfera después que ha descrito un ángulo polar de valor $\text{arc cos}(\frac{2}{3})$.

7-13. Se representa en la figura una *máquina de Atwood doble**. Escoger un sistema de coordenadas adecuado y escribir las ecuaciones de Lagrange del sistema. Despejar las aceleraciones de las masas. (Despréciese las masas y los rozamientos de las poleas.) Asimismo, plantear el problema con los multiplicadores de Lagrange y determinar las tensiones de las cuerdas.



7-14. Un punto material de masa m puede deslizarse libremente a lo largo de un alambre AB cuya distancia al origen O es h (véase figura). La recta OC gira en torno del origen a una velocidad angular constante $\dot{\theta} = \omega$. La posición del pun-

* Ideada por George ATWOOD (1746-1807) en 1784 con el propósito de efectuar medidas de precisión de la aceleración debida a la gravedad.



to material puede especificarse en función del ángulo θ y de la distancia q al punto C . Si el punto material está sometido a la fuerza gravitatoria y siendo las condiciones iniciales

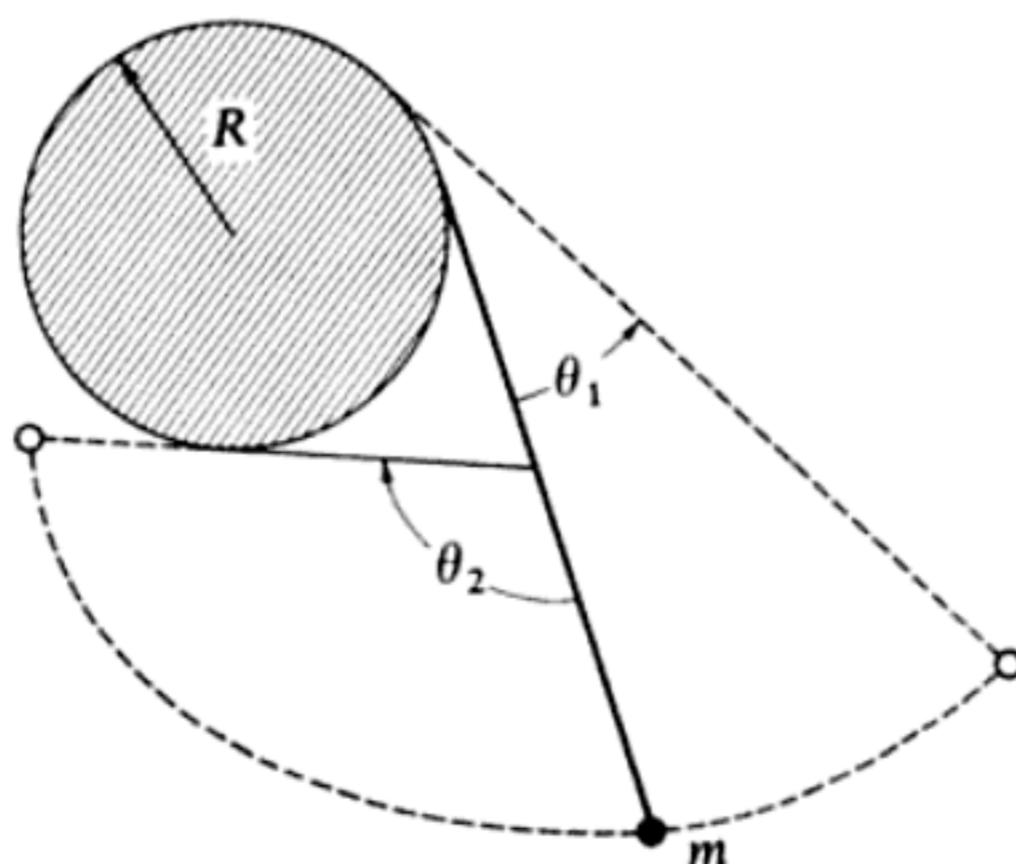
$$\theta(0) = 0; \quad q(0) = 0; \quad \dot{q}(0) = 0$$

demostrar que la expresión de la coordenada q en función del tiempo es

$$q(t) = \frac{g}{2\omega^2} (\cosh \omega t - \cos \omega t)$$

Representar gráficamente este resultado. Determinar la hamiltoniana del sistema y compararla con la energía total. ¿Se conserva la energía total?

7-15. Se construye un péndulo sujetando una masa m a una cuerda inextensible de longitud l . El extremo superior de la cuerda se fija al punto más alto de un disco vertical de radio R ($R < l/\pi$), tal como se representa en la figura. Obtener la ecuación de movimiento del péndulo y determinar la pulsación de las peque-



ñas oscilaciones. Determinar también la recta respecto de la cual la separación angular es la misma en ambos sentidos (o sea, $\theta_1 = \theta_2$).

7-16. Dos masas m_1 y m_2 ($m_1 \neq m_2$) están unidas por una varilla rígida de longitud d y masa despreciable. Una cuerda inextensible de longitud l_1 se sujeta a m_1 y se une a un punto fijo P . Análogamente se une una cuerda de longitud l_2 ($l_1 \neq l_2$) a m_2 y a P . Obténgase la ecuación que describe el movimiento en el plano que determinan m_1 , m_2 y P y determínese la pulsación de las pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio.

7-17. Un aro circular se suspende en posición horizontal mediante tres cuerdas, de longitud l cada una, que se sujetan al aro simétricamente y se unen a puntos fijos de un plano situado por encima del aro, de tal forma que en el equilibrio cada cuerda está vertical. Demostrar que la pulsación de las pequeñas oscilaciones de giro en torno de la vertical que pasa por el centro del aro es la misma que la de un péndulo simple de longitud l .

7-18. Una partícula está limitada a moverse (sin rozamiento) sobre un alambre circular que gira a velocidad angular constante ω en torno de un diámetro vertical. Determinar la posición de equilibrio de la partícula y la pulsación de las pequeñas oscilaciones alrededor de la misma. Determinar e interpretar físicamente una *velocidad angular crítica*, $\omega = \omega_c$, que separe el movimiento de la partícula en dos clases diferentes.

7-19. Una partícula de masa m se mueve en una dimensión bajo la influencia de una fuerza

$$F(x, t) = \frac{k}{x^2} e^{-(t/\tau)}$$

donde k y τ son constantes positivas. Determinar la lagrangiana y la hamiltoniana. Comparar la hamiltoniana con la energía total y estudiar la conservación de la energía en este sistema.

7-20. Supóngase una partícula de masa m que se mueve libremente en un campo de fuerzas conservativo cuya función potencial es U . Determinar la hamiltoniana y demostrar que las ecuaciones canónicas de movimiento se reducen a las de Newton. (Úsense coordenadas rectangulares.)

7-21. Supóngase un péndulo simple plano compuesto de una masa m sujeta a una cuerda de longitud l . Una vez que el péndulo ha comenzado a moverse, la longitud de la cuerda se va acortando a una velocidad constante

$$\frac{dl}{dt} = -\alpha = \text{cte.}$$

quedando fijo el punto de suspensión. Determinar la lagrangiana y la hamiltoniana y comparar esta última con la energía total, estudiando la conservación de la energía de este sistema.

7-22. Una partícula de masa m se mueve bajo la influencia de la gravedad a lo largo de la espiral $z=k\theta$, $r=\text{cte.}$, donde k es constante y el eje z es el vertical. Obtener las ecuaciones de movimiento de Hamilton.

7-23. Consideremos dos funciones continuas cualesquiera de las coordenadas e ímpetus generalizados, $g(q_k, p_k)$ y $h(q_k, p_k)$. Por definición, el llamado *paréntesis de Poisson* es

$$[g, h] \equiv \sum_k \left(\frac{\partial g}{\partial q_k} \frac{\partial h}{\partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial p_k} \frac{\partial h}{\partial q_k} \right)$$

Verificar las propiedades siguientes del paréntesis de Poisson:

- (a) $\frac{dg}{dt} = [g, H] + \frac{\partial g}{\partial t}$
- (b) $\dot{q}_j = [q_j, H]; \quad \dot{p}_j = [p_j, H]$
- (c) $[p_k, p_j] = 0; \quad [q_k, q_j] = 0$
- (d) $[q_k, p_j] = \delta_{kj}$

donde H es la hamiltoniana. Cuando se anule el paréntesis de Poisson de dos cantidades diremos que las cantidades *comutan* y cuando sea igual a la unidad diremos que las cantidades son *canónicamente conjugadas*. Demuéstrese que toda cantidad que no sea función explícita del tiempo y que commute con la hamiltoniana es una constante del movimiento del sistema. El formalismo representado por el paréntesis de Poisson reviste considerable importancia en mecánica cuántica.

7-24. Un *péndulo esférico* se compone de una lenteja de masa m sujeta a una varilla inextensible y sin peso de longitud l . El extremo de la varilla opuesto a la lenteja puede pivotar libremente (en *todas* direcciones) en torno de un punto fijo. Plantear la hamiltoniana en coordenadas esféricas. (Si $p_\phi=0$, el resultado será el mismo que el correspondiente al péndulo plano.) Combinar el término que depende de p_ϕ con el de la energía potencial ordinaria definiendo un potencial efectivo $V(\theta, p_\phi)$. Representar gráficamente V en función de θ para distintos valores de p_ϕ , incluido $p_\phi=0$. Estudiar las características del movimiento, señalando las diferencias entre $p_\phi=0$ y $p_\phi \neq 0$. Estudiar también el caso límite del péndulo cónico (para el que $\theta=\text{cte.}$) haciendo referencia a la curva $V-\theta$.

7-25. Una partícula se mueve en un campo de fuerzas esféricamente simétrico cuya energía potencial viene dada por $U(r) = -k/r$. Calcular la hamiltoniana en coordenadas esféricas y obtener las ecuaciones canónicas de movimiento. Representar gráficamente la trayectoria que seguiría un punto representativo del sistema sobre una superficie $H=\text{cte.}$ del espacio fásico. Comenzar demostrando que el movimiento debe tener lugar en un plano, por lo cual el espacio fásico

es tetradimensional (r, θ, p_r, p_θ , pero sólo las tres primeras son no triviales). Determinar la proyección de la trayectoria fásica sobre el plano $r-p_r$, y a continuación tener en cuenta la variación con θ .

7-26. Cuatro partículas se dirigen hacia arriba en un campo gravitatorio uniforme con las condiciones iniciales siguientes

- (1) $z(0) = z_0; \quad p_z(0) = p_0$
- (2) $z(0) = z_0 + \Delta z_0; \quad p_z(0) = p_0$
- (3) $z(0) = z_0; \quad p_z(0) = p_0 + \Delta p_0$
- (4) $z(0) = z_0 + \Delta z_0; \quad p_z(0) = p_0 + \Delta p_0$

Demostrar, por cálculo directo, que los puntos representativos correspondientes a estas partículas definen siempre un área en el espacio fásico de valor $\Delta z_0 \Delta p_0$. Representar gráficamente las trayectorias fásicas y poner de manifiesto para diferentes instantes $t > 0$ la forma de la región cuya superficie permanece constante.

7-27. Estudiar las implicaciones del teorema de Liouville en el enfoque de los haces de partículas cargadas examinando el caso sencillo siguiente. Un haz de electrones de sección recta circular (radio R_0) está dirigido según el eje z . La densidad de electrones a través del haz es constante, pero las componentes del ímpetu transversales al haz (p_x y p_y) se distribuyen uniformemente sobre un círculo de radio p_0 del espacio de ímpetus. Si se utiliza cierto sistema de enfoque para reducir el radio del haz de R_0 a R_1 , determinar la distribución resultante de componentes transversales del ímpetu. ¿Cuál es el significado físico de este resultado? (Considérese la divergencia angular del haz.)

Movimiento en un campo de fuerzas centrales

8.1 Introducción

El movimiento de un sistema formado por dos cuerpos que actúan bajo la influencia de una fuerza dirigida según la recta que une los centros de ambos (o sea, una *fuerza central*), constituye un problema de gran importancia para la física y cuya solución puede determinarse completamente. La importancia de este problema reside, en gran medida, en dos campos de la física muy diferentes, como son el movimiento de los objetos celestes, tales como planetas, satélites, cometas, estrellas dobles, etc., y ciertas interacciones entre dos partículas nucleares, como es la dispersión de las partículas α por los núcleos. Asimismo, en los tiempos que precedieron a la mecánica cuántica, la descripción del átomo de hidrógeno se llevaba a cabo utilizando una imagen clásica de dos cuerpos interactuando entre sí mediante fuerzas centrales y, aunque esta descripción es todavía útil en sentido cualitativo, el problema debe abordarse con las teorías cuánticas para obtener una descripción detallada. Además de hacer algunas consideraciones generales relativas al movimiento en los campos de fuerzas centrales, en éste y en el capítulo siguiente estudiaremos varios problemas de dos cuerpos de los que aparecen en mecánica celeste y en física nuclear. Asimismo, trataremos brevemente del problema de los *tres cuerpos*.

8.2 Masa reducida

La descripción de un sistema compuesto por dos partículas requiere especificar seis cantidades, por ejemplo, las tres componentes de cada uno de los dos vectores de posición \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 de las partículas.* Otra posibilidad es tomar las tres componentes del vector de posición \mathbf{R} del centro de masa y las tres componentes de $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ (véase figura 8-1a). Nuestra atención quedará ceñida a sistemas sin pérdidas por rozamiento y para los cuales la energía potencial es función únicamente de $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$; la lagrangiana de un sistema de esta clase puede escribirse

$$L = \frac{1}{2}m_1|\dot{\mathbf{r}}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\dot{\mathbf{r}}_2|^2 - U(r) \quad (8.1)$$

Como el movimiento de traslación del sistema en conjunto carece de interés por lo que concierne a las órbitas que describe cada una de las partículas respecto de la otra, podremos tomar como origen de coordenadas el centro de masa de las partículas; con esto, $\mathbf{R} \equiv 0$ (véase figura 8-1b). Entonces (cfr. ec. 2.25)

$$m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = 0 \quad (8.2)$$

Esta igualdad, combinada con $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, nos da

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \\ \mathbf{r}_2 &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

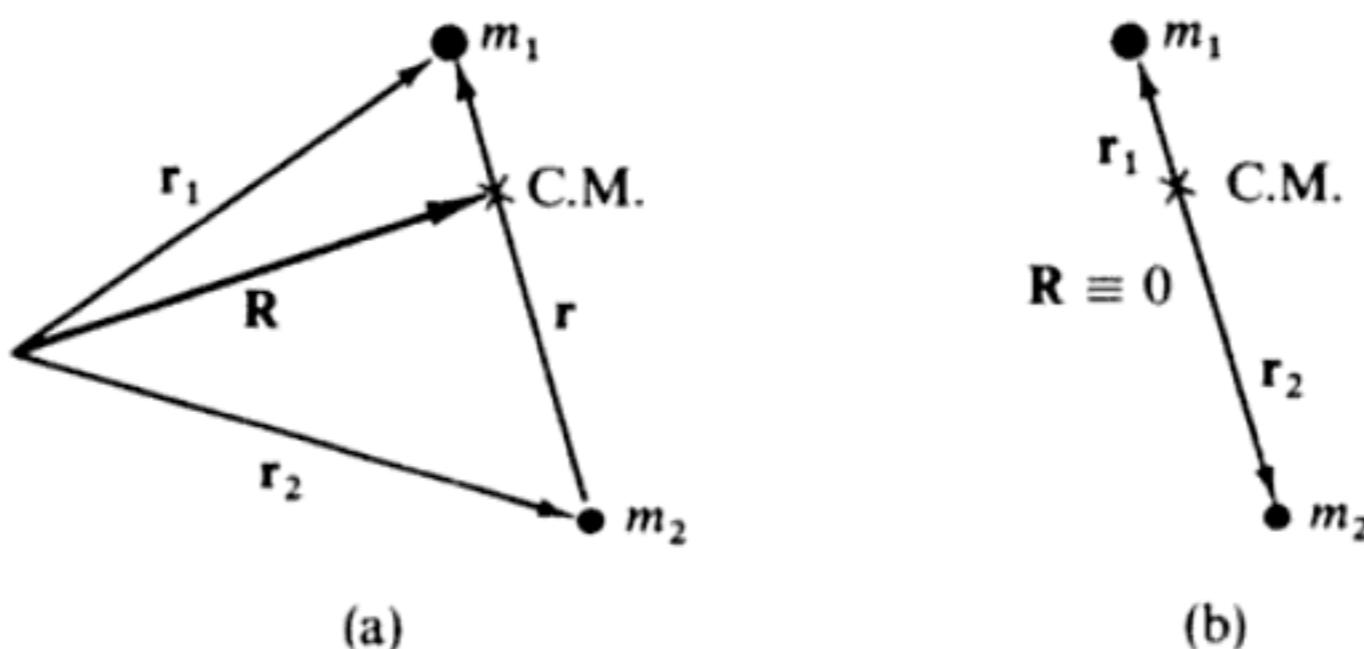


FIG. 8-1

* Se supone que la *orientación* de las partículas carece de importancia; o sea, que son esféricamente simétricas (o masas *puntuales*).

que llevadas a la expresión de la lagrangiana darán

$$L = \frac{1}{2}\mu|\dot{\mathbf{r}}|^2 - U(r) \quad (8.4)$$

donde μ es la *masa reducida*

$$\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (8.5)$$

Por lo tanto, hemos reducido formalmente el problema del movimiento de dos cuerpos a un *problema de un cuerpo equivalente*, en el que únicamente debe determinarse el movimiento de una «partícula» de masa μ en el campo central descrito por la función potencial $U(r)$. Una vez que se haya obtenido una solución para $\mathbf{r}(t)$ aplicando las ecuaciones de Lagrange a 8.4, pueden obtenerse (si se desea) los movimientos individuales $\mathbf{r}_1(t)$ y $\mathbf{r}_2(t)$ de las partículas mediante las expresiones 8.3, pero este último paso no será necesario cuando sólo se deseen las órbitas relativas de las partículas.

8.3 Teoremas de conservación — Integrales primeras del movimiento

El sistema que nos proponemos estudiar puede suponerse formado por una partícula de masa μ , que se mueve en un campo de fuerzas centrales definido por la función potencial $U(r)$. Como la energía potencial sólo depende de la distancia de la partícula al centro de fuerzas, y no de la orientación, dicho sistema posee *simetría esférica*; es decir, el giro del mismo en torno de un eje que pase por el centro de fuerzas no puede afectar a las ecuaciones de movimiento. Ya hemos visto (sección 7.11) que en estas condiciones el momento cinético del sistema se conserva:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \text{cte.} \quad (8.6)$$

De esta relación es evidente que tanto el vector de posición como el ímpetu de la partícula permanecen siempre en un plano normal al momento cinético \mathbf{L} que permanece fijo en el espacio (véase figura 8-2). En consecuencia, resulta un problema en sólo dos dimensiones, pudiendo expresarse entonces la lagrangiana en coordenadas polares:

$$L = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r) \quad (8.7)$$

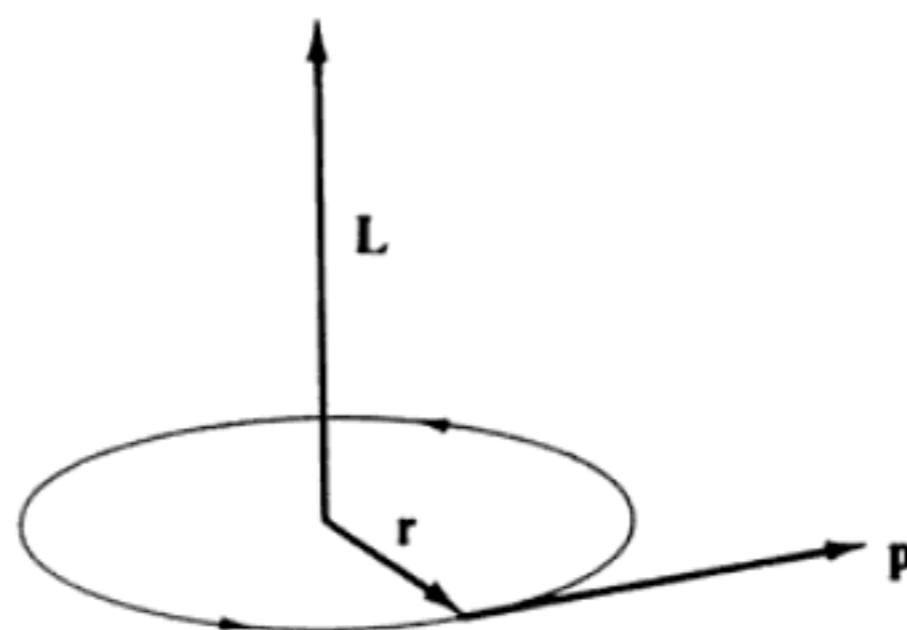


FIG. 8-2

Como la lagrangiana es cíclica en θ , el momento cinético conjugado correspondiente θ se conserva:

$$\dot{p}_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \quad (8.8)$$

o sea,

$$p_\theta \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{cte.} \quad (8.9)$$

Por lo tanto, la simetría del sistema nos ha permitido integrar de forma inmediata una de las ecuaciones de movimiento. La cantidad p_θ constituye una *integral primera* del movimiento, que posee un valor constante que representaremos por la letra l :

$$l \equiv \mu r^2 \dot{\theta} = \text{cte.}$$

(8.10)

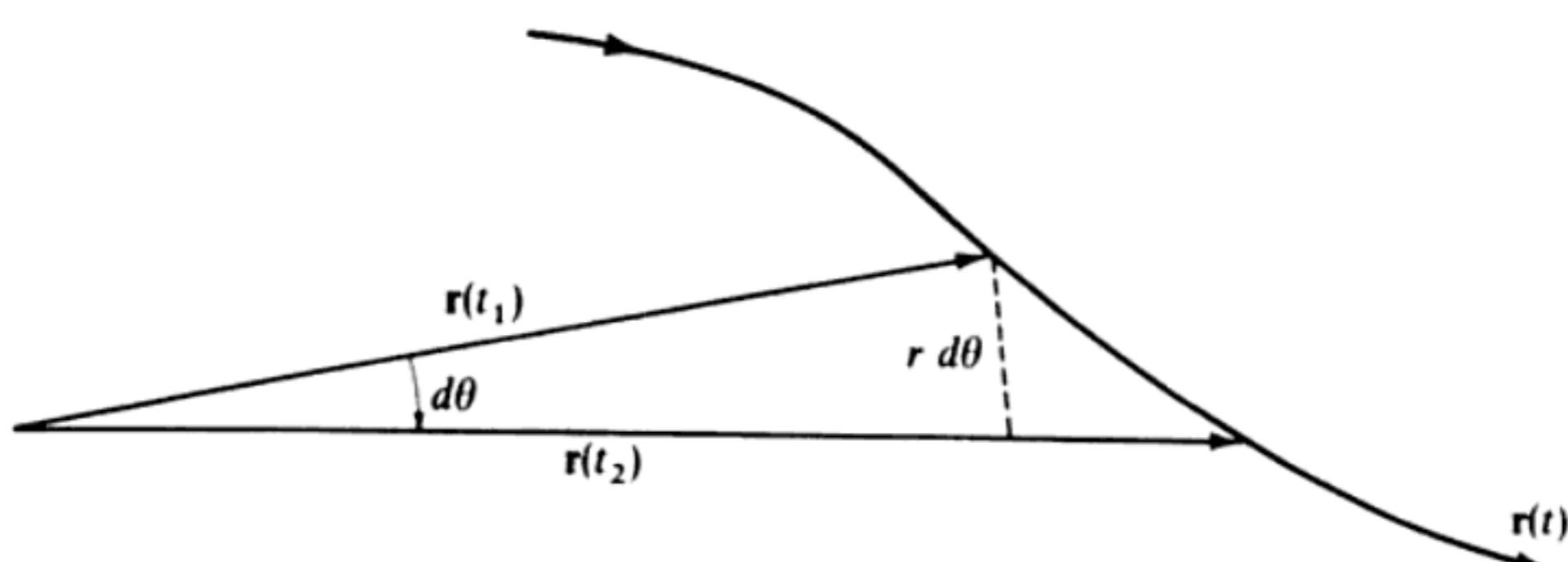


FIG. 8-3

El hecho de que l sea constante tiene una interpretación geométrica sencilla. En la figura 8-3, vemos que al describir la trayectoria $\mathbf{r}(t)$, el vector de posición barre un área $\frac{1}{2}r^2 d\theta$ en un intervalo de tiempo dt :

$$dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta \quad (8.11)$$

y, dividiendo por el intervalo de tiempo, la *velocidad areolar* es

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \dot{\theta} \\ &= \frac{l}{2\mu} = \text{cte.} \end{aligned} \quad (8.12)$$

en donde podemos ver que la velocidad areolar es constante con el tiempo. Este resultado fue obtenido experimentalmente por KEPLER en el caso del movimiento planetario, conociéndose como *segunda ley de Kepler*.* Es importante observar que la conservación de la velocidad areolar no se limita al caso de fuerzas inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia (caso del movimiento planetario), sino que es una propiedad general de los movimientos en campos de fuerzas centrales.

Dado que hemos eliminado de nuestro examen, por carecer de interés, el movimiento uniforme del centro de masa, la conservación del ímpetu no añade nada nuevo a la descripción del movimiento. Por tanto, la conservación de la energía es la única integral primera del movimiento, que queda. Al haber limitado el estudio a sistemas no disipativos, la conservación de la energía total E queda automáticamente asegurada. Entonces,

$$T + U = E = \text{cte.} \quad (8.13)$$

y

$$E = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + U(r)$$

o sea,

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r^2} + U(r) \quad (8.14)$$

* Publicada por Johannes KEPLER (1571-1630) en 1609 tras un estudio exhaustivo de los datos reunidos por Tycho BRAHE (1546-1601) acerca de las posiciones del planeta Marte. La *primera ley* de Kepler trata de la forma de las órbitas planetarias (véase sección 8.7).

8.4 Ecuaciones de movimiento

Cuando se conoce $U(r)$, la ecuación 8.14 describe completamente al sistema y su integración nos dará la integral general del problema en función de los parámetros E y l . Si en 8.14 despejamos \dot{r} , tendremos

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U) - \frac{l^2}{\mu^2 r^2}} \quad (8.15)$$

ecuación donde puede despejarse dt e integrarse, obteniéndose la solución $t=t(r)$. De este resultado puede obtenerse la ecuación de movimiento en la forma habitual $r=r(t)$. No obstante, por el momento nos interesa más la ecuación de la trayectoria en función de r y θ . Podemos escribir

$$d\theta = \frac{d\theta}{dt} \frac{dt}{dr} dr = \frac{\dot{\theta}}{\dot{r}} dr \quad (8.16)$$

donde podemos introducir el valor de $\dot{\theta}$ dado por 8.10 ($\dot{\theta}=l\mu r^2$) y la expresión 8.15 de \dot{r} . Tras integrar

$$\theta(r) = \int \frac{(l/r^2) dr}{\sqrt{2\mu(E - U - l^2/(2\mu r^2))}} \quad (8.17)$$

Además, como l es constante con el tiempo, $\dot{\theta}$ no puede cambiar de signo y por tanto $\theta(t)$ debe aumentar monótonamente con el tiempo.

Aunque formalmente el problema ha quedado reducido al cálculo de una integral, en la realidad la solución no se obtiene fácilmente más que para ciertas formas determinadas de la expresión de la fuerza. Cuando la fuerza sea proporcional a alguna potencia de la distancia radial, $F(r) \propto r^n$, la solución podrá expresarse en función de integrales elípticas en el caso de ciertos valores de n enteros y fraccionarios. Sólo cuando $n=1, -2$ y -3 , la solución es expresable mediante funciones circulares.* El caso $n=1$ es precisamente el del oscilador armónico (capítulo 3) y el $n=-2$ es el correspondiente a una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, de gran importancia y que trataremos en las secciones 8.6 y 8.7. Estos dos casos, $n=1, -2$, son de importancia fundamental; en los problemas se encontrarán detalles de algunos otros casos de interés.

* Véase, por ejemplo, GOLDSTEIN (Go50, págs. 73-75).

Por tanto, hemos resuelto formalmente el problema combinando las ecuaciones que expresan la conservación de la energía y del momento cinético para obtener una expresión sencilla de la ecuación de la órbita, $\theta = \theta(r)$. Asimismo, podemos atacar el problema a través de la ecuación de Lagrange correspondiente a la coordenada r :

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 0$$

que, al utilizar la expresión 8.7 de L , resulta

$$\mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{\partial U}{\partial r} = F(r) \quad (8.18)$$

Esta ecuación 8.18 puede expresarse de forma más conveniente para ciertos cálculos haciendo un sencillo cambio de variables:

$$u \equiv \frac{1}{r}$$

Primeramente, calculemos

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}}$$

pero, según 8.10, es $\dot{\theta} = l/\mu r^2$, de forma que

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{\mu}{l} \dot{r}$$

A continuación, veamos que

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta} \left(-\frac{\mu}{l} \dot{r} \right) = \frac{dt}{d\theta} \frac{d}{dt} \left(-\frac{\mu}{l} \dot{r} \right) = -\frac{\mu}{l\dot{\theta}} \ddot{r}$$

y, haciendo la misma sustitución de $\dot{\theta}$, tendremos

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = -\frac{\mu^2}{l^2} r^2 \ddot{r}$$

Por lo tanto, despejando \ddot{r} y $r\dot{\theta}^2$ en función de u , tendremos

$$\left. \begin{aligned} \ddot{r} &= -\frac{l^2}{\mu^2} u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} \\ r\dot{\theta}^2 &= \frac{l^2}{\mu^2} u^3 \end{aligned} \right\} \quad (8.19)$$

y llevando estas ecuaciones 8.19 a la 8.18, obtenemos la ecuación de movimiento transformada:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{\mu}{l^2} \frac{1}{u^2} F(u) \quad (8.20)$$

que también puede escribirse

$$\boxed{\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = -\frac{\mu r^2}{l^2} F(r)} \quad (8.20a)$$

Esta forma de ecuación de movimiento es especialmente útil cuando se desea determinar la expresión de la fuerza que da una órbita conocida $r=r(\theta)$.

8.5 Órbitas de un campo central

La expresión 8.15 nos da la velocidad radial de una partícula en movimiento en un campo central; dicha expresión nos indica que \dot{r} será nula para aquellos valores de r que sean raíces del radicando; o sea, en aquellos puntos para los que

$$E - U(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2} = 0 \quad (8.21)$$

La anulación de \dot{r} implica que se ha alcanzado un *punto de inversión* del movimiento (cfr. la discusión de la sección 5.2). En general, la ecuación 8.21 posee dos raíces, r_{\max} y r_{\min} , y por lo tanto el movimiento de la partícula queda confinado a la región anular definida por $r_{\max} \geq r \geq r_{\min}$. Para ciertas combinaciones de la función potencial $U(r)$ y los parámetros E y l , la ecuación 8.21 dará una raíz doble, en cuyo caso $\dot{r}=0$, en todo instante, y de aquí $r=\text{cte.}$, siendo la órbita circular.

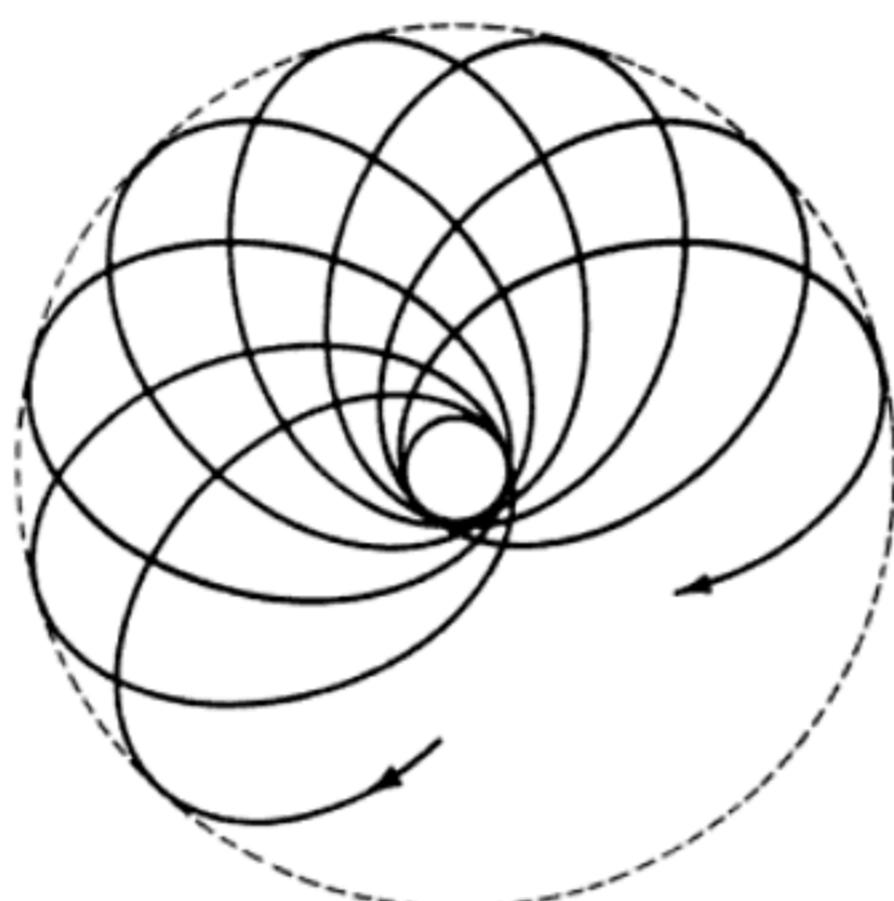


FIG. 8-4

Cuando el movimiento de una partícula dentro del potencial $U(r)$ sea periódico, la órbita será *cerrada*. Es decir, tras un número finito de viajes entre los límites r_{\min} y r_{\max} , el movimiento vuelve a repetirse. Por otra parte, diremos que la órbita es *abierta* cuando no se cierre sobre sí misma después de un número finito de oscilaciones; tal es el caso que se muestra en la figura 8-4. Además, mediante 8.17, podemos calcular la variación del ángulo θ producida por un viaje completo desde r_{\min} hasta r_{\max} y vuelta a r_{\min} ; como el movimiento es simétrico respecto del tiempo, esta variación del ángulo será el doble de la que resultaría del paso de r_{\min} a r_{\max} . Entonces

$$\Delta\theta = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{(l/r^2) dr}{\sqrt{2\mu(E - U - \frac{l^2}{2\mu r^2})}} \quad (8.22)$$

La trayectoria será cerrada sólo si $\Delta\theta$ es una fracción racional de 2π ; es decir, si $\Delta\theta = 2\pi \cdot (a/b)$, donde a y b son números enteros. En estas condiciones, después de b períodos, el vector de posición de la partícula habrá dado a revoluciones completas y vuelto a su posición original. Puede demostrarse (véase problema 8-28) que cuando el potencial varía con alguna potencia entera de la distancia radial, $U(r) \propto r^{n+1}$, sólo resultará una trayectoria no circular cuando $n = -2$ ó $+1$.* El caso $n = -2$ corresponde al de una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia; por ejemplo a la fuerza gravitatoria o a la electros-

* Determinados valores fraccionarios de n llevan también a órbitas cerradas, pero estos casos carecen, en general, de interés físico.

tática, mientras que el caso $n = +1$ corresponde al potencial del oscilador armónico, cuyo caso bidimensional fue estudiado en la sección 3.4 y donde se encontró que el movimiento posee una trayectoria cerrada cuando ocurre que el cociente de las pulsaciones de las componentes x e y del movimiento es un número racional.

8.6 Energía centrífuga y potencial efectivo

En las expresiones anteriores de \dot{r} , $\Delta\theta$, etc., aparece siempre el radical

$$\sqrt{E - U - \frac{l^2}{2\mu r^2}}$$

cuyo último término posee las dimensiones de una energía, y que de acuerdo con 8.14, puede también escribirse

$$\frac{l^2}{2\mu r^2} = \frac{1}{2}\mu r^2 \dot{\theta}^2$$

Si interpretamos esta magnitud en el sentido de una «energía potencial»,

$$U_c \equiv \frac{l^2}{2\mu r^2} \quad (8.23)$$

la «fuerza» que deberá asociarse a U_c será

$$F_c = -\frac{\partial U_c}{\partial r} = \frac{l^2}{\mu r^3} = \mu r \dot{\theta}^2 \quad (8.24)$$

Esta magnitud se conoce tradicionalmente como *fuerza centrífuga*,* si bien no es una fuerza en el sentido corriente de la palabra.** No obstante, seguiremos utilizando estos términos desafortunados ya que es lo acostumbrado.

* En la forma $F_c = mr\omega^2$ se reconoce más fácilmente. La primera noticia de la existencia de la fuerza centrífuga se debe a Christian HUYGHENS (1629-1695), quien, en 1659, hizo un examen detallado en relación con su estudio del péndulo cónico.

** Para un estudio más analítico de la fuerza centrífuga véase la sección 11.3.

Entonces, vemos que el término $l^2/2\mu r^2$ puede interpretarse como si fuera una *energía potencial centrífuga*, que, como tal, puede añadirse a $U(r)$ para dar un *potencial efectivo*, definido por

$$V(r) \equiv U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2} \quad (8.25)$$

Por lo tanto, $V(r)$ es un potencial *ficticio*, en el que se combinan la función potencial real $U(r)$ y el término energético asociado al movimiento de rotación en torno al centro de fuerzas. Cuando se trata del movimiento en un campo donde la fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, la expresión de dicha fuerza será

$$F(r) = -\frac{k}{r^2} \quad (8.26)$$

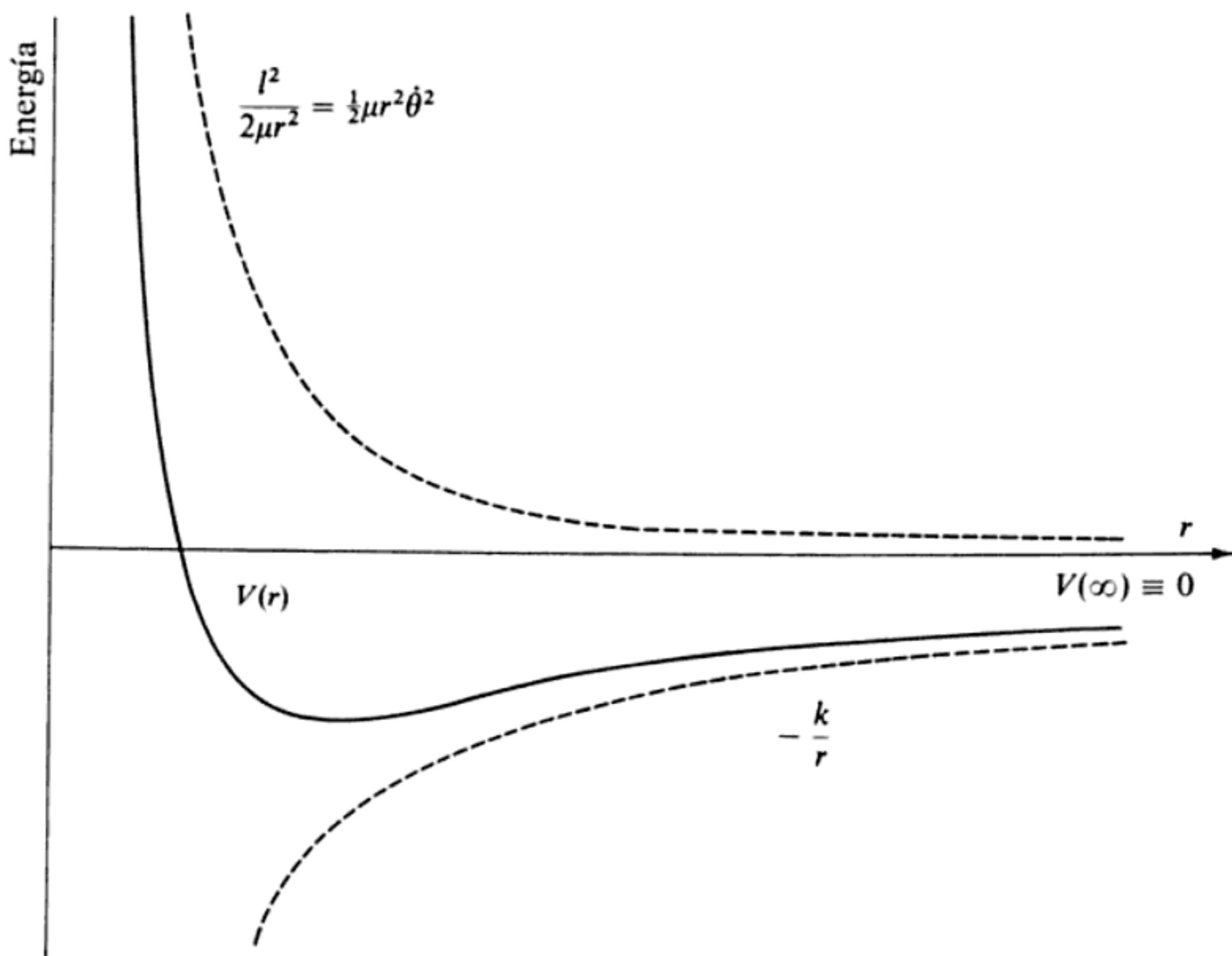


FIG. 8-5

de donde

$$U(r) = - \int F(r) dr = - \frac{k}{r} \quad (8.27)$$

y, en consecuencia, la función potencial efectiva en el caso de atracción gravitatoria será

$$V(r) = - \frac{k}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2} \quad (8.28)$$

En la figura 8-5 se representa este potencial efectivo con sus componentes, el valor del cual se ha supuesto arbitrariamente nulo en $r=\infty$. (Lo que está implícito en 8.27 al omitirse la constante de integración.)

Al igual que en la sección 5-2, donde se estudió el movimiento de una partícula en un pozo de potencial cualquiera, vamos a sacar algunas conclusiones

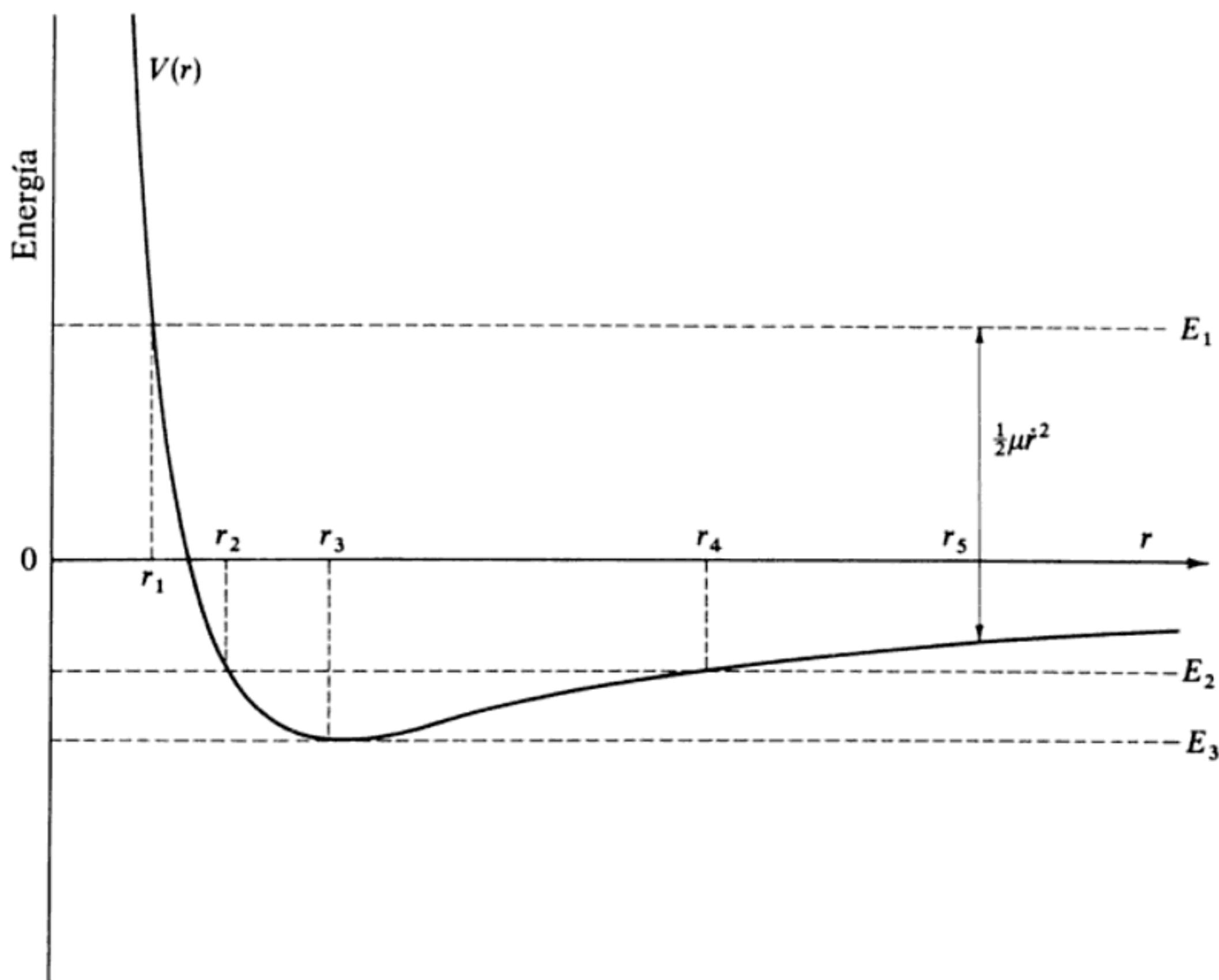


FIG. 8-6

similares a aquéllas. Si representamos la energía total E como en la figura 8-5, identificaremos tres regiones de interés (véase figura 8-6). Cuando la energía total sea positiva o cero (v.g., $E_1 \geq 0$), el movimiento no será confinado; en este caso, la partícula se dirige hacia el centro de fuerzas (situado en $r=0$), desde el infinito hasta que «choca» con la barrera de potencial en el *punto de inversión* $r=r_1$, y rebota hacia atrás, creciendo r indefinidamente. Obsérvese que la altura sobre $V(r)$ de la recta de la energía total (de valor constante E_1) vale $\frac{1}{2}\mu l^2$, cualquiera que sea r , como se indica en el punto r_5 de la figura 8-6. Entonces, la velocidad radial \dot{r} se anulará y cambiará de signo en el punto (o puntos) de inversión.

Cuando la energía total sea negativa* y su valor se encuentre entre cero y el mínimo de $V(r)$, como es el caso de E_2 , el movimiento será confinado con $r_2 \leq r \leq r_4$. El valor r_2 y r_4 corresponden a los puntos de inversión y son las llamadas *distancias apsidales* de la órbita. Cuando E sea igual al valor mínimo de la energía potencial efectiva (véase E_3 en la figura 8-6), el vector de posición de la trayectoria de la partícula se limita al único valor r_3 , siendo $\dot{r}=0$ en todo instante, y el movimiento será circular.

Valores de E inferiores a $V_{\min} = -(\mu k^2/2l^2)$ no producen movimientos reales, ya que entonces $\dot{r}^2 < 0$ y la velocidad sería imaginaria.

8.7 Movimiento planetario — Problema de Kepler

La ecuación de la trayectoria de una partícula que se mueve bajo la influencia de una fuerza central de módulo inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre la partícula y el centro de fuerzas puede obtenerse de (cfr. ec. 8.17)

$$\theta(r) = \int \frac{(l/r^2) dr}{\sqrt{2\mu(E + \frac{k}{r} - \frac{l^2}{2\mu r^2})}} + \text{cte.} \quad (8.29)$$

Si hacemos el cambio de variables $u = 1/r$ (véase problema 8-2) y definimos el origen de θ de forma que la constante de integración sea cero, esta integral nos dará

* Obsérvese que los valores negativos de la energía total se deben únicamente a que arbitrariamente hemos hecho $V(r)=0$ para $r=\infty$.

$$\cos \theta = \frac{\frac{l^2}{\mu k} \cdot \frac{1}{r} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}}} \quad (8.30)$$

Definamos ahora los parámetros siguientes:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &\equiv \frac{l^2}{\mu k} \\ \varepsilon &\equiv \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} \end{aligned} \right\} \quad (8.31)$$

Con lo cual, 8.30 podrá escribirse,

$$\boxed{\frac{\alpha}{r} = 1 + \varepsilon \cos \theta} \quad (8.32)$$

que es la ecuación de una cónica con uno de sus focos en el origen.* La cantidad ε es la *excentricidad* y 2α recibe el nombre de *latus rectum* de la órbita.

El valor mínimo de r corresponde al valor máximo de $\cos \theta$; o sea, a $\theta=0$. Entonces, al haber hecho *cero* la constante de integración de 8.29, habremos de medir θ a partir de r_{\min} , posición que recibe el nombre de *pericentro*, correspondiendo el de *apocentro*** a la de r_{\max} . El término general con el que se denominan los puntos de inversión es el de *ápsides*.

Las órbitas quedan clasificadas según los valores de la excentricidad (y, por ende, de la energía E) en las distintas cónicas (véase figura 8-7):

$\varepsilon > 1;$	$E > 0$	(hipérbola)
$\varepsilon = 1;$	$E = 0$	(parábola)
$0 < \varepsilon < 1;$	$V_{\min} < E < 0$	(elipse)
$\varepsilon = 0;$	$E = V_{\min}$	(círculo)
$\varepsilon < 0;$	$E < V_{\min}$	(no permitida)

* Parece ser que Johann BERNOULLI (1667-1748) fue el primero en demostrar que *todas* las órbitas posibles de un cuerpo que se mueva en un potencial proporcional a $1/r$ son cónicas (1710).

** Los términos respectivos para el movimiento alrededor del Sol son *perihelio* y *afelio*, y para el movimiento alrededor de la Tierra, *perigeo* y *apogeo*.

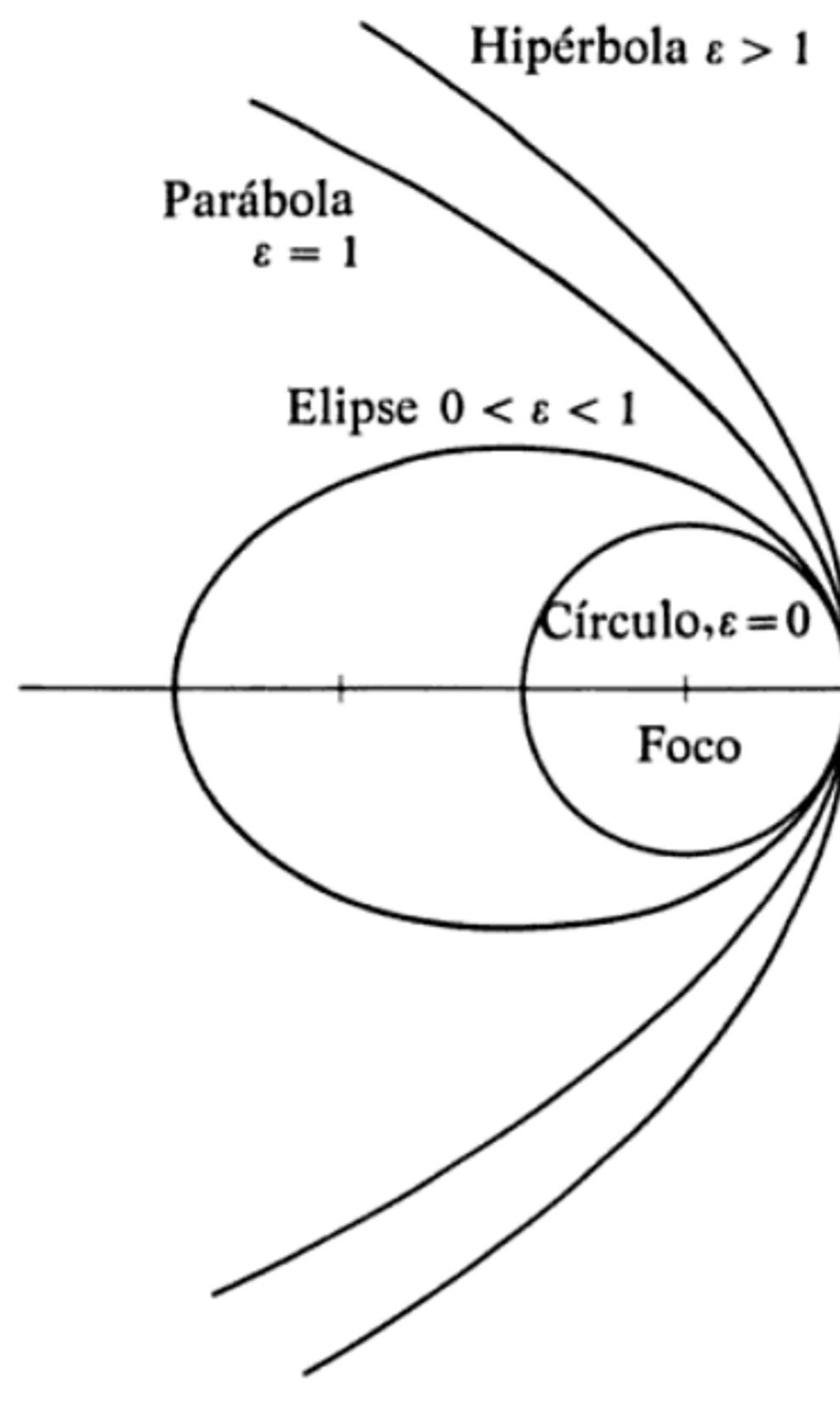


FIG. 8-7

Para el caso de movimiento planetario, las órbitas son elipses cuyos ejes mayor y menor (a y b , respectivamente) vienen dados por

$$a = \frac{\alpha}{1 - \epsilon^2} = \frac{k}{2|E|} \quad (8.33a)$$

$$b = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} = \frac{l}{\sqrt{2\mu|E|}} \quad (8.33b)$$

Así, pues, el eje mayor es función únicamente de la energía de la partícula, mientras que el eje menor es función de las dos integrales primeras del movimiento, E y l . En la figura 8-8 se representa la geometría de las órbitas elípticas en función de los parámetros α , ϵ , a y b , siendo P y P' los focos. En esta figura, vemos

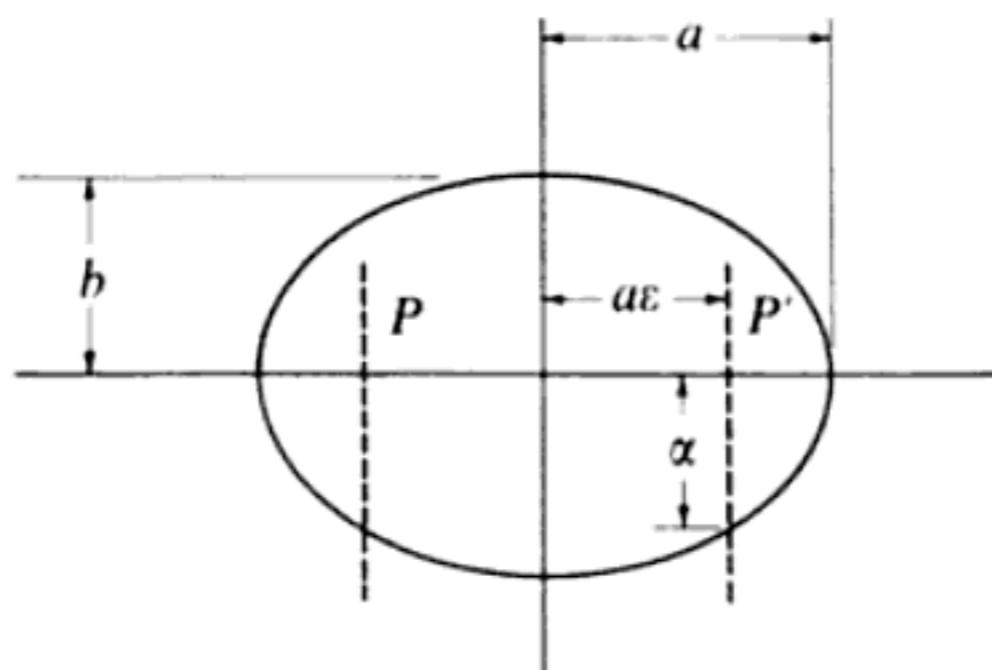


FIG. 8-8

que las distancias apsidales (r_{\min} y r_{\max} medidas desde los focos a la órbita) vienen dadas por:

$$\left. \begin{aligned} r_{\min} &= a(1 - \varepsilon) = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon} \\ r_{\max} &= a(1 + \varepsilon) = \frac{\alpha}{1 - \varepsilon} \end{aligned} \right\} \quad (8.34)$$

Para determinar el período del movimiento elíptico, tomemos nuevamente la expresión 8.12 de la velocidad areolar, que escribiremos

$$dt = \frac{2\mu}{l} dA$$

y como, en un período completo τ , se barre toda el área A de la elipse,

$$\begin{aligned} \int_0^\tau dt &= \frac{2\mu}{l} \int_0^A dA \\ \tau &= \frac{2\mu}{l} A \end{aligned} \quad (8.35)$$

Entonces, al ser $A = \pi ab$ el área de la elipse y al utilizar las expresiones 8.33 de a y b , resultará

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{2\mu}{l} \cdot \pi ab = \frac{2\mu}{l} \cdot \pi \cdot \frac{k}{2|E|} \cdot \frac{l}{\sqrt{2\mu|E|}} \\ &= \pi k \sqrt{\frac{\mu}{2}} \cdot |E|^{-3/2} \end{aligned} \quad (8.36)$$

Observemos asimismo que, según las expresiones 8.33, el eje menor puede escribirse

$$b = \sqrt{\alpha a} \quad (8.37)$$

y, en consecuencia, al ser $\alpha = l^2/\mu k$, el período τ podrá también expresarse

$$\boxed{\tau^2 = \frac{4\pi^2 \mu}{k} a^3} \quad (8.38)$$

Este resultado de que el cuadrado del período sea proporcional al cubo del eje mayor de la órbita elíptica constituye la conocida *tercera ley de Kepler*.* Nótese que este resultado se refiere al problema de un cuerpo equivalente, por lo que ha de tenerse en cuenta el hecho de que es la masa *reducida* μ la que aparece en 8.38. En realidad, lo que Kepler afirmó es que los cuadrados de los períodos de los planetas son proporcionales a los cubos de los ejes mayores de sus órbitas, siendo la constante de proporcionalidad la misma para todos los planetas. En este sentido, el enunciado sólo es correcto aproximadamente, ya que la masa reducida es distinta para cada planeta. En particular, como la fuerza gravitatoria viene dada por

$$F(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} = -\frac{k}{r^2}$$

donde hemos hecho $k = \gamma m_1 m_2$, la expresión del cuadrado del período se hace**

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\gamma(m_1 + m_2)} \cong \frac{4\pi^2 a^3}{\gamma m_2}, \quad m_1 \ll m_2$$

* Publicada por Kepler en 1619. La *segunda ley* de Kepler se ha estudiado en la sección 8.3. La *primera ley* (1609) determina el hecho de que los planetas se mueven siguiendo órbitas elípticas ocupando el Sol uno de los focos. Hacemos notar que los trabajos de Kepler precedieron en casi 80 años al enunciado de la ley general del movimiento de Newton. Incluso, las conclusiones de Newton se basaron en gran parte sobre los estudios pioneros de Kepler (y sobre aquellos de Galileo y Huygens).

** En los cálculos astronómicos, la constante gravitatoria γ suele sustituirse por una cantidad, k^2 , que es el cuadrado de la llamada *constante gravitatoria de Gauss*. Si la unidad de masa es la masa solar y la unidad de longitud es a para la órbita terrestre (*unidad astronómica*), será $k = 0,017\,202\,098\,95$. Tal es el valor calculado por Gauss en 1809 y adoptado como patrón en 1938 por la Unión Astronómica Universal. Para que k se mantenga fijo, pese a que las medidas se vayan perfeccionando, se va ajustando el valor de la unidad astronómica.

y el enunciado de Kepler sólo será válido cuando la masa m_1 de un planeta pueda despreciarse frente a la masa m_2 del Sol. (No obstante, obsérvese, por ejemplo, que la masa de Júpiter es aproximadamente 1/1000 de la masa del Sol, por lo que la desviación respecto de la ley aproximada no es difícil de observar en este caso.)

■ 8.8 Ecuación de Kepler

La ecuación 8.32 nos da la relación entre las coordenadas r y θ que describe el movimiento de una partícula atraída por un centro de fuerzas con una intensidad proporcional a la inversa de r^2 . Para los fines de los cálculos astronómicos, sin embargo, no es $r(\theta)$ lo que se desea, sino la función $\theta(t)$ que permite determinar en cualquier instante la dirección del objeto (un planeta, cometa, etc.). Y además, queremos que la expresión de θ (llamada *anomalía verdadera**) función del tiempo contenga como únicos parámetros las dos constantes observables fundamentales de la órbita; es decir, el período τ y la excentricidad ε . Esto puede conseguirse como sigue. Como el vector de posición necesita un tiempo τ para barrer toda el área πab , y como la velocidad areolar es una constante del movimiento, entonces en un tiempo t se habrá barrido un área $(\pi ab/\tau)t$. Este valor puede igualarse a la integral del área

$$\frac{\pi ab}{\tau} t = \int dA \quad (8.39)$$

Según 8.11, si hacemos $\theta=0$ para $t=0$, tendremos

$$\frac{\pi ab}{\tau} t = \frac{1}{2} \int_0^\theta r^2 d\theta \quad (8.39a)$$

y, por su parte, la ecuación 8.32 puede escribirse

$$r = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon \cos \theta} \quad (8.40)$$

* El término histórico «anomalía» no se emplea aquí en el sentido de «rareza», sino en el de «desviación», ya que θ mide la desviación angular contada desde un punto fijo, que en Astronomía suele ser el perihelio.

Por lo tanto (véase ec. E.16, ap. E):

$$\begin{aligned}\frac{\pi ab}{\tau} t &= \frac{\alpha^2}{2} \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \\ &= \frac{\alpha^2}{2(1 - \varepsilon^2)} \left[\frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{(1 - \varepsilon) \operatorname{tg}(\theta/2)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right) - \frac{\varepsilon \sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right]\end{aligned}$$

y, teniendo en cuenta que $ab = \alpha^2(1 - \varepsilon^2)^{-3/2}$, podemos simplificar esta expresión, quedando

$$\frac{2\pi t}{\tau} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) - \frac{\varepsilon \sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \quad (8.41)$$

Resulta, pues, una expresión formidable que ciertamente no es cómoda de manejar. Para empeorar las cosas, no es $t(\theta)$ lo que necesitamos, sino $\theta(t)$: o sea, debemos invertir la expresión obtenida. Evidentemente, tal cosa no puede hacerse de una forma sencilla; sólo nos es posible efectuar un desarrollo en serie

$$\begin{aligned}\theta(t) &= \frac{2\pi t}{\tau} + 2\varepsilon \sin \frac{2\pi t}{\tau} + \frac{5}{4} \varepsilon^2 \sin \frac{4\pi t}{\tau} \\ &\quad + \frac{1}{12} \varepsilon^3 \left(13 \sin \frac{6\pi t}{\tau} - 3 \sin \frac{2\pi t}{\tau} \right) + \dots \quad (8.42)\end{aligned}$$

Cuando ε sea lo suficientemente pequeña, podrán despreciarse los términos en ε^2 y potencias superiores, resultando una expresión manejable más fácilmente. No obstante, esta aproximación no está permitida al estudiar los movimientos planetarios ya que las excentricidades de la mayoría de los planetas son superiores a 0,04. (En la tabla 8.1 se dan algunos datos relativos a los cuerpos mayores del sistema solar.) Los cometas, por supuesto, poseen excentricidades próximas a la unidad; por tanto, si se hace uso de la igualdad 8.42, será preciso en general tomar muchos términos de la serie para conseguir una precisión comparable a la de las observaciones astronómicas (¡que es altísima!). En el mejor de los casos, esto resulta una labor engorrosa, por lo que habremos de proponernos buscar un método menos laborioso para calcular $\theta(t)$. Kepler buscó la solución a la dificultad (si bien no conocía, desde luego, las relaciones matemáticas contenidas en las

Tabla 8.1

ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS CUERPOS PRINCIPALES DEL SISTEMA SOLAR

Nombre	Semieje mayor de la órbita (en unidades astronómicas ^a)	Período (años)	Excentricidad	Masa (tomando como unidad la masa de la Tierra ^b)
Sol	—	—	—	333 480
Mercurio	0,3871	0,2408	0,2056	0,0543
Venus	0,7233	0,6152	0,0068	0,8137
Tierra	1,0000	1,0000	0,0167	1,000
Eros (asteroide)	1,4583	1,7610	0,2230	2×10^{-9} (?)
Marte	1,5237	1,8809	0,0934	0,1071
Ceres (asteroide)	<i>c</i>	4,6035	0,0765	1/8000 (?)
Júpiter	5,2028	<i>c</i>	0,0484	318,35
Saturno	9,5388	29,458	0,0557	<i>c</i>
Urano	19,182	84,013	0,0472	14,58
Neptuno	30,058	164,796	0,0086	17,26
Plutón	39,518	248,430	0,2486	<0,1

^a Por definición, una unidad astronómica es la longitud del semieje mayor de la órbita terrestre. Una U.A. $\approx 1,495 \times 10^8$ km.

^b La masa de la Tierra es aproximadamente $5,976 \times 10^{27}$ g.

^c Véase el problema 8-18.

ecuaciones precedentes), ideando un ingenioso procedimiento geométrico para calcular la anomalía en función del tiempo. Aquí no vamos a describir este método geométrico, si bien, en lugar de ello, obtendremos el mismo resultado por procedimientos algebraicos.

En la figura 8-9 se muestra la construcción de Kepler. El movimiento se realiza según la órbita elíptica y el centro de fuerzas se encuentra en el foco O , que es

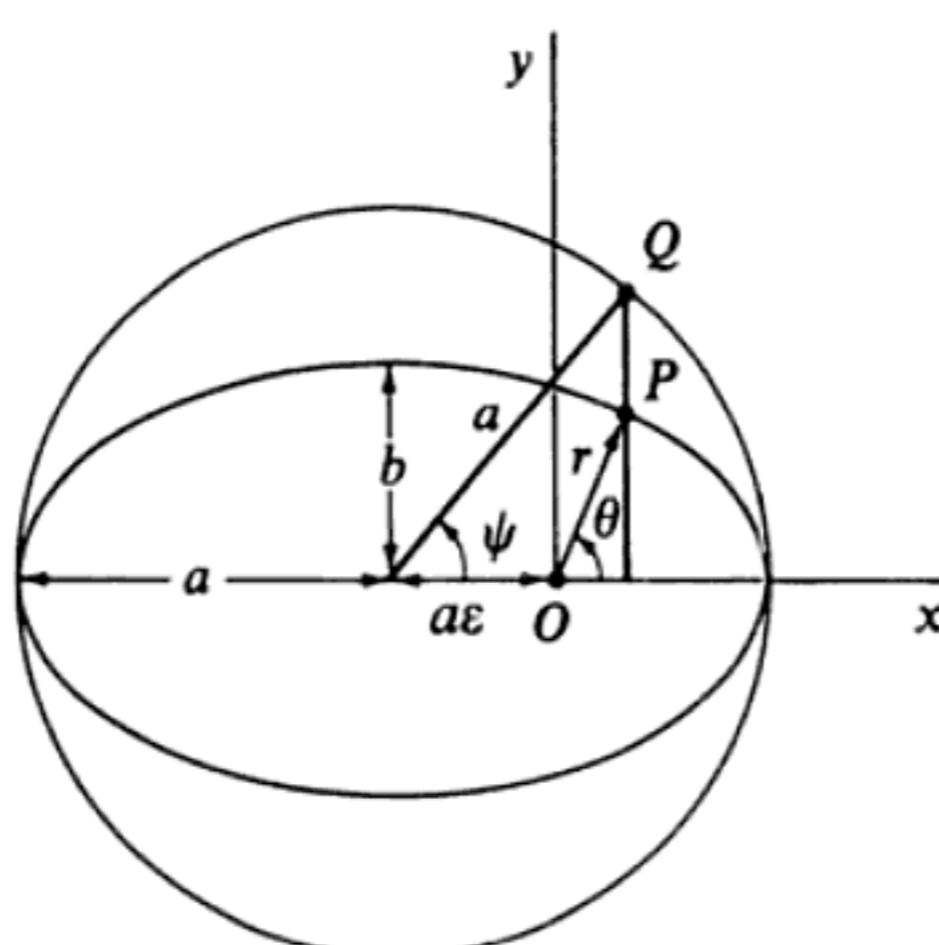


FIG. 8-9

asimismo el origen de un sistema de coordenadas rectangulares. La ecuación de la órbita en este sistema es

$$\frac{(x + ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (8.43)$$

A continuación, inscribamos la elipse dentro de una circunferencia de radio a y proyectemos el punto P (definido por r y θ) sobre la circunferencia, obteniendo el punto Q . El ángulo formado por el eje x y la línea recta que une el centro de la circunferencia con el punto Q recibe el nombre de *anomalía excéntrica* ψ y se define

$$\left. \begin{array}{l} \cos \psi = \frac{x + ae}{a} \\ \sin \psi = \frac{y}{b} \end{array} \right\} \quad (8.44)$$

De estas relaciones, podemos escribir

$$\left. \begin{array}{l} x = a(\cos \psi - \varepsilon) \\ y = b \sin \psi \\ = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin \psi \end{array} \right\} \quad (8.45)$$

y, elevando al cuadrado y sumando, resulta

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 \\ &= a^2(1 - \varepsilon \cos \psi)^2 \end{aligned}$$

por lo cual, en función de la anomalía excéntrica, la cantidad r es

$$r = a(1 - \varepsilon \cos \psi) \quad (8.46)$$

Determinemos ahora una relación explícita entre ψ y θ . Primeramente, volvamos a escribir la ecuación 8.40 como sigue

$$\varepsilon r \cos \theta = a(1 - \varepsilon^2) - r \quad (8.47)$$

de donde, si sumamos εr a ambos miembros, tendremos

$$\varepsilon r(1 + \cos \theta) = (1 - \varepsilon)[a(1 + \varepsilon) - r]$$

expresión que, si sustituimos en su segundo miembro r por el valor dado por 8.46, nos dará

$$\varepsilon r(1 + \cos \theta) = (1 - \varepsilon)[a(1 + \varepsilon) - a(1 - \varepsilon \cos \psi)]$$

o sea

$$r(1 + \cos \theta) = a(1 - \varepsilon)(1 + \cos \psi) \quad (8.48a)$$

Si en 8.47 restamos εr de ambos miembros y simplificamos, obtendremos

$$r(1 - \cos \theta) = a(1 + \varepsilon)(1 - \cos \psi) \quad (8.48b)$$

Dividiendo 8.48b por 8.48a resulta

$$\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \cdot \frac{1 - \cos \psi}{1 + \cos \psi}$$

que, recordando la fórmula de la tangente del ángulo mitad, puede ponerse

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \quad (8.49)$$

que nos da ψ unívocamente en función de θ (si nos reducimos a los valores principales de las funciones tangente). Por tanto, $\theta(t)$ se puede obtener fácilmente una vez determinado $\psi(t)$. Para calcular $\psi(t)$, tomemos la igualdad 8.39a y transformémosla en una expresión que contenga a ψ , poniendo el integrando en función de ψ . Derivando 8.49

$$d\theta = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} \cdot \frac{\cos^2(\theta/2)}{\cos^2(\psi/2)} d\psi \quad (8.50)$$

Y de 8.48a podemos escribir

$$\begin{aligned} r &= a(1 - \varepsilon) \frac{1 + \cos \psi}{1 + \cos \theta} \\ &= a(1 - \varepsilon) \frac{\cos^2(\psi/2)}{\cos^2(\theta/2)} \end{aligned} \quad (8.51)$$

donde se ha utilizado la fórmula del coseno del ángulo mitad.

Para expresar $r^2 d\theta$ en función de ψ , escribiremos r una vez según 8.46, la otra vez según 8.51 y $d\theta$ según 8.50. Entonces,

$$\begin{aligned} r^2 d\theta &= [a(1 - \varepsilon \cos \psi)] \left[a(1 - \varepsilon) \frac{\cos^2(\psi/2)}{\cos^2(\theta/2)} \right] \\ &\quad \cdot \left[\sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} \cdot \frac{\cos^2(\theta/2)}{\cos^2(\psi/2)} d\psi \right] \\ &= a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2} (1 - \varepsilon \cos \psi) d\psi \end{aligned} \quad (8.52)$$

Con este resultado a la vista, la ecuación 8.39a puede ahora escribirse como sigue

$$\frac{\pi ab}{\tau} t = \frac{a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{2} \int_0^\psi (1 - \varepsilon \cos \psi) d\psi$$

e, integrando y recordando nuevamente que $b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$, se obtiene

$$\frac{2\pi t}{\tau} = \psi - \varepsilon \sin \psi \quad (8.53)$$

La cantidad $2\pi t/\tau$ es la llamada *anomalía media*, ya que mide la desviación angular de un cuerpo que se mueve en una órbita circular con un período τ . Siguiendo la práctica en astronomía,* representaremos la anomalía media por M . Entonces,

$$M = \psi - \varepsilon \sin \psi \quad (8.54)$$

que es la *ecuación de Kepler*. Para determinar $\psi(t)$, habremos de recurrir a algún método aproximado para invertir el resultado obtenido. A continuación, como 8.49 relaciona ψ y θ , podrá determinarse la dependencia temporal de la anomalía verdadera. En la sección siguiente se trata de uno de los métodos de aproximación posibles.

La ecuación de Kepler puede utilizarse para obtener una expresión sencilla de la velocidad de un cuerpo en su órbita en función del módulo del vector de posición. Según la figura 8-9, podemos escribir,

* Asimismo, se acostumbra a representar la anomalía excéntrica por E y la anomalía verdadera por v o f .

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \quad (8.55)$$

lo que, al emplear las expresiones 8.45 para x e y , se transforma en

$$\begin{aligned} v^2 &= a^2 \dot{\psi}^2 \sin^2 \psi + a^2(1 - \varepsilon^2) \dot{\psi}^2 \cos^2 \psi \\ &= a^2 \dot{\psi}^2 (1 - \varepsilon^2 \cos^2 \psi) \end{aligned} \quad (8.56)$$

Si ahora derivamos respecto del tiempo la ecuación de Kepler 8.53, tendremos

$$\frac{2\pi}{\tau} = \dot{\psi}(1 - \varepsilon \cos \psi) \quad (8.57)$$

de donde, al despejar ψ y llevarla a 8.56, se obtendrá

$$\begin{aligned} v^2 &= \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 a^2 \frac{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \psi}{(1 - \varepsilon \cos \psi)^2} \\ &= \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 a^2 \frac{1 + \varepsilon \cos \psi}{1 - \varepsilon \cos \psi} \\ &= \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 a^2 \frac{2 - (1 - \varepsilon \cos \psi)}{1 - \varepsilon \cos \psi} \end{aligned} \quad (8.58)$$

Haciendo la sustitución $r/a = 1 - \varepsilon \cos \psi$, que nos da 8.46, resulta

$$v^2 = \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 a^3 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \quad (8.59)$$

Por último, la tercera ley de Kepler (8.38) nos reducirá esta expresión a

$v^2 = \frac{k}{\mu} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$

(8.60)

■ 8.9 Solución aproximada a la ecuación de Kepler

Cuando deseemos calcular $\theta(t)$ en el movimiento de un cuerpo que describa una órbita no muy excéntrica ($\varepsilon \approx 0,1$, p.e.), deseando alcanzar una precisión,

pongamos por caso, de 1 parte en 10^6 , nos serán necesarios muchos términos de la serie 8.42. En casos como éste, el empleo de la ecuación de Kepler resulta algo más fácil y, en realidad, es posible conseguir una expresión menos complicada que da una precisión del orden de ε^4 . Un método ideado por E. W. BROWN* empieza estableciendo la igualdad de la anomalía excéntrica a la anomalía media más un término correctivo

$$\psi = M + \xi \quad (8.61)$$

con lo cual, la ecuación de Kepler se escribirá

$$\xi = \varepsilon \operatorname{sen}(M + \xi) \quad (8.62)$$

Desarrollemos en serie $\operatorname{sen} \xi$ como sigue

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \xi &= \xi - \frac{\xi^3}{3!} + \frac{\xi^5}{5!} - \dots \\ &= \varepsilon \operatorname{sen}(M + \xi) - \frac{\varepsilon^3}{6} \operatorname{sen}^3(M + \xi) + \frac{\varepsilon^5}{120} \operatorname{sen}^5(M + \xi) - \dots \end{aligned} \quad (8.63)$$

Si pasamos $\varepsilon \operatorname{sen}(M + \xi)$ al primer miembro y utilizamos la igualdad que da el seno de la suma de dos ángulos, tendremos

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon \cos M) \operatorname{sen} \xi - (\varepsilon \operatorname{sen} M) \cos \xi \\ = -\frac{\varepsilon^3}{6} \operatorname{sen}^3(M + \xi) + \frac{\varepsilon^5}{120} \operatorname{sen}^5(M + \xi) - \dots \end{aligned} \quad (8.64)$$

Las magnitudes ε y M pueden expresarse en función de otras dos, η y ξ_0 , según

$$\left. \begin{array}{l} \eta \operatorname{sen} \xi_0 \equiv \varepsilon \operatorname{sen} M \\ \eta \cos \xi_0 \equiv 1 - \varepsilon \cos M \end{array} \right\} \quad (8.65)$$

Entonces, ξ_0 está determinada por

$$\xi_0 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\varepsilon \operatorname{sen} M}{1 - \varepsilon \cos M} \right) \quad (8.66a)$$

y η por

$$\eta = \sqrt{1 - 2\varepsilon \cos M + \varepsilon^2} \quad (8.66b)$$

* E. W. BROWN, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **92**, 104 (1931).

Llevemos las igualdades 8.65 a la ecuación 8.64; resultará

$$\operatorname{sen}(\xi - \xi_0) = -\frac{\varepsilon^3}{6\eta} \operatorname{sen}^3(M + \xi) + \frac{\varepsilon^5}{120\eta} \operatorname{sen}^5(M + \xi) - \dots \quad (8.67)$$

La expresión 8.66b nos indica que η es del orden de la unidad, por lo que la ecuación 8.67 pone de manifiesto que $\xi - \xi_0$ es del orden de ε^3 . Por lo tanto, si despreciamos el término proporcional a ε^5 y escribimos ξ_0 en lugar de ξ en el primer término del segundo miembro de 8.67, obtenemos

$$\operatorname{sen}(\xi - \xi_0) \cong -\frac{\varepsilon^3}{6\eta} \operatorname{sen}^3(M + \xi_0) \quad (8.68)$$

correcta dentro del mismo orden de ε^4 ; si $\varepsilon=0,1$, el primer término despreciado es del orden de $\varepsilon^5/120 \cong 10^{-7}$. La cantidad ξ puede calcularse de la ecuación 8.68, después 8.61 nos dará ψ y, por último, $\theta(t)$ se obtendrá de 8.49. Aunque este procedimiento comprende varios pasos, cada uno de ellos no es sino un cálculo relativamente sencillo. Los cálculos de las órbitas en astronomía se basan casi siempre en la ecuación de Kepler, de cuya resolución aproximada pueden encontrarse más detalles en los distintos textos de mecánica celeste.*

8.10 Ángulos apsidales y precesión

Cuando una partícula ejecuta un movimiento confinado y no circular en un campo de fuerzas centrales, la distancia radial entre la partícula y el centro de fuerzas deberá encontrarse siempre entre los límites $r_{\max} \geq r \geq r_{\min}$; es decir, r está limitada por las distancias apsidales. De la figura 8-6 resulta evidente que sólo existen *dos* distancias apsidales en un movimiento confinado y no circular; no obstante, puede ocurrir que la partícula no regrese a su posición original al ejecutar θ una revolución completa (véase figura 8-4). La separación angular entre dos valores sucesivos de $r=r_{\max}$ dependerá de la naturaleza exacta de la fuerza. El ángulo formado por dos ápsides consecutivos cualesquiera es el *ángulo apsidal* y, como toda órbita cerrada debe ser simétrica en torno a todo ápside, resulta que todos los ángulos apsidales del movimiento deben ser iguales. Por ejemplo, el ángulo apsidal del movimiento elíptico es π . Cuando la órbita no sea cerrada, la partícula alcanzará las distancias apsidales en puntos diferentes en cada una de las revoluciones; entonces, el ángulo apsidal no será fracción racional de 2π ,

* En la literatura, se tratan más de 120 métodos de obtención de soluciones aproximadas a la ecuación de Kepler. Véase, por ejemplo, MOULTON (Mo58, págs. 164 y ss.) para detalles.

como ha de verificarse para que la órbita sea cerrada. Cuando la órbita sea *casi* cerrada, los ápsides girarán lentamente o *precesionarán* en el plano del movimiento. Este efecto es exactamente análogo al giro lento del movimiento elíptico de un oscilador armónico bidimensional cuyas componentes x e y tengan frecuencias propias casi iguales (véase sección 3.4).

Como el hecho de que la fuerza sea inversamente proporcional al cuadrado de la distancia implica que toda órbita elíptica sea perfectamente cerrada, los ápsides deberán permanecer fijos en el espacio con el transcurso del tiempo. Cuando se encuentre que los ápsides se muevan con el tiempo, aunque sea lentamente, ello indicará que la fuerza bajo la cual se mueve el cuerpo no obedece exactamente la ley de proporcionalidad a la inversa del cuadrado de la distancia. Es éste un hecho importante observado por Newton, quien señaló que todo avance o retroceso del perihelio de un planeta impondría que la dependencia radial de la fuerza fuese ligeramente distinta a $1/r^2$. Así pues, razonaba Newton, la observación de la variación con el tiempo de los perihelios de los planetas sería una comprobación sensible de la validez de la forma de la ley de la gravedad universal.

A decir verdad, en el caso del movimiento planetario dentro del Sistema Solar, cabe esperar que, a causa de las perturbaciones que introduce la existencia de los demás planetas, la fuerza experimentada por uno de ellos no varíe exactamente como $1/r^2$, cuando r se mida desde el Sol. Sin embargo, este efecto es pequeño, habiéndose observado únicamente ligeras variaciones de los perihelios; por ejemplo, el perihelio de Mercurio, que es el planeta que lo exhibe en mayor grado, avanza sólo unos 574 segundos de arco por siglo* y cálculos detallados de la influencia de los otros planetas sobre su movimiento predicen que el desplazamiento del perihelio por unidad de tiempo debe ser de 531 segundos de arco por siglo aproximadamente. Las imprecisiones de este cálculo son considerablemente inferiores a la diferencia de 43 segundos entre lo observado y lo calculado,**† y durante mucho tiempo esta discrepancia fue el incon-

* Esta precesión se suma a la precesión general de los equinoccios respecto de las estrellas «fijas» que sube a $5025,645 \pm 0,050$ segundos de arco por siglo.

** En 1845, el astrónomo francés Urbain Jean Joseph LE VERRIER (1811-1877) llamó por primera vez la atención hacia las irregularidades en el movimiento de Mercurio. Estudios similares de LE VERRIER y del astrónomo inglés John COUCH ADAMS acerca de las irregularidades en el movimiento de Urano condujeron al descubrimiento de Neptuno en 1846. TURNER (Tu04, cap. 2) da un interesante relato de este episodio.

† Sobre este particular, debemos observar que las perturbaciones pueden ser *periódicas* o *seculares* (o sea, aumentando siempre con el tiempo). LAPLACE demostró en 1773 (lo publicó en 1776) que toda perturbación del movimiento medio de un planeta producida por la atracción de otro planeta debe ser de naturaleza periódica, si bien el período puede ser extremadamente largo. Tal es el caso de Mercurio, cuya precesión de 531 segundos de arco por siglo es periódica, pero el período es tan largo que la variación de siglo a siglo es pequeña comparada con el efecto residual de los 43 segundos.

veniente sin resolver más importante de la teoría de Newton. Ahora sabemos que la modificación introducida en la ecuación de movimiento de un planeta por la teoría de la relatividad generalizada da cuenta, casi exactamente, de la diferencia de 43 segundos. Este resultado es uno de los principales triunfos de la relatividad. A continuación indicamos cómo puede calcularse el desplazamiento del perihelio a partir de la ecuación de movimiento modificada.

Para desarrollar dicho cálculo es conveniente que utilicemos la ecuación de movimiento en su forma 8.20, en la cual escribiremos la ley de la gravitación universal en el lugar de $F(r)$, quedando

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{l^2} \frac{1}{u^2} F(u) \\ = \frac{\gamma m^2 M}{l^2} \quad (8.69)$$

con lo que suponemos que el cuerpo de masa m se mueve en el campo gravitatorio creado por el cuerpo de masa M . Por su parte, u es la inversa de la distancia entre m y M .

La modificación de la ley de la gravitación impuesta por la teoría de la relatividad generalizada introduce en la expresión de la fuerza una pequeña componente proporcional a $1/r^4$ ($= u^4$). Entonces, tendremos,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\gamma m^2 M}{l^2} + \frac{3\gamma M}{c^2} u^2 \quad (8.70)$$

donde c es la velocidad de propagación de la interacción gravitatoria, que es precisamente la velocidad de la luz.* Para simplificar la notación, hagamos

$$\frac{1}{\alpha} \equiv \frac{\gamma m^2 M}{l^2} \\ \delta \equiv \frac{3\gamma M}{c^2} \quad (8.71)$$

* La mitad del término relativista se debe a efectos comprensibles bajo el punto de vista de la relatividad restringida, o sea, dilatación del tiempo (1/3) y variación de la masa con la velocidad (1/6) (la velocidad es máxima en el perihelio y mínima en el afelio). (Véase capítulo 10.) La otra mitad del término tiene su origen en efectos cuya causa se explica en la relatividad generalizada, pudiendo suponerse asociados al tiempo finito de propagación de las interacciones gravitatorias. Así, pues, el acuerdo entre teoría y experiencia constituye una confirmación de la predicción de que la velocidad de propagación de los fenómenos gravitatorios es la misma que la de la luz.

de forma que la ecuación 8.70 puede escribirse

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{\alpha} + \delta u^2 \quad (8.72)$$

Es ésta una ecuación alineal para cuya solución seguiremos el método de aproximaciones sucesivas. Como primera solución de prueba utilizaremos la correspondiente al caso en que se desprecie en (8.72) el término δu^2 *:

$$u_1 = \frac{1}{\alpha} (1 + \varepsilon \cos \theta) \quad (8.73)$$

que constituye el resultado que nos es familiar (8.32) para cuando la fuerza obedece exactamente la ley de proporcionalidad a la inversa del cuadrado de la distancia. (Obsérvese que aquí α es la misma que se definió en 8.31, salvo que ahora tenemos m en lugar de μ .) Si llevamos esta expresión al segundo miembro de la ecuación 8.72, tendremos

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{d\theta^2} + u &= \frac{1}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha^2} [1 + 2\varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2 \cos^2 \theta] \\ &= \frac{1}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha^2} \left[1 + 2\varepsilon \cos \theta + \frac{\varepsilon^2}{2} (1 + \cos 2\theta) \right] \end{aligned} \quad (8.74)$$

donde se ha desarrollado $\cos^2 \theta$ en función de $\cos 2\theta$. Resulta, así, que la primera función de prueba u_1 , llevada al segundo miembro de 8.72, sólo reproduce el primer término del mismo, o sea $1/\alpha$. En consecuencia, podemos formar una segunda función de prueba sumando a u_1 un término que reproduce el resto del segundo miembro (de 8.74). Fácilmente puede comprobarse que esta integral particular es

$$u_p = \frac{\delta}{\alpha^2} \left[\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \right) + \varepsilon \theta \sin \theta - \frac{\varepsilon^2}{6} \cos 2\theta \right] \quad (8.75)$$

Por tanto, la segunda función de prueba es

$$u_2 = u_1 + u_p$$

* Midiendo θ desde la posición del perihelio (o sea, donde u_1 es máximo y r mínimo, para $\theta=0$) eliminamos la necesidad de introducir un ángulo de fase arbitraria en el argumento del coseno.

y, si en este punto detenemos el proceso de aproximación, tendremos

$$\begin{aligned} u &\cong u_2 = u_1 + u_p \\ &= \left[\frac{1}{\alpha} (1 + \varepsilon \cos \theta) + \frac{\delta \varepsilon}{\alpha^2} \theta \sin \theta \right] \\ &\quad + \left[\frac{\delta}{\alpha^2} \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \right) - \frac{\delta \varepsilon^2}{6\alpha^2} \cos 2\theta \right] \end{aligned} \quad (8.76)$$

donde hemos reagrupado convenientemente los términos de u_1 y u_p .

Examinemos ahora los términos contenidos por el segundo par de corchetes en 8.76: el primero de ellos es una constante y el segundo únicamente una pequeña perturbación periódica del movimiento ordinario de Kepler. Por lo tanto, ninguno de tales términos dará una contribución media, en un espacio de tiempo grande, a alteración alguna en la posición de los ápsides. No obstante, dentro del primer par de corchetes, el término proporcional a θ sí que dará lugar a efectos seculares y, por tanto, observables. Examinemos, pues, el primer par de corchetes:

$$u_{\text{secular}} = \frac{1}{\alpha} \left[1 + \varepsilon \cos \theta + \frac{\delta \varepsilon}{\alpha} \theta \sin \theta \right] \quad (8.77)$$

Por otra parte, se verifica

$$\begin{aligned} 1 + \varepsilon \cos \left(\theta - \frac{\delta}{\alpha} \theta \right) &= 1 + \varepsilon \left(\cos \theta \cos \frac{\delta}{\alpha} \theta + \sin \theta \sin \frac{\delta}{\alpha} \theta \right) \\ &\cong 1 + \varepsilon \cos \theta + \frac{\delta \varepsilon}{\alpha} \theta \sin \theta \end{aligned} \quad (8.78)$$

donde se ha tenido en cuenta que δ es una cantidad pequeña para hacer las aproximaciones

$$\cos \frac{\delta}{\alpha} \theta \cong 1; \quad \sin \frac{\delta}{\alpha} \theta \cong \frac{\delta}{\alpha} \theta$$

Entonces, u_{secular} puede escribirse

$$u_{\text{secular}} \cong \frac{1}{\alpha} \left[1 + \varepsilon \cos \left(\theta - \frac{\delta}{\alpha} \theta \right) \right] \quad (8.79)$$

Hemos tomado el perihelio como origen para medir θ para $t=0$; entonces, cuando el movimiento pase sucesivamente por el perihelio, el argumento del término cosenoidal de u_{secular} habrá pasado por los valores $2\pi, 4\pi, \dots$, etc. Pero un incremento de 2π en el argumento, en estas condiciones, implica

$$\theta - \frac{\delta}{\alpha} \theta = 2\pi$$

o sea,

$$\theta = \frac{2\pi}{1 - (\delta/\alpha)} \cong 2\pi \left(1 + \frac{\delta}{\alpha}\right)$$

Por lo tanto, el efecto del término relativista en la expresión de la fuerza es desplazar el perihelio, en cada revolución, un ángulo

$$\Delta \cong \frac{2\pi\delta}{\alpha} \quad (8.80)$$

es decir, los ápsides ejecutan un lento movimiento de giro en el espacio. Si acudimos a las definiciones de δ y α (8.71), encontramos

$$\Delta \cong 6\pi \left(\frac{\gamma m M}{c l}\right)^2 \quad (8.80a)$$

De 8.31 y 8.33a, resulta $l^2 = \mu k a (1 - e^2)$; entonces, como $k = \gamma m M$ y $\mu \cong m$, tendremos

$$\boxed{\Delta \cong \frac{6\pi\gamma M}{ac^2(1 - e^2)}} \quad (8.80b)$$

Vemos, por tanto, que el efecto será tanto más pronunciado cuanto menor sea el semieje mayor a y mayor la excentricidad. En consecuencia, Mercurio, el planeta más cercano al Sol y cuya órbita es la más excéntrica (salvo la de Plutón), nos da la prueba más palpable de la teoría*. El valor calculado de esta precesión, en el caso de Mercurio, es de $43,03 \pm 0,03$ segundos de arco por siglo y el

* De otra forma, podemos decir que el desplazamiento relativista del perihelio es máximo en el caso de Mercurio, debido al hecho de que su velocidad orbital es muy grande, por lo que el parámetro relativista v/c es muy elevado (véanse capítulo 10 y problema 10-14).

observado (con la corrección debida para dar cuenta de la influencia de los otros planetas) es de $43,11 \pm 0,45$ segundos,* de manera que la predicción de la teoría de la relatividad queda confirmada de forma contundente.

Tabla 8.2

VELOCIDAD DE PRECESIÓN DEL PERIHELIO DE ALGUNOS PLANETAS

Planeta	Velocidad (seg. de arco/siglo)	
	Calculada	Observada
Mercurio	$43,03 \pm 0,03$	$43,11 \pm 0,45$
Venus	8,63	$8,4 \pm 4,8$
Tierra	3,84	$5,0 \pm 1,2$
Marte	1,35	—
Júpiter	0,06	—

8.11 Estabilidad de las órbitas circulares

Señalamos en la sección 8.6 que la órbita será circular cuando ocurra que la energía total sea igual al valor mínimo de la energía potencial efectiva, $E = V_{\min}$. Hablando en términos más generales, sin embargo, podemos afirmar que, *cualquiera que sea* un potencial atractivo, éste permitirá órbitas circulares puesto que evidentemente *siempre* podrá hacerse que la fuerza atractiva equilibre exactamente a la fuerza centrífuga tomando adecuadamente la velocidad. Aunque las órbitas circulares, por tanto, sean siempre posibles en un campo de fuerzas centrales atractivas, dichas órbitas no serán necesariamente estables. En $r = \rho$ existirá órbita circular si $\dot{r}|_{r=\rho} = 0$ para cualquier t ; ello será posible si

$$(\partial V / \partial r)|_{r=\rho} = 0.$$

Pero sólo en el caso de que el potencial efectivo presente un *mínimo verdadero* habrá estabilidad; todas las otras órbitas circulares serán de equilibrio inestable.

Supongamos una fuerza central atractiva de la forma

$$F(r) = -\frac{k}{r^n} \quad (8.81)$$

* R. L. DUNCOMBE, *Astron. J.* **61**, 174 (1956); véase también G. M. CLEMENCE, *Rev. Mod. Phys.* **19**, 361 (1947).

siendo la función potencial

$$U(r) = -\frac{k}{n-1} \cdot \frac{1}{r^{(n-1)}} \quad (8.82)$$

a la que corresponderá una función potencial efectiva

$$V(r) = -\frac{k}{n-1} \cdot \frac{1}{r^{(n-1)}} + \frac{l^2}{2\mu r^2} \quad (8.83)$$

Las condiciones de mínimo de $V(r)$ y por ende las de existencia de una órbita circular estable de radio ρ son

$$\left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=\rho} = 0 \quad \text{y} \quad \left. \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right|_{r=\rho} > 0 \quad (8.84)$$

Si aplicamos estos criterios al potencial efectivo expresado por 8.83, tendremos

$$\left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=\rho} = \frac{k}{\rho^n} - \frac{l^2}{\mu \rho^3} = 0$$

o sea,

$$\rho^{(n-3)} = \frac{\mu k}{l^2} \quad (8.85)$$

y además

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right|_{r=\rho} = -\frac{nk}{\rho^{(n+1)}} + \frac{3l^2}{\mu \rho^4} > 0$$

de donde

$$-\frac{nk}{\rho^{(n-3)}} + \frac{3l^2}{\mu} > 0 \quad (8.86)$$

Llevando el valor de $\rho^{(n-3)}$ dado por 8.85 a 8.86 resulta

$$(3-n) \frac{l^2}{\mu} > 0 \quad (8.87)$$

y la condición de existencia de órbita circular estable es que $n < 3$.

A continuación, vamos a hacer un estudio más general investigando acerca de la frecuencia de oscilación en torno a una órbita circular perteneciente a un campo de fuerzas centrales cualquiera. Escribamos la expresión de la fuerza como sigue

$$F(r) = -\mu g(r) = -\frac{\partial U}{\partial r} \quad (8.88)$$

con lo cual, la ecuación 8.18 podrá escribirse,

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -g(r) \quad (8.89)$$

y, teniendo en cuenta el valor de $\dot{\theta}$ dado por 8.10,

$$\ddot{r} - \frac{l^2}{\mu^2 r^3} = -g(r) \quad (8.90)$$

Supongamos ahora que la partícula se encuentre inicialmente en una órbita circular de radio ρ y apliquemos una perturbación de la forma $r \rightarrow \rho + x$, donde x es una cantidad pequeña. Como $\rho = \text{cte.}$, será también $\ddot{r} \rightarrow \ddot{x}$ y, entonces,

$$\ddot{x} - \frac{l^2}{\mu^2 \rho^3 [1 + (x/\rho)]^3} = -g(\rho + x) \quad (8.91)$$

Ahora bien, por hipótesis $(x/\rho) \ll 1$, por lo que podemos hacer el desarrollo en serie siguiente,

$$[1 + (x/\rho)]^{-3} = 1 - 3(x/\rho) + \dots \quad (8.92)$$

Ahora supongamos también que $g(r) = g(\rho + x)$ sea desarrollable en serie de Taylor en torno al punto $r = \rho$:

$$g(\rho + x) = g(\rho) + xg'(\rho) + \dots \quad (8.93)$$

donde

$$g'(\rho) \equiv \left. \frac{dg}{dr} \right|_{r=\rho}$$

Si despreciamos los términos en x^2 y potencias superiores, al llevar las igualdades 8.92 y 8.93 a la ecuación 8.91, tendremos

$$\ddot{x} - \frac{l^2}{\mu^2 \rho^3} [1 - 3(x/\rho)] \cong -[g(\rho) + xg'(\rho)] \quad (8.94)$$

Recordemos que se ha supuesto que la partícula se halla inicialmente sobre una órbita circular de radio $r=\rho$, estado en el cual no hay movimiento en dirección radial y, por tanto, $\dot{r}|_{r=\rho}=0$. Por la misma razón, $\ddot{r}|_{r=\rho}=0$. En consecuencia, particularizando la ecuación 8.90 en $r=\rho$, tendremos

$$g(\rho) = \frac{l^2}{\mu^2 \rho^3} \quad (8.95)$$

y, sustituyendo esta relación en la ecuación 8.94, resultará, aproximadamente,

$$\ddot{x} - g(\rho)[1 - 3(x/\rho)] \cong -[g(\rho) + xg'(\rho)]$$

o sea,

$$\ddot{x} + \left[\frac{3g(\rho)}{\rho} + g'(\rho) \right] x \cong 0 \quad (8.96)$$

Si, por definición,

$$\omega_0^2 \equiv \frac{3g(\rho)}{\rho} + g'(\rho) \quad (8.97)$$

la ecuación 8.96 se transformará en la conocida ecuación del oscilador armónico no amortiguado

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (8.98)$$

cuya solución es

$$x(t) = A e^{+i\omega_0 t} + B e^{-i\omega_0 t} \quad (8.99)$$

Si $\omega_0^2 < 0$ con lo que ω_0 sería imaginaria, el segundo sumando se hace $B \exp(|\omega_0|t)$, el cual evidentemente crece con el tiempo tendiendo a infinito. Por tanto, la condición para que exista oscilación es que $\omega_0^2 > 0$; o sea,

$$\frac{3g(\rho)}{\rho} + g'(\rho) > 0 \quad (8.100)$$

Como $g(\rho) > 0$ (cfr. 8.95), podemos dividir ambos miembros por $g(\rho)$, y escribir esta desigualdad:

$$\frac{g'(\rho)}{g(\rho)} + \frac{3}{\rho} > 0 \quad (8.100a)$$

o sea, dado que $g(r)$ y $F(r)$ están relacionadas por un factor constante, habrá estabilidad cuando

$$\frac{F'(\rho)}{F(\rho)} + \frac{3}{\rho} > 0$$

(8.101)

Aplicemos ahora la condición que impone esta expresión 8.101 a una fuerza del mismo tipo considerado antes

$$F(r) = -\frac{k}{r^n} \quad (8.102)$$

con lo cual, 8.101 se transformará en

$$\frac{nk\rho^{-(n+1)}}{-k\rho^{-n}} + \frac{3}{\rho} > 0$$

o sea,

$$(3-n) \cdot \frac{1}{\rho} > 0 \quad (8.103)$$

que nos da la misma condición que antes; es decir $n < 3$. (No obstante debemos observar que el caso $n=3$ precisa un examen más profundo; véase problema 8-23.)

Debemos hacer notar que los desarrollos en serie de potencias de x realizados en 8.92 y 8.93 constituyen otra aplicación del método de las perturbaciones, tratado por primera vez en la sección 5.5. Por lo tanto, aquí tenemos otro ejemplo de la eficacia y elegancia de esta importantísima técnica.

◆ **Ejemplo 8-11(a) Estabilidad en un potencial apantallado**

Estudiemos la estabilidad de las órbitas circulares de un campo de fuerzas descrito por la función potencial

$$U(r) = -\frac{k}{r} e^{-(r/a)} \quad (1)$$

donde $k > 0$ y $a > 0$. Es éste el llamado *potencial de Coulomb apantallado* (cuando $k = Ze^2$, siendo Z el número atómico y e la carga del electrón) porque disminuye con la distancia más rápidamente que $1/r$ y por ello es una expresión aproximada del potencial electrostático del núcleo atómico en la proximidad de éste, teniendo en cuenta el «apantallamiento» parcial de la carga nuclear por los electrones atómicos. Entonces

$$\begin{aligned} F(r) &= -\frac{\partial U}{\partial r} \\ &= -k \left[\frac{1}{ar} + \frac{1}{r^2} \right] e^{-(r/a)} \end{aligned} \quad (2)$$

y

$$\frac{\partial F}{\partial r} = k \left[\frac{1}{a^2 r} + \frac{2}{a r^2} + \frac{2}{r^3} \right] e^{-(r/a)} \quad (3)$$

La condición de estabilidad es (cfr. 8.101)

$$3 + \rho \frac{F'(\rho)}{F(\rho)} > 0 \quad (4)$$

por lo tanto,

$$3 + \frac{\rho k \left[\frac{1}{a^2 \rho} + \frac{2}{a \rho^2} + \frac{2}{\rho^3} \right]}{-k \left[\frac{1}{a \rho} + \frac{1}{\rho^2} \right]} > 0 \quad (5)$$

y, simplificando,

$$a^2 + a\rho - \rho^2 > 0 \quad (6)$$

que puede escribirse

$$\frac{a^2}{\rho^2} + \frac{a}{\rho} - 1 > 0 \quad (7)$$

En consecuencia, habrá estabilidad para todo valor de $q = a/\rho$ que exceda al que sea solución de

$$q^2 + q - 1 = 0 \quad (8)$$

cuya raíz positiva (y por tanto la única físicamente significativa) es

$$q = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \cong 0,62 \quad (9)$$

Por tanto, cuando el momento cinético y la energía sean tales que permitan una órbita circular en $r=\rho$, el movimiento será estable cuando

$$\frac{a}{\rho} \gtrsim 0,62$$

o sea,

$$\rho \lesssim 1,62 a \quad (10)$$

En la figura 8-10, donde se representa el potencial $V(r)$ para distintos valores de ρ/a , se ilustra gráficamente la condición de estabilidad de las órbitas en un potencial apantallado. La constante k es la misma para todas las curvas, pero $l^2/2\mu$ ha sido ajustado para que el valor mínimo del potencial se mantenga constante e igual al del mismo valor del radio mientras va variando a . Evidentemente, para $\rho/a < 1,62$, existe un mínimo verdadero del potencial que indica que la órbita circular es estable con relación a las pequeñas oscilaciones. Para $\rho/a > 1,62$ no hay mínimo, por lo que no pueden existir las órbitas circulares. Para $\rho/a = 1,62$, el potencial tiene pendiente nula en la posición que ocuparía la órbita circular que es inestable ya que, al ser cero ω_0^2 en la ecuación 8.98, el desplazamiento x aumentaría linealmente con el tiempo.

Una característica interesante de esta función potencial es que bajo ciertas condiciones pueden existir órbitas ligadas para las cuales la energía total sea positiva. (Véase, p.e., la curva 4 de la figura 8-10.) En todos los casos estudiados hasta ahora, el potencial aumentaba monótonamente desde un valor mínimo hacia $V=0$, cuando r tendía a infinito. Sin embargo, en la figura 8-10 se ve que a medida que el pozo del potencial apantallado se hace menos profundo (a causa de la disminución del momento cinético l), llega un punto en que el potencial entra en la región de energías positivas, permitiendo así la existencia de órbitas ligadas con $E > 0$. Por supuesto, cualquiera que sea el caso, siempre $V \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$.

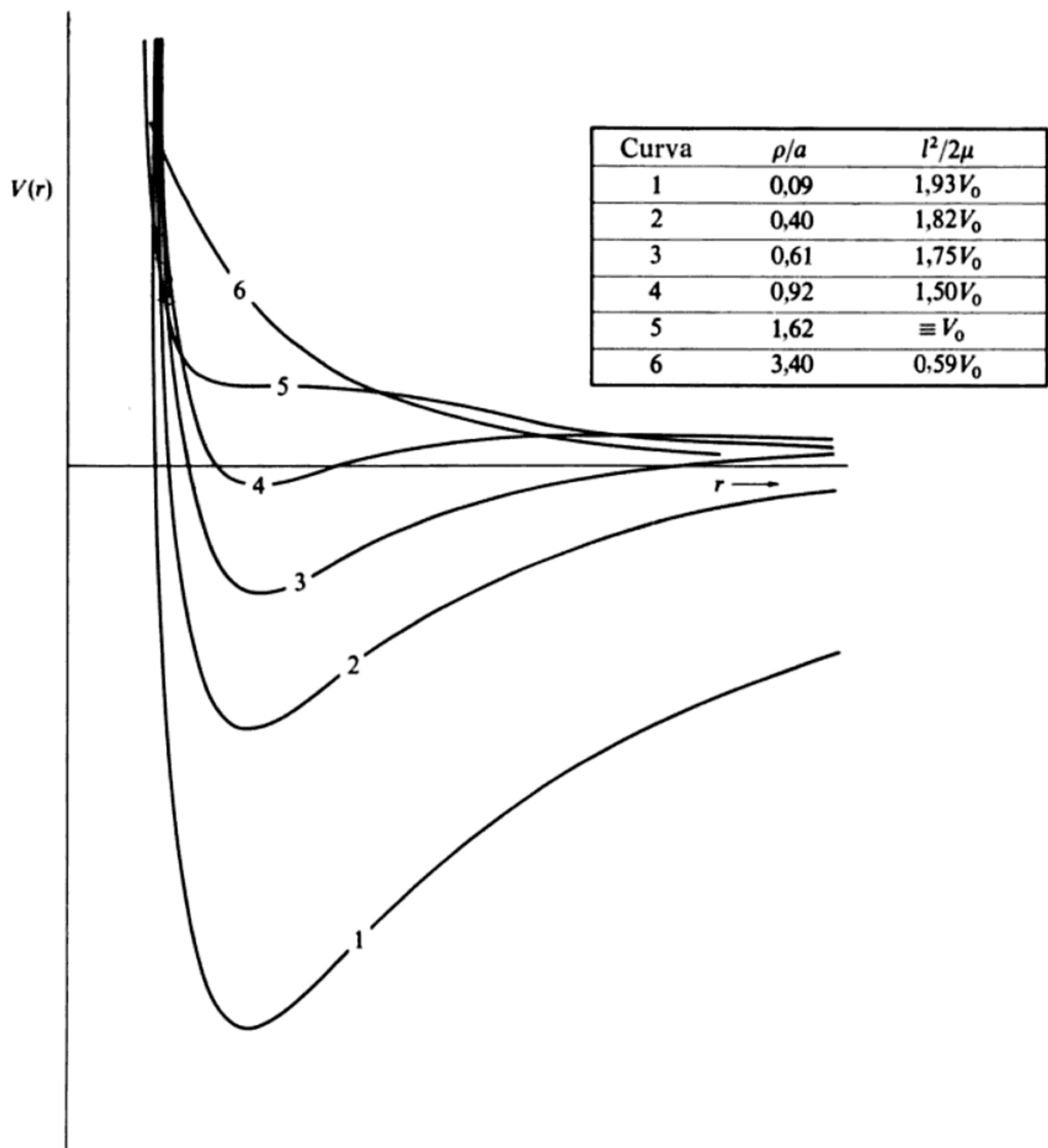


FIG. 8-10

◆ Ejemplo 8.11(b) Órbitas circulares estables sobre una superficie cónica

Volvamos al ejemplo 7.4 de la partícula en movimiento sobre una superficie cónica. Hallamos que el momento cinético en torno al eje z es una constante del movimiento

$$l = mr^2\dot{\theta} = \text{cte.} \quad (1)$$

y, asimismo, determinamos la ecuación de movimiento correspondiente a la coordenada r :

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \sin^2\alpha - g \sin\alpha \cos\alpha = 0 \quad (2)$$

Es evidente que si se eligen adecuadamente las condiciones iniciales, la partícula puede describir una órbita circular en torno al eje vertical, con el plano de la misma situado a altura constante z_0 sobre el plano horizontal que pasa por el vértice del cono. Aunque en este problema no aparezcan fuerzas centrales, hay ciertos aspectos del movimiento iguales a los correspondientes al caso de fuerzas centrales. Así, por ejemplo, podemos estudiar la estabilidad de las órbitas circulares de la partícula. Para ello, emplearemos el método de las perturbaciones.

En primer lugar, supongamos que existe una órbita circular para $r=\rho$ y apliquemos la perturbación $r \rightarrow \rho + x$. La cantidad $r\dot{\theta}^2$ que aparece en la ecuación de movimiento 2 puede expresarse

$$\begin{aligned} r\dot{\theta}^2 &= r \cdot \frac{l^2}{m^2 r^4} = \frac{l^2}{m^2 r^3} \\ &= \frac{l^2}{m^2} (\rho + x)^{-3} = \frac{l^2}{m^2 \rho^3} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^{-3} \\ &\approx \frac{l^2}{m^2 \rho^3} \left(1 - 3 \frac{x}{\rho}\right) \end{aligned} \quad (3)$$

donde sólo hemos retenido el primer término del desarrollo en serie, ya que x/ρ es por hipótesis una cantidad pequeña.

Entonces, como $\ddot{x}=0$, la ecuación 2 se hace, aproximadamente,

$$\ddot{x} - \frac{l^2 \sin^2\alpha}{m^2 \rho^3} \left(1 - 3 \frac{x}{\rho}\right) + g \sin\alpha \cos\alpha = 0 \quad (4)$$

o bien,

$$\ddot{x} + \left(\frac{3l^2 \sin^2\alpha}{m^2 \rho^4}\right)x - \frac{l^2 \sin\alpha}{m^2 \rho^3} + g \sin\alpha \cos\alpha = 0 \quad (5)$$

Si particularizamos la ecuación 2 en $r=\rho$, será $\ddot{r}=0$, resultando

$$\begin{aligned} g \sin\alpha \cos\alpha &= \rho \dot{\theta}^2 \sin^2\alpha \\ &= \frac{l^2}{m^2 \rho^3} \sin^2\alpha \end{aligned} \quad (6)$$

y a la vista de esta igualdad, los dos últimos términos de la ecuación 5 se anulan entre sí, quedando

$$\ddot{x} + \left(\frac{3l^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{m^2 \rho^4} \right) x = 0 \quad (7)$$

ecuación que representa precisamente una oscilación armónica de pulsación ω

$$\omega = \frac{\sqrt{3}l}{mp^2} \operatorname{sen} \alpha \quad (8)$$

Así, pues, la órbita circular será estable.

■ 8.12 Problema de los tres cuerpos

En las secciones 8.4 y 8.5 vimos que el problema del movimiento de dos cuerpos que interactúan a través de fuerzas centrales y no sometidas a fuerza externa alguna es completamente resoluble. Cuando la fuerza de interacción no pueda expresarse mediante una potencia de la distancia, las ecuaciones de movimiento podrán no ser expresables por medio de funciones sencillas, pero a pesar de ello el movimiento siempre podrá quedar definido en función de una integral (cfr. ec. 8.17) que podrá calcularse en principio. Sin embargo, la adición de un tercer cuerpo al sistema hace que el problema no pueda resolverse en general mediante funciones elementales. Así, pues, el problema del movimiento de tres cuerpos que interactúan entre sí a través de fuerzas gravitatorias sigue sin resolverse al cabo de más de doscientos años de estudio por parte de los matemáticos y físicos más eminentes.* Pese a que el problema general es insoluble, determinados aspectos del sistema de tres cuerpos son todavía objeto de análisis.** Por ejemplo, cuando las condiciones iniciales sean tales que las velocidades de los tres cuerpos se encuentren las tres en el plano que los mismos definen, ocurrirá siempre que el movimiento tendrá lugar en dicho plano. En el problema *restringido* de los tres cuerpos se considera el caso en que la masa de uno de ellos*** es despreciable comparado con cualquiera de las otras dos, moviéndose éstas

* Los nombres de LAGRANGE, LAPLACE, JACOBI y en especial el de POINCARÉ están ligados a los esfuerzos para resolver el problema de los tres cuerpos. A principios de siglo, K. F. SUNDMAN trabajó extensamente en esta cuestión.

** Se puede utilizar el método de las perturbaciones para el cálculo numérico de los efectos que produce un tercer cuerpo, o incluso muchos otros cuerpos.

*** Al que históricamente se llama *planetoides*, aunque recientemente suele identificarse con un *satélite artificial*.

sobre órbitas circulares en torno a su centro de masa común. Así, pues, se supone que la masa pequeña no perturba el movimiento de las mayores. Aquí nos proponemos examinar únicamente los aspectos de estabilidad del problema restringido de los tres cuerpos; o sea, lo que deseamos es descubrir en qué puntos del campo creado por los cuerpos mayores (de masas M_1 y M_2) puede situarse el planetaide (de masa m) para que se encuentre en una posición de equilibrio.

Tal como se representa en la figura 8-11, se supone que las masas M_1 y M_2 describen órbitas circulares en torno al centro de masa O , con una velocidad angular ω . Entonces, si m ha de encontrarse en equilibrio, deberá también girar en torno a O a la velocidad angular constante ω . La masa M_1 , situada en A , ejerce una fuerza \mathbf{F}_1 sobre m , situada en $P(x, y)$, y la masa M_2 , situada en B , una fuerza \mathbf{F}_2 . Resulta así, que como m ha de estar en equilibrio respecto de M_1 y de M_2 , la fuerza centrífuga $mr\omega^2$ debe ser equilibrada por las fuerzas gravitatorias \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 ; es decir,

$$mr\omega^2 \mathbf{e}_r + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0 \quad (8.104)$$

Si hacemos $M_1 + M_2 = M$, y si M_1 y M_2 están separadas una distancia s , M_1 se encontrará a una distancia $(M_2/M)s$ del centro de masa O y M_2 a una distancia $[1 - (M_2/M)]s$ del mismo. Llamemos p al cociente M_2/M , con lo que

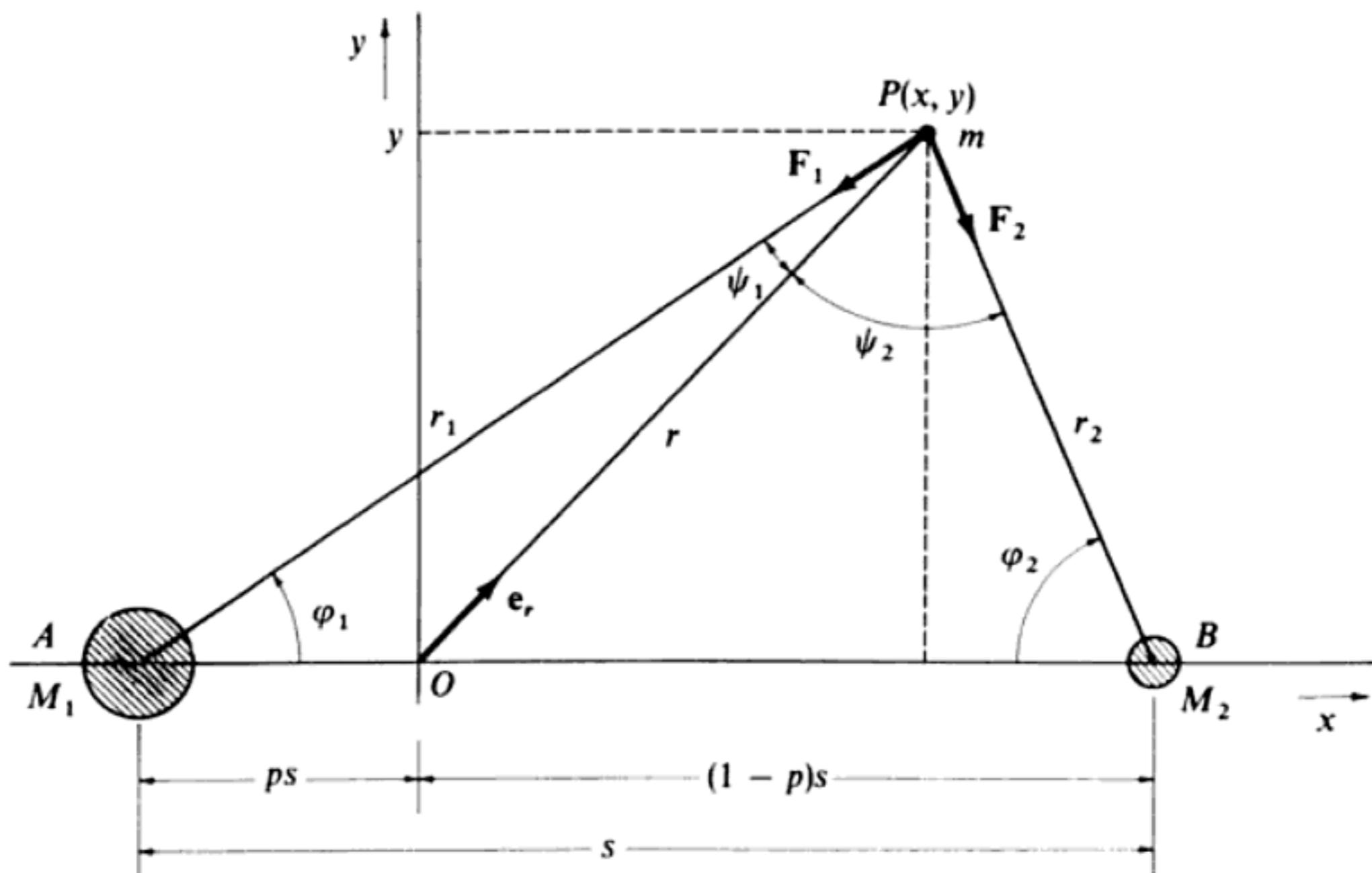


FIG. 8-11

$$\left. \begin{array}{l} \overline{OB} = (1-p)s \\ \overline{OA} = ps \end{array} \right\} \quad (8.105)$$

Entonces, los módulos de las fuerzas \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 son

$$\left. \begin{array}{l} F_1 = \frac{\gamma m M_1}{r_1^2} = \frac{\gamma m M(1-p)}{r_1^2} \\ F_2 = \frac{\gamma m M_2}{r_2^2} = \frac{\gamma m M p}{r_2^2} \end{array} \right\} \quad (8.106)$$

donde γ es la constante de gravitación. Para que m esté en equilibrio, las componentes de \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 normales a \mathbf{e}_r deben ser iguales y la suma de las componentes en la dirección de \mathbf{e}_r debe ser igual a $mr\omega^2$. Evidentemente, entonces, si m ha de estar en equilibrio, deberá hallarse en el plano de movimiento de M_1 y M_2 , ya que en otro caso habría componentes de \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 que no podrían ser contrarrestadas por la fuerza centrífuga. Consideraremos primeramente las componentes normales a \mathbf{e}_r :

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\sin \psi_2}{\sin \psi_1} \quad (8.107)$$

Aplicando el teorema del seno al triángulo OAP , tendremos

$$\frac{\sin \varphi_1}{r} = \frac{\sin \psi_1}{ps} \quad (8.108)$$

pero también

$$\sin \varphi_1 = \frac{y}{r_1} \quad (8.109)$$

Por lo tanto, combinando las igualdades 8.108 y 8.109, encontraremos

$$\sin \psi_1 = \frac{psy}{rr_1} \quad (8.110a)$$

y análogamente,

$$\sin \psi_2 = \frac{(1-p)sy}{rr_2} \quad (8.110b)$$

Si escribimos la expresión 8.107 poniendo el valor de F_1/F_2 dado por 8.106 y el de $\sin \psi_2/\sin \psi_1$ dado por 8.110, obtendremos

$$\frac{\gamma m M(1-p)/r_1^2}{\gamma m M p/r_2^2} = \frac{(1-p)sy/rr_2}{psy/rr_1}$$

y, simplificando, resulta

$$\frac{y}{r_1^3} = \frac{y}{r_2^3} \quad (8.111)$$

Tenemos, por tanto, dos soluciones posibles (finitas): (a) $r_1=r_2=\rho$ y (b) $y=0$.* En el caso (a) las tres masas forman un triángulo isósceles y en el caso (b) las tres masas están alineadas.

Examinemos primeramente la solución (a) y calculemos el valor de la distancia ρ . Para ello, debemos igualar la fuerza centrífuga a la suma de las componentes de \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 en la dirección de \mathbf{e}_r :

$$mr\omega^2 = F_1 \cos \psi_1 + F_2 \cos \psi_2 \quad (8.112)$$

Primeramente, apliquemos el teorema del coseno al triángulo OAP , obteniendo

$$\cos \psi_1 = \frac{r^2 + \rho^2 - p^2 s^2}{2r\rho} \quad (8.113a)$$

y para $\cos \psi_2$ del triángulo OBP tendremos

$$\cos \psi_2 = \frac{r^2 + \rho^2 - (1-\rho)^2 s^2}{2r\rho} \quad (8.113b)$$

A continuación, calculemos el valor de ω^2 en función de los otros parámetros del problema, cosa que puede hacerse igualando las fuerzas centrífuga y gravitatoria que actúan sobre una de las masas, por ejemplo M_1 :

$$\frac{\gamma M_1 M_2}{s^2} = M_1 p s \omega^2$$

o sea,

$$\omega^2 = \frac{\gamma M_2}{ps^2} = \frac{\gamma M}{s^3} \quad (8.114)$$

* Nótese que la solución posible $r=0$ se incluye en las soluciones $y=0$. Nótese también que $r=0$ será posición de equilibrio sólo en el caso particular $M_1=M_2$.

donde hemos hecho $p=M_2/M$. Si a la ecuación 8.112 llevamos los valores de F_1 y F_2 dados por 8.106, los de $\cos \psi_1$ y $\cos \psi_2$ dados por 8.113 y el de ω^2 dado por 8.114, encontraremos

$$\begin{aligned} mr\left(\frac{\gamma M}{s^2}\right) &= \left(\frac{\gamma m M(1-p)}{\rho^2}\right)\left(\frac{r^2 + \rho^2 - p^2 s^2}{2r\rho}\right) \\ &\quad + \left(\frac{\gamma m M p}{\rho^2}\right)\left(\frac{r^2 + \rho^2 - (1-p)^2 s^2}{2r\rho}\right) \end{aligned}$$

que, simplificada, es

$$\rho^3 = \frac{r^2 + \rho^2 - ps^2 + p^2 s^2}{2r^2} \cdot s^3 \quad (8.115)$$

Ahora, en el triángulo OAP , podemos escribir

$$r^2 = \rho^2 + p^2 s^2 - 2\rho p s \cos \varphi_1 \quad (8.116)$$

pero, también,

$$\cos \varphi_1 = \frac{x + ps}{\rho} \quad (8.117)$$

Y como r_1 y r_2 son iguales, el valor de x debe corresponder al punto medio del segmento \overline{AB} . Entonces,

$$x = \frac{s}{2} - ps \quad (8.118)$$

por lo que

$$\cos \varphi_1 = \frac{s}{2\rho} \quad (8.119)$$

y entonces

$$r^2 = \rho^2 + p^2 s^2 - ps^2 \quad (8.120)$$

Llevando esta igualdad a 8.115, resulta $\rho^3 = s^3$, de donde concluimos

$$\rho = s \quad (8.121)$$

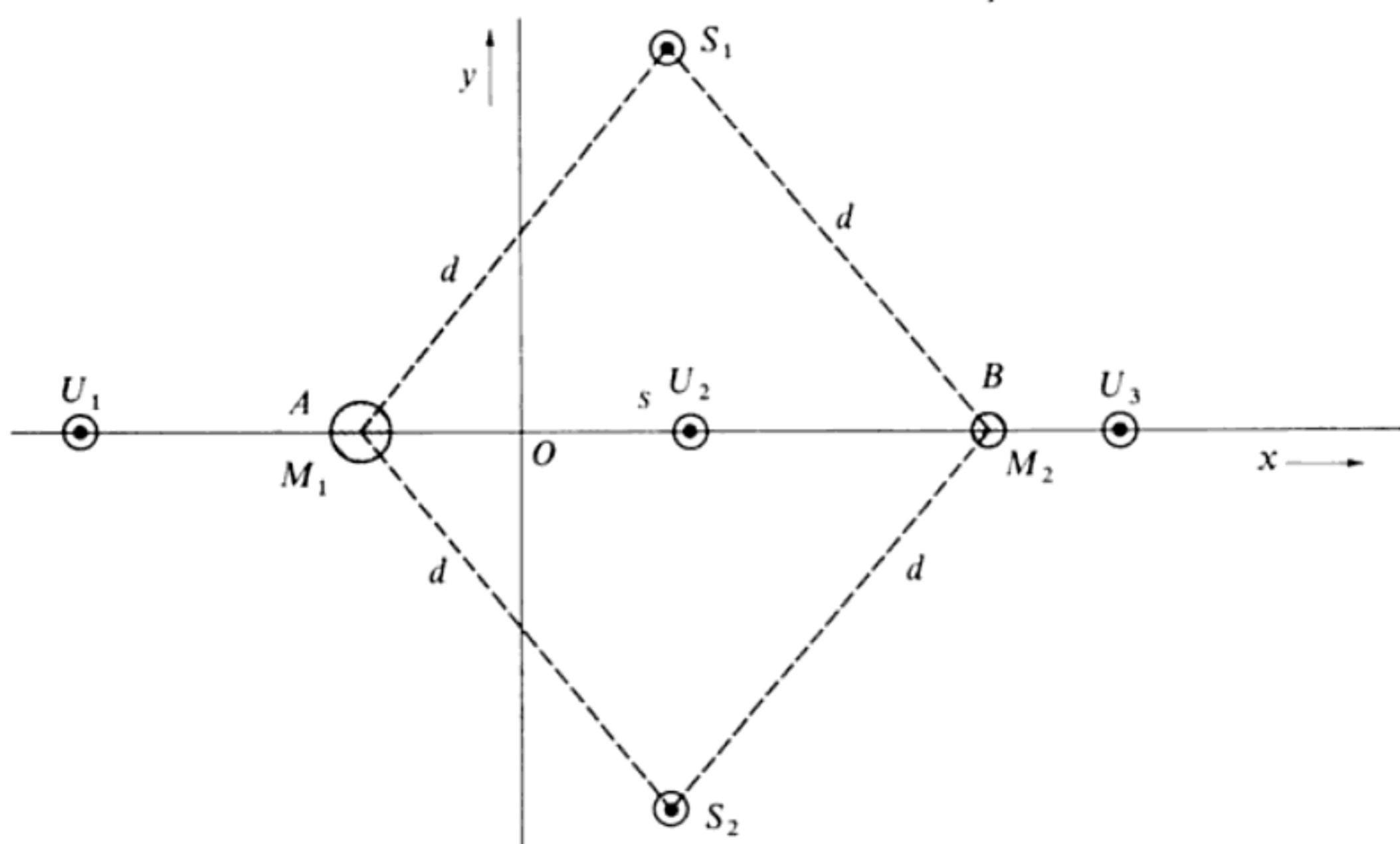


FIG. 8-12

En consecuencia, la solución (a) nos dice que habrá equilibrio cuando la masa m se sitúe en el plano de movimiento de M_1 y M_2 de forma que PAB sea un triángulo *equilátero*. Puede, además, demostrarse que éste es un punto de equilibrio *estable* para $M_2 < 0,0385 M_1$.^{*} Así, pues, habrá dos posiciones de equilibrio estable (para M_2 suficientemente pequeña), designadas por S_1 y S_2 en la figura 8-12.

Si tomamos la solución (b) tenemos $y=0$, por lo que las tres masas deberán encontrarse en el eje x . En la figura 8-13 se representan gráficamente las fuerzas radiales que actúan sobre m debidas a M_1 y M_2 y la debida a la fuerza centrífuga. En la región comprendida entre las dos masas mayores las fuerzas gravitatorias se combinan como se indica, mientras que la fuerza centrífuga aumenta linealmente con r , por lo cual está representada por una línea recta. Obsérvese que se ha representado la *opuesta* de la fuerza centrífuga, por lo que, en aquellos puntos en los cuales se corten las curvas de las fuerzas gravitatoria y centrífuga, la fuerza resultante que actúa sobre el planetoide será nula y la posición correspondiente será de equilibrio. Existen tres de estas posiciones de equilibrio, pudiendo demostrarse que son de equilibrio inestable; a ellas corresponden los puntos señalados por U_1 , U_2 y U_3 en las figuras 8-12 y 8-13.

* Tal es el caso, por ejemplo, del sistema Tierra-Luna, o del sistema Júpiter-Sol, etc. En SYMON (Sy60, págs. 500 a 509) se dan algunos detalles relativos al tema de la estabilidad, así como en distintos textos de mecánica celeste: DANBY (Da62, págs. 194 a 198), McCUSKEY (Mc63, págs. 118 a 126).

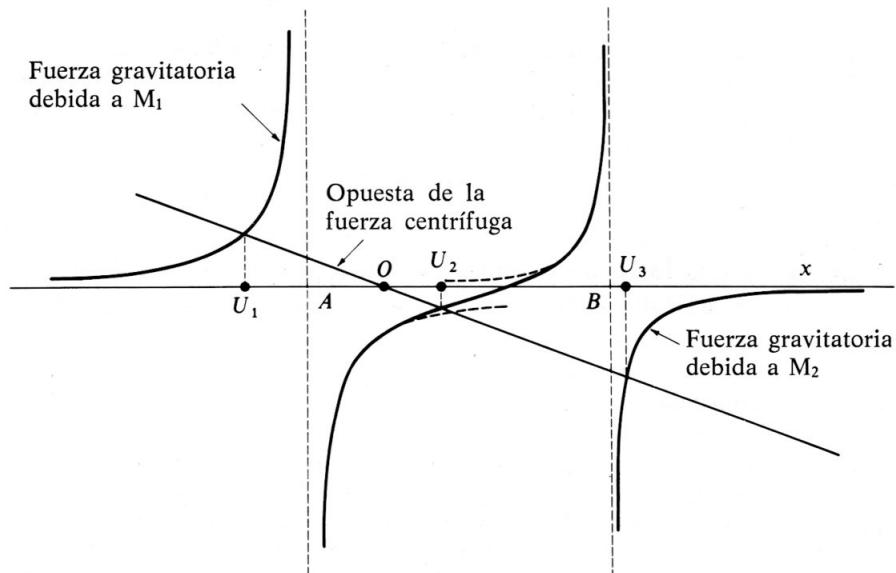


FIG. 8-13

El procedimiento operativo para despejar los valores de r correspondientes a los puntos de equilibrio inestable es inmediato, pero muy complicado ya que es preciso recurrir a invertir desarrollos en serie; por otra parte, los detalles de los resultados no aclaran muchas cosas, salvo en algunos casos particulares (véase, p.e., problema 8-30).

La situación puede resumirse así: Cuando un planetoide de masa despreciable se introduce en un sistema formado por dos masas mayores que describen órbitas circulares en torno al centro de masa de ambas, existirán *cinco* puntos de equilibrio del planetoide, todos los cuales se encuentran en el plano de movimiento de las masas mayores. Dos de estos puntos son de equilibrio *estable* (cuando M_2 sea suficientemente pequeña) y son los llamados *puntos equiláteros*. Los otros tres puntos están *alineados* con las masas mayores y están situados, respectivamente, por fuera y a uno u otro lado de las masas mayores y entre ambas;* estos últimos puntos son posiciones de equilibrio *inestable*. En los casos reales, como el del sistema Tierra-Luna, en el que las masas mayores no se mueven precisamente siguiendo órbitas circulares y existen perturbaciones debidas al Sol y a otros planetas, no se sabe si los puntos equiláteros son realmente estables.

* Estas soluciones a este caso particular del problema de los tres cuerpos fueron descubiertas por LAGRANGE en 1772; respectivamente se conocen por *masas equidistantes de Lagrange* y *masas alineadas de Lagrange*.

Resulta interesante que en el sistema solar exista un ejemplo real de la estabilidad (o, al menos, cuasi-estabilidad) de los puntos equiláteros. Es bien conocido que, entre las órbitas de Marte y Júpiter, existe un gran número de asteroides, los cuales tienden a agruparse en dos posiciones que son los puntos equiláteros del sistema Júpiter-Sol (el grupo «troyano»*). Las perturbaciones que producen otros cuerpos del sistema solar (en especial Saturno) dan por resultado alguna alteración de estos agrupamientos, si bien persiste la configuración general ya que los puntos equiláteros son posiciones de equilibrio estable o, por lo menos, les falta poco para serlo.

Referencias recomendadas

Los textos que tratan del tema de las fuerzas centrales y del movimiento planetario con distintos grados de profundidad son numerosos. A nivel medio, véanse BECKER (Be54, cap. 10), BRADBURY (Br68, cap. 9), HAUSER (Ha65, cap. 7), LINDSAY (Li61, secciones 3.6 a 3.10), McCUSKEY (Mc59, cap. 3), SLATER y FRANK (S147, cap. 3), SYMON (Sy60, cap. 3) y WANGNESS (Wa63, cap. 8).

Muchos textos de dinámica superior dan sólo estudios breves del movimiento en campos de fuerzas centrales; una excepción es el de GOLDSTEIN (Go50, cap. 3), que es muy detallado. Análisis más breves son los de CORBEN y STEHLE (Co60, secciones 36 y 37) y los de LANDAU y LIFSHITZ (La60, secciones 14 y 15). WHITTAKER (Wh37, cap. 4), como es habitual, presenta un estudio exhaustivo.

La aplicación principal de la teoría del movimiento en campos centrales es, por supuesto, la astronomía. Los textos de mecánica celeste presentan, por lo tanto, muchos detalles que no se encuentran en los libros de física corrientes. VAN DE KAMP (Ka63) ofrece un buen estudio introductorio desde un punto de vista moderno. A nivel medio, véase, por ejemplo, DANBY (Da62) o McCUSKEY (Mc63). A un nivel algo más elevado, están los análisis de BROUWER y CLEMENCE (Br61) y de SMART (Sm53). Un tratado clásico, muy matemático, es el de WINTNER (Wi41). Los problemas modernos de la astrodinámica son tratados, por ejemplo, por BAKER y MAKEMSON (Ba60).

El problema restringido de los tres cuerpos es tratado por DANBY (Da62, cap. 8), McCUSKEY (Mc63, cap. 5), SYMON (Sy60, págs. 285 a 290 y 500 a 509), WHITTAKER (Wh37, cap. 13) y WINTNER (Wi41, cap. 6).

La precesión del perihelio de Mercurio se trata en BERGMANN (Be46, págs. 212 a 218), DANBY (Da62, págs. 66 a 67) y WEBER (We61, págs. 64 a 67), así como en numerosos textos de relatividad.

Material básico de astronomía general puede encontrarse, por ejemplo, en BAKER (Ba69), BLANCO y McCUSKEY (Bl61) y McLAUGHLIN (Mc61). Una interesante na-

* Hasta 1906 no se descubrió el primero de estos asteroides. Con anterioridad a este momento, la solución de Lagrange al problema de los tres cuerpos se consideraba de interés académico solamente.

rración de la evolución de la teoría del movimiento planetario puede encontrarse en FEATHER (Fe59), cap. 7). TURNER (Tu04) esboza algunos de los descubrimientos más importantes en astronomía.

Problemas

8-1. En la sección 8.2 se demostró que el movimiento de dos cuerpos que interactúan entre sí sólo a través de fuerzas centrales puede reducirse a un problema equivalente de un solo cuerpo. Demostrar explícitamente que esta reducción es posible en caso de que los cuerpos se muevan en un campo externo gravitatorio y uniforme.

8-2. Realícese la integración de la expresión 8.29 para obtener 8.30.

8-3. Una partícula describe una órbita circular en un campo de fuerzas dado por

$$F(r) = -k/r^2$$

Demostrar que si k disminuye bruscamente a la mitad de su valor inicial, la órbita de la partícula se hace parabólica.

8-4. Calcular explícitamente la media temporal (o sea, la media en un período completo) de la energía potencial de una partícula que se mueve sobre una órbita elíptica en un campo central en el que la fuerza obedece la ley de la inversa del cuadrado de la distancia. Expresar el resultado en función de la constante de proporcionalidad de la fuerza y del semieje mayor de la elipse. Efectuar un cálculo similar para la energía cinética. Comparar los resultados y comprobar así el teorema del virial en este caso.

8-5. Dos partículas que se mueven bajo la influencia de la mutua atracción gravitatoria describen órbitas circulares una en torno de la otra con un período τ . Si repentinamente se detienen y puede caer una sobre la otra, demostrar que chocarán después de un tiempo $\tau/4\sqrt{2}$.

8-6. Dos masas que se atraen, m_1 y m_2 ($m_1+m_2=M$), están separadas una distancia r_0 y se las suelta a partir del reposo. Demostrar que cuando la distancia sea $r (< r_0)$, las velocidades serán

$$v_1 = m_2 \sqrt{\frac{2\gamma}{M} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)}; \quad v_2 = m_1 \sqrt{\frac{2\gamma}{M} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)}$$

8-7. Demuéstrese que la velocidad areolar es constante en el caso de una partícula que se mueva bajo la influencia de una fuerza atractiva dada por $F(r) = -kr$. Calcúlense las medias temporales de las energías cinética y potencial y compárense con los resultados que da el teorema del virial.

8-8. Estudiar el movimiento de una partícula *repelida* por un centro de fuerzas de acuerdo con la ley $F(r)=kr$. Demostrar que la órbita sólo puede ser hiperbólica.

8-9. Una partícula se mueve bajo la influencia de una fuerza central dada por $F(r) = -k/r^n$. Demuéstrese que $n=5$ cuando la órbita de la partícula sea circular y pase por el centro de fuerzas.

8-10. Supóngase un cometa que describe una órbita parabólica en el mismo plano que la órbita terrestre. Si la menor distancia del cometa al Sol es βr_t , donde r_t es el radio de la órbita de la Tierra (supuesta circular) y $\beta < 1$, demostrar que el tiempo que el cometa pasa en la órbita terrestre viene dado por

$$\sqrt{2(1-\beta) \cdot (1+2\beta)/3\pi} \times 1 \text{ año}$$

¿Cuántos días estará el cometa en la órbita terrestre, si se acerca al Sol hasta la distancia del perihelio de Mercurio?

8-11. Estudiar el movimiento de una partícula en un campo de fuerzas centrales que sigue la ley de proporcionalidad a la inversa del cuadrado de la distancia, en caso de que se superponga otra fuerza de módulo inversamente proporcional al cubo de la distancia entre la partícula y el centro de fuerzas. Es decir,

$$F(r) = -\frac{k}{r^2} - \frac{\lambda}{r^3}, \quad k, \lambda > 0$$

Demuéstrese que el movimiento está representado por una elipse en precesión. Considerense los casos $\lambda < l^2/\mu$, $\lambda = l^2/\mu$ y $\lambda > l^2/\mu$.

8-12. Determinar la expresión de la fuerza de un campo central que permita a una partícula describir una órbita espiral dada por $r=k\theta^2$, donde k es una constante.

8-13. Determinar la expresión de la fuerza de un campo central que permita a una partícula describir una órbita espiral logarítmica dada por $r=ke^{\alpha\theta}$, donde k y α son constantes.

8-14. Una partícula de masa unidad se desplaza desde el infinito a lo largo de una recta que, de seguir, haría que la partícula pasase a una distancia $b\sqrt{2}$ de un punto P . Si la partícula es atraída hacia P con una fuerza proporcional a k/r^5 , y si el momento cinético respecto de P es \sqrt{k}/b , demostrar que la trayectoria viene dada por

$$r = b \operatorname{ctgh}(\theta/\sqrt{2})$$

8-15. Una partícula ejecuta un movimiento elíptico (pero casi circular) en torno a un centro de fuerzas. En un punto determinado se aplica a la partícula un impulso *tangencial*, variando la velocidad de v a $v + \delta v$. Demostrar que la variación relativa resultante de los ejes mayor y menor de la órbita es el doble de la variación relativa de la velocidad y que los ejes *aumentan* si $\delta v < 0$.

8-16. Una partícula describe una órbita elíptica en un campo central inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Si el cociente entre la velocidad angular máxima de la partícula y la mínima es n , demostrar que entonces la excentricidad de la órbita es

$$\epsilon = \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}}$$

8-17. Utilizar las conclusiones de Kepler (o sea, sus leyes primera y segunda) para demostrar que la fuerza gravitatoria debe ser central y que la dependencia radial debe ser $1/r^2$. Así, pues, deducir la expresión de la fuerza gravitatoria.

8-18. Calcular los datos que faltan en la tabla 8-1.

8-19. Demostrar que el producto de las velocidades (lineales) máxima y mínima de un cuerpo que describe una órbita elíptica es $(2\pi a/\tau)^2$.

8-20. Si, por definición, η es el ángulo que forma la dirección del movimiento de un planeta (en una órbita elíptica) con la normal al vector de posición del mismo, demostrar que

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{\epsilon \operatorname{sen} \psi}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}$$

donde ψ es la anomalía excéntrica.

8-21. Para una partícula que describe una órbita circular de semieje mayor a y excentricidad ϵ , demostrar que

$$\langle (a/r)^4 \cos \theta \rangle = \epsilon/(1 - \epsilon^2)^{5/2}$$

donde los corchetes sesgados representan la media temporal en un período completo.

8-22. Considérese la familia de órbitas en un potencial central para el que la energía total es constante. Demuéstrese que si existe una órbita circular estable, el momento cinético asociado a ella es mayor que para cualquier otra órbita de la familia.

8-23. Estudiar el movimiento de una partícula que se mueve en un campo de fuerzas atractivas representado por $F(r) = -k/r^3$.* Representar algunas de las órbitas para distintos valores de la energía total. ¿Puede ser estable una órbita circular en un campo de fuerzas como éste?

8-24. Supóngase una fuerza de la forma

$$F(r) = -\frac{k}{r^2} - \frac{k'}{r^4}$$

Demostrar que si $\rho^2 k > k'$, una partícula podrá describir una órbita circular estable para $r = \rho$.

8-25. Estudiar la estabilidad de las órbitas circulares en un campo de fuerzas definido por $F(r) = -(k/r^2)\exp(-r/a)$.

8-26. Sea una partícula de masa m limitada a moverse sobre la superficie de un paraboloide de ecuación (en coordenadas cilíndricas) $r^2 = 4az$. Cuando la partícula se encuentre sometida a una fuerza gravitatoria, demostrar que la pulsación de las pequeñas oscilaciones en torno a una órbita circular de radio $\rho = \sqrt{4az_0}$ es

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{a + z_0}}$$

8-27. Consideremos el problema de la partícula que se mueve sobre una superficie cónica, como se examinó en los ejemplos 7.4 y 8.11(b). Demostrar que el potencial efectivo es

$$V(r) = \frac{l^2}{2mr^2} + mgr \cot \alpha$$

(Obsérvese que aquí r es la distancia radial en coordenadas cilíndricas, no esféricas; véase figura 7-1.) Demostrar que los puntos de inversión del movimiento pueden determinarse a partir de la solución de una ecuación de tercer grado en r . Demostrar también que sólo dos de las raíces tienen sentido físico, por lo que el movimiento se encuentra confinado entre dos planos horizontales que cortan al cono.

8-28. Puede suponerse que una órbita casi circular (o sea, $\epsilon \ll 1$) es una órbita circular que ha recibido una pequeña perturbación. Entonces, la pulsación del movimiento radial viene dada por 8.97. Considérese el caso en que la fuerza es $F(r) = -k/r^n$ (donde n es entero) y demuéstrese que el ángulo apsidal es

* Este tipo de fuerza fue estudiado exhaustivamente por Roger COTES (1682-1716), conociéndose las órbitas por el nombre de *espirales de Cotes*.

$\pi/\sqrt{3-n}$. Demostrar que, entonces, sólo resultará en general una órbita cerrada en el caso de la fuerza del oscilador armónico y en el de la fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia (si se excluyen los valores de n iguales o menores que -6).

8-29. Una partícula se mueve en una órbita casi circular dentro de un campo de fuerzas definido por $F(r)=-(k/r^2)\exp(-r/a)$. Demostrar que los ápsides se desplazan aproximadamente $\pi\rho/a$ en cada revolución, siendo ρ el radio de la órbita circular y $\rho \ll a$.

8-30. Véase la figura 8-12. Demostrar que cuando la masa M_2 es mucho más pequeña que M_1 (o sea, $p \ll 1$), los puntos U_2 y U_3 son aproximadamente simétricos respecto de M_2 y están situados a distancias de M_2 aproximadamente iguales a $s(p/3)^{\frac{1}{2}}$.

8-31. Generalizar el problema de los tres cuerpos que se mueven en un plano, tal como se trató en la sección 8.12, al caso en que las tres masas, m_1 , m_2 y m_3 , sean comparables. Demostrar que existe una solución cuando las partículas formen un triángulo equilátero de lado h y describan órbitas circulares en torno del centro de masa común con una velocidad angular ω , donde $\omega^2=\gamma M/h^3$ y $M=m_1+m_2+m_3$. (Esta solución al problema de los tres cuerpos se debe a LAPLACE.)

8-32. Definir un potencial efectivo $V(x, y)$ adecuado al problema restringido de los tres cuerpos. Representar gráficamente la función $V(x, 0)$ y demostrar que hay dos «valles» (correspondientes a las posiciones de M_1 y M_2) y tres «picos» (correspondientes a los tres puntos de equilibrio inestable). Asimismo, representar gráficamente la función $V(\frac{1}{2}s-ps, y)$ y demostrar que tiene dos «valles» (correspondientes a los dos puntos de equilibrio estable). Comparar las dos curvas y demostrar que el «pico» de la última no es punto de equilibrio. Utilizar los resultados anteriores para representar gráficamente las «curvas de nivel» equipotenciales.

Cinemática del choque de dos partículas

9.1 Introducción

Cuando dos partículas interactúan, el movimiento de una de ellas respecto de la otra está regido por el tipo de fuerzas responsable de la interacción. Esta interacción puede ser el resultado de un contacto real, como en el choque de dos bolas de billar, o bien puede tener lugar por intermedio de un campo de fuerzas. Por ejemplo, un objeto *libre* (o sea, no ligado a una órbita solar) puede ser desviado por el Sol por efecto de una interacción gravitatoria, o una partícula α puede ser desviada por el campo eléctrico de un núcleo atómico. Como pusimos de manifiesto en el capítulo anterior, conocida la expresión de la fuerza, el problema de los dos cuerpos puede resolverse por completo y, por otro lado, aunque la fuerza de interacción entre dos partículas no sea conocida, aún podrá averiguarse mucho acerca del movimiento relativo con sólo hacer uso de las consecuencias de los teoremas de conservación del ímpetu y de la energía. Entonces, si conocemos el estado inicial del sistema (o sea, si está especificada la velocidad de cada una de las partículas), las leyes de conservación nos permitirán obtener información relativa a las velocidades correspondientes al estado final.* Basándonos solamente en los teoremas de conservación, no podremos

* Con «estado inicial» nos referimos a la situación de las partículas cuando aún no están suficientemente cercanas para interactuar apreciablemente, y con «estado final» a la situación una vez que la interacción ha tenido lugar. Cuando la interacción es de contacto estas situaciones son evidentes, pero cuando la interacción se lleve a cabo a través de un campo de fuerzas habrá de tenerse en cuenta la disminución de la fuerza con la distancia al definir los estados inicial y final.

mos predecir, por ejemplo, el ángulo que formen las velocidades inicial y final de una de las partículas; para detalles de esta clase, es necesario conocer la expresión de la fuerza. En este capítulo, deduciremos aquellas relaciones que puedan obtenerse sólo con los teoremas de conservación del ímpetu y de la energía y, después, examinaremos las características del proceso de choque para cuyo conocimiento haya de disponerse de la expresión de la fuerza. Aquí limitaremos el estudio a los choques elásticos, omitiendo otros procesos más complicados, ya que, si bien aquellos procesos en los que tiene lugar absorción de energía cinética o liberación de energía en reposo son también muy importantes, todas las características esenciales de la cinemática de dos partículas quedan puestas de manifiesto adecuadamente estudiando el choque elástico. (En las referencias recomendadas encontrará el lector información satisfactoria.)

Debe notarse que las conclusiones obtenidas bajo la hipótesis de la conservación del ímpetu y de la energía son válidas (en la región de velocidades no relativistas) incluso para los sistemas cuánticos, puesto que los teoremas de conservación son aplicables tanto a estos sistemas como a los clásicos.

9.2 Choques elásticos — Sistemas de coordenadas del centro de masa y del laboratorio

En varias ocasiones anteriores se ha puesto de manifiesto que la descripción de muchos fenómenos físicos se simplifica considerablemente cuando se toma un sistema de coordenadas que esté en reposo con relación al centro de masa del sistema. Respecto del problema que vamos a tratar ahora, es decir, el choque elástico de dos partículas,^{*} la situación corriente (y a la que nosotros reduciremos nuestra atención) es aquella en que el choque tiene lugar entre una partícula móvil y otra en reposo. Si bien es más fácil describir los efectos del choque en un sistema de coordenadas respecto del cual el centro de masa esté en reposo, las mediciones reales se efectuarían en el sistema respecto del cual se mueva una de las partículas y la partícula alcanzada se encuentre inicialmente en reposo. Este último sistema se llama *sistema de coordenadas del laboratorio*. Con frecuencia nos referiremos a estos dos sistemas de coordenadas como a sistema *CM* y sistema *L*.

* Un choque es *elástico* cuando no hay variación de la energía interna de las partículas, por lo que puede aplicarse el teorema de conservación de la energía sin tener en cuenta a la primera. Obsérvese que puede generarse *calor* cuando dos cuerpos chocan inelásticamente. El calor no es más que la manifestación del estado de agitación en que se encuentran las partículas constituyentes de un cuerpo y puede considerarse que forma parte de la energía interna.

Los principios que rigen el choque elástico de dos cuerpos fueron estudiados por primera vez por el Rev. John WALLIS (1668), Sir Christopher WREN (1668) y Christian HUYGHENS (1669).

Entonces, si nuestro propósito es sacar ventaja de las simplificaciones que resultan de describir el choque en el sistema CM, será necesario que deduzcamos las ecuaciones que ligan los sistemas del centro de masa y del laboratorio.

Utilizaremos la notación siguiente:

$$\begin{aligned} m_1 &= \text{masa de la partícula móvil} \\ m_2 &= \text{masa de la partícula alcanzada} \end{aligned}$$

En general, las cantidades con acento se referirán al sistema CM:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \text{inicial} \\ \mathbf{v}_1 &= \text{final} \end{aligned} \right\} \text{velocidad de } m_1 \text{ en el sistema L}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}'_1 &= \text{inicial} \\ \mathbf{v}'_1 &= \text{final} \end{aligned} \right\} \text{velocidad de } m_1 \text{ en el sistema CM}$$

y análogamente en los casos de \mathbf{u}_2 , \mathbf{v}_2 , \mathbf{u}'_2 , y \mathbf{v}'_2 (pero $\mathbf{u}_2 = 0$).

$$\begin{aligned} T_0 &= \text{energía cinética total inicial en el sistema L} \\ T'_0 &= \text{energía cinética total inicial en el sistema CM} \\ T_1 &= \text{energía cinética final de } m_1 \text{ en el sistema L} \\ T'_1 &= \text{energía cinética final de } m_1 \text{ en el sistema CM.} \end{aligned}$$

y análogamente en los casos de T_2 y de T'_2 .

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \text{velocidad del centro de masa en el sistema L} \\ \psi &= \text{ángulo de desviación de } m_1 \text{ en el sistema L} \\ \zeta &= \text{ángulo de desviación de } m_2 \text{ en el sistema L} \\ \theta &= \text{ángulo de desviación de } m_1 \text{ y } m_2 \text{ en el sistema CM} \end{aligned}$$

En la figura 9-1 se representa la geometría de un choque elástico* tanto en el sistema de coordenadas del laboratorio como en el del centro de masa. El es-

* Se supone siempre que la dispersión es axialmente simétrica por lo que no se necesita introducir ningún ángulo acimutal. Debe observarse, no obstante, que no siempre se encuentra simetría axial en los problemas de dispersión; esto es especialmente cierto en determinados sistemas cuánticos.

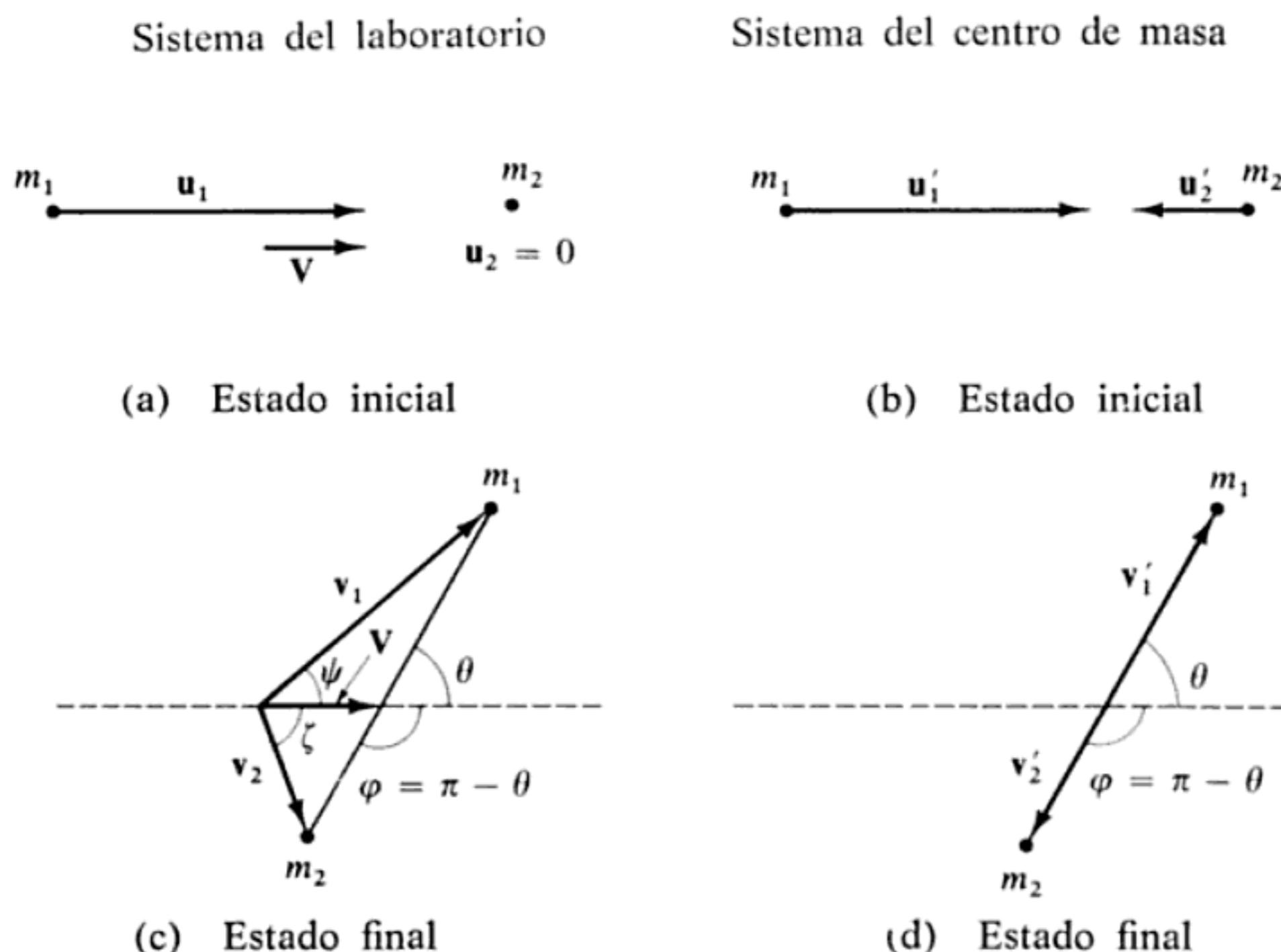


FIG. 9-1

tado final de la partícula \$m_1\$ en los sistemas L y CM puede quedar adecuadamente resumido por los diagramas de la figura 9-2, que podemos interpretar de la forma que indicamos a continuación. A la velocidad \$\mathbf{V}\$ del CM podemos sumar la velocidad CM final \$\mathbf{v}'_1\$ de la partícula dispersada y a medida que varía el valor del ángulo \$\theta\$ bajo el cual tiene lugar la dispersión, todos los vectores \$\mathbf{v}'_1\$ posi-

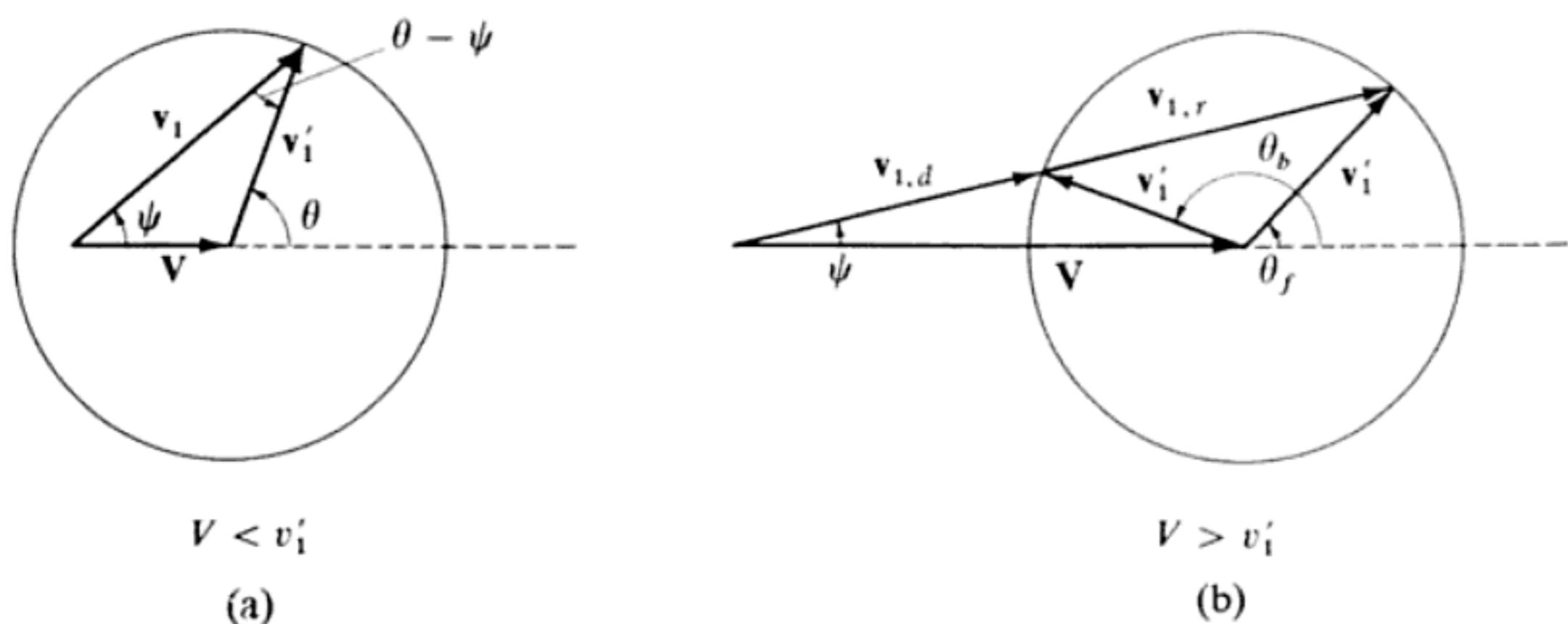


FIG. 9-2

bles se van desplazando sobre la circunferencia de radio v'_1 cuyo centro se encuentra en el extremo de \mathbf{V} . La velocidad $L v_1$ y el ángulo de dispersión $L \psi$ se obtendrán uniendo el origen de \mathbf{V} con el extremo de v'_1 .

Si $V < v'_1$, sólo existirá una relación posible entre \mathbf{V} , \mathbf{v}_1 , v'_1 y θ (véase figura 9-2a). Pero si $V > v'_1$, para cada conjunto \mathbf{V} , v'_1 existirán dos ángulos de dispersión y dos velocidades del laboratorio posibles (véase figura 9-2b): $\mathbf{v}_{1,d}$, θ_d y $\mathbf{v}_{1,r}$, θ_r , donde los subíndices d y r quieren decir *desviación* y *rebote*. Esta situación resulta del hecho de que si la velocidad CM final \mathbf{v}'_1 no adquiere un valor superior a la velocidad \mathbf{V} del centro de masa, entonces, aun cuando m_1 sea desviada hacia atrás con relación al sistema CM ($\theta > \pi/2$), la partícula aparecerá proyectada hacia adelante con relación al sistema L ($\psi < \pi/2$). Así, para $\mathbf{V} > v'_1$, a cada \mathbf{v}_1 corresponderán dos velocidades v'_1 , relativas al sistema L. Experimentalmente lo que suele medirse es ψ , no el vector velocidad \mathbf{v}_1 , por lo que un valor único de ψ puede corresponder a dos valores distintos de θ . Obsérvese, sin embargo, que cuando se dan los vectores \mathbf{V} y \mathbf{v}'_1 se obtiene siempre una combinación única de \mathbf{v}_1 y θ , pero que cuando se da \mathbf{V} y solamente la dirección de \mathbf{v}'_1 (o sea, ψ) existirá la posibilidad de dos vectores finales, $\mathbf{v}_{1,r}$ y $\mathbf{v}_{1,d}$, si $V > v'_1$.

Una vez efectuada esta descripción cualitativa del proceso de dispersión, pasemos ahora a obtener algunas de las ecuaciones que relacionan las distintas cantidades.

Según la definición 2.25 de coordenadas del centro de masa, tenemos

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = M \mathbf{R} \quad (9.1)$$

que, derivando respecto del tiempo, nos dará

$$m_1 \mathbf{u}_1 + m_2 \mathbf{u}_2 = M \mathbf{V} \quad (9.1a)$$

Pero como $\mathbf{u}_2 = 0$ y $M = m_1 + m_2$, el centro de masa deberá estar moviéndose (en el sistema L) hacia m_2 a una velocidad

$$V = \frac{m_1 u_1}{m_1 + m_2} \quad (9.2a)$$

Como inicialmente m_2 se encuentra en reposo, entonces, por el mismo razonamiento, la velocidad inicial de m_2 en el sistema CM debe ser exactamente igual a V :

$$u'_2 = V = \frac{m_1 u_1}{m_1 + m_2} \quad (9.2b)$$

Obsérvese, no obstante, que, vectorialmente $\mathbf{u}'_2 = -\mathbf{V}$, ya que los movimientos tienen sentidos contrarios.

La ventaja de emplear el sistema CM reside en que, en este sistema, el ímpetu total es cero, por lo que antes del choque las partículas se mueven exactamente una hacia la otra y, después del choque, se mueven en sentidos directamente opuestos. Cuando el choque sea elástico, como hemos establecido, las masas no sufrirán variación alguna, siendo suficiente que el ímpetu y la energía cinética se conserven para que las velocidades antes y después del choque en el sistema CM sean iguales:

$$u'_1 = v'_1; \quad u'_2 = v'_2 \quad (9.3)$$

Ahora, u_1 es la *velocidad relativa* de las dos partículas, tanto en el sistema CM como en el L, siendo $u_1 = u'_1 + u'_2$. Por tanto, tenemos para las velocidades finales en el sistema CM:

$$v'_2 = \frac{m_1 u_1}{m_1 + m_2} \quad (9.4a)$$

$$v'_1 = u_1 - u'_2 = \frac{m_2 u_1}{m_1 + m_2} \quad (9.4b)$$

En la figura 9-2a, tenemos

$$v'_1 \operatorname{sen} \theta = v_1 \operatorname{sen} \psi \quad (9.5a)$$

y

$$v'_1 \cos \theta + V = v_1 \cos \psi \quad (9.5b)$$

y dividiendo 9.5a por 9.5b

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{v'_1 \operatorname{sen} \theta}{v'_1 \cos \theta + V} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta + (V/v'_1)} \quad (9.6)$$

Según 9.2a y 9.4b, V/v'_1 viene dado por

$$\frac{V}{v'_1} = \frac{m_1 u_1 / (m_1 + m_2)}{m_2 u_1 / (m_1 + m_2)} = \frac{m_1}{m_2} \quad (9.7)$$

Vemos, pues, que es el cociente m_1/m_2 quien determina si es la figura 9-2a o la 9-2b la que describe el proceso de dispersión:

$$\text{Fig. 9-2a: } V < v'_1, \quad m_1 < m_2$$

$$\text{Fig. 9-2b: } V > v'_1, \quad m_1 > m_2$$

Al combinar las igualdades 9.6 y 9.7 escribiendo

$$\boxed{\tan \psi = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + (m_1/m_2)}} \quad (9.8)$$

vemos que, cuando $m_1 \ll m_2$, los ángulos de dispersión en los sistemas L y CM serán aproximadamente iguales; es decir, la partícula m_2 no resulta más que ligeramente afectada por el choque con m_1 , actuando esencialmente como centro de dispersión fijo. Entonces,

$$\boxed{\psi \cong \theta, \quad m_1 \ll m_2} \quad (9.9a)$$

Por otra parte, si $m_1 = m_2$, tendremos

$$\tan \psi = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1} = \tan \frac{\theta}{2}$$

de manera que

$$\boxed{\psi = \frac{\theta}{2}, \quad m_1 = m_2} \quad (9.9b)$$

resultando que el ángulo de dispersión en el sistema L es la mitad que en el sistema CM. Como el valor máximo de θ es 180° , las expresiones 9.9b nos indican que, en el caso de que $m_1 = m_2$, no puede haber dispersión en el sistema L para ángulos superiores a 90° .

Pasemos ahora a la figura 9-1c y construyamos el diagrama equivalente al de la figura 9-2a para la partícula de retroceso m_2 . La situación correspondiente se representa en la figura 9-3, de donde resulta

$$v_2 \sin \zeta = v'_2 \sin \theta \quad (9.10a)$$

$$v_2 \cos \zeta = V - v'_2 \cos \theta \quad (9.10b)$$

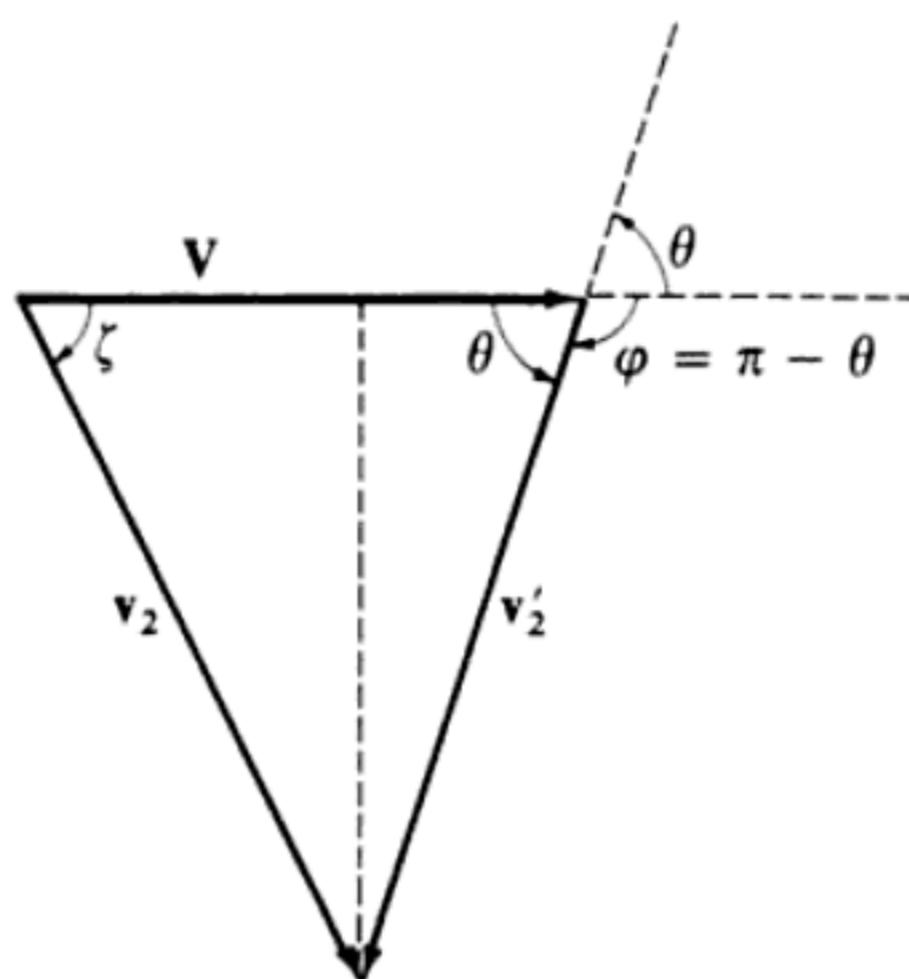


FIG. 9-3

Dividiendo 9.10a por 9.10b, tendremos

$$\operatorname{tg} \zeta = \frac{v'_2 \operatorname{sen} \theta}{V - v'_2 \cos \theta} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{(V/v'_2) - \cos \theta}$$

Pero, según 9.2b y 9.4a, V y v'_2 son iguales; en consecuencia,

$$\operatorname{tg} \zeta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{1 - \cos \theta} = \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \quad (9.11)$$

que podemos escribir

$$\operatorname{tg} \zeta = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right)$$

y, entonces,

$$2\zeta = \pi - \theta = \varphi \quad (9.12)$$

Cuando las partículas eran de masas iguales, $m_1 = m_2$, teníamos $\theta = 2\psi$. Combinando esto con 9.12, tendremos

$\zeta + \psi = \frac{\pi}{2}, \quad m_1 = m_2$

(9.13)

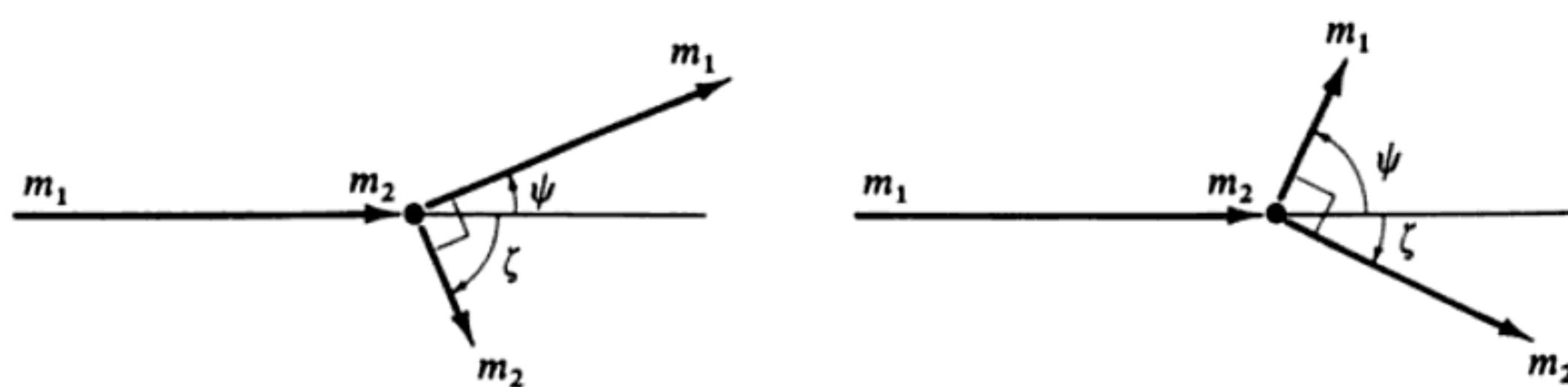


FIG. 9-4

O sea, la dispersión de partículas de masas iguales origina siempre un estado final en el cual las velocidades de las partículas serán perpendiculares entre sí cuando una de ellas se encuentre inicialmente en reposo* (véase figura 9-4).

Si, con relación a la figura 9-2b, nos preguntamos cuál es el valor máximo que puede alcanzar ψ en el caso $V > v'_1$, tendremos la situación que se representa en la figura 9-5. Evidentemente, el ángulo que forman v'_1 y v_1 es 90° , por lo cual

$$\operatorname{sen} \psi_{\max} = \frac{v'_1}{V} = \frac{m_2}{m_1} \quad (9.14)$$

de donde

$$\psi_{\max} = \operatorname{arc sen} (m_2/m_1) \quad (9.15)$$

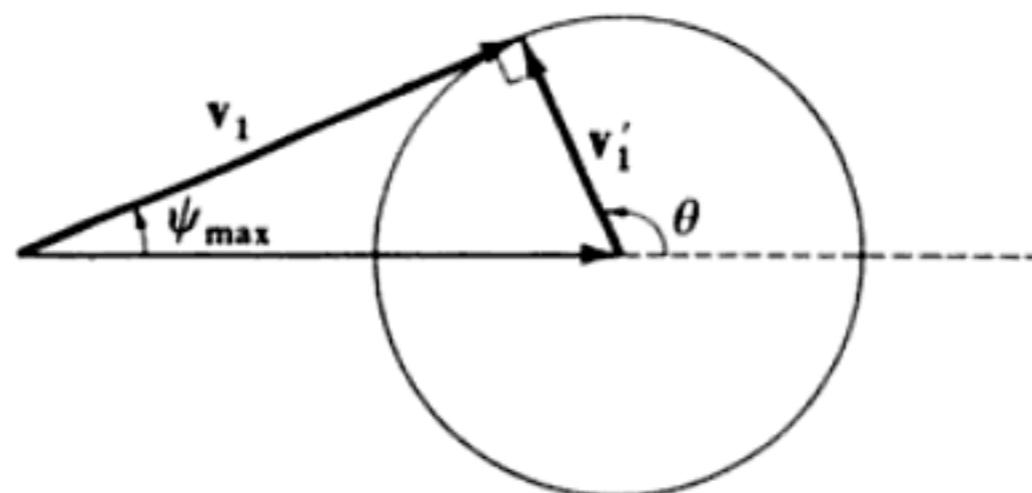


FIG. 9-5

* Esta consecuencia sólo es válida fuera de los dominios de la relatividad; la igualdad 10.76 nos da la expresión relativista que sirve para este caso.

9.3 Cinemática de los choques elásticos

Las relaciones relativas a las energías de las partículas pueden obtenerse como sigue. Primero, tenemos simplemente,

$$T_0 = \frac{1}{2}m_1 u_1^2 \quad (9.16a)$$

y, en el sistema CM,

$$T'_0 = \frac{1}{2}(m_1 u'_1{}^2 + m_2 u'_2{}^2)$$

que, haciendo uso de 9.4a y 9.4b, se transforma en

$$T'_0 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} u_1^2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} T_0 \quad (9.16b)$$

resultado que pone de manifiesto que la energía cinética inicial T'_0 en el sistema CM es siempre una fracción $m_2/(m_1+m_2) < 1$ de la energía inicial en el sistema L. Para las energías CM finales, encontramos

$$T'_1 = \frac{1}{2}m_1 v'_1{}^2 = \frac{1}{2}m_1 \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 u_1^2 = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 T_0 \quad (9.17)$$

y

$$T'_2 = \frac{1}{2}m_2 v'_2{}^2 = \frac{1}{2}m_2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 u_1^2 = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} T_0 \quad (9.18)$$

Para obtener T_1 en función de T_0 , escribamos

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{\frac{1}{2}m_1 v_1^2}{\frac{1}{2}m_1 u_1^2} = \frac{v_1^2}{u_1^2} \quad (9.19)$$

Si en la figura 9-2a utilizamos el teorema del coseno, podemos escribir

$$v_1^2 = v'_1{}^2 + V^2 - 2v_1 V \cos \psi$$

o sea,

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{v_1^2}{u_1^2} = \frac{v'_1{}^2}{u_1^2} - \frac{V^2}{u_1^2} + 2 \frac{v_1 V}{u_1^2} \cos \psi \quad (9.20)$$

De las definiciones anteriores, tenemos

$$\frac{v'_1}{u_1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{y} \quad \frac{V}{u_1} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad (9.21)$$

cuyos cuadrados nos dan las expresiones que necesitamos del primero y segundo término en el segundo miembro de 9.20. Para calcular el tercer término escribamos, utilizando la igualdad 9.5a,

$$2 \frac{v_1 V}{u^2} \cos \psi = 2 \left(v'_1 \frac{\sin \theta}{\sin \psi} \right) \cdot \frac{V}{u_1^2} \cos \psi \quad (9.22)$$

La cantidad $v'_1 V / u_1^2$ puede obtenerse multiplicando las dos igualdades 9.21 y, como de 9.8 tenemos,

$$\frac{\sin \theta \cos \psi}{\sin \psi} = \frac{\sin \theta}{\operatorname{tg} \psi} = \cos \theta + \frac{m_1}{m_2}$$

resulta

$$2 \frac{v_1 V}{u_1^2} \cos \psi = \frac{2m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \left(\cos \theta + \frac{m_1}{m_2} \right) \quad (9.23)$$

Llevando ahora 9.21 y 9.23 a 9.20, se obtiene

$$\frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 + \frac{2m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \left(\cos \theta + \frac{m_1}{m_2} \right)$$

expresión que, simplificada, queda

$$\frac{T_1}{T_0} = 1 - \frac{2m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} (1 - \cos \theta) \quad (9.24a)$$

Análogamente, podemos obtener también el cociente T_1/T_0 en función del ángulo ψ de dispersión en el sistema L:

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \left[\cos \psi \pm \sqrt{\left(\frac{m_2}{m_1} \right)^2 - \sin^2 \psi} \right]^2 \quad (9.24b)$$

donde habrá de tomarse el signo + en el radical a menos que $m_1 > m_2$, en cuyo caso se obtienen dos valores y 9.15 especifica cuál es el valor máximo que puede tomar ψ .

La energía en el sistema L de la partícula de retroceso m_2 puede calcularse de

$$\frac{T_2}{T_0} = 1 - \frac{T_1}{T_0} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cos^2 \zeta, \quad \zeta \leq \pi/2 \quad (9.25)$$

Si $m_1 = m_2$, tenemos la relación sencilla

$$\boxed{\frac{T_1}{T_0} = \cos^2 \psi, \quad m_1 = m_2} \quad (9.26a)$$

con la restricción de que $\psi \leq 90^\circ$, tal como hicimos observar a continuación de 9.9b. Asimismo,

$$\boxed{\frac{T_2}{T_0} = \sin^2 \psi, \quad m_1 = m_2} \quad (9.26b)$$

Otras relaciones son

$$\sin \zeta = \sqrt{\frac{m_1 T_1}{m_2 T_2}} \sin \psi \quad (9.27)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\sin 2\zeta}{(m_1/m_2) - \cos 2\zeta} \quad (9.28)$$

$$\sin \varphi = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \sin \psi \quad (9.29)$$

Como ejemplo de aplicación de las relaciones cinemáticas que acabamos de deducir, consideremos la situación siguiente. Supongamos un haz de proyectiles, todos de masa m_1 y energía T_0 , que se dirige hacia un blanco compuesto por un grupo de partículas cuyas masas m_2 pudieran no ser todas iguales. Algunas de las partículas incidentes interactúan con las partículas del blanco y son dispersadas. Las partículas incidentes se mueven todas en la misma dirección dentro de un haz de sección recta pequeña y se supone que las partículas del blanco se agrupan en el espacio de forma que las partículas dispersadas proceden de

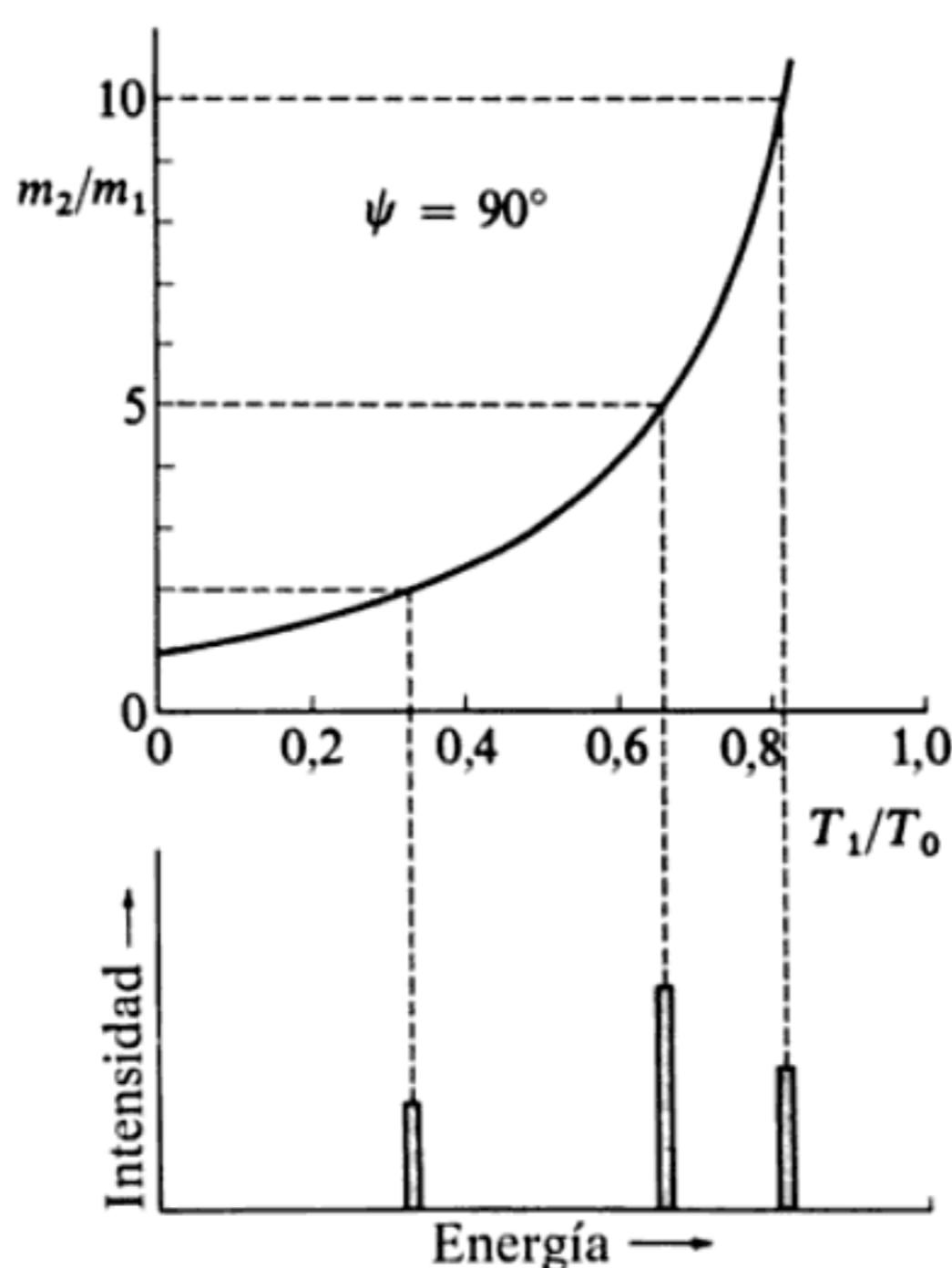


FIG. 9-6

una región muy reducida. Si colocamos un detector a, pongamos por caso, 90° del haz incidente y medimos con el mismo las energías de las partículas dispersadas, podremos disponer los resultados como se hace en la parte inferior de la figura 9-6. Este gráfico constituye un *histograma* en el que se representa el número de partículas detectadas con una energía que cae dentro de ΔT para un valor T de la misma. En este histograma se representan los tres grupos de energías que se observaron en las partículas dispersadas detectadas para $\psi = 90^\circ$. En la parte superior de la figura se representa una curva que relaciona la energía de las partículas dispersadas T_1 , con relación a T_0 , como función del cociente de las masas m_2/m_1 (9.24b). Esta curva se puede utilizar para determinar la masa m_2 de la partícula que provocó la desviación de una de las partículas incidentes, haciéndola estar comprendida en uno de los tres grupos de energías. Así, el grupo de energía $T_1 \approx 0.8T_0$ resulta de la desviación producida por las partículas del blanco de masa $m_2 = 10m_1$ y los otros dos grupos proceden de las masas blanco de masas $5m_1$ y $2m_1$.

La medida de las energías de las partículas dispersadas constituye, por tanto, un método de *análisis cualitativo* del material del blanco. Este procedimiento resulta muy útil en la práctica cuando el haz incidente se compone de partículas (protón, por ejemplo) que han sido dotadas de altas velocidades en algún tipo

de acelerador y, cuando el detector sea capaz de hacer medidas de precisión de la energía, proporcionará información exacta acerca de la composición del blanco. (Cuando se conozcan las secciones eficaces podrán también hacerse *análisis cuantitativos* a partir de las intensidades de los distintos grupos; véase la sección siguiente.)

9.4 Secciones eficaces

En las secciones precedentes dedujimos distintas relaciones que ligan el estado inicial de la partícula incidente con los estados finales de ésta y de la partícula alcanzada. En los cálculos llevados a cabo, únicamente intervinieron relaciones cinemáticas; es decir, no se intentó la *predicción* de los ángulos de dispersión o de las velocidades finales, obteniéndose sólo las relaciones *que ligan* estas cantidades. Ahora vamos a examinar más de cerca el choque de partículas y a estudiar la dispersión cuando suceda que la interacción tenga lugar por mediación de un campo de fuerzas conocido. Sea la situación esquematizada en la figura 9-7, que representa un choque referido al sistema del laboratorio cuando entre m_1 y m_2 exista una fuerza repulsiva. La partícula m_1 se acerca a las proximidades de m_2 de tal forma que, si entre ambas no actuase fuerza alguna, m_1 pasaría a una distancia mínima b de m_2 , llamada *parámetro de impacto*. Si u_1 es la velocidad de m_1 , evidentemente el parámetro de impacto b determinará el momento cinético l de m_1 respecto de m_2 :

$$l = m_1 u_1 b \quad (9.30)$$

donde, utilizando la igualdad 9.16, podemos expresar u_1 en función de la energía de la partícula incidente T_0

$$l = b \sqrt{2m_1 T_0} \quad (9.31)$$

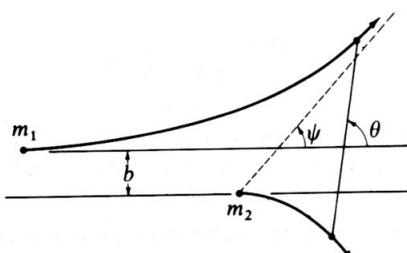


FIG. 9-7

Es evidente que, dada una energía T_0 , el momento cinético y, a partir de él, el ángulo de dispersión θ (o ψ) quedarán únicamente determinados* por el parámetro de impacto b cuando se conozca la expresión de la fuerza.

Examinemos ahora la distribución de los ángulos de dispersión que resultaría en choques de distintos parámetros de impacto. Para ello, supongamos un haz estrecho de partículas, cada una de las cuales tenga una masa m_1 y una energía T_0 , y que dirigimos hacia una pequeña región del espacio que contenga un grupo de partículas, de masa m_2 cada una, en reposo (respecto del sistema del laboratorio). La *intensidad I* (o *densidad de flujo*) del haz incidente se define como el número de partículas que atraviesan por unidad de tiempo una superficie unidad normal a la dirección del haz. Si suponemos que la fuerza que se ejerce entre m_1 y m_2 disminuye con la distancia con suficiente rapidez, ocurrirá que, después de un contacto, la trayectoria de una partícula dispersada tenderá asintóticamente hacia una recta que representa la dirección final del movimiento y que forma un ángulo θ con la dirección inicial del mismo. Definamos ahora una *sección eficaz elemental de dispersión*, $\sigma(\theta)$, respecto del sistema CM, referida a la dispersión dentro de un ángulo sólido $d\Omega'$ para un ángulo CM dado θ :

$$\sigma(\theta) = \frac{\left(\begin{array}{c} \text{Número de interacciones por partículas del} \\ \text{blanco que producen la dispersión dentro} \\ \text{de } d\Omega' \text{ para el ángulo } \theta \end{array} \right)}{\text{Número de partículas incidentes por unidad} \\ \text{de superficie}} \quad (9.32)$$

Si dN es el número de partículas que caen dentro de $d\Omega'$ por unidad de tiempo, tendremos

$$\sigma(\theta) d\Omega' = \frac{dN}{I} \quad (9.33a)$$

que, de otra forma, podremos escribir también

$$\sigma(\theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{1}{I} \frac{dN}{d\Omega'} \quad (9.33b)$$

(El hecho de que $\sigma(\theta)$ tenga dimensiones de *superficie* da origen al término «sección eficaz».) Si la dispersión posee simetría axial (como sería el caso de fuerzas

* Evidentemente, en la dispersión de partículas atómicas y nucleares, no nos es posible ni elegir ni medir directamente el parámetro de impacto. Por lo tanto, en estas situaciones, nos vemos reducidos a hablar en términos de la *probabilidad* de dispersión según distintos ángulos θ .

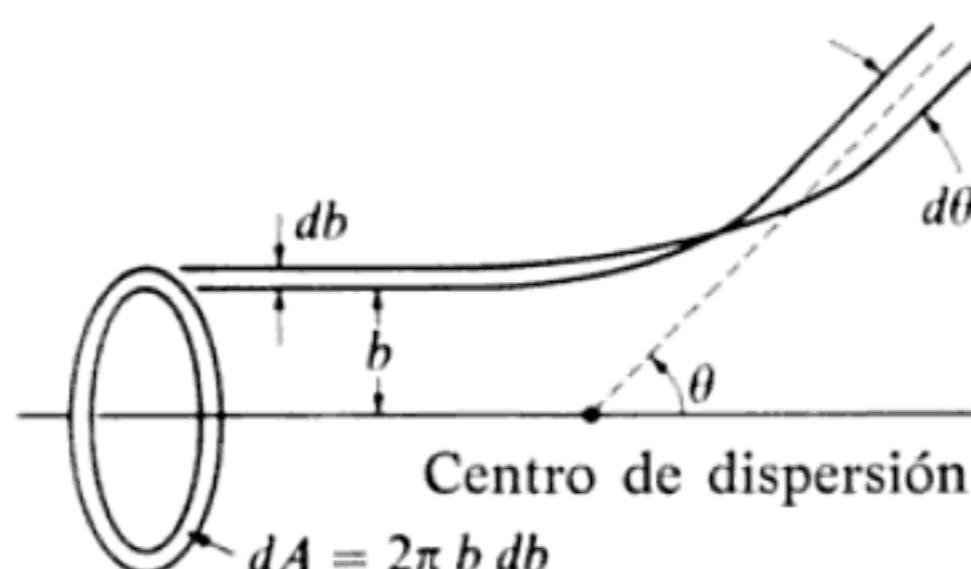


FIG. 9-8

centrales), podremos integrar inmediatamente sobre el ángulo acimutal, lo que dará 2π y el elemento de ángulo sólido $d\Omega'$ vendrá dado por

$$d\Omega' = 2\pi \operatorname{sen} \theta d\theta \quad (9.34)$$

Si, por el momento, volvemos al problema equivalente de un solo cuerpo, tal como lo estudiamos en el capítulo anterior, podremos suponer que tiene lugar la dispersión de una partícula de masa μ por un centro de fuerzas. Entonces, la figura 9-8 muestra que el número de partículas cuyos parámetros de impacto caen dentro de db para una distancia b debe corresponder al número de partículas dispersadas dentro de $d\theta$ para un ángulo θ . Por lo tanto,

$$I \cdot 2\pi b db = -I \cdot \sigma(\theta) \cdot 2\pi \operatorname{sen} \theta d\theta \quad (9.35)$$

donde $db/d\theta$ es negativo, ya que suponemos que la fuerza varía de tal forma que el valor de la desviación angular disminuye (monótonamente) al aumentar el parámetro de impacto. De aquí,

$$\sigma(\theta) = \frac{b}{\operatorname{sen} \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| \quad (9.35a)$$

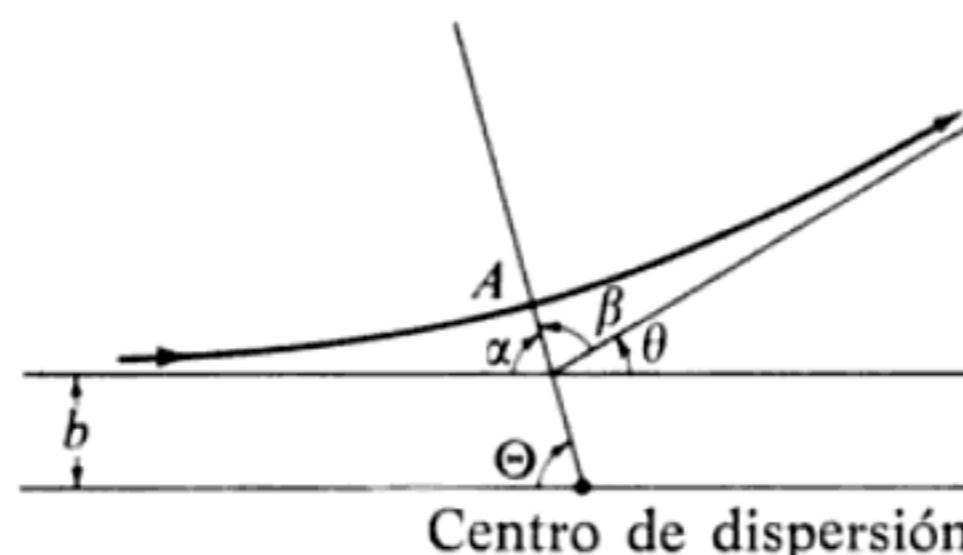


FIG. 9-9

Mediante la figura 9-9 podemos obtener la relación entre el parámetro de impacto b y el ángulo de dispersión θ . En el capítulo anterior, encontramos (8.22) que la variación del ángulo de posición formado por los puntos más lejanos (o más cercanos) y el centro de fuerzas es el doble de

$$\Delta\Theta = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{(l/r^2) dr}{\sqrt{2\mu[E - U - (l^2/2\mu r^2)]}} \quad (9.36)$$

Entonces, como la trayectoria de una partícula en un campo de fuerzas centrales es simétrica respecto del punto de ésta más próximo al centro de fuerzas (punto A de la figura 9-9) los ángulos α y β serán iguales e iguales a Θ . Entonces,

$$\theta = \pi - 2\Theta \quad (9.37)$$

En el caso en que $r_{\max} = \infty$, el ángulo Θ vendrá dado por

$$\Theta = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{(b/r^2) dr}{\sqrt{1 - (b^2/r^2) - (U/T'_0)}} \quad (9.38)$$

donde se ha utilizado la expresión 9.31 que corresponde al problema equivalente de un cuerpo; o sea,

$$l = b\sqrt{2\mu T'_0}$$

y donde, como en 9.16b, $T'_0 = \frac{1}{2}\mu u_1^2$. Asimismo, hemos hecho $E = T'_0$, ya que la energía total E debe ser igual a la energía cinética T'_0 en $r = \infty$, donde $U = 0$. Debemos recordar que el valor de r_{\min} es una raíz del radical del denominador de 9.36 o 9.38; es decir, r_{\min} es un punto de inversión del movimiento y corresponde a la distancia de mayor aproximación de la partícula al centro de fuerzas.

Así, pues, las igualdades 9.37 y 9.38 nos dan la dependencia del ángulo de dispersión θ con el parámetro de impacto b . Conocido $b = b(\theta)$ para un potencial $U(r)$ y un valor de T'_0 dados, la sección eficaz de dispersión podrá calcularse mediante 9.35a. Por este procedimiento llegaremos, desde luego, a la sección eficaz de dispersión en el sistema CM, ya que hemos considerado a m_2 como centro de fuerzas fijo. Si $m_2 \gg m_1$, la sección eficaz que obtengamos así será muy parecida a la sección eficaz en el sistema L; ahora bien, cuando m_1 no pueda ser considerada despreciable con relación a m_2 , deberán efectuarse las transformaciones de ángulo sólido pertinentes. Obtengamos las relaciones generales.

Como el número de partículas dispersadas por unidad de ángulo sólido debe ser el mismo en el sistema L que en el CM, tendremos

$$\begin{aligned}\sigma(\theta) d\Omega' &= \sigma(\psi) d\Omega \\ \sigma(\theta) \cdot 2\pi \sin \theta d\theta &= \sigma(\psi) \cdot 2\pi \sin \psi d\psi\end{aligned}\quad (9.39)$$

donde θ y ψ representan el *mismo* ángulo de dispersión medido, respectivamente, en el sistema CM y en el L y $d\Omega$ y $d\Omega'$ representan el mismo elemento de ángulo sólido medido, respectivamente, en el sistema CM y en el L. Por tanto, $\sigma(\theta)$ y $\sigma(\psi)$ son las secciones eficaces elementales de las dispersiones en los sistemas CM y L, respectivamente. Entonces,

$$\sigma(\psi) = \sigma(\theta) \cdot \frac{\sin \theta d\theta}{\sin \psi d\psi} \quad (9.39a)$$

Para calcular la derivada $d\theta/d\psi$ podemos aplicar el teorema del seno en la figura 9-2a

$$\frac{\sin(\theta - \psi)}{\sin \psi} = \frac{m_1}{m_2} \equiv x \quad (9.40)$$

que, derivada, es

$$\frac{d\theta}{d\psi} = \frac{\sin(\theta - \psi) \cos \psi}{\cos(\theta - \psi) \sin \psi} + 1$$

Desarrollando $\sin(\theta - \psi)$ y simplificando, tendremos

$$\frac{d\theta}{d\psi} = \frac{\sin \theta}{\cos(\theta - \psi) \sin \psi}$$

de forma que

$$\sigma(\psi) = \sigma(\theta) \cdot \frac{\sin^2 \theta}{\cos(\theta - \psi) \sin^2 \psi} \quad (9.41)$$

Si, en ambos miembros de 9.40, multiplicamos por $\cos \psi$ y después sumamos $\cos(\theta - \psi)$, tendremos

$$\frac{\sin(\theta - \psi) \cos \psi}{\sin \psi} + \cos(\theta - \psi) = x \cos \psi + \cos(\theta - \psi)$$

Al desarrollar $\sin(\theta - \psi)$ y $\cos(\theta - \psi)$ en el primer miembro, se obtiene

$$\frac{\sin \theta}{\sin \psi} = x \cos \psi + \cos(\theta - \psi)$$

y sustituyendo en 9.41,

$$\sigma(\psi) = \sigma(\theta) \cdot \frac{[x \cos \psi + \cos(\theta - \psi)]^2}{\cos(\theta - \psi)}, \quad (x < 1) \quad (9.42)$$

Asimismo, de 9.40 tenemos

$$\cos(\theta - \psi) = \sqrt{1 - x^2 \sin^2 \psi}$$

y, por tanto,

$$\boxed{\sigma(\psi) = \sigma(\theta) \cdot \frac{[x \cos \psi + \sqrt{1 - x^2 \sin^2 \psi}]^2}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \psi}}} \quad (9.43)$$

La igualdad 9.40 puede utilizarse para escribir

$$\boxed{\theta = \arcsin(x \sin \psi) + \psi} \quad (9.44)$$

Por lo tanto, las fórmulas 9.43 y 9.44 determinan por completo las secciones eficaces en función del ángulo ψ .* Evidentemente, en el caso general (o sea, para un valor de x cualquiera) el cálculo de $\sigma(\psi)$ es complicado; no obstante, hay tablas que permiten un cálculo relativamente rápido en cada caso particular.**

La transformación que representan las expresiones 9.43 y 9.44 toma una forma sencilla en dos ocasiones. En el caso $x = m_1/m_2 = 1$, es $\theta = 2\psi$, según 9.9b, transformándose 9.43 en

$$\sigma(\psi) = \sigma(\theta)|_{\theta=2\psi} \cdot 4 \cos \psi, \quad m_1 = m_2 \quad (9.45a)$$

y en el caso $m_1 \ll m_2$ es $x \approx 0$ y $\theta \approx \psi$, de forma que

$$\sigma(\psi) \approx \sigma(\theta)|_{\theta=\psi}, \quad m_1 \ll m_2 \quad (9.45b)$$

* Debemos hacer notar que las ecuaciones no se aplican sólo a los choques elásticos, sino también a los inelásticos (en los cuales la energía potencial interna de una de las partículas, o de las dos, se altera como consecuencia de la interacción) si escribimos el parámetro x en la forma V/v'_1 en lugar de m_1/m_2 (cfr. 9.7). Obsérvese que las ecuaciones precedentes se refieren únicamente al caso corriente $x < 1$.

** Véanse, por ejemplo, las tablas de MARION *et al.* (Ma59).

9.5 Fórmula de la dispersión de Rutherford*

Uno de los problemas más importantes a los que resulta aplicable la formulación desarrollada en la sección anterior es el de la dispersión de partículas cargadas en un campo electrostático o culombiano. En este caso, el potencial es

$$U(r) = \frac{k}{r} \quad (9.46)$$

donde $k = q_1 q_2$, siendo q_1 y q_2 las cargas de cada una de las partículas (k puede ser positivo o negativo, según que las cargas sean o no del mismo signo; $k > 0$ corresponde a una fuerza repulsiva y $k < 0$ a una fuerza atractiva). Entonces, la expresión 9.38 queda

$$\Theta = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{(b/r) dr}{\sqrt{r^2 - (k/T'_0)r - b^2}} \quad (9.47)$$

que puede integrarse, dando (cfr. integración de 8.29):

$$\cos \Theta = \frac{(\kappa/b)}{\sqrt{1 + (\kappa/b)^2}} \quad (9.48)$$

donde

$$\kappa \equiv \frac{k}{2T'_0} \quad (9.49)$$

La expresión 9.48 puede escribirse de nuevo

$$b^2 = \kappa^2 \operatorname{tg}^2 \Theta \quad (9.50)$$

pero, según 9.37, es $\Theta = \pi/2 - \theta/2$, por lo cual

$$b = \kappa \operatorname{ctg}(\theta/2) \quad (9.51)$$

y, por tanto,

$$\frac{db}{d\theta} = -\frac{\kappa}{2} \frac{1}{\operatorname{sen}^2(\theta/2)} \quad (9.52)$$

* E. RUTHERFORD, *Phil. Mag.* **21**, 669 (1911).

Con esto, la ecuación 9.35 se transforma en

$$\sigma(\theta) = \frac{\kappa^2}{2} \cdot \frac{\operatorname{ctg}(\theta/2)}{\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}^2(\theta/2)}$$

donde, al ser

$$\operatorname{sen} \theta = 2 \operatorname{sen}(\theta/2) \cos(\theta/2)$$

resulta

$$\sigma(\theta) = \frac{\kappa^2}{4} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}^4(\theta/2)}$$

o sea,

$$\boxed{\sigma(\theta) = \frac{k^2}{(4T'_0)^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}^4(\theta/2)}} \quad (9.53)$$

que es la fórmula de la dispersión de Rutherford* que pone de manifiesto la dependencia de la sección eficaz de dispersión respecto del sistema CM con la inversa de la cuarta potencia de $\operatorname{sen}(\theta/2)$. Obsérvese que $\sigma(\theta)$ es independiente del signo de k , por lo cual la forma en que se distribuye la dispersión será la misma para una fuerza atractiva que para una repulsiva. Cabe mencionar también que las conclusiones relativas a la dispersión en un campo electrostático deducidas a través de la mecánica cuántica son las mismas que las deducidas a través de un razonamiento clásico,** lo que constituye una circunstanciaafortunada pues, de no ser así, el desacuerdo entre la teoría clásica y la experimentación en la etapa temprana de la física nuclear habría retrasado seriamente el progreso de la misma.

Cuando $m_1 = m_2$, la expresión 9.16b nos dice que $T'_0 = \frac{1}{2} T_0$, de manera que

$$\sigma(\theta) = \frac{k^2}{4T_0^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}^4(\theta/2)}, \quad m_1 = m_2 \quad (9.54)$$

* Esta forma de la ley de dispersión fue comprobada para la interacción de partículas α con núcleos pesados por los experimentos de H. GEIGER y E. MARSDEN, *Phil. Mag.* **25**, 605 1913.

** N. BOHR demostró que esta igualdad de resultados cabe esperarlo por ser la fuerza del tipo $1/r^2$; no sucede lo mismo si la fuerza es de otra forma.

O de 9.45 a

$$\sigma(\psi) = \frac{k^2}{T_0^2} \frac{\cos \psi}{\sin^4 \psi}, \quad m_1 = m_2 \quad (9.55)$$

9.6 Sección eficaz total

Todo lo tratado precedentemente se aplica al cálculo de las secciones eficaces de dispersión *elementales*. Cuando se deseé conocer la probabilidad de que tenga lugar una interacción cualquiera de cualquiera de las formas posibles, será necesario que integremos $\sigma(\theta)$ [o $\sigma(\psi)$] sobre todos los ángulos de desviación posibles. Resulta así una magnitud que recibe el nombre de *sección eficaz de dispersión total* σ_t , y que es igual a la superficie efectiva de la partícula blanco para producir una desviación:

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \int_{4\pi} \sigma(\theta) d\Omega' \\ &= 2\pi \int_0^\pi \sigma(\theta) \sin \theta d\theta \end{aligned} \quad (9.56)$$

donde la integración sobre θ se extiende de 0 a π . Por supuesto, la sección eficaz *total* es la misma en el sistema CM que en el L. Si deseamos expresar la sección eficaz *total* en función de una integración sobre las magnitudes L

$$\sigma_t = \int \sigma(\psi) d\Omega$$

entonces, si $m_1 < m_2$, ψ también varía de 0 a π . Cuando suceda que $m_1 \geq m_2$ el límite superior de ψ será ψ_{\max} (dado por 9.15), y tendremos

$$\sigma_t = 2\pi \int_0^{\psi_{\max}} \sigma(\psi) \sin \psi d\psi \quad (9.57)$$

Cuando hagamos el cálculo de σ_t para el caso de la dispersión de Rutherford, encontraremos que el resultado es infinito. Esto procede del hecho de que el potencial culombiano, que varía como $1/r$, decrece tan lentamente que mientras el parámetro de impacto puede hacerse infinitamente grande, la disminución del ángulo de dispersión es demasiado lenta para impedir que la integral sea diver-

gente. No obstante, en el ejemplo 8.11(a) señalamos que el campo electrostático de un núcleo atómico real está apantallado por los electrones que lo rodean, de tal forma que el potencial se anula prácticamente a grandes distancias. Resulta, pues, que la inclusión del término de apantallamiento $\exp(-r/a)$ en la expresión del potencial hace que σ_i adquiera un valor finito. El cálculo de la sección eficaz de dispersión de un potencial electrostático apantallado es sumamente complicado, si se hace siguiendo las teorías clásicas, y no vamos a tratarlo aquí; en este caso, es mucho más cómodo recurrir a la mecánica cuántica.

Referencias recomendadas

La cinemática del choque no es un tema que suela ser tratado con detalle por los textos de mecánica clásica. Dos excepciones son KONOPINSKI (Ko69, cap. 5) y LANDAU y LIFSHITZ (La60, cap. 4). GOLDSTEIN (Go50, cap. 3) incluye asimismo un estudio breve.

En algunas obras dedicadas a los procesos de reacción nuclear se dan considerables detalles; véase, por ejemplo BALDIN, GOLDANSKI y ROZENTAL (Ba61) y MATHER y SWAN (Ma58).

Los textos de mecánica cuántica incluyen frecuentemente estudios breves de la cinemática de los choques (para cuya comprensión no son necesarios conocimientos de mecánica cuántica); véase, por ejemplo, SCHIFF (Sc55, cap. 5).

Problemas

9-1. En el choque elástico de dos partículas, de masas m_1 y m_2 , las velocidades iniciales son \mathbf{u}_1 y $\mathbf{u}_2 = \alpha \mathbf{u}_1$ ($\alpha \neq 0$). Determinar las condiciones que deben cumplir u_1/u_2 y m_1/m_2 para que m_1 se encuentre en reposo después del contacto, cuando las energías cinéticas iniciales de las partículas sean iguales.

9-2. Demostrar

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \cdot S^2$$

donde

$$S \equiv \cos \psi + \frac{\cos(\theta - \psi)}{(m_1/m_2)}$$

9-3. Demostrar que T_1/T_0 puede expresarse en función de $m_2/m_1 = \alpha$ y $\cos \psi = y$ como sigue

$$\frac{T_1}{T_0} = (1 + \alpha)^{-2} [2y^2 + \alpha^2 - 1 + 2y\sqrt{\alpha^2 + y^2 - 1}]$$

Representar gráficamente T_1/T_0 en función de ψ para $\alpha=1, 2, 4$ y 12 . Estos gráficos corresponden a las energías de protones o de neutrones tras ser dispersados por hidrógeno ($\alpha=1$), deuterio ($\alpha=2$), helio ($\alpha=4$) y carbono ($\alpha=12$), o a las de partículas alfa tras ser dispersadas por helio ($\alpha=1$), oxígeno ($\alpha=4$), etc.

9-4. Una partícula de masa m_1 de velocidad inicial u_1 en el laboratorio, choca con una partícula de masa m_2 que se encuentra en reposo en el sistema del laboratorio. La partícula m_1 sufre una desviación ψ respecto del laboratorio, adquiriendo una velocidad final v_1 , donde $v_1=v_1(\psi)$. Determinar la superficie tal que el tiempo de viaje de la partícula dispersada desde el punto de choque hasta dicha superficie sea independiente del ángulo de desviación. Examinar los casos (a) $m_2=m_1$, (b) $m_2=2m_1$ y (c) $m_2=\infty$. Sugírase una aplicación de los resultados a los detectores de partículas nucleares.

9-5. Demuéstrese que la igualdad equivalente a la 9.43, en función de θ en lugar de ψ , es

$$\sigma(\theta) = \sigma(\psi) \cdot \frac{1 + x \cos \theta}{(1 + 2x \cos \theta + x^2)^{3/2}}$$

9-6. Calcular la sección eficaz elemental $\sigma(\theta)$ y la sección eficaz total σ_t para el choque elástico de una partícula con una esfera impenetrable; o sea, cuando el potencial viene dado por

$$U(r) = \begin{cases} 0, & r > a \\ \infty, & r < a \end{cases}$$

9-7. Si, en el problema anterior, la energía perdida en el choque por la partícula desviada es ϵ , demostrar que

$$d\sigma_{C.M.}(\epsilon) = \frac{\pi a^2}{\epsilon_{\max}} d\epsilon$$

Es decir, demostrar que en el sistema del centro de masa las energías de las partículas dispersadas se distribuyen uniformemente.

9-8. Demostrar que la sección eficaz en la dispersión de Rutherford (en el caso $m_1=m_2$) puede expresarse como sigue en función del ángulo de retroceso

$$\sigma_L(\zeta) = \frac{k^2}{T_0^2} \cdot \frac{1}{\cos^3 \zeta}$$

9-9. Examinar el caso de la dispersión de Rutherford cuando ocurra que $m_1 \gg m_2$ (o sea, cuando la masa de la partícula incidente sea muy superior a la del blanco). Obténgase una expresión aproximada de la sección eficaz elemental en el sistema de coordenadas del *laboratorio*.

9-10. Examinar el caso de la dispersión de Rutherford cuando ocurra que $m_2 \gg m_1$. Obténgase una expresión de la sección eficaz elemental en el sistema del centro de masa, correcta hasta la primera potencia de m_1/m_2 . Comparar este resultado con 9.53.

9-11. Un centro de fuerzas fijo desvía una partícula de masa m actuando con una fuerza de módulo $F(r) = k/r^3$. Si la velocidad inicial de la partícula es u_0 , demostrar que la sección eficaz elemental de dispersión es

$$\sigma(\theta) = \frac{k\pi^2(\pi - \theta)}{mu_0^2\theta^2(2\pi - \theta)^2 \sin \theta}$$

La integral de esta expresión da infinito para la sección eficaz total. Sin embargo, si la fuerza se anula para $r > r_0$, demostrar que existe un ángulo mínimo de dispersión θ_0 ; expresar el resultado en función de m , u_0 , r_0 y k . A continuación, demostrar que la sección eficaz total es

$$\sigma_t = 2\pi \int_{\theta_0}^{\pi} \sigma(\theta) \sin \theta \, d\theta = \pi r_0^2$$

9-12. Se ha encontrado experimentalmente que en la dispersión elástica de neutrones por protones ($m_n \approx m_p$) a energías relativamente bajas, la distribución de energía de los protones de retroceso en el sistema L es constante hasta alcanzar una energía máxima que es la de los neutrones incidentes. ¿Cuál es la distribución angular de la dispersión en el sistema CM?

9-13. Demuéstrese que la distribución de energías en las partículas de retroceso de un choque elástico es siempre directamente proporcional a la sección eficaz elemental de dispersión en el sistema CM.*

* Esta conclusión se debe a H. H. BARSCHALL y M. H. KANNER, *Phys. Rev.* **58**, 590 (1940).

Teoría de la relatividad restringida

10.1 Introducción

Ya señalamos en la sección 2.12 que las nociones de Newton acerca de la separación completa entre espacio y tiempo y su idea del tiempo como magnitud absoluta no resisten en absoluto un análisis crítico. Ciertos experimentos cruciales, que culminaron con los trabajos de MICHELSON y MORLEY en 1881-1887, acabaron por destronar a las teorías de Newton como descripción esencial de la dinámica. Las conclusiones de estos experimentos señalaron que la velocidad de la luz es independiente de todo movimiento uniforme relativo entre la fuente y el observador, lo cual, unido al hecho de que la luz posee una velocidad finita, hizo necesaria una reestructuración de los fundamentos de la dinámica. Ello fue realizado por H. POINCARÉ, H. A. LORENTZ y A. EINSTEIN,* durante los

* Aunque el mérito por la formulación de la teoría de la relatividad suele ser atribuido a Albert EINSTEIN (1879-1955) (véase, no obstante, Wh53, cap. 2), el *formalismo* básico fue descubierto en 1904 por POINCARÉ y LORENTZ. Einstein desconocía la existencia de este trabajo anterior cuando publicó su primer escrito (1905) sobre relatividad. (Los amigos de Einstein solían observar que éste «leía poco, pero pensaba mucho».) La contribución principal de Einstein a la teoría de la relatividad restringida fue eliminar el gran número de hipótesis circunstanciales establecidas por Lorentz y otros, sustituyéndolas por dos postulados fundamentales a partir de los cuales pueden deducirse todas las conclusiones. [El asunto de la prioridad respecto a la relatividad es analizado por G. HOLTON, *Am. J. Phys.* **28**, 627 (1960); véase también Am63]. Además de esto, Einstein proporcionó más tarde, en 1916, la contribución fundamental a la formulación de la teoría de la relatividad generalizada. (Su primera publicación sobre un tema de importancia en relatividad generalizada, como el de meditaciones en torno a la influencia de la gravedad sobre la luz, data de 1907.) Es interesante observar que el premio Nobel concedido a Einstein en 1921 no lo fue por sus contribuciones a la teoría de la relatividad, sino por su trabajo acerca del efecto fotoeléctrico.

años 1904-1905, mediante la formulación de la *teoría de la relatividad* cuyo objeto era proporcionar una descripción coherente de los hechos experimentales.

Las bases de la teoría de la relatividad están contenidas en dos postulados:

- (I) Las leyes de los fenómenos físicos son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales. (Es decir, únicamente pueden medirse movimientos relativos de los sistemas inerciales: la idea de movimiento respecto de un «reposo absoluto» carece de significado.)
- (II) La velocidad de la luz (en el vacío) es una constante universal, independiente de todo movimiento relativo entre fuente y observador.

Con estos postulados como fundamento, EINSTEIN construyó una hermosa teoría, modelo de precisión lógica, mediante la cual pueden describirse con exactitud una gran variedad de fenómenos que tienen lugar a altas velocidades y que no pueden ser interpretados con las teorías de Newton.

No intentaremos aquí exponer las bases experimentales de la relatividad; esta información podrá encontrarse prácticamente en todos los textos de física moderna y en muchos de los que tratan de electrodinámica.* En lugar de ello, abordaremos el tema simplemente aceptando como correctos los dos postulados anteriores y deduciendo, a partir de los mismos, las consecuencias aplicables a la mecánica.** Limitaremos la discusión a la *relatividad restringida*, en que sólo se consideran sistemas de referencia inerciales: es decir, sistemas que se encuentran en movimiento uniforme los unos respecto de los otros. El estudio, de naturaleza más general, de los sistemas de referencia acelerados es el tema de la *teoría de la relatividad generalizada*.

10.2 La invariancia de Galileo

En la mecánica de Newton, se supone que el espacio y el tiempo son ideas completamente separables y, además, que el tiempo es una magnitud absoluta, susceptible de una definición precisa independiente del sistema de referencia. Esta hipótesis conduce a la invariancia de los principios de la mecánica respecto de los cambios de coordenadas del tipo que describimos a continuación. Consideremos dos sistemas de referencia inerciales K y K' que se desplazan en la dirección de sus ejes x_1 y x'_1 , tal como se indica en la figura 10-1, a una velocidad uniforme relativa v . Claramente, la transformación de las coordenadas de un punto de uno de los sistemas al otro es de la forma

* Un estudio especialmente bueno acerca de la necesidad experimental de la relatividad puede encontrarse en PANOFSKY y PHILLIPS (Pa 62, cap. 15).

** Los efectos relativistas en electrodinámica se estudian en MARION (Ma65b, cap. 13).

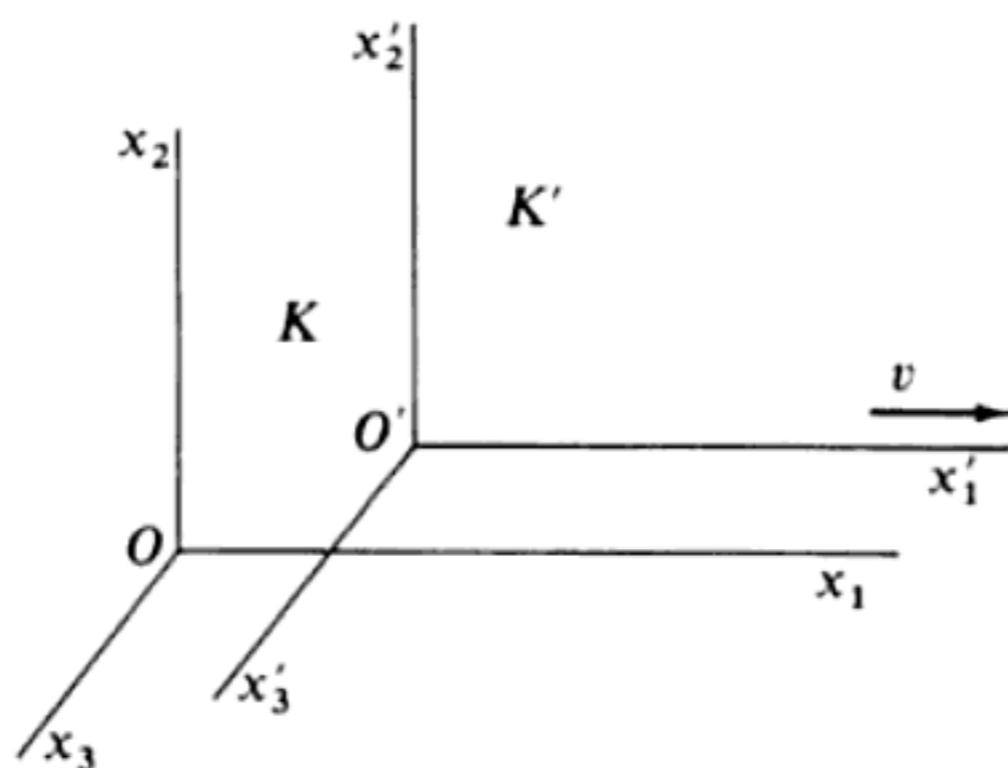


FIG. 10-1

$$\left. \begin{array}{l} x'_1 = x_1 - vt \\ x'_2 = x_2 \\ x'_3 = x_3 \end{array} \right\} \quad (10.1a)$$

Además, tenemos

$$t' = t \quad (10.1b)$$

Las ecuaciones 10.1 definen una *transformación de Galileo*. Por otra parte, además, el elemento de longitud es el mismo en ambos sistemas y viene dado por

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum_j dx_j^2 \\ &= \sum_j dx'_j{}^2 = ds'^2 \end{aligned} \quad (10.2)$$

El hecho de que los principios de Newton sean invariantes respecto de los cambios de coordenadas de Galileo recibe el nombre de *principio de la relatividad de Newton* o *de la invariancia de Galileo*. Las ecuaciones de movimiento de Newton son, en los dos sistemas,

$$\begin{aligned} F_j &= m\ddot{x}_j \\ &= m\ddot{x}'_j = F'_j \end{aligned} \quad (10.3)$$

resultando que la expresión de la ley del movimiento es *invariante* respecto de una transformación de Galileo. Los términos separados no son, sin embargo, inva-

riantes, pero se transforman de acuerdo con la misma ley y de ellos se dice que son *covariantes*.

10.3 Transformaciones de Lorentz

Como consecuencia del principio de la invariancia de Galileo resulta que la velocidad de la luz ha de ser distinta en dos sistemas de referencia que se encuentren en movimiento relativo, lo cual está en contradicción con el segundo postulado de la relatividad. Por tanto, debemos encontrar una ley de transformación nueva que haga que los principios de la física sean, *relativísticamente covariantes*. La *transformación de Lorentz* es la ley de transformación que cumple esta condición. Históricamente, el empleo de la transformación de Lorentz precedió al desarrollo de la teoría de la relatividad de Einstein,* pero también es una consecuencia de los postulados fundamentales de la relatividad y nosotros la deduciremos de acuerdo con este hecho.

Si, al coincidir los orígenes de los dos sistemas móviles de K y K' (v. fig. 10-1) se emite un pulso luminoso desde el punto que ocupan, el segundo postulado nos dice que los frentes de onda que se observen en ambos sistemas deberán estar descritos por

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^3 x_j^2 - c^2 t^2 &= 0 \\ \sum_{j=1}^3 x'^2 - c^2 t'^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.4)$$

Definiendo en cada uno de los sistemas una nueva coordenada tal que $x_4 = ict$ y $x'_4 = ict'$, las ecuaciones 10.4 podrán escribirse**

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\mu=1}^4 x_{\mu}^2 &= 0 \\ \sum_{\mu=1}^4 x'^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.5)$$

* Esta transformación fue postulada originalmente por Hendrik Anton LORENTZ (1853-1928) en 1904 con el fin de explicar ciertos fenómenos electromagnéticos, pero las fórmulas habían sido planteadas ya en 1900 por J. J. LARMOR. No se cayó en la cuenta de su completa generalidad hasta que EINSTEIN dedujo sus consecuencias. Realmente, fue W. VOIGT el primero en utilizar estas ecuaciones en 1887 para estudiar fenómenos oscilatorios.

** De acuerdo con el convenio habitual utilizaremos letras griegas (generalmente μ o ν) para indicar sumas que se extienden de 1 a 4; en relatividad, las letras latinas se reservan para las sumas que se extienden de 1 a 3.

De estas ecuaciones es evidente que las dos sumas han de ser proporcionales y, como el movimiento es simétrico entre los sistemas, la constante de proporcionalidad será la unidad.* Así, pues,

$$\sum_{\mu} x_{\mu}^2 = \sum_{\mu} x'_{\mu}^2 \quad (10.6)$$

Esta relación es análoga a la que describe los giros ortogonales, que conservan las distancias, en espacios tridimensionales, estudiados con anterioridad (véase sección 1.4) e indica que la transformación que buscamos corresponde a un giro en un espacio tetradimensional (llamado *espacio cósmico o de Minkowski***). Por lo tanto, *los cambios de coordenadas de Lorentz serán transformaciones ortogonales en el espacio de Minkowski*. Es decir,

$$x'_{\mu} = \sum_{\nu} \lambda_{\mu\nu} x_{\nu} \quad (10.7)$$

donde las $\lambda_{\mu\nu}$ son los elementos de la *matriz de cambio de Lorentz*. Si suponemos una traslación del sistema K' en la dirección de x_1 , tendremos que $x'_2 = x_2$ y $x'_3 = x_3$ por lo que la matriz de cambio será de la forma

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 & \lambda_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda_{41} & 0 & 0 & \lambda_{44} \end{pmatrix} \quad (10.8)$$

Como la transformación es ortogonal, tendremos, por analogía con las igualdades 1.13 y 1.15,

$$\sum_{\nu} \lambda_{\mu\nu} \lambda_{\gamma\nu} = \delta_{\mu\gamma} \quad (10.9a)$$

o bien,

$$\sum_{\nu} \lambda_{\nu\mu} \lambda_{\nu\gamma} = \delta_{\mu\gamma} \quad (10.9b)$$

* En el apéndice G puede verse una «demostración» de esto.

** Por Herman MINKOWSKI (1864-1909), quien aportó importantes contribuciones a la matemática de la teoría de la relatividad e introdujo la cuarta coordenada *ict*.

Si aplicamos estas condiciones (recordemos que son equivalentes) a la matriz λ de 10.8, resultará

$$\lambda_{11}^2 + \lambda_{14}^2 = \lambda_{11}^2 + \lambda_{41}^2 = \lambda_{41}^2 + \lambda_{44}^2 = \lambda_{14}^2 + \lambda_{44}^2 = 1 \quad (10.10a)$$

y

$$\lambda_{11}\lambda_{14} + \lambda_{41}\lambda_{44} = \lambda_{11}\lambda_{41} + \lambda_{14}\lambda_{44} = 0 \quad (10.10b)$$

Con esto hemos escrito todas las relaciones de ortogonalidad posibles dadas por las igualdades 10.9, aun cuando no todas ellas sean independientes entre sí. (Sólo existen *tres* relaciones independientes, que son las que vienen dadas *por* 10.9a *o por* 10.9b.)

Si a la matriz x aplicamos la matriz de cambio λ , encontramos para x'_1 :

$$\begin{aligned} x'_1 &= \lambda_{11}x_1 + \lambda_{14}x_4 \\ &= \lambda_{11}\left(x_1 + ic\frac{\lambda_{14}}{\lambda_{11}}t\right) \end{aligned} \quad (10.11)$$

Entonces, cuando $x'_1=0$, deberá ser $x_1=vt$; es decir, el origen del sistema K' se mueve a velocidad uniforme a lo largo del eje x_1 . Por tanto, 10.11 nos dará

$$v = -ic\frac{\lambda_{14}}{\lambda_{11}}$$

o sea,

$$\frac{\lambda_{14}}{\lambda_{11}} = i\beta \quad (10.12)$$

donde

$$\beta \equiv \frac{v}{c} \quad (10.13)$$

Asimismo, de 10.10a podemos escribir

$$\lambda_{11}^2 + \lambda_{14}^2 = 1$$

que, con 10.12, es

$$\begin{aligned} \lambda_{11}^2 &= \frac{1}{1 + (\lambda_{14}^2/\lambda_{11}^2)} \\ &= \frac{1}{1 - \beta^2} \end{aligned}$$

y resulta

$$\lambda_{11} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (10.14)$$

donde debemos tomar la raíz cuadrada positiva para que la igualdad 10.11 se reduzca a $x'_1 = x_1$, cuando $v=0$.

A continuación, veamos que de las igualdades 10.10a tenemos

$$\lambda_{14} = \pm \lambda_{41} \quad (10.15)$$

y de 10.10b

$$\begin{aligned} \lambda_{44} &= -\frac{\lambda_{11}\lambda_{41}}{\lambda_{14}} = \pm \lambda_{11} \\ &= \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned}$$

Podemos elegir el signo adecuado para λ_{44} escribiendo la expresión x'_4 deducida de λx :

$$x'_4 = \lambda_{41}x_1 + \lambda_{44}x_4,$$

o sea,

$$ict' = \lambda_{41}x_1 + ic\lambda_{44}t \quad (10.16)$$

Por otra parte, cuando $v=0$, ha de ser $\lambda_{44} \rightarrow \pm 1$; pero en tal caso deberemos tener $t=t'$ en el origen común ($x_1=x'_1=0$). Por tanto, en este límite λ_{44} deberá reducirse a $+1$, y entonces

$$\lambda_{44} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (10.17)$$

Como λ_{11} y λ_{44} son números positivos, las condiciones 10.10b imponen que λ_{14} y λ_{41} sean de signos contrarios y, por tanto, la igualdad 10.15 quedará en la forma

$$\lambda_{14} = -\lambda_{41} \quad (10.18)$$

Combinando este resultado con 10.12 y 10.14, tendremos finalmente

$$\lambda_{14} = i\beta\lambda_{11} = \frac{i\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = -\lambda_{41} \quad (10.19)$$

Con las igualdades 10.14, 10.17 y 10.19, la matriz de cambio de Lorentz será

$$\lambda = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (10.20)$$

donde, con la notación acostumbrada

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (10.21)$$

Por lo tanto, las coordenadas del espacio-tiempo en el sistema K' son

$$\boxed{\begin{aligned} x'_1 &= \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma(x_1 - vt) \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= x_3 \\ t' &= \frac{t - (v/c^2)x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x_1\right) \end{aligned}} \quad (10.22)$$

Como debe ocurrir, estas ecuaciones se reducen a las de Galileo 10.1 cuando $v \rightarrow 0$ (o cuando $c \rightarrow \infty$).

En electrodinámica, los campos se propagan a la velocidad de la luz, por lo cual las transformaciones de Galileo no son aplicables y lo cierto es que el hecho de que las ecuaciones del campo electromagnético (*ecuaciones de Maxwell*) no sean covariantes respecto de las transformaciones de Galileo fue un factor de peso para comprender la necesidad de una nueva teoría. Parece un tanto extraordinario que las ecuaciones de Maxwell, que son un sistema de ecuaciones completo del campo electromagnético y que *son covariantes respecto de las transformaciones de Lorentz*, fueran deducidas de la experimentación mucho antes de la aparición de la relatividad.

10.4 Ímpetu y energía en relatividad

Se llama *cuadrivector* a una magnitud que consta de cuatro componentes, cada una de las cuales se transforma de acuerdo con la relación*

$$A'_\mu = \sum_v \lambda_{\mu v} A_v \quad (10.23)$$

donde las $\lambda_{\mu v}$ definen una transformación de Lorentz. Uno de tales cuadrivectores** será

$$\mathbb{X} = (x_1, x_2, x_3, ict) \quad (10.24)$$

o bien,

$$\mathbb{X} = (\mathbf{x}, ict) \quad (10.24a)$$

donde la notación utilizada en la última línea significa que las tres primeras componentes (espaciales) de \mathbb{X} definen el vector de posición, tridimensional ordinario \mathbf{x} , y que la cuarta componente es ict . Análogamente, la diferencial de \mathbb{X} es otro cuadrivector:

$$d\mathbb{X} = (d\mathbf{x}, ic dt) \quad (10.25)$$

En el espacio de Minkowski el elemento de longitud tetradimensional es un *invariante* (es decir, no es afectado por las transformaciones de Lorentz):

$$ds = \sqrt{\sum_\mu dx_\mu^2} = \sqrt{\sum_j dx_j^2 - c^2 dt^2} \quad (10.26)$$

Y, además, es invariante

$$d\tau = \sqrt{dt^2 - \frac{1}{c^2} \sum_j dx_j^2} = \frac{i}{c} \sqrt{\sum_\mu dx_\mu^2} \quad (10.27)$$

puesto que es sencillamente i/c multiplicado por el elemento de longitud ds . La magnitud $d\tau$ recibe el nombre de elemento de *tiempo propio* en el espacio de

* No haremos aquí la distinción entre componentes *covariantes* y *contravariantes* de un vector; véase, por ejemplo, BERGMANN (Be46, cap. 5).

** Los cuadrivectores se representan exclusivamente por letras mayúsculas vaciadas.

Minkowski. El cociente entre el cuadrivector $d\mathbb{X}$ y el invariante $d\tau$ es también, por tanto, un cuadrivector que se llama cuadrivector velocidad \mathbb{V} :

$$\mathbb{V} = \frac{d\mathbb{X}}{d\tau} = \left(\frac{dx}{d\tau}, ic \frac{dt}{d\tau} \right) \quad (10.28)$$

Como las componentes de la velocidad ordinaria \mathbf{v} son

$$v_j = \frac{dx_j}{dt} \quad (10.29)$$

$d\tau$ podrá expresarse en la forma

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \sum_j \frac{dx_j^2}{dt^2}}$$

o sea

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \beta^2} \quad (10.30)$$

Por lo tanto, el cuadrivector velocidad podrá escribirse

$$\mathbb{V} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} (\mathbf{v}, ic) \quad (10.31)$$

donde \mathbf{v} representa las tres componentes espaciales de la velocidad ordinaria (v_1, v_2, v_3).

En la mecánica de Newton obtuvimos el ímpetu de una partícula formando el producto de su masa por su velocidad. En mecánica relativista podríamos hacer lo mismo; ahora bien, para que la «masa» de la partícula sea auténticamente una característica de la *partícula* y no de su velocidad en un sistema de referencia cualquiera, la masa deberá medirse en el sistema de referencia que se encuentre en reposo respecto de la partícula; es decir, en el *sistema en reposo* de la partícula (o *sistema propio*). A esta masa la llamaremos *masa en reposo* (o *masa propia*) de la partícula y la representaremos por m_0 . El cuadrivector ímpetu será, por tanto,

$$\mathbb{P} = \left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, ip_4 \right) \quad (10.32)$$

donde

$$p_4 \equiv \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (10.33)$$

Las tres primeras componentes del cuadrivector ímpetu \mathbb{P} son precisamente las componentes del ímpetu ordinario:

$$P_j = p_j = mv_j, \quad j = 1, 2, 3 \quad (10.34)$$

donde

$$m \equiv \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (10.35)$$

En consecuencia, si nos proponemos interpretar lo que es el ímpetu de una partícula en un sentido clásico, la masa ya no será un invariante, sino que dependerá de la velocidad respecto del sistema de referencia que se utilice.* Así, pues, la formulación covariante del ímpetu lleva de manera inmediata a la variación de la masa con la velocidad. Debemos recalcar ahora que es la masa *inerte* m la que es función de la velocidad.

A continuación, derivando respecto del tiempo las tres componentes espaciales del ímpetu, podemos obtener las ecuaciones de movimiento a partir de $F_i = \dot{p}_i$. Entonces,

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \quad (10.36)$$

donde \mathbf{F} es el vector fuerza tridimensional.

La forma relativista de la energía puede deducirse teniendo en cuenta que $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ es precisamente el trabajo efectuado por la fuerza sobre la partícula por unidad de tiempo y que es igual a la variación de energía cinética T por unidad de tiempo. Haciendo uso de 10.36,

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{dT}{dt} = \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \quad (10.37)$$

* A esta conclusión llegó LORENTZ por primera vez en 1904, pero bajo hipótesis muy particulares que no son necesarias en la teoría de la relatividad de Einstein.

Puede comprobarse fácilmente que esta expresión es equivalente a

$$\frac{dT}{dt} = m_0 c^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \quad (10.38)$$

que, integrada respecto del tiempo, nos da

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \frac{dT}{dt} dt &= T_2 - T_1 \\ &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Big|_{t_1}^{t_2} \end{aligned} \quad (10.38a)$$

Si hacemos que t_1 corresponda al último instante en que la partícula estaba todavía en reposo, la expresión general de la energía cinética podrá escribirse de la forma

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} - m_0 c^2 \quad (10.39)$$

cuyo primer término del segundo miembro es precisamente de c^2 por la masa definida en 10.35, con lo cual

$$T = mc^2 - m_0 c^2 \quad (10.40)$$

Es decir, la energía cinética T es la diferencia entre mc^2 y la *energía en reposo* $m_0 c^2$. Por esta razón se interpreta que la cantidad mc^2 es la *energía total* E de la partícula:

$$E \text{ (energía total)} = mc^2 = T \text{ (energía cinética)} + m_0 c^2 \text{ (energía en reposo)} \quad (10.40a)$$

Éste es el ejemplo más sencillo de la equivalencia entre masa y energía, conclusión de importancia capital para todas las teorías y aplicaciones de la física nuclear.*

* La relación masa-energía fue obtenida por primera vez en 1905 por EINSTEIN.

Cuando en 10.39 la velocidad v sea lo suficientemente pequeña para que $\beta \ll 1$, podremos desarrollar en serie el radical, obteniendo

$$\begin{aligned} T &= m_0 c^2 (1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \dots) - m_0 c^2 \\ &= \frac{1}{2}m_0 v^2 + \frac{3}{8}m_0 \frac{v^4}{c^2} + \dots \end{aligned} \quad (10.41)$$

y, por tanto, para velocidades suficientemente pequeñas, únicamente el primer término es significativo y la expresión anterior se hace igual a la fórmula que proporciona la teoría de Newton $T = \frac{1}{2}m_0 v^2$ con gran aproximación.

Según 10.40a, la cuarta componente del ímpetu puede expresarse

$$p_4 = \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \beta^2}} = mc = \frac{E}{c} \quad (10.42)$$

y, en consecuencia, el cuadrvector puede escribirse

$$\begin{aligned} \mathbb{P} &= m_0 \mathbb{V} \\ &= \left(\mathbf{p}, i \frac{E}{c} \right) \end{aligned} \quad (10.43)$$

donde \mathbf{p} representa las tres componentes espaciales del ímpetu. Así, pues, en relatividad el ímpetu y la energía se encuentran ligados de forma similar a como lo están los conceptos de espacio y de tiempo. Si aplicamos la matriz de cambio de Lorentz 10.20 al ímpetu \mathbb{P} , tendremos

$$\begin{aligned} p'_1 &= \frac{p_1 - (v/c^2)E}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ p'_2 &= p_2 \\ p'_3 &= p_3 \\ E' &= \frac{E - vp_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \quad (10.44)$$

El cuadrado del cuadrvíctor velocidad (10.31) será también invariante:

$$\mathbb{V}^2 = \sum_{\mu} V_{\mu}^2 = \frac{v^2 - c^2}{1 - \beta^2} = -c^2 \quad (10.45)$$

Luego, el cuadrado del cuadrvíctor ímpetu será un invariante:

$$\mathbb{P}^2 = \sum_{\mu} P_{\mu}^2 = m_0^2 \mathbb{V}^2 = -m_0^2 c^2 \quad (10.46a)$$

Asimismo, de 10.43 tenemos, sabiendo que $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = p^2 \equiv p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$,

$$\mathbb{P}^2 = p^2 - \frac{E^2}{c^2} \quad (10.46b)$$

y la combinación de estas expresiones nos lleva a la importante conclusión

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

(10.47)

En forma normalizada, podemos escribir

$$\left(\frac{E}{m_0 c^2}\right)^2 = \left(\frac{|p|}{m_0 c}\right)^2 + 1 \quad (10.47a)$$

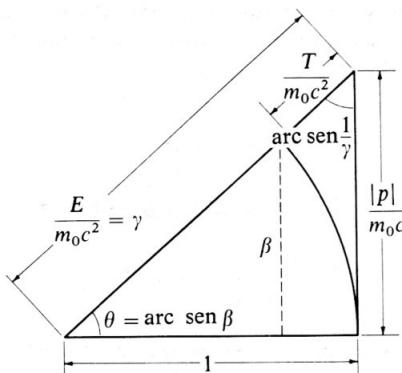


FIG. 10-2

Si definimos un ángulo θ tal que $\beta = \sin \theta$, las relaciones relativistas entre velocidad, ímpetu y energía se podrán obtener a partir de las relaciones trigonométricas deducidas del llamado «triángulo relativista» que se representa en la figura 10-2.

10.5 Algunas consecuencias de la transformación de Lorentz

La aplicación de la transformación de Lorentz conduce de forma inmediata a una amplia variedad de resultados interesantes y, si bien no es nuestra intención presentar aquí todo un catálogo de tales conclusiones, sí examinaremos tres efectos de interés especial.

◆ Ejemplo 10.5(a) La contracción de longitud de FitzGerald-Lorentz*

Consideremos una varilla de longitud l que descansa sobre el eje x_1 de un sistema inercial K . Un observador, solidario de un sistema K' que se mueve a velocidad constante v a lo largo del eje x_1 (véase figura 10.1), mide la longitud de la varilla respecto de su sistema de coordenadas, lo que realiza determinando *en un instante dado t'* la diferencia entre las coordenadas de los extremos de la varilla, $x'_1(2) - x'_1(1)$. Según las ecuaciones 10.22 de cambio de coordenadas

$$x'_1(2) - x'_1(1) = \frac{[x_1(2) - x_1(1)] - v[t(2) - t(1)]}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

donde $x_1(2) - x_1(1) = l$. Obsérvese que los instantes $t(2)$ y $t(1)$ en que se hicieron las observaciones son tiempos en el sistema K , que no se corresponden al instante en que, respecto de K' , hizo las medidas el observador. En realidad, como $t'(2) = t'(1)$, las ecuaciones 10.22 nos dan

$$t(2) - t(1) = [x_1(2) - x_1(1)] \frac{v}{c^2}$$

y, por lo tanto, la longitud l' medida en el sistema K' será

$$l' = x'_1(2) - x'_1(1)$$

* La contracción de longitud en la dirección del movimiento fue propuesta en 1892 por G. F. FITZGERALD (1851-1901) como explicación posible del experimento del arrastre del éter de Michelson-Morley. Casi inmediatamente esta hipótesis fue adoptada por Lorentz quien procedió a aplicarla a su teoría de la electrodinámica.

o sea,

$$l' = l\sqrt{1 - \beta^2} \quad (10.48)$$

Resulta así que, para un observador en movimiento relativo respecto del objeto, las dimensiones de éste se contraen según un factor $\sqrt{1 - \beta^2}$ en la dirección del movimiento.

Una interesante consecuencia de la contracción de longitud de FitzGerald-Lorentz fue descubierta en 1959 por JAMES TERRELL.* Sea un cubo de arista l que se mueve a velocidad constante v respecto de un observador que se halla a una cierta distancia. En la figura 10-3a se representa la proyección del cubo sobre el plano que contiene a la velocidad v y al observador, moviéndose el cubo de forma que su arista AB sea perpendicular a la línea de visión del observador. Propongámonos determinar lo que «ve» el observador; es decir, deseamos determinar, en un instante dado del sistema del observador, cuál es la orientación relativa de los vértices A, B, C y D . El parecer tradicional (que permaneció incuestionable durante más de 50 años!) era que el único efecto sería un acortamiento de las aristas AB y CD por lo que el observador vería un cubo deformado de altura l pero de longitud $l\sqrt{1 - \beta^2}$. TERRELL señaló que esta interpretación deja de lado el hecho de que para que la luz procedente de los vértices A y D alcance al obser-

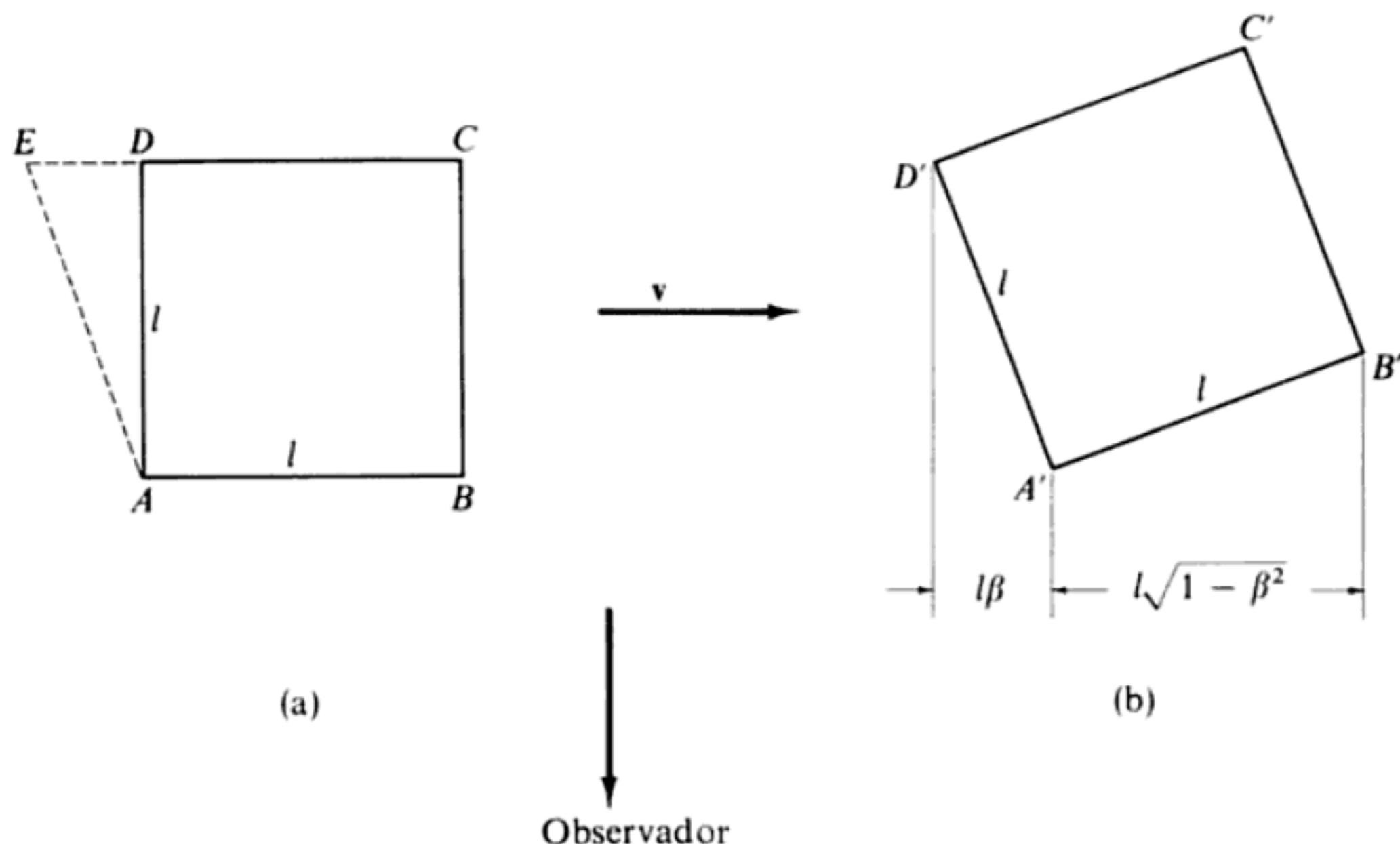


FIG. 10-3

* J. TERRELL, *Phys. Rev.* **116**, 1041 (1959).

vador en el mismo instante, la luz procedente de D , que debe atravesar una distancia superior en l a la que debe atravesar la procedente de A , deberá emitirse cuando el vértice D se encuentre en la posición E . La longitud DE es igual a $(l/c)v = l\beta$. Por lo tanto, el observador ve, no sólo que la cara AB es perpendicular a su línea de visión, sino también que la cara AD es *paralela* a su línea de visión. Además, la longitud de la arista AB se acorta, como cabe esperar, a la longitud $l\sqrt{1-\beta^2}$. El resultado final se representa en la figura 10-3b y corresponde exactamente a lo que vería el observador si el cubo hubiera sido girado un ángulo $\text{arc sen } \beta$. En consecuencia, el cubo no se deforma, sino que sufre una rotación *aparente*. La afirmación habitual* de que una esfera móvil parecería un elipsoide es incorrecta; seguiría apareciendo como una esfera.**

◆ Ejemplo 10:5(b) La dilatación del tiempo

Consideremos un reloj que ocupa una posición determinada en el sistema K y que emite señales con un intervalo

$$\Delta t = t(2) - t(1)$$

Para un observador del sistema móvil K' , el intervalo de tiempo será

$$\Delta t' = t'(2) - t'(1) = \frac{t(2) - t(1)}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

o sea,

$$\boxed{\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \beta^2}}}$$

(10.49)

Así, pues, para un observador en movimiento relativo al reloj, los intervalos de tiempo parecen alargarse.

Un ejemplo contundente de la dilatación del tiempo nos lo deparan las observaciones realizadas sobre los muones. Se sabe que estas partículas se producen en gran número en la desintegración de los mesones π que producen las partículas de radiación cósmica al interactuar con el gas tenue próximo al límite superior de la atmósfera; es decir, en alturas de 10 a 20 km. Aunque los muones sean partículas inestables que finalmente se desintegran, el hecho de que sean obser-

* Véase, por ejemplo, Joos y FREEMAN (Jo50, pág. 242).

** V. F. WEISSKOPF da un estudio interesante de las rotaciones aparentes en *Phys. Today* 13, n.º 9, 24 (1960); reproducido en Am63.

vados en la superficie terrestre implica que su vida media debe ser al menos de $10 \text{ km}/c \approx 3 \times 10^{-5} \text{ s}$. Pero como también se sabe que el tiempo de vida media de los muones en su *sistema propio* es de $2,2 \times 10^{-6} \text{ s}$ aproximadamente, el aumento en un orden de magnitud del tiempo de vida en el sistema de referencia de la Tierra habrá de achacarse a la gran velocidad ($\beta \approx 0,98$) con que los muones atraviesan la atmósfera.

◆ **Ejemplo 10.5(c) Regla de adición de velocidades**

Supongamos tres sistemas de referencia iniciales, K , K' y K'' , que se mueven colinealmente a lo largo de sus ejes x_1 respectivos. Sea v_1 la velocidad de K' respecto de K y v_2 la de K'' respecto de K' . En estas condiciones, la velocidad de K'' respecto de K no podrá ser $v_1 + v_2$, ya que como una señal ha de poder propagarse entre dos sistemas iniciales cualesquiera, si ocurre que tanto v_1 como v_2 son mayores que $c/2$ (pero menores que c) será $v_1 + v_2 > c$. Por consiguiente, la regla para sumar velocidades en relatividad debe ser diferente a la que se emplea en la teoría de Galileo. La regla de la suma relativista de velocidades puede obtenerse a partir de la matriz de cambio de Lorentz que liga K y K'' . Las matrices de cambio separadas son:

$$\lambda_{K' \rightarrow K} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & i\beta_1\gamma_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta_1\gamma_1 & 0 & 0 & \gamma_1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{K'' \rightarrow K'} = \begin{pmatrix} \gamma_2 & 0 & 0 & i\beta_2\gamma_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta_2\gamma_2 & 0 & 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la transformación de K'' a K será precisamente el producto de estos dos cambios:

$$\lambda_{K'' \rightarrow K} = \lambda_{K'' \rightarrow K'} \lambda_{K' \rightarrow K} = \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2(1 + \beta_1\beta_2) & 0 & 0 & i\gamma_1\gamma_2(\beta_1 + \beta_2) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\gamma_1\gamma_2(\beta_1 + \beta_2) & 0 & 0 & \gamma_1\gamma_2(1 + \beta_1\beta_2) \end{pmatrix}$$

Para que los elementos de esta matriz se correspondan con los de la matriz de Lorentz normal (10.20), β y γ en la transformación $K'' \rightarrow K$ habrán de cumplir

$$\left. \begin{array}{l} \gamma = \gamma_1 \gamma_2 (1 + \beta_1 \beta_2) \\ \beta \gamma = \gamma_1 \gamma_2 (\beta_1 + \beta_2) \end{array} \right\} \quad (10.50)$$

de donde se obtiene

$$\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2} \quad (10.51)$$

Si multiplicamos esta última expresión por c , tendremos la forma corriente de la regla de adición de velocidades

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + (v_1 v_2 / c^2)} \quad (10.51a)$$

Se sigue que si $v_1 < c$ y $v_2 < c$, será también $v < c$.

Aunque las *señales* no pueden nunca tener velocidades superiores a c , hay otros tipos de velocidades que sí pueden ser superiores a c . Por ejemplo, la *velocidad de fase* de una onda luminosa que se propaga en un medio cuyo índice de refracción sea inferior a la unidad será mayor que c , pero la velocidad de fase no corresponde a velocidad de la señal en tal medio; lo cierto es que la velocidad de la señal es inferior a c . Consideremos, asimismo, un cañón electrónico que emite un haz de electrones. Si se gira el cañón, los electrones describirán entonces una cierta trayectoria sobre una pantalla situada a una distancia adecuada. Cuando la velocidad angular del cañón y su distancia a la pantalla sean suficientemente grandes, la velocidad de la señal del impacto desplazándose sobre la pantalla podrá tener un valor *cualquiera*, arbitrariamente grande. Así, pues, la *velocidad de escritura* de un osciloscopio puede ser mayor que c , pero aquí, de nuevo, la velocidad de escritura no corresponde a la velocidad de la señal. O sea, la información no puede transmitirse de un punto a otro de la pantalla mediante el haz de electrones; en un dispositivo como éste una señal sólo puede transmitirse desde el cañón a la pantalla y esta transmisión tiene lugar a la velocidad de los electrones del haz (es decir, a velocidad inferior a c).

■ 10.6 La lagrangiana en relatividad restringida

En el estudio de las dinámicas de Lagrange y de Hamilton realizado en el capítulo 7 se supuso la constancia de la masa, por lo que dicho estudio sólo será válido dentro de los límites no relativistas. El formalismo de Lagrange puede extenderse a los dominios de la relatividad restringida como sigue. Las componentes rectangulares del ímpetu de una partícula (no relativista) aislada que se mueve en un potencial independiente de la velocidad pueden escribirse (cfr. 7.50):

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} \quad (10.52)$$

Según 10.32, la expresión relativista de las componentes del ímpetu ordinario (o sea, espaciales) es

$$p_i = \frac{m_0 v_i}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (10.53)$$

Ahora impongamos la condición de que la lagrangiana *relativista*, cuando se derive respecto de v_i como en 10.52, dé por resultado las componentes del ímpetu expresadas en 10.53:

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{m_0 v_i}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (10.54)$$

La condición que hemos impuesto se refiere únicamente a la *velocidad* de la partícula y cabe esperar que la parte *independiente* de la velocidad de la lagrangiana relativista no varíe con relación al planteo no relativista. No obstante, la parte *dependiente* de la velocidad ya no puede ser igual a la energía cinética; por tanto, podemos escribir

$$L = T^* - U \quad (10.55)$$

donde $U = U(x_i)$ y $T^* = T^*(v_i)$, y la función T^* deberá satisfacer la relación

$$\frac{\partial T^*}{\partial v_i} = \frac{m_0 v_i}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (10.56)$$

Con facilidad puede comprobarse que una expresión adecuada de T^* (salvo una constante de integración que puede suprimirse) es

$$T^* = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} \quad (10.57)$$

y, de aquí, la lagrangiana relativista podrá escribirse

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} - U \quad (10.58)$$

obteniéndose las ecuaciones de movimiento a partir de las ecuaciones de Lagrange siguiendo el camino habitual.

Adviértase que la lagrangiana *no* está dada por $T - U$, ya que la expresión relativista de la energía cinética es (10.39):

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} - m_0 c^2 \quad (10.59)$$

La hamiltoniana puede calcularse a partir de (cfr. 7.53):

$$\begin{aligned} H &= \sum_i v_i p_i - L \\ &= \sum_i \frac{m_0 v_i^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} + U \\ &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + U \\ &= T + m_0 c^2 + U = E \end{aligned} \quad (10.60)$$

de forma que la hamiltoniana relativista es igual a la energía total (que en este caso *incluye* a la energía en reposo).

■ 10.7 Cinemática relativista

Cuando las velocidades implicadas en un proceso de choque no sean despreciables frente a la de la luz, será necesario hacer uso de una cinemática *relativista*.

En el estudio llevado a cabo en el capítulo 9 aprovechamos las propiedades del sistema de coordenadas del centro de masa para la deducción de muchas de las relaciones cinemáticas. Como en relatividad la masa es una cantidad variable, ya no tendrá sentido que hablemos de un sistema del «centro de masa»; en su lugar, en cinemática relativista, se utiliza un sistema de coordenadas del «centro de ímpetus». Este sistema posee la misma propiedad fundamental que el sistema CM utilizado anteriormente; es decir, en el mismo, el ímpetu total es nulo. Por consiguiente, cuando una partícula de masa en reposo m_1 choque con una partícula de masa en reposo m_2 , en el sistema del centro de ímpetus tendremos

$$p'_1 = p'_2 \quad (10.61)$$

De acuerdo con 10.32, las componentes espaciales del cuadrivector ímpetu pueden escribirse

$$m_1 u'_1 \gamma'_1 = m_2 u'_2 \gamma'_2 \quad (10.62)$$

donde, como antes, $\gamma \equiv 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ y $\beta \equiv u/c$.

En los problemas de choque es aconsejable asociar el sistema del laboratorio al sistema inercial K y el sistema del centro de ímpetus a K' , pues, así, ambos sistemas quedan ligados por una sencilla transformación de Lorentz. El procedimiento para deducir las expresiones cinemáticas relativistas consiste en obtener las relaciones referidas al centro de ímpetus para pasárlas, a continuación, al sistema L mediante una transformación de Lorentz. Tomemos los ejes coordinados de forma que m_1 se mueva a lo largo del eje x del sistema K a una velocidad u_1 . Como m_2 se encuentra inicialmente en reposo en K , será $u_2=0$. En K' , m_2 se mueve a una velocidad u'_2 por lo que K' se moverá respecto de K también a una velocidad u'_2 y en la misma dirección que el movimiento inicial de m_1 .

Si tenemos en cuenta que $\beta\gamma = \sqrt{\gamma^2 - 1}$, tendremos

$$p'_1 = m_1 u'_1 \gamma'_1 = m_1 c \beta'_1 \gamma'_1 = m_1 c \sqrt{\gamma'^2 - 1} = m_2 c \sqrt{\gamma'^2 - 1} = p'_2 \quad (10.63)$$

que expresa la igualdad de los ímpetus en el sistema del centro de ímpetus.

Ahora, de acuerdo con 10.44, el ímpetu transformado de p_1 (de K a K') es

$$p'_1 = \left(p_1 - \frac{u'_2}{c^2} E_1 \right) \gamma'_2 \quad (10.64)$$

Asimismo, tenemos

$$\begin{aligned} p_1 &= m_1 u_1 \gamma_1 \\ E_1 &= m_1 c^2 \gamma_1 \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (10.65)$$

de forma que la igualdad 10.63 puede utilizarse para obtener

$$\begin{aligned} m_1 c \sqrt{\gamma'_1{}^2 - 1} &= (m_1 c \beta'_1 \gamma_1 - \beta'_2 m_1 c \gamma_1) \gamma'_2 \\ &= m_1 c (\gamma'_2 \sqrt{\gamma_1^2 - 1} - \gamma_1 \sqrt{\gamma'_2{}^2 - 1}) = m_2 c \sqrt{\gamma'_2{}^2 - 1} \end{aligned} \quad (10.66)$$

ecuaciones de las que pueden despejarse γ'_1 y γ'_2 en función de γ_1 :

$$\gamma'_1 = \frac{\gamma_1 + \frac{m_1}{m_2}}{\sqrt{1 + 2\gamma_1 \left(\frac{m_1}{m_2}\right) + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2}} \quad (10.67a)$$

$$\gamma'_2 = \frac{\gamma_1 + \frac{m_2}{m_1}}{\sqrt{1 + 2\gamma_1 \left(\frac{m_1}{m_2}\right) + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2}} \quad (10.67b)$$

Escribamos, a continuación, las ecuaciones de transformación de las componentes del ímpetu para pasar de K' a K después del choque. Ahora, habrá componentes x e y :

$$\begin{aligned} p_{1,x} &= \left(p'_{1,x} + \frac{u'_2}{c^2} E'_1 \right) \gamma'_2 \\ &= (m_1 c \beta'_1 \gamma'_1 \cos \theta + m_1 c \beta'_2 \gamma'_1) \gamma'_2 \\ &= m_1 c \gamma'_1 \gamma'_2 (\beta'_1 \cos \theta + \beta'_2) \end{aligned} \quad (10.68a)$$

(Obsérvese que el paso es de K' a K , por lo que aparece un signo positivo delante del segundo término, en contraste con 10.64.) Asimismo,

$$p_{1,y} = m_1 c \beta'_1 \gamma'_1 \sin \theta \quad (10.68b)$$

Entonces, como la tangente del ángulo de desviación ψ en el laboratorio viene dada por $p_{1,y}/p_{1,x}$, si dividimos 10.68b por 10.68a, tendremos

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{1}{\gamma'_2} \frac{\sin \theta}{\cos \theta + (\beta'_2 / \beta'_1)}$$

que nos da, si utilizamos 10.62 para expresar β'_2/β'_1 ,

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{1}{\gamma'_2} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta + (m_1 \gamma'_1 / m_2 \gamma'_2)} \quad (10.69)$$

Para la partícula de retroceso, tendremos

$$\begin{aligned} p_{2,x} &= \left(p'_{2,x} + \frac{u'_2}{c^2} E'_2 \right) \gamma'_2 \\ &= (-m_2 c \beta'_2 \gamma'_2 \cos \theta + m_2 c \beta'_2 \gamma'_2) \gamma'_2 \\ &= m_2 c \beta'_2 \gamma'^2 (1 - \cos \theta) \end{aligned} \quad (10.70a)$$

donde aparece un signo negativo delante del primer término, dado que $p'_{2,x}$ está dirigido en sentido contrario a $p_{1,x}$. Asimismo,

$$p_{2,y} = -m_2 c \beta'_2 \gamma'_2 \operatorname{sen} \theta \quad (10.70b)$$

Como antes, la tangente del ángulo de retroceso ζ en el sistema del laboratorio viene dada por $p_{2,y}/p_{2,x}$:

$$\operatorname{tg} \zeta = -\frac{1}{\gamma'_2} \frac{\operatorname{sen} \theta}{1 - \cos \theta} \quad (10.71)$$

donde el signo menos indica que si m_1 es desviada hacia valores positivos de y , m_2 retrocederá en el sentido de y negativa.

Un caso de interés particular es aquél en que $m_1=m_2$. Entonces, de las expresiones 10.67 resultará

$$\gamma'_1 = \gamma'_2 = \sqrt{\frac{1 + \gamma_1}{2}}, \quad m_1 = m_2 \quad (10.72)$$

y las tangentes de los ángulos de desviación harán

$$\operatorname{tg} \psi = \sqrt{\frac{2}{1 + \gamma_1}} \cdot \frac{\operatorname{sen} \theta}{1 + \cos \theta} \quad (10.73)$$

$$\operatorname{tg} \zeta = -\sqrt{\frac{2}{1 + \gamma_1}} \cdot \frac{\operatorname{sen} \theta}{1 - \cos \theta} \quad (10.74)$$

siendo, por tanto, su producto

$$\operatorname{tg} \psi \operatorname{tg} \zeta = -\frac{2}{1 + \gamma_1}, \quad m_1 = m_2 \quad (10.75)$$

(El signo menos no es fundamentalmente importante; sólo indica que ψ y ζ se miden en sentidos opuestos.)

Anteriormente, hemos encontrado que en los límites no relativistas las velocidades finales forman siempre un ángulo recto cuando las masas de las partículas son iguales. Ciertamente, cuando $\gamma_1 \rightarrow 1$ las igualdades 10.73 y 10.74 se hacen idénticas a las 9.8 y 9.11, respectivamente, de forma que $\psi + \zeta = \pi/2$. Por otra parte, según 10.75, dentro de los límites relativistas es $\psi + \zeta < \pi/2$; el ángulo de separación es siempre menor que en el caso no relativista correspondiente. En caso de que los ángulos de desviación y retroceso sean iguales, $\psi = \zeta$, la igualdad 10.75 se transforma en

$$\operatorname{tg} \psi = \left(\frac{2}{1 + \gamma_1} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad m_1 = m_2$$

y el ángulo comprendido entre las direcciones de las partículas desviada y de retroceso es

$$\begin{aligned} \varphi &= \psi + \zeta = 2\psi \\ &= 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{2}{1 + \gamma_1} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad m_1 = m_2 \end{aligned} \quad (10.76)$$

En la figura 10.4 se representa φ en función de γ_1 hasta el valor $\gamma_1 = 20$. Para $\gamma_1 = 10$, el ángulo de separación es de 46° aproximadamente, que corresponde a una velocidad inicial que es el 99,5 % de la velocidad de la luz. Según 10.39, la energía cinética viene dada por $T_1 = m_1 c^2 (\gamma_1 - 1)$, por lo que un protón con $\gamma_1 = 10$ poseería una energía cinética aproximada de 8,4 GeV, mientras que para un electrón con la misma velocidad sería $T_1 \cong 4,6$ MeV.*

Haciendo uso de las propiedades de transformación de la cuarta componente del cuadrivector ímpetu (o sea, la energía total), es posible obtener las analogías relativistas de todas las fórmulas energéticas que hemos obtenido anteriormente fuera de los límites relativistas.

* En el problema 10-10 se definen estas unidades de energía: $1 \text{ GeV} = 10^3 \text{ MeV} = 10^9 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-3} \text{ erg}$.

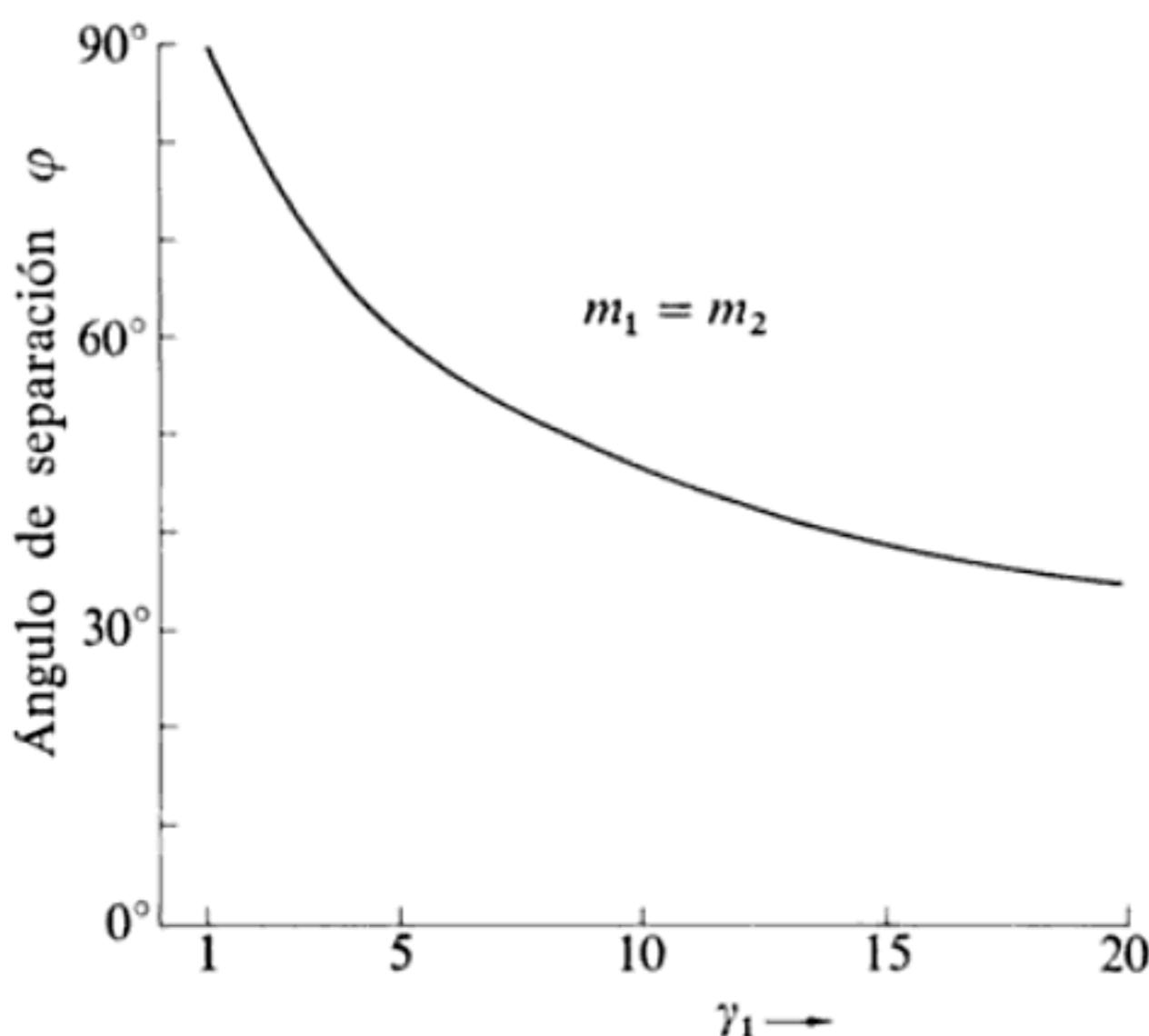


FIG. 10-4

Referencias recomendadas

Los fundamentos de la teoría de la relatividad se estudian, por ejemplo, en LINDSAY y MARGENAU (Li36, cap. 7).

A nivel medio, JOOS y FREEMAN (Jo50, cap. 10) hacen un estudio breve pero completo. En TOLMAN (To34, cap. 1 y 2) puede encontrarse una exposición que se lee fácilmente. BERGMANN (Be46) ofrece un estudio general, pero como está pensado para la relatividad generalizada la notación tiende a ser algo rara en algunos lugares. BRADBURY (Br68, cap. 13) ofrece un tratamiento más o menos corriente. El análisis de GOLDSTEIN (Go50, cap. 6) es elegante y conciso. El estudio ofrecido por WANGSNESS (Wa63a) es breve y conforme. Además de estos autores, casi todos los textos de «física moderna» estudian la relatividad con alguna extensión; véanse, por ejemplo, RICHTMYER, KENNARD y COOPER (Ri69, caps. 2 y 3), o bien LEIGHTON (Le59, cap. 1).

Una obra reducida, muy agradable y que vale la pena leer, es la de NEY (Ne62). Asimismo SHERWIN (Sh61, cap. 4) ofrece un estudio muy interesante, que se completa con numerosos ejemplos y diagramas ingeniosos. TAYLOR (Ta63, cap. 11 a 13) presenta una introducción interesante. Los tratados de BONDI (Bo64) y de BOHM (Bo65) son ambos de lectura fácil e instructivos. Uno de los mejores estudios disponibles es el de TAYLOR y WHEELER (Ta66).

Algunos trabajos escritos recientes tratan la relatividad generalizada a nivel medio: GOOD (Go68), KACSER (Ka67), KATZ (Ka64) y RESNICK (Re68).

La medición de Michelson de la velocidad de la luz (por lo cual se convirtió en el primer americano ganador de un premio Nobel) y el experimento de Michelson-Morley se describen en el texto de JAFFE (Ja60), breve y de lectura sencilla.

Pueden conseguirse sin dificultad traducciones al inglés de algunos de los trabajos originales de LORENTZ, MINKOWSKI, EINSTEIN y WEYL (Lo23); asimismo, se han reunido algunos de los trabajos más importantes y recientes acerca de la relatividad restringida (Am63).

A nivel medio-superior, resulta especialmente completo el libro de ROSSER (Ro64). Entre los textos superiores, probablemente los de PAULI (Pa58) y MÖLLER (Mö52) sean los de mayor utilidad.

Dos de los mejores estudios de la relatividad aplicada a la electrodinámica son los de JACKSON (Ja62, cap. 11 y 12) y PANOFSKY y PHILLIPS (Pa62, cap. 15 a 18). Véase también Ma65b.

MORRISON (Mo53a, págs. 3 a 9) y MONAHAN (Mo60) tratan la cinemática relativista. Un tratado exhaustivo es el de BALDIN, GOLDANSKII y ROZENTAL (Ba61).

Problemas

10-1. Demostrar que las ecuaciones de transformación que ligan los sistemas K' y K (10.22) pueden expresarse

$$x'_1 = x_1 \cosh \alpha - ct \operatorname{senh} \alpha$$

$$x'_2 = x_2 ; \quad x'_3 = x_3$$

$$t' = t \cosh \alpha - \frac{x_1}{c} \operatorname{senh} \alpha$$

donde $\operatorname{tgh} \alpha = v/c$. Demostrar que la transformación de Lorentz representa un giro de $i\alpha$ en un espacio tetradimensional.

10-2. Demostrar que la ecuación

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

es invariante respecto de una transformación de Lorentz, pero no respecto de una de Galileo. (Ésta es la ecuación de ondas que describe la propagación de ondas luminosas en el vacío.)

10-3. Demuéstrese que la expresión de la contracción de FitzGerald-Lorentz (10.48) puede también obtenerse si el observador del sistema K' mide el tiempo

necesario para que la varilla pase por un punto fijo de su sistema y después multiplica el resultado por v .

10-4. ¿Cuál es la forma aparente de un cubo que se mueve a velocidad uniforme acercándose o separándose de un observador?

10-5. Considérense dos sucesos que tienen lugar en puntos distintos del sistema K en el mismo instante t . Si estos puntos se encuentran separados una distancia Δx , demuéstrese que en el sistema K' los sucesos no son simultáneos sino que están separados un intervalo de tiempo $\Delta t' = -v\gamma \Delta x/c^2$,

10-6. Dos relojes, situados en los orígenes de los sistemas K y K' (que llevan una velocidad relativa v), se sincronizan cuando coinciden los orígenes. Pasado un tiempo t , un observador contempla, desde el origen del sistema K , el reloj K' mediante un telescopio. ¿Qué marcará el reloj K' ?

10-7. En su trabajo de 1905 (ver traducción al inglés en Lo23) Einstein afirma: «Concluimos en que un reloj de péndulo en el ecuador debe ir más lento, en muy pequeña cantidad, que un reloj exactamente igual situado en uno de los polos bajo condiciones por lo demás idénticas». Despréciese el hecho de que el reloj ecuatorial no esté sometido a movimiento uniforme y demuéstrese que, transcurrido un siglo, los relojes no estarán separados más de 0,0038 segundos.

10-8. Considérese un cohete relativista cuya velocidad respecto de determinado sistema inercial es v y cuyos gases de escape se emiten a velocidad constante V respecto del cohete. Demostrar que la ecuación de movimiento es

$$m_0 \frac{dv}{dt} + V \frac{dm_0}{dt} (1 - \beta^2)^{3/2} = 0$$

donde $m_0 = m_0(t)$ es la masa del cohete en su sistema en reposo y $\beta = v/c$.

10-9. Sea un sistema inercial K que contiene cierto número de partículas de masas en reposo $m_{\alpha, \infty}$, ímpetus ordinarios de componentes $p_{\alpha, j}$, y energías totales E_{α} . Por definición, el sistema del centro de masa de este conjunto de partículas es aquel respecto del cual el ímpetu ordinario total es nulo. Demostrar que las componentes de la velocidad del sistema del centro de masas respecto de K vienen dadas por

$$\frac{v_j}{c} = \frac{\sum_{\alpha} p_{\alpha, j} c}{\sum_{\alpha} E_{\alpha}}$$

10-10. Una unidad de energía utilizada corrientemente en física atómica y nuclear es el *electronvolt* (eV) que es la energía que adquiere un electrón cuando atraviesa una diferencia de potencial de un volt: $1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-6}$

ergios. En estas unidades la energía en reposo del electrón es $m_e c^2 = 0,511 \text{ MeV}$ y la del protón $m_p c^2 = 931 \text{ MeV}$. Calcular las energías cinéticas y los valores de β y γ de un electrón y de un protón, tales que cada uno de los cuales posea un ímpetu de $100 \text{ MeV}/c$. Demostrar que el electrón es «relativista» mientras que el protón es «no relativista».

10-11. La energía de un cuantum luminoso (o *fotón*) se expresa por $E = h\nu$, donde h es la constante de Planck y ν la frecuencia del fotón. El ímpetu del fotón es $h\nu/c$. Demuéstrese que cuando el fotón sea desviado por un electrón libre (de masa m_e), aquél poseerá una energía

$$E' = E \left[1 + \frac{E}{m_e c^2} (1 - \cos \theta) \right]^{-1}$$

donde θ es el ángulo de desviación del fotón. Demuéstrese que el electrón adquiere una energía cinética

$$T = \frac{E^2}{m_e c^2} \left[\frac{1 - \cos \theta}{1 + \frac{E}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)} \right]$$

10-12. La expresión de la fuerza ordinaria es (10.36)

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)$$

Tómese \mathbf{v} en la dirección de x_1 y calcúlense las componentes de la fuerza. Demostrar que

$$F_1 = m_l \dot{v}_1; \quad F_2 = m_t \dot{v}_2; \quad F_3 = m_t \dot{v}_3$$

donde m_l y m_t son, respectivamente, las masas *longitudinal* y *transversal*:

$$m_l = \frac{m_0}{(1 - \beta^2)^{3/2}}; \quad m_t = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

10-13. La energía radiante solar alcanza la Tierra a un promedio de $1,4 \times 10^6$ erg/cm²s. Suponiendo que toda esta energía resulte de la transformación de masa en energía, calcular qué cantidad de masa solar se consume por unidad de tiempo. Si se mantiene esta velocidad de consumo, calcular el tiempo de vida que le queda al Sol. (En la tabla 8-1 podrán encontrarse los datos numéricos pertinentes.)

10-14. Mediante 8.60 demostrar que el desplazamiento por unidad de tiempo del perihelio es

$$\Delta \cong 6\pi \left(\frac{v_{\max}}{c} \right)^2$$

cuando ϵ es pequeño. El hecho de que el valor correspondiente a Mercurio sea mayor que el de cualquier otro planeta es atribuible a que la velocidad orbital de Mercurio es la mayor de todos los planetas. En consecuencia, el parámetro relativista v/c de Mercurio es el mayor. Calcular v_{\max}/c para Mercurio y comparar con los que resultan para Venus, la Tierra y Saturno. Utilizando los resultados de estos cálculos comprobar que $\Delta \cong 40$ segundos de arco por siglo para Mercurio.

10-15. Consideremos un oscilador armónico monodimensional relativista, cuya lagrangiana sea

$$L = m_0 c^2 (1 - \sqrt{1 - \beta^2}) - \frac{1}{2} kx^2$$

Obtener la ecuación de movimiento de Lagrange y mostrar que es integrable, dando

$$E = m_0 c^2 + \frac{1}{2} k a^2$$

donde a es la amplitud del movimiento de la partícula oscilante. Demostrar que el período

$$\tau = 4 \int_{x=0}^{x=a} dt$$

puede expresarse

$$\tau = \frac{2a}{\kappa c} \int_0^{\pi/2} \frac{(1 + 2\kappa^2 \cos^2 \varphi)}{\sqrt{1 + \kappa^2 \cos^2 \varphi}} d\varphi$$

Desarrollar el integrando en serie de potencias de $\kappa = (a/2) \sqrt{k/m_0 c^2}$ y demostrar que, hasta la primera potencia de κ ,

$$\tau \cong \tau_0 \left(1 + \frac{3}{16} \frac{ka^2}{m_0 c^2} \right)$$

donde τ_0 es el período no relativista de las pequeñas oscilaciones, $2\pi \sqrt{m_0/k}$.

10-16. Demostrar que la energía cinética relativista de una partícula desviada un ángulo ψ por una partícula blanco, de igual masa en reposo, es

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{2 \cos^2 \psi}{(\gamma_1 + 1) - (\gamma_1 - 1) \cos^2 \psi}$$

que se reduce a la $9.25a$ en el límite no relativista ($\gamma_1 \rightarrow 1$). Representar gráficamente $T_1(\psi)$ para la dispersión neutrón-protón en los casos de neutrón incidente con energías de 100 MeV, 1 GeV y 10 GeV.

El movimiento en un sistema de referencia no inercial

11.1 Introducción

En todo lo tratado a lo largo de los capítulos 2 y 7 pusimos en evidencia la ventaja de tomar sistemas de referencia iniciales para describir procesos dinámicos. Si bien es siempre posible, desde luego, expresar las ecuaciones de movimiento de un sistema respecto de un sistema inercial, existen problemas para los que tales ecuaciones serían sumamente complicadas, por lo cual es mucho más fácil estudiar dichos sistemas representándolos en sistemas de referencia no iniciales.

Por ejemplo, es evidentemente tentador utilizar un sistema de coordenadas fijo con relación a la Tierra para representar el movimiento de una partícula que se encuentre sobre la superficie de la misma, o próxima a ella. No obstante, es sabido que nuestro planeta se halla sometido a un movimiento complicado, compuesto de numerosas rotaciones (y, por tanto, de aceleraciones) respecto de un sistema de referencia inercial que se identifica con las estrellas «fijas». Por consiguiente, el sistema de coordenadas de la Tierra es un sistema de referencia *no inercial* y, por ello, aunque la solución a muchos problemas pueda obtenerse con el grado de aproximación deseada ignorando tal circunstancia, hay muchos fenómenos importantes que son el resultado de la naturaleza no inercial del sistema de coordenadas de la Tierra.

Asimismo, en el estudio del movimiento del sólido rígido que se llevará a cabo en el capítulo siguiente encontraremos conveniente utilizar sistemas de referencia no iniciales y haremos uso de gran parte del tema que ahora pasamos a desarrollar.

11.2 Sistemas de coordenadas giratorios

Supongamos dos sistemas de ejes coordenados, uno de los cuales será el sistema «fijo», o inercial, y el otro será un sistema cualquiera que puede encontrarse en movimiento con relación al anterior. Respectivamente, diremos que son los ejes «fijos» y los ejes «giratorios», siendo x'_i y x_i las coordenadas correspondientes. En la figura 11-1 tenemos, para un punto P cualquiera,

$$\mathbf{r}' = \mathbf{R} + \mathbf{r} \quad (11.1)$$

donde \mathbf{r}' es el vector de posición de P en el sistema fijo y \mathbf{r} lo es en el sistema giratorio. El vector \mathbf{R} sitúa el origen del sistema giratorio respecto del sistema fijo.

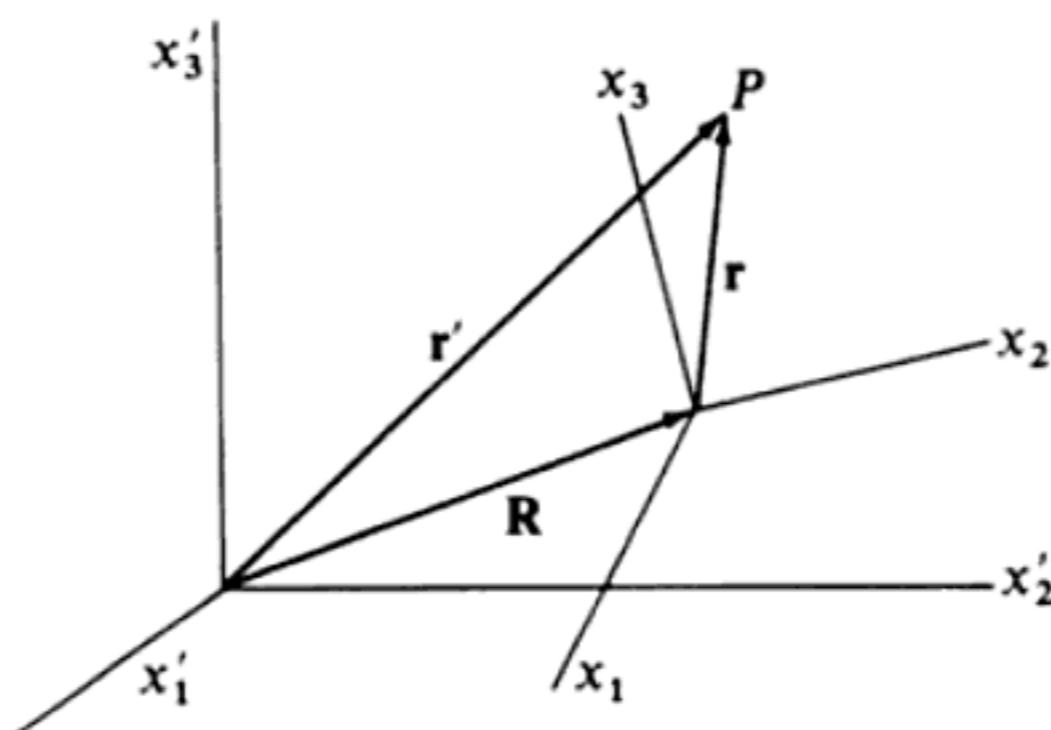


FIG. 11-1

Todo desplazamiento infinitesimal puede representarse siempre mediante una rotación pura en torno de un cierto eje llamado *eje instantáneo de rotación*. Por ejemplo, el movimiento instantáneo de un disco que rueda hacia abajo a lo largo de un plano inclinado puede representarse como una rotación en torno del punto de contacto entre el disco y el plano. Por lo tanto, si el sistema x_i sufre una rotación infinitesimal $d\theta$, que corresponde a un desplazamiento infinitesimal cualquiera, el movimiento de P (que, por ahora, supondremos en reposo en el sistema x_i) puede quedar descrito según la expresión 1.106 en la forma

$$(d\mathbf{r})_{\text{fijo}} = d\theta \times \mathbf{r} \quad (11.2)$$

donde explícitamente se hace constar el adjetivo «fijo» para dejar claro que la cantidad $d\mathbf{r}$ se mide en el sistema x'_i , o «fijo». Dividiendo esta igualdad por el intervalo de tiempo dt , durante el cual tiene lugar la rotación infinitesimal, obtendremos la variación de \mathbf{r} por unidad de tiempo, medida en el sistema de coordenadas fijo:

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{fijo}} = \frac{d\theta}{dt} \times \mathbf{r} \quad (11.3)$$

o sea, como la velocidad angular es

$$\boldsymbol{\omega} \equiv \frac{d\theta}{dt} \quad (11.4)$$

tendremos

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{fijo}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \text{ (para } P \text{ fijo en el sistema } x_i\text{)} \quad (11.5)$$

Si ahora hacemos que el punto P tenga una velocidad $(d\mathbf{r}/dt)_{\text{giratorio}}$ respecto del sistema giratorio x_i , dicha velocidad deberá sumarse a $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ para obtener la variación de \mathbf{r} por unidad de tiempo en el sistema fijo:

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{fijo}} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{giratorio}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (11.6)$$

Aunque hayamos tomado el vector de posición \mathbf{r} para deducir la igualdad 11.6, la validez de ésta no se reduce a dicho vector, ya que, para un vector cualquiera \mathbf{Q} , tenemos

$$\left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\right)_{\text{fijo}} = \left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\right)_{\text{giratorio}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{Q} \quad (11.7)$$

Observemos, por ejemplo, que la aceleración angular $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ es la misma tanto en el sistema fijo como en el móvil:

$$\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_{\text{fijo}} = \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_{\text{giratorio}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \equiv \dot{\boldsymbol{\omega}} \quad (11.8)$$

puesto que $\omega \times \omega$ desaparece y $\dot{\omega}$ representa el valor común a los dos sistemas.

La relación 11.7 puede utilizarse ahora para obtener la expresión de la velocidad del punto P medido en el sistema de coordenadas fijo. De 11.1 tenemos

$$\left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_{\text{fijo}} = \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right)_{\text{fijo}} + \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{fijo}} \quad (11.9)$$

por lo cual

$$\left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_{\text{fijo}} = \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right)_{\text{fijo}} + \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{giratorio}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (11.10)$$

Definiendo

$$\mathbf{v}_f \equiv \dot{\mathbf{r}}_f \equiv \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_{\text{fijo}} \quad (11.11a)$$

$$\mathbf{V} \equiv \dot{\mathbf{R}}_f \equiv \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right)_{\text{fijo}} \quad (11.11b)$$

$$\mathbf{v}_r \equiv \dot{\mathbf{r}}_r \equiv \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{giratorio}} \quad (11.11c)$$

podemos escribir

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{V} + \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

(11.12)

donde

\mathbf{v}_f = velocidad respecto de los ejes fijos

\mathbf{V} = velocidad lineal del origen móvil

\mathbf{v}_r = velocidad respecto de los ejes en rotación

$\boldsymbol{\omega}$ = velocidad angular de los ejes en rotación

$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ = velocidad debida a la rotación de los ejes móviles

11.3 Fuerza de Coriolis

Hemos visto que la fórmula de Newton $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ sólo es válida en un sistema de referencia inercial y, en consecuencia, la expresión de la fuerza que actúa sobre una partícula puede obtenerse de

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_f = m\left(\frac{d\mathbf{v}_f}{dt}\right)_{\text{fijo}} \quad (11.13)$$

en donde la derivación debe efectuarse respecto del sistema fijo. Derivando 11.12 y particularizando para el caso de *velocidad angular constante* (de manera que $\dot{\omega}=0$, limitación que no es muy restrictiva para los problemas que aquí examinamos), tendremos

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{R}}_f + m\left(\frac{d\mathbf{v}_r}{dt}\right)_{\text{fijo}} + m\boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{fijo}} \quad (11.14)$$

El segundo término del segundo miembro puede calcularse utilizando la igualdad 11.7, en la que sustituiremos \mathbf{Q} por \mathbf{v}_r :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{v}_r}{dt}\right)_{\text{fijo}} &= \left(\frac{d\mathbf{v}_r}{dt}\right)_{\text{giratorio}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r \\ &= \mathbf{a}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r \end{aligned} \quad (11.15)$$

donde \mathbf{a}_r es la aceleración en el sistema de coordenadas giratorio. El último término de 11.14 puede obtenerse directamente de 11.6:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{fijo}} &= \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{giratorio}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (11.16)$$

Combinando las igualdades 11.14 a 11.16, se obtiene

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{R}}_f + m\mathbf{a}_r + m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = 0 \quad (11.17)$$

donde $\ddot{\mathbf{R}}_f$ es la aceleración del origen del sistema de coordenadas móvil respecto del sistema fijo.

En gran número de casos prácticos, tendremos que tratar con sistemas x_i cuyos orígenes no posean aceleraciones importantes respecto al sistema de referencia inercial. Es decir, los sistemas x_i tendrán sólo rotación, o bien, a lo sumo, rotación y traslación uniforme respecto del sistema fijo. En estas condiciones, $\ddot{\mathbf{R}}_f = 0$ y se tendrá

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_f = m\mathbf{a}_r + 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r + m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (11.18)$$

Para un observador del sistema de coordenadas giratorio, la fuerza efectiva que se ejerce sobre una partícula viene dada por*

$$\mathbf{F}_{ef} \equiv m\mathbf{a}_r = m\mathbf{a}_f - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r \quad (11.19)$$

La primera cantidad de la expresión es el término habitual de la fórmula de Newton y la cantidad $-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ el término corriente correspondiente a la *fuerza centrífuga*, que se reduce a $-m\omega^2 r$ cuando $\boldsymbol{\omega}$ es normal al vector de posición. Adviértase que el signo negativo implica que la fuerza centrífuga tiene el sentido de *alejamiento* del centro de rotación (véase 11.2).

El último término de 11.19 es una cantidad totalmente nueva que tiene su origen en el movimiento de la partícula dentro del sistema de coordenadas en rotación y recibe el nombre de *fuerza de Coriolis*. Obsérvese que realmente la fuerza de Coriolis tiene su origen en el *movimiento* de la partícula, ya que es proporcional a v_r , y por ello se anulará cuando no exista movimiento.

Dado que (en distintas ocasiones) hemos empleado el término de «fuerza centrífuga» y ahora hemos presentado el de «fuerza de Coriolis», será preciso que investiguemos acerca del significado físico de estas magnitudes. Es importante que comprendamos que la fuerza centrífuga y la fuerza de Coriolis no son «fuerzas» en el sentido corriente de la palabra, sino que han sido introducidas artificiosa-

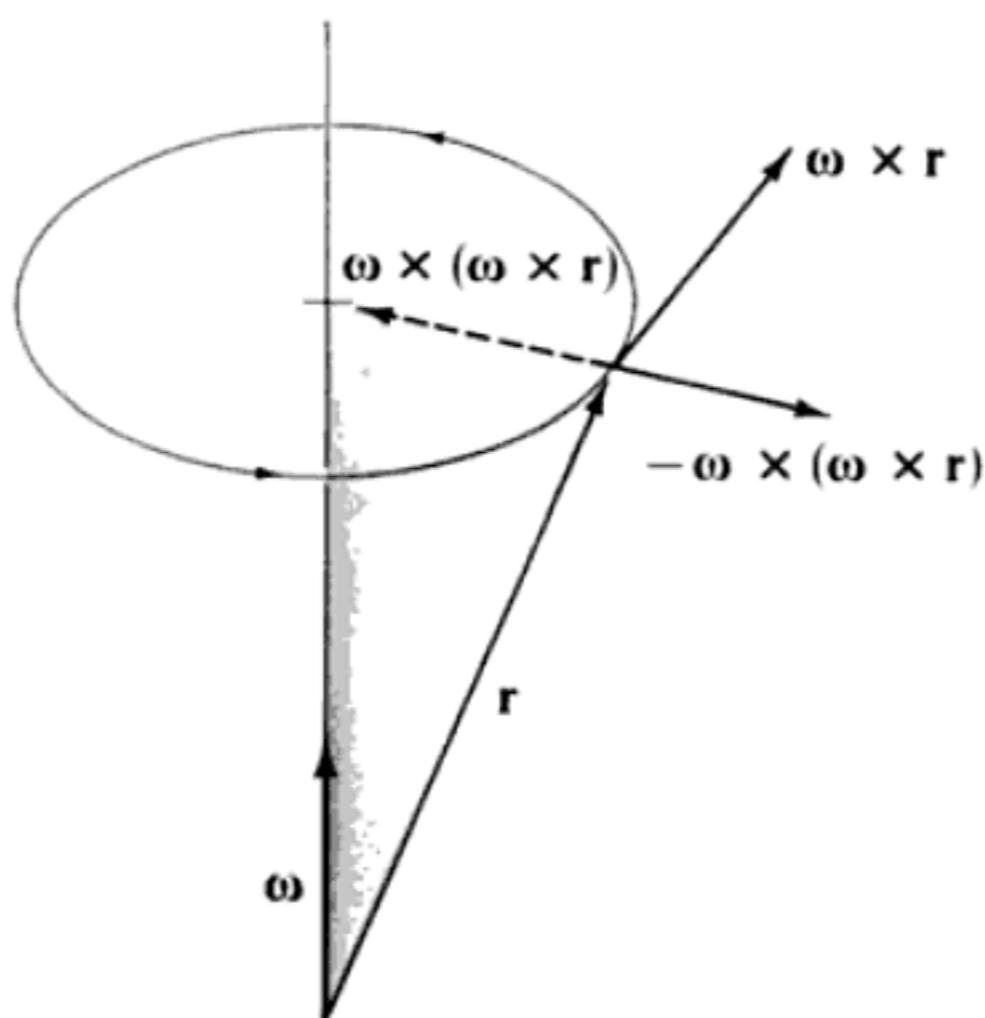


FIG. 11-2

* Esta conclusión fue publicada en 1835 por G. G. CORIOLIS. La teoría de la composición de aceleraciones fue una generalización del análisis de las ruedas hidráulicas efectuado por él mismo.

mente como consecuencia de nuestra exigencia caprichosa de que se pueda escribir una ecuación parecida a la de Newton y que a la vez sea válida en un sistema de referencia no inercial. O sea, la ecuación

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_f$$

sólo es válida en un sistema inercial. Si, para un sistema de referencia giratorio, queremos escribir

$$\mathbf{F}_{ef} = m\mathbf{a}_r$$

podremos expresar como sigue esta ecuación, en función de la fuerza real $m\mathbf{a}_f$,

$$\mathbf{F}_{ef} = m\mathbf{a}_f + (\text{términos no iniciales})$$

donde los «términos no iniciales» se identifican como las «fuerzas» centrífuga y de Coriolis. Así, por ejemplo, cuando un cuerpo gira en torno de un centro de fuerzas fijo, la única fuerza real que se ejerce sobre aquél es la fuerza de atracción dirigida hacia el centro de fuerzas (y que da origen a la aceleración *centrípeta*). No obstante, un observador que se mueva con el cuerpo en rotación medirá esta fuerza central y, además, notará que el cuerpo no cae hacia el centro de fuerzas. Entonces, para conciliar este hecho con la condición de que sea nula la fuerza total sobre el cuerpo, el observador deberá postular la existencia de una fuerza adicional: la fuerza centrífuga. Ahora bien, esta «condición» es artificiosa; procede exclusivamente del intento de ampliar formalmente la fórmula de Newton a los sistemas no iniciales, lo cual sólo puede hacerse introduciendo una «fuerza de corrección» ficticia. Análogos comentarios caben con relación a la fuerza de Coriolis; esta «fuerza» aparece cuando se intenta describir el movimiento respecto del cuerpo giratorio.

Pese a su artificiosidad, la utilidad de las ideas de fuerzas centrífuga y de Coriolis es evidente. Claramente, la descripción del movimiento de una partícula con relación a un cuerpo que se encuentra en rotación respecto de un sistema de referencia inercial es una cuestión complicada. Por otra parte, el problema puede hacerse relativamente cómodo por el sencillo expediente de introducir las «fuerzas no iniciales» que permitirán el uso de una ecuación de movimiento similar a la de Newton.

11.4 El movimiento con relación a la Tierra

En el movimiento de la Tierra respecto de un sistema inercial predomina el de rotación en torno de su propio eje siendo comparativamente pequeños los efectos

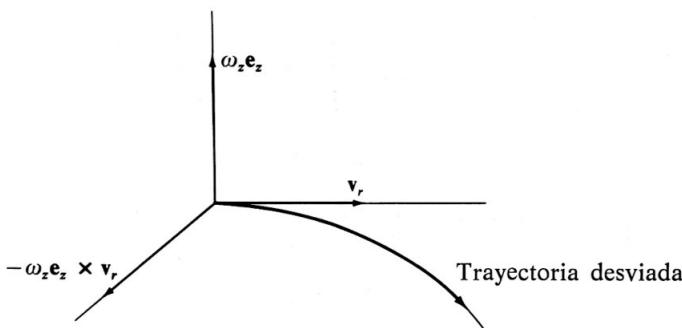


FIG. 11-3

de los demás movimientos (rotación alrededor del Sol, movimiento del Sistema Solar respecto de la galaxia local, etc.). Consecuentemente, podemos suponer en buena aproximación que un sistema de coordenadas fijo con relación a la Tierra se encuentra en rotación pura respecto a un sistema de referencia inercial y, por tanto, podremos aplicar la ecuación 11.19 a los problemas de movimiento sobre la superficie terrestre o en sus proximidades.

El vector velocidad angular ω que representa la rotación de la Tierra alrededor de su propio eje está dirigido hacia el norte. Por lo tanto, en el Hemisferio Norte, ω posee una componente ω_z dirigida *hacia fuera* según la vertical local. Si se lanza una partícula según un plano horizontal (del sistema de coordenadas local en la superficie de la Tierra) a una velocidad v_r , entonces la fuerza de Coriolis $-2m\omega \times v_r$ tendrá una componente sobre dicho plano de módulo $2m\omega_z v_r$ que estará dirigida hacia la *derecha* del movimiento de la partícula (véase figura 11-3), resultando una desviación del movimiento original de la misma.*

Como el módulo de la componente horizontal de la fuerza de Coriolis es proporcional a la componente vertical de ω , la parte de esta fuerza responsable de la desviación de los movimientos dependerá de la latitud, siendo máxima en el Polo Norte y nula en el Ecuador. En el Hemisferio Sur, la componente ω_z está dirigida *hacia dentro* según la vertical local, por lo que todas las desviaciones tienen el sentido contrario de las correspondientes al Hemisferio Norte.**

* POISSON estudió la desviación de proyectiles en 1837.

** Durante el encuentro naval que tuvo lugar en las proximidades de las islas Malvinas al comienzo de la Primera Guerra Mundial, los artilleros británicos vieron con sorpresa como sus cuidadosamente apuntadas salvas caían 100 yardas a la izquierda de los barcos alemanes. Quienes diseñaron los mecanismos de puntería conocían bien la existencia de la desviación de Coriolis y la habían tenido muy en cuenta, pero evidentemente se hallaban bajo la impresión de que todas las batallas navales habían de tener lugar a 50° de latitud N y nunca a 50° de latitud S. En consecuencia, los disparos británicos caían a una distancia de los blancos igual al *doble* de la desviación de Coriolis.

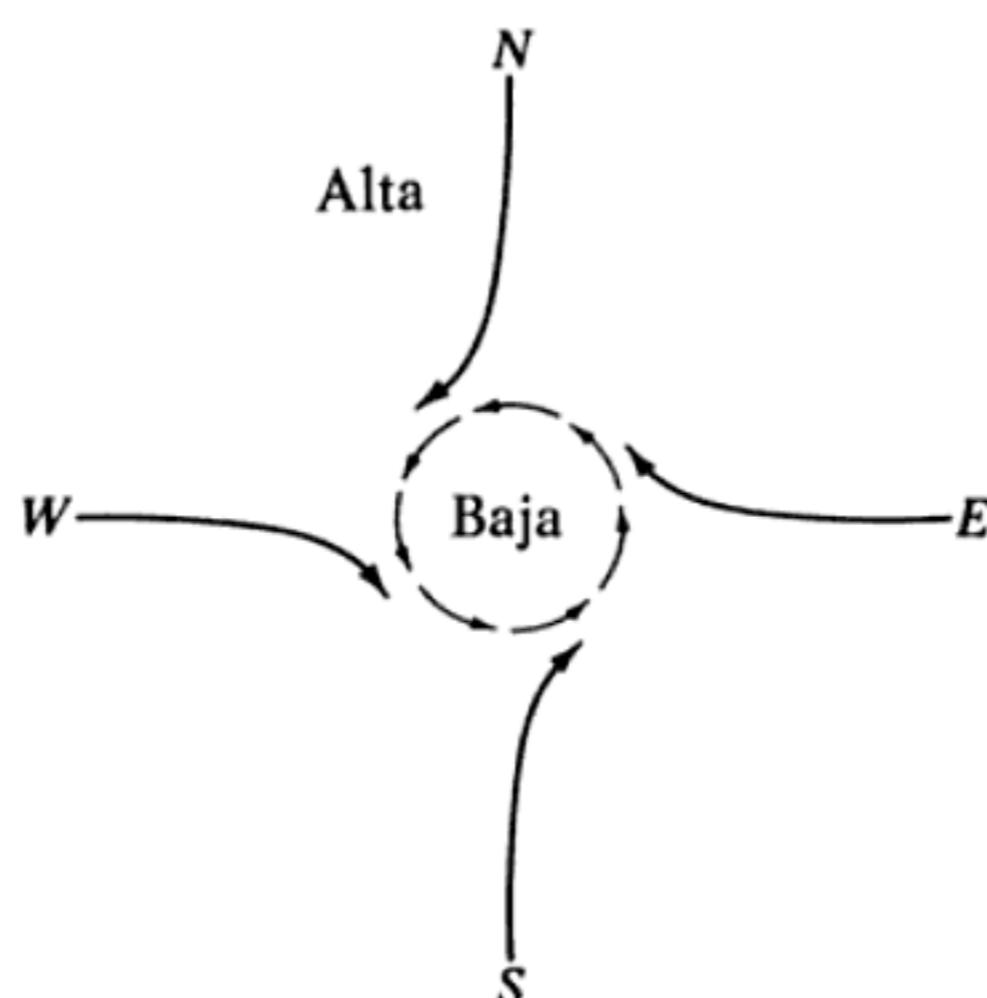


FIG. 11-4

Es asimismo interesante observar que el flujo radial de las masas de aire desde las regiones de presiones altas a las regiones de presiones bajas produce, al estar influido por la fuerza de Coriolis (en el Hemisferio Norte), el movimiento ciclónico, tal como se representa en la figura 11-4. Si bien el movimiento verdadero de las masas de aire es, desde luego, mucho más complicado, las características cualitativas del movimiento ciclónico quedan correctamente descritas considerando los efectos de la fuerza de Coriolis. El movimiento del agua en remolinos es (al menos, en principio) una situación similar, aunque en la realidad haya otros factores (distintas perturbaciones y el momento cinético residual) que predominen sobre la fuerza de Coriolis, encontrándose que los remolinos pueden moverse en ambos sentidos. (Aun en condiciones de laboratorio es sumamente difícil aislar el efecto de Coriolis.)

Observemos que cuando consideremos el movimiento dentro del campo gravitatorio terrestre, la cantidad que llamamos aceleración debida a la gravedad (es decir, g o vector \mathbf{g}) será realmente una combinación de la aceleración gravitatoria verdadera (como la definida en relación a la ley de la gravitación universal) y la aceleración aparente hacia fuera (o sea la aceleración centrífuga), resultante del hecho de que nuestro sistema de coordenadas sea fijo respecto de la Tierra en rotación. O sea, \mathbf{g} sólo está definido en función de las medidas que hagamos: el módulo está determinado por el período del péndulo y su dirección y sentido, por el que adquiere la plomada en equilibrio; así, pues, en \mathbf{g} ya está incluido el término $-\omega \times (\omega \times \mathbf{r})$. A causa de todo esto, la dirección de \mathbf{g} en un punto dado es en general ligeramente diferente de la vertical auténtica (si ésta se define como la dirección de la recta que une el punto con el centro de la Tierra). (Véase problema 11-7.)

◆ **Ejemplo 11.4(a) Desviación de una partícula en una caída**

Vamos a examinar la desviación horizontal debida a la fuerza de Coriolis que experimenta una partícula cuando cae libremente en el campo gravitatorio terrestre. El valor que toma ω en la ecuación 11.19 será el correspondiente a la rotación de la Tierra:

$$\omega = \frac{2\pi \text{ rad/día}}{86\,400 \text{ s/día}} \cong 7,29 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$$

La aceleración de la partícula viene dada por

$$\mathbf{a}_r = \mathbf{g} - 2\omega \times \mathbf{v}_r, \quad (1)$$

donde \mathbf{g} es la aceleración debida a la gravedad. Tomemos un eje z dirigido verticalmente hacia fuera desde la superficie terrestre. Definido así \mathbf{e}_z , completaremos la construcción de un triedro de referencia a derechas situando \mathbf{e}_x y \mathbf{e}_y tal como se indica en la figura 11-5, en direcciones sur y este respectivamente. Haremos la simplificación de suponer que la distancia de caída es lo suficientemente pequeña para que g sea prácticamente constante durante todo el proceso.

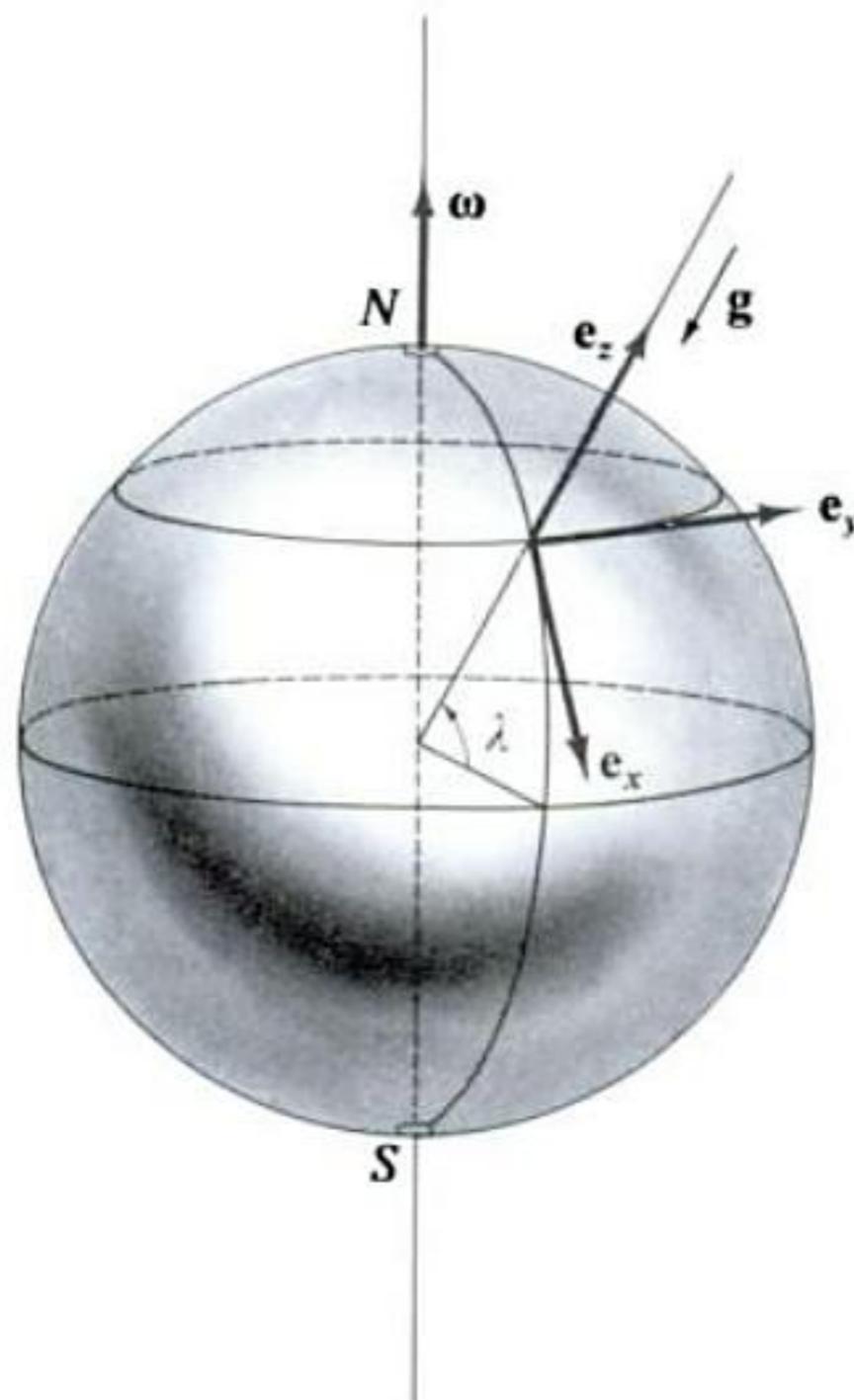


FIG. 11-5

Como hemos situado el origen O del sistema giratorio en el Hemisferio Norte,* tendremos

$$\left. \begin{array}{l} \omega_x = -\omega \cos \lambda \\ \omega_y = 0 \\ \omega_z = \omega \sin \lambda \end{array} \right\} \quad (2)$$

Aunque la fuerza de Coriolis producirá componentes de la velocidad en las direcciones de \mathbf{e}_y y \mathbf{e}_x , realmente podemos despreciar \dot{x} e \dot{y} frente a la componente vertical de la velocidad \dot{z} . Entonces, aproximadamente,

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} \cong 0 \\ \dot{y} \cong 0 \\ \dot{z} \cong -gt \end{array} \right\} \quad (3)$$

donde se ha obtenido \dot{z} suponiendo una caída desde el reposo. Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r &\cong \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ -\omega \cos \lambda & 0 & \omega \sin \lambda \\ 0 & 0 & -gt \end{vmatrix} \\ &\cong -(\omega g t \cos \lambda) \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (4)$$

Las componentes de \mathbf{g} son (despreciando ω^2 ; véase problema 11-7):

$$\left. \begin{array}{l} g_x = 0 \\ g_y = 0 \\ g_z = -g \end{array} \right\} \quad (5)$$

por lo que las componentes de \mathbf{a}_r se hacen

$$\left. \begin{array}{l} (\mathbf{a}_r)_x = \ddot{x} \cong 0 \\ (\mathbf{a}_r)_y = \ddot{y} \cong 2\omega g t \cos \lambda \\ (\mathbf{a}_r)_z = \ddot{z} \cong -g \end{array} \right\} \quad (6)$$

* Dado que el punto O no se mueve uniformemente respecto de un sistema inercial, no está realmente justificado que utilicemos la ecuación 11.19 que se obtuvo bajo la hipótesis de que $\ddot{\mathbf{R}}_f = 0$. No obstante, cuando el movimiento es cercano a la superficie terrestre, el término proporcional a $\ddot{\mathbf{R}}_f$ sólo da una pequeña contribución que puede despreciarse.

Así, pues, el efecto de la fuerza de Coriolis es producir una aceleración en la dirección de \mathbf{e}_y , o sea en la dirección este. Integrando \ddot{y} dos veces, tenemos

$$y(t) \cong \frac{1}{3}\omega g t^3 \cos \lambda \quad (7)$$

donde $y=0$ e $\dot{y}=0$ cuando $t=0$. Integrando \dot{z} se obtiene la conocida expresión de la distancia de caída

$$z(t) \cong z(0) - \frac{1}{2}gt^2 \quad (8)$$

de forma que el tiempo de caída desde una altura $h=z(0)$ viene dado por

$$t \cong \sqrt{2h/g} \quad (9)$$

Resulta, pues, que la desviación hacia el este de una partícula que cae a partir del reposo desde una altura h en un punto de latitud norte λ es*

$$d \cong \frac{1}{3}\omega \cos \lambda \sqrt{8h^3/g} \quad (10)$$

Por tanto, un cuerpo que caiga desde una altura de 100 m a una latitud de 45° N se desviará aproximadamente 1,55 cm (despreciando los efectos de la resistencia del aire).

◆ Ejemplo 11.4(b) Otro método de cálculo

Para poner de manifiesto la eficacia del método de Coriolis para obtener las ecuaciones de movimiento en un sistema de referencia no inercial, volvamos a resolver el ejemplo anterior pero utilizando sólo el formalismo que habíamos desarrollado antes, o sea, la teoría del movimiento en campos centrales.

Si, desde una altura h sobre la superficie de la Tierra, dejamos libre una partícula de masa m pequeña, la trayectoria que describirá será una porción de cónica —una elipse de $\epsilon \cong 1$ con uno de los focos muy cerca del centro de la Tierra. Si r_0 es el radio de la Tierra y λ la latitud (norte), en el momento de quedar libre tendrá una velocidad horizontal dirigida hacia el este:

$$v_{hor} = r\omega \cos \lambda = (r_0 + h)\omega \cos \lambda \quad (1)$$

* La desviación hacia el este fue predicha por NEWTON (1679), apareciendo diversos experimentos para confirmarlo (especialmente los de Robert Hooke). Posiblemente las medidas más cuidadosas fueran las de F. REICH (1831, publicadas en 1833) quien arrojaba bolas al pozo de una mina de 188 m de profundidad. La desviación media observada fue de 28 mm, que es inferior a la que se obtiene de la expresión 10, lo cual es debido a los efectos de la resistencia del aire. En todas las experiencias se observó una pequeña desviación de componente sur que no pudo ser explicada hasta que se tomó en cuenta el teorema de Coriolis (véase problema 11-7).

siendo el momento cinético respecto al eje polar

$$l = mrv_{\text{hor}} = m(r_0 + h)^2\omega \cos \lambda \quad (2)$$

La ecuación de la trayectoria es*

$$\frac{\alpha}{r} = 1 - \varepsilon \cos \theta \quad (3)$$

si se mide θ a partir de la posición inicial de la partícula (véase figura 11-6). En el instante $t=0$, tenemos

$$\frac{\alpha}{r_0 + h} = 1 - \varepsilon \quad (4)$$

de manera que la ecuación 3 puede escribirse

$$r = \frac{(1 - \varepsilon)(r_0 + h)}{1 - \varepsilon \cos \theta} \quad (5)$$

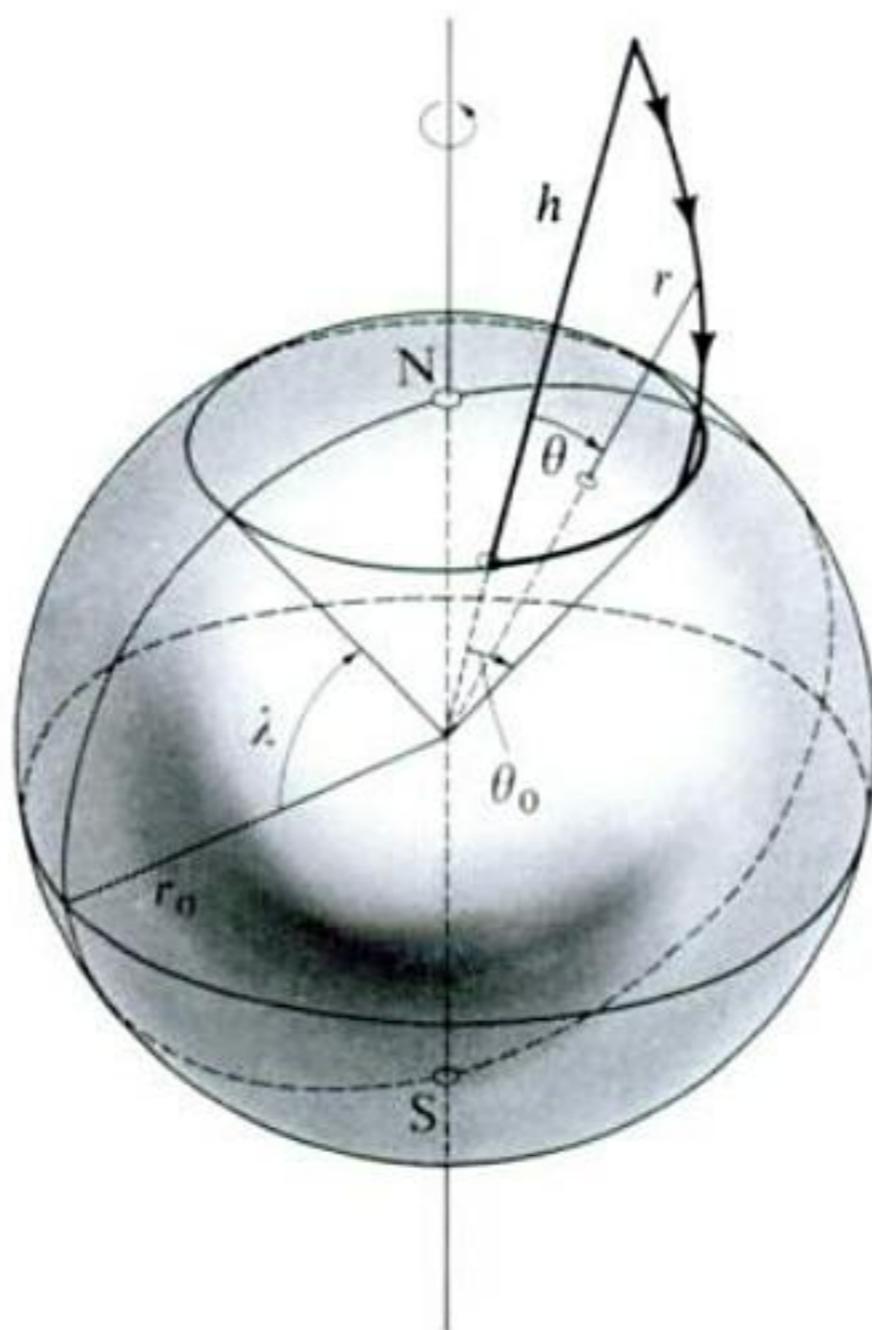


FIG. 11-6

* Obsérvese que hay un cambio de signo entre la ecuación 3 y la 8.32 debido a los distintos orígenes de θ en ambos casos.

Ahora, según la expresión 8.12 de la velocidad areolar, podemos escribir

$$\frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{2m} \quad (6)$$

y, entonces, el tiempo t necesario para describir un ángulo θ será

$$t = \frac{m}{l} \int_0^\theta r^2 d\theta \quad (7)$$

donde, al sustituir los valores de l y r dados por 2 y 5, respectivamente, resultará

$$t = \frac{1}{\omega \cos \lambda} \int_0^\theta \left(\frac{1 - \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos \theta} \right)^2 d\theta \quad (8)$$

Haciendo $\theta = \theta_0$ cuando la partícula haya alcanzado la superficie terrestre ($r = r_0$), la ecuación 5 quedará

$$\frac{r_0}{r_0 + h} = \frac{1 - \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos \theta_0} \quad (9)$$

o sea, cambiando el orden de dividendos y divisores,

$$\begin{aligned} 1 + \frac{h}{r_0} &= \frac{1 - \varepsilon \cos \theta_0}{1 - \varepsilon} \\ &= \frac{1 - \varepsilon[1 - 2 \sin^2(\theta_0/2)]}{1 - \varepsilon} \\ &= 1 + \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon} \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \end{aligned} \quad (10)$$

de donde tendremos

$$\frac{h}{r_0} = \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon} \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \quad (11)$$

Por otra parte, como la trayectoria descrita por la partícula es casi vertical, el ángulo θ variará poco entre el punto de partida y el de llegada a la superficie de la Tierra; en consecuencia, θ_0 será pequeño pudiendo sustituirse $\sin(\theta_0/2)$ muy aproximadamente por su argumento:

$$\frac{h}{r_0} \approx \frac{\varepsilon \theta_0^2}{2(1 - \varepsilon)} \quad (12)$$

Si desarrollamos el integrando de la igualdad 8 por el mismo procedimiento seguido para obtener la ecuación 10, encontramos

$$t = \frac{1}{\omega \cos \lambda} \int_0^\theta \frac{d\theta}{\{1 + [2\varepsilon/(1-\varepsilon)] \operatorname{sen}^2(\theta/2)\}^2} \quad (13)$$

y, como θ es pequeño, resulta

$$t \cong \frac{1}{\omega \cos \lambda} \int_0^\theta \frac{d\theta}{[1 + \varepsilon \theta^2/2(1-\varepsilon)]^2} \quad (14)$$

Llevando a esta igualdad el valor de $\varepsilon/2(1-\varepsilon)$ dado por 12 y representando por $t(\theta=\theta_0)=T$ el tiempo de caída total, obtenemos

$$\begin{aligned} T &\cong \frac{1}{\omega \cos \lambda} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{[1 + (h\theta^2/r_0 \theta_0^2)]^2} \\ &\cong \frac{1}{\omega \cos \lambda} \int_0^{\theta_0} \left(1 - \frac{2h}{r_0 \theta_0^2} \theta^2\right) d\theta \\ &= \frac{1}{\omega \cos \lambda} \left(1 - \frac{2h}{3r_0}\right) \theta_0 \end{aligned} \quad (15)$$

Despejando θ_0 , tenemos

$$\theta_0 \cong \frac{\omega T \cos \lambda}{1 - 2h/3r_0} \cong \omega T \cos \lambda \left(1 + \frac{2h}{3r_0}\right) \quad (16)$$

Durante el tiempo T que dura la caída, la Tierra gira un ángulo ωT , por lo que el punto de la superficie terrestre situado inmediatamente debajo de la posición inicial se moverá hacia el este una longitud $r_0 \omega T \cos \lambda$. Durante este mismo tiempo, la partícula se desviará hacia el este una longitud $r_0 \theta_0$. Entonces, la desviación total d hacia el este será

$$\begin{aligned} d &= r_0 \theta_0 - r_0 \omega T \cos \lambda \\ &= \frac{2}{3} h \omega T \cos \lambda \end{aligned} \quad (17)$$

y tomando $T \cong \sqrt{2h/g}$ como en el ejemplo anterior, tendremos, al final,

$$d \cong \frac{1}{3} \omega \cos \lambda \sqrt{\frac{8h^3}{g}} \quad (18)$$

que es un resultado idéntico al obtenido anteriormente.

◆ Ejemplo 11.4(c) Péndulo de Foucault*

El efecto de la fuerza de Coriolis sobre el movimiento del péndulo es originar una *precesión*, o rotación a través del tiempo del plano de oscilación. Para estudiar este efecto, tomemos un triedro de ejes coordenados cuyo origen se encuentre en el punto de equilibrio del péndulo y con el eje z situado según la vertical local. Nos interesaremos únicamente por el giro del plano de oscilación; es decir, nos proponemos examinar el movimiento de la lenteja del péndulo sobre el plano x - y (plano horizontal). En consecuencia, limitaremos el movimiento a oscilaciones de pequeña amplitud, en las que los desplazamientos máximos horizontales son pequeños en comparación con la longitud del péndulo. En tales condiciones, \dot{z} será pequeña frente a \dot{x} e \dot{y} , pudiendo despreciarse.

La ecuación de movimiento es

$$\mathbf{a}_r = \mathbf{g} + \frac{\mathbf{T}}{m} - 2\omega \times \mathbf{v}_r \quad (1)$$

donde \mathbf{T}/m es la aceleración debida a la fuerza de tensión \mathbf{T} de la cuerda del péndulo, tal como se representa en la figura 11-7. Tenemos, pues, muy aproximadamente,

$$\left. \begin{aligned} T_x &= -T \cdot \frac{x}{l} \\ T_y &= -T \cdot \frac{y}{l} \\ T_z &\approx T \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

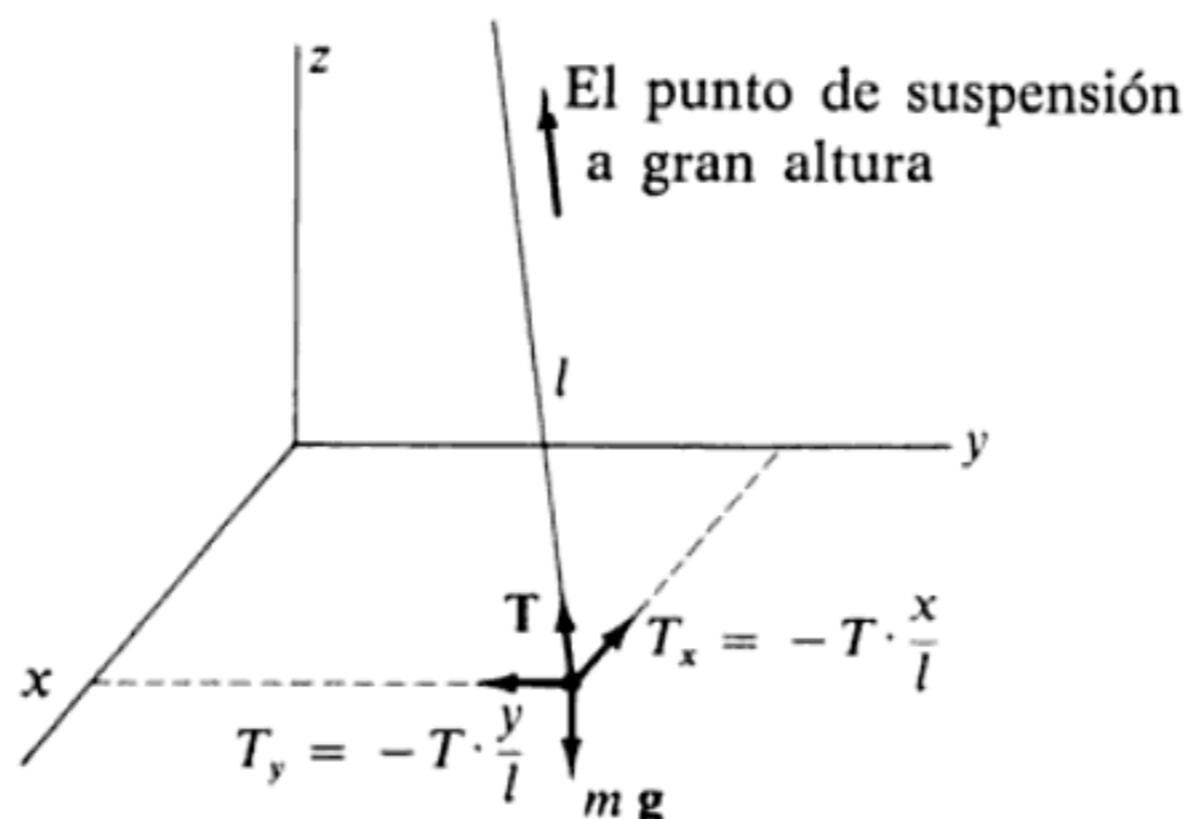


FIG. 11-7

* Ideado en 1851 por el físico francés Jean Léon FOUCAULT (1819-1868).

Como antes,

$$\left. \begin{array}{l} g_x = 0 \\ g_y = 0 \\ g_z = -g \end{array} \right\} \quad (3)$$

y

$$\left. \begin{array}{l} \omega_x = -\omega \cos \lambda \\ \omega_y = 0 \\ \omega_z = \omega \operatorname{sen} \lambda \end{array} \right\} \quad (4)$$

con

$$\left. \begin{array}{l} (\mathbf{v}_r)_x = \dot{x} \\ (\mathbf{v}_r)_y = \dot{y} \\ (\mathbf{v}_r)_z = \dot{z} \cong 0 \end{array} \right\} \quad (5)$$

Por lo tanto,

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r \cong \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ -\omega \cos \lambda & 0 & \omega \operatorname{sen} \lambda \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} \quad (6)$$

con lo cual

$$\left. \begin{array}{l} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r)_x \cong -\dot{y} \omega \operatorname{sen} \lambda \\ (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r)_y \cong \dot{x} \omega \operatorname{sen} \lambda \\ (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r)_z \cong -\dot{y} \omega \cos \lambda \end{array} \right\} \quad (7)$$

Así, pues, las ecuaciones que nos interesan son

$$\left. \begin{array}{l} (\mathbf{a}_r)_x = \ddot{x} \cong -\frac{T}{m} \cdot \frac{x}{l} + 2\dot{y} \omega \operatorname{sen} \lambda \\ (\mathbf{a}_r)_y \cong \ddot{y} \cong -\frac{T}{m} \cdot \frac{y}{l} - 2\dot{x} \omega \operatorname{sen} \lambda \end{array} \right\} \quad (8)$$

Para desplazamientos pequeños, $T \cong mg$. Haciendo, por definición, $\alpha^2 = T/ml \cong g/l$, y escribiendo $\omega_z = \omega \operatorname{sen} \lambda$, tendremos

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{x} + \alpha^2 x \cong 2\omega_z \dot{y} \\ \ddot{y} + \alpha^2 y \cong -2\omega_z \dot{x} \end{array} \right\} \quad (9)$$

Advirtamos que la ecuación de \ddot{x} contiene un término en \dot{y} y que la ecuación de \ddot{y} contiene un término en \dot{x} . De estas ecuaciones se dice que son *ecuaciones acopladas*.

La resolución de este sistema de ecuaciones acopladas puede efectuarse sumando a la primera de ellas la segunda multiplicada por i :

$$\begin{aligned} (\ddot{x} + i\ddot{y}) + \alpha^2(x + iy) &\cong -2\omega_z(i\dot{x} - \dot{y}) \\ &= -2i\omega_z(\dot{x} + iy) \end{aligned} \quad (10)$$

Haciendo

$$q \equiv x + iy \quad (11)$$

tendremos

$$\ddot{q} + 2i\omega_z\dot{q} + \alpha^2q \cong 0 \quad (12)$$

que es una ecuación idéntica a la 3.38 que describe las oscilaciones amortiguadas, salvo que ahora el término que representa el factor de amortiguamiento es imaginario puro. La solución es (cfr. 3.40)

$$q(t) \cong \exp[-i\omega_z t] [A \exp(\sqrt{-\omega_z^2 - \alpha^2} t) + B \exp(-\sqrt{-\omega_z^2 - \alpha^2} t)] \quad (13)$$

Ahora, si la Tierra no girase, de forma que $\omega_z = 0$, la ecuación en q se transformaría en

$$\ddot{q}' + \alpha^2 q' \cong 0, \quad \omega_z = 0 \quad (14)$$

de donde se ve que α corresponde a la pulsación de oscilación del péndulo. Evidentemente, esta pulsación es muy superior a la velocidad angular de rotación de la Tierra. O sea, $\alpha \gg \omega_z$, y la expresión de $q(t)$ se hará

$$q(t) \cong e^{-i\omega_z t} (Ae^{i\alpha t} + Be^{-i\alpha t}) \quad (15)$$

Esta igualdad puede interpretarse con mayor facilidad si se observa que la ecuación en q' anterior posee la solución

$$q'(t) = x'(t) + iy'(t) = Ae^{i\alpha t} + Be^{-i\alpha t} \quad (16)$$

Entonces,

$$q(t) = q'(t) \cdot e^{-i\omega_z t} \quad (17)$$

o sea,

$$\begin{aligned} x(t) + iy(t) &= [x'(t) + iy'(t)] \cdot e^{-i\omega_z t} \\ &= [x' + iy'][\cos \omega_z t - i \operatorname{sen} \omega_z t] \\ &= [x' \cos \omega_z t + y' \operatorname{sen} \omega_z t] \\ &\quad + i[-x' \operatorname{sen} \omega_z t + y' \cos \omega_z t] \end{aligned} \quad (18)$$

Igualando las partes real e imaginaria

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= x' \cos \omega_z t + y' \operatorname{sen} \omega_z t \\ y(t) &= -x' \operatorname{sen} \omega_z t + y' \cos \omega_z t \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

que pueden ponerse en forma matricial

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega_z t & \operatorname{sen} \omega_z t \\ -\operatorname{sen} \omega_z t & \cos \omega_z t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \quad (20)$$

de donde resulta evidente que (x, y) puede obtenerse de (x', y') mediante la aplicación de una matriz de giro de la forma conocida

$$\lambda = \begin{pmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (21)$$

Así, pues, el ángulo de rotación es $\theta = \omega_z t$, y el plano de oscilación del péndulo gira, por tanto, con una velocidad angular $\omega_z = \omega \operatorname{sen} \lambda$. La observación de esta rotación constituye una demostración evidente de que la Tierra gira.*

Referencias recomendadas

El movimiento respecto de sistemas de referencia acelerados se estudia en la mayoría de los libros de dinámica. Los desarrollos más detallados son los de BECKER (Be54, cap. 11), FOWLES (Fo62, cap. 5), HALFMAN (Ha62a, cap. 5) y SYMON (Sy60, cap. 7).

Tratamientos más breves son los de BRADBURY (Br68, cap. 10), CONSTANT (Co54, secciones 5 a 8), GOLDSTEIN (Go50, secciones 4-8 y 4-9), MACCUSKEY (Mc59, secciones 1-14 y 1-15) y PAGE (Pa52, secciones 31-33).

* Vincenzo VIVIANI (1622-1703), discípulo de Galileo, ya había observado en 1650 que los péndulos sufren una rotación lenta, pero no hay evidencia de que interpretara correctamente el fenómeno. El invento del giróscopo por parte de FOUCALUT al año siguiente de la presentación de su péndulo proporcionó la forma de comprobar de forma visual aún más palpable la rotación de la Tierra.

Problemas

11-1. Calcular la aceleración centrífuga debida a la rotación de la Tierra que actúa sobre una partícula situada en el ecuador de la superficie terrestre y comparar el resultado con la aceleración de la gravedad. Calcular también la aceleración centrífuga debida al movimiento de la Tierra alrededor del Sol, justificando la observación hecha en el texto de que dicha aceleración puede despreciarse en comparación con la aceleración debida a la rotación axial.

11-2. Obténgase una expresión para la desviación angular de una partícula que se lanza desde el Polo Norte según una trayectoria próxima a la Tierra. ¿Es importante la desviación de un misil que efectúa un vuelo de 5000 km en 10 minutos? ¿Cuál es la «distancia de error» cuando el misil se apunta exactamente al blanco? ¿Será mayor la «distancia de error» para un vuelo de 20 000 km a la misma velocidad?

11-3. Cuando una partícula se lanza verticalmente hacia arriba desde un punto de la superficie terrestre situado a una latitud norte λ , demostrar que toma contacto con el suelo en un punto situado a $\frac{4}{3}\omega \cos \lambda \sqrt{8h^3/g}$ hacia el oeste. (Despréciense la resistencia del aire y supóngase sólo alturas verticales pequeñas.)

11-4. Cuando un proyectil se dispara hacia el este desde un punto de la superficie terrestre situado a una latitud norte λ , con una velocidad de módulo V_0 y un ángulo de inclinación sobre la horizontal α , demostrar que la desviación lateral cuando el proyectil cae sobre la Tierra es

$$d = \frac{4V_0^3}{g^2} \cdot \omega \sin \lambda \cdot \sin^2 \alpha \cos \alpha$$

donde ω es la velocidad de rotación terrestre.

11-5. En el problema anterior, si el alcance del proyectil es R para el caso $\omega=0$, demostrar que la variación de alcance debida a la rotación de la Tierra es

$$\Delta R = \sqrt{\frac{2R^3}{g}} \cdot \omega \cos \lambda [\operatorname{ctg}^{\frac{1}{2}} \alpha - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^{\frac{1}{2}} \alpha]$$

11-6. Demostrar que la desviación angular de la plomada ε respecto de la vertical correcta en un punto de la superficie terrestre de latitud λ es

$$\varepsilon = \frac{r_0 \omega^2 \sin \lambda \cos \lambda}{g - r_0 \omega^2 \cos^2 \lambda}$$

donde r_0 es el radio de la Tierra. ¿Cuál es el valor (en segundos de arco) de la desviación máxima?

11-7. Volvamos al ejemplo 11.4(a) referente a la desviación de una partícula que cae en el seno del campo gravitatorio terrestre. Efectuar el cálculo en segunda aproximación (o sea, reteniendo los términos en ω^2) demostrando que existe una desviación de *componente sur*

$$d_s \cong \frac{3}{2} \frac{h^2 \omega^2}{g} \operatorname{sen} \lambda \cos \lambda$$

11-8. Examíñese la descripción del movimiento de una partícula en un sistema de coordenadas que gira uniformemente respecto de un sistema de referencia inercial y obténgase la lagrangiana de la partícula. Calcúlese, a continuación, la hamiltoniana e inténtese identificarla a la energía total. (¿Se cumplen todos los requisitos para esta identificación?) La expresión de la energía total que así se obtiene consta de los sumandos habituales $\frac{1}{2}mv^2 + U$ más un término adicional. Demuéstrese que el término adicional es la *energía potencial centrífuga*. Por último, demuéstrese que es posible definir un *potencial efectivo* para este problema que es precisamente el utilizado en el problema de las fuerzas centrales (véase 8.25).

Dinámica de sistemas rígidos

12.1 Introducción

Por definición, sistema rígido es todo conjunto de partículas obligadas a permanecer a distancias relativas absolutamente fijas. Por supuesto, no existen en la naturaleza sistemas de esta clase, ya que las últimas partículas componentes que forman todos los cuerpos (los átomos) están siempre sometidas a algún movimiento relativo. Este movimiento, no obstante, es de naturaleza microscópica, por lo cual puede generalmente ignorarse a efectos de la descripción del movimiento macroscópico del sistema. Por otra parte, pueden tener lugar dentro de éste desplazamientos macroscópicos (como son las deformaciones elásticas), pero para muchos de los cuerpos que nos interesan podemos despreciar sin peligro las variaciones de tamaño y forma producidas por tales deformaciones, obteniendo ecuaciones de movimiento válidas con alto grado de precisión.

Asimismo, es evidente que existe una limitación relativista a la idea de sistema totalmente rígido. Por ejemplo, consideremos una barra larga de un cierto material. Descargando un golpe en uno de los extremos de la misma, y si ésta fuera absolutamente rígida, el efecto se haría sentir inmediatamente en el extremo opuesto. Pero esto correspondería a la transmisión de una señal a velocidad infinita, cosa que por relatividad sabemos que es imposible. (Realmente, la velocidad de transmisión de una señal como ésta en una barra metálica, del orden de

(10^5 cm s^{-1} , es más bien baja comparada con la de la luz y depende de las propiedades elásticas del material.)

Haremos uso intercambiablemente de un sistema rígido ideal como conjunto discreto de partículas o como distribución continua de materia, y la única diferencia será la sustitución de sumatorias extendidas a las partículas por integraciones extendidas a distribuciones másicas. Las ecuaciones de movimiento serán igualmente válidas para cualquiera de los dos puntos de vista.

Para representar el movimiento de un sistema rígido, haremos uso de dos sistemas de coordenadas: un sistema inercial y un sistema de coordenadas fijo respecto del cuerpo. Deberán darse seis cantidades para definir la posición del cuerpo, las cuales pueden ser las coordenadas del centro de masa (que a menudo puede convenir que coincida con el origen del sistema de coordenadas del cuerpo) y tres ángulos independientes que den la orientación del sistema de coordenadas del cuerpo respecto del sistema fijo (o inercial)*. Puede convenir que estos tres ángulos independientes sean los *ángulos de Euler*, que se definen en la sección 12.7.

Es obvio intuitivamente que todo movimiento finito, cualquiera que sea, de un sistema rígido puede considerarse suma de dos movimientos independientes: una traslación lineal de algún punto del cuerpo y una rotación en torno a dicho punto.** Cuando este punto sea el centro de masa, esta descomposición en dos partes permitirá la aplicación de lo desarrollado en el capítulo 2, según lo cual el momento cinético (véase 2.38) y la energía cinética (véase 2.54) pueden separarse en dos partes responsables del movimiento *del* centro de masa y del movimiento *alrededor* del centro de masa.

Cuando la energía potencial sea también separable (como será siempre el caso, por ejemplo, de la energía potencial en un campo de fuerzas uniforme), la lagrangiana será a su vez separable, y el problema entero se divide convenientemente en dos partes, una de las cuales concierne solamente a la traslación y la otra solamente a la rotación, pudiendo resolverse cada una de ellas con independencia de la otra.*** Esta separación es fundamental para una descripción relativamente sencilla del movimiento de los sistemas rígidos.

12.2 Tensor de inercia

Dirijamos ahora nuestra atención a un sistema rígido compuesto de n partículas de masas m_α , $\alpha = 1, 2, 3, \dots, n$. Si el mismo gira a velocidad angular instantánea

* En este capítulo diremos *sistema del cuerpo* en lugar de *sistema giratorio*, como hicimos en el capítulo anterior. Conservaremos la expresión *sistema fijo*.

** El *teorema de Chasles*, aún más general que esta afirmación (afirma que pueden hacerse coincidir la línea de traslación y el eje de rotación), fue demostrado por el matemático francés Michel CHASLES (1793-1880) en 1830. La exposición puede verse, p.e., en WHITTAKER (Wh37, página 4).

*** Fue EULER quien, en 1749, se dio cuenta por primera vez de este extremo.

tánea ω en torno de algún punto fijo respecto del sistema de coordenadas del cuerpo, y si este punto se mueve con una velocidad instantánea \mathbf{V} respecto del sistema de coordenadas fijo, la velocidad instantánea de la α -ésima partícula en el sistema fijo podrá obtenerse mediante la igualdad 11.12. Pero, en este caso estamos considerando un sistema rígido, por lo cual,

$$\mathbf{v}_r = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_{\text{giratorio}} \equiv 0$$

y, por lo tanto,

$$\boxed{\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha} \quad (12.1)$$

donde el subíndice f , que se refiere al sistema fijo, se ha suprimido de la velocidad \mathbf{v}_α , quedando bien entendido que todas las velocidades están medidas en el sistema fijo; todas las velocidades respecto del sistema giratorio o del cuerpo se anulan ahora porque el cuerpo es *rígido*.

Como la energía cinética de la α -ésima partícula viene dada por

$$T_\alpha = \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 \quad (12.2)$$

la energía cinética total será

$$T = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha)^2 \quad (12.3)$$

de donde, al desarrollar el cuadrado, resultará

$$T = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha V^2 + \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha + \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha)^2 \quad (12.4)$$

que es una expresión general de la energía cinética, válida cualquiera que sea el origen a partir del cual se midan los vectores \mathbf{r}_α . No obstante, si situamos el origen del sistema de coordenadas del cuerpo en coincidencia con el centro de masa del mismo, resultará una simplificación considerable. En primer lugar, advirtamos que en el segundo término del segundo miembro de la última expresión aparecen \mathbf{V} y $\boldsymbol{\omega}$, ninguna de las cuales es característica de la α -ésima partícula, por lo cual pueden sacarse fuera del sumatorio:

$$\sum_\alpha m_\alpha \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha = \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \left(\sum_\alpha m_\alpha \mathbf{r}_\alpha \right) \quad (12.5)$$

Pero ahora, el término

$$\sum m_\alpha \mathbf{r}_\alpha = M\mathbf{R}$$

resulta ser el vector de posición del centro de masa (cfr. 2.25) que en el sistema de coordenadas del cuerpo será nulo, ya que los vectores \mathbf{r}_α se miden a partir del centro de masa. La energía cinética podrá escribirse entonces

$$T = T_{\text{tras}} + T_{\text{rot}}$$

donde

$$T_{\text{tras}} = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha V^2 = \frac{1}{2} M V^2 \quad (12.6a)$$

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha)^2 \quad (12.6b)$$

representando T_{tras} y T_{rot} las energías cinéticas de translación y rotación respectivamente. Así, pues, la energía cinética se separa en dos partes independientes, como se indicó en la primera sección del capítulo.

El término representante de la energía cinética de rotación puede calcularse observando que

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \times \mathbf{B})^2 &= (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \\ &= A^2 B^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2 \end{aligned}$$

y, en consecuencia,

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha [\omega^2 r_\alpha^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_\alpha)^2] \quad (12.7)$$

Expresemos ahora T_{rot} haciendo uso de las componentes ω_i y $r_{\alpha,i}$ de los vectores $\boldsymbol{\omega}$ y \mathbf{r}_α . Observemos también que $\mathbf{r}_\alpha = (x_{\alpha,1}, x_{\alpha,2}, x_{\alpha,3})$ en el sistema del cuerpo, por lo que podemos escribir $r_{\alpha,i} = x_{\alpha,i}$. Entonces,

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha \left[\left(\sum_i \omega_i^2 \right) \left(\sum_k x_{\alpha,k}^2 \right) - \left(\sum_i \omega_i x_{\alpha,i} \right) \left(\sum_j \omega_j x_{\alpha,j} \right) \right] \quad (12.8)$$

Evidentemente, ahora podemos escribir $\omega_i = \sum_j \omega_j \delta_{ij}$ de manera que

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \sum_\alpha \sum_{i,j} m_\alpha \left[\omega_i \omega_j \delta_{ij} \left(\sum_k x_{\alpha,k}^2 \right) - \omega_i \omega_j x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_i \omega_j \sum_\alpha m_\alpha \left[\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right] \end{aligned} \quad (12.9)$$

Representando por I_{ij} el elemento ij -ésimo de la suma extendida a α ,

$$I_{ij} \equiv \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right] \quad (12.10)$$

tendremos

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} I_{ij} \omega_i \omega_j \quad (12.11)$$

Esta igualdad, en su forma más restringida se hace

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (12.12)$$

donde I es el momento (escalar) de inercia respecto al eje de rotación. En esta igualdad reconocemos la conocida expresión de la energía cinética de rotación que se ofrece en los textos elementales.

Los nueve términos I_{ij} constituyen las componentes de una magnitud que representaremos por $\{I\}$ y cuya forma es la de una matriz 3×3 . Veamos que $\{I\}$ es el coeficiente de proporcionalidad entre la energía cinética de rotación y la velocidad angular, poseyendo unas dimensiones de $(\text{masa}) \times (\text{longitud})^2$, y, puesto que $\{I\}$ relaciona dos magnitudes físicas tan diferentes, cabe esperar que forme parte de alguna clase de funciones de orden superior al de las encontradas hasta aquí. En efecto, $\{I\}$ es un *tensor* que recibe el nombre de *tensor de inercia*.* Adviértase, no obstante, que T_{rot} puede calcularse, sin tener en cuenta las propiedades particulares de los tensores, mediante la igualdad 12.9 que especifica por completo las operaciones necesarias.

Las componentes de $\{I\}$ pueden obtenerse directamente de 12.10. Escribámoslas, para mayor claridad, en disposición de matriz 3×3 :

$$\{I\} = \begin{pmatrix} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha,2}^2 + x_{\alpha,3}^2) & -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha,1} x_{\alpha,2} & -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha,1} x_{\alpha,3} \\ -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha,2} x_{\alpha,1} & \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha,1}^2 + x_{\alpha,3}^2) & -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha,2} x_{\alpha,3} \\ -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha,3} x_{\alpha,1} & -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha,3} x_{\alpha,2} & \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha,1}^2 + x_{\alpha,2}^2) \end{pmatrix} \quad (12.13)$$

* La prueba auténtica de que una magnitud es un tensor reside en su comportamiento en los cambios de coordenadas (véase sección 12.6).

Los elementos diagonales de esta matriz, I_{11} , I_{22} e I_{33} reciben el nombre de *momento de inercia* respecto de los ejes x_1 , x_2 y x_3 , respectivamente y los opuestos de los elementos no diagonales, I_{12} , I_{13} , etc., el de *productos de inercia*.* Evidentemente el tensor de inercia es simétrico, es decir,

$$I_{ij} = I_{ji} \quad (12.14)$$

y, por tanto, $\{I\}$ posee sólo seis componentes independientes. Además, el tensor de inercia es aditivo; o sea, el tensor de inercia de un cuerpo puede considerarse formado por la suma de los tensores de inercia de las distintas porciones del mismo. En consecuencia, si suponemos que un cuerpo es una distribución continua de materia con una densidad mísica $\rho = \rho(\mathbf{r})$, será

$$I_{ij} = \int_V \rho(\mathbf{r}) \left[\delta_{ij} \sum_k x_k^2 - x_i x_j \right] dv \quad (12.15)$$

donde $dv = dx_1 dx_2 dx_3$ es el elemento de volumen en el punto definido por el vector \mathbf{r} y V el volumen del cuerpo.

◆ Ejemplo 12.2 Tensor de inercia de un cubo

Como ejemplo de cálculo de las componentes del tensor de inercia, consideraremos un cubo homogéneo de densidad ρ , masa M y arista de longitud b . Situemos el origen de coordenadas en uno de los vértices y los tres ejes de coordenadas sobre las tres aristas contiguas correspondientes a dicho vértice (véase figura 12-1). (Evidentemente,

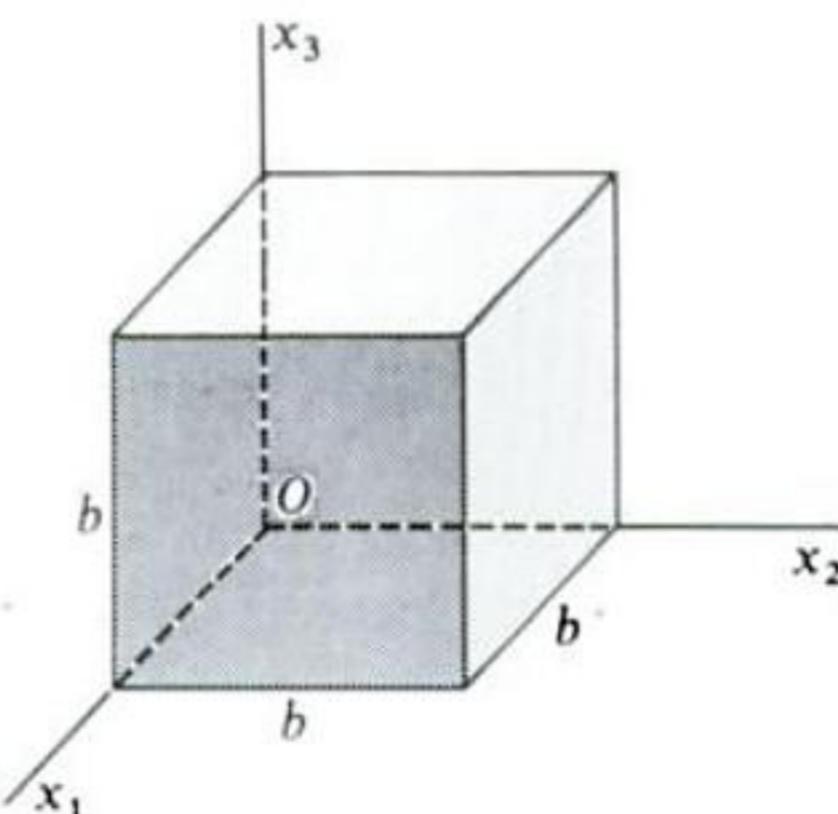


FIG. 12-1

* Introducidos por HUYGENS en 1673; EULER acuñó el nombre.

con los ejes dispuestos de esta forma el origen ya no coincide con el centro de masa; volveremos sobre este extremo más adelante.)

De acuerdo con 12.15, tenemos

$$\begin{aligned} I_{11} &= \rho \int_0^b dx_3 \int_0^b dx_2 (x_2^2 + x_3^2) \int_0^b dx_1 \\ &= \frac{2}{3} \rho b^5 = \frac{2}{3} M b^2 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} I_{12} &= -\rho \int_0^b x_1 dx_1 \int_0^b x_2 dx_2 \int_0^b dx_3 \\ &= -\frac{1}{4} \rho b^5 = -\frac{1}{4} M b^2 \end{aligned} \quad (2)$$

Es fácil ver que todos los elementos diagonales de la matriz son iguales y que, además, también lo son los elementos no diagonales. Si hacemos $\beta \equiv M b^2$, tendremos

$$\left. \begin{array}{l} I_{11} = I_{22} = I_{33} = \frac{2}{3} \beta \\ I_{12} = I_{13} = I_{23} = -\frac{1}{4} \beta \end{array} \right\} \quad (3)$$

y el tensor de inercia quedará

$$\{I\} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \beta & -\frac{1}{4} \beta & -\frac{1}{4} \beta \\ -\frac{1}{4} \beta & \frac{2}{3} \beta & -\frac{1}{4} \beta \\ -\frac{1}{4} \beta & -\frac{1}{4} \beta & \frac{2}{3} \beta \end{pmatrix} \quad (4)$$

En secciones posteriores proseguiremos con el estudio del tensor de inercia de un cubo.

12.3 Momento cinético

El momento cinético del cuerpo respecto de un punto O , fijo en el sistema de coordenadas del cuerpo, es

$$\mathbf{L} = \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha} \quad (12.16)$$

El lugar más conveniente donde se sitúe el punto O dependerá de cada problema particular. Únicamente existen dos posibilidades de verdadera importancia: (a) Cuando uno o más puntos del cuerpo son fijos (en el sistema de coordenadas fijo), O se hace coincidir con uno de éstos (tal es el caso de la peonza giratoria, sec. 12.10);

(b) cuando el cuerpo no posea ningún punto fijo, O se hace coincidir con el centro de masa.

Referido al sistema de coordenadas del cuerpo, el ímpetu \mathbf{p}_α es

$$\mathbf{p}_\alpha = m_\alpha \mathbf{v}_\alpha = m_\alpha \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha$$

y, de aquí, el momento cinético del cuerpo será

$$\mathbf{L} = \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{r}_\alpha \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha) \quad (12.17)$$

La identidad vectorial

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) = A^2 \mathbf{B} - \mathbf{A}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

puede utilizarse para expresar \mathbf{L} como sigue

$$\boxed{\mathbf{L} = \sum_\alpha m_\alpha [r_\alpha^2 \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}_\alpha (\mathbf{r}_\alpha \cdot \boldsymbol{\omega})]} \quad (12.18)$$

El mismo procedimiento que seguimos para escribir T_{rot} en forma tensorial podemos aplicarlo ahora aquí. Ahora bien, el momento cinético es un vector, cuya componente i escribiremos

$$\begin{aligned} L_i &= \sum_\alpha m_\alpha \left[\omega_i \sum_k x_{\alpha, k}^2 - x_{\alpha, i} \sum_j x_{\alpha, j} \omega_j \right] \\ &= \sum_\alpha m_\alpha \sum_j \left[\omega_j \delta_{ij} \sum_k x_{\alpha, k}^2 - \omega_j x_{\alpha, i} x_{\alpha, j} \right] \\ &= \sum_j \omega_j \sum_\alpha m_\alpha \left[\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha, k}^2 - x_{\alpha, i} x_{\alpha, j} \right] \end{aligned} \quad (12.19)$$

donde en el sumatorio extendido sobre α puede reconocerse (cfr. 12-10) como la componente ij -ésima del tensor de inercia. Por tanto,

$$\boxed{L_i = \sum_j I_{ij} \omega_j} \quad (12.20)$$

o sea, en notación tensorial

$$\mathbf{L} = \{I\} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (12.20a)$$

Así, pues, el tensor de inercia relaciona una *suma* efectuada con las componentes de la velocidad angular con la i -ésima componente del momento cinético. A primera vista, esto puede parecer un resultado algo inesperado; por cuanto si consideramos un cuerpo cuyo tensor de inercia no tenga nulos los elementos no diagonales, entonces, aun cuando ω esté dirigida, por ejemplo, según la dirección x_1 , $\omega = (\omega_1, 0, 0)$, el momento cinético tendrá, en general, componentes no nulas en las tres direcciones: $\mathbf{L} = (L_1, L_2, L_3)$. Es decir, el momento cinético y la velocidad angular no tienen, en general, la misma dirección. (Debemos recalcar que esta afirmación depende de que $I_{ij} \neq 0$ para $i \neq j$; en la sección siguiente volveremos sobre este extremo.)

Como ejemplo de situación en la que ω y \mathbf{L} no sean colineales, consideremos la haltera de la figura 12-2. (Se supone que el eje que une m_1 y m_2 carece de peso y es inextensible.) La relación que liga \mathbf{r}_α , \mathbf{v}_α y ω es

$$\mathbf{v}_\alpha = \omega \times \mathbf{r}_\alpha$$

y la que liga \mathbf{r}_α , \mathbf{v}_α y \mathbf{L} es

$$\mathbf{L} = \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{v}_\alpha$$

Evidentemente, entonces, ω está dirigida según el eje de rotación, mientras que \mathbf{L} es normal a la recta que une m_1 y m_2 .

Vemos que, para este ejemplo, el momento cinético \mathbf{L} no permanece constante con el tiempo, sino que gira a velocidad angular constante ω describiendo un cono cuyo eje es el eje de rotación. Por lo tanto, $\dot{\mathbf{L}} \neq 0$; pero, según 2.11,

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N}$$

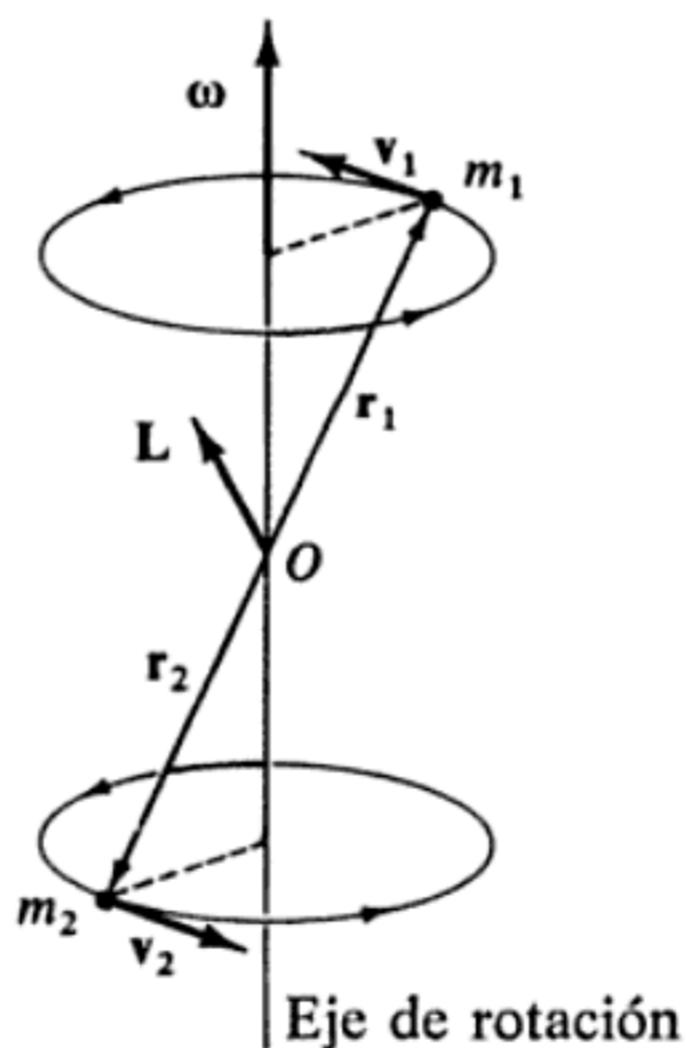


FIG. 12-2

donde \mathbf{N} es el momento del par aplicado al cuerpo. Resulta, pues, que para mantener girando la haltera como en la figura 12-2, debemos aplicar un par constantemente.

Si en 12.20 multiplicamos L_i por $\frac{1}{2}\omega_i$ y sumamos sobre el subíndice i , podemos extraer otra conclusión:

$$\frac{1}{2} \sum_i \omega_i L_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j} I_{ij} \omega_i \omega_j = T_{\text{rot}} \quad (12.21)$$

donde la segunda igualdad es precisamente 12.11. Entonces,

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} \quad (12.21a)$$

Las expresiones 12.20a y 12.21a ilustran dos importantes propiedades de los tensores. El producto de un tensor por un vector da otro vector, como en

$$\mathbf{L} = \{I\} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

y el producto de un tensor por dos vectores da un escalar, como en

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \{I\} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

No obstante, no tendremos aquí ocasión de utilizar ecuaciones tensoriales escritas de la forma anterior, sino que utilizaremos siempre expresiones sumatorias (o integrales) como las 12.11, 12.15, 12.20, etc.

12.4 Ejes principales de inercia*

Es evidente que si la matriz del tensor de inercia constase únicamente de elementos diagonales, las expresiones de T y \mathbf{L} resultarían considerablemente simplificadas. Si pudiéramos escribir

$$I_{ij} = I_i \delta_{ij} \quad (12.22)$$

el tensor de inercia sería

$$\{I\} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad (12.23)$$

* Definidos por EULER en 1750.

y, en consecuencia, tendríamos

$$L_i = \sum_j I_i \delta_{ij} \omega_j = I_i \omega_i \quad (12.24a)$$

y

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} I_i \delta_{ij} \omega_i \omega_j = \frac{1}{2} \sum_i I_i \omega_i^2 \quad (12.24b)$$

Así, pues, cuando ocurra que $\{I\}$ sólo tenga elementos diagonales, las expresiones del momento cinético y de la energía cinética de rotación se hacen sumamente sencillas. Determinemos ahora las condiciones en que la igualdad 12.22 constituya la representación del tensor de inercia. Esto implica la determinación de un sistema de ejes del cuerpo para los cuales sean nulos los productos de inercia y, por ende, los elementos no diagonales de $\{I\}$. Son éstos los llamados *ejes principales de inercia*.

De acuerdo con 12.24a, cuando un cuerpo gira alrededor de un eje principal, tanto la velocidad angular como el momento cinético están dirigidos según dicho eje y entonces si es I el momento de inercia respecto del mismo, podemos escribir

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega} \quad (12.25)$$

Igualando las componentes de \mathbf{L} dadas por 12.20 y 12.25, tendremos

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= I\omega_1 = I_{11}\omega_1 + I_{12}\omega_2 + I_{13}\omega_3 \\ L_2 &= I\omega_2 = I_{21}\omega_1 + I_{22}\omega_2 + I_{23}\omega_3 \\ L_3 &= I\omega_3 = I_{31}\omega_1 + I_{32}\omega_2 + I_{33}\omega_3 \end{aligned} \right\} \quad (12.26)$$

o sea, reagrupando términos, se obtiene

$$\left. \begin{aligned} (I_{11} - I)\omega_1 + I_{12}\omega_2 + I_{13}\omega_3 &= 0 \\ I_{21}\omega_1 + (I_{22} - I)\omega_2 + I_{23}\omega_3 &= 0 \\ I_{31}\omega_1 + I_{32}\omega_2 + (I_{33} - I)\omega_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12.27)$$

Para que estas ecuaciones posean una solución no trivial habrá de ser cero el determinante de los coeficientes:

$$\begin{vmatrix} (I_{11} - I) & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & (I_{22} - I) & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & (I_{33} - I) \end{vmatrix} = 0 \quad (12.28)$$

El desarrollo de este determinante nos lleva a la *ecuación secular** de I , que es de tercer grado, correspondiendo cada una de sus tres raíces a un momento de inercia respecto de uno de los ejes principales. Estos valores, I_1 , I_2 e I_3 , se llaman *momentos principales de inercia*. Cuando el cuerpo gire en torno del eje correspondiente al momento principal I_1 , 12.25 se hará $\mathbf{L}=I_1\boldsymbol{\omega}$; es decir, tanto $\boldsymbol{\omega}$ como \mathbf{L} estarán dirigidos según este eje. La dirección de $\boldsymbol{\omega}$ respecto del sistema de coordenadas del cuerpo será entonces la misma que la del eje principal correspondiente a I_1 . En consecuencia, podemos determinar la dirección de este eje principal sustituyendo I por I_1 en 12.27 y determinando los cocientes de las componentes de la velocidad angular: $\omega_1:\omega_2:\omega_3$. Con esto, determinamos los cosenos directores del eje respecto del cual el momento de inercia es I_1 . De forma similar pueden encontrarse las direcciones que corresponden a I_2 e I_3 . En la sección 12.6 demostraremos que los ejes principales determinados de esta manera son *reales* y *ortogonales*; estas conclusiones son asimismo consecuencia de las consideraciones más generales que se ofrecen en la sección 13.6.

El hecho de que el método de diagonalización que acabamos de describir nos dé únicamente los *cocientes* de las componentes de $\boldsymbol{\omega}$ no constituye ningún inconveniente, puesto que los cocientes determinan por completo la dirección de cada uno de los ejes principales, y es sólo la dirección de tales ejes lo que necesitamos. En realidad, no podíamos esperar que los *valores* de las ω_i quedasen determinados, puesto que las características particulares del movimiento angular del cuerpo no pueden quedar especificadas únicamente por la geometría y gozamos de libertad para imprimir al cuerpo una velocidad angular del módulo que queramos.

En la mayoría de los problemas que se encuentran en la dinámica de los sistemas rígidos, los cuerpos poseen una cierta forma regular de manera que los ejes principales pueden determinarse mediante un simple examen de la simetría del cuerpo. Por ejemplo, todo cuerpo que sea un sólido de revolución (p. e., una varilla cilíndrica) tendrá uno de los ejes principales coincidentes con el eje de simetría (p. e., la recta central de la varilla simétrica) y los otros dos ejes principales situados en un plano normal a aquél. Evidentemente, como el cuerpo es simétrico, la posición angular de estos dos ejes puede elegirse arbitrariamente. En este caso de sólido de revolución, si el momento de inercia respecto del eje de simetría es I_1 , será $I_2=I_3$; es decir, la ecuación secular tiene una raíz doble.

Si un cuerpo es tal que $I_1=I_2=I_3$, recibe el nombre de *peonza esférica*; cuando $I_1=I_2 \neq I_3$ recibe el nombre de *peonza simétrica* y si los momentos de inercia principales son disintos entre sí, se dice que es una *peonza asimétrica*. Un cuerpo con $I_1=0$ e $I_2=I_3$ se llama motor; por ejemplo, dos masas puntuales unidas por una barra sin peso, o una molécula diatómica.

* Llamada así porque en mecánica celeste se utiliza una ecuación similar para representar perturbaciones seculares. En matemáticas se le llama *ecuación característica* o *de valores propios*.

◆ Ejemplo 12.4 Ejes principales de un cubo

En el ejemplo 12.2(b) encontramos que el tensor de inercia de un cubo (con el origen de coordenadas en un vértice) tiene sus componentes no diagonales distintas de cero. Es evidente que los ejes coordenados que elegimos para aquel cálculo no son ejes principales. Si, por ejemplo, el cubo girase alrededor del eje x_3 , sería $\omega = \omega_3 \mathbf{e}_3$ y las componentes del momento cinético \mathbf{L} (véase 12.26) serían

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= -\frac{1}{4}\beta\omega_3 \\ L_2 &= -\frac{1}{4}\beta\omega_3 \\ L_3 &= \frac{5}{3}\beta\omega_3 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Entonces

$$\mathbf{L} = Mb^2\omega_3(-\frac{1}{4}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{4}\mathbf{e}_2 + \frac{5}{3}\mathbf{e}_3) \quad (2)$$

que evidentemente no tiene la misma dirección que ω .

Para determinar los momentos principales de inercia, debemos resolver la ecuación secular:

$$\begin{vmatrix} \frac{5}{3}\beta - I & -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & \frac{5}{3}\beta - I & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta & \frac{5}{3}\beta - I \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

El valor de un determinante no se altera cuando se suma (o se resta) una fila (o columna) a otra fila (o columna). Si en 3 restamos a la segunda fila la primera, se obtiene una ecuación más fácil de resolver:

$$\begin{vmatrix} \frac{5}{3}\beta - I & -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{2}\beta + I & \frac{1}{2}\beta - I & 0 \\ -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta & \frac{5}{3}\beta - I \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

De la segunda fila podemos sacar factor común ($\frac{1}{2}\beta - I$):

$$(I - \frac{1}{2}\beta) \begin{vmatrix} \frac{5}{3}\beta - I & -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta & \frac{5}{3}\beta - I \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

y, desarrollando, tenemos

$$(I - \frac{1}{2}\beta)[(\frac{5}{3}\beta - I)^2 - \frac{1}{4}\beta^2 - \frac{1}{4}\beta(\frac{5}{3}\beta - I)] = 0 \quad (6)$$

que, descompuesta en factores, nos da

$$(\tfrac{1}{6}\beta - I)(\tfrac{1}{12}\beta - I)(\tfrac{1}{12}\beta - I) = 0 \quad (7)$$

Así, pues, obtenemos las raíces siguientes, que nos dan los momentos principales de inercia

$$I_1 = \tfrac{1}{6}\beta; \quad I_2 = \tfrac{1}{12}\beta; \quad I_3 = \tfrac{1}{12}\beta \quad (8)$$

y el tensor de inercia queda, ya diagonalizado:

$$\{\mathbf{I}\} = \begin{pmatrix} \tfrac{1}{6}\beta & 0 & 0 \\ 0 & \tfrac{1}{12}\beta & 0 \\ 0 & 0 & \tfrac{1}{12}\beta \end{pmatrix} \quad (9)$$

Al ser iguales dos de las raíces, $I_2 = I_3$, el eje principal asociado a I_1 debe ser eje de simetría.

Para determinar la dirección del eje principal de inercia asociado a I_1 , sustituymos I por $I = I_1 = \tfrac{1}{6}\beta$ en la ecuación 12.27:

$$\begin{cases} (\tfrac{2}{3}\beta - \tfrac{1}{6}\beta)\omega_{11} - \tfrac{1}{4}\beta\omega_{21} - \tfrac{1}{4}\beta\omega_{31} = 0 \\ -\tfrac{1}{4}\beta\omega_{11} + (\tfrac{2}{3}\beta - \tfrac{1}{6}\beta)\omega_{21} - \tfrac{1}{4}\beta\omega_{31} = 0 \\ -\tfrac{1}{4}\beta\omega_{11} - \tfrac{1}{4}\beta\omega_{21} + (\tfrac{2}{3}\beta - \tfrac{1}{6}\beta)\omega_{31} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

donde el segundo subíndice 1 en las ω_i significa que estamos considerando el eje principal asociado a I_1 .

Dividiendo por $\beta/4$ las dos primeras de estas ecuaciones, tenemos

$$\begin{cases} 2\omega_{11} - \omega_{21} - \omega_{31} = 0 \\ -\omega_{11} + 2\omega_{21} - \omega_{31} = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Si en estas ecuaciones restamos de la primera la segunda, encontramos $\omega_{11} = \omega_{21}$. Utilizando este resultado en cualquiera de las ecuaciones 11 resulta $\omega_{11} = \omega_{21} = \omega_{31}$, siendo los cocientes buscados

$$\omega_{11} : \omega_{21} : \omega_{31} = 1 : 1 : 1 \quad (12)$$

Por lo tanto, cuando el cubo gira alrededor de un eje al cual está asociado el momento de inercia $I_1 = \tfrac{1}{6}\beta = \tfrac{1}{6}Mb^2$, las proyecciones de ω sobre los tres ejes coordena-

dos son todas iguales. Consecuentemente, este eje principal de inercia corresponde a la diagonal del cubo.

Como los momentos I_2 e I_3 son iguales, la orientación de los ejes principales asociados a estos momentos es arbitraria; únicamente es necesario que estén en un plano normal a la diagonal del cubo.

12.5 Momentos de inercia para distintos sistemas de coordenadas del cuerpo

Para que la energía cinética sea separable en las dos partes correspondientes a la traslación y a la rotación del cuerpo (véase 12.5), será necesario en general tomar un sistema de coordenadas del cuerpo cuyo origen sea el centro de masa del mismo. En el caso de determinadas formas geométricas puede que no sea siempre conveniente calcular las componentes del tensor de inercia utilizando un sistema de coordenadas como ése. En consecuencia, supongamos otro sistema de coordenadas X_i , fijo también respecto del cuerpo y cuyos ejes tengan la misma orientación que los x_i , pero cuyo origen Q no coincida con el origen O (situado en el centro de masa del cuerpo). Q puede encontrarse tanto en el interior como en el exterior del cuerpo en cuestión.

Las componentes del tensor de inercia referidos a los ejes X_i pueden escribirse

$$J_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\delta_{ij} \sum_k X_{\alpha,k}^2 - X_{\alpha,i} X_{\alpha,j} \right] \quad (12.29)$$

Entonces, si el vector que une Q con O es \mathbf{a} , el vector de posición \mathbf{R} de un punto cualquiera respecto de Q podrá escribirse (véase la figura 12-3)

$$\mathbf{R} = \mathbf{a} + \mathbf{r} \quad (12.30)$$

y sus componentes

$$X_i = a_i + x_i \quad (12.30a)$$

Utilizando 12.30a, el elemento J_{ij} de la matriz del tensor se transforma en

$$\begin{aligned} J_{ij} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\delta_{ij} \sum_k (x_{\alpha,k} + a_k)^2 - (x_{\alpha,i} + a_i)(x_{\alpha,j} + a_j) \right] \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right] + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\delta_{ij} \sum_k (2x_{\alpha,k} a_k + a_k^2) \right. \\ &\quad \left. - (a_i x_{\alpha,j} + a_j x_{\alpha,i} + a_i a_j) \right] \end{aligned} \quad (12.31)$$

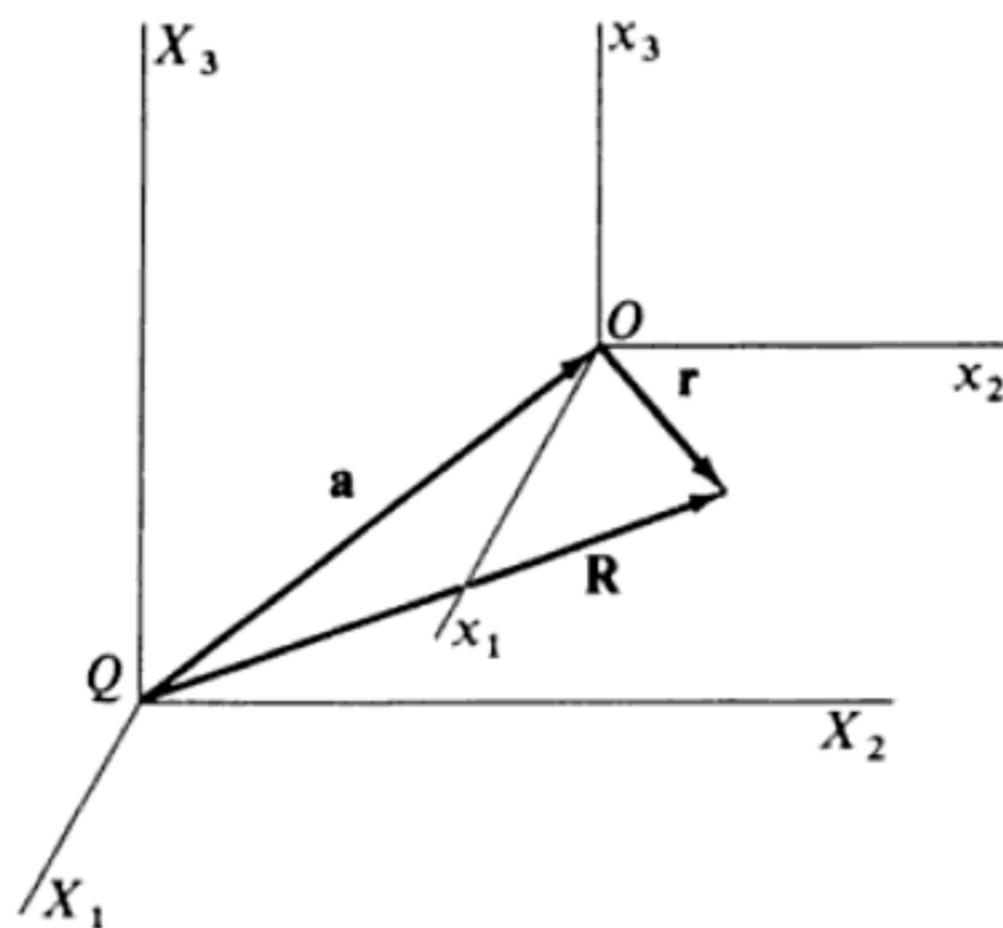


FIG. 12-3

Teniendo en cuenta que el primer sumatorio es I_{ij} , tendremos, tras reagrupar términos,

$$\begin{aligned} J_{ij} = I_{ij} + \sum_{\alpha} m_{\alpha} & \left[\delta_{ij} \sum_k a_k^2 - a_i a_j \right] \\ & + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[2\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha, k} a_k - a_i x_{\alpha, j} - a_j x_{\alpha, i} \right] \end{aligned} \quad (12.32)$$

Ahora bien, cada uno de los términos del último sumatorio contiene una suma de la forma

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha, k}$$

Sin embargo, sabemos que, como O está situado en el centro de masa,

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} = 0$$

o sea, en el caso de la k -ésima componente,

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha, k} = 0$$

Por lo tanto, todos estos términos 12.32 se anulan y tenemos

$$J_{ij} = I_{ij} + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\delta_{ij} \sum_k a_k^2 - a_i a_j \right] \quad (12.33)$$

pero,

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} = M \quad \text{y} \quad \sum_k a_k^2 \equiv a^2$$

Despejando I_{ij} , obtenemos el resultado

$$I_{ij} = J_{ij} - M[a^2 \delta_{ij} - a_i a_j] \quad (12.34)$$

que permite el cálculo de las componentes I_{ij} del tensor de inercia buscado (con origen en el centro de masa), una vez conocidas las correspondientes a los ejes X_i . El segundo término del segundo miembro de 12.34 es el tensor de inercia de una masa puntual M referido al origen Q .

La igualdad 12.34 constituye la expresión general del *teorema de Steiner**, cuya forma simplificada aparece en los textos elementales. Sea, por ejemplo, la figura 12-4; en ella, la componente I_{11} es

$$\begin{aligned} I_{11} &= J_{11} - M[(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \delta_{11} - a_1^2] \\ &= J_{11} - M(a_2^2 + a_3^2) \end{aligned}$$

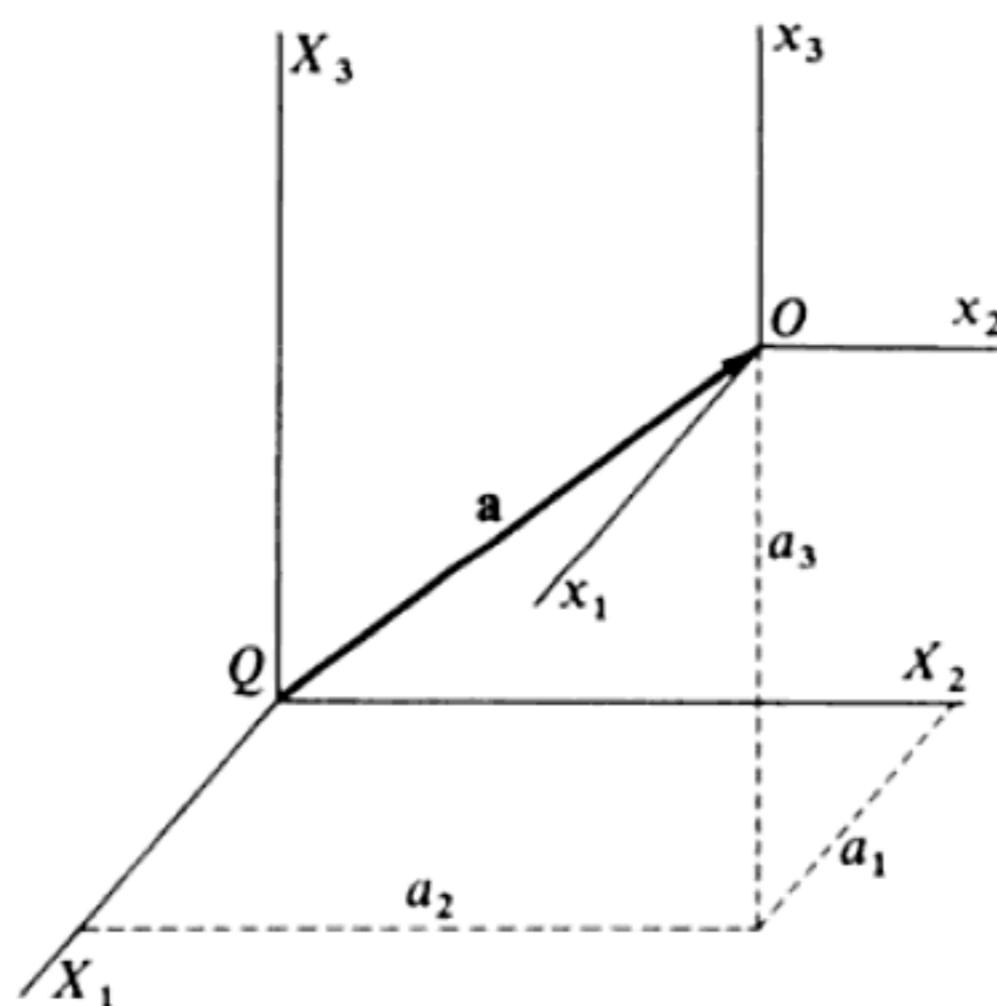


FIG. 12-4

* Jacob STEINER (1796-1863).

lo que deja establecido que la diferencia entre las componentes es igual a la masa del cuerpo multiplicada por el cuadrado de la distancia entre los ejes paralelos (entre los ejes X_1 y x_1 en este caso).

◆ Ejemplo 12.5 Más acerca del cubo

Volvamos de nuevo al caso del cubo homogéneo para el cual determinamos que el tensor de inercia (en el caso del origen situado en un vértice) es (la expresión 4 del ejemplo 12.2b):

$$\{J\} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}Mb^2 & -\frac{1}{4}Mb^2 & -\frac{1}{4}Mb^2 \\ -\frac{1}{4}Mb^2 & \frac{2}{3}Mb^2 & -\frac{1}{4}Mb^2 \\ -\frac{1}{4}Mb^2 & -\frac{1}{4}Mb^2 & \frac{2}{3}Mb^2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Ahora podemos hacer uso de la igualdad 12.34 para obtener el tensor de inercia $\{I\}$ referido a un sistema cuyo origen esté en el centro de masa. Para respetar la notación seguida en esta sección, llamaremos x_i a los nuevos ejes con origen en O y X_i a los ejes primitivos con origen Q en un vértice del cubo (véase figura 12.5).

Entonces, el centro de masa del cubo se encontrará en el punto $(b/2, b/2, b/2)$ del sistema coordenado X_i , siendo, por tanto, las componentes del vector \mathbf{a}

$$a_1 = a_2 = a_3 = b/2 \quad (2)$$

De 1, tenemos

$$\left. \begin{aligned} J_{11} &= J_{22} = J_{33} = \frac{2}{3}Mb^2 \\ J_{12} &= J_{13} = J_{23} = -\frac{1}{4}Mb^2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

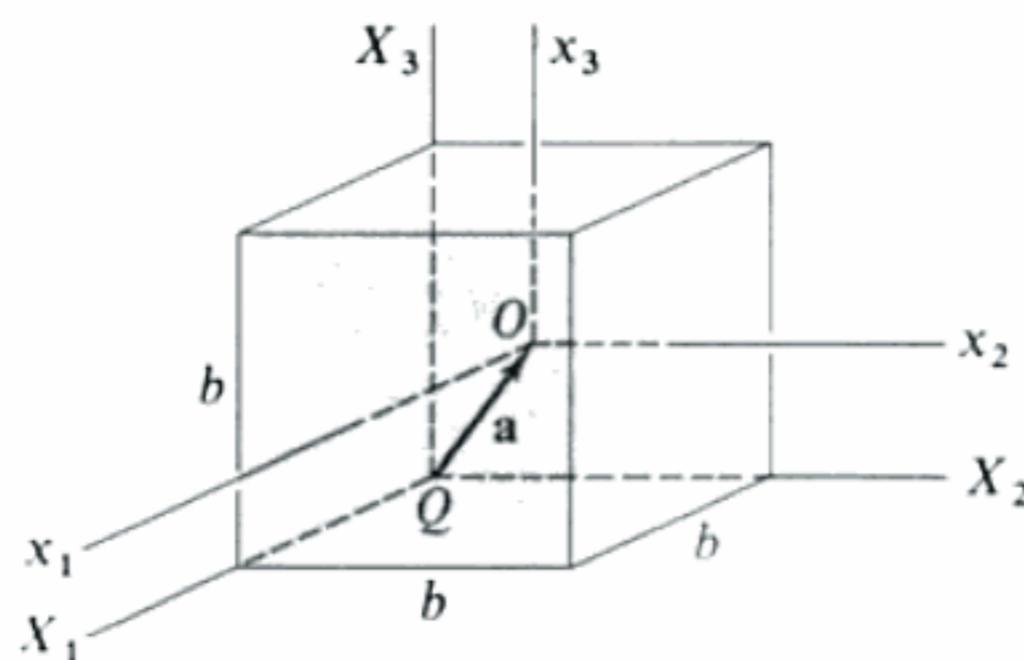


FIG. 12-5

y, aplicando 12.34, encontramos

$$\begin{aligned} I_{11} &= J_{11} - M[a^2 - a_1^2] \\ &= J_{11} - M[a_2^2 + a_3^2] \\ &= \frac{2}{3}Mb^2 - \frac{1}{2}Mb^2 = \frac{1}{6}Mb^2 \end{aligned} \quad (4)$$

y también

$$\begin{aligned} I_{12} &= J_{12} - M[-a_1 a_2] \\ &= -\frac{1}{4}Mb^2 + \frac{1}{4}Mb^2 = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Por lo que, en resumen,

$$\left. \begin{array}{l} I_{12} = I_{22} = I_{33} = \frac{1}{6}Mb^2 \\ I_{12} = I_{13} = I_{23} = 0 \end{array} \right\} \quad (6)$$

Por tanto, el tensor de inercia es diagonal:

$$\{\mathbf{I}\} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}Mb^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}Mb^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}Mb^2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Si en esta expresión sacamos $\frac{1}{6}Mb^2$ factor común, podemos escribir

$$\{\mathbf{I}\} = \frac{1}{6}Mb^2\{\mathbf{1}\} \quad (8)$$

donde $\{\mathbf{1}\}$ es el *tensor unitario*:

$$\{\mathbf{1}\} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Así, pues, resulta que cuando situamos el origen en el centro de masa del cubo, los ejes principales son normales a las caras del mismo. Como desde un punto de vista físico no hay nada que distinga a uno de tales ejes de otro, los momentos principales de inercia serán iguales en este caso. Observamos, además, que en tanto que mantengamos el origen en el centro de masa, el tensor de inercia será el mismo *cualquiera* que sea la orientación de los ejes coordenados, siendo éstos con la misma validez ejes principales de inercia.*

* En este aspecto, el cubo es similar a la esfera por lo que concierne al tensor de inercia; es decir, cuando el origen es el centro de masa, la estructura de las componentes del tensor de inercia no está lo bastante detallada para distinguir entre un cubo y una esfera.

12.6 Otras propiedades del tensor de inercia

Antes de pasar a obtener las ecuaciones generales de movimiento que nos permitan atacar los problemas de la dinámica de los sistemas rígidos, debemos someter a examen los fundamentos de algunas de las operaciones que hemos estado estudiando. Comenzaremos examinando las propiedades del tensor de inercia en los cambios de coordenadas.*

Ya hemos obtenido la relación fundamental que liga el tensor de inercia con los vectores momento cinético y velocidad angular (12.20), la cual puede escribirse

$$L_k = \sum_l I_{kl} \omega_l \quad (12.35)$$

Puesto que esta es una ecuación vectorial deberá verificarse una relación análoga en un sistema de coordenadas girado respecto del válido para 12.35:

$$L'_i = \sum_j I'_{ij} \omega'_j \quad (12.35a)$$

donde las cantidades con acento hacen referencia al sistema girado. Ahora, dado que tanto \mathbf{L} como $\boldsymbol{\omega}$ obedecen la ecuación de transformación de vectores (1.8)

$$x_i = \sum_j \lambda_{ij}^t x'_j = \sum_j \lambda_{ji} x'_j$$

podremos escribir

$$L_k = \sum_m \lambda_{mk} L'_m \quad (12.36a)$$

y

$$\omega_l = \sum_j \lambda_{jl} \omega'_j \quad (12.36b)$$

Sustituyendo las ecuaciones 12.36 en 12.35, obtenemos

$$\sum_m \lambda_{mk} L'_m = \sum_l I_{kl} \sum_j \lambda_{jl} \omega'_j \quad (12.37)$$

* Reduciremos nuestra atención a los sistemas de coordenadas rectangulares, por lo que puede que no prestemos atención a algunas de las propiedades más complicadas de los tensores que se manifiestan en los sistemas de coordenadas curvilíneas más generales.

Multipliquemos, a continuación, ambos miembros de esta ecuación por λ_{ik} y sumemos sobre k :

$$\sum_m \left(\sum_k \lambda_{ik} \lambda_{mk} \right) L'_m = \sum_j \left(\sum_{k,l} \lambda_{ik} \lambda_{jl} I_{kl} \right) \omega'_j \quad (12.38)$$

El término entre paréntesis del primer miembro es δ_{im} , por lo que al efectuar el sumatorio sobre m obtenemos

$$L'_i = \sum_j \left(\sum_{k,l} \lambda_{ik} \lambda_{jl} I_{kl} \right) \omega'_j \quad (12.39)$$

Para que esta ecuación sea idéntica a la 12.35a. vemos que ha de verificarse

$$I'_{ij} = \sum_{k,l} \lambda_{ik} \lambda_{jl} I_{kl} \quad (12.40)$$

lo cual será, por tanto, la condición que habrá de cumplir el tensor de inercia en los cambios de coordenadas. De hecho, la ecuación 12.40 es la condición *general* que especifica de qué forma debe transformarse todo tensor de segundo orden. Para un tensor $\{T\}$ de orden cualquiera la relación será*

$$T'_{abcd\dots} = \sum_{i,j,k,l,\dots} \lambda_{ai} \lambda_{bj} \lambda_{ck} \lambda_{dl} \dots T_{ijkl\dots} \quad (12.41)$$

Nótese que la condición 12.40 puede escribirse

$I'_{ij} = \sum_{k,l} \lambda_{ik} I_{kl} \lambda_{lj}'$

(12.42)

* Obsérvese que un tensor de *primer orden* se transforma en $T'_a = \sum \lambda_{at} T_t$ por lo que dicho tensor será de hecho un *vector*. Un tensor de *orden cero* implicará $T' = T$, o sea que dicho tensor es un *escalar*.

Las propiedades de las magnitudes que se transforman de esta forma fueron estudiadas por primera vez por C. NIVEN en 1874. La aplicación del término *tensor* a estas magnitudes se debe a J. WILLARD GIBBS.

Aunque matrices y tensores sean entes matemáticos de naturaleza diferente, el manejo de los tensores es en muchos aspectos el mismo que el de las matrices. Entonces, la igualdad 12.42 puede expresarse en forma matricial

$$\mathbf{I}' = \lambda \mathbf{I} \lambda'$$
 (12.43)

donde queda entendido que \mathbf{I} es la matriz formada por las componentes del tensor $\{I\}$. Ahora, como sólo consideramos matrices de cambio ortogonales, la transpuesta de λ será igual a su inversa, de forma que 12.43 podrá expresarse

$$\boxed{\mathbf{I}' = \lambda \mathbf{I} \lambda^{-1}} \quad (12.44)$$

Toda transformación de este tipo general recibe el nombre de *transformación de semejanza* (\mathbf{I}' es *semejante* a \mathbf{I}).

◆ Ejemplo 12.6(a) Una transformación de semejanza

En el ejemplo 12.5 afirmamos que el tensor de inercia de un cubo (referido a su centro de masa) es independiente de la orientación de los ejes. Esto puede demostrarse fácilmente como sigue: El cambio de tensor de inercia en una rotación puede determinarse mediante una transformación de semejanza. Entonces, si la matriz λ representa este giro, tendremos

$$\mathbf{I}' = \lambda \mathbf{I} \lambda^{-1} \quad (1)$$

Pero la matriz \mathbf{I} , que se obtiene con las componentes del tensor $\{I\}$ (ec. 8, ej. 12.5), es precisamente la matriz unidad multiplicada por una constante:

$$\mathbf{I} = \frac{1}{6} Mb^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} Mb^2 \mathbf{1} \quad (2)$$

y, por tanto, las operaciones que se especifican en 1 serán triviales:

$$\mathbf{I}' = \frac{1}{6} Mb^2 \lambda \mathbf{1} \lambda^{-1} = \frac{1}{6} Mb^2 \lambda \lambda^{-1} = \frac{1}{6} Mb^2 \mathbf{1} = \mathbf{I} \quad (3)$$

Así, pues, el tensor de inercia transformado es idéntico al primitivo, independientemente de las particularidades de la rotación.

Vamos a determinar, a continuación, la condición que debe verificarse cuando, dado un tensor de inercia cualquiera, se efectúa un giro de coordenadas de forma

que se obtenga un tensor de inercia diagonal. Tal operación implicará que I'_{ij} de 12.40 cumpla la relación (cfr. 12.22).

$$I'_{ij} = I_i \delta_{ij} \quad (12.45)$$

Entonces,

$$I_i \delta_{ij} = \sum_{k,l} \lambda_{ik} \lambda_{jl} I_{kl} \quad (12.46)$$

Multiplicando ambos miembros de esta ecuación por λ_{im} y sumando sobre i , obtenemos

$$\sum_i I_i \lambda_{im} \delta_{ij} = \sum_{k,l} \left(\sum_i \lambda_{im} \lambda_{ik} \right) \lambda_{jl} I_{kl} \quad (12.47)$$

Como el término entre paréntesis es δ_{mk} , el sumatorio sobre i del primer miembro de la igualdad y el sumatorio sobre k del segundo miembro darán

$$I_j \lambda_{jm} = \sum_l \lambda_{jl} I_{ml} \quad (12.48)$$

Como el primer miembro de esta ecuación puede escribirse

$$I_j \lambda_{jm} = \sum_l I_j \lambda_{jl} \delta_{ml} \quad (12.49)$$

12.48 quedará

$$\sum_l I_j \lambda_{jl} \delta_{ml} = \sum_l \lambda_{jl} I_{ml} \quad (12.50)$$

o sea,

$$\sum_l (I_{ml} - I_j \delta_{ml}) \lambda_{jl} = 0 \quad (12.50a)$$

que es un sistema de ecuaciones algebraicas lineales; para cada uno de los valores de j hay tres de tales ecuaciones y una por cada uno de los tres valores posibles de m . Para que exista una solución no trivial, deberá anularse el determinante de los coeficientes, de forma que los momentos principales de inercia, I_1 , I_2 e I_3 se obtendrán como raíces del determinante secular de I :

$|I_{ml} - I \delta_{ml}| = 0$

(12.51)

ecuación de tercer grado que es exactamente la 12.28 y que nos da los momentos principales de inercia.

Vemos, por tanto, que para todo tensor de inercia, cuyas componentes hayan sido calculadas para un origen dado, es posible efectuar un giro de los ejes coordenados de tal forma que el tensor de inercia resultante sea diagonal; entonces, los nuevos ejes serán los ejes principales del cuerpo y los nuevos momentos serán los momentos principales de inercia. Así, pues, *cualquiera que sea* el cuerpo y *cualquiera que sea* el origen que hayamos elegido, habrá *siempre* un sistema de ejes principales.

◆ Ejemplo 12.6(b) Giro de los ejes en el caso de un cubo

Terminaremos con el caso del cubo diagonalizando el tensor de inercia mediante un giro de los ejes coordinados. Situemos el origen en un vértice y efectuemos la rotación de forma que el eje x_1 pase a coincidir con la diagonal del cubo. Esta rotación puede llevarse a cabo en dos etapas: primero, hagamos un giro de 45° en torno del eje x_3 , y después otro giro de $\arccos(\sqrt{\frac{2}{3}})$ en torno del eje x_2 . La primera matriz de giro es

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

y la segunda

$$\lambda_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Por lo tanto, la matriz del giro completo es

$$\lambda = \lambda_2 \lambda_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{\frac{3}{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \quad (3)$$

El tensor de inercia transformado es (véase ec. 12-43):

$$I' = \lambda I \lambda^t \quad (4)$$

o sea, tras sacar β factor común de I , tendremos

$$\begin{aligned} I' &= \frac{\beta}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{\frac{3}{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{\frac{3}{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & \sqrt{\frac{3}{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\beta}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{\frac{3}{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{11}{12}\sqrt{\frac{3}{2}} & -\frac{11}{12}\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{6} & \frac{11}{12}\sqrt{\frac{3}{2}} & -\frac{11}{12}\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{11}{12}\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\beta & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{12}\beta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{12}\beta \end{pmatrix} \quad (5) \end{aligned}$$

Expresión matricial que es exactamente la del tensor de inercia que determinamos por el método de diagonalización mediante el determinante secular (ec. 7 de ej. 12.4).

Hemos expuesto, por tanto, dos métodos generales que pueden seguirse para diagonalizar el tensor de inercia. Como ya señalamos antes, estos métodos no se limitan al tensor de inercia, sino que son válidos con toda generalidad. Cualquiera de ellos puede, desde luego, complicarse mucho. Por ejemplo, si deseamos seguir el método de la rotación en el caso más general, deberemos formar en primer lugar una matriz que represente una rotación cualquiera, lo que entraña tres giros diferentes, uno en torno a cada uno de los ejes coordenados. Después, esta matriz de giro deberá aplicarse al tensor de inercia en una transformación de semejanza, con lo que resultará una matriz* cuyos elementos no diagonales deberán examinarse, determinando los ángulos de giro para que dichos elementos no diagonales se anulen. El esfuerzo que, en la realidad, necesita este procedimiento, puede llegar a los límites de la paciencia humana; no obstante, en algunas situaciones particulares, este método de diagonalización puede seguirse con provecho. Esto es especialmente cierto cuando la geometría del problema indique que sólo es preciso un único giro alrededor de uno de los ejes, en cuyo caso el ángulo de giro podrá estimarse sin dificultad (véanse, por ejemplo, los problemas 12-14, 12-16 y 12-17).

Este ejemplo del cubo pone de manifiesto el importante hecho de que las componentes del tensor, los valores de los momentos principales de inercia y la orientación de los ejes principales de un sistema rígido dependen todos ellos de la elección del origen del sistema de referencia. Sin embargo, recordemos que si la energía cinética ha de ser separable en dos partes, responsables de la traslación y de la rotación, el origen del sistema de coordenadas del cuerpo deberá situarse, en general, en el centro de masa del mismo. Por otra parte, *cualquiera* que sea el punto donde situemos el origen y *cualquiera* que sea el cuerpo, existirá siempre una orientación de los ejes que diagonalice el tensor de inercia, con lo que tales ejes se harán principales para el origen elegido.

A continuación, trataremos de demostrar que realmente los ejes principales forman un triángulo ortogonal. Supongamos que hemos resuelto la ecuación secular y hemos determinado los momentos principales de inercia, los cuales son todos distintos. Sabemos ya que a cada momento principal corresponde un eje principal con la propiedad de que cuando la velocidad angular ω tenga la dirección del mismo, el momento cinético \mathbf{L} estará orientado igualmente. Es decir, a cada uno de los I_i corresponde una velocidad angular ω_i de componentes ω_{1i} , ω_{2i} y ω_{3i} . (Utilizamos el subíndice en el vector ω y el segundo subíndice en las componentes de ω para señalar el momento principal al que nos referimos. Entonces, para el momento m -ésimo principal, tendremos

$$L_{im} = I_m \omega_{im} \quad (12.52)$$

* Deberá utilizarse una hoja de papel de buen tamaño.

Asimismo, en función de las componentes del tensor de inercia, tenemos

$$L_{im} = \sum_k I_{ik} \omega_{km} \quad (12.53)$$

por lo que, al combinar estas dos relaciones, tendremos

$$\sum_k I_{ik} \omega_{km} = I_m \omega_{im} \quad (12.54a)$$

De forma similar, podemos escribir para el n -ésimo momento principal

$$\sum_i I_{ki} \omega_{in} = I_n \omega_{kn} \quad (12.54b)$$

Multiplicando 12.54a por ω_{in} y sumando sobre i , y multiplicando 12.54b por ω_{km} y sumando sobre k , tenemos

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i,k} I_{ik} \omega_{km} \omega_{in} &= \sum_i I_m \omega_{im} \omega_{in} \\ \sum_{i,k} I_{ki} \omega_{in} \omega_{km} &= \sum_k I_n \omega_{kn} \omega_{km} \end{aligned} \right\} \quad (12.55)$$

Entonces, como el tensor de inercia es simétrico, los primeros miembros de estas igualdades han de ser idénticos ($I_{ik} = I_{ki}$). Por tanto, si restamos la segunda de ellas de la primera, tendremos

$$I_m \sum_i \omega_{im} \omega_{in} - I_n \sum_k \omega_{km} \omega_{kn} = 0 \quad (12.56)$$

Puesto que i y k son subíndices mudos, podemos sustituirlos por otro l , obteniendo

$$(I_m - I_n) \sum_l \omega_{lm} \omega_{ln} = 0 \quad (12.57)$$

Dado que, por hipótesis, los momentos principales son diferentes, $I_m \neq I_n$, la ecuación 12.57 sólo podrá satisfacerse cuando

$$\sum_l \omega_{lm} \omega_{ln} = 0 \quad (12.58)$$

pero esta suma es precisamente la definición de producto escalar de los vectores ω_m y ω_n . De aquí,

$$\omega_m \cdot \omega_n = 0 \quad (12.58a)$$

y, como los momentos principales I_m e I_n fueron elegidos arbitrariamente del conjunto de los tres momentos principales, concluimos en que los ejes principales son perpendiculares dos a dos, por lo que los tres ejes principales constituyen un triángulo ortogonal.

Cuando la ecuación secular posea una raíz doble, de forma que los momentos principales sean I_1 e $I_2=I_3$, el análisis precedente pondrá de manifiesto que las velocidades angulares satisfacen las relaciones

$$\omega_1 \perp \omega_2; \quad \omega_1 \perp \omega_3$$

pero nada podrá decirse acerca del ángulo que formen ω_2 y ω_3 . No obstante, como ya hicimos notar anteriormente, el hecho de que $I_2=I_3$ implica que el cuerpo posee un eje de simetría. Por lo tanto, ω_1 estará sobre el eje de simetría mientras que ω_2 y ω_3 sólo habrán de cumplir la condición de encontrarse en el plano normal a ω_1 . En consecuencia, no habrá pérdida alguna de generalidad si hacemos $\omega_2 \perp \omega_3$, con lo cual los ejes principales de un sistema rígido que tenga un eje de simetría pueden también constituir un triángulo ortogonal.

Hemos demostrado anteriormente que los momentos principales de inercia se obtienen como raíces de la ecuación secular, que es de tercer grado. Matemáticamente, al menos una de las raíces de una ecuación de tercer grado ha de ser real, pudiendo las otras dos ser complejas conjugadas. Pero si los métodos de diagonalización del tensor de inercia han de presentar algún significado físico, los momentos principales sólo podrán tener, desde luego, valores reales. Esta conclusión es general, lo que vamos a demostrar como sigue. Supongamos, primero, que las raíces sean complejas y sigamos un procedimiento similar al empleado en la demostración anterior. La única diferencia con ésta, reside en que ahora admitimos que las cantidades ω_{km} pueden ser complejas, a lo que no se opone ninguna razón matemática, sin que entremos en la interpretación física de ello. Por tanto, escribiremos la ecuación 12.54a como antes y la compleja conjugada de la 12.54b:

$$\left. \begin{aligned} \sum_k I_{ik} \omega_{km} &= I_m \omega_{im} \\ \sum_i I_{ki}^* \omega_{in}^* &= I_n^* \omega_{kn}^* \end{aligned} \right\} \quad (12.59)$$

Multipliquemos la primera de estas ecuaciones por ω_{in}^* y la segunda por ω_{km} efectuando las sumas sobre i y k , respectivamente. Como el tensor de inercia es

simétrico y de componentes reales, será $I_{ik}=I_{ki}^*$; por lo tanto, restando la segunda de la primera, resulta

$$(I_m - I_n^*) \sum_l \omega_{lm} \omega_{ln}^* = 0 \quad (12.60a)$$

Cuando $m=n$, tendremos

$$(I_m - I_m^*) \sum_l \omega_{lm} \omega_{lm}^* = 0 \quad (12.60b)$$

donde la suma es, por definición, precisamente el producto escalar de ω_m por ω_m^* :

$$\omega_m \cdot \omega_m^* = |\omega_m|^2 \geq 0 \quad (12.61)$$

Por lo tanto, como el cuadrado del módulo de ω_m es positivo, debe ser $I_m=I_m^*$ para que se satisfaga 12.60b. Pero si una cantidad ha de ser igual a su compleja conjugada, las partes imaginarias de ambas deberán anularse idénticamente, resultando que los momentos principales de inercia habrán de ser siempre reales y, al ser real {1}, los vectores ω_m deberán ser también reales.

Si en 12.60b es $m=n$ e $I_m=I_n$, dicha igualdad sólo se satisfará cuando $\omega_m \cdot \omega_n=0$; o sea, cuando, como antes, estos vectores sean ortogonales.

En todas las demostraciones efectuadas en esta sección se ha hecho referencia únicamente al tensor de inercia. No obstante, un examen de estas demostraciones mostrará que las únicas propiedades del tensor de inercia de las que se ha hecho uso son los hechos de que el tensor es simétrico y que sus componentes son reales. En consecuencia, podemos concluir en que todo tensor real y simétrico* presenta las propiedades siguientes:

- (a) La diagonalización puede efectuarse mediante una rotación adecuada de los ejes; o sea, mediante una transformación de semejanza.
- (b) Los valores propios** son las raíces del determinante secular y son reales.
- (c) Los vectores propios** son reales y ortogonales.

* Para ser más exactos, sólo es necesario que las componentes del tensor cumplan que $I_{ik}=I_{ki}^*$, con lo que se incluyen ya las cantidades complejas. De los tensores y matrices que presentan esta propiedad se dice que son *hermíticos*.

** Los términos «valores propios» y «vectores propios» son los nombres genéricos de las cantidades que, en el caso del tensor de inercia, representan los momentos de inercia y ejes principales, respectivamente. En el capítulo 13, volveremos a encontrarnos con ellos cuando estudiemos las pequeñas oscilaciones.

12.7 Ángulos de Euler

El paso de un sistema de coordenadas a otro puede representarse por una ecuación matricial de la forma

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}'$$

Cuando identifiquemos el sistema fijo con \mathbf{x}' y el sistema del cuerpo con \mathbf{x} , la matriz de giro λ describirá por completo la orientación relativa de los dos sistemas. Entonces, en la matriz de giro λ deben estar implícitos tres ángulos independientes. Estos ángulos pueden elegirse de muchas formas; para nuestros fines encontramos conveniente utilizar los llamados *ángulos de Euler*,* φ, θ y ψ .

Los ángulos de Euler proceden de la sucesión de giros siguientes que lleva al sistema x'_i a coincidir con el sistema x_i : **

(1) El primer giro, que se representa en la figura 12-6a, es de ángulo φ a izquierdas alrededor del eje x'_3 y transforma las x'_i en las x''_i . Como la rotación ocurre en el plano $x'_1-x'_2$, la matriz de cambio es

$$\lambda_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12.62)$$

(2) El segundo giro, que se representa en la figura 12-6b, es de ángulo θ a izquierdas alrededor del eje x''_1 y transforma las x''_i en las x'''_i . Como la rotación ocurre en el plano $x''_2-x''_3$, la matriz de cambio es

$$\lambda_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (12.63)$$

(3) El tercer giro, que se representa en la figura 12-6c, es de ángulo ψ a izquierdas alrededor del eje x'''_3 y transforma las x'''_i en las x_i . La matriz de cambio es

$$\lambda_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12.64)$$

* El diagrama de los giros de Euler fue publicado por primera vez en 1776.

** Debemos advertir que no hay acuerdo universal acerca de la forma en que se generan los ángulos de Euler, ni siquiera en su designación. Por tanto, debe tenerse algún cuidado al comparar los resultados de fuentes distintas. La notación que aquí utilizamos es la más corriente en los textos modernos.

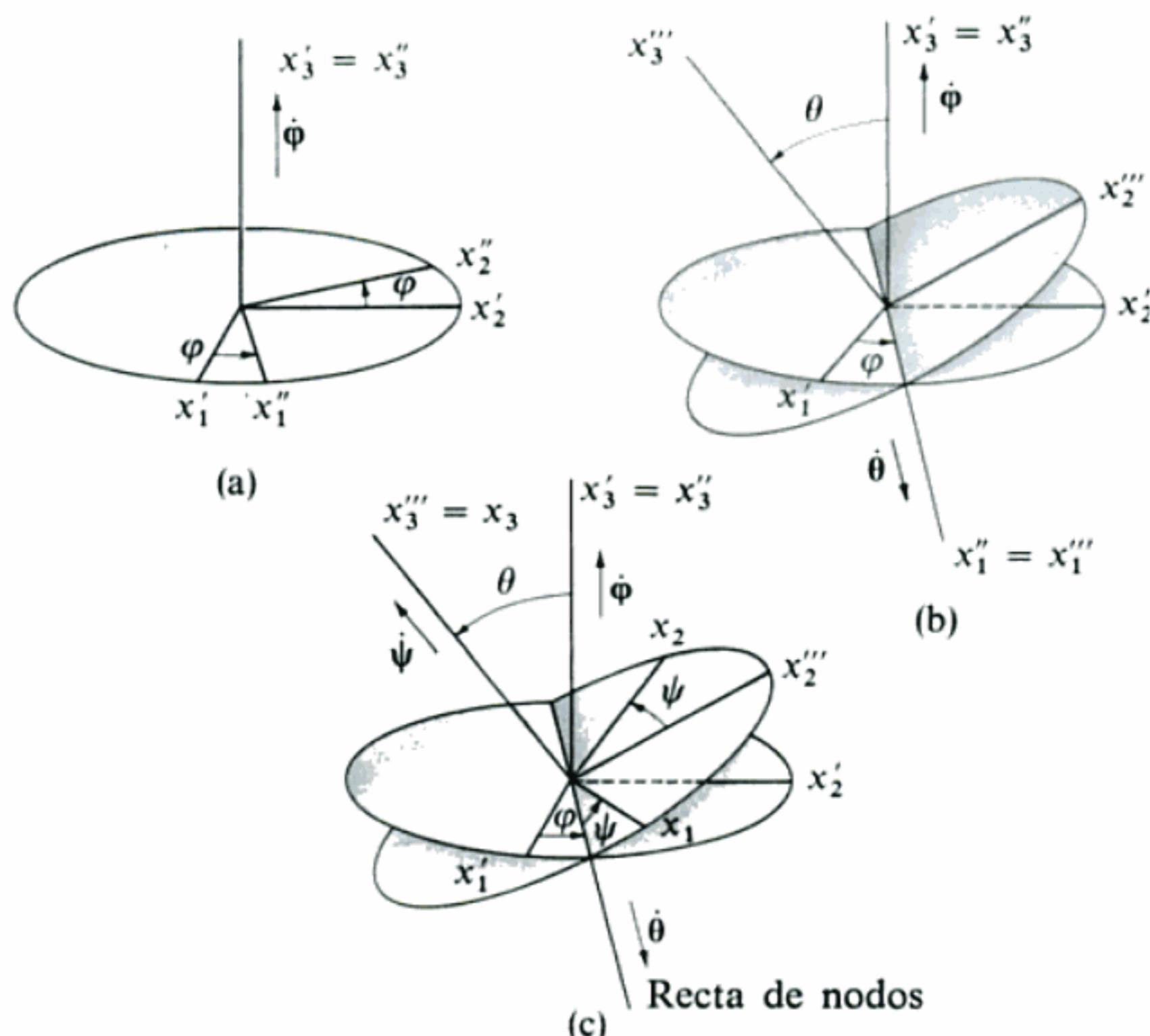


FIG. 12-6

La recta definida por la intersección de los planos x_1 - x_2 y x'_1 - x'_2 se llama *recta de nodos*.

El paso completo del sistema x'_i al x_i viene dado por la matriz de giro λ :

$$\lambda = \lambda_\psi \lambda_\theta \lambda_\varphi \quad (12.65)$$

cuyos elementos son

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{11} &= \cos \psi \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi \\ \lambda_{21} &= -\sin \psi \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi \cos \psi \\ \lambda_{31} &= \sin \theta \sin \varphi \\ \lambda_{12} &= \cos \psi \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi \sin \psi \\ \lambda_{22} &= -\sin \psi \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi \cos \psi \\ \lambda_{32} &= -\sin \theta \cos \varphi \\ \lambda_{13} &= \sin \psi \sin \theta \\ \lambda_{23} &= \cos \psi \sin \theta \\ \lambda_{33} &= \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (12.66)$$

(Se han consignado los elementos λ_{ij} para ayudar a la visualización de la matriz λ completa.)

Dado que es posible asociar un vector a una rotación infinitesimal, podemos asociar las derivadas temporales de estos ángulos de rotación a las componentes de la velocidad angular ω . O sea,

$$\left. \begin{array}{l} \omega_\varphi = \dot{\phi} \\ \omega_\theta = \dot{\theta} \\ \omega_\psi = \dot{\psi} \end{array} \right\} \quad (12.67)$$

Las ecuaciones de movimiento del cuerpo rígido se expresan de forma más adecuada en el sistema de coordenadas del cuerpo (o sea, el sistema x_i), por lo que deberemos expresar las componentes de ω en este sistema. Observemos que, en la figura 12-6 las velocidades angulares $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$, y $\dot{\psi}$ están dirigidas según los ejes siguientes:

- $\dot{\phi}$ a lo largo del eje (fijo) x'_3
- $\dot{\theta}$ a lo largo de la recta de nodos
- $\dot{\psi}$ a lo largo del eje (del cuerpo) x_3

Las componentes de estas velocidades angulares en el sistema coordenado del cuerpo son

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\phi}_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \\ \dot{\phi}_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \\ \dot{\phi}_3 = \dot{\phi} \cos \theta \end{array} \right\} \quad (12.68a)$$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\theta}_1 = \dot{\theta} \cos \psi \\ \dot{\theta}_2 = -\dot{\theta} \sin \psi \\ \dot{\theta}_3 = 0 \end{array} \right\} \quad (12.68b)$$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\psi}_1 = 0 \\ \dot{\psi}_2 = 0 \\ \dot{\psi}_3 = \dot{\psi} \end{array} \right\} \quad (12.68c)$$

Reuniendo las componentes individuales de ω , tendremos, finalmente,

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\phi}_1 + \dot{\theta}_1 + \dot{\psi}_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_2 &= \dot{\phi}_2 + \dot{\theta}_2 + \dot{\psi}_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_3 &= \dot{\phi}_3 + \dot{\theta}_3 + \dot{\psi}_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{aligned} \quad (12.69)$$

De estas relaciones haremos uso más adelante para expresar las componentes del momento cinético en el sistema de coordenadas del cuerpo.

12.8 Ecuaciones de Euler para un cuerpo rígido

Consideremos primero el movimiento de un cuerpo rígido no sometido a fuerzas. En este caso, la energía potencial U es nula y la lagrangiana L se hace igual a la energía cinética de rotación T .* Haciendo que los ejes x_i coincidan con los ejes principales del cuerpo tendremos, según 12.24b,

$$T = \frac{1}{2} \sum_i I_i \omega_i^2 \quad (12.70)$$

Si tomamos los ángulos de Euler como coordenadas generalizadas, la ecuación de Lagrange para la coordenada ψ será

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = 0 \quad (12.71)$$

que puede expresarse

$$\sum_i \frac{\partial T}{\partial \omega_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial \psi} - \frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial T}{\partial \omega_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{\psi}} = 0 \quad (12.72)$$

Derivando las componentes de ω (12.69) respecto de ψ y $\dot{\psi}$, se tiene

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega_1}{\partial \psi} &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi = \omega_2 \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial \psi} &= -\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi - \dot{\theta} \cos \psi = -\omega_1 \\ \frac{\partial \omega_3}{\partial \psi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12.73)$$

* Como no hay fuerzas exteriores, la energía cinética de traslación carece aquí de importancia para nuestros fines. (Podemos pasar siempre a un sistema de coordenadas en el cual el centro de masa del cuerpo se encuentre en reposo.)

$$\left. \begin{aligned} y \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial \dot{\psi}} &= \frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{\psi}} = 0 \\ \frac{\partial \omega_3}{\partial \dot{\psi}} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (12.74)$$

y asimismo, de 12.70, tenemos

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_i} = I_i \omega_i \quad (12.75)$$

con lo cual, 12.72 queda,

$$I_1 \omega_1 \omega_2 + I_2 \omega_2 (-\omega_1) - \frac{d}{dt} I_3 \omega_3 = 0$$

o sea,

$$(I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 - I_3 \dot{\omega}_3 = 0 \quad (12.76)$$

Como siempre podemos llamar x_3 a cualquier eje principal, en la ecuación 12.76 podremos efectuar las permutaciones pertinentes para obtener las relaciones correspondientes a $\dot{\omega}_1$ y $\dot{\omega}_2$. Utilizando la densidad de Levi-Civita (véase sección 1.11), podemos escribir, para el caso general

$$(I_i - I_j) \omega_i \omega_j - \sum_k I_k \dot{\omega}_k \epsilon_{ijk} = 0 \quad (12.77)$$

Las tres ecuaciones resumidas en 12.77 son las llamadas *ecuaciones de Euler* para el caso de movimiento sin fuerzas exteriores.* Debemos hacer la advertencia de que, si bien la ecuación 12.76, que corresponde a $\dot{\omega}_3$ es realmente la ecuación de Lagrange para la coordenada ψ , las ecuaciones de Euler para $\dot{\omega}_1$ y $\dot{\omega}_2$, que pueden obtenerse de 12.77, no son las ecuaciones de Lagrange para θ y φ .

Para obtener las ecuaciones de Euler correspondientes al caso de movimiento en el seno de un campo de fuerzas, podemos empezar con la relación fundamental relativa al momento \mathbf{N} (cfr. 2.11):

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt} \right)_{\text{fijo}} = \mathbf{N} \quad (12.78)$$

* Leonhard EULER, 1758.

donde se ha aplicado explícitamente a $\dot{\mathbf{L}}$ la designación «fijo», puesto que esta relación fue deducida a partir de la fórmula de Newton y sólo será válida en un sistema de referencia inercial. De 11.7, tenemos

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt} \right)_{\text{fijo}} = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt} \right)_{\text{cuerpo}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} \quad (12.79)$$

o sea,

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt} \right)_{\text{cuerpo}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{N} \quad (12.80)$$

La proyección de esta ecuación sobre el eje x_3 (nótese que éste es un eje *del cuerpo*) es

$$\dot{L}_3 + \omega_1 L_2 - \omega_2 L_1 = N_3 \quad (12.81)$$

Pero como hemos hecho coincidir los ejes x_i con los ejes principales del cuerpo, tendremos, según 12.24a,

$$L_i = I_i \omega_i$$

de forma que

$$I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 = N_3 \quad (12.82)$$

o sea, en general,

$$(I_i - I_j) \omega_i \omega_j - \sum_k (I_k \dot{\omega}_k - N_k) \epsilon_{ijk} = 0$$

(12.83)

que son las ecuaciones de Euler que buscábamos de movimiento de un sistema rígido en un campo de fuerzas.

Debemos llamar la atención hacia el hecho de que el movimiento de un sistema rígido depende de la estructura del mismo únicamente a través de los tres números I_1 , I_2 e I_3 ; es decir, de los tres momentos principales de inercia. Así, pues, dos cuerpos cualesquiera que tengan los mismos momentos principales se moverán de manera exactamente igual, independientemente de que sus formas sean completamente distintas. (Desde luego, otros efectos, como la resistencia debida al rozamiento, pueden depender de la forma del cuerpo.) La forma geométrica más sencilla que pueda tener un cuerpo que posea tres momentos principales dados es la de un elipsoide homogéneo, por cuya causa el movimiento de todo sistema

rígido puede representarse por el movimiento del *elipsoide equivalente*.* El análisis de la dinámica de los sistemas rígidos desde este punto de vista fue iniciado por Poinsot en 1834. La *construcción de Poinsot* es útil a veces para representar de forma geométrica el movimiento de un sistema rígido.**

12.9 Movimiento de una peonza simétrica no sometida a fuerzas

Considerando una peonza simétrica, o sea, un sistema rígido con $I_1 = I_2 \neq I_3$, las ecuaciones de Euler (12.77) serán

$$\left. \begin{aligned} (I_{12} - I_3)\omega_2\omega_3 - I_{12}\dot{\omega}_1 &= 0 \\ (I_3 - I_{12})\omega_3\omega_1 - I_{12}\dot{\omega}_2 &= 0 \\ I_3\dot{\omega}_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12.84)$$

donde se han sustituido I_1 e I_2 por I_{12} . Como, en caso de movimiento exento de fuerzas, el centro de masa del cuerpo puede encontrarse en reposo o bien en movimiento uniforme respecto del sistema de referencia fijo o inercial, podemos, sin pérdida alguna de generalidad, especificar que el centro de masa del cuerpo se halla en reposo y situado en el origen del sistema de coordenadas fijo. Examinaremos, por supuesto, el caso en que la velocidad angular ω no esté dirigida según uno de los ejes principales del cuerpo, pues, de lo contrario el caso es trivial.

La primera conclusión relativa al movimiento, resulta de la tercera de las ecuaciones 12.84, es decir, de $\dot{\omega}_3 = 0$, o sea

$$\omega_3(t) = \text{cte.} \quad (12.85)$$

Las dos primeras ecuaciones 12.84 pueden escribirse

$$\left. \begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= -\left[\frac{I_3 - I_{12}}{I_{12}}\omega_3\right]\omega_2 \\ \dot{\omega}_2 &= \left[\frac{I_3 - I_{12}}{I_{12}}\omega_3\right]\omega_1 \end{aligned} \right\} \quad (12.86)$$

* El elipsoide de momentos fue introducido por el matemático francés barón Augustin Louis CAUCHY, en 1827.

** Véase, por ejemplo, GOLDSTEIN (Go50, pág. 159).

Como los términos entre paréntesis son idénticos y se componen de constantes, podemos hacer

$$\Omega \equiv \frac{I_3 - I_{12}}{I_{12}} \omega_3 \quad (12.87)$$

de forma que

$$\left. \begin{aligned} \dot{\omega}_1 + \Omega\omega_2 &= 0 \\ \dot{\omega}_3 - \Omega\omega_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12.88)$$

resultando así un sistema de dos ecuaciones acopladas, que ya conocemos, cuya resolución llevaremos a cabo multiplicando la segunda de ellas por i y sumándola a la primera:

$$(\dot{\omega}_1 + i\dot{\omega}_2) - i\Omega(\omega_1 + i\omega_2) = 0 \quad (12.89)$$

Haciendo

$$\eta \equiv \omega_1 + i\omega_2 \quad (12.90)$$

se tiene

$$\dot{\eta} - i\Omega\eta = 0 \quad (12.91)$$

cuya solución es*

$$\eta(t) = A e^{i\Omega t} \quad (12.92)$$

Entonces,

$$\omega_1 + i\omega_2 = A \cos \Omega t + iA \sin \Omega t \quad (12.93)$$

y, por lo tanto,

$$\left. \begin{aligned} \omega_1(t) &= A \cos \Omega t \\ \omega_2(t) &= A \sin \Omega t \end{aligned} \right\} \quad (12.94)$$

Como $\omega_3 = \text{cte.}$, el módulo de ω será también constante:

$$|\omega| = \omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2} = \sqrt{A^2 + \omega_3^2} = \text{cte.} \quad (12.95)$$

* En general, el coeficiente A será complejo, por lo que más adecuadamente deberíamos escribir $A \exp(i\delta)$. No obstante, para simplificar, haremos la fase δ igual a cero, lo que siempre es posible tomando adecuadamente el instante $t=0$.

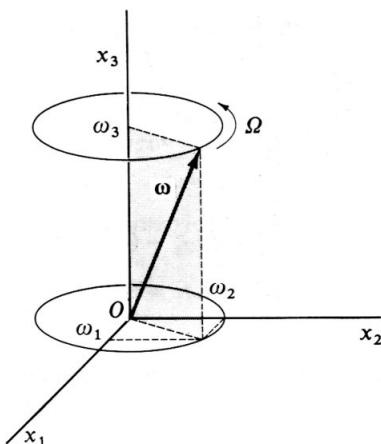


FIG. 12-7

Las ecuaciones 12.94 son las ecuaciones paramétricas de una circunferencia, de forma que la proyección del vector ω (que es de módulo constante) sobre el plano x_1 - x_2 describe una circunferencia a través del tiempo, tal como se indica en la figura 12-7.

Entonces, como el eje x_3 es eje de simetría del cuerpo, nos encontramos con que la velocidad angular ω ejecuta un movimiento de revolución, o *precesiona*, alrededor del eje x_3 del cuerpo con una velocidad angular constante Ω . Así, pues, para un observador solidario del sistema de coordenadas del cuerpo, ω genera un cono en torno del eje de simetría del cuerpo.

Dado que estamos considerando el movimiento exento de fuerzas, el momento cinético \mathbf{L} es estacionario y constante a través del tiempo en el sistema de coordenadas fijo. Otra constante en el caso de movimiento exento de fuerzas será la energía cinética, o, en particular, puesto que el centro de masa del cuerpo es fijo, la energía cinética de rotación:

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\omega \cdot \mathbf{L} = \text{cte} \quad (12.96)$$

Ahora bien, tenemos que $\mathbf{L} = \text{cte.}$, por lo que ω deberá moverse de tal manera que su proyección sobre el momento cinético, que es estacionario, sea constante. Resulta así, que ω precesiona en torno de \mathbf{L} formando con éste un ángulo constante. Entonces, los vectores \mathbf{L} y ω y el eje x_3 (del cuerpo) forman un *plano* (véase problema 12-25). En consecuencia, haciendo que el eje x'_3 del sistema fijo coincida con \mathbf{L} , para un observador solidario del sistema fijo, ω generará un cono

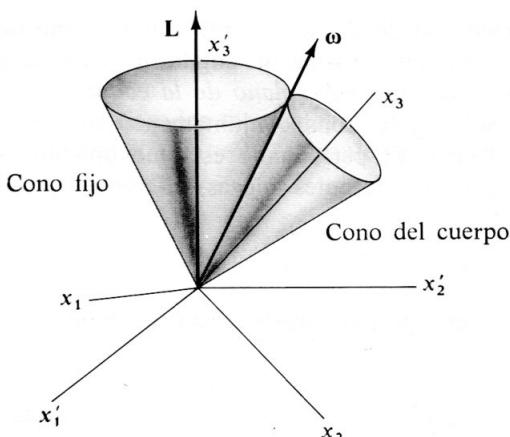


FIG. 12-8

en torno del eje fijo x'_3 . La situación queda descrita, como se representa en la figura 12-8, por un cono que rueda sobre otro, de tal forma que ω precesiona en torno del eje x_3 en el sistema del cuerpo y en torno del eje x'_3 (o sea, de L) en el sistema fijo.

La velocidad angular de precesión de ω en torno del eje de simetría del cuerpo viene dada por 12.87:

$$\Omega = \frac{I_3 - I_{12}}{I_{12}} \omega_3$$

Cuando $I_{12} \approx I_3$, Ω se hará muy pequeña comparada con ω_3 . Se sabe que la Tierra está ligeramente achata por los polos*, por lo que su forma es aproximadamente la de un esferoide oblongo de $I_{12} \approx I_3$, pero siendo $I_3 > I_{12}$. Suponiendo que la Tierra sea un cuerpo rígido, los momentos I_{12} e I_3 serán tales que $\Omega \approx \omega_3/300$. Como el período de rotación de la Tierra es $1/\omega = 1$ día, y como $\omega_3 \approx \omega$, podemos predecir que el período de precesión del eje de rotación es $1/\Omega \approx 300$ días. El período de precesión que se observa es irregular y es un 50 % superior al predicho mediante esta teoría sencilla, achacándose esta discrepancia al hecho de que la Tierra no sea un sistema *rígido* y a que su forma no sea exactamente la de un esferoide oblongo, sino que su deformación es de mayor grado pareciéndose realmente a una pera achata.

* NEWTON puso de manifiesto que el achatamiento en los polos es debido a la rotación de la Tierra; el movimiento de precesión resultante fue calculado por primera vez por EULER.

El «combado» ecuatorial de la Tierra junto con el hecho de que su eje de rotación esté inclinado aproximadamente un ángulo de $23,5^\circ$ respecto del plano de la órbita terrestre alrededor del Sol (*plano de la eclíptica*) produce un par gravitatorio (debido al Sol y a la Luna conjuntamente) que origina una precesión lenta del eje de la Tierra. El período de este movimiento de precesión es de unos 26 000 años, y así, en diferentes épocas, diferentes estrellas hacen el papel de «Estrella Polar».*

12.10 Movimiento de una peonza simétrica con un punto fijo**

Consideremos una peonza simétrica con rotación cuya punta se mantiene fija y que se mueve en un campo gravitatorio. En lo que vimos anteriormente nos ha sido posible separar la energía cinética en las dos partes de traslación y rotación situando el origen de coordenadas del cuerpo, o sistema giratorio, en el centro de masa. De otro modo, si es posible hacer que los orígenes de los sistemas de coordenadas fijo y del cuerpo coincidan, entonces la energía cinética de traslación se anulará, puesto que $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}} = 0$. Esto es muy conveniente para estudiar la peonza, ya que así podremos situar el origen de ambos sistemas en la punta inmóvil de la misma. En la figura 12-9 se indican los ángulos de Euler para esta situación.

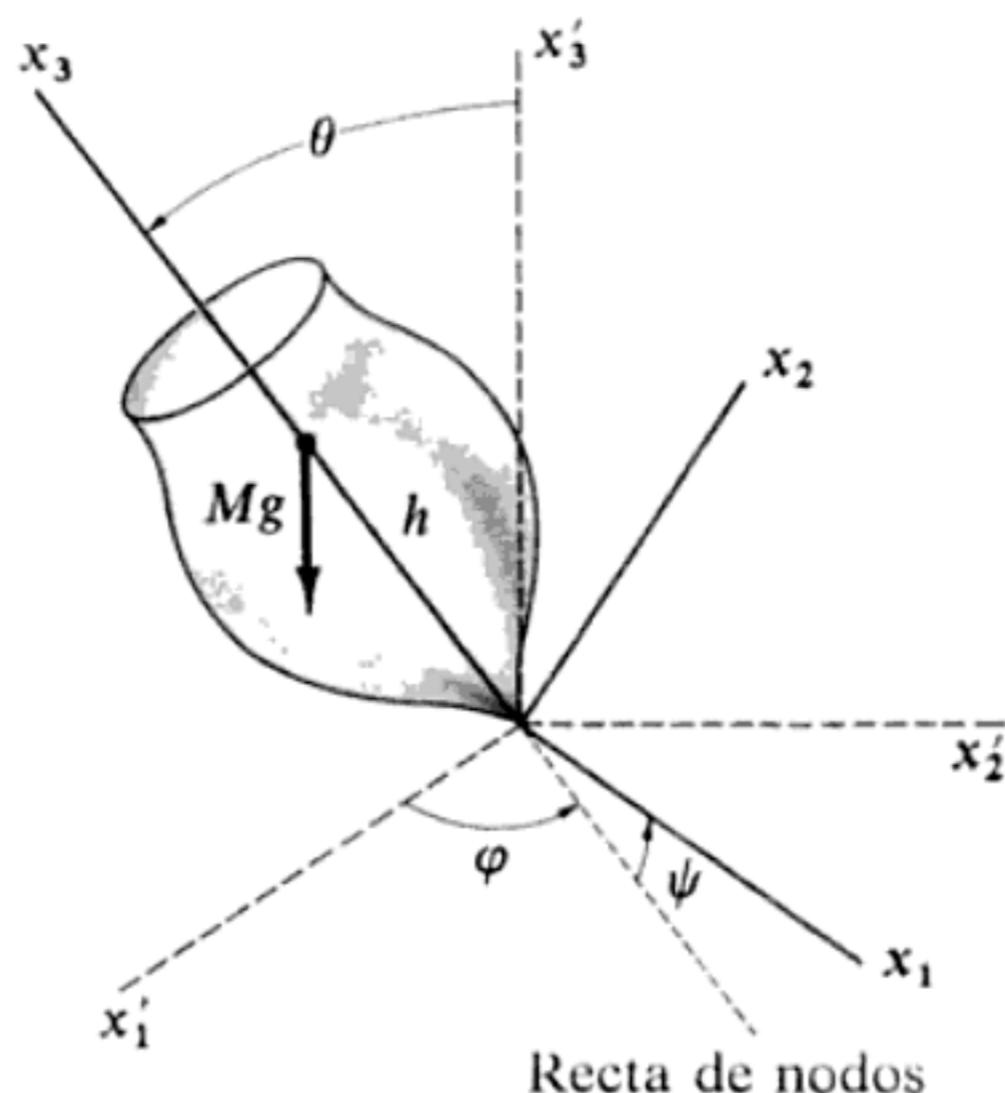


FIG. 12-9

* Parece ser que la *precesión de los equinoccios* fue descubierta por el astrónomo babilónico CIDENAS alrededor del 343 a. de J. C.

** Este problema fue resuelto por primera vez con detalle por LAGRANGE en su *Mécanique Analytique*.

El eje x'_3 (fijo) se coloca en la vertical y en el x_3 (del cuerpo) el eje de simetría de la peonza. La distancia de la punta fija hasta el centro de masa será h y la masa de la peonza M .

Como la peonza es simétrica, los momentos principales de inercia respecto de los ejes x_1 y x_2 serán iguales, $I_1 = I_2 \equiv I_{12}$, suponiéndose que $I_3 \neq I_{12}$. Entonces, la energía cinética vendrá dada por

$$T = \frac{1}{2} \sum_i I_i \omega_i^2 = \frac{1}{2} I_{12} (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_3 \dot{\psi}^2 \quad (12.97)$$

De acuerdo con las fórmulas 12.69 tenemos

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= (\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi)^2 \\ &= \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \sin^2 \psi + 2\dot{\varphi}\dot{\theta} \sin \theta \sin \psi \cos \psi + \dot{\theta}^2 \cos^2 \psi \\ \omega_2^2 &= (\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi)^2 \\ &= \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \cos^2 \psi - 2\dot{\varphi}\dot{\theta} \sin \theta \sin \psi \cos \psi + \dot{\theta}^2 \sin^2 \psi \end{aligned}$$

de forma que

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 \quad (12.98a)$$

y también

$$\omega_3^2 = (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \quad (12.98b)$$

Por lo tanto,

$$T = \frac{1}{2} I_{12} (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \quad (12.99)$$

Como la energía potencial es $Mgh \cos \theta$, la lagrangiana será

$$L = \frac{1}{2} I_{12} (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - Mgh \cos \theta \quad (12.100)$$

La lagrangiana es cíclica en las coordenadas φ y ψ , por lo que los ímpetus correspondientes serán constantes del movimiento:

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = (I_{12} \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \dot{\varphi} + I_3 \dot{\psi} \cos \theta = \text{cte.} \quad (12.101)$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) = \text{cte.} \quad (12.102)$$

Al ser *ángulos* las coordenadas cíclicas, los ímpetus conjugados serán *momentos cinéticos*, los cuales, desde luego, serán los momentos cinéticos respecto de los ejes para los que φ y ψ son los ángulos de rotación; o sea, el eje x'_3 (vertical) y el eje x_3 (de simetría del cuerpo), respectivamente. Advirtamos que esta conclusión está abonada por la construcción de la figura 12-9, puesto que el momento del peso está dirigido según la línea de nodos, por lo que no podrá tener componente según los ejes x'_3 o x_3 , ya que ambos son perpendiculares a la misma; resulta, pues, que los momentos cinéticos respecto de estos ejes son constantes del movimiento.

En las ecuaciones 12.101 y 12.102 podemos despejar $\dot{\varphi}$ y $\dot{\psi}$ en función de θ . De 12.102, podemos escribir

$$\dot{\psi} = \frac{p_\psi - I_3 \dot{\varphi} \cos \theta}{I_3} \quad (12.103)$$

y, llevando esta expresión a 12.101, resulta

$$(I_{12} \operatorname{sen}^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \dot{\varphi} + (p_\psi - I_3 \dot{\varphi} \cos \theta) \cos \theta = p_\varphi$$

o sea,

$$(I_{12} \operatorname{sen}^2 \theta) \dot{\varphi} + p_\psi \cos \theta = p_\varphi$$

por lo cual

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi - p_\psi \cos \theta}{I_{12} \operatorname{sen}^2 \theta} \quad (12.104)$$

Llevando esta expresión de $\dot{\varphi}$ a la igualdad 12.103, tenemos

$$\dot{\psi} = \frac{p_\psi}{I_3} - \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \theta) \cos \theta}{I_{12} \operatorname{sen}^2 \theta} \quad (12.105)$$

Ahora, como, por hipótesis, el sistema que estamos considerando es conservativo, ocurrirá que la energía total será también una constante del movimiento:

$$E = \frac{1}{2} I_{12} (\dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 + Mgh \cos \theta = \text{cte.} \quad (12.106)$$

Teniendo en cuenta el valor de ω_3 dado por 12.69, observamos que 12.102 puede escribirse

$$p_\psi = I_3 \omega_3 = \text{cte.} \quad (12.107)$$

o sea,

$$I_3 \omega_3^2 = \frac{p_\psi^2}{I_3} = \text{cte.} \quad (12.107a)$$

Por tanto, no es sólo E una constante del movimiento, sino también lo será $E - \frac{1}{2}I_3\omega_3^2$; sea E' esta cantidad:

$$E' \equiv E - \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 = \frac{1}{2}I_{12}(\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + Mgh \cos \theta = \text{cte.} \quad (12.108)$$

Sustituyendo en esta expresión el valor de $\dot{\varphi}$ dado por 12.104, tenemos

$$E' = \frac{1}{2}I_{12}\dot{\theta}^2 + \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I_{12}\sin^2 \theta} + Mgh \cos \theta \quad (12.109)$$

que puede escribirse

$$E' = \frac{1}{2}I_{12}\dot{\theta}^2 + V(\theta) \quad (12.110)$$

donde $V(\theta)$ es el «potencial efectivo» que viene dado por

$$V(\theta) \equiv \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I_{12}\sin^2 \theta} + Mgh \cos \theta \quad (12.111)$$

De 12.110 puede despejarse $t(\theta)$:

$$t(\theta) = \int \frac{d\theta}{\sqrt{(2/I_{12})[E' - V(\theta)]}} \quad (12.112)$$

Esta integral puede invertirse (al menos formalmente) para obtener $\theta(t)$, que, a su vez, puede llevarse a 12.104 y 12.105 que nos darán $\varphi(t)$ y $\psi(t)$. Como los ángulos de Euler θ , φ y ψ definen por completo la orientación de la peonza, los resultados que se obtienen para $\theta(t)$, $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ constituyen una solución completa del problema. Evidentemente, este procedimiento es complicado y no revela gran cosa; no obstante, podemos obtener algunas de las características cualitativas del movimiento examinando las ecuaciones anteriores de forma similar a como lo hicimos al estudiar el movimiento de una partícula en un campo de fuerzas centrales (véase sección 8-6).

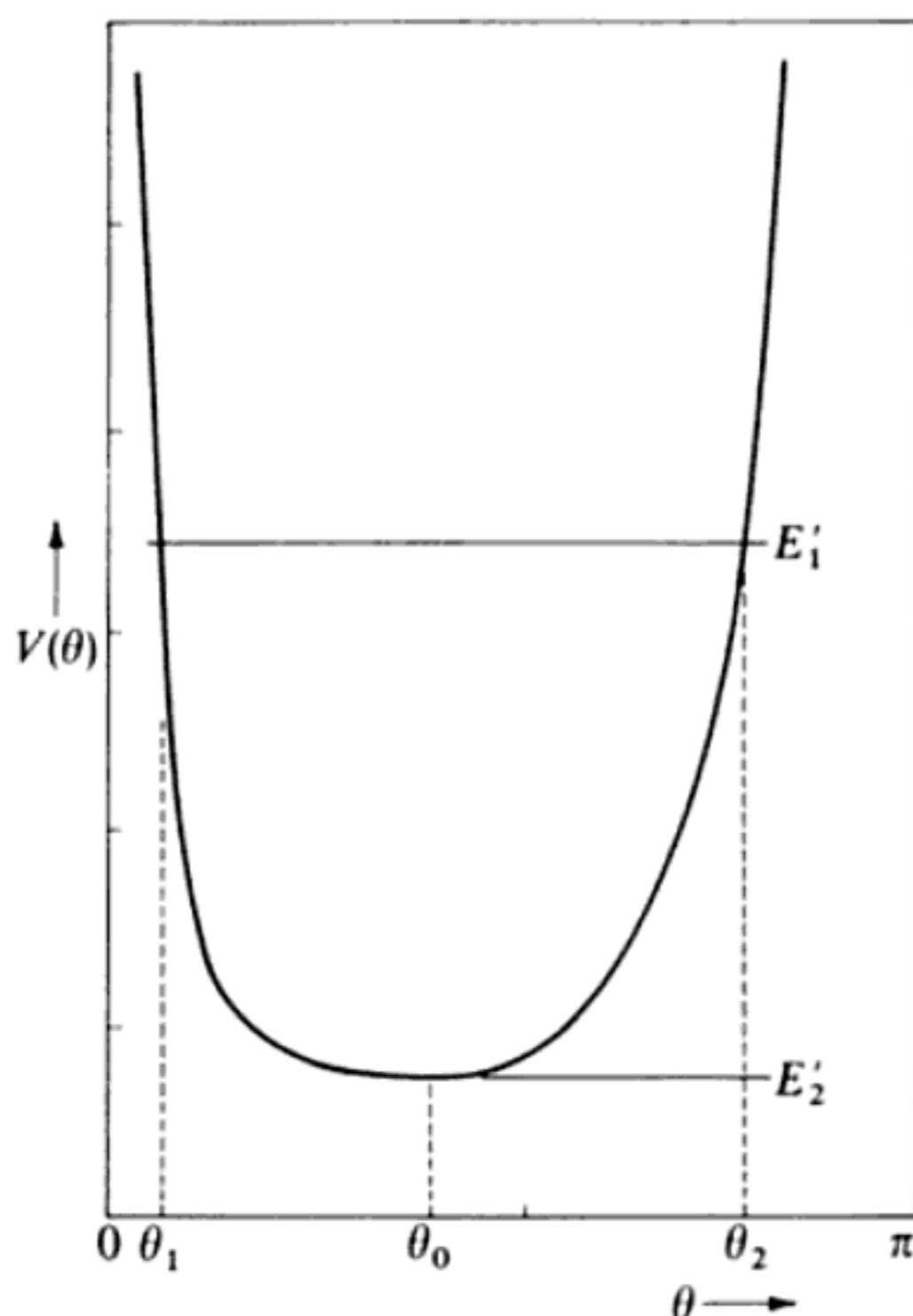


FIG. 12-10

En la figura 12-10 se representa la forma del potencial efectivo $V(\theta)$ para los valores $0 \leq \theta \leq \pi$, que evidentemente constituye el dominio de valores de θ . En este diagrama vemos que para todo valor de E' cualquiera (p. e., el representado por E'_1) el movimiento está limitado por dos valores extremos de θ , cuales son θ_1 y θ_2 , que corresponden a los puntos de inversión del problema de fuerzas centrales y que son raíces del denominador de 12.112. Así, pues, resulta que la inclinación de la peonza giratoria se encuentra, en general, comprendida entre los valores $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$. Cuando $E' = E'_2 = V_{\min}$, θ adquiere el valor único θ_0 , siendo el movimiento una precesión estacionaria bajo un ángulo de inclinación constante; esta situación es similar a la aparición de órbitas concéntricas en el problema de fuerzas centrales.

El valor de θ_0 puede obtenerse derivando $V(\theta)$ e igualando a cero. O sea

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = \frac{-\cos \theta_0 (p_\varphi - p_\psi \cos \theta_0)^2 + p_\psi \sin^2 \theta_0 (p_\varphi - p_\psi \cos \theta_0)}{I_{12} \sin^3 \theta_0} - Mgh \sin \theta_0 = 0 \quad (12.113)$$

Haciendo

$$\beta \equiv p_\phi - p_\psi \cos \theta_0 \quad (12.114)$$

la ecuación 12.113 quedará

$$(\cos \theta_0)\beta^2 - (p_\psi \operatorname{sen}^2 \theta_0)\beta + (MghI_{12} \operatorname{sen}^4 \theta_0) = 0 \quad (12.115)$$

que es una ecuación de segundo grado en β y que resuelta nos da

$$\beta = \frac{p_\psi \operatorname{sen}^2 \theta_0}{2 \cos \theta_0} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4MghI_{12} \cos \theta_0}{p_\psi^2}} \right] \quad (12.116)$$

Como β debe ser real, el radicando de 12.116 deberá ser positivo. Entonces, cuando $\theta_0 < \pi/2$, tendremos

$$p_\psi^2 \geq 4MghI_{12} \cos \theta_0 \quad (12.117)$$

pero, como según 12.107, es $p_\psi = I_3 \omega_3$; y así

$$\omega_3 \geq \frac{2}{I_3} \sqrt{MghI_{12} \cos \theta_0} \quad (12.118)$$

Por lo tanto, llegamos a la conclusión de que sólo puede haber precesión estacionaria bajo un ángulo de inclinación θ_0 constante cuando la velocidad angular de rotación sea mayor que el valor límite dado por 12.118.

Observemos que cuando $\theta = \theta_0$, de 12.104 resulta

$$\dot{\phi}_0 = \frac{\beta}{I_{12} \operatorname{sen}^2 \theta_0} \quad (12.119)$$

y, por tanto, existen dos valores posibles para la velocidad angular de precesión $\dot{\phi}_0$, uno por cada uno de los valores de β dados por 12.116:

$\dot{\phi}_{0(+)} \rightarrow$ precesión rápida

y

$\dot{\phi}_{0(-)} \rightarrow$ precesión lenta

Si ω_3 (o p_ψ) es grande (es decir, tenemos una peonza «rápida»), el segundo término del radical de 12.116 será pequeño y podremos desarrollarlo en serie. Si retenemos únicamente el primer término no nulo en cada caso

$$\left. \begin{aligned} \dot{\phi}_{0(+)} &\cong \frac{I_3 \omega_3}{I_{12} \cos \theta_0} \\ \dot{\phi}_{0(-)} &\cong \frac{Mgh}{I_3 \omega_3} \end{aligned} \right\} \quad (12.120)$$

Generalmente se observa la más lenta de las dos velocidades angulares de precesión $\dot{\phi}_{0(-)}$.

Los resultados anteriores son válidos para $\theta_0 < \pi/2$; si sucede que* $\theta_0 > \pi/2$, el radicando de 12.116 será siempre positivo, por lo que no habrá condiciones restrictivas para ω_3 . Como, en tal caso, el radical es superior a la unidad, los valores de $\dot{\phi}_0$ de precesión rápida y lenta serán de signos contrarios. O sea, para $\theta_0 > \pi/2$, la precesión rápida tiene el mismo sentido que para $\theta_0 < \pi/2$, pero la precesión lenta tendrá lugar en sentido contrario.

En el caso general, en que θ puede variar entre los límites $\theta_1 < \theta < \theta_2$, 12.104 nos indica que $\dot{\phi}$ puede cambiar o no de signo cuando θ varíe entre sus límites, según sean los valores de p_ϕ y p_ψ . Si $\dot{\phi}$ no cambia de signo, la peonza ejecuta un movimiento monótono de precesión en torno del eje x'_3 (véase figura 12-9) mientras que el eje (de simetría) x_3 oscila entre $\theta = \theta_1$ y $\theta = \theta_2$. Este fenómeno se llama *nutation*, mostrándose en la figura 12-11a la trayectoria descrita por la proyección del eje de simetría del cuerpo sobre una esfera unitaria solidaria del sistema fijo.

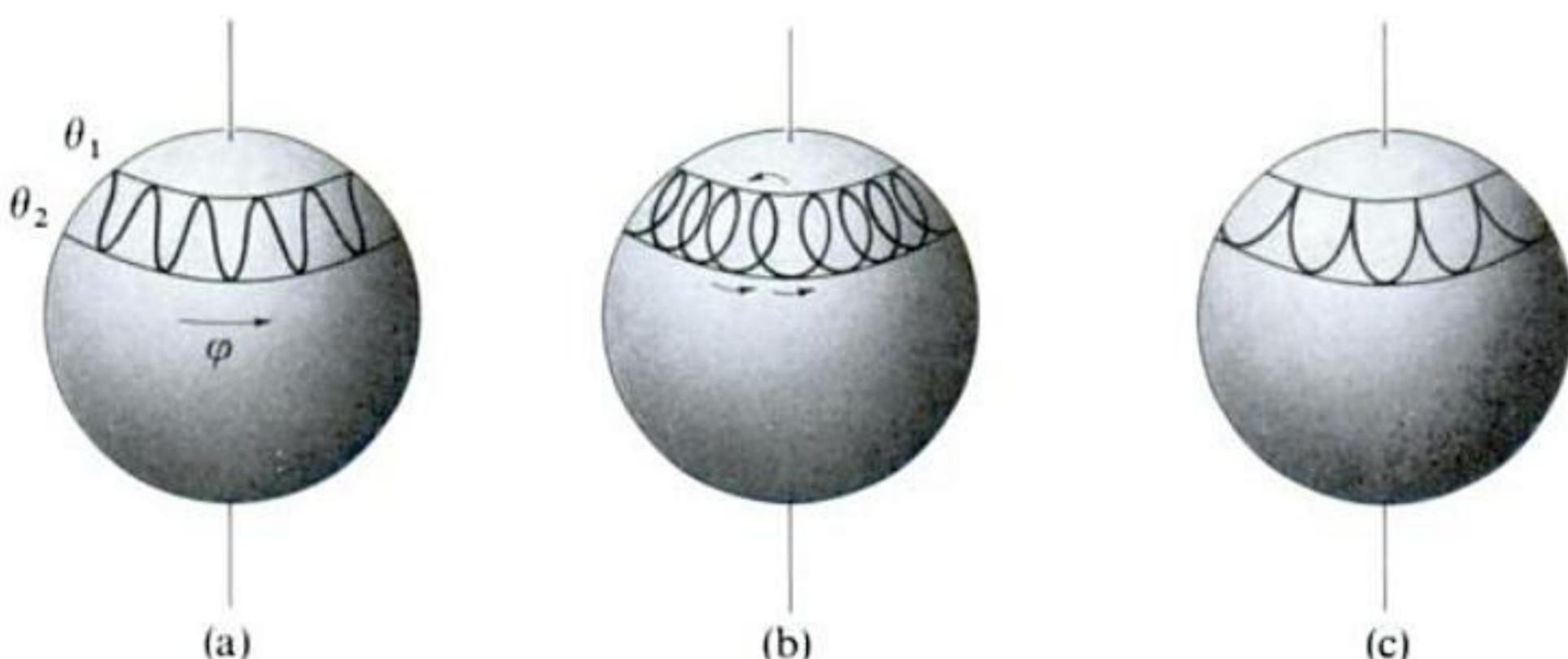


FIG. 12-11

* Si $\theta_0 > \pi/2$, la punta fija de la peonza se encuentra situada *por encima* del centro de masa. Este movimiento es posible, por ejemplo, en un giróscopo cuya punta sea realmente una rótula fija en el extremo de un soporte vertical.

Si cambia de signo $\dot{\phi}$ cuando θ varía entre sus dos valores límites, la velocidad angular de precesión deberá tener signos contrarios en $\theta = \theta_1$ y $\theta = \theta_2$. Así, el movimiento de precesión-nutación origina el movimiento rizado del eje de simetría del cuerpo que se representa en la figura 12-11b.

Por último, si los valores de p_ϕ y p_ψ son tales que

$$(p_\phi - p_\psi \cos \theta)|_{\theta=\theta_1} = 0 \quad (12.121)$$

entonces,

$$\dot{\phi}|_{\theta=\theta_1} = 0; \quad \dot{\theta}|_{\theta=\theta_1} = 0 \quad (12.122)$$

resultando el movimiento de retrocesos sucesivos que se muestra en la figura 12-11c. Precisamente este caso corresponde al método corriente de arrancar una peonza. Primero, se obliga a la peonza a ponerse a girar en torno de su eje y después se le da una ligera inclinación y se suelta. Así, las condiciones iniciales son $\theta = \theta_1$ y $\dot{\theta} = 0 = \dot{\phi}$. Como el primer movimiento de la peonza es comenzar a caer en el campo gravitatorio, las condiciones son exactamente las de la figura 12-11c, resultando el movimiento de retrocesos sucesivos. Las figuras 12-11a y 12-11b corresponden al movimiento cuando existe una velocidad angular inicial $\dot{\phi}$ en el mismo sentido o en el contrario que la precesión.

12.11 Estabilidad de las rotaciones del cuerpo rígido*

Supongamos ahora un sistema rígido en rotación sin fuerzas alrededor de uno de sus ejes principales y preguntémonos si este movimiento es estable. «Estabilidad» significa aquí, como antes (véase sección 8.11), que si se aplica al sistema una pequeña perturbación, el movimiento de éste recuperará su forma anterior o bien ejecutará pequeñas oscilaciones en torno de la misma.

Para nuestra discusión tomaremos un cuerpo de la forma más general, en el que los momentos principales de inercia sean distintos, designándolos de forma que $I_3 > I_2 > I_1$. Hagamos que los ejes del sistema del cuerpo coincidan con los ejes principales y comencemos suponiendo que el cuerpo gira alrededor del eje x_1 ; o sea, alrededor del eje principal asociado al momento de inercia I_1 . Entonces,

$$\omega = \omega_1 \mathbf{e}_1 \quad (12.123)$$

* Este problema fue tratado por primera vez por EULER en 1749.

Si aplicamos una pequeña perturbación, la velocidad angular adquirirá la forma

$$\omega = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \lambda \mathbf{e}_2 + \mu \mathbf{e}_3 \quad (12.124)$$

donde λ y μ son cantidades pequeñas y corresponden a los parámetros que hemos utilizado anteriormente en otras aplicaciones del método de las perturbaciones. (λ y μ son lo suficientemente pequeñas para que podamos despreciar su producto frente a todas las demás cantidades importantes para la discusión.)

Las ecuaciones de Euler serán (véase 12.77):

$$\left. \begin{aligned} (I_2 - I_3)\lambda\mu - I_1\dot{\omega}_1 &= 0 \\ (I_3 - I_1)\mu\omega_1 - I_2\dot{\lambda} &= 0 \\ (I_1 - I_2)\lambda\omega_1 - I_3\dot{\mu} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12.125)$$

Como $\lambda\mu \approx 0$, la primera de estas ecuaciones nos da $\dot{\omega}_1 = 0$, o sea $\omega_1 = \text{cte}$. Despejando $\dot{\lambda}$ y $\dot{\mu}$ de las otras dos ecuaciones, encontramos

$$\dot{\lambda} = \left(\frac{I_3 - I_1}{I_2} \omega_1 \right) \mu \quad (12.126)$$

$$\dot{\mu} = \left(\frac{I_1 - I_2}{I_3} \omega_1 \right) \lambda \quad (12.127)$$

donde los términos entre paréntesis son ambos constantes. Estas ecuaciones son acopladas, pero no podemos resolverlas por el método utilizado en la sección 12.9 ya que las constantes son diferentes en ambas. La solución puede obtenerse derivando primero la ecuación en $\dot{\lambda}$:

$$\ddot{\lambda} = \left(\frac{I_3 - I_1}{I_2} \omega_1 \right) \dot{\mu} \quad (12.128)$$

Ahora, podemos sustituir en ésta el valor de $\dot{\mu}$ dado por 12.127:

$$\ddot{\lambda} + \left(\frac{(I_1 - I_3)(I_1 - I_2)}{I_2 I_3} \omega_1^2 \right) \lambda = 0 \quad (12.129)$$

La solución a esta ecuación es

$$\lambda(t) = A e^{i\Omega_1 \lambda t} + B e^{-i\Omega_1 \lambda t} \quad (12.130)$$

donde

$$\Omega_{1\lambda} \equiv \omega_1 \sqrt{\frac{(I_1 - I_3)(I_1 - I_2)}{I_2 I_3}} \quad (12.131)$$

y donde los subíndices 1 y λ ponen de manifiesto que estamos considerando la solución para λ cuando el giro sea en torno del eje x_1 .

Por hipótesis, $I_1 < I_3$ e $I_1 < I_2$, por lo que $\Omega_{1\lambda}$ será real. En consecuencia, la solución para $\lambda(t)$ representa un movimiento oscilatorio de pulsación $\Omega_{1\lambda}$. Análogamente, podemos estudiar $\mu(t)$ con el resultado de que $\Omega_{1\mu} = \Omega_{1\lambda} \equiv \Omega_1$. Así, pues, la pequeña perturbación que representa el forzar dentro de ω unas pequeñas componentes x_2 y x_3 no aumenta con el tiempo, sino que oscila alrededor de los valores de equilibrio $\lambda=0$ y $\mu=0$. Por consiguiente, la rotación alrededor del eje x_1 es estable.

Considerando las rotaciones alrededor de los ejes x_2 y x_3 , podemos obtener expresiones para Ω_2 y Ω_3 por permutación en 12.131:

$$\Omega_1 = \omega_1 \sqrt{\frac{(I_1 - I_3)(I_1 - I_2)}{I_2 I_3}} \quad (12.132a)$$

$$\Omega_2 = \omega_2 \sqrt{\frac{(I_2 - I_1)(I_2 - I_3)}{I_1 I_3}} \quad (12.132b)$$

$$\Omega_3 = \omega_3 \sqrt{\frac{(I_3 - I_2)(I_3 - I_1)}{I_1 I_2}} \quad (12.132c)$$

Pero como $I_1 < I_2 < I_3$, tenemos

$$\Omega_1, \quad \Omega_3 \text{ reales}; \quad \Omega_2 \text{ imaginaria}$$

Así, cuando la rotación tenga lugar en torno del eje x_1 o del x_3 , la perturbación producirá un movimiento oscilatorio y la rotación será estable. Sin embargo, cuando la rotación tenga lugar en torno del eje x_2 el hecho de que Ω_2 sea imaginaria dará por resultado que la perturbación crezca indefinidamente con el tiempo y el movimiento será inestable.

Puesto que en esta discusión hemos supuesto que el sistema rígido puede ser un cuerpo cualquiera, llegamos a la conclusión de que el giro alrededor de uno de los ejes principales que corresponde al momento principal de inercia mayor o menor es un movimiento estable, mientras que el giro alrededor del eje que corresponde al momento principal de inercia de valor intermedio es inestable. Esto puede ponerse de manifiesto fácilmente, por ejemplo con un libro (que ha de mantenerse cerrado con una cinta o una tira de goma). Cuando se lanza el libro al aire con una velocidad angular en torno de un eje principal, el movi-

miento es inestable cuando el giro es alrededor del eje intermedio y estable cuando lo es alrededor de los otros dos.

Si ocurre que dos de los momentos principales son iguales ($I_1 = I_2$, p. e.), se anulará el coeficiente de λ en 12.127 y tendremos $\dot{\mu} = 0$, o sea $\mu(t) = \text{cte}$. Por tanto, podrá integrarse la ecuación en λ 12.126, dando

$$\lambda(t) = C + Dt \quad (12.133)$$

y la perturbación aumentará linealmente con el tiempo; por consiguiente, el movimiento alrededor del eje x_1 será inestable. La conclusión es análoga para el movimiento en torno del eje x_2 . Únicamente hay estabilidad para el eje x_3 , independientemente de que I_3 sea mayor o menor que $I_1 = I_2$.

Referencias recomendadas

La dinámica de sistemas rígidos es un tema que se trata en casi todos los textos de mecánica. Estudios de introducción se dan, por ejemplo, en FOWLES (Fo62, cap. 9) y en LINDSAY (Li61, cap. 8). A nivel ligeramente superior están los tratados de BECKER (Be54, cap. 12), CONSTANT (Co54, cap. 9), SLATER y FRANK (Sl47, cap. 6) y SOMMERFELD (So50, cap. 4).

Para discusiones a nivel medio-superior, véanse BRADBURY (Br68, cap. 8), GOLDSTEIN (Go50, cap. 5), HAUSER (Ha65, cap. 8), KONOPINSKI (Ko69, cap. 9 y 10), LANDAU y LIFSHITZ (La60, cap. 6), McCUSKEY (Mc59, cap. 4), SYMON (Sy60, cap. 11) y WANGNESS (Wa63, cap. 9). WHITTAKER (Wh37, cap. 6) presenta una extensa colección de problemas con sus soluciones.

HALFMAN (Ha62a, cap. 5 y 6) ofrece una discusión completa con inclinación hacia las aplicaciones técnicas.

El tema al que la dinámica de los sistemas rígidos se ha aplicado con mayor detalle es la teoría del movimiento de la peonza y del giróscopo. GOLDSTEIN (Go50, páginas 178-180) ofrece una corta bibliografía (con notas) de algunos de los trabajos más importantes.

Problemas

- 12-1.** Calcular los momentos de inercia I_1 , I_2 e I_3 de una esfera homogénea de radio R y masa M . (Tomar el origen en el centro de la esfera.)
- 12-2.** Calcular los momentos de inercia I_1 , I_2 e I_3 de un cono homogéneo de masa M cuya altura es h y cuya base tiene un radio R . Supóngase que el eje x_3 coincide

con el eje de simetría del cono y que el origen de coordenadas está situado en el vértice del mismo, calculando las componentes del tensor de inercia. A continuación, hágase un cambio de coordenadas pasando el origen al centro de masa y determinar entonces los momentos principales de inercia.

12-3. Calcular los momentos de inercia I_1 , I_2 e I_3 de un elipsoide homogéneo de masa M , la longitud de cuyos ejes es $2a > 2b > 2c$.

12-4. Supongamos que una varilla delgada de longitud l y masa m se suspende de un extremo. Calcular su momento de inercia. Determinar el punto en el cual debería estar concentrada toda la masa para que el momento de inercia del mismo respecto del eje de suspensión fuese igual al de la varilla. La distancia de este punto al de suspensión se llama *radio de giro*.

12-5. (a) Determinar a qué altura debe golpearse una bola de billar para que ruede sin deslizamiento inicial. (b) Calcular la altura óptima del cerco de una mesa de billar. ¿En qué premisas se ha basado el cálculo?

12-6. Dadas dos esferas del mismo diámetro e igual masa, una de las cuales es maciza y la otra hueca, descríbese con detalle un experimento no destructivo para determinar cuál de ellas es la maciza y cuál es la hueca.

12-7. Un disco homogéneo de radio R y masa M rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal siendo atraído por un punto situado a una distancia d por debajo del plano. Si la fuerza atractiva es proporcional a la distancia entre el centro de masa del disco y el centro de fuerzas, determinar la pulsación de las pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio.

12-8. Se construye una puerta con una plancha delgada homogénea, siendo su anchura 1 metro. Cuando la puerta se abre hasta los 90° se encuentra que se cierra en 2 segundos si se deja libre. Supóngase que las bisagras carecen de rozamiento y demuéstrese que la recta que ambas definen debe formar un ángulo de 3° aproximadamente con la vertical.

12-9. Sobre un cilindro de radio R cuyo eje es horizontal se coloca una plancha homogénea de espesor a . Demostrar que la condición de equilibrio estable de la plancha bajo la hipótesis de que no exista rozamiento es $R > a/2$. ¿Cuál es la pulsación de las pequeñas oscilaciones? Representar gráficamente la energía potencial U en función del desplazamiento angular θ . Demostrar que en $\theta = 0$ hay un mínimo para $R > a/2$ pero no para $R < a/2$.

12-10. Una esfera maciza de masa M y radio R gira libremente en el espacio a una velocidad angular ω en torno de un diámetro fijo. Una partícula de masa m , inicialmente en uno de los polos, se mueve a velocidad constante v a lo largo de un círculo máximo de la esfera. Demostrar que, cuando la partícula haya alcanzado el otro polo, la rotación de la esfera se habrá retrasado un ángulo

$$\alpha = \omega T \left(1 - \sqrt{\frac{2M}{2M + 5m}} \right)$$

donde T es el tiempo total invertido por la partícula para pasar de un polo al otro.

12-11. Un cubo homogéneo, de arista l , se encuentra inicialmente en posición de equilibrio inestable con una arista en contacto con un plano horizontal. Entonces, recibe un pequeño desplazamiento y se le deja caer. Demuéstrese que la velocidad angular del cubo cuando una de las caras entra en contacto con el plano es

$$\omega^2 = A \frac{q}{l} (\sqrt{2} - 1)$$

donde $A = 3/2$ si la arista no puede deslizar sobre el plano y $A = 12/5$ si puede deslizar sin rozamiento.

12-12. Demostrar que ninguno de los momentos principales de inercia puede ser mayor que la suma de los otros dos.

12-13. Si un péndulo físico posee el mismo período cuando se suspende de dos puntos situados a distancias diferentes del centro de masa, demostrar que la longitud del péndulo simple que posee el mismo período es igual a la separación de los puntos de suspensión. Este péndulo físico se llama *péndulo reversible de Kater* y en un tiempo proporcionaba el método más preciso (aproximadamente de 1 parte por 10^5) para la medida de la aceleración de la gravedad.* Discutir las ventajas del péndulo de Kater respecto del péndulo simple para estos fines.

12-14. Consideremos el tensor de inercia siguiente:

$$\{\mathbf{I}\} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(A+B) & \frac{1}{2}(A-B) & 0 \\ \frac{1}{2}(A-B) & \frac{1}{2}(A+B) & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

Dése una rotación de ángulo θ al sistema de coordenadas en torno del eje x_3 . Calcular las componentes del tensor transformado y demostrar que haciendo $\theta = \pi/4$ el tensor de inercia se diagonaliza siendo A , B y C sus componentes.

12-15. Consideremos una placa homogénea delgada situada en el plano x_1-x_2 . Demostrar que el tensor de inercia es de la forma

$$\{\mathbf{I}\} = \begin{pmatrix} A & -C & 0 \\ -C & B & 0 \\ 0 & 0 & A+B \end{pmatrix}$$

* Utilizado por primera vez en 1818 por el capitán Henry KATER (1777-1835), pero parece ser que el método había sido sugerido algún tiempo antes por BOHNENBERGER. La teoría del péndulo de Kater fue tratada con detalle por Friedrich Wilhelm BESSEL (1784-1846) en 1826.

12-16. Si, en el problema anterior, los ejes de coordenadas reciben un giro de ángulo θ alrededor del eje x_3 , demostrar que el nuevo tensor es

$$\{I\} = \begin{pmatrix} A' & -C' & 0 \\ -C' & B' & 0 \\ 0 & 0 & A' + B' \end{pmatrix}$$

donde

$$A' = A \cos^2 \theta - C \sin 2\theta + B \sin^2 \theta$$

$$B' = A \sin^2 \theta + C \sin 2\theta + B \cos^2 \theta$$

$$C' = C \cos 2\theta - \frac{1}{2}(B - A) \sin 2\theta$$

y con esto, demostrar que los ejes x_1 y x_2 se hacen principales si el ángulo de rotación es

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arc tg} \left(\frac{2C}{B - A} \right)$$

12-17. Sea una placa plana homogénea de densidad ρ limitada por la espiral logarítmica $r = ke^{\alpha\theta}$, variando θ entre 0 y π . Si la placa se encuentra en el plano x_1-x_2 , obténgase el tensor de inercia cuando el origen se sitúe en $r=0$. Háganse girar los ejes coordenados para obtener los momentos principales de inercia y, utilizando los resultados del problema anterior, mostrar que aquéllos son

$$I'_1 = \rho k^4 P(Q + R); \quad I'_2 = \rho k^4 P(Q - R); \quad I'_3 = I'_1 + I'_2$$

donde

$$P = \frac{e^{4\pi\alpha} - 1}{16(1 + 4\alpha^2)}; \quad Q = \frac{1 + 4\alpha^2}{2\alpha}; \quad R = \sqrt{1 + 4\alpha^2}$$

12-18. La demostración representada por las igualdades 12.35 a 12.42 fue llevada a cabo utilizando los convenios sumatorios. Vuélvase a escribir esta demostración en notación matricial.

12-19. Por definición, la *traza* de un tensor es la suma de los elementos diagonales de su matriz:

$$\operatorname{tr}\{I\} \equiv \sum_k I_{kk}$$

Demostrar, mediante una transformación de semejanza, que la traza es un invariante; o sea, que

$$\text{tr}\{\mathbf{I}\} = \text{tr}\{\mathbf{I}'\}$$

donde $\{\mathbf{I}\}$ es el tensor en uno de los sistemas coordenados e $\{\mathbf{I}'\}$ el tensor en el otro sistema, obtenido por rotación del anterior. Comprobar este resultado para las distintas formas del tensor de inercia de un cubo dadas en los ejemplos del texto.

12-20. Demuéstrese por el mismo procedimiento del problema anterior que el *determinante* de los elementos de la matriz de un tensor es un invariante. Comprobar también este resultado en el caso del cubo.

12-21. Hallar la pulsación de las pequeñas oscilaciones de una placa delgada homogénea cuando el movimiento tiene lugar en el plano de la placa y ésta tiene la forma de un triángulo equilátero que cuelga de (a) del punto medio de un lado y (b) de un vértice.

12-22. Sea un disco delgado formado por dos mitades homogéneas unidas a lo largo de un diámetro del disco. Si la densidad de una de las mitades es ρ y la de la otra 2ρ , determinar la expresión de la lagrangiana cuando el disco rueda sin deslizar a lo largo de una superficie horizontal. (El giro tiene lugar en el plano del disco.)

12-23. Obtener las componentes de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ (véase ecuación 12-69) directamente de la matriz de cambio λ (ecuación 12.66).

12-24. Demostrar utilizando la figura 12-6c que las componentes de $\boldsymbol{\omega}$ respecto de los ejes fijos (x_i) son

$$\omega'_1 = \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi$$

$$\omega'_2 = \dot{\theta} \sin \varphi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi$$

$$\omega'_3 = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}$$

12-25. Demostrar que para una peonza simétrica no sometida a fuerzas \mathbf{L} , $\boldsymbol{\omega}$ y \mathbf{e}_3 son coplanarios. (Véase figura 12-8.)

12-26. Demostrar que la situación representada en la figura 12-8 se refiere realmente al movimiento de una peonza simétrica no sometida a fuerzas que sea un esferoide alargado, o sea, $I_3 < I_{12}$; mientras que en el caso del esferoide oblongo, o sea, $I_{12} < I_3$, el eje x_3 estaría entre \mathbf{L} y $\boldsymbol{\omega}$ (es decir, el cono del cuerpo giraría *dentro* del cono fijo).

12-27. Con relación al estudio de la peonza simétrica de la sección 12-10, estudiar la ecuación de los puntos de inversión del movimiento de nutación haciendo $\dot{\theta} = 0$

en 12.110. Demostrar que resulta una ecuación de tercer grado en $\cos \theta$ que da dos valores de θ reales y uno imaginario.

- 12-28.** Analizar el movimiento de la peonza simétrica estudiado en la sección 12.10 cuando el eje de rotación sea vertical (o sea, cuando los ejes x'_3 y x_3 coincidan). Demostrar que el movimiento será estable o inestable según que la cantidad $4I_{12}Mhg/I_3^2\omega_3^2$ sea inferior o superior a la unidad. Representar gráficamente el potencial efectivo $V(\theta)$ en ambos casos y señalar las características de estas curvas que determinen si el movimiento es o no estable. Cuando la peonza se pone a girar en condiciones de estabilidad, ¿qué ocurrirá cuando el rozamiento reduzca gradualmente el valor de ω_3 ? (Este es el caso de la «peonza que se duerme».)
- 12-29.** Consideremos una placa delgada homogénea cuyos momentos principales de inercia son

$$\begin{aligned} I_1 &\text{ respecto del eje principal } x_1 \\ I_2 > I_1 &\text{ respecto del eje principal } x_2 \\ I_3 = I_1 + I_2 &\text{ respecto del eje principal } x_3 \end{aligned}$$

Supongamos que los orígenes de los sistemas x_i y x'_i coincidan y que estén situados en el centro de masa O de la placa. En el instante $t=0$, se pone a girar la placa sin que esté sometida a fuerzas con una velocidad angular ω que forma un ángulo α con el plano de la placa y es perpendicular al eje x_2 . Si $I_1/I_2 = \cos 2\alpha$, demostrar que en un instante t la velocidad angular en torno del eje x_2 es

$$\dot{\omega}^2(t) = \Omega \cos \alpha \operatorname{tgh}(\Omega t \operatorname{sen} \alpha)$$

Oscilaciones acopladas

13.1 Introducción

En el capítulo 4 examinamos el movimiento de un oscilador sometido a una fuerza impulsora externa, limitando el estudio al caso en que dicha fuerza era periódica; es decir, el impulsor es también un oscilador armónico. Entonces, consideramos la acción del impulsor sobre el oscilador, pero no incluimos el efecto de *realimentación* del oscilador sobre el impulsor. Si bien en muchos casos esta omisión carece de importancia, cuando se conectan dos (o más) osciladores de tal forma que la energía pueda pasar de uno a otro (o de los unos a los otros) en uno y otro sentido, nos encontraremos entonces ante una situación más complicada que corresponde al caso de *oscilaciones acopladas*.^{*} Un movimiento de esta clase puede ser sumamente complejo (incluso puede no ser periódico), pero, como veremos, siempre es posible describir el movimiento de un sistema oscilante cualquiera en función de las *coordenadas normales*, que tienen la propiedad de que cada una de ellas oscila con una pulsación bien definida. Es decir, las coordenadas normales se construyen de tal forma que no existe acoplamiento entre

* La teoría general del movimiento oscilatorio de un sistema de partículas con un número finito de grados de libertad fue formulada por LAGRANGE entre los años 1762 y 1765, aunque el precursor fue Daniel BERNOULLI (1700-1782) con un trabajo publicado en 1753.

ellas, aun cuando haya acoplamiento entre las coordenadas ordinarias (rectangulares) que definen las posiciones de las partículas. Las condiciones iniciales del sistema pueden establecerse siempre de forma que en el movimiento subsiguiente sólo una de las coordenadas normales varíe con el tiempo; en estas circunstancias diremos que se ha excitado uno de los *modos normales* del sistema. Si el sistema posee n grados de libertad (por ejemplo, está formado por n osciladores monodimensionales o $n/3$ osciladores tridimensionales acoplados), habrá en general n modos normales, algunos de los cuales pueden ser idénticos. En general, el movimiento del sistema será una superposición complicada de modos normales de oscilación, pero siempre podrán determinarse unas condiciones iniciales tales que se excite independientemente un modo normal dado cualquiera. La identificación de cada uno de los modos normales de un sistema permite construir una imagen reveladora del movimiento, aun cuando el movimiento del sistema sea *en general* una combinación complicada de todos los modos normales.

En el capítulo siguiente proseguiremos con el desarrollo del tema iniciado en éste, estudiando el movimiento de las cuerdas vibrantes. Este último tema no agota en absoluto la utilidad del método de los modos normales para estudiar sistemas oscilantes; realmente, son numerosas las zonas de la física matemática a las que dicho método es de aplicación, tales como el movimiento microscópico en los sólidos cristalinos y las oscilaciones del campo electromagnético.

13.2 Acoplamiento de dos osciladores armónicos

Comencemos considerando el caso más sencillo de movimiento acoplado: dos osciladores armónicos iguales unidos por un muelle. Sea κ la constante recuperadora* del muelle en cada uno de los osciladores y κ_{12} la del muelle de acoplamiento, en correspondencia con la situación que se ilustra en la figura 13-1. El movimiento está limitado a la recta que une las masas, por lo cual el sistema sólo poseerá dos grados de libertad, representados por las coordenadas x_1 y x_2 , cada una de las cuales se medirá a partir de la posición de equilibrio.

Si m_1 y m_2 sufren desplazamientos de valores x_1 y x_2 , respectivamente, a partir de sus posiciones de equilibrio, sobre m_1 actuará una fuerza $-\kappa x_1 - \kappa_{12}(x_1 - x_2)$ y sobre m_2 una fuerza $-\kappa x_2 - \kappa_{12}(x_2 - x_1)$. Por consiguiente, las ecuaciones de movimiento serán

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{x}_1 + (\kappa + \kappa_{12})x_1 - \kappa_{12}x_2 &= 0 \\ M\ddot{x}_2 + (\kappa + \kappa_{12})x_2 - \kappa_{12}x_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.1)$$

* De aquí en adelante, representaremos las constantes recuperadoras por κ , en vez de por k como hasta ahora. La letra k se reserva para ser utilizada (desde el capítulo 15) en un contexto completamente distinto.

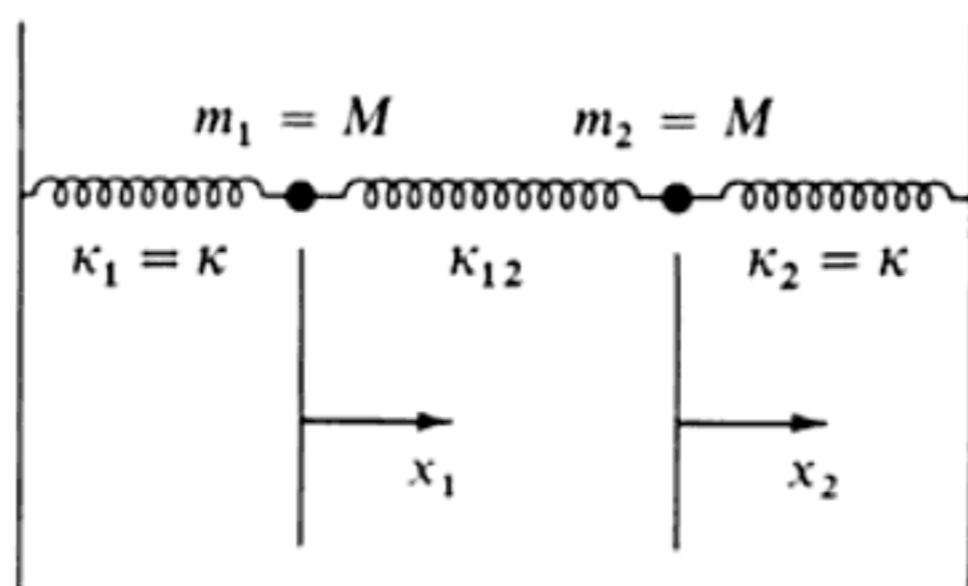


FIG. 13-1

Como cabe esperar que el movimiento sea oscilatorio, probaremos una solución de la forma

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= B_1 e^{i\omega t} \\ x_2(t) &= B_2 e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (13.2)$$

donde ha de determinarse la pulsación ω y pueden ser complejas las amplitudes B_1 y B_2 ^{*}, aunque sólo tengan significado físico las partes reales de $x_1(t)$ y $x_2(t)$. Llevando estas expresiones de los desplazamientos a las ecuaciones de movimiento, encontramos

$$\left. \begin{aligned} -M\omega^2 B_1 e^{i\omega t} + (\kappa + \kappa_{12})B_1 e^{i\omega t} - \kappa_{12} B_2 e^{i\omega t} &= 0 \\ -M\omega^2 B_2 e^{i\omega t} + (\kappa + \kappa_{12})B_2 e^{i\omega t} - \kappa_{12} B_1 e^{i\omega t} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.3)$$

Agrupando términos y suprimiendo el factor común exponencial, se obtiene

$$\left. \begin{aligned} (\kappa + \kappa_{12} - M\omega^2)B_1 - \kappa_{12} B_2 &= 0 \\ -\kappa_{12} B_1 + (\kappa + \kappa_{12} - M\omega^2)B_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.4)$$

* Como una amplitud compleja consta de *máculo* y *fase*, resultan así las dos constantes de integración que aparecen en una ecuación diferencial de segundo orden. Es decir, igualmente podríamos escribir $x(t) = |B| \exp[i(\omega t - \delta)]$ que $x(t) = |B| \cos(\omega t - \delta)$, como en la ecuación 3.6b. Más adelante (en las ecuaciones 13.9) veremos que es más conveniente emplear dos amplitudes *reales* diferentes y los factores dependientes del tiempo $\exp(i\omega t)$ y $\exp(-i\omega t)$. Estas distintas formas de la solución son completamente equivalentes.

Para que este sistema de ecuaciones tenga una solución no trivial, debe ser nulo el determinante de los coeficientes de B_1 y B_2 :

$$\begin{vmatrix} \kappa + \kappa_{12} - M\omega^2 & -\kappa_{12} \\ -\kappa_{12} & \kappa + \kappa_{12} - M\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (13.5)$$

Desarrollando este determinante secular, resulta

$$(\kappa + \kappa_{12} - M\omega^2)^2 - \kappa_{12}^2 = 0 \quad (13.6)$$

y, de aquí,

$$\kappa + \kappa_{12} - M\omega^2 = \pm \kappa_{12}$$

donde, al despejar ω , tenemos

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa + \kappa_{12} \pm \kappa_{12}}{M}} \quad (13.7)$$

Por consiguiente, el sistema posee dos *pulsaciones características* (o *pulsaciones propias*):

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\kappa + 2\kappa_{12}}{M}}; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{\kappa}{M}} \quad (13.8)$$

y, con esto, la solución general del problema será

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= B_{11}^+ e^{i\omega_1 t} + B_{11}^- e^{-i\omega_1 t} + B_{12}^+ e^{i\omega_2 t} + B_{12}^- e^{-i\omega_2 t} \\ x_2(t) &= B_{21}^+ e^{i\omega_1 t} + B_{21}^- e^{-i\omega_1 t} + B_{22}^+ e^{i\omega_2 t} + B_{22}^- e^{-i\omega_2 t} \end{aligned} \right\} \quad (13.9)$$

donde explícitamente se han escrito pulsaciones positivas y negativas, puesto que los radicales de 13.7 y 13.8 pueden llevar uno u otro signo.

Las amplitudes que figuran en 13.9 no son todas independientes entre sí, como podemos comprobar fácilmente sustituyendo ω_1 y ω_2 en las ecuaciones 13.4. Entonces, resulta

$$\text{para } \omega = \omega_1: B_{11} = -B_{21}$$

$$\text{para } \omega = \omega_2: B_{12} = B_{22}$$

Como el único subíndice que necesitamos ahora en cada B es el que indica la pulsación propia correspondiente (o sea, el *segundo* subíndice), podemos escribir como sigue la solución general

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= B_1^+ e^{i\omega_1 t} + B_1^- e^{-i\omega_1 t} + B_2^+ e^{i\omega_2 t} + B_2^- e^{-i\omega_2 t} \\ x_2(t) &= -B_1^+ e^{i\omega_1 t} - B_1^- e^{-i\omega_1 t} + B_2^+ e^{i\omega_2 t} + B_2^- e^{-i\omega_2 t} \end{aligned} \right\} \quad (13.10)$$

Así, pues, hay *cuatro* constantes arbitrarias en la integral general, como se esperaba, ya que tenemos *dos* ecuaciones de movimiento diferenciales de *segundo orden*.

Como mencionamos antes, siempre es posible definir un conjunto de coordenadas cuya dependencia temporal sea sencilla y que se correspondan con la excitación de los distintos modos de oscilación del sistema. Examinemos, pues, la pareja de coordenadas que definimos así

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &\equiv x_1 - x_2 \\ \eta_2 &\equiv x_1 + x_2 \end{aligned} \right\} \quad (13.11)$$

o sea,

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}(\eta_2 + \eta_1) \\ x_2 &= \frac{1}{2}(\eta_2 - \eta_1) \end{aligned} \right\} \quad (13.12)$$

Llevando estas expresiones de x_1 y x_2 a 13.1, resulta

$$\left. \begin{aligned} M(\ddot{\eta}_1 + \ddot{\eta}_2) + (\kappa + 2\kappa_{12})\eta_1 + \kappa\eta_2 &= 0 \\ M(\ddot{\eta}_1 - \ddot{\eta}_2) + (\kappa + 2\kappa_{12})\eta_1 - \kappa\eta_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.13)$$

que pueden resolverse (por suma y resta) dando

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{\eta}_1 + (\kappa + 2\kappa_{12})\eta_1 &= 0 \\ M\ddot{\eta}_2 + \kappa\eta_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.14)$$

Las coordenadas η_1 y η_2 están ahora *desacopladas* y, por lo tanto, son *independientes*. Las soluciones son

$$\left. \begin{aligned} \eta_1(t) &= C_1^+ e^{i\omega_1 t} + C_1^- e^{-i\omega_1 t} \\ \eta_2(t) &= C_2^+ e^{i\omega_2 t} + C_2^- e^{-i\omega_2 t} \end{aligned} \right\} \quad (13.15)$$

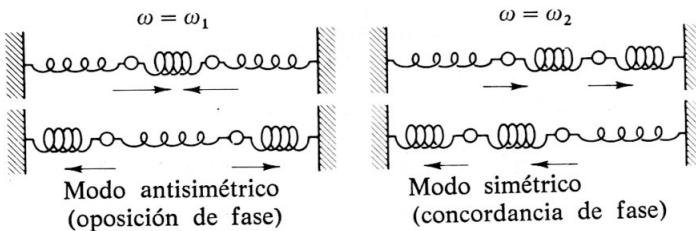


FIG. 13-2

donde las pulsaciones ω_1 y ω_2 son las dadas por 13.8. Así, η_1 y η_2 son las *coordenadas normales* de este problema. En una sección posterior estableceremos un método general para obtener las coordenadas normales.

Si imponemos las condiciones iniciales $x_1(0) = -x_2(0)$ y $\dot{x}_1(0) = -\dot{x}_2(0)$, encontramos que $\eta_2(0) = 0$ y $\dot{\eta}_2(0) = 0$, lo que nos lleva a $C_2^+ = C_2^- = 0$. O sea, $\eta_2(t) = 0$ para todo valor de t . Entonces, las partículas oscilarán siempre en *oposición de fase* y con una pulsación ω_1 ; éste es el *modo de oscilación antisimétrico*. Por otra parte, si hacemos $x_1(0) = x_2(0)$ y $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0)$, encontramos que $\eta_1(t) = 0$, oscilando las partículas *en fase* y con una pulsación ω_2 ; éste es el *modo de oscilación simétrico*. En la figura 13-2 se representan esquemáticamente estos resultados. El movimiento más general del sistema será, desde luego, una combinación lineal de modos simétricos y antisimétricos.

El hecho de que el modo antisimétrico posea la pulsación mayor y el simétrico la menor es, en realidad, una conclusión de carácter general. En un sistema complejo, formado por osciladores linealmente acoplados, el modo que posea el mayor grado de simetría tendrá la pulsación más baja. Cuando la simetría desaparezca, los muelles deberán «trabajar más intensamente» en los modos antisimétricos, elevándose la pulsación.

Nótese que si mantenemos quieto m_2 y dejamos que m_1 oscile, la pulsación será $\sqrt{(\kappa + \kappa_{12})/M}$ y la pulsación de m_2 será la misma cuando m_1 se mantenga fijo. Además, los osciladores son idénticos, por lo que sus pulsaciones en ausencia de acoplamiento han de ser iguales evidentemente. Así, pues, el efecto del acoplamiento es separar en dos la pulsación común, haciendo una de las pulsaciones características mayor que la correspondiente al movimiento no acoplado y la otra inferior. Si representamos por ω_0 la pulsación del movimiento no acoplado, será $\omega_1 > \omega_0 > \omega_2$, pudiendo representarse esquemáticamente el efecto del acoplamiento, como en la figura 13-3a. En la figura 13-3b se representan las pulsaciones características para el caso de tres masas idénticas acopladas; nuevamente tenemos un desdoblamiento de las pulsaciones características, con una mayor y otra menor que ω_0 . Ésta es una regla general: Para un número par n de osciladores iguales acoplados habrá $n/2$ pulsaciones características mayores que

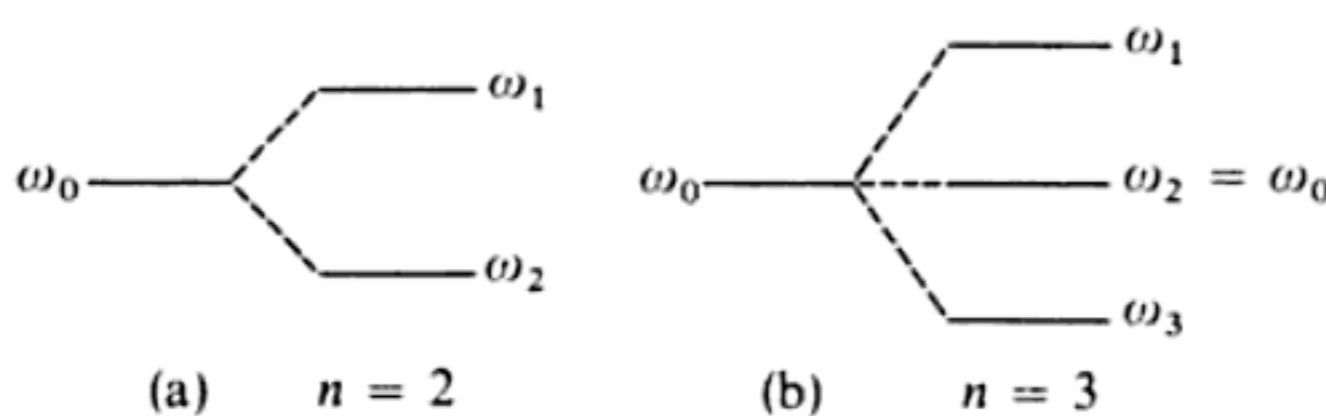


FIG. 13-3

ω_0 y $n/2$ pulsaciones características menores que ω_0 ; si n es impar, una pulsación característica será igual a ω_0 y las $n-1$ pulsaciones características restantes se distribuirán simétricamente por encima y por debajo de ω_0 . El lector familiarizado con el efecto Zeeman en los espectros atómicos apreciará la analogía con estos resultados: en cada uno de los casos aparece un desdoblamiento simétrico de la pulsación producido por una interacción (en un caso por la aplicación de un campo magnético y en el otro por el acoplamiento de partículas por intermedio de muelles).

13.3 Acoplamiento débil

Algunos de los casos más interesantes de oscilaciones acopladas ocurren cuando el acoplamiento es *débil*; o sea, cuando la constante del muelle de acoplamiento es pequeña en comparación con la de los muelles de los osciladores: $\kappa_{12} \ll \kappa$. Según 13.8, las pulsaciones ω_1 y ω_2 serán

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\kappa + 2\kappa_{12}}{M}}; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{\kappa}{M}} \quad (13.16)$$

Si el acoplamiento es débil, podemos desarrollar en serie la expresión de ω_1 :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{\kappa}{M}} \sqrt{1 + \frac{2\kappa_{12}}{\kappa}}, \\ &\cong \sqrt{\frac{\kappa}{M}} (1 + 2\varepsilon) \end{aligned} \quad (13.17)$$

donde

$$\varepsilon \equiv \frac{\kappa_{12}}{2\kappa} \ll 1 \quad (13.18)$$

Ahora, la pulsación propia de ambos osciladores, cuando el otro se mantiene fijo, es

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \sqrt{\frac{\kappa + \kappa_{12}}{M}} \\ &\cong \sqrt{\frac{\kappa}{M}} (1 + \varepsilon)\end{aligned}\quad (13.19)$$

o sea,

$$\sqrt{\frac{\kappa}{M}} \cong \omega_0(1 - \varepsilon) \quad (13.20)$$

Por tanto, las dos pulsaciones características serán, aproximadamente,

$$\left. \begin{aligned}\omega_1 &\cong \sqrt{\frac{\kappa}{M}} (1 + 2\varepsilon); \\ &\cong \omega_0(1 - \varepsilon)(1 + 2\varepsilon) \\ &\cong \omega_0(1 + \varepsilon)\end{aligned} \right\} \quad (13.21)$$

Podemos ya examinar la forma en que se comporta un sistema débilmente acoplado. Si desplazamos el oscilador 1 una distancia D y lo soltamos a partir del reposo, las condiciones iniciales del sistema serán:

$$x_1(0) = D, \quad x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0 \quad (13.22)$$

Llevando estas condiciones iniciales a los lugares de $x_1(t)$ y $x_2(t)$ de las expresiones 13.10, las amplitudes resultan ser

$$B_1^+ = B_1^- = B_2^+ = B_2^- = \frac{D}{4} \quad (13.23)$$

Con esto, $x_1(t)$ se hará

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \frac{D}{4} [(e^{i\omega_1 t} + e^{-i\omega_1 t}) + (e^{i\omega_2 t} + e^{-i\omega_2 t})] \\ &= \frac{D}{2} [\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t] \\ &= D \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)\end{aligned}\quad (13.24)$$

Pero, de acuerdo con 13.21,

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega_0; \quad \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \varepsilon\omega_0 \quad (13.25)$$

Por consiguiente,

$$x_1(t) = (D \cos \varepsilon\omega_0 t) \cos \omega_0 t \quad (13.26a)$$

y, análogamente,

$$x_2(t) = (D \sin \varepsilon\omega_0 t) \sin \omega_0 t \quad (13.26b)$$

Como ε es una cantidad pequeña, las cantidades $D \cos \varepsilon\omega_0 t$ y $D \sin \varepsilon\omega_0 t$ varían lentamente con el tiempo. Por lo tanto, $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son en esencia funciones senoidales cuyas amplitudes varían lentamente. Aunque, al principio, sólo x_1 es diferente de cero, a medida que el tiempo pasa, la amplitud de x_1 decrece lentamente, mientras que la de x_2 aumenta lentamente desde cero. Con esto, la energía pasa del primer oscilador al segundo. Cuando $t=\pi/2\varepsilon\omega_0$, entonces $D \cos \varepsilon\omega_0 t=0$ y se habrá cedido toda la energía. Cuando transcurra aún más tiempo, la energía será devuelta al primer oscilador. Éste es el fenómeno familiar de los *latidos* o *pulsaciones* que se representa en la fig. 13-4. (En el caso representado, $\varepsilon=0,08$.)

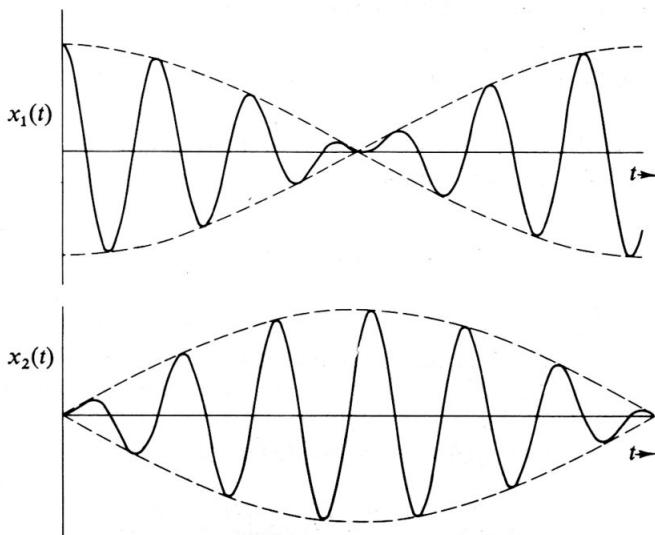


FIG. 13-4

13.4 Vibraciones forzadas de osciladores acoplados

El fenómeno de la resonancia tiene lugar en el movimiento forzado de sistemas acoplados al igual que en el caso de un oscilador simple (sección 4.2). La diferencia esencial radica en que, en las vibraciones forzadas de osciladores acoplados, pueden darse resonancias *múltiples*, ya que, como existen n frecuencias características distintas, cada una de éstas producirá una resonancia; en el caso del oscilador armónico simple es, desde luego, $n=1$. El estudio de la resonancia sólo tiene significado físico cuando el sistema es *amortiguado*; de lo contrario, aparecerán amplitudes infinitamente grandes (e inexistentes) en las frecuencias de resonancia. No obstante, en el caso de sistemas acoplados la inclusión explícita de términos de amortiguamiento complica grandemente la situación.* Más que tratar el problema completo, reduciremos nuestra atención al caso más sencillo en que no existe amortiguamiento, del cual aún seremos capaces de obtener una considerable información cualitativa.

Volvamos a la pareja de osciladores iguales acoplados de la figura 13-1 y supongamos que m_1 está impulsada por una fuerza $F_0 \cos \omega t$. Las ecuaciones de movimiento serán

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{x}_1 + (\kappa + \kappa_{12})x_1 - \kappa_{12}x_2 &= F_0 \cos \omega t \\ M\ddot{x}_2 + (\kappa + \kappa_{12})x_2 - \kappa_{12}x_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.27)$$

que podemos poner en la notación habitual como sigue

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 - \frac{\kappa_{12}}{M} x_2 &= A \cos \omega t \\ \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 - \frac{\kappa_{12}}{M} x_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.27a)$$

Ya conocemos las soluciones (13.10) de las ecuaciones homogéneas, por lo que sólo será necesario considerar las integrales particulares. Si se incluye amortiguamiento, sólo persistirán las integrales particulares después que hayan pasado los efectos transitorios; ello puede verse en la discusión que sigue a la expresión 4.12. Al haber despreciado el amortiguamiento, podemos ensayar integrales

* Sin embargo, no es difícil de obtener una solución en función de las *coordenadas normales* del problema (véase prob. 13-10).

particulares en las que no se incluya la complicación de factores de fase; sabemos que la fase cambia en π en la resonancia (véase figura 4-1):

$$\left. \begin{aligned} x_{1,p}(t) &= D_1 \cos \omega t \\ x_{2,p}(t) &= D_2 \cos \omega t \end{aligned} \right\} \quad (13.28)$$

Sustituyendo estas expresiones en las 13.27a y suprimiendo el factor común $\cos \omega t$, obtenemos

$$\left. \begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2)D_1 - \frac{\kappa_{12}}{M} D_2 &= A \\ - \frac{\kappa_{12}}{M} D_1 + (\omega_0^2 - \omega^2)D_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.29)$$

Despejando D_1 y D_2 tenemos

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= \frac{A(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - (\kappa_{12}/M)^2} \\ D_2 &= \frac{A(\kappa_{12}/M)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - (\kappa_{12}/M)^2} \end{aligned} \right\} \quad (13.30)$$

Mediante las expresiones de ω_0 , ω_1 y ω_2 (13.16 y 13.19), es fácil comprobar que D_1 y D_2 pueden volver a escribirse de la forma siguiente:

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= \frac{A(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)} \\ D_2 &= \frac{A(\omega_0^2 - \omega_2^2)}{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)} \end{aligned} \right\} \quad (13.31)$$

Estas igualdades ponen de manifiesto el efecto de resonancia esperado: D_1 y D_2 se hacen infinitas para las dos pulsaciones características, ω_1 y ω_2 . (Por supuesto, las amplitudes permanecen finitas si se incluye el amortiguamiento.) En el límite de acoplamiento nulo ($\kappa_{12} \rightarrow 0$), las tres pulsaciones, ω_0 , ω_1 y ω_2 , se hacen iguales y D_1 adquiere la forma de la amplitud de un oscilador simple (de $Q = \infty$) mientras que D_2 se anula (ya que no se cede energía a m_2 en ausencia de acoplamiento):

$$\left. \begin{aligned} D_1(\kappa_{12} \rightarrow 0) &= \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ D_2(\kappa_{12} \rightarrow 0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.32)$$

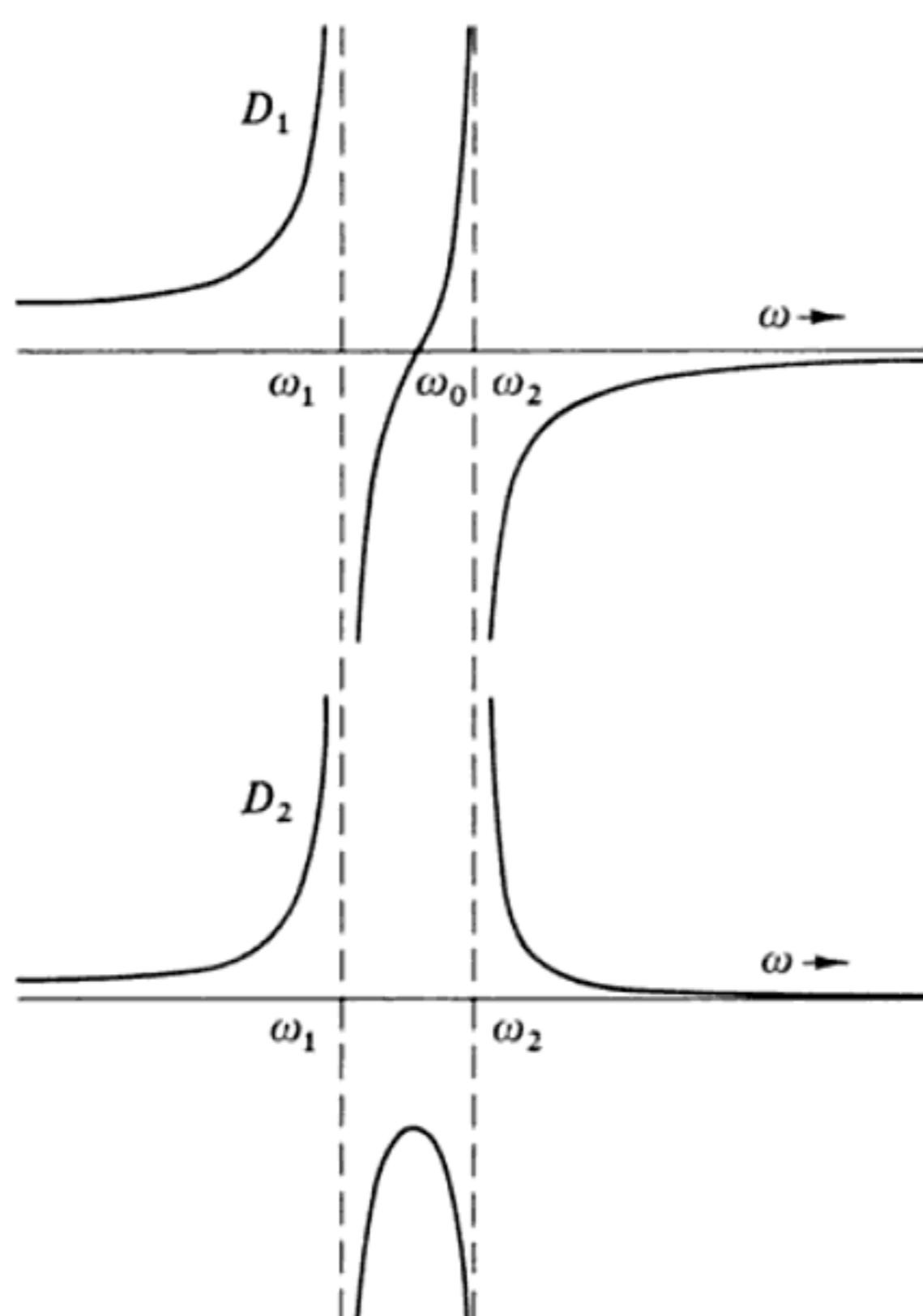


FIG. 13-5

En la figura 13-5 se representan las relaciones 13.31. Los valores negativos de las amplitudes aparecen porque las soluciones ensayadas (13.28) no contenían fases; estos valores negativos implican que la fuerza impulsora y el movimiento resultante estén en *oposición de fase*. Para $\omega < \omega_0$ las dos masas tienen la misma fase relativa, mientras que para $\omega > \omega_0$ están en oposición de fase.

13.5 Circuitos eléctricos acoplados

En la figura 3-16 se muestra la equivalencia entre el oscilador simple no amortiguado y un circuito serie *LC*. Cuando este circuito se lleve a las proximidades de otro circuito similar, en este último se inducirán oscilaciones en virtud del acoplamiento entre las dos bobinas (es decir, por *inducción mutua*). La si-

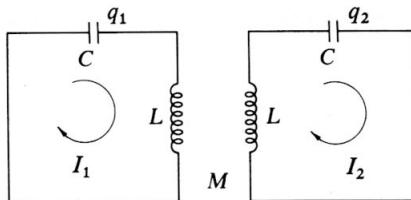


FIG. 13-6

situación se muestra en la figura 13-6; las capacidades C y las inductancias L son idénticas y la inducción mutua es M . Aplicando las reglas de Kirchhoff, tenemos

$$\left. \begin{aligned} LI_1 + \frac{q_1}{C} + MI_2 &= 0 \\ LI_2 + \frac{q_2}{C} + MI_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.33)$$

Derivando estas ecuaciones respecto del tiempo al objeto de expresarlas en función de *intensidades*, obtenemos (haciendo $\dot{q}=I$)

$$\left. \begin{aligned} L\ddot{I}_1 + \frac{1}{C} I_1 + M\ddot{I}_2 &= 0 \\ L\ddot{I}_2 + \frac{1}{C} I_2 + M\ddot{I}_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.34)$$

Como de costumbre, busquemos soluciones de la forma

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= B_1 e^{i\omega t} \\ I_2 &= B_2 e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (13.35)$$

que nos llevan al sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \left(\omega^2 L - \frac{1}{C} \right) B_1 + M\omega^2 B_2 &= 0 \\ M\omega^2 B_1 + \left(\omega^2 L - \frac{1}{C} \right) B_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.36)$$

Al hacer igual a cero el determinante de los coeficientes de B_1 y B_2 , resulta

$$\left(\omega^2 L - \frac{1}{C}\right)^2 - (M\omega^2)^2 = 0 \quad (13.37)$$

de donde, al despejar ω , tendremos

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC \pm MC}} \quad (13.38)$$

por lo que las pulsaciones características serán

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC - MC}}; \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{LC + MC}} \quad (13.39)$$

Nuevamente vemos que las pulsaciones características se encuentran por encima y por debajo de la pulsación de las oscilaciones no acopladas, $1/\sqrt{LC}$.

Además de acoplarse por inducción mutua, los circuitos eléctricos pueden acoplarse de otras muchas maneras. En la figura 13-7 se ilustran dos posibilidades de acoplamiento, inductivo y capacitivo. El acoplamiento resistivo es también posible, por ejemplo reemplazando L_{12} de la figura 13-7a por una resistencia (véase problema 13-14).

13.6 Teoría general de las oscilaciones acopladas

En las secciones anteriores averiguamos que el efecto del acoplamiento en un sistema de dos grados de libertad era producir dos frecuencias características

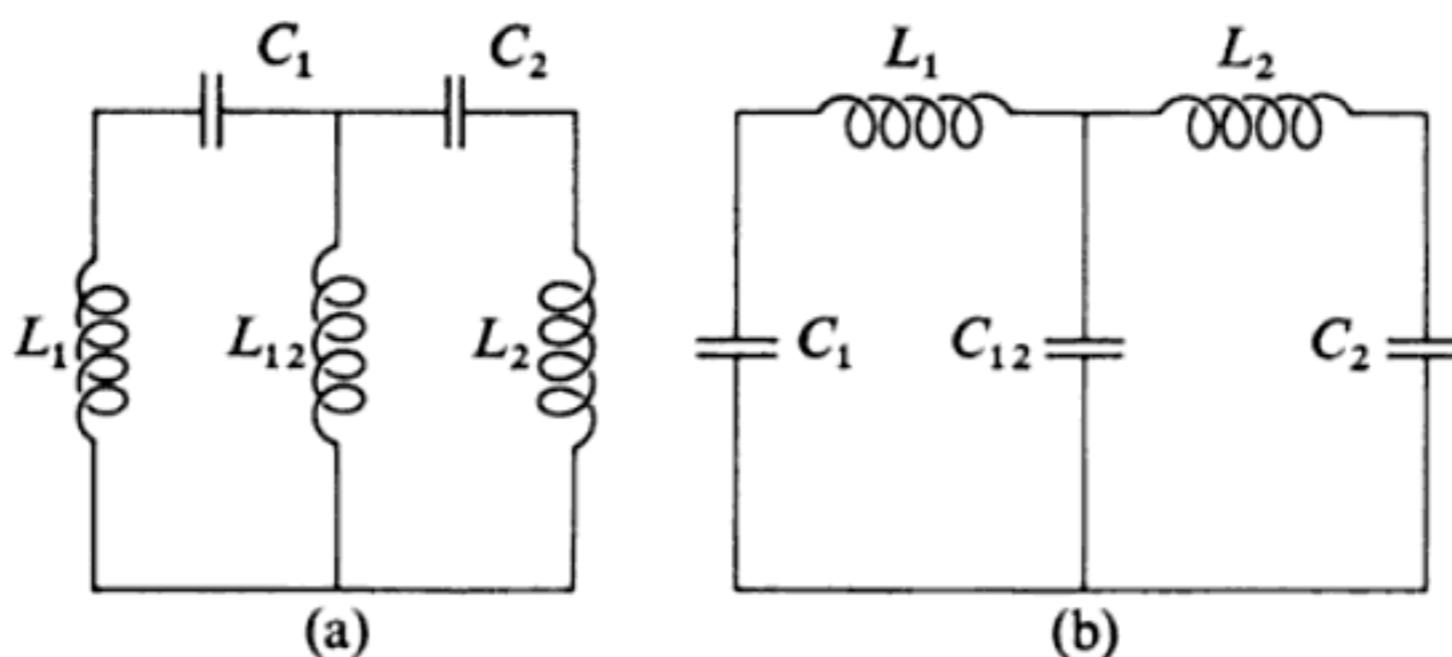


FIG. 13-7

y dos modos de oscilación. Ahora, pasamos a examinar el problema de las oscilaciones acopladas desde un punto de vista general. Consideremos un sistema conservativo que pueda quedar definido en función de n coordenadas generalizadas q_k en un instante t . Si el sistema tiene n grados de libertad, será $k=1, 2, \dots, n$. Admitamos que existe una configuración de equilibrio estable del sistema para la cual las coordenadas generalizadas tengan los valores q_{k0} . En esta configuración, las ecuaciones de Lagrange serán satisfechas por

$$q_k = q_{k0}; \quad \dot{q}_k = 0; \quad \ddot{q}_k = 0; \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Ahora, como todos los términos no nulos de la forma $(d/dt)(\partial L/\partial \dot{q}_k)$ deben contener por lo menos \dot{q}_k o a \ddot{q}_k para que los mismos sean nulos en el equilibrio, de las ecuaciones de Lagrange tendremos, por tanto,

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} \Big|_0 = \frac{\partial T}{\partial q_k} \Big|_0 - \frac{\partial U}{\partial q_k} \Big|_0 = 0 \quad (13.40)$$

donde los subíndices 0 indican que se toma el valor en el equilibrio de la cantidad en cuestión.

Supondremos que las ecuaciones que ligan las coordenadas generalizadas y las coordenadas rectangulares no contienen explícitamente al tiempo. O sea, que es

$$x_{\alpha,i} = x_{\alpha,i}(q_j) \quad \text{o} \quad q_j = q_j(x_{\alpha,i})$$

Entonces, la energía cinética será una función de segundo grado y homogénea de las velocidades generalizadas (cfr. 7.32):

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k} m_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (13.41)$$

Por consiguiente, en general,

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (13.42)$$

con lo cual, de 13.40, tendremos

$$\frac{\partial U}{\partial q_k} \Big|_0 = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (13.43)$$

Además, podemos acordar que las coordenadas generalizadas se midan a partir de las posiciones de equilibrio; o sea, hacemos $q_{k0}=0$. (Si originalmente hubiésemos tomado un sistema de coordenadas q'_k tales que $q'_{k0}\neq 0$, siempre podríamos efectuar una transformación lineal simple de la forma $q_k=q'_k+\alpha_k$, tal que $q_{k0}=0$.)

Desarrollando la energía potencial en serie de Taylor, en torno de la configuración de equilibrio, tenemos

$$U(q_1, q_2, \dots, q_n) = U_0 + \sum_k \frac{\partial U}{\partial q_k} \Big|_0 q_k + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k} \Big|_0 q_j q_k + \dots \quad (13.44)$$

Al verificar 13.43, el segundo término del desarrollo será nulo y, además podemos medir U de forma que $U_0=0$ sin pérdida de generalidad, resultando así que, si limitamos el movimiento de las coordenadas generalizadas a los pequeños desplazamientos, podremos despreciar todos los términos del desarrollo que contengan productos de las q_k de grado superior al segundo. Esto equivale a reducir nuestra atención a las oscilaciones armónicas simples, en cuyo caso sólo aparecerán segundas potencias de las coordenadas. Entonces,

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j,k} A_{jk} q_j q_k \quad (13.45)$$

donde, por definición,

$$A_{jk} \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k} \Big|_0 \quad (13.46)$$

Como el orden de derivación es indiferente (si U tiene derivadas parciales de segundo orden continuas), la cantidad A_{jk} será simétrica; o sea, $A_{jk}=A_{kj}$.

Hemos establecido que el movimiento del sistema ha de tener lugar en las proximidades de la configuración de equilibrio y hemos demostrado (13.43) que U ha de ser mínima cuando el sistema se encuentre en la misma. Entonces, como hemos hecho $U=0$ en el equilibrio, deberá ser en general $U \geq 0$. Evidentemente, también deberá ser $T \geq 0$.*

* O sea, tanto U como T son cantidades *definidas positivas* en el sentido de que serán siempre positivas a menos que las coordenadas (en el caso de U) o las velocidades (en el caso de T) sean cero, en cuyo caso se anularán.

Las igualdades 13.41 y 13.45 son de forma similar:

$$\boxed{\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{j,k} m_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \\ U &= \frac{1}{2} \sum_{j,k} A_{jk} q_j q_k \end{aligned}} \quad (13.47)$$

Las cantidades A_{jk} son sólo números (véase 13.46); las m_{jk} , no obstante, pueden ser funciones de las coordenadas (véase 7.30):

$$m_{jk} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \sum_i \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_k}$$

Podemos desarrollar las m_{jk} alrededor de la posición de equilibrio, resultando

$$m_{jk}(q_1, q_2, \dots, q_n) = m_{jk}(q_{10}) + \sum_l \left. \frac{\partial m_{jk}}{\partial q_l} \right|_0 q_l + \dots \quad (13.48)$$

en donde sólo nos proponemos retener el primer término no nulo; ahora bien, en contraste con el desarrollo de la energía potencial (13.44) no podemos hacer nulo el término constante $m_{jk}(q_{10})$, por lo que este primer término se convierte en el valor constante de m_{jk} en esta aproximación. Este orden de aproximación es el mismo que utilizamos para U , puesto que el término de orden inmediatamente superior que aparecería en la expresión de T llevaría la cantidad de tercer grado $q_j q_k \dot{q}_l$ y el término de orden inmediatamente superior que aparecería en la expresión de U contendría $q_j q_k q_l$. Entonces, en las igualdades 13.47, las m_{jk} y las A_{jk} son ordenaciones de $n \times n$ números que especifican de qué forma se acoplan los movimientos de las distintas coordenadas. Por ejemplo, si $m_{rs} \neq 0$ para $r \neq s$, entonces la energía cinética contendrá un término proporcional a $\dot{q}_r \dot{q}_s$, existiendo acoplamiento entre la coordenada r y la s . Si, por otra parte, m_{jk} es *diagonal* de forma que* $m_{jk} \neq 0$ para $j=k$, pero es nula en los otros casos, la energía cinética será de la forma

$$T = \frac{1}{2} \sum_r m_r \dot{q}_r^2$$

donde abreviadamente hemos escrito m_r en vez de m_{rr} . Con esto, la energía cinética será una simple suma de las energías cinéticas asociadas a las distintas coor-

* Cuando un elemento diagonal de m_{jk} (m_{rr} , por ejemplo) sea nulo, el problema podrá reducirse a uno de $n-1$ grados de libertad.

denadas. Como veremos, cuando además A_{jk} sea diagonal de forma que U sea asimismo una simple suma de las energías potenciales individuales, cada coordenada se comportará de forma sencilla, sufriendo oscilaciones de pulsación única y bien definida. Por consiguiente, el problema es determinar un cambio de coordenadas que diagonalice a m_{jk} y a A_{jk} simultáneamente, haciendo que así el sistema pueda describirse en los términos más sencillos posibles. Tales coordenadas son las *coordenadas normales*.

Cuando las energías potencial y cinética de un sistema sean de las formas especificadas en 13.47, las ecuaciones de movimiento del mismo podrán obtenerse de las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0$$

pero, como T sólo es función de las velocidades generalizadas y U sólo es función de las coordenadas generalizadas, la ecuación de Lagrange para la k -ésima coordenada se hará

$$\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad (13.49)$$

Calculemos las derivadas mediante 13.47:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial q_k} &= \sum_j A_{jk} q_j \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} &= \sum_j m_{jk} \dot{q}_j \end{aligned} \right\} \quad (13.50)$$

Entonces, las ecuaciones de movimiento quedarán

$\sum_j (A_{jk} q_j + m_{jk} \ddot{q}_j) = 0$

(13.51)

que es un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden de coeficientes constantes. Dado que estamos tratando con un sistema oscilatorio, cabe esperar que la solución sea de la forma

$$q_j(t) = a_j e^{i(\omega t - \delta)} \quad (13.52)$$

donde las a_j son amplitudes reales y se ha incluido la fase δ para tener en cuenta las dos constantes arbitrarias (a_j y δ) necesarias por ser de segundo orden cada una de las ecuaciones diferenciales del sistema.* Desde luego, queda bien entendido que sólo vamos a considerar la parte real de los segundos miembros. La pulsación ω y la fase δ se determinarán mediante las ecuaciones de movimiento. Si ω es real, la solución 13.52 representará un movimiento oscilatorio. Que ω es verdaderamente real puede verse mediante el razonamiento siguiente. Suponiendo que ω contenga términos imaginarios, en la expresión de q_j aparecerán términos de la forma $e^{\omega t}$ y $e^{-\omega t}$. Entonces, cuando calculemos la energía total del sistema, la suma $T+U$ contendrá factores que aumentarán o disminuirán monótonamente con el tiempo, lo que viola la hipótesis hecha de que estamos tratando con un sistema conservativo. Por lo tanto, la pulsación ω debe ser una cantidad real.

Utilizando una solución de la forma dada por 13.52, las ecuaciones de movimiento se hacen

$$\sum_j (A_{jk} - \omega^2 m_{jk}) a_j = 0 \quad (13.53)$$

)

donde se ha suprimido el factor común $\exp[i(\omega t - \delta)]$. Tenemos, pues, que las a_j deben satisfacer un sistema de n ecuaciones *algebraicas* lineales y homogéneas. Para que exista una solución no trivial, debe ser nulo el determinante de los coeficientes:

$$|A_{jk} - \omega^2 m_{jk}| = 0 \quad (13.54)$$

Mas explícitamente, se trata de un determinante $n \times n$ de la forma

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \omega^2 m_{11} & A_{12} - \omega^2 m_{12} & A_{13} - \omega^2 m_{13} & \cdots \\ A_{12} - \omega^2 m_{12} & A_{22} - \omega^2 m_{22} & A_{23} - \omega^2 m_{23} & \cdots \\ A_{13} - \omega^2 m_{13} & A_{23} - \omega^2 m_{23} & A_{33} - \omega^2 m_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix} = 0$$

donde hemos incluido explícitamente la simetría de las A_{jk} y de las m_{jk} .

* Esto es por completo equivalente a nuestro método anterior de escribir $x(t) = B \exp(i\omega t)$ (véase 13.2) pudiendo B ser complejo. En el caso de 13.9 preferimos mostrar las constantes arbitrarias precisas en forma de amplitudes reales utilizando $\exp(i\omega t)$ y $\exp(-i\omega t)$ en vez de incorporar un factor de fase como en 13.52.

Este determinante representa la llamada *ecuación característica* o *secular* del sistema que es de grado n en ω^2 y que, en general, poseerá n raíces que podemos designar ω_r^2 . Estas ω_r se llaman *pulsaciones características* o *propias* del sistema. (Hay casos en que dos o más de las ω_r pueden ser iguales, lo que constituye el fenómeno de *degeneración* que más adelante estudiaremos.) Al igual que en el método para la determinación de las direcciones principales de un sólido rígido, cada una de las raíces de la ecuación característica puede sustituirse en 13.54 para determinar los cocientes $a_1 : a_2 : a_3 : \dots : a_n$ para cada uno de los valores de ω_r . Al existir n valores de ω_r , podemos construir n conjuntos de cocientes de las a_j , cada uno de los cuales se puede suponer que define un vector \mathbf{a}_r en un espacio vectorial n -dimensional, llamado *vector propio* del sistema. Así, \mathbf{a}_r será el *vector propio* asociado a la pulsación propia ω_r . Por a_{jr} representaremos la componente j del vector propio r .

Como el principio de superposición es aplicable a la ecuación diferencial que estamos considerando (13.51), podemos escribir la solución general para q_j como combinación lineal de las soluciones para cada uno de los n valores de r :

$$q_j(t) = \sum_r a_{jr} e^{i(\omega_r t - \delta_r)} \quad (13.55)$$

aunque, por supuesto, es sólo la parte real de $q_j(t)$ lo que tiene significado físico, por lo cual tenemos, realmente,

$$q_j(t) = \operatorname{Re} \sum_r a_{jr} e^{i(\omega_r t - \delta_r)} = \sum_r a_{jr} \cos(\omega_r t - \delta_r) \quad (13.55a)$$

Por consiguiente, el movimiento de la coordenada q_j está compuesto por los n movimientos correspondientes a los n valores que puede tomar la pulsación ω_r . Evidentemente, las q_j no son las coordenadas normales que simplifican el problema. En la sección 13.8 continuaremos buscando dichas coordenadas normales.

◆ Ejemplo 13.6 Pulsaciones propias de dos osciladores acoplados

Volvamos ahora al caso de los dos osciladores acoplados, obteniendo las pulsaciones propias mediante el formalismo general que acabamos de desarrollar. La situación corresponde a la figura 13-1. La energía potencial del sistema es

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\kappa x_1^2 + \frac{1}{2}\kappa_{12}(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}\kappa x_2^2 \\ &= \frac{1}{2}(\kappa + \kappa_{12})x_1^2 + \frac{1}{2}(\kappa + \kappa_{12})x_2^2 - \kappa_{12}x_1x_2 \end{aligned} \quad (1)$$

donde el término proporcional a x_1x_2 es el coeficiente que expresa el acoplamiento dentro del sistema. Al calcular las A_{jk} , resulta

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} \Big|_0 = \kappa + \kappa_{12} \\ A_{12} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_0 = -\kappa_{12} = A_{21} \\ A_{22} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} \Big|_0 = \kappa + \kappa_{12} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

La energía cinética del sistema es

$$T = M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}_2^2 \quad (3)$$

y, según 13.41,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k} m_{jk} \dot{x}_j \dot{x}_k \quad (4)$$

por lo que, al identificar los términos de estas dos últimas expresiones, resulta

$$\left. \begin{aligned} m_{11} &= m_{22} = M \\ m_{12} &= m_{21} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Entonces, el determinante secular (13.54a) será

$$\begin{vmatrix} \kappa + \kappa_{12} - M\omega^2 & -\kappa_{12} \\ -\kappa_{12} & \kappa + \kappa_{12} - M\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

que es exactamente igual a la ecuación 13.5, siendo, por tanto, las soluciones

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa + \kappa_{12} \pm \kappa_{12}}{M}} \quad (7)$$

Las pulsaciones propias serán

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\kappa + 2\kappa_{12}}{M}}; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{\kappa}{M}} \quad (8)$$

por lo cual los resultados que se obtienen con ambos procedimientos son los mismos.

13.7 Ortogonalidad de los vectores propios

Nos proponemos mostrar ahora que los vectores propios \mathbf{a}_r forman un conjunto ortonormal. Escribiendo nuevamente la ecuación 13.53 para la s -ésima raíz de la ecuación secular, tendremos

$$\omega_s^2 \sum_k m_{jk} a_{ks} = \sum_k A_{jk} a_{ks} \quad (13.56)$$

A continuación, escribamos una ecuación análoga para la r -ésima raíz sustituyendo s por r e intercambiando j y k :

$$\omega_r^2 \sum_j m_{jk} a_{jr} = \sum_j A_{jk} a_{jr} \quad (13.57)$$

donde hemos hecho uso de la simetría de las m_{jk} y las A_{jk} . Ahora, multipliquemos 13.56 por a_{jr} y sumemos sobre j , y asimismo 13.57 por a_{ks} y sumemos sobre k :

$$\left. \begin{aligned} \omega_s^2 \sum_{j,k} m_{jk} a_{jr} a_{ks} &= \sum_{j,k} A_{jk} a_{jr} a_{ks} \\ \omega_r^2 \sum_{j,k} m_{jk} a_{jr} a_{ks} &= \sum_{j,k} A_{jk} a_{jr} a_{ks} \end{aligned} \right\} \quad (13.58)$$

En estas ecuaciones 13.58, los segundos miembros son ahora iguales, de forma que restando la primera de ellas de la segunda tendremos

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \sum_{j,k} m_{jk} a_{jr} a_{ks} = 0 \quad (13.59)$$

Examinemos ahora las dos posibilidades de que $r=s$ y $r \neq s$. Para $r \neq s$, el término $(\omega_r^2 - \omega_s^2)$ será, en general, distinto de cero. (Más adelante, examinaremos el caso de raíces múltiples, o de degeneración.) Por lo tanto, la suma debe ser idénticamente nula:

$$\sum_{j,k} m_{jk} a_{jr} a_{ks} = 0, \quad r \neq s \quad (13.60)$$

Para $r=s$, el término $(\omega_r^2 - \omega_s^2)$ es nulo y la suma es indeterminada; no obstante, esta no puede ser idénticamente nula. Para demostrar esto último, escribamos la expresión de la energía cinética del sistema y llevemos a ella las expresiones de \dot{q}_j y \dot{q}_k dadas por 13.55:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \sum_{j,k} m_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{j,k} m_{jk} \left[\sum_r \omega_r a_{jr} \sin(\omega_r t - \delta_r) \right] \left[\sum_s \omega_s a_{ks} \sin(\omega_s t - \delta_s) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{r,s} \omega_r \omega_s \sin(\omega_r t - \delta_r) \sin(\omega_s t - \delta_s) \sum_{j,j} m_{jk} a_{jr} a_{ks}
 \end{aligned}$$

Entonces, para $r=s$, la energía cinética se hará

$$T = \frac{1}{2} \sum_r \omega_r^2 \sin^2(\omega_r t - \delta_r) \sum_{j,k} m_{jk} a_{jr} a_{kr} \quad (13.61)$$

Advirtamos primero que

$$\omega_r^2 \sin^2(\omega_r t - \delta_r) \geq 0$$

y, sabiendo también que la energía cinética sólo puede ser nula si todas las velocidades se anulan idénticamente, resultará

$$\sum_{j,k} m_{jk} a_{jr} a_{kr} \geq 0$$

Entonces, la suma será en general positiva, pudiendo anularse únicamente en el caso trivial de que el sistema no se encuentre en movimiento; o sea, de que las velocidades sean idénticamente nulas y $T=0$.

Anteriormente, hicimos notar que cuando en 13.53 se sustituyen las ω_r únicamente se determinan los cocientes de las a_{jr} . Hagamos desaparecer ahora esta indeterminación imponiendo una condición adicional a las a_{jr} . Esta condición será

$$\sum_{j,k} m_{jk} a_{jr} a_{kr} = 1 \quad (13.62)$$

con lo que diremos que las a_{jr} están *normalizadas*. Si combinamos 13.60 y 13.62, podemos escribir

$$\sum_{j,k} m_{kj} a_{jr} a_{ks} = \delta_{rs}$$

(13.63)

Los vectores \mathbf{a}_r definidos de esta forma constituyen un conjunto *ortonormal*; es decir, son *ortogonales* de acuerdo con la conclusión expresada en 13.60 y se han *normalizado* haciendo la suma 13.62 igual a la unidad.

Toda la exposición anterior presenta un parecido palpable con los métodos ofrecidos en el capítulo anterior para determinar los momentos de inercia y ejes principales de un sistema rígido y lo cierto es que, salvando el hecho de que ahora estamos tratando con un sistema de n grados de libertad, los problemas son matemáticamente iguales. Debe observarse que las magnitudes m_{jk} y A_{jk} son realmente las componentes de un tensor ya que ambas se pueden disponer en filas y columnas para poner en relación magnitudes físicas diferentes,* por cuya razón las escribiremos $\{m\}$ y $\{A\}$. Las pulsaciones propias se determinan mediante una ecuación secular análoga a la que sirve para obtener los momentos principales de inercia, correspondiéndose los vectores propios con los ejes principales. En realidad, la demostración de la ortogonalidad de los vectores propios no es sino una generalización de la demostración de la ortogonalidad de los ejes principales ofrecida en la sección 12.6. Por último, aunque la naturaleza real de las pulsaciones propias se haya puesto de manifiesto mediante un razonamiento físico, esta demostración podría haberse realizado siguiendo el mismo procedimiento que se utilizó para demostrar que los momentos principales de inercia son reales.

13.8 Las coordenadas normales

Como se ha visto (13.55), la integral general del movimiento de la coordenada q_j debe ser una suma de términos individuales, cada uno de los cuales depende de una sola pulsación propia. No obstante, observemos que, por conveniencia, hemos normalizado las a_{jr} de acuerdo con 13.62; es decir, hemos hecho desaparecer toda ambigüedad en la determinación de las q_j , por lo cual ya no es posible establecer arbitrariamente el desplazamiento de una partícula. Como esta restricción carece de significado físico, debemos introducir un factor de escala constante α (que dependerá de las condiciones iniciales del problema) para compensar la pérdida de generalidad que supone la normalización. Entonces,

$$q_j(t) = \sum_r \alpha a_{jr} e^{i(\omega_r t - \delta_r)} \quad (13.64)$$

Para simplificar la notación, escribamos

$$q_j(t) = \sum_r \beta_r a_{jr} e^{i\omega_r t} \quad (13.65)$$

* Véase en la sección 12.6 la discusión relativa a la definición matemática de tensor.

donde las cantidades β_r son factores de escala nuevos* (ahora complejos) a los que se han incorporado las fases δ_r .

Definamos ahora la cantidad η_r

$$\boxed{\eta_r(t) \equiv \beta_r e^{i\omega_r t}} \quad (13.66)$$

de forma que

$$\boxed{q_j(t) = \sum_r a_{jr} \eta_r(t)} \quad (13.67)$$

Por definición, las η_r son cantidades que pueden oscilar con una sola pulsación y pueden considerarse como nuevas coordenadas, llamadas *coordenadas normales* del sistema. Veremos que η_r satisfacen ecuaciones de la forma

$$\ddot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r = 0 \quad (13.68)$$

de las que existen n independientes, por lo que las ecuaciones de movimiento se hacen separables por completo cuando se expresan en coordenadas normales. Esto puede demostrarse a partir de las ecuaciones de Lagrange; observemos que

$$\dot{q}_j = \sum_r a_{jr} \dot{\eta}_r$$

siendo la energía cinética, según 13.47,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{j,k} m_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j,k} m_{jk} \left(\sum_r a_{jr} \dot{\eta}_r \right) \left(\sum_s a_{ks} \dot{\eta}_s \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{r,s} \left(\sum_{j,k} m_{jk} a_{jr} a_{ks} \right) \dot{\eta}_r \dot{\eta}_s \end{aligned}$$

donde la suma del paréntesis es precisamente δ_{rs} de acuerdo con la condición de ortonormalización (13.63). Por consiguiente,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r,s} \dot{\eta}_r \dot{\eta}_s \delta_{rs} = \frac{1}{2} \sum_r \dot{\eta}_r^2 \quad (13.69)$$

* Existe cierta ventaja normalizando las a_{jr} a la unidad e introduciendo los factores de escala α y β_r , sobre dejar la normalización sin especificar, en el hecho de que las a_{jr} serán independientes de las condiciones iniciales, de manera que resultará una ecuación de orto-normalidad sencilla.

Igualmente, de 13.47, la energía potencial será

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \sum_{j,k} A_{jk} q_j q_k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{r,s} \left(\sum_{j,k} A_{jk} a_{jr} a_{ks} \right) \eta_r \eta_s \end{aligned}$$

Por otra parte, la primera de las ecuaciones 13.58 nos da

$$\begin{aligned} \sum_{j,k} A_{jk} a_{jr} a_{ks} &= \omega_s^2 \sum_{j,k} m_{jk} a_{jr} a_{ks} \\ &= \omega_s^2 \delta_{rs} \end{aligned}$$

por lo que la energía potencial se hace

$$U = \frac{1}{2} \sum_{r,s} \omega_s^2 \eta_r \eta_s \delta_{rs} = \frac{1}{2} \sum_r \omega_r^2 \eta_r^2 \quad (13.70)$$

Mediante las expresiones 13.69 y 13.70, resulta la lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} \sum_r (\dot{\eta}_r^2 - \omega_r^2 \eta_r^2) \quad (13.71)$$

siendo

$$\frac{\partial L}{\partial \eta_r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_r} = 0$$

las ecuaciones de Lagrange; o sea,

$$\ddot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r = 0$$

como antes.

Así, cuando se expresa la configuración de un sistema en coordenadas normales, tanto la energía potencial como la cinética se hacen diagonales simultáneamente. Como son las componentes no diagonales de $\{m\}$ y de $\{A\}$ las que producen el acoplamiento entre las partículas, es evidente que tomando unas coordenadas que hagan diagonales a ambos tensores, las coordenadas se desacoplarán, haciéndose el problema completamente separable en los correspondientes

a los movimientos independientes de las coordenadas normales, cada uno de los cuales tendrá su frecuencia normal.*

Para dejar especificada la transformación a las coordenadas normales (13.66 y 13.67), hemos de calcular las cantidades β_r . Escribamos β_r como suma de sus partes real e imaginaria

$$\beta_r \equiv \mu_r + i\nu_r \quad (13.72)$$

por lo cual

$$q_j(t) = \sum_r a_{jr}(\mu_r + i\nu_r)e^{i\omega_rt} \quad (13.73)$$

Asimismo, es

$$\dot{q}_j(t) = \sum_r i\omega_r a_{jr}(\mu_r + i\nu_r)e^{i\omega_rt} \quad (13.74)$$

El valor inicial de $q_j(t)$ puede obtenerse de la parte real de 13.73 particularizada para $t=0$:

$$q_j(0) = \sum_r \mu_r a_{jr}$$

Multiplicando esta última por $m_{jk}a_{ks}$ y sumando sobre j y k , tenemos

$$\sum_{j, k} m_{jk} a_{ks} q_j(0) = \sum_r \mu_r \left(\sum_{j, k} m_{jk} a_{jr} a_{ks} \right)$$

De acuerdo con la condición de ortonormalidad 13.63, el término del paréntesis es δ_{rs} . Por consiguiente, la suma sobre r nos deja nada más que el término μ_s :

$$\mu_s = \sum_{j, k} m_{jk} a_{ks} q_j(0) \quad (13.75)$$

Análogamente, para calcular ν_r , utilizamos la parte real de 13.74 particularizada para $t=0$,

$$\dot{q}_j(0) = -\sum_r \omega_r v_r a_{jr}$$

* El matemático alemán Karl WEIERSTRASS (1815-1897) demostró en 1858 que el movimiento de un sistema dinámico puede expresarse siempre en función de coordenadas normales.

Siguiendo el mismo camino que antes, resulta

$$v_s = -\frac{1}{\omega_s} \sum_{j,k} m_{jk} a_{ks} \dot{q}_j(0) \quad (13.76)$$

Así, pues, las coordenadas normales podrán expresarse como parte real de la suma

$$\eta_r = \sum_{j,k} m_{jk} a_{kr} e^{i\omega_r t} \left[q_j(0) - \frac{i}{\omega_r} \dot{q}_j(0) \right] \quad (13.77)$$

Vemos, por tanto, que para unas condiciones iniciales cualesquiera, $q_j(0)$ y $\dot{q}_j(0)$, es posible determinar un sistema de coordenadas η_r que tengan la propiedad de que cada una de ellas varíe armónicamente con una pulsación única ω_r . Como el sumatorio de 13.77 se extiende dos veces sobre todos los n índices de coordenadas, es evidente que en general las expresiones de las η_r serán complicadas. Un caso importante es aquel en que las coordenadas se desplazan de su posición de equilibrio y luego, en el instante $t=0$, se dejan libres. En estas condiciones tendremos $q_j(0) \neq 0$, $\dot{q}_j(0) = 0$, de forma que 13.77 se hará

$$\eta_r = e^{i\omega_r t} \sum_{j,k} m_{jk} a_{kr} q_j(0), \quad \dot{q}_j(0) = 0 \quad (13.78)$$

o sea, como sólo es físicamente importante la parte real,

$$\eta_r = \cos \omega_r t \sum_{j,k} m_{jk} a_{kr} q_j(0), \quad \dot{q}_j(0) = 0 \quad (13.79)$$

◆ Ejemplo 13.8 Vectores propios y coordenadas normales de dos osciladores acoplados

Volvamos al caso de los dos osciladores acoplados y calculemos ahora los vectores propios y las coordenadas normales. Utilizaremos las ecuaciones de movimiento

$$\sum_j (A_{jk} - \omega_r^2 m_{jk}) a_{jr} = 0 \quad (1)$$

para determinar las componentes a_{jr} de los vectores propios. Tenemos dos ecuaciones para cada uno de los valores de r , y puesto que únicamente podemos determinar los cocientes a_{1r}/a_{2r} , será suficiente una ecuación para cada r . Para $r=1$ y $k=1$ tenemos

$$(A_{11} - \omega_1^2 m_{11}) a_{11} + (A_{21} - \omega_1^2 m_{21}) a_{21} = 0 \quad (2)$$

o sea, sustituyendo los valores de A_{11} , ω_1^2 y m_{11} y haciendo la simplificación $\kappa_{12}=\kappa$,

$$\left(2\kappa - \frac{3\kappa}{M} \cdot M\right) a_{11} - \kappa a_{21} = 0 \quad (3)$$

resultando

$$a_{11} = -a_{21} \quad (4a)$$

Para $r=2$ y $k=1$ tenemos

$$\left(2\kappa - \frac{\kappa}{M} \cdot M\right) a_{12} - \kappa a_{22} = 0$$

resultando

$$a_{12} = a_{22} \quad (4b)$$

La condición de ortonormalidad es

$$\sum_{j, k} m_{jk} a_{jr} a_{ks} = \delta_{rs}$$

pero como $\{m\}$ es diagonal, siendo todos sus componentes iguales a M , será

$$\sum_{j, k} M \delta_{jk} a_{jr} a_{ks} = \delta_{rs} \quad (5)$$

o sea, sumando sobre k ,

$$M \sum_j a_{jr} a_{js} = \delta_{rs} \quad (6)$$

Entonces, para $r=s=1$, tenemos

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = \frac{1}{M} \quad (7)$$

Pero $a_{11} = -a_{21}$, por lo cual

$$a_{11} = -a_{21} = \frac{1}{\sqrt{2M}}; \quad \mathbf{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2M}} (1, -1) \quad (8a)$$

Análogamente,

$$a_{12} = a_{22} = \frac{1}{\sqrt{2M}}; \quad \mathbf{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2M}} (1, 1) \quad (8b)$$

Nótese que una vez utilizadas las ecuaciones de movimiento para establecer el cociente entre a_{11} y a_{21} , es decir que $a_{11}/a_{21} = -1$, la relación entre a_{12} y a_{22} ya no

tiene que determinarse utilizando de nuevo las ecuaciones de movimiento, sino que resulta de la condición de ortonormalidad

$$M \sum_j a_{jr} a_{js} = 0, \quad r \neq s$$

o sea,

$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0 \quad (9)$$

donde, al sustituir $a_{11} = -a_{21}$, tenemos

$$a_{12} = a_{22} \quad (10)$$

La expresión de las coordenadas normales para el caso $\dot{q}_j(0) = 0$ es (13.79):

$$\eta_r = \cos \omega_r t \sum_{j,k} m_{jk} a_{kr} q_j(0) \quad (11)$$

Sustituyendo $m_{jk} = M \delta_{jk}$ y sumando sobre k , tenemos

$$\eta_r = M \cos \omega_r t \sum_j a_{jr} q_j(0) \quad (12)$$

o sea, desarrollando, determinamos las dos expresiones

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= M(a_{11}x_{10} + a_{21}x_{20}) \cos \omega_1 t \\ \eta_2 &= M(a_{12}x_{10} + a_{22}x_{20}) \cos \omega_2 t \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

donde hemos escrito x_{10} y x_{20} en lugar de $q_1(0)$ y $q_2(0)$. Si ahora sustituimos los valores de las a_{jr} , tendremos

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= \sqrt{\frac{M}{2}} (x_{10} - x_{20}) \cos \omega_1 t \\ \eta_2 &= \sqrt{\frac{M}{2}} (x_{10} - x_{20}) \cos \omega_2 t \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Por consiguiente, vemos que al tomar las condiciones iniciales $x_{10} = -x_{20} = x_0$ y $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$, entonces

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= x_0 \sqrt{2M} \cos \omega_1 t \\ \eta_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{Modo 1} \quad (15)$$

mientras que si tomamos $x_{10} = x_{20} = x_0$ y $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$, entonces

$$\left. \begin{array}{l} \eta_1 = 0 \\ \eta_2 = x_0 \sqrt{2M \cos \omega_2 t} \end{array} \right\} \text{Modo 2} \quad (16)$$

Así, pues, las coordenadas normales η_1 y η_2 pueden identificarse con los dos modos de oscilación diferentes que se muestran en la figura 13-2. En el *modo 1*, las partículas oscilan *en oposición de fase* (modo antisimétrico) y en el *modo 2* oscilan *en fase* (modo simétrico). En el *modo 2*, la distancia entre las partículas es siempre la misma, oscilando como si el muelle que las une fuese una varilla inextensible y sin peso; en este modo, las velocidades son iguales. En el *modo 1* las velocidades tienen el mismo módulo pero signos contrarios.

Para obtener las expresiones de las coordenadas $x_k(t)$, utilicemos 13.67:

$$x_k(t) = \sum_r a_{kr} \eta_r$$

Para el *modo 1*, tenemos

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a_{11}\eta_1 + a_{12}\eta_2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2M}} \cdot x_0 \sqrt{2M \cos \omega_1 t} + 0 \\ &= x_0 \cos \omega_1 t = -x_2(t) \end{aligned} \quad (17a)$$

y los movimientos se encuentran en oposición de fase. Para el *modo 2*, resulta

$$x_1(t) = x_0 \cos \omega_2 t = x_2(t) \quad (17b)$$

estando los movimientos en fase. Este análisis confirma los resultados anteriores (sección 13.2).

13.9 Un ejemplo de degeneración: Tres péndulos planos linealmente acoplados

◆ Ejemplo 13.9

Supongamos tres péndulos planos iguales suspendidos de un mismo soporte ligeramente elástico. Al no ser el soporte totalmente rígido, existirá cierto acoplamiento entre los péndulos, pudiendo transmitirse energía entre los mismos. En la figura 13-8 se representa la geometría del problema.

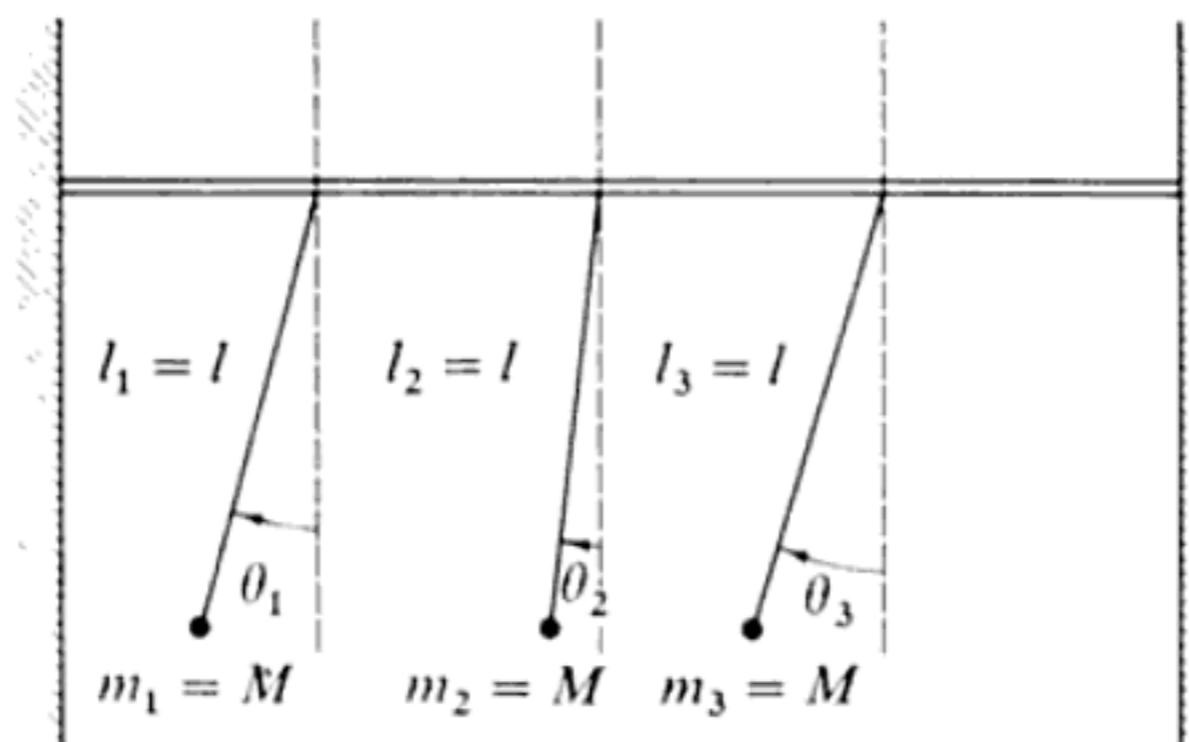


FIG. 13-8

Para simplificar la notación, adoptaremos un sistema de unidades (que a veces se llaman *unidades reducidas*) en el cual se toma como unidad de longitud la longitud l de los péndulos, como unidad de masa la masa M de los péndulos y g como unidad de aceleración. Por consiguiente, los valores de las cantidades l , M y g serán numéricamente iguales a la unidad en las ecuaciones que planteemos. Si el acoplamiento entra cada una de las parejas de péndulos es el mismo, tendremos,

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2) \\ U &= \frac{1}{2}(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 - 2\varepsilon\theta_1\theta_2 - 2\varepsilon\theta_1\theta_3 - 2\varepsilon\theta_2\theta_3) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Entonces, el tensor $\{\mathbf{m}\}$ será diagonal,

$$\{\mathbf{m}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

pero $\{\mathbf{A}\}$ tendrá la forma

$$\{\mathbf{A}\} = \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 1 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

El determinante secular es

$$\begin{vmatrix} 1 - \omega^2 & -\varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 1 - \omega^2 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & 1 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

que desarrollado nos da

$$(1 - \omega^2)^3 - 2\varepsilon^3 - 3\varepsilon^2(1 - \omega^2) = 0$$

y descompuesto en factores es

$$(\omega^2 - 1 - \varepsilon)^2(\omega^2 - 1 + 2\varepsilon) = 0$$

de donde resultan las raíces

$$\left. \begin{array}{l} \omega_1 = \sqrt{1 + \varepsilon} \\ \omega_2 = \sqrt{1 + \varepsilon} \\ \omega_3 = \sqrt{1 - 2\varepsilon} \end{array} \right\} \quad (5)$$

Obsérvese que hemos obtenido una *raíz doble*: $\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{1 + \varepsilon}$. Los modos normales correspondientes a estas pulsaciones son, por lo tanto, *degenerados*; es decir, no pueden distinguirse.

Calculemos ahora las cantidades a_{jr} , empezando por a_{j3} . Nuevamente observemos que, puesto que las ecuaciones de movimiento sólo determinan los cocientes, únicamente necesitaremos considerar dos de las tres ecuaciones de que disponemos; la tercera quedará satisfecha automáticamente. Con la ecuación

$$\sum_j (A_{jk} - \omega_3^2 m_{jk}) a_{j3} = 0$$

encontramos

$$\left. \begin{array}{l} 2\varepsilon a_{13} - \varepsilon a_{23} - \varepsilon a_{33} = 0 \\ -\varepsilon a_{13} + 2\varepsilon a_{23} - \varepsilon a_{33} = 0 \end{array} \right\} \quad (6)$$

De estas ecuaciones 6 resulta

$$a_{13} = a_{23} = a_{33} \quad (7)$$

y de la condición de normalización tenemos

$$a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1$$

o sea,

$$a_{13} = a_{23} = a_{33} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (8)$$

Vemos así que para el caso $r=3$ no hay problema en el cálculo de las componentes del vector propio \mathbf{a}_3 . (Esto constituye una regla general: no existe indeterminación en el cálculo de las componentes de un vector propio correspondiente a un modo no degenerado.) Como todas las componentes de \mathbf{a}_3 son iguales, éste corresponderá al modo en que los tres péndulos oscilan en fase.

Probemos ahora a calcular a_{j1} y a_{j2} . De las cinco ecuaciones de movimiento posibles (3 valores de j y 2 valores de r), obtenemos únicamente dos relaciones diferentes:

$$\varepsilon(a_{11} + a_{21} + a_{31}) = 0 \quad (*) \quad (9)$$

$$\varepsilon(a_{12} + a_{22} + a_{32}) = 0 \quad (*) \quad (10)$$

Ahora, la condición de ortogonalidad es

$$\sum_{j, k} m_{jk} a_{jr} a_{ks} = 0, \quad r \neq s$$

pero como $m_{jk} = \delta_{jk}$, ésta se hace

$$\sum_j a_{jr} a_{js} = 0, \quad r \neq s \quad (11)$$

que nos conduce a una sola ecuación nueva:

$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} = 0 \quad (*) \quad (12)$$

(Las otras dos ecuaciones posibles son idénticas a las 9 y 10 anteriores.) Finalmente, las condiciones de normalización nos dan

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1 \quad (*) \quad (13)$$

$$a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1 \quad (*) \quad (14)$$

Resulta, pues, que tenemos un total únicamente de *cinco* ecuaciones (con asterisco, *) para las seis incógnitas a_{j1} y a_{j2} . Esta indeterminación en los vectores propios correspondientes a una raíz doble es exactamente la misma que encontramos al construir los ejes principales de un sólido rígido con un eje de simetría; los dos ejes principales equivalentes pueden situarse según direcciones cualesquiera, mientras el triángulo definido por los tres ejes sea ortogonal. Por consiguiente, tenemos libertad para tomar arbitrariamente los vectores propios \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 , en tanto se satisfagan las condiciones de ortogonalidad y normalización. En el caso de un sistema sencillo como el que estamos estudiando no es difícil construir estos vectores y no daremos aquí regla alguna de carácter general.

Si, arbitrariamente, hacemos $a_{31}=0$, desaparecerá la indeterminación. Tendremos, entonces,

$$\mathbf{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0); \quad \mathbf{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2) \quad (15)$$

que fácilmente se comprueba que verifican las relaciones con asterisco anteriores.

Debemos recordar que el modo no degenerado corresponde a la oscilación en fase de los tres péndulos:

$$\mathbf{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \quad (16)$$

Vemos ahora que cada uno de los modos degenerados corresponde a una oscilación en oposición de fase. Por ejemplo, el vector \mathbf{a}_2 de 15 representa dos péndulos oscilando juntos con una cierta amplitud, mientras que el otro se encuentra en oposición de fase y oscila con una amplitud doble. Análogamente, \mathbf{a}_1 de 15 representa un péndulo en reposo y los otros dos oscilando en oposición de fase. Debe advertirse que los dos vectores propios \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 dados antes son sólo uno de los conjuntos de todos los infinitos conjuntos que satisfacen las condiciones del problema. Ahora bien, todos estos vectores propios representan alguna forma de oscilación en oposición de fase. (Más detalles acerca de este ejemplo se examinan en los problemas 13-16 y 13-17.)

13-10 La cuerda discreta*

Consideremos ahora un sistema más complicado formado por una cuerda (o un muelle) elástica sobre la que se hallan situadas, regularmente espaciadas, un cierto número de partículas iguales. Los extremos de la cuerda están obligados a permanecer fijos. Sea m la masa de cada una de las n partículas y d la separación entre las mismas en la posición de equilibrio. La longitud de la cuerda será entonces $L = (n+1)d$. En la figura 13-9 se representa la situación en el equilibrio.

Nos proponemos estudiar el caso de las pequeñas oscilaciones transversales de las partículas alrededor de sus posiciones de equilibrio. Consideremos primero los desplazamientos verticales de las masas numeradas $j-1$, j y $j+1$, indicadas en la figura 13-10. Si los desplazamientos verticales q_{j-1} , q_j , y q_{j+1} son pequeños, la tensión τ de la cuerda será muy aproximadamente constante e igual a su valor en el equilibrio, y el trozo de cuerda comprendido entre un par de partículas

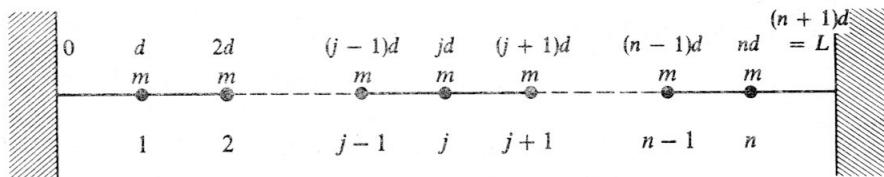


FIG. 13-9

* El primer ataque al problema de la cuerda discreta (o *retículo monodimensional*) se debe a NEWTON (*Principia*, 1687). El trabajo fue continuado por Johann BERNOULLI y su hijo Daniel, comenzando en 1727 y culminando en la formulación por este último del principio de superposición en 1753. A partir de este momento comienza el tratamiento teórico de la física de sistemas (en lo que se diferencia de la de partículas).

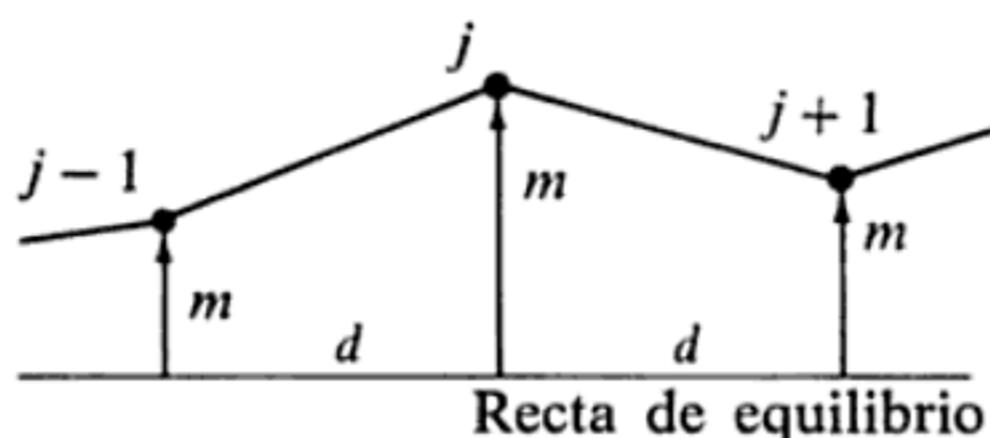


FIG. 13-10

cualesquiera formará un ángulo muy pequeño con la línea de equilibrio. El seno de este ángulo podrá sustituirse por su tangente y la expresión de la fuerza que tiende a llevar a la j -ésima partícula nuevamente a su posición de equilibrio será

$$F_j = -\frac{\tau}{d}(q_j - q_{j-1}) - \frac{\tau}{d}(q_j - q_{j+1}) \quad (13.80)$$

Según la ley de Newton, la fuerza F_j es igual a $m\ddot{q}_j$; por lo tanto, la ecuación 13.80 puede escribirse

$$\ddot{q}_j = \frac{\tau}{md}(q_{j-1} - 2q_j + q_{j+1}) \quad (13.81)$$

que es la ecuación de movimiento de la j -ésima partícula. Evidentemente, nos encontramos ante un caso de acoplamiento, ya que la fuerza ejercida sobre dicha partícula depende de las posiciones de las partículas $j-1$ y $j+1$; por tanto, esto es también un ejemplo de interacción entre *elementos colindantes*, en la cual el acoplamiento tiene lugar únicamente entre partículas contiguas. No es, desde luego, absolutamente necesario que la interacción se limite a los elementos estrechamente colindantes; así, por ejemplo, si la fuerza entre las parejas de partículas fuese electrostática, cada una de las mismas se acoplaría entonces con *todas* las demás, pudiendo hacerse el problema sumamente complicado. No obstante, aun cuando la fuerza sea electrostática, con frecuencia la de dependencia con la distancia del tipo $1/r^2$ permite despreciar las interacciones a distancias superiores a la separación entre dos partículas, por lo cual la expresión sencilla de la fuerza dada por 13.80 será correcta aproximadamente.

Acabamos de considerar únicamente el movimiento perpendicular a la recta definida por la cuerda; las oscilaciones son, por consiguiente, *transversales*. Fácilmente se demuestra que cuando se consideran oscilaciones longitudinales, es decir, movimiento de la cuerda, resultan ecuaciones de movimiento formalmente iguales a las anteriores. En tal caso, en lugar del factor τ/d aparece la constante clásica de la cuerda κ . (Véase problema 13-20.)

Si bien hemos deducido la ecuación de movimiento 13.81 mediante la fórmula de Newton, igualmente podríamos haber utilizado el método de Lagrange. Veámos esto. La energía potencial procede del trabajo realizado para estirar los $n+1$ trozos de cuerda*:

$$U = \frac{1}{2} \frac{\tau}{d} \sum_{j=1}^{n+1} (q_{j-1} - q_j)^2 \quad (13.82)$$

donde q_0 y q_{n+1} son siempre cero, puesto que corresponden a las posiciones de los extremos fijos de la cuerda. Observemos que 13.82 nos da una expresión de la fuerza ejercida sobre la j -ésima partícula exactamente igual a la que obtuvimos anteriormente (13.81):

$$\begin{aligned} F_j &= -\frac{\partial U}{\partial q_j} = -\frac{1}{2} \frac{\tau}{d} \frac{\partial}{\partial q_j} [(q_{j-1} - q_j)^2 + (q_j - q_{j+1})^2] \\ &= \frac{\tau}{d} (q_{j-1} - 2q_j + q_{j+1}) \end{aligned} \quad (13.83)$$

La energía cinética será la suma de las energías cinéticas de cada una de las n partículas:

$$T = \frac{1}{2} m \sum_{j=1}^n \dot{q}_j^2 \quad (13.84)$$

Como $\dot{q}_{n+1}=0$, podemos hacer que la suma de 13.84 se extienda hasta $j=n+1$, de forma que j varíe entre los mismos valores que en la expresión de la energía potencial. Por lo tanto, la lagrangiana será

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} \left[m\dot{q}_j^2 - \frac{\tau}{d} (q_{j-1} - q_j)^2 \right] \quad (13.85)$$

Ahora, es evidente que la ecuación de movimiento de la partícula j debe proceder únicamente de aquellos términos de la lagrangiana que contengan q_j o \dot{q}_j . Desarrollando la suma de la expresión de L , resulta

$$L = \cdots + \frac{1}{2} m\dot{q}_j^2 - \frac{1}{2} \frac{\tau}{d} (q_{j-1} - q_j)^2 - \frac{1}{2} \frac{\tau}{d} (q_j - q_{j+1})^2 - \cdots \quad (13.86)$$

* Suponemos que la energía potencial depende únicamente de la energía elástica de la cuerda; o sea, que las masas individuales carecen de toda energía potencial gravitatoria (o de cualquier otra clase).

donde hemos escrito sólo los términos que contienen q_j o \dot{q}_j . Aplicando la ecuación de Lagrange a la coordenada q_j , tenemos

$$m\ddot{q}_j - \frac{\tau}{d}(q_{j-1} - 2q_j + q_{j+1}) = 0 \quad (13.87)$$

Así, pues, obtenemos el mismo resultado que siguiendo el procedimiento de Newton.

Para obtener una solución de las ecuaciones de movimiento, hagamos, como de costumbre,

$$q_j(t) = a_j e^{i\omega t} \quad (13.88)$$

donde a_j puede ser *complejo*. Llevando esta expresión de $q_j(t)$ a la ecuación 13.87, encontramos

$$-\frac{\tau}{d}a_{j-1} + \left(2\frac{\tau}{d} - m\omega^2\right)a_j - \frac{\tau}{d}a_{j+1} = 0 \quad (13.89)$$

donde $j=1, 2, \dots, n$, pero como los extremos de la cuerda son fijos debe ser $a_0 = a_{n+1} = 0$.

La igualdad 13.89 representa un sistema de *ecuaciones en diferencias lineales* de donde pueden despejarse las pulsaciones propias ω_r haciendo igual a cero el determinante de los coeficientes. En consecuencia, tenemos el determinante secular siguiente:

$$\begin{vmatrix} \lambda & -\frac{\tau}{d} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -\frac{\tau}{d} & \lambda & -\frac{\tau}{d} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\frac{\tau}{d} & \lambda & -\frac{\tau}{d} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\frac{\tau}{d} & \lambda & -\frac{\tau}{d} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = 0 \quad (13.90)$$

donde hemos hecho

$$\lambda \equiv 2\frac{\tau}{d} - m\omega^2 \quad (13.91)$$

Este determinante secular constituye un caso particular de la expresión completamente general 13.54a que resulta cuando el tensor $\{m\}$ es diagonal y en el tensor $\{\Lambda\}$ sólo está implicado acoplamiento entre partículas inmediatamente contiguas. Entonces, la ecuación 13.90 se compone solamente de elementos diagonales y elementos contiguos a la diagonal.

Para el caso $n=1$ (es decir, una masa suspendida de dos muelles iguales), tenemos $\lambda=0$, o sea

$$\omega = \sqrt{\frac{2\tau}{md}}$$

Podemos adaptar este resultado al caso de movimiento longitudinal sustituyendo τ/d por κ ; obtenemos entonces la expresión conocida,

$$\omega = \sqrt{\frac{2\kappa}{m}}$$

Para el caso $n=2$, con τ/d sustituido por κ , tenemos $\lambda^2=\kappa^2$, o sea

$$\omega = \sqrt{\frac{2\kappa \pm \kappa}{m}}$$

que son las mismas pulsaciones que determinamos en la sección 13.2 para el caso de dos masas acopladas (13.8).

Para valores pequeños de n , la ecuación secular es relativamente fácil de resolver, pero, evidentemente, la resolución se hará sumamente complicada para valores grandes de n . En estos casos, es más sencillo utilizar el método siguiente. Ensayemos una solución de la forma

$$a_j = ae^{i(j\gamma - \delta)} \quad (13.92)$$

donde a es *real*. El empleo de este procedimiento estará justificado cuando sea posible determinar un número γ y una fase δ tales que las condiciones del problema se satisfagan por completo. Llevando esta expresión de a_j a la ecuación 13.89 y suprimiendo el factor de fase, resulta

$$-\frac{\tau}{d}e^{-i\gamma} + \left(2\frac{\tau}{d} - m\omega^2\right) - \frac{\tau}{d}e^{i\gamma} = 0$$

Despejando ω^2 , obtenemos

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 &= \frac{2\tau}{md} - \frac{\tau}{md} (e^{i\gamma} + e^{-i\gamma}) \\ &= \frac{2\tau}{md} (1 - \cos \gamma) \\ &= \frac{4\tau}{md} \sin^2 \frac{\gamma}{2} \end{aligned} \right\} \quad (13.93)$$

Como sabemos que el determinante secular es de orden n y, por consiguiente, nos dará exactamente n valores de ω^2 , podemos escribir

$$\omega_r = 2 \sqrt{\frac{\tau}{md}} \sin \frac{\gamma_r}{2}, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (13.94)$$

Sabiendo que los extremos de la cuerda permanecen fijos, lo que constituye las condiciones de contorno del problema, determinemos ahora el valor de γ_r y de la fase δ_r . Tenemos, entonces,

$$a_{jr} = a_r e^{i(j\gamma_r - \delta_r)} \quad (13.95)$$

o sea, como solamente la parte real tiene significado físico,

$$a_{jr} = a_r \cos(j\gamma_r - \delta_r) \quad (13.95a)$$

Las condiciones de contorno son

$$a_{0r} = a_{(n+1)r} \equiv 0 \quad (13.96)$$

Para que 13.95a nos dé $a_{jr}=0$ para $j=0$, es evidente que δ_r debe ser $\pi/2$ (o múltiplo impar del mismo). De aquí,

$$\begin{aligned} a_{jr} &= a_r \cos\left(j\gamma_r - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= a_r \sin j\gamma_r \end{aligned} \quad (13.97)$$

Para $j=n+1$, tenemos

$$a_{(n+1)r} = 0 = a_r \sin(n+1)\gamma_r$$

Por lo tanto,

$$(n+1)\gamma_r = s\pi, \quad s = 1, 2, \dots$$

o sea,

$$\gamma_r = \frac{s\pi}{n+1}, \quad s = 1, 2, \dots$$

Pero como hay precisamente n valores distintos de γ_r , puesto que 13.94 se refiere a n valores distintos de ω_r , el coeficiente s variará de 1 a n . Dado que los valores de s y r se corresponden uno a uno, en esta última expresión podemos reemplazar, sin más, s por r :

$$\gamma_r = \frac{r\pi}{n+1}, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (13.98)$$

Las a_{jr} se harán entonces

$$a_{jr} = a_r \operatorname{sen}\left(j \frac{r\pi}{n+1}\right) \quad (13.99)$$

y la expresión de la integral general para q_j será (v. ec. 13.65)

$$\begin{aligned} q_j &= \sum_r \beta'_r a_{jr} e^{i\omega_r t} \\ &= \sum_r \beta'_r a_r \operatorname{sen}\left(j \frac{r\pi}{n+1}\right) e^{i\omega_r t} \\ &= \sum_r \beta_r \operatorname{sen}\left(j \frac{r\pi}{n+1}\right) e^{i\omega_r t} \end{aligned} \quad (13.100)$$

donde hemos hecho $\beta_r = \beta'_r a_r$. Además, tenemos para la pulsación

$$\omega_r = 2 \sqrt{\frac{\tau}{md}} \operatorname{sen}\left(\frac{r\pi}{2(n+1)}\right) \quad (13.101)$$

Nótese que esta expresión nos dará los mismos resultados que determinamos anteriormente para el caso de dos osciladores acoplados (13.8) cuando hagamos $n=2$ y $r=1, 2$, y sustituymos τ/d por $\kappa (= \kappa_{12})$.

Observemos también que si en 13.99 hacemos $r=0$ ó $r=n+1$, todos los factores de amplitud a_{jr} se hacen idénticamente nulos. En consecuencia, estos valores de r se refieren a *modos cero*. Además, si r toma los valores $n+2, n+3, \dots, 2n+1$, entonces las a_{jr} serán las mismas (salvo por un cambio de signo trivial y en orden inverso) que para $r=1, 2, \dots, n$; asimismo, $r=2n+2$ da el modo cero siguiente. Concluimos, por tanto, en que realmente sólo existen n modos diferentes y que el aumento de r por encima de n simplemente duplica los modos correspondientes a los valores inferiores de n . (Un razonamiento similar es aplicable al caso $r < 0$.) En la figura 13.11 se representan estas conclusiones para el caso $n=3$, donde los diferentes modos se representan por $r=1, 2, 3$; $r=4$ es un modo cero. Las formas de las curvas de los desplazamientos empiezan a aparecer duplicadas para $r=7, 6, 5, 8$, pero con el signo cambiado. Las curvas de trazo discontinuo de la figura 13.11 representan nada más que el comportamiento senoidal de los factores de amplitud a_{rj} para distintos valores de r ; las únicas características significativas físicamente de estas curvas son los valores que adquieren en las posiciones ocupadas por las partículas ($j=1, 2, 3$). Por consiguiente, la «alta frecuencia» que exhiben las curvas senoidales para $r=5, 6, 7, 8$ no se refiere en absoluto a la frecuencia de los movimientos de las partículas, ya que estas últimas serán las mismas que para $r=1, 2, 3, 4$.

Las coordenadas normales del sistema son, por definición,

$$\eta_r(t) \equiv \beta_r e^{i\omega_r t} \quad (13.102)$$

de forma que

$$q_j(t) = \sum_r \eta_r \operatorname{sen}\left(j \frac{r\pi}{n+1}\right) \quad (13.103)$$

Esta expresión de q_j es análoga a la anterior (13.67), salvo en que las cantidades a_{jr} están sustituidas ahora por $\operatorname{sen}[j(r\pi)/(n+1)]$. En la sección 13.8 nos fue posible calcular los coeficientes β_r únicamente porque existía una relación de ortogonalidad entre las a_{jr} . Igualmente, ahora podemos disponer de una relación similar en forma de identidad trigonométrica para los términos senoidales:

$$\sum_{j=1}^n \operatorname{sen}\left(j \frac{r\pi}{n+1}\right) \operatorname{sen}\left(j \frac{s\pi}{n+1}\right) = \frac{n+1}{2} \delta_{rs}; \quad r, s = 1, 2, \dots, n \quad (13.104)$$

Por analogía con 13.73, escribamos para la parte real de q_j ,

$$q_j(t) = \sum_r \operatorname{sen}\left(j \frac{r\pi}{n+1}\right) (\mu_r \cos \omega_r t - v_r \operatorname{sen} \omega_r t) \quad (13.105)$$

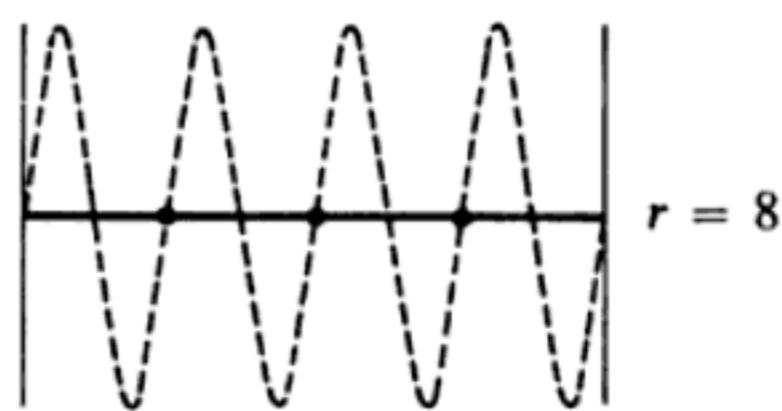
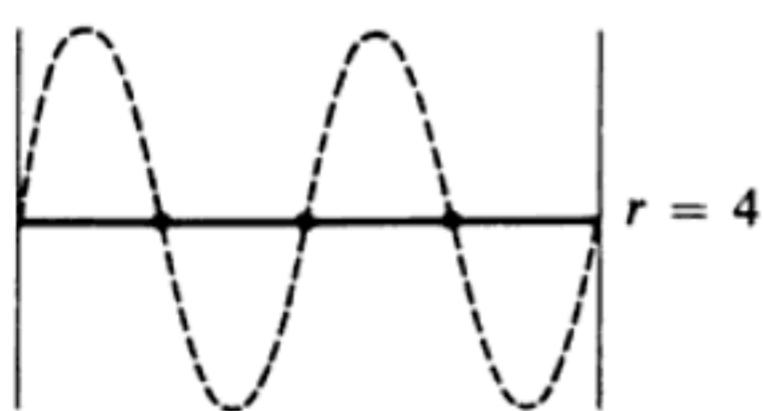
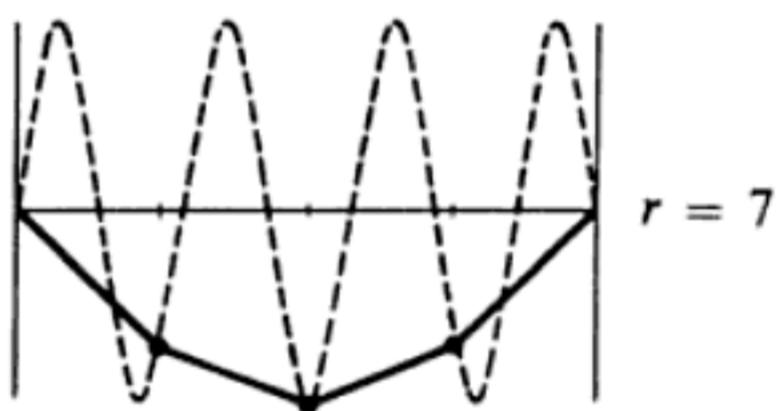
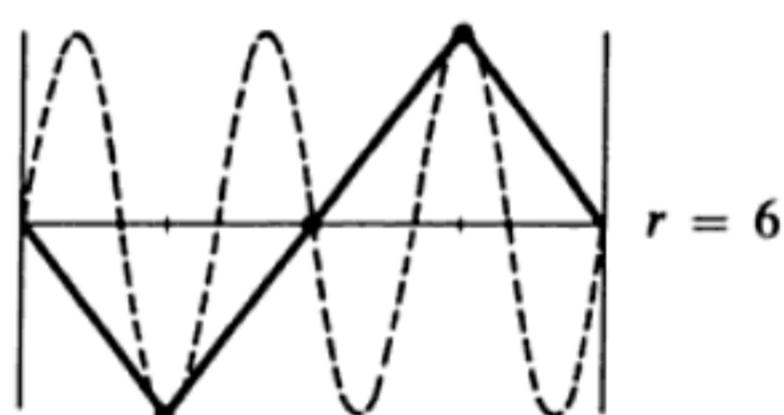
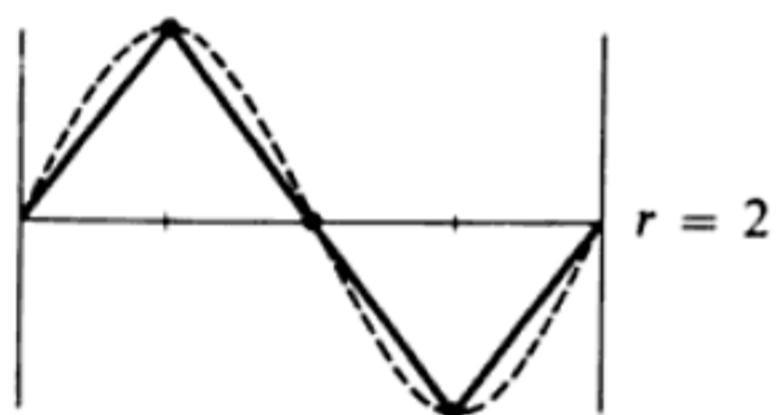
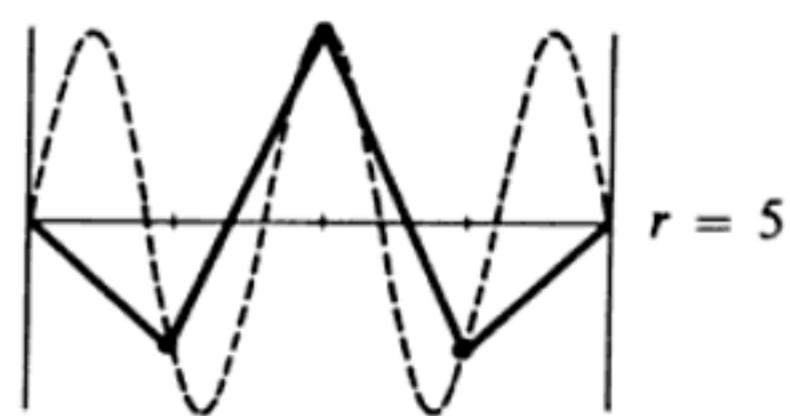
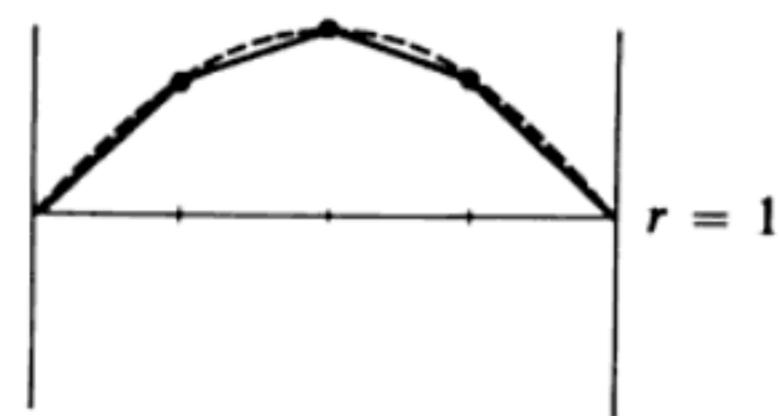


FIG. 13-11

donde

$$\beta_r = \mu_r + i\nu_r \quad (13.106)$$

Como antes, tenemos

$$q_j(0) = \sum_r \mu_r \operatorname{sen}\left(j \frac{r\pi}{n+1}\right) \quad (13.107a)$$

$$\dot{q}_j(0) = -\sum_r \omega_r v_r \operatorname{sen}\left(j \frac{r\pi}{n+1}\right) \quad (13.107b)$$

Multiplicando 13.107a por $\operatorname{sen}[j(s\pi)/(n+1)]$ y sumando sobre j , resulta

$$\begin{aligned} \sum_j q_j(0) \operatorname{sen}\left(j \frac{s\pi}{n+1}\right) &= \sum_{j,r} \mu_r \operatorname{sen}\left(j \frac{r\pi}{n+1}\right) \operatorname{sen}\left(j \frac{s\pi}{n+1}\right) \\ &= \sum_r \mu_r \cdot \frac{n+1}{2} \delta_{rs} \\ &= \frac{n+1}{2} \mu_s \end{aligned}$$

o sea,

$$\mu_s = \frac{2}{n+1} \sum_j q_j(0) \operatorname{sen}\left(j \frac{s\pi}{n+1}\right) \quad (13.108a)$$

Siguiendo un procedimiento similar en el caso de v_s , tendremos

$$v_s = -\frac{2}{\omega_s(n+1)} \sum_j \dot{q}_j(0) \operatorname{sen}\left(j \frac{s\pi}{n+1}\right) \quad (13.108b)$$

Así, pues, hemos calculado todas las cantidades necesarias, quedando completa la descripción de la vibración de la cuerda discreta.

Con relación a los métodos de normalización seguidos, debemos advertir el extremo siguiente. Primeramente, según 13.62, las a_{jr} fueron normalizadas a la unidad, con lo cual *imponemos* que las mismas sean independientes de las condiciones iniciales del problema. Entonces, eran los factores de escala α y β_r que permitían variar la amplitud de las oscilaciones mediante la elección de las condiciones iniciales. En segundo lugar, en el problema de la cuerda discreta encontramos que, en lugar de las cantidades a_{jr} , aparecían las funciones trigonométricas $\operatorname{sen}[j(r\pi)/(n+1)]$ y que éstas poseen la propiedad de estar normalizadas (13.104)

expresada por igualdades trigonométricas. Por consiguiente, no es posible en este caso imponer una condición de normalización arbitraria; más bien, nos encontramos automáticamente frente a ella. Ahora bien, esto no representa una restricción; únicamente significa que los factores de escala β_r tienen en este caso una forma ligeramente distinta. Entonces, hay ciertas constantes implicadas en ambos problemas las cuales, por conveniencia, se singularizan de forma diferente en cada caso.

◆ Ejemplo 13.10 Un problema de condiciones iniciales

Consideremos una cuerda discreta compuesta por tres partículas espaciadas regularmente sobre la misma. En el instante $t=0$, la partícula central (sólo ella) sufre un desplazamiento a y después se deja libre desde el reposo. Para calcular el movimiento subsiguiente procederemos como sigue. En primer lugar, las condiciones iniciales son

$$\left. \begin{array}{l} q_2(0) = a, \quad q_1(0) = q_3(0) = 0 \\ \dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = \dot{q}_3(0) = 0 \end{array} \right\} \quad (1)$$

Como las velocidades iniciales son nulas, las v_r se anularán y las μ_r vendrán dadas por (13.108a):

$$\begin{aligned} \mu_r &= \frac{2}{n+1} \sum_j q_j(0) \sin\left(j \frac{r\pi}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2} a \sin\left(\frac{r\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

porque sólo el término $j=2$ contribuye a la suma. Entonces,

$$\mu_1 = \frac{1}{2}a; \quad \mu_2 = 0; \quad \mu_3 = -\frac{1}{2}a \quad (3)$$

Las cantidades $\sin[j(r\pi)/(n+1)]$ que aparecen en la expresión $q_j(t)$ (en 13.105) son

$$j = \begin{array}{c} r = \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \quad (4)$$

y, por consiguiente, los desplazamientos de las tres partículas serán

$$\left. \begin{aligned} q_1(t) &= \frac{\sqrt{2}}{4} a(\cos \omega_1 t - \cos \omega_3 t) \\ q_2(t) &= \frac{1}{2} a(\cos \omega_1 t - \cos \omega_3 t) \\ q_3(t) &= \frac{\sqrt{2}}{4} a(\cos \omega_1 t - \cos \omega_3 t) = q_1(t) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

donde las pulsaciones características son las dadas por 13.101:

$$\omega_r = 2 \sqrt{\frac{\tau}{md}} \operatorname{sen}\left(\frac{r\pi}{8}\right), \quad r = 1, 2, 3 \quad (6)$$

Obsérvese que como la partícula *central* se encuentra desplazada inicialmente, no aparece ningún modo de oscilación para el cual dicha partícula se encuentre en reposo; es decir, el modo 2 correspondiente a la pulsación ω_2 (véase figura 13-11) está ausente.

Referencias recomendadas

A nivel medio, BECKER (Be54, cap. 14), HOUSTON (Ho48, cap. 7), MAGNUS (Ma59c, cap. 6), SLATER y FRANK (Sl47, cap. 7) y WANGNESS (Wa63, cap. 12) ofrecen estudios de oscilaciones acopladas y modos normales; el texto de MORSE (Mo48) es concienzudo y excelente. FEATHER ofrece un estudio de introducción (Fe61, capítulo 2).

Tratados de nivel más elevado acerca de la teoría general de los sistemas oscilantes son los de GOLDSTEIN (Go50, cap. 10), HAUSER (Ha65, cap. 11), KONOPINSKI (Ko69, cap. 11) y SYMON (Sy60, cap. 8).

El tratado clásico de Lord RAYLEIGH (Ra94) describe la teoría de las oscilaciones con gran detalle; véase en especial los capítulos 4 y 5.

Problemas

- 13-1.** Estudiar nuevamente el problema de los dos osciladores acoplados tratado en la sección 13.2 para el caso en que los tres muelles tengan constantes de recuperación distintas. Determinar las dos pulsaciones características y comparar sus valores con las pulsaciones propias de ambos osciladores en ausencia de acoplamiento.

13-2. Continuar con el problema anterior investigando el caso de acoplamiento débil: $\kappa_{12} \ll \kappa_1, \kappa_2$. Demostrar que aparece el fenómeno de los latidos, pero que el proceso de transmisión de energía es incompleto.

13-3. Dos osciladores armónicos idénticos (de masas M y pulsaciones propias ω_0) se acoplan entre sí añadiendo al sistema una masa m común a ambos osciladores. Las ecuaciones de movimiento son, entonces,

$$\ddot{x}_1 + (m/M)\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_1 = 0$$

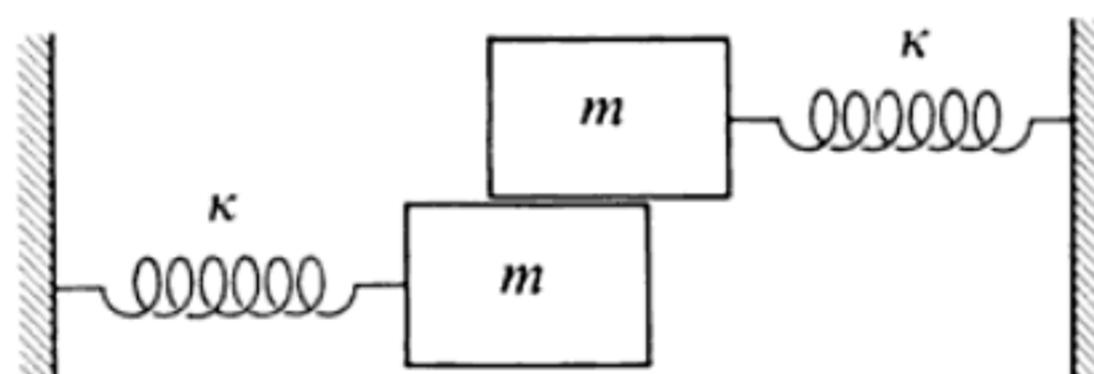
$$\ddot{x}_2 + (m/M)\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_2 = 0$$

Resolver esta pareja de ecuaciones acopladas obteniendo las pulsaciones de los modos normales del sistema.

13-4. Volvamos al problema de los dos osciladores acoplados tratado en la sección 13.2. Demostrar que la energía total del sistema es constante. (Calcular la energía cinética de cada una de las partículas y la energía potencial almacenada en cada uno de los tres muelles y sumar los resultados.) Obsérvese que los términos de las energías potencial y cinética que tienen el coeficiente κ_{12} dependen de C_1 y ω_1 , pero no de C_2 ni ω_2 . ¿Por qué cabía esperar este resultado?

13-5. Determinar las coordenadas normales correspondientes al problema que se trata en la sección 13.2 y en el ejemplo 13.8, cuando las dos masas sean diferentes, $m_1 \neq m_2$.

13-6. Dos osciladores armónicos iguales se sitúan de forma que las dos masas deslizan una contra otra, como se indica en la figura. La fuerza



de rozamiento produce un acoplamiento proporcional a la velocidad relativa instantánea. Estudiar las oscilaciones acopladas del sistema.

13-7. Una partícula de masa m se sujeta a un soporte rígido mediante un muelle de constante κ , que cuelga verticalmente hacia abajo en el equilibrio. A esta combinación masa-muelle se sujeta un oscilador igual, estando conectado el muelle de este último a la masa del primero. Calcular las pulsaciones características de las oscilaciones verticales monodimensionales, comparándolas con las pulsaciones cuando una u otra partícula se mantiene fija mientras la otra oscila. Describir los modos de oscilación normales del sistema.

13-8. Un péndulo simple se compone de una lenteja de masa m suspendida de una cuerda inextensible (y sin peso) de longitud l . De la lenteja de este péndulo se cuelga un segundo péndulo, igual al anterior. Supóngase que las oscilaciones son pequeñas (de forma que $\sin \theta \approx \theta$) y calcular las pulsaciones características. Asimismo, describir los modos normales del sistema. (Véase problema 7-7.)

13-9. El movimiento de una pareja de osciladores acoplados puede describirse siguiendo un método similar al empleado para construir el diagrama fásico de un oscilador simple (sección 3.3). En el caso de los osciladores acoplados, ambas posiciones, $x_1(t)$ y $x_2(t)$, pueden representarse por un punto (*punto del sistema*) del *espacio de configuraciones* bidimensional x_1 - x_2 , de forma que cuando t aumenta el lugar geométrico de todos estos puntos define una cierta curva. Las proyecciones del punto del sistema sobre los ejes x_1 y x_2 representan, respectivamente, los movimientos de m_1 y m_2 . En el caso más general, $x_1(t)$ y $x_2(t)$ serán funciones complicadas por lo que la curva será también complicada. No obstante, es siempre posible girar los ejes x_1 - x_2 obteniendo un nuevo sistema, x'_1 - x'_2 , de tal manera que la proyección del punto del sistema sobre cada uno de los ejes nuevos sea *armónica simple*. Los movimientos de las proyecciones sobre los ejes nuevos tienen lugar con las pulsaciones características y corresponden a los modos normales del sistema, llamándose *ejes normales* a estos nuevos ejes. Determinense los ejes normales para el problema estudiado en la sección 13.2 y comprobar las afirmaciones anteriores relativas al movimiento referido a este sistema de coordenadas.

13-10. Consideremos dos osciladores idénticos acoplados (figura 13-1). Supongamos que ambos están amortiguados, siendo β la constante de amortiguamiento, y que a m_1 se aplica una fuerza $F_0 \cos \omega t$. Escribanse las dos ecuaciones diferenciales acopladas que describen el movimiento. Obténgase la solución expresando las ecuaciones diferenciales en función de las coordenadas normales dadas por 13.12 y por comparación de éstas con 4.3. Demuéstrese que las coordenadas normales η_1 y η_2 exhiben picos de resonancia en las pulsaciones características ω_1 y ω_2 , respectivamente.

13-11. Mostrar que las ecuaciones 13.34 pueden ponerse bajo la misma forma que las 13.1 despejando \ddot{I}_2 en la segunda de las 13.34 y llevando el resultado a la primera. Análogamente, sustituir \ddot{I}_1 en la segunda ecuación. Entonces, por analogía con 13.8, las pulsaciones características podrán escribirse inmediatamente.

13-12. Determinar las pulsaciones características de los circuitos acoplados de la figura 13-7a.

13-13. Estudiar los modos normales del sistema mostrado en la figura 13-7b.

13-14. En la figura 13-7a, sustituir L_{12} por una resistencia y analizar las oscilaciones.

13-15. Un aro delgado de radio R y masa M puede oscilar en su propio plano, estando fijo uno de sus puntos. Sujeta al aro se encuentra una masa M limitada a moverse (sin rozamiento) sobre el mismo. Suponiendo que sólo pueda haber

oscilaciones de pequeña amplitud, demostrar que las pulsaciones propias son

$$\omega_1 = \sqrt{2} \sqrt{\frac{g}{R}}, \quad \omega_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{g}{R}}$$

Determinar los dos conjuntos de condiciones iniciales que permitan al sistema oscilar con sus modos normales. Describir la situación material para cada uno de ellos.

13-16. Supongamos que, en el problema de los tres péndulos, las tres constantes de acoplamiento sean distintas, de manera que la energía potencial pueda escribirse

$$U = \frac{1}{2}(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 - 2\epsilon_{12}\theta_1\theta_2 - 2\epsilon_{13}\theta_1\theta_3 - 2\epsilon_{23}\theta_2\theta_3)$$

siendo ϵ_{12} , ϵ_{13} y ϵ_{23} diferentes. Demostrar que en este sistema no existe degeneración y que ésta sólo puede tener lugar cuando $\epsilon_{12} = \epsilon_{13} = \epsilon_{23}$.

13-17. Constrúyanse otros dos vectores propios posibles de los modos degenerados para el caso de los tres péndulos acoplados, imponiendo las condiciones siguientes: (a) $a_{11} = 2a_{21}$; (b) $a_{31} = -3a_{21}$. Interpretense estas situaciones físicamente.

13-18. Tres osciladores de igual masa m están acoplados de tal forma que la energía potencial del sistema viene dada por

$$U = \frac{1}{2}[\kappa_1(x_1^2 + x_3^2) + \kappa_2 x_2^2 + \kappa_3(x_1x_2 + x_2x_3)]$$

donde $\kappa_2 = \sqrt{2\kappa_1\kappa_2}$. Determinar las pulsaciones propias resolviendo la ecuación secular. ¿Qué interpretación física tiene el modo cero?

13-19. Consideremos una placa delgada homogénea de masa M que se encuentra en el plano x_1-x_2 con su centro en el origen. Sea $2A$ la longitud (en la dirección x_2) y su anchura $2B$ (en la dirección x_1). La placa cuelga de un soporte fijo mediante cuatro muelles de igual constante recuperadora κ situados en las esquinas de la misma y puede oscilar libremente con la condición de que su centro permanezca sobre el eje x_3 . Así pues, hay tres grados de libertad: (1) movimiento vertical con el centro de la placa moviéndose a lo largo del eje x_3 ; (2) movimiento de inclinación de la longitud, siendo x_1 el eje de rotación (tómese un ángulo θ para describir este movimiento); y (3) un movimiento de inclinación de la anchura, siendo x_2 el eje de rotación (tómese un ángulo φ para describir este movimiento). Supóngase que sólo hay pequeñas oscilaciones y demostrar que la ecuación secular tiene una raíz doble y, por ello, que el sistema es degenerado. Estudiar los modos normales del sistema. (Al calcular las a_{ik} de los modos degenerados, hágase igual a cero una cualquiera de las mismas al objeto de eliminar la indeterminación.) Demostrar que se puede elimi-

nar la degeneración añadiendo a la placa una barra delgada de masa m y longitud $2A$ situada (en el equilibrio) a lo largo del eje x_2 . Determinar las nuevas pulsaciones propias del sistema.

13-20. Calcular la energía total asociada a un modo normal y demostrar que permanece constante con el tiempo. Demostrarlo explícitamente para el caso del ejemplo 13.8.

13-21. Demuéstrese que las ecuaciones de movimiento de las vibraciones *longitudinales* de una cuerda discreta tienen exactamente la misma forma que las ecuaciones del movimiento transversal (13.81), salvo por el factor τ/d que debe sustituirse por la constante recuperadora del muelle κ .

13-22. Resolver nuevamente el problema del ejemplo 13-10 cuando ocurra que las tres partículas se desplazan una distancia a y se sueltan desde el reposo.

La cuerda vibrante

14.1 Introducción

En este capítulo nos proponemos ampliar el estudio de las vibraciones de la cuerda discreta, que ofrecimos en el capítulo 13, examinando cuáles son las consecuencias de hacer que el número de partículas de la misma tienda a infinito (mientras que la densidad lineal se mantiene constante), lo que constituye la forma de pasar al caso de la *cuerda continua*. Veremos como todas las conclusiones de importancia relativas a esta última pueden obtenerse a través de este paso al límite; y, en esto, se incluye también la deducción de la importantísima *ecuación de onda*.

En lo que tratemos, llegaremos a las distintas conclusiones resolviendo explícitamente una ecuación de movimiento. Uno de los resultados de mayor importancia, como es la pulsación del modo de oscilación fundamental, puede obtenerse con una exactitud sorprendentemente buena a partir de consideraciones energéticas únicamente, sin necesidad de resolver la ecuación de movimiento. Este procedimiento, conocido como *método de Rayleigh*, resulta de gran aplicación a aquellos casos en que es difícil (o imposible) resolver exactamente la ecuación de movimiento. Este método se ilustrará con varios ejemplos relativos a cuerdas vibrantes, en los cuales pueda comprobarse su grado de aproximación utilizando la solución exacta.

Finalmente, este capítulo acaba con un examen de la cuerda no uniforme. La ecuación que describe las vibraciones de la misma (ecuación de *Sturm-Liouville*) se resolverá siguiendo el método de las perturbaciones de forma similar a como hicimos anteriormente.

14.2 La cuerda continua como caso límite de la discreta

En el capítulo anterior consideramos un conjunto de masas puntuales espaciadas regularmente a lo largo de una cuerda. Nos proponemos ahora hacer que el número de masas tienda a infinito, de forma que en realidad nos encontremos ante una cuerda continua. Para ello, hagamos que $n \rightarrow \infty$ mientras que la masa de cada una de las partículas y la separación entre las mismas tiendan a cero ($m \rightarrow 0$ y $d \rightarrow 0$), pero de tal forma que el cociente m/d permanezca constante. Tengamos en cuenta que $m/d = \rho$ es precisamente la densidad lineal de la cuerda. Entonces, tendremos

$$\left. \begin{array}{l} n \rightarrow \infty, \quad d \rightarrow 0 \\ m \rightarrow 0, \quad d \rightarrow 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{siendo } (n+1)d = L \\ \text{siendo } \frac{m}{d} = \rho = \text{cte.} \end{array} \right\} \quad (14.1)$$

Según 13.103, es

$$q_j(t) = \sum_r \eta_r(t) \operatorname{sen}\left(j \frac{r\pi}{n+1}\right) \quad (14.2)$$

donde podemos poner

$$j \frac{r\pi}{n+1} = r\pi \frac{jd}{(n+1)d} = r\pi \frac{x}{L} \quad (14.3)$$

y $jd=x$ especifican ahora la distancia a lo largo de la cuerda continua. Así, pues, $q_i(t)$ se hace función continua de las variables x y t :

$$q(x, t) = \sum_r \eta_r(t) \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{L} \quad (14.4)$$

o sea,

$$q(x, t) = \sum_r \beta_r e^{i\omega_r t} \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{L} \quad (14.5)$$

En el caso de una cuerda discreta formada por n partículas, el movimiento tiene n grados de libertad, existiendo, por tanto, n modos normales y n pulsaciones características; por ello, en 13.103 (o en 14.2) la suma se extiende desde $r=1$ hasta $r=n$. Ahora, el número de partículas es infinito, por lo que habrá infinitos conjuntos de modos normales y las sumas de 14.4 y 14.5 se extenderán desde $r=1$ hasta $r=\infty$. Es decir, será necesario calcular un número infinitamente grande de constantes (las partes reales e imaginarias de las β_r) para dejar especificado por completo el movimiento de la cuerda continua. Esta situación es exactamente igual a la que se encuentra cuando se precisa representar una función en forma de serie de Fourier, en que las infinitas constantes se expresan por integrales que afectan a la función original (véanse las fórmulas 4.62). La situación puede contemplarse también desde otro punto de vista. Como el número de constantes arbitrarias que aparecerá en la resolución de la ecuación de movimiento será infinito, existiendo para su cálculo un número también infinito de condiciones iniciales, o sea, las funciones continuas $q(x, 0)$ y $\dot{q}(x, 0)$, las partes reales e imaginarias de las β_r podrán obtenerse en función de las condiciones iniciales siguiendo un procedimiento similar al de la sección 13.10. Si hacemos $\beta_r = \mu_r + i\nu_r$, tendremos, de 14.5,

$$q(x, 0) = \sum_r \mu_r \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{L} \quad (14.6a)$$

$$\dot{q}(x, 0) = - \sum_r \omega_r v_r \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{L} \quad (14.6b)$$

Multiplicando, a continuación, cada una de estas ecuaciones por $\operatorname{sen}(s\pi x/L)$ e integrando desde $x=0$ hasta $x=L$, tras hacer uso de la relación trigonométrica

$$\int_0^L \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{s\pi x}{L} dx = \frac{L}{2} \delta_{rs} \quad (14.7)$$

obtendremos

$$\mu_r = \frac{2}{L} \int_0^L q(x, 0) \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{L} dx \quad (14.8a)$$

$$v_r = - \frac{2}{\omega_r L} \int_0^L \dot{q}(x, 0) \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{L} dx \quad (14.8b)$$

Asimismo, la pulsación característica ω_r puede obtenerse como caso límite del resultado que se obtiene para la cuerda discreta. De 13.101 tenemos

$$\omega_r = 2 \sqrt{\frac{\tau}{md}} \operatorname{sen} \left[\frac{r\pi}{2(n+1)} \right] \quad (14.9)$$

que podemos escribir

$$\omega_r = \frac{2}{d} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \operatorname{sen} \frac{r\pi d}{2L} \quad (14.10)$$

y, cuando $d \rightarrow 0$, podremos sustituir el seno por el ángulo, resultando

$$\omega_r = \frac{r\pi}{L} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \quad (14.11)$$

◆ Ejemplo 14.2 Vibración de una cuerda pulsada

Decimos que una cuerda «se pulsa» cuando uno de sus puntos sufre un desplazamiento (de tal forma que la cuerda adquiere una forma triangular) y después se suelta a partir del reposo. Supongamos que el caso en cuestión es el representado en la figura 14-1, en que el centro de la cuerda se desplaza una distancia h . Las condiciones iniciales son

$$q(x, 0) = \begin{cases} \frac{2h}{L}x, & 0 \leq x \leq L/2 \\ \frac{2h}{L}(L-x), & L/2 \leq x \leq L \end{cases} \quad (1)$$

$$\dot{q}(x, 0) = 0$$

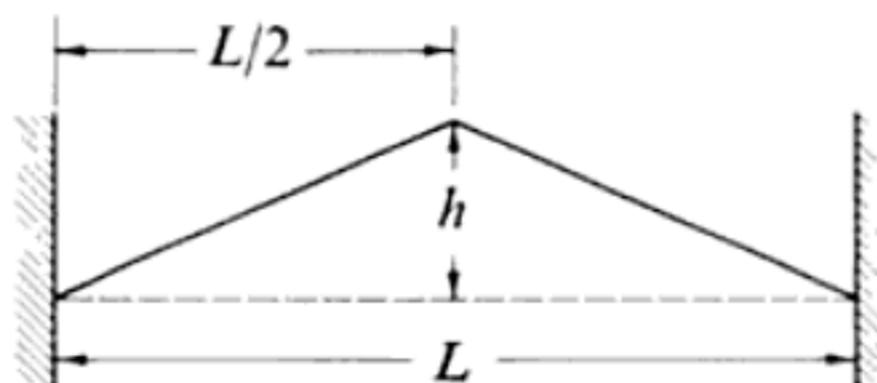


FIG. 14-1

Como la cuerda se deja libre desde el reposo, todas las ν_r se anularán; las μ_r vendrán dadas por

$$\mu = \frac{4h}{L^2} \int_0^{L/2} x \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{L} dx + \frac{4h}{L^2} \int_{L/2}^L (L-x) \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{L} dx \quad (2)$$

Integrando

$$\mu_r = \frac{8h}{r^2\pi^2} \operatorname{sen} \frac{r\pi}{2} \quad (3)$$

de forma que

$$\mu_r = \begin{cases} 0, & \text{cuando } r \text{ sea par} \\ \frac{8h}{r^2\pi^2} (-1)^{\frac{1}{2}(r-1)} & \text{cuando } r \text{ sea impar} \end{cases} \quad (4)$$

y, por tanto,

$$q(x, t) = \frac{8h}{\pi^2} \left[\operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \cos \omega_1 t - \frac{1}{9} \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{L} \cos \omega_3 t + \dots \right] \quad (5)$$

siendo las ω_r proporcionales a r y estando dadas por 14.11.

En la expresión 5 vemos que el modo fundamental (de pulsación ω_1) y todos sus armónicos *impares* (de pulsaciones ω_3, ω_5 , etc.) han sido excitados pero que no aparece en el movimiento ninguno de los armónicos *pares*. Como inicialmente el desplazamiento es simétrico, el movimiento subsiguiente deberá ser también simétrico para que no se excite ninguno de los modos pares (para los cuales el punto central de la cuerda es un nodo). En general, cuando una cuerda se pulsa en un punto cualquiera, no resultará excitado ninguno de los armónicos que tengan nodos en dicho punto.

Como comprobaremos en la sección siguiente, la energía contenida por cada armónico es proporcional al cuadrado del coeficiente que le corresponde en la expresión 5. Así, pues, los cocientes de las energías del armónico fundamental y el tercero, quinto, etc., son $1 : \frac{1}{81} : \frac{1}{625} : \dots$. Por lo tanto, en la energía del sistema (o en la intensidad del sonido emitido) predomina la fracción correspondiente al armónico fundamental. El tercer armónico se encuentra 19 db* por debajo del fundamental y el quinto, 28 db, también por debajo.

* El *decibel* (db) es una unidad de intensidad acústica relativa (o nivel acústico). El nivel relativo de las intensidades de un sonido de intensidad I y otro de intensidad I_0 viene dado por $10 \log(I/I_0)$ db. Entonces, en el caso del armónico fundamental (I_0) y del tercero (I), tenemos $10 \log(1/81) = -19,1$ db, o sea una intensidad de «19 db por debajo». Un nivel de 3 db corresponde aproximadamente a una intensidad relativa del doble.

14.3 Energía de una cuerda vibrante

Una vez hecha la hipótesis de que no hay presentes fuerzas de rozamiento, es evidente que la energía total de una cuerda vibrante debe permanecer constante. Vamos a demostrarlo explícitamente ahora y, también, que la energía de la cuerda puede expresarse en forma de suma de las contribuciones individuales de cada uno de los modos normales. Según 14.4, el desplazamiento de la cuerda viene dado por

$$q(x, t) = \sum_r \eta_r(t) \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{L} \quad (14.12)$$

dondes las coordenadas normales son

$$\eta_r(t) = \beta_r e^{i\omega_r t} \quad (14.13)$$

Como siempre, las β_r son cantidades complejas, obteniéndose las coordenadas normales físicamente significativas tomando la *parte real* de 14.13.

La energía cinética de la cuerda se obtiene calculando la correspondiente a un elemento de longitud de la misma, $\frac{1}{2}(\rho dx)\dot{q}^2$ e integrando a continuación a lo largo de toda ella. Entonces,

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_0^L \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)^2 dx \quad (14.14)$$

o sea, utilizando 14.12,

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_0^L \left[\sum_r \dot{\eta}_r \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{L} \right]^2 dx \quad (14.15)$$

El cuadrado del sumatorio puede expresarse como suma doble, con lo cual nos aseguraremos que todos los términos productos de dos factores distintos están adecuadamente incluidos:

$$T = \frac{1}{2} \rho \sum_{r,s} \dot{\eta}_r \dot{\eta}_s \int_0^L \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{s\pi x}{L} dx \quad (14.16)$$

Esta integral es la misma que 14.7, con lo cual

$$\begin{aligned} T &= \frac{\rho L}{4} \sum_{r,s} \dot{\eta}_r \dot{\eta}_s \delta_{rs} \\ &= \frac{\rho L}{4} \sum_r \dot{\eta}_r^2 \end{aligned} \quad (14.17)$$

Al calcular la energía cinética debemos tener cuidado para que los productos que tomemos sean de cantidades *reales*. Por consiguiente, es preciso calcular el cuadrado de la parte *real* de $\dot{\eta}_r$:

$$\begin{aligned} (\operatorname{Re} \dot{\eta}_r)^2 &= \left(\operatorname{Re} \frac{d}{dt} [(\mu_r + iv_r)(\cos \omega_r t + i \operatorname{sen} \omega_r t)] \right)^2 \\ &= (-\omega_r \mu_r \operatorname{sen} \omega_r t - \omega_r v_r \cos \omega_r t)^2 \end{aligned} \quad (14.18)$$

Por consiguiente, la energía cinética de la cuerda será

$$T = \frac{\rho L}{4} \sum_r \omega_r^2 (\mu_r \operatorname{sen} \omega_r t + v_r \cos \omega_r t)^2 \quad (14.19)$$

La energía potencial de la cuerda puede calcularse fácilmente escribiendo la expresión correspondiente a la cuerda discreta y efectuando un paso al límite sobre la misma. (Recuérdese que suponemos que la energía potencial se debe únicamente a la energía elástica de la cuerda.) En el caso de la cuerda discreta:

$$U = \frac{1}{2} \frac{\tau}{d} \sum_j (q_{j-1} - q_j)^2 \quad (14.20)$$

Multiplicando y dividiendo por d ,

$$U = \frac{1}{2} \tau \sum_j \left(\frac{q_{j-1} - q_j}{d} \right)^2 d$$

Cuando se hace el paso al límite, $d \rightarrow 0$, el término del paréntesis se convierte en la derivada parcial de $q(x, t)$ respecto de x y la suma (el factor d incluido) se transforma en una integral:

$$U = \frac{1}{2} \tau \int_0^L \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 dx \quad (14.21)$$

Haciendo uso de 14.12, tenemos

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \sum_r \frac{r\pi}{L} \eta_r \cos \frac{r\pi x}{L} \quad (14.22)$$

por lo cual

$$U = \frac{1}{2} \tau \int_0^L \left[\sum_r \frac{r\pi}{L} \eta_r \cos \frac{r\pi x}{L} \right]^2 dx \quad (14.23)$$

Como antes, el término al cuadrado puede escribirse en forma de suma doble y, puesto que la relación trigonométrica 14.7 es válida también para los cosenos, tendremos

$$\begin{aligned} U &= \frac{\tau}{2} \sum_{r,s} \frac{r\pi}{L} \frac{s\pi}{L} \eta_r \eta_s \int_0^L \cos \frac{r\pi x}{L} \cos \frac{s\pi x}{L} dx \\ &= \frac{\tau}{2} \sum_{r,s} \frac{r\pi}{L} \frac{s\pi}{L} \eta_r \eta_s \cdot \frac{L}{2} \delta_{rs} \\ &= \frac{\tau}{2} \sum_r \frac{r^2 \pi^2}{L^2} \cdot \frac{L}{2} \eta_r^2 \\ &= \frac{\rho L}{4} \sum_r \omega_r^2 \eta_r^2 \end{aligned} \quad (14.24)$$

donde hemos utilizado 14.11 en la última línea para expresar el resultado en función de ω_r^2 . Calculando el cuadrado de la parte real de η_r , tendremos finalmente,

$$U = \frac{\rho L}{4} \sum_r \omega_r^2 (\mu_r \cos \omega_r t - v_r \sin \omega_r t)^2 \quad (14.25)$$

La energía total se obtendrá ahora sumando 14.19 y 14.25, anulándose los términos que son productos de funciones trigonométricas de ángulo distinto y sumándose los términos al cuadrado que dan la unidad:

$$\begin{aligned} E &= T + U \\ &= \frac{\rho L}{4} \sum_r \omega_r^2 (\mu_r^2 + v_r^2) \end{aligned} \quad (14.26)$$

o sea,

$$E = \frac{\rho L}{4} \sum_r \omega_r^2 |\beta_r|^2 \quad (14.26a)$$

de manera que la energía total permanece constante con el tiempo y, además, viene dada por la suma de las contribuciones de cada uno de los modos normales.

Las energías cinética y potencial varían cada una con el tiempo, por cuya causa es a veces de utilidad calcular sus *valores medios temporales* (o sea, tomar la media temporal correspondiente a un período completo de la vibración fundamental, $r=1$). Es decir,

$$\langle T \rangle = \frac{\rho L}{4} \sum_r \omega_r^2 \langle (\mu_r \sin \omega_r t + v_r \cos \omega_r t)^2 \rangle \quad (14.27)$$

donde los paréntesis sesgados representan el valor medio en el intervalo de tiempo $2\pi/\omega_1$. Entonces, como los valores medios de $\sin^2 \omega_1 t$ y de $\cos^2 \omega_1 t$ en dicho intervalo son ambos iguales a $\frac{1}{2}$, y lo mismo en el caso de $\sin^2 \omega_r t$ y $\cos^2 \omega_r t$ en que $r \geq 2$, puesto que el período de la vibración fundamental será siempre un número entero de veces el de un armónico superior, cualquiera que sea éste, y además el valor medio de los productos $\sin \omega_r t \cos \omega_r t$ son nulos, tendremos

$$\begin{aligned} \langle T \rangle &= \frac{\rho L}{8} \sum_r \omega_r^2 (\mu_r^2 + v_r^2) \\ &= \frac{\rho L}{8} \sum_r \omega_r^2 |\beta_r|^2 \end{aligned} \quad (14.28)$$

Para el valor medio de la energía potencial obtenemos un valor similar:

$$\begin{aligned} \langle U \rangle &= \frac{\rho L}{4} \sum_r \omega_r^2 \langle (\mu_r \cos \omega_r t - v_r \sin \omega_r t)^2 \rangle \\ &= \frac{\rho L}{8} \sum_r \omega_r^2 (\mu_r^2 + v_r^2) \\ &= \frac{\rho L}{8} \sum_r \omega_r^2 |\beta_r|^2 \end{aligned} \quad (14.29)$$

Por consiguiente, llegamos a la importante conclusión de que *la energía cinética media de una cuerda vibrante es igual a su energía potencial media*^{*}:

$$\langle T \rangle = \langle U \rangle \quad (14.30)$$

En la sección siguiente veremos la importancia de este resultado. Observemos también en 14.28 y 14.29 otra simplificación que resulta del empleo de coordenadas normales y es que tanto $\langle T \rangle$ como $\langle U \rangle$ son simples sumas de las contribuciones debidas a cada uno de los modos normales.

* Esta conclusión puede obtenerse también como consecuencia del teorema del virial.

14.4 Principio de Rayleigh

Los sistemas vibratorios en que el modo fundamental de oscilación es de interés predominante son muy numerosos. Con esto no queremos dejar implícito el hecho de que los armónicos superiores carezcan de importancia (la gran mayoría de los instrumentos musicales, por ejemplo, dependen de los armónicos para producir el tipo de sonido que los caracteriza), sino únicamente que la mayor intensidad está asociada generalmente al modo fundamental. En el método expuesto anteriormente para determinar la pulsación fundamental de un sistema vibratorio es necesario resolver la ecuación de movimiento, por lo cual resulta difícil (e incluso imposible) obtener la solución exacta del problema en muchos casos. Para hacer frente a esta dificultad, Lord Rayleigh ideó un procedimiento que permite la obtención de un valor bastante exacto de la pulsación fundamental conociendo únicamente un valor groseramente aproximado del mismo.

El principio de Rayleigh se enuncia como sigue: En el modo fundamental de oscilación de un sistema vibratorio, las energías cinética y potencial de un sistema se distribuyen de tal forma que la pulsación (y , por ello, la energía total) es mínima.* Por los resultados de la sección anterior sabemos que la energía cinética media es igual a la energía potencial media cuando para el cálculo se utiliza la solución exacta $q(x, t)$. Por lo tanto, si *barruntamos* (o lo hemos establecido por un procedimiento sistemático cualquiera) una solución aproximada para el modo fundamental y luego igualamos las energías medias cinética y potencial calculadas, obtendremos un valor de la pulsación fundamental que no será inferior a la verdadera. Pueden efectuarse las aproximaciones sucesivas que se deseen para llegar tan cerca como se quiera al resultado auténtico.**

Para utilizar el método de Rayleigh, debemos obtener primeramente expresiones adecuadas de las energías cinética y potencial medias. La expresión exacta del modo fundamental de una cuerda vibrante es

$$q(x, t) = \eta_1(t) \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \quad (14.31)$$

Sustituyamos ahora la función espacial $\operatorname{sen}(\pi x/L)$ por una función arbitraria $g(x)$, cuya expresión será nuestro propósito adivinar o elegir adecuadamente en cada caso particular; así, pues,

$$q(x, t) = \eta_1(t)g(x) \quad (14.32)$$

* No vamos a ofrecer aquí la demostración de este enunciado [véase, p. e., TEMPLE y BICKLEY (Te56, cap. 3)].

** Este procedimiento está íntimamente relacionado con el método variacional que se utiliza en mecánica cuántica para determinar el estado fundamental de un sistema mediante funciones de onda ensayadas.

Según 14.14, la energía cinética será

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \rho \int_0^L \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \rho \int_0^L \dot{\eta}_1^2 g^2 dx \end{aligned} \quad (14.33)$$

Para obtener $\langle T \rangle$ sólo es necesario que hallemos el valor medio de $\dot{\eta}_1^2$:

$$\langle T \rangle = \langle \dot{\eta}_1^2 \rangle \cdot \frac{1}{2} \rho \int_0^L g^2 dx \quad (14.34)$$

Si empleamos el mismo procedimiento que seguimos en la sección anterior para determinar valores medios, resultará

$$\langle \dot{\eta}_1^2 \rangle = \frac{1}{2} \omega_1^2 |\beta_1|^2 \quad (14.35)$$

o sea, sustituyendo el factor de amplitud $|\beta_1|^2$ por la constante A^2 ,

$$\langle T \rangle = \frac{1}{4} \rho A^2 \omega_1^2 \int_0^L g^2 dx \quad (14.36)$$

Análogamente, en el caso de la energía potencial, que de nuevo suponemos que procede únicamente de la energía elástica de la cuerda,

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \tau \int_0^L \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \tau \int_0^L \eta_1^2 g'^2 dx \end{aligned} \quad (14.37)$$

donde $g' \equiv dg/dx$. Entonces, al tomar el valor medio tendremos

$$\begin{aligned} \langle U \rangle &= \langle \eta_1^2 \rangle \cdot \frac{1}{2} \tau \int_0^L g'^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \tau A^2 \int_0^L g'^2 dx \end{aligned} \quad (14.38)$$

Así, igualando $\langle T \rangle$ y $\langle U \rangle$, nos resulta para la pulsación del modo fundamental

$$\omega_1^2 = \frac{\tau \int_0^L g'^2 dx}{\rho \int_0^L g^2 dx} \quad (14.39)$$

Cuando se haya elegido $g(x)$ de tal forma que difiera de la solución auténtica, el valor de la pulsación dado por 14.39 será realmente mayor que el correspondiente a la pulsación fundamental auténtica, pero si se ha utilizado una función razonablemente próxima a la $g(x)$ auténtica la diferencia con la pulsación auténtica será muy pequeña.

◆ Ejemplo 14.4(a) Aproximación parabólica

Si no conocieramos ya la solución al problema de la cuerda vibrante, podríamos abordarla como sigue. Los extremos de la cuerda están fijos y cuando vibra con la pulsación más baja posible, se observa que el máximo desplazamiento tiene lugar en el centro. Por consiguiente, podemos admitir que una parábola constituya una aproximación razonable a la función desplazamiento:

$$g(x) = x(L - x)/L^2 \quad (1)$$

Elevando al cuadrado g y g' y sustituyendo en 14.39 resulta

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{\tau \int_0^L (L^2 - 4xL + 4x^2) dx}{\rho \int_0^L (x^2 L^2 - 2x^3 L + x^4) dx} \\ &= \frac{\tau \cdot \frac{1}{3}L^3}{\rho \cdot \frac{1}{30}L^5} \\ &= 10 \frac{\tau}{\rho L^2} \end{aligned} \quad (2)$$

y, entonces,

$$\omega_1 = 3,1623 \sqrt{\frac{\tau}{\rho L^2}} \quad (3)$$

mientras que el resultado exacto es

$$\omega_1 = \pi \sqrt{\frac{\tau}{\rho L^2}} = 3,1416 \sqrt{\frac{\tau}{\rho L^2}} \quad (4)$$

Por tanto, el valor aproximado es superior en un 0,6 %.

De haber supuesto que $g(x)$ tuviese una forma triangular con el máximo en el centro (como en la figura 14-1), habríamos obtenido una aproximación algo más pobre (se comprende, ya que un triángulo es una representación menos fiel que la parábola):

$$\omega_1 = \sqrt{12} \sqrt{\frac{\tau}{\rho L^2}} = 3,4641 \sqrt{\frac{\tau}{\rho L^2}} \quad (5)$$

o sea, el error sería del 10 %.

Como la precisión en el cálculo de la pulsación puede resentirse si no se elige bien la función desplazamiento aproximada, Rayleigh ideó un procedimiento sencillo para mejorar el resultado. Éste consiste en incluir en la función desplazamiento un parámetro de ajuste que se hace variar de forma que ω_1 se haga mínima y, por tanto, más próxima a la pulsación fundamental. En el caso presente, Rayleigh incorporó el parámetro escribiendo*

$$g(x) = 1 - \left(\frac{2|x|}{L}\right)^n \quad n > 1 \quad (6)$$

donde n es el parámetro en cuestión y x ha de medirse desde el centro de la cuerda. (Cuando $n=2$, esta expresión de $g(x)$ es la misma que la ecuación 1.) Calculando la pulsación de acuerdo con lo establecido, resulta

$$\omega_1^2 = \frac{2(n+1)(2n+1)}{2n-1} \cdot \frac{\tau}{\rho L^2} \quad (7)$$

El valor mínimo de ω_1 tiene lugar para

$$n = \frac{1}{2}(\sqrt{6} + 1) = 1,7247 \quad (8)$$

por lo que la pulsación es

$$\omega_1 = 3,1464 \sqrt{\frac{\tau}{\rho L^2}} \quad (9)$$

que es superior al valor auténtico en un 0,15 % y que representa una precisión cuatro veces superior a la dada por la expresión 3.

* Véase Lord RAYLEIGH (Ra94, vol. 1, pág. 113).

◆ Ejemplo 14.4(b) Vibraciones de una cuerda con una masa suspendida

Supongamos una cuerda de masa m , longitud L y densidad $\rho = m/L$, en cuyo centro se encuentra fija una masa M . Si M es pequeña comparada con m , la función desplazamiento será aproximadamente la correspondiente a $M=0$, la cual sabemos que es

$$g(x) = \sin \frac{\pi x}{L} \quad (1)$$

Con esta expresión, podemos calcular mediante 14.36 la energía cinética media de la cuerda a la cual deberemos añadir la energía cinética media de la masa:

$$\begin{aligned} \langle T_{\text{cuerda}} \rangle &= \frac{1}{4} \rho A^2 \omega_1^2 \int_0^L \sin^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) dx \\ &= \frac{1}{8} L \rho A^2 \omega_1^2 \end{aligned} \quad (2)$$

Entonces, como la masa M se mueve de acuerdo con

$$q_M(t) = A \cos \omega_1 t \quad (3)$$

de forma que la energía cinética media es

$$\begin{aligned} \langle T_{\text{masa}} \rangle &= \frac{1}{2} M \langle \dot{q}_M^2 \rangle \\ &= \frac{1}{4} M A^2 \omega_1^2 \end{aligned} \quad (4)$$

la energía cinética media total será, por tanto,

$$\begin{aligned} \langle T \rangle &= \langle T_{\text{cuerda}} \rangle + \langle T_{\text{masa}} \rangle \\ &= \frac{1}{8} A^2 \omega_1^2 (\frac{1}{2} L \rho + M) \end{aligned} \quad (5)$$

Como de costumbre, se supone que la energía potencial es únicamente la energía elástica de la cuerda; por lo tanto, haciendo uso de 14.38,

$$\begin{aligned} \langle U \rangle &= \frac{1}{4} \tau A^2 \int_0^L \frac{\pi^2}{L^2} \cos^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) dx \\ &= \frac{\pi^2 \tau A^2}{8} \frac{L}{L} \end{aligned} \quad (6)$$

Igualando $\langle T \rangle$ y $\langle U \rangle$, obtenemos

$$\begin{aligned}\omega_1^2 &= \frac{\pi^2}{2} \frac{\tau}{L(\frac{1}{2}L\rho + M)} \\ &= \pi^2 \frac{\tau}{\rho L^2} \cdot \frac{1}{(1 + 2M/m)}\end{aligned}\quad (7)$$

Evidentemente, esta fórmula nos da el resultado correcto en el límite $M=0$ (ya que en este caso hemos tomado para $g(x)$ la solución exacta). En la tabla 14.1 se relacionan las pulsaciones para distintos valores de M/m que pueden compararse con las exactas.

Tabla 14.1

M/m	$\omega_1/\sqrt{\tau\rho L^2}$	Valor exacto	Error porcentual
0	3,1416	3,1416	0
0,1	2,8679	2,8577	0,36
0,2	2,6552	2,6277	1,05
0,5	2,2215	2,1542	3,12
1	1,8138	1,7198	5,47
5	0,9375	0,8657	8,29

La precisión que ofrece la solución aproximada sólo es aceptable para valores pequeños de M/m , puesto que cuando M aumenta, la forma de la cuerda se separa notablemente de la senoide correspondiente a $M=0$.

14.5 Ecuación de onda

Hasta aquí nos hemos ocupado de la descripción del movimiento de una cuerda continua como caso límite de la cuerda discreta, para la cual poseemos una solución completa; no obstante, aún no hemos escrito la ecuación fundamental de movimiento para el caso continuo. Esto lo conseguiremos volviendo al caso de la cuerda discreta para utilizar de nuevo el paso al límite; pero ahora en la ecuación de movimiento en lugar de hacerlo en la solución. La ecuación 13.81 puede escribirse

$$\frac{m}{d} \ddot{q}_j = \frac{\tau}{d} \left(\frac{q_{j-1} - q_j}{d} \right) - \frac{\tau}{d} \left(\frac{q_j - q_{j+1}}{d} \right) \quad (14.40)$$

Cuando d tiende a cero, tenemos

$$\frac{q_j - q_{j+1}}{d} \rightarrow \frac{q(x) - q(x+d)}{d} \rightarrow -\left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{x+d/2}$$

que es la derivada en $x+d/2$. Para el otro término de la ecuación 14.40 tenemos

$$\frac{q_{j-1} - q_j}{d} \rightarrow \frac{q(x-d) - q(x)}{d} \rightarrow -\left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{x-d/2}$$

que es la derivada en $x-d/2$. Por consiguiente, el valor en el límite del segundo miembro de la ecuación 14.40 será

$$\lim_{d \rightarrow 0} \tau \left(\frac{\left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{x+d/2} - \left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{x-d/2}}{d} \right) = \tau \left. \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \right|_x = \tau \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$$

Asimismo, en el límite, m/d se hace ρ , por lo cual la ecuación de movimiento será

$$\rho \ddot{q} = \tau \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \quad (14.41)$$

o sea,

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\tau} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2}$$

(14.42)

que es la *ecuación de onda* monodimensional. En el capítulo siguiente trataremos de las soluciones de esta ecuación.

14.6 Cuerda no uniforme. Funciones ortogonales y teoría de las perturbaciones

Cuando en la sección precedente dedujimos la ecuación de onda, quedó implícita la suposición de que la tensión τ era constante. No obstante, si la cuerda no es uniforme, de forma que $\rho = \rho(x)$, entonces la tensión será también

función de x : $\tau = \tau(x)$. Por consiguiente, deberemos escribir, al hacer el paso al límite en el segundo miembro de la ecuación 14.40,

$$\lim_{d \rightarrow 0} \frac{\left[\tau\left(x + \frac{d}{2}\right) \frac{\partial q}{\partial x} \Big|_{x+d/2} - \tau\left(x - \frac{d}{2}\right) \frac{\partial q}{\partial x} \Big|_{x-d/2} \right]}{d} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \frac{\partial q}{\partial x} \right)$$

con lo cual, la ecuación de onda correspondiente a este caso toma la forma más complicada*

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \frac{\partial q}{\partial x} \right) - \rho \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = 0 \quad (14.43)$$

donde tanto τ como ρ pueden ser funciones de x pero no del tiempo. No existe un método general de resolución de las ecuaciones de este tipo cuando τ y ρ son funciones cualesquiera; únicamente cuando τ y ρ adquieran determinadas formas particulares es posible obtener soluciones expresadas por funciones sencillas.

Si bien el problema de la cuerda no uniforme es de una importancia práctica más bien limitada, la ecuación que lo representa (14.43) tiene, no obstante, un interés considerable, particularmente para muchos problemas de mecánica cuántica. En consecuencia, no carecerá de objeto que prosigamos adelante con su resolución detallada, aun cuando rara vez se apliquen los resultados a cuerdas vibrantes. Dado que no existen soluciones generales de la ecuación 14.43 que tengan formas sencillas, será necesario utilizar un procedimiento aproximado y, por ello, volveremos de nuevo al eficaz método de las perturbaciones. Las soluciones se desarrollarán mediante *funciones ortogonales*, siguiéndose el método utilizado en otras ocasiones anteriores para establecer las condiciones de ortogonalidad.

Supongamos que una de las soluciones particulares de la ecuación 14.43 sea de la forma

$$q_r(x, t) = u_r(x) e^{i\omega_r t} \quad (14.44)$$

donde la dependencia temporal se ha expresado, como de costumbre, en forma exponencial, representando ω_r la r -ésima pulsación propia. Si la cuerda fuese uni-

* Este tipo de ecuaciones aparece con frecuencia en distintas partes de la física matemática; en general, el segundo miembro no es cero. Bajo la forma 14.103 se conoce como ecuación *homogénea de Sturm-Liouville*. Joseph LIOUVILLE (1809-1882) y Jacques Charles Francois STURM (1803-1855) investigaron la resolución de estas ecuaciones hacia la mitad de la década de 1830.

forme, $u_r(x)$ sería simplemente $\sin(r\pi x/L)$, como en 14.5. La función $u_r(x)$ es la llamada *r-ésima función de onda* (o *r-ésima función propia* o *r-ésimo modo normal*) del sistema. Entonces, la ecuación 14.43 se hará

$$\frac{d}{dx} \left(\tau \frac{du_r}{dx} \right) + \rho \omega_r^2 u_r = 0 \quad (14.45a)$$

Asimismo, para la *s-ésima pulsación propia*, podemos escribir

$$\frac{d}{dx} \left(\tau \frac{du_s}{dx} \right) + \rho \omega_s^2 u_s = 0 \quad (14.45b)$$

Siguiendo el mismo método con que anteriormente demostramos la ortogonalidad (véase, por ejemplo, las expresiones 12.57, 13.58 o las 13.107 y siguientes), multipliquemos 14.45a por u_s e integremos desde $x=0$ hasta $x=L$ y 14.45b por u_r e integremos. Restando los resultados, tenemos

$$\int_0^L \left[u_s \frac{d}{dx} \left(\tau \frac{du_r}{dx} \right) - u_r \frac{d}{dx} \left(\tau \frac{du_s}{dx} \right) \right] dx + (\omega_r^2 - \omega_s^2) \int_0^L \rho u_r u_s dx = 0 \quad (14.46)$$

El primer término puede integrarse por partes, con el resultado

$$\begin{aligned} & \left[u_s \tau \frac{du_r}{dx} - u_r \tau \frac{du_s}{dx} \right]_{x=0}^{x=L} - \int_0^L \tau \left(\frac{du_r}{dx} \frac{du_s}{dx} - \frac{du_s}{dx} \frac{du_r}{dx} \right) dx \\ & \quad - (\omega_r^2 - \omega_s^2) \int_0^L \rho u_r u_s dx = 0 \end{aligned}$$

El término entre corchetes se anula a la vista de las condiciones de contorno impuestas a las funciones de onda, $u_r(0)=0=u_r(L)$, y como el segundo término es evidentemente nulo, tendremos

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \int_0^L \rho u_r u_s dx = 0 \quad (14.47)$$

Entonces, cuando las pulsaciones propias sean diferentes, o sea $r \neq s$, la integral de 14.47 debe ser nula y, dado que la integral es indeterminada en el caso $r=s$,

podemos imponer la condición de que la misma sea igual a la unidad. De aquí resulta la condición de ortonormalidad,

$$\int_0^L \rho u_r u_s dx = \delta_{rs} \quad (14.48)$$

que corresponde a la determinada anteriormente para las funciones senoidales (13.108) y a la condición impuesta a las a_{jr} (13.63).

Ahora, podríamos escribir la solución general como sigue

$$q(x, t) = \sum_r \beta_r u_r(x) e^{i\omega_r t} \quad (14.49)$$

y proceder, como antes, a calcular las partes reales e imaginarias de las β_r en función de las condiciones iniciales. No obstante, este procedimiento no es especialmente eficaz, puesto que las funciones $u_r(x)$ no son *números*, como lo eran las a_{jr} , y, por tanto, sus cocientes no son expresiones sencillas. Podemos obtener una solución general aplicando el método de las perturbaciones y simplificaremos el problema suponiendo que ρ varía lentamente en función de la coordenada x y que la tensión τ es constante.* Por consiguiente, expresaremos ρ en forma de serie de potencias de un parámetro de perturbación λ ,

$$\rho(x) = \rho^{(0)} + \lambda \rho^{(1)}(x) + \lambda^2 \rho^{(2)}(x) + \dots \quad (14.50)$$

donde $\rho^{(0)}$ es una constante y λ una cantidad pequeña y todas las funciones $\rho^{(p)}(x)$ son independientes de λ . Ahora, si la cuerda tuviese una densidad $\rho = \rho^{(0)}$, existiría entonces un conjunto de funciones de onda $u_r^{(0)}(x)$ y pulsaciones propias $\omega_r^{(0)}$ que satisfarían la ecuación

$$\tau \frac{d^2 u_r^{(0)}}{dx^2} + (\omega_r^{(0)})^2 \rho^{(0)} u_r^{(0)} = 0 \quad (14.51)$$

Si la densidad de la cuerda no difiere apreciablemente de $\rho^{(0)}$ (es decir, si λ es realmente una cantidad pequeña), las funciones $u_r^{(0)}(x)$ y las pulsaciones $\omega_r^{(0)}$ serán muy próximas** a las funciones $u_r(x)$ y a las pulsaciones propias verdaderas ω_r . Podremos entonces desarrollar $u_r(x)$ y ω_r en potencias de λ :

$$\begin{aligned} u_r(x) &= u_r^{(0)}(x) + \lambda u_r^{(1)}(x) + \lambda^2 u_r^{(2)}(x) + \dots \\ \omega_r &= \omega_r^{(0)} + \lambda \omega_r^{(1)} + \lambda^2 \omega_r^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (14.52)$$

* La complicación adicional que representa una tensión variable se puede tratar de forma paralela a todo el desarrollo que sigue (véase problema 14-17).

** Recuérdese, no obstante, la advertencia hecha en la sección 5.5 con relación a estas afirmaciones.

donde las funciones $u_r^{(p)}(x)$ y las cantidades $\omega_r^{(p)}$ son independientes de λ y han de ser determinadas. El término $\omega_r^{(1)}$ es la llamada *corrección de primer orden de la pulsación*; $u_r^{(2)}$ es la *corrección de segundo orden a la función de onda*, etc.

Evidentemente, podemos establecer una relación de ortogonalidad para las funciones de onda de orden cero de la misma forma que dedujimos la condición correspondiente a las funciones de onda auténticas; resultará

$$\int_0^L \rho^{(0)} u_r^{(0)} u_s^{(0)} dx = \delta_{rs} \quad (14.53)$$

Como las $u_r^{(0)}$ incluyen las funciones $\sin(r\pi x/L)$, al objeto de que la normalización reúna las condiciones adecuadas, debe ser (cfr. 14.7):

$$u_r^{(0)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\rho^{(0)} L}} \sin \frac{r\pi x}{L} \quad (14.54)$$

y la ecuación que satisfacen las $u_r(x)$ será

$$\tau \frac{d^2 u_r}{dx^2} + \omega_r^2 \rho u_r = 0 \quad (14.55)$$

Sustituyendo en esta ecuación los desarrollos de $u_r(x)$, $\rho(x)$ y ω_r , obtendremos

$$\begin{aligned} \tau \frac{d^2 u_r^{(0)}}{dx^2} + \tau \lambda \frac{d^2 u_r^{(1)}}{dx^2} + \tau \lambda^2 \frac{d^2 u_r^{(2)}}{dx^2} + \cdots + [(\omega_r^{(0)} + \lambda \omega_r^{(1)} + \lambda^2 \omega_r^{(2)} + \cdots)^2 \\ \cdot (\rho^{(0)} + \lambda \rho^{(1)} + \lambda^2 \rho^{(2)} + \cdots) \cdot (u_r^{(0)} + \lambda u_r^{(1)} + \lambda^2 u_r^{(2)} + \cdots)] = 0 \end{aligned} \quad (14.56)$$

Para que cualquier valor de λ satisfaga 14.56, será necesario que el coeficiente de cada una de las potencias sea nulo. Los términos de orden cero (o sea, los que carecen de un coeficiente λ) cumplen 14.51, por lo que su suma será cero. Los términos de primer orden son

$$\tau \frac{d^2 u_r^{(1)}}{dx^2} + 2\omega_r^{(0)} \omega_r^{(1)} \rho^{(0)} u_r^{(0)} + (\omega_r^{(0)})^2 \rho^{(1)} u_r^{(0)} + (\omega_r^{(0)})^2 \rho^{(0)} u_r^{(1)} = 0 \quad (14.57)$$

Toda función, cualquiera que sea, puede desarrollarse en función de un sistema completo de funciones ortogonales* y, como las $u_r^{(0)}$ son soluciones de la ecuación de onda para $\rho = \text{cte.}$ constituirán un conjunto como el mencionado, pudiendo ser utilizadas para desarrollar las funciones $u_r^{(1)}$, $u_r^{(2)}$, etc. Entonces,

$$u_r^{(1)} = \sum_{s=1}^{\infty} C_{rs} u_s^{(0)} \quad (14.58)$$

donde las C_{rs} son coeficientes (también independientes de λ) que hay que determinar. Por consiguiente, tenemos

$$\tau \frac{d^2 u_r^{(1)}}{dx^2} = \sum_s C_{rs} \tau \frac{d^2 u_s^{(0)}}{dx^2}. \quad (14.59)$$

que, haciendo uso de 14.51, se transforma en

$$\tau \frac{d^2 u_r^{(1)}}{dx^2} = - \sum_s C_{rs} (\omega_s^{(0)})^2 \rho^{(0)} u_s^{(0)} \quad (14.60)$$

Si llevamos el desarrollo de $u_r^{(1)}$ y su derivada segunda (14.58 y 14.60) a la ecuación 14.57, obtendremos

$$\sum_s C_{rs} [(\omega_r^{(0)})^2 - (\omega_s^{(0)})^2] \rho^{(0)} u_s^{(0)} + \omega_r^{(0)} [2\omega_r^{(1)} \rho^{(0)} + \omega_r^{(0)} \rho^{(1)}] u_r^{(0)} = 0 \quad (14.61)$$

Multipliquemos ahora esta ecuación por $u_t^{(0)}$ e integremos a lo largo de la cuerda; tendremos

$$\begin{aligned} & \sum_s C_{rs} [(\omega_r^{(0)})^2 - (\omega_s^{(0)})^2] \int_0^L \rho^{(0)} u_s^{(0)} u_t^{(0)} dx \\ & + \omega_r^{(0)} \left[2\omega_r^{(1)} \int_0^L \rho^{(0)} u_r^{(0)} u_t^{(0)} dx + \omega_r^{(0)} \int_0^L \rho^{(1)} u_r^{(0)} u_t^{(0)} dx \right] = 0 \end{aligned} \quad (14.62)$$

Hagamos, por definición,

$$M_{rt}^{(1)} \equiv \int_0^L \rho^{(1)} u_r^{(0)} u_t^{(0)} dx \quad (14.63)$$

* Véase discusión en la sección 14.7.

y hagamos uso asimismo de la condición de ortogonalidad (14.53) para escribir la ecuación 14.62 como sigue

$$\sum_s C_{rs}[(\omega_r^{(0)})^2 - (\omega_t^{(0)})^2]\delta_{st} + \omega_r^{(0)}[2\omega_r^{(1)}\delta_{rt} + \omega_r^{(0)}M_{rt}^{(1)}] = 0 \quad (14.64)$$

Efectuando la suma indicada en el primer término, se obtiene

$$C_{rt}[(\omega_r^{(0)})^2 - (\omega_t^{(0)})^2] + \omega_r^{(0)}[2\omega_r^{(1)}\delta_{rt} + \omega_r^{(0)}M_{rt}^{(1)}] = 0 \quad (14.65)$$

Evidentemente, tenemos ahora que considerar dos casos, $r=t$ y $r \neq t$. Primera-mente, para el caso $r=t$, el primer término se anula, y

$$\omega_r^{(1)} = -\frac{1}{2}\omega_r^{(0)}M_{rr}^{(1)} \quad (14.66)$$

que nos da la corrección de primer orden de la pulsación. Si escribimos

$$\omega_r^2 = [\omega_r^{(0)} + \lambda\omega_r^{(1)} + \dots]^2$$

y retenemos únicamente los términos hasta primer orden en λ , tenemos

$$\omega_r^2 \cong (\omega_r^{(0)})^2 + 2\lambda\omega_r^{(0)}\omega_r^{(1)} \quad (14.67)$$

que, a la vista de 14.66, se hace

$$\begin{aligned} \omega_r^2 &\cong (\omega_r^{(0)})^2[1 - \lambda M_{rr}^{(1)}] \\ &= (\omega_r^{(0)})^2 \left[1 - \lambda \int_0^L \rho^{(1)}(u_r^{(0)})^2 dx \right] \end{aligned} \quad (14.68)$$

Ahora, de 14.54, tenemos

$$u_r^{(0)} \propto \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{L}$$

por lo cual la corrección de primer orden de la pulsación (14.66) variará en la forma

$$\begin{aligned} \omega_r^{(1)} &\propto \int_0^L \rho^{(1)}(u_r^{(0)})^2 dx \\ &\propto \int_0^L \rho^{(1)} \operatorname{sen}^2 \frac{r\pi x}{L} dx \end{aligned}$$

En consecuencia, vemos que si la perturbación en densidad se encuentra concentrada en los *nodos* en el caso de los modos r (es decir, en aquellos puntos en los cuales $\sin(r\pi x/L)=0$), la corrección será nula para esta pulsación propia particular. Por otra parte, la corrección será máxima cuando $\rho^{(1)}$ esté concentrada en los *vientres*.

Volviendo a la igualdad 14.65 y considerando el caso $r \neq t$, encontramos que el primer término del segundo corchete se anula, de forma que

$$C_{rt} = -\frac{(\omega_r^{(0)})^2 M_{rt}^{(1)}}{(\omega_r^{(0)})^2 - (\omega_t^{(0)})^2}, \quad r \neq t \quad (14.69)$$

Por lo tanto, la corrección de primer orden a la función de onda es

$$\begin{aligned} u_r^{(1)}(x) &= \sum_s C_{rs} u_s^{(0)} \\ &= -\sum_s' \frac{(\omega_r^{(0)})^2 M_{rs}^{(1)}}{(\omega_r^{(0)})^2 - (\omega_s^{(0)})^2} u_s^{(0)} \end{aligned} \quad (14.70)$$

donde el acento en el símbolo sumatorio indica que se excluye el sumando $r=s$.

El sumatorio de la igualdad 14.70 se extiende a los valores $s=1, 2, \dots, \infty$, no siendo así posible calcular la suma por completo. Ahora bien, dada la forma del denominador, únicamente aquellos términos para los cuales $\omega_r^{(0)} \approx \omega_s^{(0)}$ darán contribuciones apreciables y, por lo tanto, el valor de la suma, de infinitos sumandos, puede ser obtenido con gran aproximación considerando sólo unos pocos términos. Precisamente es este hecho lo que hace que el desarrollo por el método de las perturbaciones constituya un procedimiento de aproximación eficaz.

◆ Ejemplo 14.6 Cuerda de densidad lineal variable

Consideremos una cuerda no uniforme cuya densidad venga dada por

$$\rho(x) = \rho_0 + \lambda x \quad (1)$$

donde ρ_0 es una constante y λ una cantidad pequeña, tal que $\lambda \ll \rho_0/L$. Para determinar la corrección de primer orden de la pulsación, deberemos calcular

$$\begin{aligned} \omega_r^{(1)} &= -\frac{1}{2} \omega_r^{(0)} M_{rr}^{(1)} \\ &= -\frac{1}{2} \omega_r^{(0)} \int_0^L \rho^{(1)} u_r^{(0)} u_r^{(0)} dx \end{aligned} \quad (2)$$

en donde

$$\rho^{(1)} = x \quad (3)$$

$$u_r^{(0)} = \sqrt{\frac{2}{\rho_0 L}} \sin \frac{r\pi x}{L} \quad (4)$$

y

$$\omega_r^{(0)} = \frac{r\pi}{L} \sqrt{\frac{\tau}{\rho_0}} \quad (5)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \omega_r^{(1)} &= -\frac{1}{2} \frac{r\pi}{L} \sqrt{\frac{\tau}{\rho_0}} \cdot \frac{2}{\rho_0 L} \int_0^L x \sin^2 \left(\frac{r\pi x}{L} \right) dx \\ &= -\frac{r\pi}{4\rho_0} \sqrt{\frac{\tau}{\rho_0}} \end{aligned} \quad (6)$$

La pulsación, correcta hasta el primer orden, viene dada por

$$\begin{aligned} \omega_r &= \omega_r^{(0)} + \lambda \omega_r^{(1)} \\ &= \frac{r\pi}{L} \sqrt{\frac{\tau}{\rho_0}} \left[1 - \lambda \frac{L}{4\rho_0} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

Volviendo a 14.56 y reuniendo todos los términos que tengan un coeficiente λ^2 , tendremos

$$\begin{aligned} \tau \frac{d^2 u_r^{(2)}}{dx^2} &+ (\omega_r^{(0)})^2 [\rho^{(2)} u_r^{(0)} + \rho^{(1)} u_r^{(1)} + \rho^{(0)} u_r^{(2)}] \\ &+ 2\omega_r^{(0)} \omega_r^{(1)} [\rho^{(1)} u_r^{(0)} + \rho^{(0)} u_r^{(1)}] \\ &+ \rho^{(0)} u_r^{(0)} [2\omega_r^{(0)} \omega_r^{(2)} + (\omega_r^{(1)})^2] = 0 \end{aligned} \quad (14.71)$$

Como en el caso de 14.58, desarrollemos la función de onda de segundo orden en función de las funciones de orden cero:

$$u_r^{(2)} = \sum_{s=1}^{\infty} D_{rs} u_s^{(0)} \quad (14.72)$$

Efectuando el mismo cálculo que anteriormente, tendremos

$$\begin{aligned} \tau \frac{d^2 u_r^{(0)}}{dx^2} &= \sum_s D_{rs} \tau \frac{d^2 u_s^{(0)}}{dx^2} \\ &= - \sum_s D_{rs} (\omega_s^{(0)})^2 \rho^{(0)} u_s^{(0)} \end{aligned} \quad (14.73)$$

Llevando 14.73 a 14.71, resulta

$$\begin{aligned} \sum_s D_{rs}[(\omega_r^{(0)})^2 - (\omega_s^{(0)})^2] \rho^{(0)} u_s^{(0)} + (\omega_r^{(0)})^2 [\rho^{(2)} u_r^{(0)} + \rho^{(1)} u_r^{(1)}] \\ + 2\omega_r^{(0)} \omega_r^{(1)} [\rho^{(1)} u_r^{(0)} + \rho^{(0)} u_r^{(1)}] + \rho^{(0)} u_r^{(0)} [2\omega_r^{(0)} \omega_r^{(2)} + (\omega_r^{(1)})^2] = 0 \end{aligned} \quad (14.74)$$

Ahora podemos hacer uso de 14.66 y 14.70 para sustituir $\omega_r^{(1)}$ y $u_r^{(1)}$, respectivamente, en 14.74. Entonces

$$\begin{aligned} \sum_s D_{rs}[(\omega_r^{(0)})^2 - (\omega_s^{(0)})^2] \rho^{(0)} u_s^{(0)} \\ + \omega_r^{(0)} \left[\omega_r^{(0)} \rho^{(2)} u_r^{(0)} - \omega_r^{(0)} \rho^{(1)} \sum_s' \frac{(\omega_r^{(0)})^2 M_{rs}^{(1)}}{(\omega_r^{(0)})^2 - (\omega_s^{(0)})^2} u_s^{(0)} \right. \\ \left. - \omega_r^{(0)} \rho^{(1)} u_r^{(0)} M_{rr}^{(1)} + \omega_r^{(0)} \rho^{(0)} M_{rr}^{(1)} \sum_s' \frac{(\omega_r^{(0)})^2 M_{rs}^{(1)}}{(\omega_r^{(0)})^2 - (\omega_s^{(0)})^2} u_s^{(0)} \right. \\ \left. + 2\omega_r^{(2)} \rho^{(0)} u_r^{(0)} + \frac{1}{4} \omega_r^{(0)} \rho^{(0)} u_r^{(0)} (M_{rr}^{(1)})^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (14.75)$$

A continuación, multipliquemos esta ecuación por $u_r^{(0)} dx$ e integremos sobre x en el intervalo $0 \leq x \leq L$:

$$\begin{aligned} \sum_s D_{rs}[(\omega_r^{(0)})^2 - (\omega_s^{(0)})^2] \int_0^L \rho^{(0)} u_r^{(0)} u_s^{(0)} dx + \omega_r^{(0)} \left[\omega_r^{(0)} \int_0^L \rho^{(2)} u_r^{(0)} u_r^{(0)} dx \right. \\ \left. - \omega_r^{(0)} \sum_s' \frac{(\omega_r^{(0)})^2 M_{rs}^{(1)}}{(\omega_r^{(0)})^2 - (\omega_s^{(0)})^2} \int_0^L \rho^{(1)} u_r^{(0)} u_s^{(0)} dx - \omega_r^{(0)} M_{rr}^{(1)} \int_0^L \rho^{(1)} u_r^{(0)} u_r^{(0)} dx \right. \\ \left. + \omega_r^{(0)} M_{rr}^{(1)} \sum_s' \frac{(\omega_r^{(0)})^2 M_{rs}^{(1)}}{(\omega_r^{(0)})^2 - (\omega_s^{(0)})^2} \int_0^L \rho^{(0)} u_r^{(0)} u_s^{(0)} dx + 2\omega_r^{(2)} \int_0^L \rho^{(0)} u_r^{(0)} u_r^{(0)} dx \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \omega_r^{(0)} (M_{rr}^{(1)})^2 \int_0^L \rho^{(0)} u_r^{(0)} u_r^{(0)} dx \right] = 0 \end{aligned} \quad (14.76)$$

A la vista de la condición de ortogonalidad (14.53), los términos primero y quinto de 14.76 se anulan y las integrales de los últimos dos términos se hacen iguales a la unidad. Además, la integral del tercer término es $M_{rs}^{(1)}$ y la del cuarto $M_{rr}^{(1)}$. Así, pues, al dividir por $\omega_r^{(0)} \neq 0$, tendremos

$$\begin{aligned} \omega_r^{(0)} \int_0^L \rho^{(2)} u_r^{(0)} u_r^{(0)} dx - \omega_r^{(0)} \sum_s' \frac{(\omega_r^{(0)})^2 (M_{rs}^{(1)})^2}{(\omega_r^{(0)})^2 - (\omega_s^{(0)})^2} \\ - \omega_r^{(0)} (M_{rr}^{(1)})^2 + 2\omega_r^{(2)} + \frac{1}{4}\omega_r^{(0)} (M_{rr}^{(1)})^2 = 0 \end{aligned} \quad (14.77)$$

Haciendo

$$M_{rr}^{(2)} \equiv \int_0^L \rho^{(2)} u_r^{(0)} u_r^{(0)} dx \quad (14.78)$$

resultará, despejando $\omega_r^{(2)}$,

$$\omega_r^{(2)} = \omega_r^{(0)} \left[\frac{3}{8} (M_{rr}^{(1)})^2 - \frac{1}{2} M_{rr}^{(2)} + \frac{1}{2} \sum_s' \frac{(\omega_r^{(0)})^2 (M_{rs}^{(1)})^2}{(\omega_r^{(0)})^2 - (\omega_s^{(0)})^2} \right] \quad (14.79)$$

Evidentemente, podremos calcular las correcciones de pulsación hasta el orden que queramos siguiendo este procedimiento, siendo cada una de las correcciones sucesivas más complicada que la anterior.

14.7 Series de Fourier generalizadas

En la sección 4.5 tratamos brevemente de las series de Fourier trigonométricas en relación con los osciladores armónicos forzados. En la sección anterior hicimos uso nuevamente del método de Fourier generalizado, aunque no empleáramos funciones trigonométricas, y lo cierto es que siempre puede llevarse a cabo un análisis de Fourier de cualquier problema en función de un sistema completo cualquiera de *funciones ortogonales*.

Necesitamos primeramente dejar establecidos algunos detalles concernientes a las propiedades de las funciones ortogonales. Sabemos, por lo estudiado acerca de los vectores (véase sección 1.12), que es posible expresar todo vector tridimensional en la forma

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3 = \sum_j A_j \mathbf{e}_j \quad (14.80)$$

donde las A_j son las proyecciones sobre los tres ejes ortogonales, según cuyas direcciones los vectores unitarios son \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 y \mathbf{e}_3 . Ya sabemos que es imposible repre-

sentar un vector que posea una componente en la dirección x_3 únicamente en función de \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 ; es decir, la *base* de vectores unitarios debe incluir también a \mathbf{e}_3 . Por consiguiente, para representar un vector cualquiera, es necesario que la *base* sea un *sistema completo*; o sea, que incluya vectores unitarios para todas las direcciones posibles.

En general, para determinar la proyección de \mathbf{A} sobre el eje x_j es necesario formar el producto escalar de \mathbf{A} por el vector \mathbf{e}_j : $A_j = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_j$. Los vectores unitarios obedecen la relación de ortogonalidad

$$\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{jk} \quad (14.81)$$

Nos proponemos ahora generalizar las conclusiones relativas a los vectores tridimensionales al caso de *funciones* en el espacio n -dimensional (o sea, *espacio funcional*), para el que, realmente, n es infinito.* Es decir, tomemos el conjunto de funciones ortogonales

$$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \varphi_3(x), \dots$$

definidas en el interior de un cierto intervalo, $-L < x < L$. Cuando no exista ninguna función que sea ortogonal a la vez a todas las $\varphi_j(x)$, diremos que las funciones $\varphi_j(x)$ forman un *sistema ortogonal completo*, pudiendo expresarse toda función, cualquiera que sea, en forma de combinación lineal de este sistema. Por analogía con 14.80, tendremos**

$$f(x) = a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x) + \dots \\ = \sum_j a_j \varphi_j(x) \quad \left. \right\} \quad -L < x < L \quad (14.82)$$

Toda serie como ésta recibe el nombre de *serie de Fourier generalizada*.

La afirmación de que las $\varphi_j(x)$ sean ortogonales implica que ninguna de dichas funciones puede expresarse en función de las otras y, por lo mismo, que la serie 14.82 es una combinación linealmente independiente de las $\varphi_j(x)$. Así, cuando $f(x)$ sea nula, cada uno de los coeficientes a_j deberá ser también nulo. Por analogía con la de los vectores unitarios \mathbf{e}_j , la condición de ortogonalidad puede expresarse:

* El rango del espacio funcional (o sea, n) debe ser un infinito *numerable* al objeto de que la propiedad de ortogonalidad 14.83 quede expresada adecuadamente, puesto que en ella los subíndices j y k deben ser números definibles.

** Al efectuar un desarrollo como éste debemos plantearnos siempre la cuestión de la convergencia de la serie. En todos los casos que nos ocupen supondremos que la serie converge.

$$\int_{-L}^{+L} \varphi_j(x) \varphi_k(x) dx = \delta_{jk} \quad (14.83)$$

donde ahora es necesario llevar a cabo una integración ya que nuestros «vectores unitarios» son funciones de x , habiéndose impuesto arbitrariamente la condición de normalización

$$\int_{-L}^{+L} [\varphi_j(x)]^2 dx = 1$$

Ahora, podemos determinar los coeficientes a_j del desarrollo de $f(x)$ (14.82) multiplicando esta igualdad por $\varphi_k(x)$ e integrando:

$$\int_{-L}^{+L} f(x) \varphi_k(x) dx = \int_{-L}^{+L} \sum_j a_j \varphi_j(x) \varphi_k(x) dx \quad (14.84)$$

Si intercambiamos el orden en que están indicados la integración y sumatorio y aplicamos la condición de ortogonalidad, obtendremos

$$\begin{aligned} \int_{-L}^{+L} f(x) \varphi_k(x) dx &= \sum_j a_j \int_{-L}^{+L} \varphi_j(x) \varphi_k(x) dx \\ &= \sum_j a_j \delta_{jk} \\ &= a_k \end{aligned} \quad (14.85)$$

con lo cual, resultará

$$f(x) = \sum_j \varphi_j(x) \int_{-L}^{+L} f(x') \varphi_j(x') dx' \quad (14.86)$$

Las funciones $\varphi_j(x)$ son, por supuesto, un sistema completo *cualquiera* de funciones ortogonales y en ellas están incluidos los polinomios de Legendre, las funciones de Bessel, los polinomios de Hermite, etc., así como las funciones trigonométricas.

Consideremos ahora la representación de una función $f(x)$ en el intervalo $-\pi < x < \pi$ mediante una serie trigonométrica compuesta por las funciones ortogonales $\cos rx$ y $\sin rx$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} (a_r \cos rx + b_r \sin rx) \quad (14.87)$$

Este es el ejemplo más familiar de la serie de Fourier*, expresión que ya fue obtenida en 4.61. Adviértase que $f(x)$ no debe ser necesariamente una función continua de x , pudiendo estar formada por un número finito de discontinuidades finitas dentro del intervalo $-\pi < x < \pi$. En este caso, la función puede manejarse dividiendo el intervalo en subintervalos tales que $f(x)$ sea continuo dentro de cada uno de ellos. Puede demostrarse que en un punto de discontinuidad $x=x_0$ la serie de Fourier converge hacia el valor medio; o sea,

$$f(x_0) = \frac{1}{2} \lim_{\delta \rightarrow 0} [f(x_0 + \delta) + f(x_0 - \delta)] \quad (14.88)$$

Para calcular los coeficientes a_r y b_r , hagamos uso de algunas propiedades trigonométricas bien conocidas. En primer lugar, tenemos

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin rx \cos sx dx = 0 \quad (14.89a)$$

para todo valor nulo o entero de r y s . Asimismo, tenemos las identidades (cfr. 14.7):

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin rx \sin sx dx = \pi \delta_{rs}; \quad r, s = 1, 2, \dots \quad (14.89b)$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos rx \cos sx dx = \pi \delta_{rs}; \quad r, s = 1, 2, \dots \quad (14.89c)$$

Las funciones $\sin rx$ y $\cos rx$, $r=1, 2, 3, \dots$, junto con un término constante representado por $a_0/2$ en 14.87, constituyen por consiguiente un sistema ortogonal completo que podemos utilizar para desarrollar una función cualquiera de x (quedando supuesta, desde luego, la convergencia).

Por lo tanto, podemos calcular los coeficientes a_s multiplicando 14.87 por $\cos sx$ e integrando desde $-\pi$ hasta $+\pi$:

$$a_s = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos sx dx \quad (14.90a)$$

* Daniel BERNOULLI fue el primero en utilizar series trigonométricas y EULER el primero en deducir las expresiones integrales de los coeficientes. Pero éstos se refirieron a casos particulares y fue el barón Jean Baptiste Joseph FOURIER (1768-1830) quien señaló en 1807 que una función *cualquiera* y, de hecho, incluso una función *discontinua*, puede representarse mediante una serie trigonométrica. No obstante, el trabajo de 1807 de Fourier carecía de rigor (en realidad, fue rechazado por la Academia de París); DIRICHLET fue el primero en ofrecer una demostración rigurosa en 1829.

y análogamente en el caso de las b_s :

$$b_s = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \operatorname{sen} sx dx \quad (14.90b)$$

Calculando el valor medio de $f(x)$ en el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$, resulta

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) dx \quad (14.91)$$

donde pondremos el desarrollo en serie 14.87 de $f(x)$, resultando que la integral de cada uno de los términos en seno y coseno es nula puesto que los valores medios de $\cos rx$ y de $\operatorname{sen} rx$ en el intervalo $[-\pi, +\pi]$ es cero cuando r es entero. Únicamente el término que contiene a a_0 es distinto de cero

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{a_0}{2} dx = \frac{a_0}{2}$$

Entonces,

$$\overline{f(x)} = \frac{a_0}{2} \quad (14.92)$$

representando el primer término de la serie el valor medio de la función en el intervalo considerado.

La expresión completa del desarrollo es

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x') dx' + \frac{1}{\pi} \sum_r \left[\cos rx \int_{-\pi}^{+\pi} f(x') \cos rx' dx' + \operatorname{sen} rx \int_{-\pi}^{+\pi} f(x') \operatorname{sen} rx' dx' \right] \quad (14.93)$$

Observemos que $\cos rx$ es una función *par*, mientras que $\operatorname{sen} rx$ es una función *ímpar*, o sea,

$$\begin{aligned} \cos rx &= \cos r(-x) \\ \operatorname{sen} rx &= -\operatorname{sen} r(-x) \end{aligned} \quad \Bigg\} \quad (14.94)$$

Entonces, cuando $f(x)$ sea función par, la integral

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x') \operatorname{sen} rx' dx'$$

se anulará y $f(x)$ estará representada por una serie de cosenos (más el primer término constante). De igual forma, cuando $f(x)$ sea función impar, sólo quedará la parte de la serie que contenga a los senos (anulándose el término constante).

Hasta aquí únicamente hemos considerado la representación de la función $f(x)$ en el intervalo $-\pi < x < \pi$. Como las funciones $\operatorname{sen} rx$ y $\cos rx$ tienen una periodicidad de 2π , el desarrollo en serie (14.93) de $f(x)$ se repetirá cada intervalo 2π . No obstante, podemos variar este intervalo sin más que hacer un cambio de variable. Así, en el caso de un intervalo $-L < x < L$, haremos el cambio $x' \rightarrow \pi x'/L$ y encontraremos

$$f(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} f(x') dx' + \frac{1}{L} \sum_r \left[\cos \frac{r\pi x}{L} \int_{-L}^{+L} f(x') \cos \frac{r\pi x'}{L} dx' + \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{L} \int_{-L}^{+L} f(x') \operatorname{sen} \frac{r\pi x'}{L} dx' \right] \quad (14.95)$$

Además, si $f(x)$ es función *impar* en $-L < x < L$, tendremos una serie de senos*

$$f(x) = \frac{2}{L} \sum_r \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{L} \int_0^L f(x') \operatorname{sen} \frac{r\pi x'}{L} dx' \quad (14.96)$$

Análogamente, si $f(x)$ es función *par* en $-L < x < L$, la serie de cosenos será*

$$f(x) = \frac{1}{L} \int_0^L f(x') dx' + \frac{2}{L} \sum_r \cos \frac{r\pi x}{L} \int_0^L f(x') \cos \frac{r\pi x'}{L} dx' \quad (14.97)$$

Cuando $f(x)$ está definida únicamente en el intervalo $0 < x < L$ y sea indiferente que la serie de Fourier que la represente sea par o impar en el intervalo

* Como el valor de la integral en $-L < x < 0$ es el mismo que en $0 < x < L$, sólo es necesario que consideremos una de las mitades y que multipliquemos por dos el resultado.

$-L < x < L$, el desarrollo podrá hacerse tanto en función de una serie de senos como de una de cosenos. Según las circunstancias, una u otra de estas posibilidades será la más apropiada.

Referencias recomendadas

En la mayoría de las referencias relacionadas en el capítulo 13 se trata de las vibraciones de las cuerdas. En especial, consúltese BECKER (Be54, cap. 15), MORSE (Mo48) y SLATER y FRANK (Sl47, cap. 8).

El estudio de la cuerda vibrante de Lord RAYLEIGH (Ra94, cap. 6) continúa siendo clásico. TEMPLE y BICKLEY (Te56) tratan detalladamente del principio de Rayleigh.

SLATER y FRANK (Sl47, cap. 10) y WANSGNESS (Wa63, cap. 16) tratan las vibraciones de cuerdas de tensión y densidad variables. La teoría de las perturbaciones es utilizada, por ejemplo, por SYMON (Sy60, cap. 12).

En una gran variedad de textos matemáticos se trata de la teoría de las series de Fourier y de las funciones ortogonales en general; por ejemplo, pueden verse ARFKEN (Ar66, cap. 14), CHURCHILL (Ch41), KAPLAN (Ka52, cap. 7) y PIPES (Pi46, cap. 3). Un tratado moderno especialmente útil es el de DAVIS (Da63), donde se estudian con gran detalle las funciones ortogonales (cap. 2), las series de Fourier (cap. 3) y sus aplicaciones a las cuerdas vibrantes (cap. 6).

Problemas

14-1. Estudiar el movimiento de una cuerda continua cuando las condiciones iniciales sean $\dot{q}(x, 0) = 0$ y $q(x, 0) = A \operatorname{sen}(3\pi x/L)$. Separar la solución en sus modos normales.

14-2. Resuélvase nuevamente el problema del ejemplo 14.2 en el caso de que el punto donde se pulsa se encuentre a una distancia $L/3$ de un extremo. Coméntese la naturaleza de los modos permitidos.

14-3. En relación al ejemplo 14.2, demostrar por cálculo numérico que el desplazamiento inicial de la cuerda queda bien representado por los tres primeros términos de la serie representada por la igualdad 5. Dibujar la forma de la cuerda a intervalos de $1/8$ de período.

14-4. Estudiar el movimiento de una cuerda cuando las condiciones iniciales sean

$$q(x, 0) = 4x(L - x)/L^2; \quad \dot{q}(x, 0) = 0$$

Determinar las pulsaciones características y calcular la amplitud del n -ésimo modo.

14-5. Una cuerda sin desplazamiento inicial se pone en movimiento recibiendo un golpe en todo lo largo de una distancia $2s$ en torno de su centro. Esta porción de cuerda cobra una velocidad inicial v_0 . Describir el movimiento resultante.

14-6. Con un martillo triangular se pone en movimiento una cuerda golpeándola en un punto situado a una distancia $xL/4$ de un extremo. La velocidad inicial es mayor en $x=L/4$ decreciendo linealmente hasta cero en $x=0$ y en $x=L/2$ y el trozo $L/2 \leq x \leq L$ no resulta perturbado inicialmente. Determinar el movimiento subsiguiente de la cuerda. ¿Por qué se encuentran ausentes los armónicos cuarto, octavo, etc.? ¿Cuántos decibel estarán los armónicos segundo y tercero por debajo del fundamental?

14-7. En un punto situado a una distancia $3L/7$ de un extremo se tira lateralmente de una cuerda separándola una distancia h mientras que de un punto situado a una distancia $3L/7$ del otro extremo se tira en sentido contrario exactamente la misma longitud. Estúdiense las vibraciones en función de los modos normales.

14-8. Haciendo un gráfico, comparar las pulsaciones características ω_r en función del número de modo r en el caso de una cuerda discreta compuesta de 3, 5 y 10 partículas y en el de una continua con los mismos valores de τ y de $m/d=\rho$. Comentar los resultados.

14-9. Efectuar los cálculos necesarios para obtener las expresiones 5, 7 y 8 del ejemplo 14.4(a).

14-10. Resolver el problema del ejemplo 14.4(b) tomando una función desplazamiento de forma triangular. Demostrar que esta aproximación proporciona resultados precisos para valores elevados de M/m y se hace mejor que los resultados obtenidos en el ejemplo 14.4(b) para $M/m > 0,4$. Explicar por qué es esto razonable. Sin efectuar cálculos, razonar acerca de las ventajas de tomar una función desplazamiento parabólica en lugar de funciones senoidales o triangulares.

14-11. Tres partículas, cada una de masa M , se sujetan a intervalos regulares a una cuerda (sin peso) de longitud L sometida a una tensión τ (como en la figura 13-11). Utilizando el método de Rayleigh, obtener una expresión aproximada de la pulsación fundamental. Tomar una parábola como función desplazamiento y proceder al cálculo determinando $\langle T \rangle$ para cada una de las partículas y $\langle U \rangle$ para la cuerda. Comparar el resultado aproximado con el valor verdadero.

14-12. Consideremos una cuerda uniforme de densidad $\rho(x)=\rho_0=\text{cte}$. cargada con tres pequeños pesos, espaciados regularmente y de masa m cada uno. Calcular las correcciones de primer orden de la pulsación para los cinco primeros modos de vibración. Coméntese el significado físico de estos resultados.

14-13. La cuerda a la que se hacía referencia en el ejemplo 14.6 tiene una densidad $\rho(x)=\rho_0+\lambda x$. Determinar una expresión de la pulsación ω_r de una cuerda

de la misma masa, pero de densidad uniforme. Comparar el resultado con el de primer orden obtenido en dicho ejemplo.

14-14. Obténgase la corrección de segundo orden de la pulsación para una cuerda de densidad $\rho(x) = \rho_0 + \lambda x$.

14-15. Sea una cuerda de densidad $\rho(x) = \rho_0 + \lambda \operatorname{sen}(\pi x/L)$. Determinar los elementos del tensor $\{\mathbf{m}\}$ y demostrar que existe acoplamiento entre todos los modos *impares* y entre todos los modos *pares*. (Entonces, todas las componentes m_{jk} del tensor se anularán a menos que j y k sean ambos pares o ambos impares.)

14-16. Mediante el método de las perturbaciones efectuar el estudio de la cuerda del problema anterior y obtener las correcciones de primer y segundo orden de la pulsación.

14-17. Considérese el caso de la cuerda continua de densidad constante, cuya tensión sea una función que varíe lentamente con la distancia a lo largo de la cuerda. Desarrollar τ en serie de potencias y calcular la corrección de primer orden de la pulsación para este caso.

14-18. Con relación a la cuerda del ejemplo 14.6 cuya densidad es $\rho(x) = \rho_0 + \lambda x$ determinar la corrección de primer orden a las funciones de onda (véase 14.70) para los tres primeros modos de vibración (o sea, $r=1, 2, 3$). Examinar los valores absolutos de los términos sucesivos que van apareciendo en cada aproximación y retener sólo los términos mayores que aparezcan en los primeros lugares.

14-19. Hallar la serie de senos y la de cosenos de Fourier que represente a la función

$$f(x) = e^x, \quad 0 < x < \pi$$

14-20. Hallar la serie de Fourier que representa a la función

$$f(x) = x^2, \quad -L < x < L$$

14-21. Hallar la serie de Fourier que representa a la función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 2, & 1 < x < 3 \end{cases}$$

$$f(x+3) = f(x), \text{ para todo } x$$

14-22. Desarrollar la función $f(x) = 1$ ($0 < x < \pi$) en serie de senos y sustituir $x = \pi/2$ en el resultado para demostrar que

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

14-23. Sea una función $f(x)$ definida en el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$. Esta función puede representarse mediante una serie de Fourier como la expresada en 14.87. Asimismo la derivada de $f(x)$ puede desarrollarse como sigue

$$f'(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} (A_r \cos rx + B_r \sin rx)$$

Demostrar que

$$A_0 = \frac{1}{\pi} [f(\pi) - f(-\pi)]$$

$$A_r = rb_r + \frac{\cos r\pi}{\pi} [f(\pi) - f(-\pi)]$$

$$B_r = -ra_r$$

donde los coeficientes a_r y b_r son los dados por 14.90. De aquí, demostrar que $f'(x)$ sólo puede obtenerse derivando término a término la serie de $f(x)$ cuando

$$f(\pi) = f(-\pi).$$

Poner de manifiesto esta conclusión examinando las funciones $f_1(x) = x$ y $f_2(x) = x^2$.

Ecuación de onda monodimensional

15.1 Introducción

En el capítulo anterior presentamos la *ecuación de onda*, ecuación auténticamente primordial en física matemática. Sus soluciones se ven en general sometidas a diversas limitaciones impuestas por determinadas restricciones de naturaleza física que son peculiares de cada problema en cuestión; tales limitaciones aparecen con frecuencia en forma de condiciones que debe cumplir la solución en los extremos de los intervalos de tiempo y espacio que interesen. Tenemos, pues, que enfrentarnos a un *problema de contorno* en el que se halla implicada una ecuación en derivadas parciales; realmente, esta situación corresponde esencialmente al cuerpo de lo que llamamos *física matemática*. Ya hemos visto alguna indicación acerca de las soluciones de las ecuaciones de esta clase y en este capítulo procederemos a investigar con detalle las soluciones de la ecuación de onda, reduciendo, no obstante, nuestra atención a las ondas monodimensionales.* Las ondas monodimensionales sirven para describir, por ejemplo, el movimiento de una cuerda vibrante. Por otra parte, puede suponerse que las ondas de presión (o sonoras) que atraviesan un medio elástico, como gas, son también ondas monodi-

* Un estudio de las ondas tridimensionales puede verse, por ejemplo, en MARION (Ma65b, cap. 10).

mensionales aproximadamente (cuando el medio sea suficientemente extenso para que carezcan de importancia los efectos de borde). En este caso, el estado del medio es aproximadamente el mismo en todos los puntos de un plano y las propiedades del movimiento ondulatorio son entonces funciones solamente de la distancia a lo largo de una recta normal al plano. Toda onda como la descrita que se encuentre en un medio extenso recibe el nombre de *onda plana*, y es matemáticamente igual a las ondas monodimensionales que vamos a tratar aquí. En este capítulo sólo consideraremos ondas mecánicas; en MARION (Ma65b) se ofrece un análisis extenso de las ondas electromagnéticas.

15.2 Soluciones generales de la ecuación de onda

Para la cuerda vibrante hemos hallado la ecuación de onda monodimensional siguiente* (cfr. 14.42):

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\rho}{\tau} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (15.1)$$

donde ρ es la densidad lineal de la cuerda y τ la tensión. Como las dimensiones de ρ son $[ML^{-1}]$ y las de τ las de una fuerza, o sea $[MLT^{-2}]$, las dimensiones de ρ/τ serán $[T^2L^{-2}]$, es decir, las de la inversa del cuadrado de una velocidad. Si hacemos $\sqrt{\tau/\rho}=v$, la ecuación de onda quedará en la forma

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

(15.2)

Uno de nuestros propósitos será ofrecer una interpretación física de la velocidad v , ya que no basta con decir que v es la «velocidad de propagación» de la onda.

Para demostrar que la ecuación 15.2 realmente representa un movimiento ondulatorio general, introduzcamos las dos nuevas variables

$$\left. \begin{array}{l} \xi \equiv x + vt \\ \eta \equiv x - vt \end{array} \right\} \quad (15.3)$$

* Por $\Psi=\Psi(x, t)$ representamos una función de onda *dependiente del tiempo* y por $\psi=\psi(x)$ una función de onda *independiente del tiempo*.

y si calculamos en función de éstas las derivadas de $\Psi = \Psi(x, t)$ que aparecen en 15.2, tendremos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi}{\partial x} &= \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ &= \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}\end{aligned}\quad (15.4)$$

y entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2}\end{aligned}\quad (15.5)$$

Análogamente, resulta

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} - \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \quad (15.6)$$

y

$$\begin{aligned}\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} &= \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} - \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2}\end{aligned}\quad (15.7)$$

Pero, según 15.2, los últimos miembros de 15.5 y 15.7 deben ser iguales, lo cual sólo puede ser cierto cuando

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi \partial \eta} \equiv 0 \quad (15.8)$$

La expresión más general de ψ que puede satisfacer esta ecuación es una suma de dos términos, uno de los cuales dependa únicamente de ξ y el otro únicamente de η ; ninguna otra función de ξ y η más complicada puede hacer que se cumpla la ecuación 15.8. Entonces,

$$\Psi = f(\xi) + g(\eta) \quad (15.9)$$

o sea, sustituyendo ξ y η ,

$$\Psi = f(x + vt) + g(x - vt) \quad (15.9a)$$

donde f y g son funciones *arbitrarias* de las variables $x+vt$ y $x-vt$, respectivamente, no siendo necesario que sean de naturaleza periódica, aunque, por supuesto, puedan serlo.

Al aumentar el tiempo, el valor de x debe aumentar también para que el de $x-vt$ se mantenga constante. Por consiguiente, la función g retendrá su forma original con el transcurso del tiempo si desplazamos nuestra vista a lo largo de la dirección x (en sentido positivo) a una velocidad v . Así, pues, la función g representa una perturbación que se desplaza hacia la derecha (o sea, hacia los valores superiores de x) a una velocidad v , mientras que f representa la propagación de una perturbación hacia la izquierda. Concluimos, por lo tanto, en que 15.2 realmente representa un movimiento ondulatorio y, en el caso más general, una onda *progresiva*.

Tratemos ahora de dar una interpretación de 15.9a en función del movimiento de una cuerda tensa. En el instante $t=0$, el desplazamiento de la cuerda quedará descrito por

$$q(x, 0) = f(x) + g(x)$$

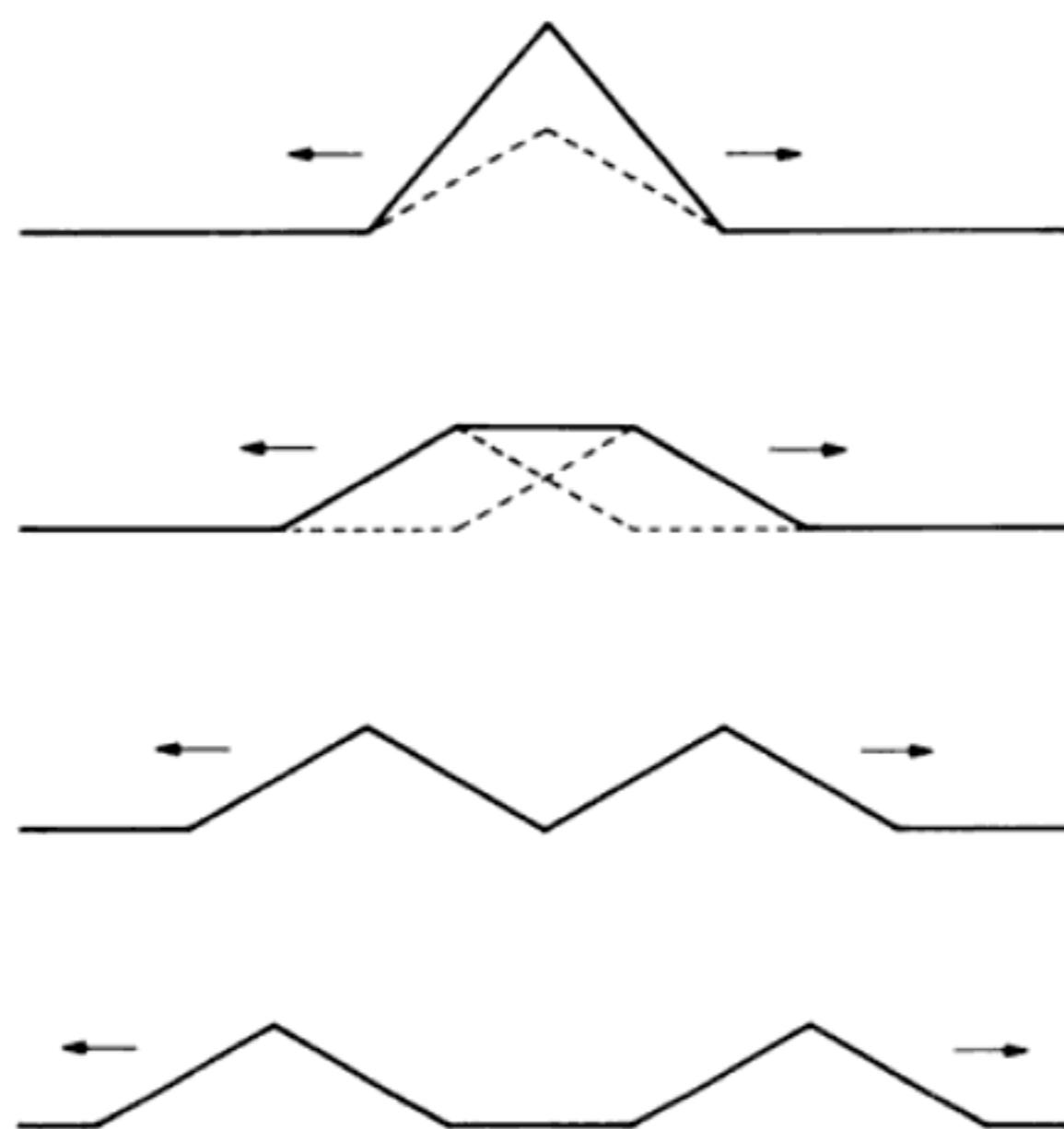


FIG. 15-1

Supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ posean formas triangulares iguales; entonces, la forma de la cuerda en $t=0$ será la indicada en la parte superior de la figura 15-1. Cuando transcurre el tiempo, la perturbación representada por $f(x+vt)$ se propaga hacia la *izquierda*, mientras que la representada por $g(x-vt)$ se propaga hacia la *derecha*. En la figura 15-1 se representa la propagación hacia izquierda y derecha de estas perturbaciones individuales.

Consideremos ahora únicamente la perturbación que se propaga hacia la izquierda. Si interrumpimos la cuerda (en $x=0$) sujetándola a un soporte rígido, nos encontramos con el fenómeno de la *reflexión*. Como el soporte es *rígido*, debe ser $f(vt)=0$ cualquiera que sea el valor del tiempo, condición ésta que, evidentemente, no puede ser cumplida por la función f sola (salvo en el caso trivial de que sea nula). Para que en $x=0$ se cumpla la condición, podemos suponer que existe, además de $f(x+vt)$, una perturbación imaginaria $-f(-x+vt)$, que se aproxima al punto límite desde la izquierda, como se representa en la figura 15-2. Entonces, la perturbación $f(x+vt)$ sigue propagándose hacia la izquierda, incluso por la porción imaginaria de la cuerda ($x < 0$), mientras que la perturbación $-f(-x+vt)$ se propaga a través del límite de la cuerda y a lo largo de la porción real de ésta. El efecto resultante es que la perturbación original se *refleja* en el soporte y, después, se propaga hacia la *derecha*.

Si interrumpimos la cuerda mediante soportes rígidos en $x=0$ y también en $x=L$, la perturbación se propagará periódicamente en uno y otro sentido con un período $2L/v$.

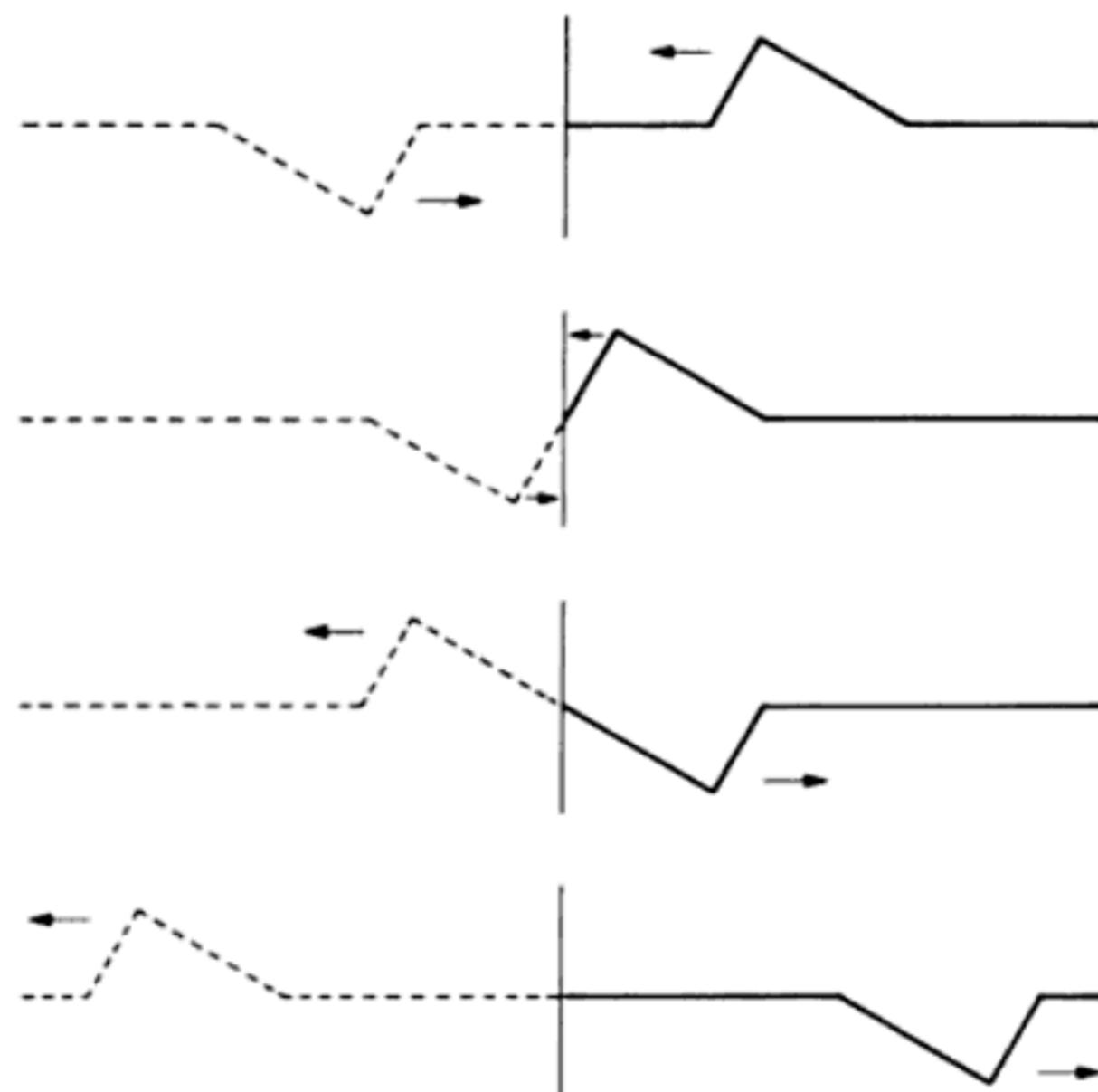


FIG. 15-2

15.3 Separación de la ecuación de onda

Cuando necesitemos una solución general de la ecuación de onda que sea armónica (como en el caso de la cuerda vibrante o, en la medida en que afecte, en el caso de muchos problemas interesantes de la física), podremos escribir

$$\Psi(x, t) = \psi(x)e^{i\omega t} \quad (15.10)$$

por lo que la ecuación de onda monodimensional 15.2 se hará

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{v^2} \psi = 0 \quad (15.11)$$

donde ψ es ahora sólo función de x .

El movimiento ondulatorio de un sistema no queda, desde luego, reducido a una sola pulsación ω en el caso más general. Un sistema de n grados de libertad posee n pulsaciones características posibles y una cuerda continua posee un conjunto de infinitas pulsaciones.* Si representamos por ω_r la r -ésima pulsación, la función de onda correspondiente a esta pulsación será

$$\Psi_r(x, t) = \psi_r(x)e^{i\omega_r t} \quad (15.12)$$

La función de onda completa será una superposición (recordemos que estamos tratando con un sistema *lineal*) de todas las funciones de onda particulares (o *modos*). Entonces,

$$\Psi(x, t) = \sum_r \Psi_r(x, t) = \sum_r \psi_r(x)e^{i\omega_r t} \quad (15.13)$$

En 15.10 *supusimos* que la función de onda era periódica en el tiempo y ahora vemos que esta hipótesis no entraña restricción real alguna (salvo en lo que concierne a las hipótesis habituales relativas a la continuidad de las funciones y a la convergencia de la serie), puesto que el sumatorio de 15.13 en realidad nos

* Un conjunto de infinitas pulsaciones existiría en el caso de una cuerda verdaderamente *continua*, pero como una cuerda real se compone fundamentalmente de átomos, existe un límite superior de ω (véase sección 15.4).

da una representación de Fourier de la función de onda siendo, por consiguiente, la expresión más general de la función de onda auténtica.*

Vamos a poner de manifiesto ahora que la expresión 15.12 es el resultado natural de un eficaz procedimiento utilizado con frecuencia para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales, que se conoce como método de *separación de variables*. Comencemos por expresar la solución en la forma

$$\Psi(x, t) \equiv \psi(x) \cdot \chi(t) \quad \cdot (15.14)$$

Es decir, suponemos que las variables son *separables* y, por tanto, que la función de onda completa puede expresarse como producto de dos funciones, una de las cuales presenta únicamente dependencia espacial y la otra únicamente dependencia temporal. No es seguro que podamos siempre determinar tales funciones, pero, afortunadamente, muchas de las ecuaciones en derivadas parciales que aparecen en los problemas de física son separables por lo menos en un sistema de coordenadas; otros (como los que implican la laplaciana) lo son en muchos sistemas de coordenadas. Por decirlo en pocas palabras, la justificación del método de separación de variables, como es el caso de muchas hipótesis que se hacen en física, reside en su éxito para proporcionar soluciones aceptables para un problema. («Aceptable» = «verificable experimentalmente.»)

Llevando $\Psi = \psi\chi$ a la ecuación 15.2, tenemos

$$\chi \frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{\psi}{v^2} \frac{d^2\chi}{dt^2} = 0$$

o sea,

$$\frac{v^2}{\psi} \frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{1}{\chi} \frac{d^2\chi}{dt^2} \quad (15.15)$$

Ahora bien, en vista de como hemos definido $\psi(x)$ y $\chi(t)$, el primer miembro de la ecuación 15.15 será función de x solamente y el segundo miembro función

* EULER demostró en 1748 que la ecuación de onda para una cuerda continua es satisfecha por una función arbitraria de $x \pm vt$, demostrando Daniel BERNOULLI en 1753 que el movimiento de una cuerda es una superposición de sus pulsaciones características. Ambas conclusiones, tomadas a la vez, indicaron que una función arbitraria puede quedar representada por una superposición de funciones trigonométricas. EULER no creía tal cosa, por lo cual él (así como LAGRANGE) rechazó el principio de superposición de Bernoulli. El matemático francés Alexis Claude CLAIRAUT (1713-1765) demostró en un oscuro trabajo en 1754 que las conclusiones de Euler y Bernoulli eran realmente compatibles, pero la cuestión no quedó zanjada hasta que en 1807 FOURIER ofreció su famosa demostración.

sólo de t , lo cual sólo será posible si cada uno de los miembros de la ecuación es igual a una misma constante. Por coherencia con la notación utilizada anteriormente, hagamos esta constante igual a $-\omega^2$. Entonces, tendremos

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{\omega^2}{v^2} \psi = 0 \quad (15.16a)$$

y

$$\frac{d^2\chi}{dt^2} + \omega^2 \chi = 0 \quad (15.16b)$$

La forma de estas ecuaciones nos es familiar y sabemos que las soluciones de las mismas son

$$\psi(x) = Ae^{i(\omega/v)x} + Be^{-i(\omega/v)x} \quad (15.17a)$$

$$\chi(t) = Ce^{i\omega t} + De^{-i\omega t} \quad (15.17b)$$

donde las constantes A, B, C y D están determinadas, desde luego, por las condiciones de contorno. Abreviadamente, podemos escribir como sigue la solución para $\Psi(x, t)$

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \psi(x)\chi(t) \sim \exp[\pm i(\omega/v)x] \exp[\pm i\omega t] \\ &\sim \exp[\pm i(\omega/v)(x \pm vt)] \end{aligned} \quad (15.18)$$

con lo cual queremos dar a entender que la función de onda $\Psi(x, t)$ varía como *combinación lineal* de los términos

$$\begin{aligned} &\exp[i(\omega/v)(x + vt)] \\ &\exp[i(\omega/v)(x - vt)] \\ &\exp[-i(\omega/v)(x + vt)] \\ &\exp[-i(\omega/v)(x - vt)] \end{aligned}$$

Si bien hicimos igual a $-\omega^2$ la *constante de separación* de la ecuación 15.15, nada nos indica en la matemática del problema que exista un valor único de ω ;

por ello, debe de existir un conjunto* de pulsaciones ω_r igualmente aceptables. A cada una de estas pulsaciones corresponderá una función de onda:

$$\Psi_r(x, t) \sim \exp[\pm i(\omega_r/v)(x \pm vt)]$$

Por consiguiente, la solución general no es solamente una combinación lineal de los términos armónicos, sino también una suma extendida a todas las pulsaciones posibles:

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &\sim \sum_r a_r \Psi_r \\ &\sim \sum_r a_r \exp[\pm i(\omega_r/v)(x \pm vt)] \end{aligned} \quad (15.19)$$

La solución general de la ecuación de onda nos lleva a una función de onda muy complicada. De hecho, el número de constantes arbitrarias a_r es infinito. Esta conclusión es de carácter general para las ecuaciones en derivadas parciales; ahora bien, estas infinitas constantes deben satisfacer lo requerido por la física del problema (las *condiciones de contorno*) y, por tanto, podrán calcularse de la misma forma en que se calculan los coeficientes de una serie de Fourier.

Para gran parte de lo que vamos a estudiar será suficiente considerar sólo una de las cuatro combinaciones posibles expresadas en 15.18; es decir, escogeremos una onda que se propague en una dirección particular y con una fase dada. Entonces, podemos escribir, por ejemplo,

$$\Psi_r(x, t) \sim \exp[-i(\omega_r/v)(x - vt)]$$

que es, por supuesto, la r -ésima *componente de Fourier* de la función de onda, vieniendo expresada la solución general por un sumatorio extendido a todas estas componentes. No obstante, todas las componentes son formalmente iguales y podemos tratar de cada una de ellas por separado. Entonces, para simplificar, escribiremos generalmente,

$$\Psi(x, t) \sim \exp[-i(\omega/v)(x - vt)] \quad (15.20)$$

dejando bien establecido que la solución general deberá obtenerse efectuando un sumatorio extendido sobre todas las pulsaciones permitidas por la situación física existente.

* En este punto del desarrollo, el conjunto será, de hecho, infinito, ya que no hemos eliminado ninguna pulsación al imponer las condiciones de contorno.

La ecuación diferencial en $\psi(x)$ suele escribirse

$$\boxed{\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0} \quad (15.21)$$

que es la expresión de la ecuación de onda monodimensional en su forma independiente del tiempo, llamada también *ecuación de Helmholtz*^{*}, y donde

$$k^2 \equiv \frac{\omega^2}{v^2} \quad (15.22)$$

La cantidad k es la llamada *constante de propagación* o *número de onda* (o sea, el número de longitudes de onda por unidad de longitud) y sus dimensiones son $[L^{-1}]$. La longitud de onda λ es la distancia necesaria para que la onda dé una oscilación completa:

$$\lambda = \frac{v}{\omega} = \frac{2\pi v}{\omega}$$

por lo tanto, la relación entre k y λ es

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Por consiguiente, podemos escribir en general

$$\Psi_r(x, t) \sim e^{\pm ik_r(x \pm vt)}$$

o sea, en el caso de la función de onda simplificada,

$$\Psi(x, t) \sim e^{-ik(x-vt)} = e^{i(\omega t - kx)} \quad (15.23)$$

Si superponemos dos ondas progresivas del tipo presentado en 15.23 que se propaguen en sentidos contrarios, y que sean de la misma intensidad (o *amplitud*), tendremos

$$\Psi = \Psi_+ + \Psi_- = A e^{-ik(x+vt)} + A e^{-ik(x-vt)} \quad (15.24)$$

* Hermann von HELMHOLTZ (1821-1894) utilizó en 1859 la ecuación de onda en esta forma en su tratado de las ondas sonoras.

o sea,

$$\begin{aligned}\Psi &= Ae^{-ikx}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \\ &= 2Ae^{-ikx} \cos \omega t\end{aligned}$$

cuya parte real es

$$\Psi = 2A \cos kx \cos \omega t \quad (15.25)$$

Esta onda ya no presenta la propiedad de propagarse; su contorno no se desplaza a través del tiempo. Y, de hecho, en ciertos puntos no existe movimiento alguno; estos puntos son los *nodos* y se deben a la anulación de una onda por la otra. Los nodos de la función de onda expresada por 15.25 están situados en $x=(2n+1)\pi/2k$, siendo n un número entero. Como en las ondas de esta clase existen puntos que permanecen inmóviles, reciben el nombre de *ondas estacionarias*. Las soluciones a los problemas de cuerdas vibrantes presentan esta forma (pero con un término de fase añadido al argumento kx de forma que el coseno se transforma en una función seno que satisface las condiciones de contorno).

15.4 Velocidad de fase, dispersión y atenuación

Según hemos visto, la solución general 15.18 a la ecuación de onda da lugar, aun en el caso monodimensional, a un complicado sistema de combinaciones de factores exponenciales. Con miras a lo que trataremos ulteriormente, ceñiremos nuestra atención a la combinación particular

$$\boxed{(\Psi x, t) = Ae^{i(\omega t - kx)}} \quad (15.26)$$

expresión que describe la propagación hacia la derecha (x creciente) de una onda que posee una pulsación bien definida ω . Una función de onda como ésta puede servir para describir con mucha aproximación determinados casos reales, como son la propagación por el espacio de una onda luminosa monocromática o la de una onda sinusoidal a lo largo de una cuerda muy larga (*infinitamente* larga, para ser exactos).

Si el argumento de la exponencial de 15.26 permanece constante, entonces la función de onda $\Psi(x, t)$ permanecerá, desde luego, también constante. Este argumento recibe el nombre de *fase* φ de la onda,

$$\varphi \equiv \omega t - kx \quad (15.27)$$

y, si trasladamos nuestro punto de observación a lo largo del eje x a tal velocidad que la fase sea la misma en todos los puntos, veremos siempre una onda estacionaria de la misma forma. Esta velocidad V a la que debemos trasladarnos es la llamada *velocidad de fase* de la onda y corresponde a la velocidad a que se propaga el *contorno de la onda*. Para que $\varphi = \text{cte.}$, hagamos

$$d\varphi = 0 \quad (15.28)$$

o sea

$$\omega dt = k dx$$

de donde

$$V = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v \quad (15.29)$$

por lo que la *velocidad de fase* es en este caso precisamente la cantidad que desde el principio presentamos como *velocidad*. Es importante observar que sólo puede hablarse de «velocidad de fase» cuando la función de onda tenga la misma forma a lo largo de toda su longitud. Esta condición debe cumplirse necesariamente para que nos sea posible medir la longitud de onda tomando la distancia entre dos crestas sucesivas *cualesquiera* de la onda (o entre dos puntos correspondientes sucesivos *cualesquiera*). Si la onda cambia de forma en función del tiempo o de la distancia a lo largo de su dirección de propagación, tales medidas no darían siempre los mismos resultados. Como veremos en la sección 15.8, de la única forma en que podemos estar seguros de que la longitud de onda no sea función del tiempo o del espacio (o sea, de que ω sea *pura*) es que el tren de ondas sea de longitud infinita. Cuando no ocurra así, la onda deberá presentar un espectro de pulsaciones, careciendo la velocidad de fase de significado físico en sentido estricto. No obstante, en ocasiones hablaremos de «velocidad de fase» de una onda que no sea realmente de extensión infinita; ello será por conveniencia, aun cuando no sea estrictamente correcto.

Seguidamente, volvamos a la cuerda discreta para examinar las propiedades de la velocidad de fase en este caso. Anteriormente hallamos (15.101) que la pulsación del modo r de la cuerda discreta limitada en ambos extremos viene dada por

$$\omega_r = 2\sqrt{\frac{\tau}{md}} \sin\left(\frac{r\pi}{2(n+1)}\right) \quad (15.30)$$

donde la notación es la misma que en el capítulo 15. Recordemos también que sólo tomamos los valores positivos de las pulsaciones. Entonces, cuando $r=1$,

habrá un nodo en cada extremo y ninguno en medio, y la longitud de la cuerda será de media longitud de onda. De la misma forma, cuando $r=2$ será $L=\lambda$ y, en general, $\lambda_r=2L/r$. Por consiguiente,

$$\frac{r\pi}{2(n+1)} = \frac{r\pi d}{2d(n+1)} = \frac{r\pi d}{2L} = \frac{\pi d}{\lambda_r} = \frac{k_r d}{2} \quad (15.31)$$

y entonces

$$\omega_r = 2\sqrt{\frac{\tau}{md}} \operatorname{sen}\left(\frac{k_r d}{2}\right) \quad (15.32)$$

Al no contener ya esta expresión a n o L , se aplicará igualmente a una cuerda discreta limitada que a una infinita.

Al objeto de estudiar la propagación de una onda en la cuerda discreta, iniciemos una perturbación eligiendo una de las partículas, la *cero*-ésima por ejemplo, y forzándola a moverse según

$$q_0(t) = A e^{i\omega t} \quad (15.33)$$

Cuando la cuerda contenga muchas partículas,* toda pulsación inferior a $2\sqrt{\tau/md}$, y en particular la ω de la ecuación 15.33, será permitida; o sea, será una pulsación propia. Una vez desaparecidos los efectos transitorios y alcanzado el estado estacionario, la velocidad de fase de la onda vendrá dada por**†

$$V = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\tau d}{m}} \frac{|\operatorname{sen}(kd/2)|}{kd/2} = V(k) \quad (15.34)$$

En consecuencia, resulta que la velocidad de fase es función del número de onda; o sea, que V es dependiente de la pulsación. Cuando $V=V(k)$, en un medio dado, se dice que ese medio es *dispersivo* y que la onda presenta *dispersión*. El prisma

* Estrictamente, el número de partículas que necesitamos para este análisis es infinito, pero podemos acercarnos lo que queramos a las condiciones ideales aumentando el número finito de partículas.

** En 15.30 necesitamos que los valores de r sean $\leq n$ (véase 13.94), por lo que automáticamente tendremos $\omega_r \geq 0$ ya que $\operatorname{sen}[r\pi/2(n+1)] \geq 0$ para $0 \leq r \leq n$. Sobre kd ya no existirá esta restricción, por lo que $\operatorname{sen}(kd/2)$ podrá hacerse negativo. Continuaremos considerando únicamente pulsaciones positivas tomando siempre sólo el valor absoluto de $\operatorname{sen}(kd/2)$.

† A esta conclusión llegó BADEN-POWELL en 1841, pero fue William THOMSON (Lord Kelvin) (1824-1907) quien se dio cuenta de toda su importancia en 1881.

óptico simple constituye el ejemplo más conocido de este fenómeno. El índice de refracción del prisma depende de la longitud de onda de la luz incidente (es decir, el prisma es medio dispersivo para la radiación óptica) y, cuando ésta lo atraviesa, la luz se descompone en un espectro de longitudes de onda (o sea, la onda luminosa se *dispersa*).

En 15.34 vemos que, a medida que la longitud de onda crece indefinidamente ($\lambda \rightarrow \infty$ o $k \rightarrow 0$), la velocidad de fase tiende al valor constante

$$V(\lambda \rightarrow \infty) = \sqrt{\frac{\tau d}{m}} \quad (15.35)$$

y que, en cualquier otro caso, es $V = V(k)$, siendo el medio dispersivo. Advirtamos que la velocidad de fase de la cuerda continua es (véase 15.2)

$$V_{\text{cont.}} = v = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \quad (15.36)$$

y como el valor m/d de la cuerda discreta se corresponde con ρ de la continua, las velocidades de fase en ambos casos son iguales en el límite de longitud de onda infinita (pero *sólo* en este límite). Esta conclusión es razonable puesto que cuando λ se hace grande en comparación con d , las propiedades de la onda son menos sensibles a la separación entre las partículas y, en el límite, podrá anularse d sin afectar a la velocidad de fase.

En 15.32, la restricción sobre r es que $1 \leq r \leq n$. Entonces, como $k_r = r\pi/L$, vemos que el valor máximo de k es

$$k_{\max} = \pi/d \quad (15.37)$$

al que, según 15.34, corresponde una pulsación $2\sqrt{\tau/md}$. ¿Qué ocurrirá cuando forcemos a la cuerda a vibrar con una pulsación *superior* a $2\sqrt{\tau/md}$? Para ello, supongamos que k sea complejo y examinemos las consecuencias

$$k \equiv \kappa - i\beta, \quad \kappa, \beta > 0 \quad (15.38)$$

La expresión de ω (15.32) se hará entonces

$$\begin{aligned} \omega &= 2\sqrt{\frac{\tau}{md}} \operatorname{sen} \frac{d}{2} (\kappa - i\beta) = 2\sqrt{\frac{\tau}{md}} \left[\operatorname{sen} \frac{dk}{2} \cos \frac{i\beta d}{2} - \cos \frac{kd}{2} \operatorname{sen} \frac{i\beta d}{2} \right] \\ &= 2\sqrt{\frac{\tau}{md}} \left[\operatorname{sen} \frac{kd}{2} \cosh \frac{\beta d}{2} - i \cos \frac{kd}{2} \operatorname{senh} \frac{\beta d}{2} \right] \end{aligned} \quad (15.39)$$

Si la pulsación ha de ser real, deberá anularse la parte imaginaria de esta expresión, por lo cual deberá ser $\cos(\kappa d/2)=0$ o $\operatorname{senh}(\beta d/2)=0$. En este último caso, habría de ser $\beta=0$, lo que se opone a la condición de que k sea complejo. En consecuencia,

$$\cos \frac{\kappa d}{2} = 0 \quad (15.40)$$

en cuyo caso, será también

$$\operatorname{sen} \frac{\kappa d}{2} = 1 \quad (15.41)$$

y la expresión de la pulsación se transformará en

$$\omega = 2\sqrt{\frac{\tau}{md}} \cosh \frac{\beta d}{2} \quad (15.42)$$

Concluimos, entonces, en que cuando $\omega \leq 2\sqrt{\tau/md}$, el número de onda k es real y la relación entre ω y k viene dada por 15.32; mientras que cuando $\omega > 2\sqrt{\tau/md}$, k es complejo, teniendo su parte real $\kappa = \pi/d$, impuesto por 15.40, y su parte imaginaria β el dado por 15.42. La situación se representa en la figura 15-3.

¿Qué significado físico tiene un número de onda complejo? Hemos partido de una función de onda de la forma

$$\Psi = A e^{i(\omega t - kx)}$$

pero si $k = \kappa - i\beta$, Ψ podrá escribirse

$$\Psi = A e^{-\beta x} e^{i(\omega t - \kappa x)} \quad (15.43)$$

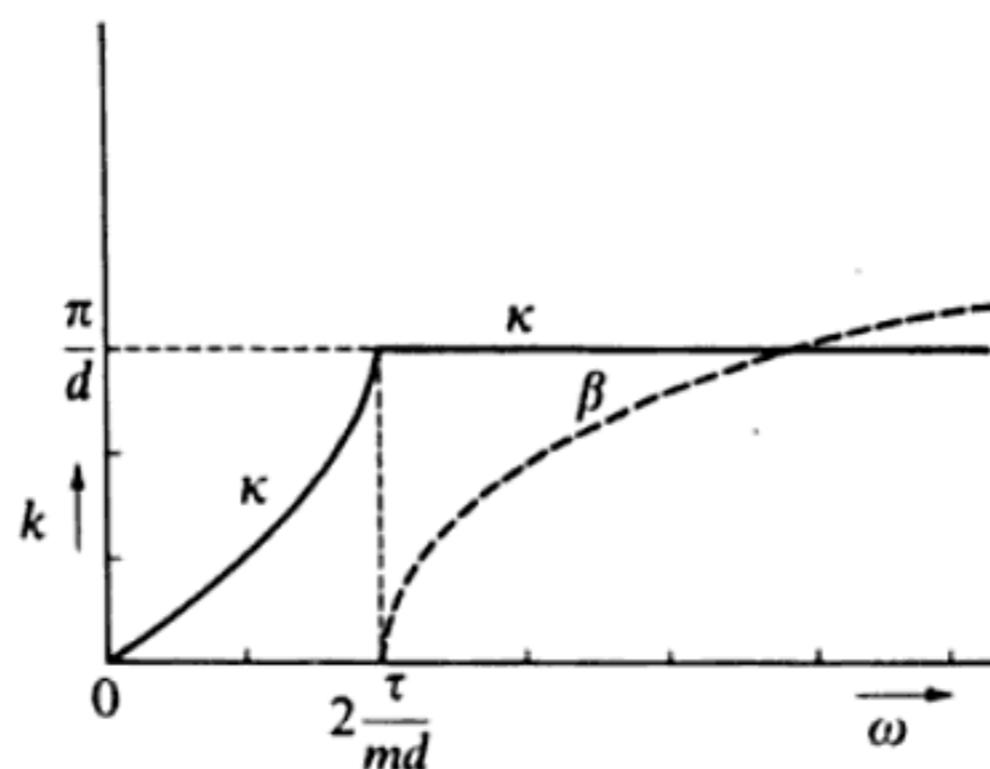


FIG. 15-3

representando el coeficiente $\exp(-\beta x)$ un amortiguamiento o *atenuación* de la onda que aumenta con la distancia x . Resulta, por consiguiente, que la onda se propaga sin attenuación para $\omega \leq 2\sqrt{\tau/md}$ (esta región recibe el nombre de *banda pasante de pulsaciones*) y que la attenuación aparece para $\omega_c = 2\sqrt{\tau/md}$ (la llamada pulsación *crítica o de corte**), aumentando con la frecuencia.

El significado físico de las partes real e imaginaria de k es ahora evidente: β es el coeficiente de attenuación** (y existe sólo si $\omega > \omega_c$), mientras que κ es el número de onda en el sentido de que la velocidad de fase V viene dada por

$$V' = \frac{\omega}{\kappa} = \frac{\omega}{\operatorname{Re} k} \quad (15.44)$$

en lugar de por $V = \omega/k$. Por supuesto, cuando k sea real, estas expresiones de V y V' serán iguales.

En este ejemplo se recalca el hecho de que la definición fundamental de velocidad de fase se basa en la condición de constancia de la fase y *no* en la del cociente ω/k . Así, pues, en general, la velocidad de fase V y la llamada velocidad de onda v serán cantidades diferentes. Obsérvese también que si ω es real y el número de onda k complejo, la *velocidad de onda v* deberá ser también compleja para que el producto kv nos dé un valor real de la pulsación mediante la relación $\omega = kv$. Por otra parte, la *velocidad de fase*, que se deduce de la condición de que $\varphi = cte.$, es siempre necesariamente una cantidad real.

En lo que acabamos de tratar hemos supuesto que el sistema es *conservativo*, razonando que para ello es preciso que ω sea real.*** Hallamos que cuando ω es superior a la pulsación crítica ω_c , aparece la attenuación y el número de onda se hace complejo. Si retiramos la condición de que el sistema sea conservativo, la pulsación podrá ser *compleja* y el número de onda *real*; en cuyo caso la onda estará amortiguada en el *tiempo*, en lugar de estarlo en el *espacio* (Véase problema 15-1.) La attenuación en el espacio (ω real, k complejo) es de importancia especial en el caso de las ondas progresivas, mientras que la attenuación en el tiempo (ω complejo, k real) es importante para las ondas estacionarias.

Aunque en la cuerda discreta aparezca la attenuación cuando $\omega > \omega_c$, el sistema continuará siendo conservativo y no se perderá ninguna energía. Esta situación aparentemente anómala es el resultado de que la fuerza aplicada a la partícula para iniciar la onda progresiva se encuentre (después de alcanzarse el estado

* La aparición de las pulsaciones de corte fue descubierta por Lord KELVIN en 1881.

** La razón por la cual hemos escrito $k = \kappa - i\beta$ en vez de $k = \kappa + i\beta$ en 15.38 queda ahora clara; si fuese $\beta > 0$ en este último caso, la amplitud de la onda aumentaría entonces sin límites, en lugar de disminuir tiendiendo a cero.

*** Véase la discusión del párrafo que sigue a la ecuación 13.52 en la sección 13.6.

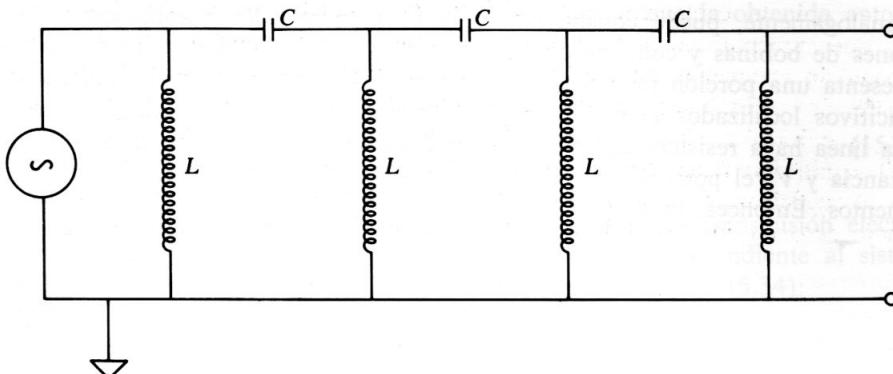


FIG. 15-4

estacionario en la onda atenuada) desfasada 90° exactamente respecto de la velocidad de la partícula, con lo que la potencia transmitida $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ será nula.

En todo lo que hemos estudiado acerca de la cuerda discreta, hemos supuesto tácitamente una situación ideal, en la cual el sistema carecía de pérdidas y, a consecuencia de ello, encontramos que hay atenuación cuando $\omega > \omega_c$, desapareciendo ésta para $\omega < \omega_c$. Desde luego, todo sistema real tiene pérdidas, por lo que, en realidad existirá cierta alteración incluso cuando $\omega < \omega_c$. En la sección siguiente volveremos sobre este punto y faremos algunas observaciones cualitativas relativas a los sistemas *disipativos*.

15.5 Analogías eléctricas. Circuitos filtro

La aparición del efecto de filtrado y de la pulsación de corte en la propagación de ondas a lo largo de una cuerda discreta posee una analogía importante en la teoría de las redes eléctricas. Dado que la impedancia que presenta una inductancia L a una corriente eléctrica alterna es proporcional a ωL y que la presentada por una capacidad C es proporcional a $1/\omega C$, será posible, disponiendo adecuadamente bobinas y condensadores, bloquear a elección las altas o las bajas frecuencias y dejar paso a las otras.* Por ejemplo, un filtro pasa-alta puede construirse como se indica en la figura 15-4, en que las frecuencias bajas son derivadas a través de las bobinas, mientras que las altas se transmiten a través de los condensadores.

* Oliver HEAVISIDE (1850-1925) se dio cuenta de este hecho en 1887, pero no fue hasta 1900 cuando PUPIN construyó con éxito un filtro pasa-baja. En 1906 CAMPBELL construyó un filtro pasa-alta.

Análogamente, puede construirse un filtro pasa-baja intercambiando las posiciones de bobinas y condensadores. Analicemos este caso. En la figura 15-5 se representa una porción de una línea de transmisión con elementos inductivos y capacitivos localizados. (Por el momento, despreciaremos la posibilidad de que en la línea haya resistencias.) Sea I_n la intensidad de corriente en la n -ésima inductancia y V_n el potencial respecto de tierra del punto que separa los n -ésimos elementos. Entonces, tendremos,

$$V_n = \frac{Q_n}{C} \quad (15.45)$$

y

$$\begin{aligned} L \frac{dI_n}{dt} &= V_{n-1} - V_n \\ &= \frac{Q_{n-1}}{C} - \frac{Q_n}{C} \end{aligned} \quad (15.46)$$

Asimismo, podemos escribir

$$\frac{dQ_n}{dt} = I_n - I_{n+1} \quad (15.47)$$

Derivando 15.46 respecto del tiempo y sustituyendo después el valor de dQ_n/dt dado por 15.47; obtendremos

$$\frac{d^2I_n}{dt^2} = \frac{1}{LC} (I_{n-1} - 2I_n + I_{n+1}) \quad (15.48)$$

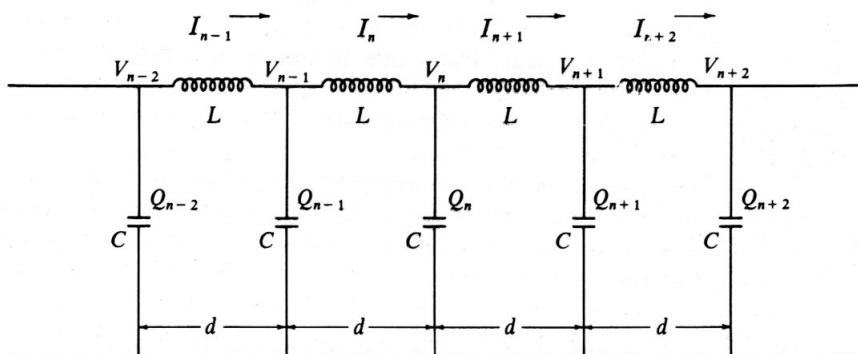


FIG. 15-5

que es una ecuación exactamente de la misma forma que la obtenida anteriormente para la cuerda discreta (13.81):

$$\frac{d^2 q_n}{dt^2} = \frac{\tau}{md} (q_{n-1} - 2q_n + q_{n+1}) \quad (15.48a)$$

Por consiguiente, la solución de la ecuación de la línea de transmisión eléctrica de parámetros localizados debe ser equivalente a la correspondiente al sistema mecánico vibratorio. Entonces, la velocidad de fase será (cfr. 15.34):

$$V(k) = \frac{d}{\sqrt{LC}} \frac{|\operatorname{sen}(kd/2)|}{kd/2} \quad (15.49)$$

donde d será la separación entre los elementos de la línea. La velocidad de propagación para longitudes de onda muy grandes será, por tanto d/\sqrt{LC} .

Según hemos visto en la sección anterior, la pulsación de corte es igual al doble de la raíz cuadrada del factor común del segundo miembro de 15.48; así, pues,

$$\omega_c = \frac{2}{\sqrt{LC}} \quad (15.50)$$

de forma que se transmiten todas las pulsaciones inferiores a ω_c y las superiores a la misma resultan fuertemente atenuadas.

La curva de k en función de ω en el caso de la línea de transmisión ideal de elementos $L-C$ localizados es la misma que la de la figura 15-3. No obstante, si consideramos un caso más real en que la línea presente resistencia (y, por tanto, pérdidas), además de inductancia y capacidad, la aparición de la pulsación de corte ya no será tan nítida y la curva presentará un aspecto general como el que se muestra en la figura 15.6.

Debemos recalcar que la aparición de la pulsación de corte es consecuencia de la naturaleza *discreta* de los elementos inductivos y capacitivos. Si éstos se encontraran distribuidos de forma continua a lo largo de la línea, resultaría una situación similar a la de la cuerda continua. Como la velocidad de propagación de las longitudes de onda largas a lo largo de la línea de parámetros localizados es d/\sqrt{LC} , cabrá esperar que la velocidad de propagación en la línea de elementos distribuidos uniformemente sea $1/\sqrt{L'C'}$, donde L' y C' son la inductancia y la capacidad por unidad de longitud respectivamente. (Véase problema 15-2.)

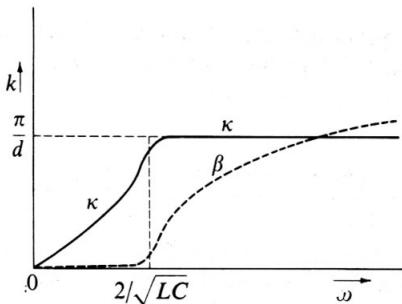


FIG. 15-6

15.6 Velocidad de grupo y paquetes de ondas

En la sección 6.4 probamos que la superposición de distintas soluciones de una ecuación diferencial lineal continúa siendo una solución a la ecuación y, en realidad, formamos la solución general del problema de las pequeñas oscilaciones (véase ecuación 13.55) sumando todas las soluciones particulares. Podemos suponer, por tanto, que tenemos dos soluciones casi iguales a la ecuación de onda representadas por las funciones de onda Ψ_1 y Ψ_2 , cada una de las cuales tiene la misma amplitud,

$$\left. \begin{array}{l} \Psi_1(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx)} \\ \Psi_2(x, t) = Ae^{i(\Omega t - Kx)} \end{array} \right\} \quad (15.51)$$

pero cuyas pulsaciones y números de onda difieren sólo en pequeñas cantidades:

$$\left. \begin{array}{l} \Omega = \omega + \Delta\omega \\ K = k + \Delta k \end{array} \right\} \quad (15.52)$$

Si formamos la solución compuesta por la suma de Ψ_1 y Ψ_2 , tendremos

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \Psi_1 + \Psi_2 = A[\exp\{i\omega t\} \exp\{-ikx\} \\ &\quad + \exp\{i(\omega + \Delta\omega)t\} \exp\{-i(k + \Delta k)x\}] \\ &= A \left[\exp\left\{i\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right\} \exp\left\{-i\left(k + \frac{\Delta k}{2}\right)x\right\} \right] \\ &\quad \cdot \left[\exp\left\{-i\left(\frac{(\Delta\omega)t - (\Delta k)x}{2}\right)\right\} + \exp\left\{i\left(\frac{(\Delta\omega)t - (\Delta k)x}{2}\right)\right\} \right] \end{aligned}$$

El segundo corchete es precisamente el doble del coseno del argumento de la exponencial y la parte real del primer corchete es también un coseno. Entonces, la parte real de la función de onda será

$$\Psi(x, t) = 2A \cos\left[\frac{(\Delta\omega)t - (\Delta k)x}{2}\right] \cos\left[\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t - \left(k + \frac{\Delta k}{2}\right)x\right] \quad (15.53)$$

Esta expresión es similar a la obtenida para el problema de los osciladores débilmente acoplados (véase sección 13.3), donde encontramos una amplitud lentamente variable, correspondiente al término

$$2A \cos\left[\frac{(\Delta\omega)t - (\Delta k)x}{2}\right]$$

el cual modula a la función de onda. La oscilación principal tiene lugar a una pulsación $\omega + (\Delta\omega/2)$ que, según nuestra hipótesis de que $\Delta\omega$ es pequeño, difiere poquísimo de ω . Tal como se representa en la figura 15-7, la amplitud variable da origen a *latidos*.

La velocidad U (*llamada velocidad de grupo*^{*}) a la que se propagan las modulaciones (o grupos de ondas) vendrá dada por la condición de que la fase del término de amplitud sea constante. Así,

$$U = \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \quad (15.54)$$

En un medio no dispersivo $\Delta\omega/\Delta k = V$, por lo que las velocidades de grupo y de fase serán iguales.^{**} Sin embargo, cuando haya dispersión, U y V serán distintas.

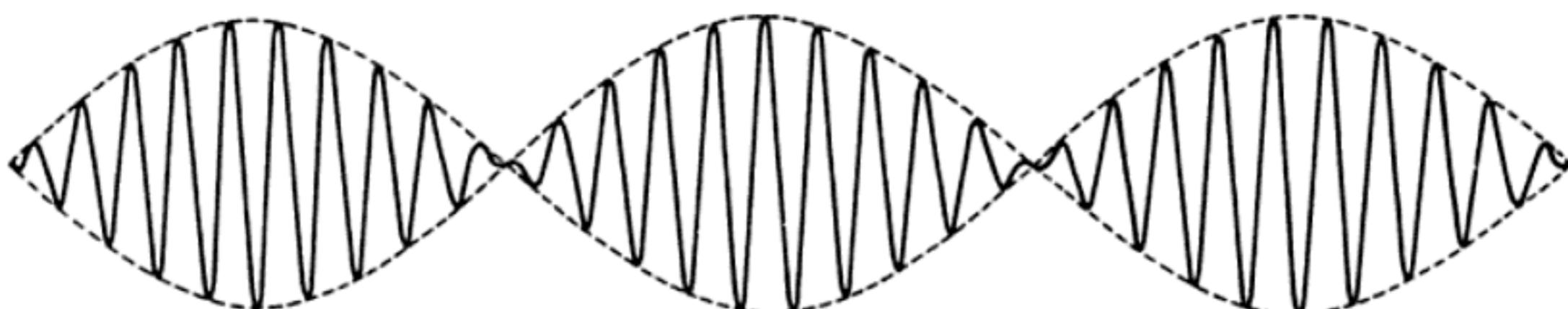


FIG. 15-7

* El concepto de velocidad de grupo se debe a HAMILTON (1839); la distinción entre velocidades de fase y de grupo fue puesta en claro por Lord RAYLEIGH (*Theory of sound*, 1.^a edición, 1877; véase Ra94).

** Esto se pone de manifiesto explícitamente en 15.61.

Hasta aquí, sólo hemos considerado la superposición de dos ondas. Si queremos superponer un sistema de n ondas, deberemos escribir

$$\Psi(x, t) = \sum_{r=1}^n A_r \exp[i(\omega_r t - k_r x)] \quad (15.55)$$

donde las A_r representan las amplitudes de las ondas individuales. En caso de que n se haga muy grande (infinito, estrictamente), las pulsaciones se distribuirán de forma continua y podremos sustituir el sumatorio por una integral, obteniendo*

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i(\omega t - kx)} dk \quad (15.55a)$$

donde el coeficiente $A(k)$ representa la distribución de amplitudes de las ondas componentes de diferentes pulsaciones; es decir, la *distribución espectral* de las ondas. Los casos más interesantes tienen lugar cuando $A(k)$ posee un valor importante únicamente en las proximidades de un número de onda particular, k_0 , por ejemplo, y se hace tendente a cero para los valores de k situados fuera de un entorno de k_0 , representado por $k_0 + \Delta k$. Entonces la función de onda podrá escribirse

$$\Psi(x, t) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} A(k) e^{i(\omega t - kx)} dk \quad (15.56)$$

Toda función de este tipo recibe el nombre de *paquete de ondas*.** El concepto de velocidad de grupo sólo es aplicable a aquellos casos representables mediante un paquete de ondas; o sea, a funciones de onda que contienen un pequeño intervalo (o *banda*) de pulsaciones.

Para el caso del paquete de ondas representado por 15.56, restringiremos la contribución de las pulsaciones a aquellas situadas en las proximidades de $\omega(k_0)$. Por consiguiente, podemos desarrollar $\omega(k)$ en torno de $k=k_0$:

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0} \cdot (k - k_0) + \dots \quad (15.57)$$

* Previamente, hemos hecho la hipótesis tácita de que $k \geq 0$. Sin embargo, la definición de k es $k^2 = \omega^2/v^2$ (véase 15.22), por lo cual no existe matemáticamente razón alguna para que no pueda ser también $k < 0$. Por consiguiente, podemos ampliar la región de integración para incluir $-\infty < k < 0$, sin dificultades matemáticas. Este procedimiento permite identificar la representación integral de $\Psi(x, t)$ con una integral de Fourier (véase sección 15.7).

** La expresión «paquete de ondas» se debe a Erwin SCHRÖDINGER.

que podemos poner, abreviadamente,

$$\omega = \omega_0 + \omega'_0(k - k_0) + \dots \quad (15.57a)$$

El argumento de la exponencial que aparece en la expresión integral del paquete de ondas se hace, aproximadamente,

$$\omega t - kx = (\omega_0 t - k_0 x) + \omega'_0(k - k_0)t - (k - k_0)x$$

donde hemos sumado y restado el término k_0x . Entonces,

$$\omega t - kx = (\omega_0 t - k_0 x) + (k - k_0)(\omega'_0 t - x) \quad (15.58)$$

y la expresión 15.56 se transforma en

$$\Psi(x, t) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} A(k) \exp[i(k - k_0)(\omega'_0 t - x)] \exp[i(\omega_0 t - k_0 x)] dk \quad (15.59)$$

El paquete de ondas, cuando se expresa de esta forma, puede interpretarse como sigue. La cantidad

$$A(k) \exp[i(k - k_0)(\omega'_0 t - x)]$$

constituye una amplitud efectiva la cual, dados los pequeños valores que adquiere $(k - k_0)$, varía muy lentamente con el tiempo y describe el movimiento del paquete de ondas (o envolvente de un grupo de ondas), de la misma forma que el término

$$2A \cos\left[\frac{(\Delta\omega)t - (\Delta k)x}{2}\right]$$

describía la propagación del paquete formado por dos ondas superpuestas. La condición de que la fase del término de amplitud sea constante nos lleva ahora a

$$U = \omega'_0 = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k=k_0} \quad (15.60)$$

como expresión de la velocidad de grupo y, como antes afirmamos, sólo cuando el medio sea dispersivo será U diferente de la velocidad de fase V . Para poner esto de manifiesto de forma explícita, escribamos 15.60 así

$$\frac{1}{U} = \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_0$$

donde el subíndice cero significa «particularizada en $k=k_0$ o, lo que es equivalente, en $\omega=\omega_0$ ». Como $k=\omega/v$,

$$\frac{1}{U} = \left[\frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega}{v} \right) \right]_0 = \frac{v_0 - (\omega dv/d\omega)_0}{v_0^2}$$

Entonces,

$$U = \frac{v_0}{1 - \frac{\omega_0}{v_0} \left(\frac{dv}{d\omega} \right)_0} \quad (15.61)$$

Cuando el medio sea no dispersivo, será $v=V=\text{cte.}$, por lo que $dv/d\omega=0$ (véase 15.29); de aquí, $U=v_0=V$.

La cantidad restante de 15.59, $\exp[i(\omega_0 t - k_0 x)]$, varía rápidamente con el tiempo y, si fuera el único factor en Ψ , describiría un tren de ondas infinito que oscila con una pulsación ω_0 y viaja con una velocidad de fase $V=\omega_0/k_0$.

Debemos advertir que un tren de ondas infinito de una pulsación dada no puede transmitir una señal o llevar información de un punto a otro. Esto sólo podrá hacerse cuando sea posible emitir e interrumpir un tren de ondas, imprimiendo así una señal sobre la onda; en esto consiste la formación de un paquete de ondas. Como consecuencia de este hecho, es la velocidad de grupo, y no la de fase, la velocidad a la que puede transmitirse una señal.*† En la sección 15.8

* La velocidad de grupo corresponde a la velocidad de la señal sólo en medios no dispersivos (en cuyo caso las velocidades de fase, de grupo y de la señal son las tres iguales) y en medios de dispersión normal (en cuyo caso la velocidad de fase es superior a las velocidades de grupo y de la señal). En los medios de dispersión *anómala*, la velocidad de grupo puede ser superior a la velocidad de la señal (¡Pudiendo, de hecho, hacerse incluso negativa o infinita!) Aquí sólo haremos la observación de que un medio para el que el número de onda k sea complejo, exhibe atenuación, diciéndose que la dispersión es *anómala*. Cuando k sea real, no habrá atenuación, siendo la dispersión *normal*. A causa de un histórico error de concepto, sabemos ahora que la llamada dispersión anómala es, de hecho normal (o sea, corriente), mientras que la dispersión normal es anómala (o sea, rara). Los efectos dispersivos son particularmente importantes en los fenómenos ópticos y electromagnéticos.

† Arnold SOMMERFELD y León BRILLOUIN realizaron en 1914 detallados estudios de las interrelaciones entre las velocidades de fase, de grupo y de la señal. En el texto de Brillouin (Br60) se ofrecen traducciones al inglés de estos trabajos.

aclararemos este punto, cuando examinemos la propagación de la energía a través de un retículo o de una cuerda discreta.

15.7 Representación de paquetes de ondas mediante integrales de Fourier

A lo largo de todo lo tratado en la sección anterior, estaba implícito que considerábamos la descripción de la función de onda correspondiente a un paquete de ondas del que conocíamos la distribución de la amplitud $A(k)$. Por el contrario, pudiera ocurrir que deseáramos obtener la función de distribución $A(k)$ que describa una función de onda dada. Este problema es similar al del cálculo de la serie de Fourier que representa a una función dada. Para este caso, vimos que (véase 14.93) para $-\pi < x < \pi$,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} (a_r \cos rx + b_r \sin rx) \quad (15.62)$$

donde (véase 14.96):

$$a_r = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos rx \, dx, \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (15.63a)$$

$$b_r = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin rx \, dx, \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad (15.63b)$$

Para nuestros propósitos actuales, comprobaremos que es más conveniente expresar $f(x)$ en forma de serie exponencial compleja,

$$f(x) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_r e^{-irx}, \quad -\pi < x < \pi \quad (15.64)$$

Multiplicando esta expresión por $\exp(isx)$ e integrando en el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$, encontraremos (véase problema 15-5):

$$c_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) e^{isx} \, dx, \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (15.65)$$

Ampliemos ahora el intervalo fundamental desde $\pm\pi$ hasta $\pm L$ siguiendo el mismo procedimiento que en 14.102. En 15.65 cambiemos la variable muda x por la $\pi u/L$, y en 15.64 hagamos la sustitución $x \rightarrow \pi x/L$. Entonces,

$$c_r = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} f(u) \exp\left(i \frac{r\pi u}{L}\right) du \quad (15.66)$$

y

$$f(x) = \frac{1}{2L} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{-L}^{+L} f(u) \exp\left[-i \frac{r\pi}{L} (x - u)\right] du \quad (15.67)$$

Parece ahora plausible que, mediante el paso al límite adecuado, podamos ampliar todavía más nuestro intervalo desde $\pm L$ hasta $\pm \infty$. Para que ello sea posible, hemos de imponer la condición de que, como antes, $f(x)$ sea uniforme y tenga solamente un número finito de discontinuidades finitas en el intervalo $-\infty < x < \infty$, y además que sea absolutamente convergente (es decir, que exista la integral de $|f(x)|$ entre $-\infty$ y $+\infty$). En tales condiciones, haciendo $\Delta k \equiv \pi/L$, $f(x)$ se hará

$$f(x) = \lim_{\substack{L \rightarrow \infty \\ \Delta k \rightarrow 0}} \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{-ir(\Delta k)x} \Delta k \int_{-L}^{+L} f(u) e^{ir(\Delta k)u} du \quad (15.68)$$

En el límite, $\Delta k \rightarrow dk$ y $r\Delta k \rightarrow k$, por lo que, según la definición de integral como límite de una suma, o sea,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(k) dk \equiv \lim_{\Delta k \rightarrow 0} \sum_{r=-\infty}^{\infty} g(r\Delta k) \Delta k,$$

la suma extendida a los valores de r que aparece en 15.68 se transformará en una integral:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} dk \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{iku} du \quad (15.69)$$

La función $f(x)$ queda expresada, por tanto, en forma de *integral de Fourier*, la cual es doble e infinita y se extiende sobre las variables mudas k y u . Debe advertirse que no hemos *demonstrado* que la integral que se expresa en 15.69

describa realmente a la función $f(x)$; únicamente hemos puesto de manifiesto que dicha representación es plausible.*

Comparando 15.55a (para $t=0$) con 15.69, vemos que la integral

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{iku} du \quad (15.70)$$

representa la distribución espectral de la función $f(x)$ [si añadimos el coeficiente constante $(2\pi)^{-\frac{1}{2}}$]. $A(k)$ recibe el nombre de *transformada de Fourier* de $f(u)$ y a veces se escribe $F(k)$. Entre $f(u)$ y $A(k)$ existe la relación inversa, puesto que

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k)e^{-ikx} dk \quad (15.71)$$

Vimos anteriormente (véanse 14.102 y 14.103) que cuando $f(x)$ sea función par de x , la serie de Fourier se compondrá únicamente de cosenos y cuando $f(x)$ sea impar, sólo quedarán senos en la serie. En el caso de la representación integral, la situación es parecida y, lo que es más, si $f(x)$ es real, resultará, tomando las partes reales de las integrales de 15.69,

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos kx dk \int_0^{\infty} f(u) \cos ku du, \quad f(x) \text{ par} \quad (15.72a)$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin kx dk \int_0^{\infty} f(u) \sin ku du, \quad f(x) \text{ impar} \quad (15.72b)$$

Debemos hacer notar que, en todas estas discusiones, hemos tomado k arbitrariamente como cantidad fundamental, lo que resulta especialmente útil para el estudio de la variación *espacial* de la función de onda. Otra posibilidad, igualmente válida, y particularmente adecuada para estudiar la variación temporal de la función de onda, sería expresar las distintas cantidades en función de la pulsación ω . En tal caso, la función de distribución $A(\omega)$ recibe el nombre de distribución *espectral*. Seguiremos empleando el término «espectral» aún en los casos en que prefiramos escribir A como función $A(k)$ del número de onda.

* Una demostración del teorema de la integral de Fourier puede verse, por ejemplo, en CHURCHILL (Ch41, pág. 89), DAVIS (Da63, pág. 320), o bien en MORSE y FESHBACH (Mo53, página 458).

Cuando queramos examinar la variación *temporal* de la función $f(x, t)$ en una posición fija x , las ecuaciones correspondientes a las 15.70 y 15.71 serán

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad (15.73a)$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (15.73b)$$

Por consiguiente, cuando $A(\omega)$ sea conocida, podrá obtenerse siempre $f(t)$ mediante una *inversión de Fourier*; análogamente, $A(\omega)$ podrá calcularse a partir del conocimiento de $f(t)$.

◆ Ejemplo 15.7 Representaciónpectral de un paquete de ondas

Examinemos el cálculo de la distribución espectral necesaria para representar una porción finita de un tren de ondas que oscila con una sola pulsación $\omega_0 = k_0 v$. O sea, las oscilaciones comienzan en un cierto instante para finalizar en un instante posterior. Entonces, la función de onda será

$$\Psi(x, t) = \begin{cases} \cos(k_0 x - \omega_0 t) = \cos k_0(x - vt), & |x - vt| < L \\ 0, & |x - vt| > L \end{cases} \quad (1)$$

donde el tiempo total de oscilación del dispositivo que produce la perturbación es $2L/v$. En la figura 15-8 se representa este pulso oscilatorio.

Al ser real la función de onda, la función de distribución deberá serlo también, pudiéndose escribir 15.70 en la forma

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos ku du \quad (2)$$

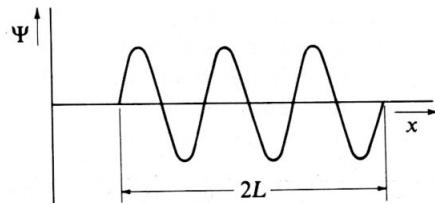


FIG. 15-8

Entonces,

$$\Psi(x, t) = \cos k_0(x - vt) = f(x - vt) = f(u) \quad (3)$$

o sea,

$$f(u) = \cos k_0 u, \quad u \equiv x - vt \quad (4)$$

y como $f(u)$ es función par, podremos escribir

$$A(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^L \cos k_0 u \cos ku du \quad (5)$$

Entonces, utilizando la igualdad

$$\cos k_0 u \cos ku = \frac{1}{2} [\cos(k_0 + k)u + \cos(k_0 - k)u] \quad (6)$$

obtendremos

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin(k_0 + k)L}{k_0 + k} + \frac{\sin(k_0 - k)L}{k_0 - k} \right] \quad (7)$$

Para los números de onda próximos a k_0 , predominará el segundo sumando, por lo cual tendremos aproximadamente

$$A(k) \propto \frac{\sin(k_0 - k)L}{k_0 - k}, \quad k \approx k_0 \quad (8)$$

En la figura 15-9 se representa esta función, la cual presenta un gran máximo en $k=k_0$ con otros máximos secundarios cuyos valores disminuyen a medida que crece $|k_0-k|$.

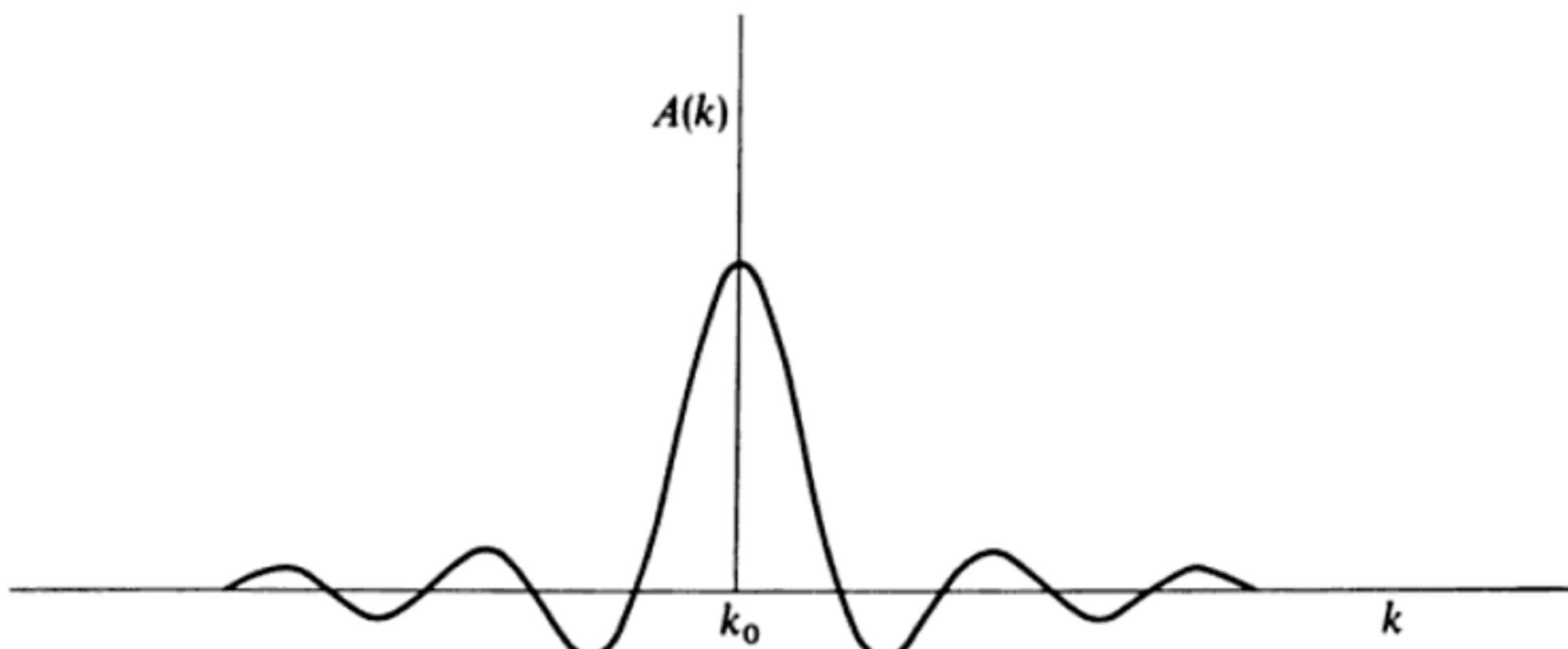


FIG. 15-9

La expresión 8 y la figura 15-9 nos dan las *amplitudes* de las ondas de números de onda k que deben superponerse con el fin de generar el pulso finito que se muestra en la figura 15-8. Obsérvese que las amplitudes negativas simplemente significan que las ondas correspondientes están en *oposición de fase*. La *intensidad* $I(k)$ de las ondas viene dada por el cuadrado de $A(k)$:

$$I(k) = |A(k)|^2 \propto \left| \frac{\sin(k_0 - k)L}{k_0 - k} \right|^2, \quad k \approx k_0 \quad (9)$$

Esta función se representa en la figura 15-10, donde los máximos secundarios (curva de trazo discontinuo) se han aumentado diez veces para poder observar con mayor claridad dichas zonas de la curva.

En la expresión 8 se ve que $A(k)$ es nula para valores de k tales que

$$k_0 - k = \frac{r\pi}{L}, \quad r = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (10)$$

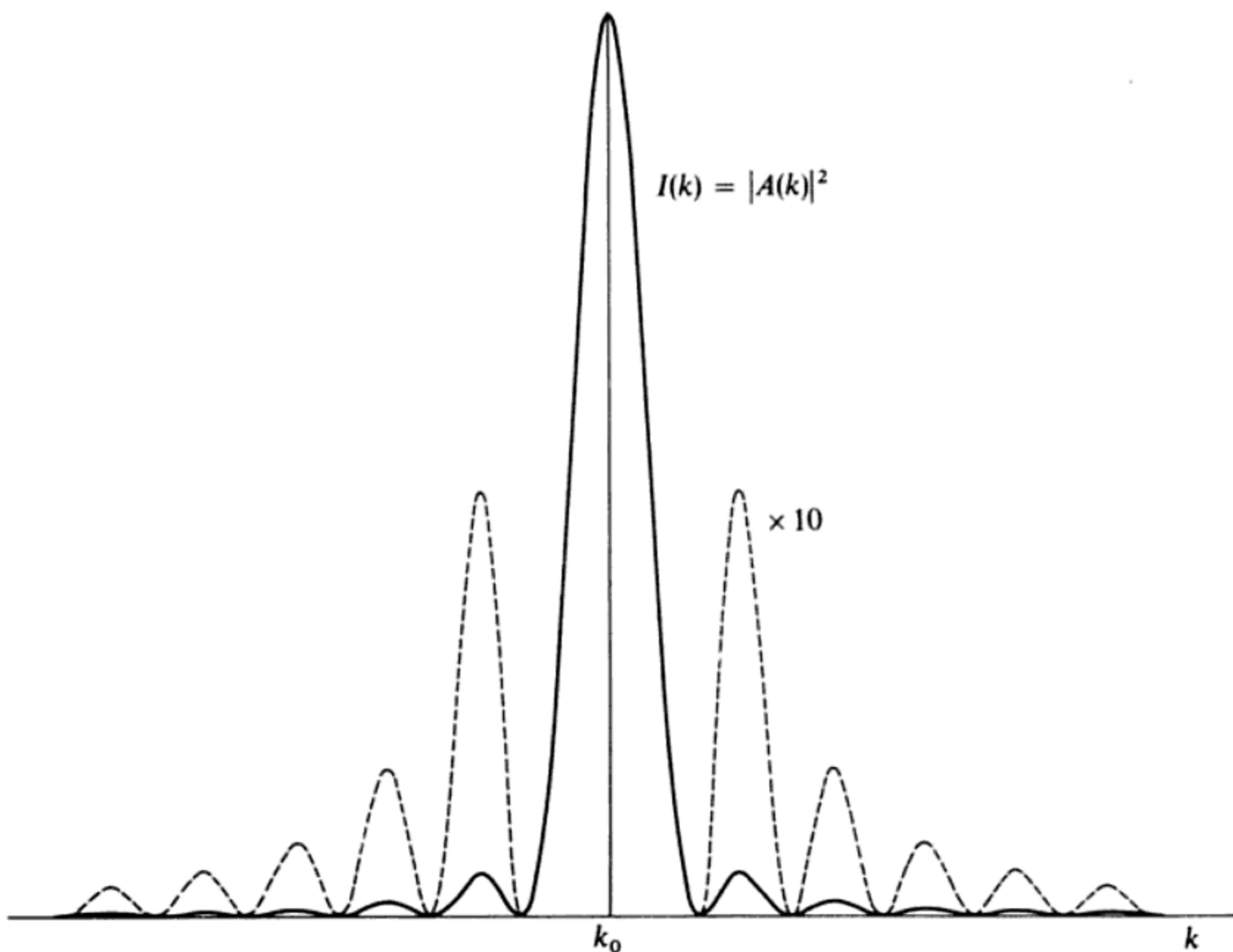


FIG. 15-10

Así, pues, la principal contribución a $A(k)$ se produce en la zona próxima a $k=k_0$; o sea, para

$$k = k_0 \pm \Delta k \quad (11)$$

donde

$$\Delta k \cong \frac{\pi}{L} \quad (12)$$

Entonces, al ser $2L$ la longitud del pulso y representando por Δx esta longitud, tendremos

$$\Delta k \Delta x \cong 2\pi \quad (13)$$

Esta conclusión reviste gran importancia e interés, puesto que implica el hecho de que cuanto más acortemos la longituu del pulso (o sea, que Δx decrezca), deberemos incluir más y más pulsaciones (o sea, que Δk aumente) para conseguir una representación de Fourier de la función de onda. Por el contrario, cuando permitamos que el pulso se haga muy largo, la distribución espectral se hará sumamente pura (o sea, sólo harán falta las pulsaciones comprendidas en un intervalo estrecho para representar el pulso). Esta conclusión puede establecerse en otros términos diciendo que cuando la pulsación del pulso esté bien definida (Δk pequeño), no será posible entonces localizar el pulso en el espacio (o sea, Δx es grande). Cuando deseemos localización en el espacio, la pulsación no estará bien definida. Toda onda compuesta de una sola pulsación (o sea, una onda monocromática) deberá ser, por tanto, de extensión infinita. En consecuencia, una onda auténticamente monocromática es una idealización que no puede conseguirse nunca en la realidad.*

En la física moderna la relación entre Δk y Δx se expresa mediante el *principio de la incertidumbre de Heisenberg*, el cual establece que para dos variables dinámicas conjugadas** P y Q ,

$$\Delta P \Delta Q \cong h \quad (14)$$

donde h es la constante de Planck. Así, pues, como la posición (x) y el ímpetu (p) son variables conjugadas, tendremos

$$\Delta p \Delta x \cong h \quad (15)$$

Ahora bien, según la hipótesis de De Broglie, el ímpetu asociado al número de onda k es $hk/2\pi$, por lo cual

$$\Delta(hk/2\pi) \Delta x \cong h \quad (16)$$

* Para un estudio más extenso, véase MARION (Ma65b, sección 11.3 y ss.).

** Dos cantidades son conjugadas cuando su producto tiene las dimensiones de una acción; o sea, de (energía)×(tiempo). (Véase sección 7.12.)

o sea,

$$\Delta k \Delta x \cong 2\pi \quad (17)$$

15.8 Propagación de la energía en la cuerda discreta

Nos proponemos ahora volver al caso de la cuerda discreta de longitud infinita con el fin de estudiar la relación entre la velocidad de grupo y la de propagación de la energía a lo largo de aquélla. Las energías cinética y potencial asociadas a la j -ésima partícula de la cuerda pueden expresarse* † (cfr. 13.84 y 13.82):

$$T_j = \frac{1}{2} m \dot{q}_j^2 \quad (15.74a)$$

$$W_j = \frac{1}{2} \frac{\tau}{d} (q_j - q_{j+1})^2 \quad (15.74b)$$

Pero ahora hemos de considerar las medias temporales de las densidades de energías cinética y potencial, \mathcal{T} y \mathcal{W} , donde \mathcal{T} es la energía cinética por unidad de longitud de la cuerda y lo mismo ocurre con \mathcal{W} . Como la unidad fundamental de longitud en la cuerda discreta es la separación d entre partículas, tendremos

$$\langle \mathcal{T} \rangle = \frac{1}{2} \frac{m}{d} \langle \dot{q}_j^2 \rangle \quad (15.75a)$$

$$\langle \mathcal{W} \rangle = \frac{1}{2} \frac{\tau}{d^2} \langle (q_j - q_{j+1})^2 \rangle \quad (15.75b)$$

* En este capítulo representaremos por W a la energía potencial para evitar confusiones con la velocidad de grupo U .

† Comenzaremos aquí de una forma ligeramente distinta a la del capítulo 13, ya que ahora tomamos la energía potencial de una sola partícula, mientras que anteriormente nos fijábamos en la energía potencial total. Esta cantidad ya no la podemos tomar aquí, por supuesto, dado que es infinita, en una cuerda discreta de longitud infinita. Así, pues, asociaremos a la partícula j la energía potencial que reside entre las partículas j y $j+1$ de la cuerda, lo que es completamente arbitrario ya que igualmente podríamos haber tomado la correspondiente al trozo de cuerda comprendido entre las partículas $j-1$ y j , u otra combinación de ambos. Únicamente imponemos la condición de que la definición de W_j sea coherente y de que la energía potencial total sea $W = \sum_j W_j$. Estas condiciones las cumple 15.47b.

Si estuviéramos considerando una cuerda *continua* infinitamente larga, la función de onda podría escribirse en la forma acostumbrada

$$\Psi(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx)}$$

En la *cuerda discreta*, la variable x es precisamente jd , donde j es el número que identifica a la partícula y d es la separación. Entonces, para la oscilación de pulsación particular ω , el desplazamiento de la j -ésima partícula será

$$q_j(t) = Ae^{i(\omega t - jkd)} \quad (15.76)$$

donde A es la amplitud de vibración. (Compárese esto con el resultado anterior relativo a la cuerda discreta, sección 13.10)

Derivando, tendremos

$$\begin{aligned} \dot{q}_j &= i\omega A e^{i(\omega t - jkd)} \\ &= -\omega A \operatorname{sen}(\omega t - jkd) \end{aligned} \quad (15.77)$$

donde en el último miembro hemos escrito la parte real de la expresión precedente. Por consiguiente,

$$\langle \mathcal{T} \rangle = \frac{m\omega^2 A^2}{2d} \langle \operatorname{sen}^2(\omega t - jkd) \rangle \quad (15.78)$$

Ahora, como sólo estamos considerando una pulsación única ω , podremos calcular la media temporal en esta igualdad determinando su valor medio en un período completo de oscilación. (Si estuviera implicado un *intervalo* de pulsaciones, como ocurre en un paquete de ondas, la media debería calcularse entonces sobre un espacio de tiempo muy grande —en rigor infinito). Como el valor medio en un período del cuadrado de una función seno es $\frac{1}{2}$, resultará

$$\langle \mathcal{T} \rangle = \frac{m\omega^2 A^2}{4d} \quad (15.79)$$

Asimismo, tenemos (véase 15.32):

$$\omega^2 = 4 \frac{\tau}{md} \operatorname{sen}^2 \frac{kd}{2} \quad (15.80)$$

por lo que la densidad media de energía cinética puede expresarse

$$\langle \mathcal{T} \rangle = \frac{\tau A^2}{d^2} \operatorname{sen}^2 \frac{kd}{2} \quad (15.81)$$

Para calcular la densidad media de energía potencial, tenemos que considerar la cantidad

$$\begin{aligned} q_j - q_{j+1} &= Ae^{i\omega t}[e^{-ijkd} - e^{-i(j+1)kd}] \\ &= Ae^{i\omega t}e^{-ijkd}[1 - e^{-ikd}] \\ &= Ae^{i(\omega t - jkd)}e^{-i(kd/2)}\left(2i \operatorname{sen}\frac{kd}{2}\right) \\ &= -2A \operatorname{sen}\frac{kd}{2} \operatorname{sen}\left(\omega t - jkd - \frac{kd}{2}\right) \end{aligned} \quad (15.82)$$

donde de nuevo sólo hemos tomado la parte real de la expresión. Tomando el valor medio del cuadrado de esta cantidad, obtendremos

$$\langle (q_j - q_{j+1})^2 \rangle = 2A^2 \operatorname{sen}^2 \frac{kd}{2} \quad (15.83)$$

y entonces,

$$\langle \mathcal{W} \rangle = \frac{\tau A^2}{d^2} \operatorname{sen}^2 \frac{kd}{2} = \langle \mathcal{T} \rangle \quad (15.84)$$

con lo que las densidades medias de energías cinética y potencial son iguales, exactamente como vimos en la sección 14.3 para el caso de la cuerda continua.

Por consiguiente, la densidad media de energía total $\langle \mathcal{E} \rangle$ será

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \langle \mathcal{T} \rangle + \langle \mathcal{W} \rangle = \frac{2\tau A^2}{d^2} \operatorname{sen}^2 \frac{kd}{2} \quad (15.85)$$

Supongamos ahora que la cuerda se encuentre inicialmente en reposo en su posición de equilibrio. Entonces, si tomamos la r -ésima partícula y la forzamos a oscilar con la pulsación ω y la amplitud A , el desplazamiento de esta partícula será

$$q_r(t) = Ae^{i\omega t} \quad (15.86)$$

El movimiento de la r -ésima partícula ejercerá una fuerza sobre la partícula $r+1$, obligándola a oscilar con la pulsación ω y, así, el movimiento se propagará de partícula en partícula a lo largo de la cuerda. Propongámonos calcular la potencia media que se suministre a la cuerda aplicándola a la r -ésima partícula y que provoque la propagación de energía a las partículas representadas por $r+1$, $r+2$, ... (Para la propagación hacia las partículas $r-1$, $r-2$, ..., será necesaria una potencia igual, pero sólo consideraremos la energía que pasa hacia la derecha.) La potencia cedida a la partícula r puede expresarse como producto de la velocidad de ésta por la fuerza de reacción de la partícula $r+1$:

$$\langle P \rangle = \langle F_{r+1} \dot{q}_r \rangle \quad (15.87)$$

Por analogía con el primer término del segundo miembro de la ecuación 13.80, escribamos

$$F_{r+1} = -\frac{\tau}{d}(q_{r+1} - q_r) \quad (15.88)$$

Haciendo uso de 15.82, esta expresión se hace

$$\begin{aligned} F_{r+1} &= -\frac{2\tau A}{d} \operatorname{sen} \frac{kd}{2} \operatorname{sen} \left(\omega t - rkd - \frac{kd}{2} \right) \\ &= -\frac{2\tau A}{d} \operatorname{sen} \frac{kd}{2} \left[\operatorname{sen}(\omega t - rkd) \cos \frac{kd}{2} - \cos(\omega t - rkd) \operatorname{sen} \frac{kd}{2} \right] \end{aligned} \quad (15.89)$$

La igualdad 15.77 nos da la expresión de \dot{q}_r , y entonces la potencia media suministrada será

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \frac{2\tau\omega A^2}{d} \operatorname{sen} \frac{kd}{2} \left[\langle \operatorname{sen}^2(\omega t - rkd) \rangle \cos \frac{kd}{2} \right. \\ &\quad \left. - \langle \operatorname{sen}(\omega t - rkd) \cos(\omega t - rkd) \rangle \operatorname{sen} \frac{kd}{2} \right] \end{aligned} \quad (15.90)$$

Entonces, como el valor medio en un período de $\operatorname{sen} \theta \cos \theta$ es nulo, por lo cual la contribución del segundo sumando del corchete de 15.90 será nula, resultará, al calcular la media temporal del primero,

$$\langle P \rangle = \frac{\tau\omega A^2}{d} \operatorname{sen} \frac{kd}{2} \cos \frac{kd}{2} \quad (15.91)$$

y, llevando a esta expresión el valor de ω dado por 15.80, tendremos

$$\langle P \rangle = 2 \sqrt{\frac{\tau}{md}} \cdot \frac{\tau A^2}{d} \operatorname{sen}^2 \frac{kd}{2} \cos \frac{kd}{2} \quad (15.92)$$

Ahora, el cociente $\langle P \rangle / \langle \mathcal{E} \rangle$ tiene las dimensiones de una *velocidad*, pudiendo interpretarse que representa la velocidad media de la circulación de energía a lo largo de la cuerda. Por tanto, de 15.85 y 15.92, obtendremos

$$\frac{\langle P \rangle}{\langle \mathcal{E} \rangle} = \sqrt{\frac{\tau d}{m}} \cos \frac{kd}{2} \quad (15.93)$$

A partir de 15.80 podemos calcular la derivada de ω respecto de k :

$$\frac{d\omega}{dk} = \sqrt{\frac{\tau d}{m}} \cos \frac{kd}{2} \quad (15.94)$$

Pero como $d\omega/dk$ es precisamente la velocidad de grupo U (véase 15.60), concluimos en que

$$U = \frac{\langle P \rangle}{\langle \mathcal{E} \rangle} \quad (15.95)$$

lo cual nos indica que la energía se propaga a lo largo de la cuerda discreta a la velocidad de grupo U .

Debemos recordar que cuando la pulsación actuante sobre la cuerda sobrepase el valor de la pulsación crítica ω_c aparecerá la atenuación, no pudiendo ya identificarse al número de onda con la velocidad de propagación de la energía. De hecho, no habrá propagación de energía en este caso especial. (Véanse comentarios al final de la sección 15.4.)

15.9 Ondas reflejadas y transmitidas

Un importante problema de los fenómenos ondulatorios lo constituye el comportamiento de las ondas cuando inciden sobre la superficie que separa dos medios. Los efectos que aparecen son especialmente importantes en el caso de las

ondas electromagnéticas [véase la discusión de MARION (Ma65b, cap. 6)]. El ejemplo de la cuerda vibrante nos proporciona un medio adecuado para estudiar la reflexión y transmisión de ondas, así como nos permite introducirnos de forma sencilla en los métodos de cálculo.

Consideraremos que la «frontera» entre nuestros dos «medios» es un punto de discontinuidad en la distribución lineal de densidad de masa de la cuerda. Entonces, para $x < 0$, la densidad será ρ_1 , y para $x > 0$, la densidad será ρ_2 . Cuando un tren de ondas continuo incida desde la izquierda (o sea, desde las x negativas), cabrá esperar que en el punto de discontinuidad una parte de la onda se transmita y otra parte se refleje. De esta forma, en la región 1 ($x < 0$) se superpondrán las ondas reflejada e incidente y en la región 2 ($x > 0$) únicamente existirá la onda transmitida:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1(x, t) &= \Psi_{\text{inc}} + \Psi_{\text{refl}} = Ae^{i(\omega t - k_1 x)} + Be^{i(\omega t + k_1 x)} \\ \Psi_2(x, t) &= \Psi_{\text{trans}} = Ce^{i(\omega t - k_2 x)} \end{aligned} \right\} \quad (15.96)$$

En estas expresiones 15.96 hemos tenido explícitamente en cuenta el hecho de que la pulsación de las ondas ha de ser la misma en ambas regiones. Ahora bien, como la velocidad de una onda en una cuerda viene dada por

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \quad (15.97)$$

será $v_1 \neq v_2$, y en consecuencia $k_1 \neq k_2$. Por cierto que

$$k = \frac{\omega}{v} = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\tau}} \quad (15.98)$$

con lo cual, en función del número de onda de la onda incidente,

$$k_2 = k_1 \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \quad (15.99)$$

Supondremos conocida la amplitud A de la onda incidente (véase 15.96) que será una cantidad real y deberemos obtener las amplitudes B y C de las ondas reflejada y transmitida para completar la solución del problema. Por lo que respecta a B y C no existen restricciones, pudiendo ser cantidades complejas.

Las condiciones físicas del problema las estableceremos en función de las *condiciones de contorno*. Estas consistirán, sencillamente, en que la función de onda total $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$ y su derivada han de ser continuas en todos los puntos de la superficie de separación de los medios. La continuidad de Ψ es consecuencia, desde luego, del hecho de que la cuerda sea continua. La condición de que la derivada sea continua evita la formación de puntos angulosos en la cuerda, pues si $\partial\Psi/\partial x_{0+} \neq \partial\Psi/\partial x_{0-}$, entonces $\partial^2\Psi/\partial x^2$ sería infinita para $x=0$; ahora bien, la ecuación de onda relaciona $\partial^2\Psi/\partial x^2$ con $\partial^2\Psi/\partial t^2$ y, si la primera es infinita, también lo será la segunda, lo que implicaría que la aceleración fuese infinita, cosa no permitida, evidentemente, por la situación real. Por lo tanto, para todo valor del tiempo t , tendremos

$$\Psi_1|_{x=0} = \Psi_2|_{x=0} \quad (15.100a)$$

$$\left. \frac{\partial\Psi_1}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial\Psi_2}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (15.100b)$$

De 15.96 y 15.100a, se tiene

$$A + B = C \quad (15.101a)$$

y de 15.96 y 15.100b

$$-k_1 A + k_1 B = -k_2 C \quad (15.101b)$$

Resolviendo este sistema de dos ecuaciones, obtendremos

$$B = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} A \quad (15.102a)$$

y

$$C = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} A \quad (15.102b)$$

Entonces, como los números de onda, k_1 y k_2 , son ambos reales, las amplitudes B y C lo serán igualmente. Además, k_1 , k_2 y A son los tres positivos, por lo que C será siempre positiva; así, pues, la onda transmitida estará siempre *en fase* con la incidente. Análogamente, si $k_1 > k_2$, las ondas incidente y reflejada estarán *en fase*, pero cuando $k_2 > k_1$ estarán *en oposición de fase*; o sea, para $\rho_2 > \rho_1$.

Se define el *coeficiente de reflexión R* como cociente de los cuadrados de las amplitudes de las ondas reflejada e incidente,

$$R \equiv \frac{|B|^2}{|A|^2} = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 \quad (15.103)$$

Como la energía contenida en una onda es proporcional al cuadrado de la amplitud de la función de onda, R representa la fracción de la energía incidente que se refleja. La cantidad $|B|^2$ representa la *intensidad* de la onda reflejada.

Como en la unión de las dos cuerdas no puede quedar energía almacenada alguna, la energía incidente debe ser igual a la suma de las energías reflejada y transmitida; o sea, $R+T=1$. Así, pues,

$$T = 1 - R = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} \quad (15.104)$$

o sea,

$$T = \frac{k_2}{k_1} \frac{|C|^2}{|A|^2} \quad (15.104a)$$

En el estudio de la reflexión y transmisión de ondas electromagnéticas se encuentran expresiones análogas de R y T .

■ 15.10 Ondas planas amortiguadas

En todo lo tratado precedentemente hemos supuesto la ausencia de toda fuerza de rozamiento, o disipativa de otra clase. Como ya señalamos en los capítulos 2 y 3, las fuerzas más fácilmente calculables son las proporcionales a la velocidad instantánea. Por consiguiente, estas fuerzas se utilizan ampliamente como aproximación de los efectos disipativos correspondientes a las situaciones reales. Si introducimos una de estas fuerzas en el problema de la propagación de una onda plana, la ecuación de ondas podrá escribirse

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (15.105)$$

Podemos llevar a cabo la resolución por el método de separación de variables escribiendo, como antes,

$$\Psi(x, t) = \psi(x)\chi(t) \quad (15.106)$$

Entonces, la ecuación de ondas se hará

$$\chi \frac{d^2 \psi}{dx^2} - \beta \psi \frac{d\chi}{dt} - \frac{\psi}{v^2} \frac{d^2 \chi}{dt^2} = 0 \quad (15.107)$$

o sea,

$$\frac{1}{\psi} \frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{\beta}{\chi} \frac{d\chi}{dt} + \frac{1}{\chi v^2} \frac{d^2\chi}{dt^2} = -k^2 \quad (15.108)$$

donde la constante de separación se ha hecho igual a $-k^2$. Por tanto, las ecuaciones separadas serán

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0 \quad (15.109)$$

o sea,

$$\frac{d^2\chi}{dt^2} + v^2\beta \frac{d\chi}{dt} + k^2v^2\chi = 0 \quad (15.110)$$

Evidentemente, la solución para $\psi(x)$ es

$$\psi(x) \sim e^{\pm ikx} \quad (15.111)$$

Sin embargo, nos interesa más $\chi(t)$. Introduciendo las cantidades siguientes

$$2\gamma \equiv v^2\beta; \quad \omega_0^2 \equiv k^2v^2 \quad (15.112)$$

la ecuación 15.110 quedará

$$\ddot{\chi} + 2\gamma\dot{\chi} + \omega_0^2\chi = 0 \quad (15.113)$$

que es exactamente la ecuación del oscilador armónico amortiguado que hallamos en el capítulo 3 (véase 3.38). Su solución es (véase 3.40):

$$\chi(t) = \exp(-\gamma t)[B \exp(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}t) + C \exp(-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}t)] \quad (15.114)$$

Cuando el amortiguamiento sea *inferior al crítico*, será $\gamma^2 < \omega_0^2$, con lo que las exponenciales serán imaginarias y representarán un movimiento oscilatorio. Por definición

$$\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \equiv i\Omega \quad (15.115)$$

donde Ω es real. Entonces, tendremos

$$\chi(t) = e^{-\gamma t} [Be^{i\Omega t} + Ce^{-i\Omega t}] \quad (15.116)$$

La parte real de los términos del corchete puede escribirse como seno o bien como coseno, si se incluye el factor de fase adecuado. Supongamos que la representación sea seno y suprimamos la fase para simplificar; podremos escribir

$$\chi(t) = De^{-\gamma t} \operatorname{sen} \Omega t \quad (15.117)$$

O sea, se trata de un movimiento oscilatorio de pulsación $\Omega = \sqrt{\psi^2 - \gamma^2}$ y amortiguado a través del tiempo. Consideremos el caso en que la perturbación se inicia en el instante $t=0$; la parte de la función de onda dependiente del tiempo podrá escribirse

$$\chi(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ De^{-\gamma t} \operatorname{sen} \Omega t, & t \geq 0 \end{cases} \quad (15.118)$$

Para determinar la representación espectral de esta onda $\chi(t)$, deberemos calcular su transformada de Fourier utilizando 15.73a:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(t) e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{D}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma t} e^{i\omega t} \operatorname{sen} \Omega t dt \end{aligned} \quad (15.119)$$

Si escribimos $\operatorname{sen} \Omega t$ en forma exponencial, obtendremos

$$A(\omega) = \frac{D}{2i\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} [e^{i(\omega + \Omega + i\gamma)t} - e^{i(\omega - \Omega + i\gamma)t}] dt$$

que es integrable inmediatamente:

$$\begin{aligned}
 A(\omega) &= \frac{D}{2\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{\omega + \Omega + i\gamma} - \frac{1}{\omega - \Omega + i\gamma} \right] \\
 &= \frac{D}{2\sqrt{2\pi}} \frac{-2\Omega}{(\omega + \Omega + i\gamma)(\omega - \Omega + i\gamma)} \\
 &= -\frac{D}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Omega}{(\omega^2 - \Omega^2 - \gamma^2 + 2i\gamma\omega)}
 \end{aligned} \tag{15.120}$$

Ahora bien, $\Omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$, por lo que

$$A(\omega) = -\frac{D}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Omega}{(\omega^2 - \omega_0^2) + 2i\gamma\omega}$$

y, multiplicando numerador y denominador por el conjugado de éste, obtendremos

$$A(\omega) = -\frac{D\Omega}{\sqrt{2\pi}} \frac{(\omega^2 - \omega_0^2) - 2i\gamma\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \tag{15.121}$$

Esta igualdad nos da el espectro de pulsaciones necesario para producir una oscilación iniciada en $t=0$ cuya amplitud disminuye con el tiempo. La parte imaginaria de esta expresión se debe por completo al hecho de que haya atenuación presente. (Recuérdese que una pulsación con componente imaginaria produce siempre amortiguamiento con el tiempo.) Si el sistema que produce la onda fuese un átomo, uno de cuyos electrones oscilase, se emitiría radiación en forma luminescente, con lo que el sistema perdería energía y, consecuentemente, se amortiguaría con el tiempo. Esta radiación no puede ser monocromática y lo cierto es que el estudio de las conformaciones de las rayas espectrales atómicas (con espectrógrafos de gran resolución) revela la existencia de un pico para la pulsación ω_0 y una intensidad decreciente rápidamente para las pulsaciones inferiores y superiores a la misma. La expresión 15.121 describe perfectamente las conformaciones de las rayas espectrales y recibe el nombre de *conformación de Lorentz*.*

* En honor de Hendrik Antoon LORENTZ (1853-1928), físico holandés quien desarrolló una gran parte de las primeras teorías acerca de la radiación atómica.

Referencias recomendadas

Tratados generales del movimiento ondulatorio de los sistemas mecánicos y con aplicaciones a las vibraciones de las cuerdas pueden encontrarse en BECKER (Be54, cap. 15), BRADBURY (Br68, cap. 12), COULSON (Co49, cap. 1 y 2), HAUSER (Ha65, cap. 12), KONOPINSKI (Ko69, cap. 12), MENZEL (Me53, parte 3), SLATER y FRANK (Sl47, cap. 9), SYMON (Sy60, cap. 8) y WANGNESS (Wa63, cap. 15).

La mayoría de los textos de electromagnetismo tratan de la propagación de ondas y algunos presentan el tema a base de conceptos mecánicos; véase, por ejemplo, CORSON y LORRAIN (Co62, ap. G).

LINDSAY (Li60) trata muchos aspectos del movimiento ondulatorio mecánico; véanse, especialmente, las secciones 3.7 y 3.8 (paquetes de ondas y velocidad de grupo), el capítulo 4 (ondas en las cuerdas) y la sección 6.6 (propagación de ondas en un retículo monodimensional).

El tema de la propagación de ondas en la cuerda discreta recibe un excelente tratamiento debido a BRILLOUIN (Br46); se tratan, asimismo, algunas analogías eléctricas.

Las integrales de Fourier se estudian, por ejemplo, en CHURCHILL (Ch41, cap. 5), DAVIS (Da63, cap. 6), PIPES (Pi46, cap. 3) y STRATTON (St41, sección 5.7).

Problemas

15-1. Considérese la función de onda simplificada

$$\Psi(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx)}$$

y supóngase que ω y v son cantidades complejas y que k es real:

$$\omega = \alpha + i\beta$$

$$v = u + iw$$

Demostrar que esta onda es amortiguada en el tiempo. Hacer uso de que $k^2 = \omega^2/v^2$ para obtener expresiones de α y β en función de u y w . Determinar la velocidad de fase en este caso.

15-2. Consideremos una línea de transmisión eléctrica dotada de una inductancia uniforme L por unidad de longitud y una capacidad uniforme C por unidad de

longitud. Demostrar que la intensidad I de una corriente alterna en esta línea obedece a la ecuación de onda*

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = 0$$

con lo que la velocidad de la onda es $v = 1/\sqrt{LC}$.

15-3. Considérese una línea de transmisión formada por elementos inductivos y capacitivos dispuestos como en la figura 15-4. Analizar este caso con detalle y mostrar que se transmiten todas las pulsaciones *superiores* a una pulsación de corte, mientras que las *inferiores* son atenuadas.

15-4. Considérese la superposición de dos trenes de ondas infinitamente largos, cada uno de los cuales tenga casi la misma pulsación, pero amplitudes muy diferentes. Demuéstrese que aparece el fenómeno de los latidos, pero que la amplitud no se hace cero nunca.

15-5. Deducir la igualdad 15.65 y después relacionar las c_r con las a_r y b_r de 15.63.

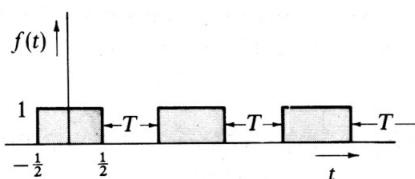
15-6. Calcular y representar gráficamente la transformada de Fourier de la función

$$\Psi(x, t) = \begin{cases} 1 + \cos(k_0 x - \omega_0 t), & \left| x - \frac{\omega_0}{k_0} t \right| < L \\ 0, & \left| x - \frac{\omega_0}{k_0} t \right| > L \end{cases}$$

Comparar los resultados con la figura 15-9.

15-7. Consideremos la onda cuadrada que se representa en la figura. Cada uno de los pulsos es de intensidad unidad y de duración unidad y están sucesivamente separados por un intervalo de tiempo T . Escribir una serie de Fourier compleja como la

$$f(t) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_r e^{-i\omega_r t}$$



* Esta ecuación recibe el nombre de *ecuación de los telegrafistas* y fue deducida por primera vez por Oliver HEAVISIDE en 1876. Lord KELVIN había hecho estudios de las líneas de transmisión sin inductancia en 1854.

Tomar $T=1$ y obtener los coeficientes de Fourier. Representar gráficamente los resultados trazando líneas verticales de longitudes proporcionales a los valores de las c , sobre un eje horizontal de pulsaciones. Esta representación será, por tanto, el espectro de pulsaciones de la onda cuadrada. Después, hacer $T \rightarrow \infty$ y obtener nuevamente el espectro de pulsaciones. (Será preciso hacer un paso al límite de una expresión integral de los coeficientes de Fourier.) Comparar entre sí los resultados y con la figura 15-9.

15-8. Consideremos un paquete de ondas cuya amplitud se distribuye según

$$A(k) = \begin{cases} 1, & |k - k_0| < \Delta k \\ 0, & \text{demás valores de } k \end{cases}$$

Demostrar que la función de onda es

$$\Psi(x, t) = \frac{2 \operatorname{sen}[(\omega'_0 t - x) \Delta k]}{\omega'_0 t - x} e^{i(\omega_0 t - k_0 x)}$$

Dibujar la forma del paquete de ondas (tómese $t=0$, para simplificar).

15-9. Consideremos un paquete de ondas cuya amplitud siga una distribución de Gauss

$$A(k) = B \exp[-\sigma(k - k_0)^2]$$

donde $2/\sqrt{\sigma}$ es la anchura de la curva de distribución entre los puntos de altura $1/e$ de la máxima.* Con esta expresión de $A(k)$, demostrar que

$$\begin{aligned} \Psi(x, 0) &= B \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-\sigma(k - k_0)^2] \exp[-ikx] dk \\ &= B \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} \exp[-x^2/4\sigma] \exp[-ik_0 x] \end{aligned}$$

Dibujar la forma de este paquete de ondas. A continuación, desarrollar $\omega(k)$ en serie de Taylor, retener los dos primeros términos e integrar la ecuación del paquete de ondas para obtener el resultado general

$$\Psi(x, t) = B \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} \exp[-(\omega'_0 t - x)^2/4\sigma] \exp[i(\omega_0 t - k_0 x)]$$

* O sea, como en los puntos $k=k_0 \pm 1/\sqrt{\sigma}$ la amplitud de distribución vale $1/e$ de su valor máximo $A(k_0)$, $2/\sqrt{\sigma}$ será la anchura de la curva para la altura $1/e$ de la máxima.

Por último, tomar un término adicional en el desarrollo en serie de Taylor de $\omega(k)$ y demostrar que entonces σ está sustituida por una cantidad compleja. Determinar la expresión de la anchura $1/e$ del paquete como función del tiempo para este caso y demostrar que el paquete se mueve con la misma velocidad de grupo que antes, pero ensanchándose ahora mientras se desplaza. Ilustrar este resultado con un dibujo.

15-10. Determinar la función de distribución espectral necesaria para representar la función de onda de Gauss

$$\Psi(x, 0) = B \exp[-a^2 x^2/2]$$

15-11. Tratar el problema de la propagación de ondas a lo largo de una cuerda discreta formada por partículas de masas que pueden tomar dos valores distintos m' y m'' , alternándose en su colocación; o sea,

$$m_j = \begin{cases} m', & \text{para } j \text{ par} \\ m'', & \text{para } j \text{ impar} \end{cases}$$

Demostrar que en este caso la curva $\omega - k$ tiene dos ramas y existe atenuación para las pulsaciones situadas entre ambas ramas, así como para las pulsaciones correspondientes a la rama superior.

15-12. Representar la velocidad de fase $V(k)$ y la velocidad de grupo $U(k)$, en el caso de ondas que se propaguen en una cuerda discreta, para valores del número de onda tales que $0 \leq k \leq \pi/d$. Demostrar que $U(\pi/d) = 0$, mientras que $V(\pi/d)$ no se anula. ¿Cuál es la interpretación de este resultado en función del comportamiento de las ondas?

15-13. Consideremos la función $A(k)$ definida por

$$A(k) = \begin{cases} 0, & k < -a \\ 1, & -a < k < a \\ 0, & k > a \end{cases}$$

Demostrar que la transformada de Fourier de esta función es

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ax}{x}$$

Con este resultado demostrar que

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} dx = \begin{cases} \pi/2, & a > 0 \\ 0, & a = 0 \\ -\pi/2, & a < 0 \end{cases}$$

(Sugerencia: hágase $k=0$.)

15-14. Comparar gráficamente las funciones de distribución espectral $A(\omega)$ de las dos funciones de onda siguientes:

$$(a) \quad \Psi_a(x, t) = \begin{cases} 1, & |t| < t_1 \\ 0, & |t| > t_1 \end{cases}$$

$$(b) \quad \Psi_b(x, t) = \begin{cases} 2\left(1 - \frac{|t|}{t_1}\right), & |t| < t_1 \\ 0, & |t| > t_1 \end{cases}$$

(Las dos funciones de onda están normalizadas a la misma integral del tiempo.)

15-15. Considérese una cuerda continua infinitamente larga, la cual para $x < 0$ y $x > L$, posee una densidad lineal ρ_1 , y para $0 < x < L$ una densidad lineal $\rho_2 > \rho_1$. Determinar las intensidades reflejada y transmitida de un tren de ondas de pulsación ω que incide desde la izquierda sobre la parte de mayor densidad. Determinar el valor de L que permite la transmisión máxima a través de la porción de mayor densidad. Discutir brevemente la relación de este problema con la aplicación de recubrimientos no reflectantes a las lentes ópticas.

15-16. Consideremos una cuerda continua infinitamente larga sometida a una tensión τ . En el punto $x=0$ se sujeta una masa M . Demostrar que cuando un tren de ondas incide desde la izquierda a una velocidad ω/k , la reflexión y la transmisión tienen lugar en $x=0$ y que los coeficientes R y T vienen dados por

$$R = \sin^2 \theta; \quad T = \cos^2 \theta \quad \text{donde} \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{M\omega^2}{4\pi k\tau}$$

Examinar con cuidado la condición de contorno para las derivadas de las funciones de onda en $x=0$. ¿Cuáles son los cambios de fase de las ondas reflejada y transmitida?

APÉNDICE A

Teorema de Taylor

El *teorema de Taylor*^{*}, que trata del desarrollo de una función cualquiera en serie de potencias, reviste considerable importancia en física matemática, ya que son numerosas las ocasiones en que resulta necesario su empleo con el fin de simplificar un problema dándole una forma más manejable.

Sea una función $f(x)$ que posee derivadas continuas de todos los órdenes dentro de un cierto intervalo de la variable independiente x . Si $x_0 \leq x \leq x_0 + h$ está dentro de este intervalo, podremos escribir

$$I \equiv \int_{x_0}^{x_0+h} f'(x) dx = f(x_0 + h) - f(x_0) \quad (\text{A.1})$$

donde $f'(x)$ es la derivada de $f(x)$ respecto de x . Haciendo el cambio de variable

$$x = x_0 + h - t \quad (\text{A.2})$$

tendremos

$$I = \int_0^h f'(x_0 + h - t) dt \quad (\text{A.3})$$

* Publicado por primera vez en 1715 por el matemático inglés BROOK TAYLOR (1685-1731).

e, integrando por partes,

$$\begin{aligned} I &= t f'(x_0 + h - t) \Big|_0^h + \int_0^h t f''(x_0 + h - t) dt \\ &= h f'(x_0) + \int_0^h t f''(x_0 + h - t) dt \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Si ahora integramos por partes el segundo término, encontramos

$$I = h f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \int_0^h \frac{t^2}{2!} f'''(x_0 + h - t) dt \quad (\text{A.5})$$

Siguiendo este proceso engendraremos una serie infinita para representar I . Definido I de esta forma, tendremos

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \cdots \quad (\text{A.6})$$

que es el desarrollo en serie de Taylor* de la función $f(x_0 + h)$. Aparece una forma más corriente de la serie cuando hagamos $x_0 = 0$ y $h = x$ (o sea, cuando desarollamos la función $f(x)$ en torno del origen):

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \cdots \\ &\quad + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \cdots \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

donde

$$f^{(n)}(0) \equiv \left. \frac{d^n}{dx^n} f(x) \right|_{x=0} \quad (\text{A.8})$$

La igualdad A.7 suele llamarse *desarrollo en serie de Maclaurin*** de la función $f(x)$.

* El resto de la serie cuando ésta se interrumpe después de un número finito de términos se trata, por ejemplo, en KAPLAN (Ka52, págs. 357-360).

** Descubierto por James STIRLING en 1717 y publicado en 1742 por Colin MACLAURIN.

◆ **Ejemplo A.1.** Como la derivada de todo orden de $\exp x$ es precisamente $\exp x$, la serie exponencial es

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots} \quad (\text{A.9})$$

resultado de importancia considerable que se utiliza con frecuencia.

◆ **Ejemplo A.2.** Para desarrollar $f(x) = \sin x$ necesitamos

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x; & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \cos x; & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\sin x; & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= -\cos x; & f'''(0) &= -1 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots} \quad (\text{A.10})$$

e, igualmente,

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots} \quad (\text{A.11})$$

◆ **Ejemplo A.3.** Con frecuencia, puede utilizarse provechosamente un desarrollo en serie para calcular una integral definida. (Ello es especialmente cierto en aquellos casos en los que la integral indefinida no pueda determinarse en forma explícita.)

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x (1 - t^2 - t^3 + \dots) dt, \quad |t| < 1 \quad (1)$$

Integrando término a término, encontramos

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad (2)$$

Como

$$\frac{d}{dx} \ln(1+x) = \frac{1}{1+x} \quad (3)$$

tendremos también

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad (4)$$

Ejercicios

A-1. Demostrar, haciendo la división y desarrollando en serie de Taylor, que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

¿Para qué campo de variabilidad de x es válida la serie?

A-2. Desarrollar $\cos x$ en torno del punto $x=\pi/4$.

A-3. Mediante un desarrollo en serie, demostrar

$$\int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{x} dx = 2,1145 \dots$$

A-4. Desarrollar $\arcsen x$ en serie de Taylor y comprobar el resultado desarrollando el integrando de

$$\arcsen x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

A-5. Calcular con tres cifras decimales significativas

$$\int_0^1 \exp(-x^2/2) dx$$

Comparar el resultado con el que dan las tablas de probabilidades

A-6. Demostrar que cuando $f(x)=(1+x)^n$ (con $|x|<1$) se desarrolla en serie de Taylor, se obtiene el mismo resultado que del desarrollo por el binomio de Newton.

APÉNDICE B

Números complejos

B.1 Números complejos

Un número complejo[†] se compone de un par ordenado de números reales, x e y , y acostumbra escribirse en la forma $x+iy$, donde $i \equiv \sqrt{-1}$. El *módulo* o *valor absoluto* de un número complejo $z=x+iy$ es, por definición,

$$|z| \equiv +\sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{B.1})$$

En el número complejo z , llamamos a x *parte real* y a y *parte imaginaria*:

$$\operatorname{Re} z = x; \quad \operatorname{Im} z = y \quad (\text{B.2})$$

El *conjugado* de z se representa por z^* y se obtiene del primero cambiando el signo de la parte imaginaria:

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ z^* &= x - iy \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

[†] La expresión «número complejo» se debe a GAUSS, 1831.

Podemos comprobar fácilmente que

$$zz^* = |z|^2 \quad (\text{B.4a})$$

$$z + z^* = 2 \operatorname{Re} z = 2x \quad (\text{B.4b})$$

$$z - z^* = 2i \operatorname{Im} z = 2iy \quad (\text{B.4c})$$

B.2 Representación geométrica de los números complejos

Como un número complejo es un par ordenado de números reales, podemos representar esta combinación mediante un punto de un diagrama bidimensional. De hecho, si queremos, podemos unir este punto (x, y) con el origen y dejar representado el número complejo por el segmento rectilíneo que se obtiene de esta manera. En la figura B-1 se muestra la representación geométrica del número complejo $z_1 = x_1 + iy_1$. Esta representación recibe el nombre de *diagrama de Argand*.†

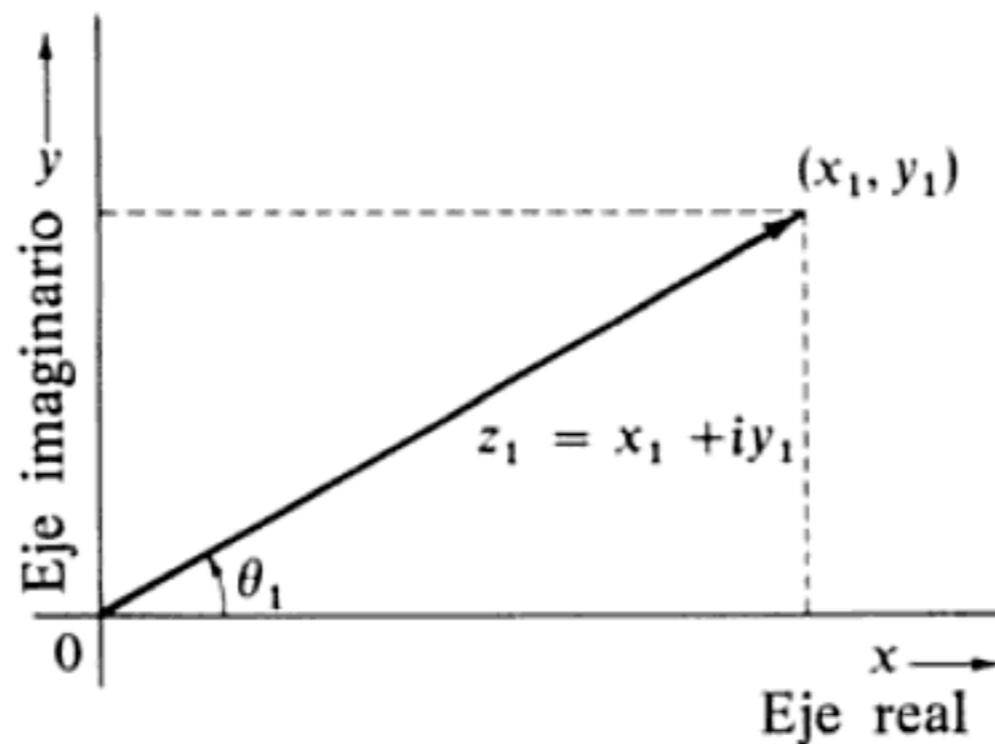


FIG. B-1

La suma de dos números complejos, z_1 y z_2 , puede obtenerse geométricamente construyendo un paralelogramo como el indicado en la figura B-2. La suma viene dada por

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \quad (\text{B.5})$$

La resta puede representarse de forma similar.

Cuando tomemos un sistema plano de coordenadas polares para representar un número complejo, el punto (x, y) podrá representarse por (r, θ) , donde

$$|z| = r \quad (\text{B.6a})$$

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (\text{B.6b})$$

† En honor de J. R. ARGAND (1806), si bien la construcción ya había sido ofrecida anteriormente por C. WESSEL y por GAUSS (1797) y posiblemente descubierta por J. WALLIS en fecha tan anterior como 1673.

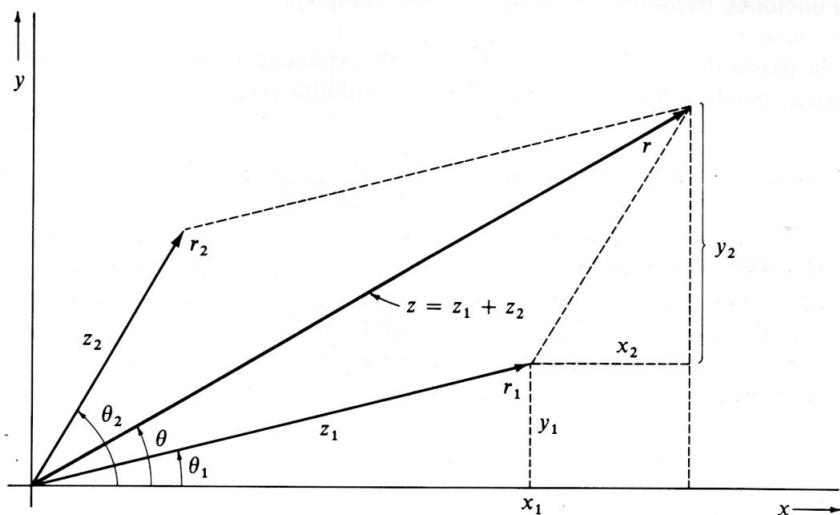


FIG. B-2

Pueden comprobarse fácilmente las relaciones siguientes:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] \quad (\text{B.8})$$

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) \quad (\text{Fórmula de De Moivre}) \quad (\text{B.9})$$

El ángulo θ se llama *argumento de z* (escribiéndose a veces $\theta = \arg z$). Tenemos

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} = \frac{y}{x} \quad (\text{B.10})$$

Como podemos aumentar θ en 2π obteniendo el mismo punto en el diagrama x-y o en el $r-\theta$, hemos de establecer un convenio para especificar únicamente el argumento de una cantidad compleja. Para nuestros propósitos aquí, tomamos siempre $0 \leq \theta < 2\pi$.

B.3 Funciones trigonométricas de variable compleja

En la teoría de variables *reales*, la función exponencial de x , representada por e^x o $\exp x$, puede representarse por una serie infinita (véase A.9):

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (\text{B.11})$$

De igual forma, podemos escribir

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + (iy) + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \dots \\ &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i \frac{y^3}{3!} + \dots \\ &= \left[1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \dots \right] + i \left[y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots \right] \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Ahora bien, la serie contenida entre los primeros corchetes es precisamente la expresión de $\cos y$ (A.11) y la contenida entre los segundos es precisamente $\operatorname{sen} y$ (A.10); de aquí,

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y \quad (\text{B.13a})$$

Análogamente,

$$e^{-iy} = \cos y - i \operatorname{sen} y \quad (\text{B.13b})$$

Sumando (y restando) B.13a y B.13b y despejando $\cos y$ (o $\operatorname{sen} y$), resultará

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \quad (\text{B.14a})$$

$$\operatorname{sen} y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \quad (\text{B.14b})$$

que son las llamadas *fórmulas de Euler*.*

Combinando B.6b y B.13a, vemos que todo número complejo puede siempre escribirse

$$z = x + iy = Ae^{i\varphi} \quad (\text{B.15})$$

donde $A = |z|$ será la *amplitud* y $\varphi = \arctg(y/x)$ la *fase*.

B.4 Funciones hiperbólicas

Si calculamos el coseno de $z = x + iy$, utilizando las fórmulas de Euler, hallaremos

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{1}{2}[e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}] \\ &= \frac{1}{2}e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) + \frac{1}{2}e^y(\cos x - i \operatorname{sen} x) \\ &= \frac{e^y + e^{-y}}{2} \cos x - i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \operatorname{sen} x \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Por definición, los coeficientes de $\cos x$ e $i \operatorname{sen} x$ son las llamadas funciones *hiperbólicas*:

$$\cosh y \equiv \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

$$\operatorname{senh} y \equiv \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

(B.17)

Entonces, la igualdad B.16 se hace

$$\cos z = \cosh y \cos x - i \operatorname{senh} y \operatorname{sen} x \quad (\text{B.18})$$

Asimismo, podemos desarrollar $\operatorname{sen} z$, resultando

$$\operatorname{sen} z = \cosh y \operatorname{sen} x + i \operatorname{senh} y \cos x \quad (\text{B.19})$$

* En honor del eminente matemático suizo, Leonard EULER (1707-1783).

Haciendo $x=0$ en B.18 y B.19, obtendremos las expresiones del seno y del coseno de un argumento imaginario puro

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{sen}(iy) = i \operatorname{senh} y \\ \cos(iy) = \cosh y \end{array} \right\} \quad (\text{B.20})$$

De igual forma, podemos comprobar las relaciones siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{senh}(iy) = i \operatorname{sen} y \\ \cosh(iy) = \cos y \end{array} \right\} \quad (\text{B.21})$$

Las derivadas de las funciones hiperbólicas son:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d}{dy} \operatorname{senh} y = \cosh y \\ \frac{d}{dy} \cosh y = \operatorname{senh} y \end{array} \right\} \quad (\text{B.22})$$

Ejercicios

B-1. ¿Es posible atribuir un significado a la desigualdad $z_1 < z_2$? Explíquese. ¿Tiene un significado distinto la desigualdad $|z_1| < |z_2|$?

B-2. Resolver las ecuaciones siguientes:

$$(a) z^2 + 2z + 2 = 0 \quad (b) 2z^2 + z + 2 = 0$$

B-3. Expresar en forma polar:

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| (a) $z_1 = i$ | (b) $z_2 = -1$ |
| (c) $z_3 = 1 + i\sqrt{3}$ | (d) $z_4 = 1 + 2i$ |
| (e) Hallar el producto $z_1 z_2$ | (f) Hallar el producto $z_1 z_3$ |
| (g) Hallar el producto $z_3 z_4$ | |

B-4. Expresar $(z^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$ en forma polar.

B-5. Si $w = \operatorname{arc} \operatorname{sen} z$ es por definición la función inversa de $z = \operatorname{sen} w$, utilizar la fórmula de Euler que da $\operatorname{sen} w$ para hallar una expresión de $\exp(iw)$. Despejar

w en esta última obteniendo el resultado

$$w = \operatorname{arc sen} z = -i \ln(iz + \sqrt{1 - z^2})$$

B-6. Demostrar que

$$y = Ae^{ix} + Be^{-ix}$$

puede escribirse

$$y = C \cos(x - \delta)$$

donde A y B son *complejas* pero C y δ son *reales*.

B-7. Demostrar que

- (a) $\operatorname{senh}(x_1 + x_2) = \operatorname{senh} x_1 \cosh x_2 + \cosh x_1 \operatorname{senh} x_2$
- (b) $\cosh(x_1 + x_2) = \cosh x_1 \cosh x_2 + \operatorname{senh} x_1 \operatorname{senh} x_2$

B-8. Trazar gráficas de las funciones $\operatorname{senh} x$ y $\cosh x$.

Ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden *

C.1 Ecuaciones lineales homogéneas

De todas las ecuaciones diferenciales ordinarias que se encuentran en los problemas de física matemática, la lineal de segundo orden con coeficientes constantes es, con mucho, el tipo más importante. Tales ecuaciones son de la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = f(x) \quad (\text{C.1})$$

o sea, representando las derivaciones mediante acentos,

$$y'' + ay' + by = f(x) \quad (\text{C.1a})$$

Una clase especialmente importante de estas ecuaciones son aquellas en que $f(x)=0$. Estas ecuaciones (llamadas *ecuaciones homogéneas*) son importantes no sólo por sí mismas, sino también por el hecho de que se emplean como ecuaciones *reducidas* para resolver las ecuaciones del tipo más general C.1.

* Un tratado clásico de ecuaciones diferenciales es el de INCE (In27). MURPHY (Mu60) ofrece una lista de muchos tipos de ecuaciones con sus soluciones. El texto de HOCHSTADT (Ho64) contiene un punto de vista moderno.

Consideraremos primero la ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes: *

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (\text{C.2})$$

Estas ecuaciones tienen las importantes propiedades siguientes:

- (a) Si $y_1(x)$ es solución de C.2, $c_1y_1(x)$ también lo será.
- (b) Si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son soluciones, $y_1(x) + y_2(x)$ también lo será (principio de superposición).
- (c) Si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son soluciones *linealmente independientes*, la integral general de la ecuación vendrá dada por $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$. (La integral general contiene dos constantes arbitrarias.)

[Las funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son *linealmente independientes* si, y sólo si la igualdad

$$\lambda y_1(x) + \mu y_2(x) \equiv 0 \quad (\text{C.3})$$

se satisface únicamente cuando $\lambda = \mu = 0$. Cuando se cumpla C.3, siendo λ y μ distintos de cero, diremos que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son *linealmente dependientes*.

La condición general (es decir, la condición necesaria y suficiente) para que un conjunto de funciones y_1, y_2, y_3, \dots sean linealmente dependientes es que el *determinante wronskiano* de las mismas sea idénticamente nulo:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 & \cdots & y'_n \\ y''_1 & y''_2 & y''_3 & \cdots & y''_n \\ \vdots & & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{C.4})$$

donde $y^{(n)}$ es la n -ésima derivada de y respecto de x .]

Las propiedades (a) y (b) pueden comprobarse por sustitución directa; respecto de la (c), nos limitaremos aquí a dejarla establecida con el fin de obtener la integral general. Debe advertirse que las propiedades anteriores se aplican *únicamente* a la ecuación homogénea C.2, pero *no* a la ecuación más general del tipo C.1.

Las ecuaciones del tipo C.2 pueden reducirse mediante la sustitución

$$y = e^{rx} \quad (\text{C.5})$$

* El primero en publicar la solución a una ecuación de este tipo fue EULER en 1743; si bien, parece que Daniel y Johann BERNOULLI ya la conocían en 1739.

Entonces,

$$y' = re^{rx}; \quad y'' = r^2 e^{rx} \quad (\text{C.6})$$

Llevando estas expresiones de y' e y'' a la ecuación C.2, resulta una ecuación algebraica que recibe el nombre de *ecuación característica*:

$$r^2 + ar + b = 0 \quad (\text{C.7})$$

de segundo grado en r , cuya solución es

$$r = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b} \quad (\text{C.8})$$

Empecemos por suponer que las dos raíces, que representaremos por r_1 y r_2 sean diferentes, y escribiremos la solución de la forma

$$y = e^{r_1 x} + e^{r_2 x} \quad (\text{C.9})$$

Como el determinante wronskiano de $\exp(r_1 x)$ y $\exp(r_2 x)$ no se anula, estas funciones serán linealmente independientes y la integral general será

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}, \quad r_1 \neq r_2 \quad (\text{C.10})$$

Cuando $r_1 = r_2 = r$, podrá comprobarse por sustitución directa que $x \exp(rx)$ es también solución y, como $(\exp)rx$ y $x \exp(rx)$ son linealmente independientes, la integral general en el caso de raíces iguales vendrá dada por

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}, \quad r_1 = r_2 \equiv r \quad (\text{C.11})$$

◆ **Ejemplo C.1.** Resolver la ecuación:

$$y'' - 2y' - 3y = 0 \quad (1)$$

La ecuación característica es

$$r^2 - 2r - 3 = (r - 3)(r + 1) = 0 \quad (2)$$

cuyas raíces son

$$r_1 = 3; \quad r_2 = -1 \quad (3)$$

y, por tanto, la integral general será

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} \quad (4)$$

◆ **Ejemplo C.2.** Resolver la ecuación:

$$y'' + 4y' + 4y = 0 \quad (1)$$

La ecuación característica es

$$r^2 + 4r + 4 = (r + 2)^2 = 0 \quad (2)$$

cuyas raíces son iguales y valen $r = -2$. Por consiguiente, la integral general será

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} \quad (3)$$

Cuando las raíces, r_1 y r_2 , de la ecuación característica sean imaginarias, las soluciones expresadas por $c_1 \exp(r_1 x)$ y $c_2 \exp(r_2 x)$ seguirán siendo correctas.

Para que las soluciones queden expresadas por completo en función de cantidades reales, expresaremos las exponenciales mediante las fórmulas de Euler. Entonces,

$$\left. \begin{aligned} e^{r_1 x} &= e^{ax} e^{i\beta x} = e^{ax} (\cos \beta x + i \sin \beta x) \\ e^{r_2 x} &= e^{ax} e^{-i\beta x} = e^{ax} (\cos \beta x - i \sin \beta x) \end{aligned} \right\} \quad (C.12)$$

siendo

$$\begin{aligned} y &= c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \\ &= e^{ax} [(c_1 + c_2) \cos \beta x + i(c_1 - c_2) \sin \beta x] \end{aligned} \quad (C.13)$$

la integral general. Ahora, c_1 y c_2 son constantes arbitrarias que pueden ser complejas. No obstante, los cuatro números que las forman no pueden ser independientes entre sí (puesto que habría *cuatro* constantes arbitrarias en vez de *dos*). Estos cuatro números pueden reducirse a los *dos* deseados haciendo que c_1 y c_2 sean conjugadas. Entonces, las combinaciones $A \equiv c_1 + c_2$ y $B \equiv i(c_1 - c_2)$ se transformarán en un par de constantes arbitrarias reales. Haciendo uso de éstas en la solución, tendremos

$$y = e^{ax} (A \cos \beta x + B \sin \beta x) \quad (C.14)$$

Multiplicando y dividiendo por $\mu = \sqrt{A^2 + B^2}$, la ecuación C.14 puede ponerse de una forma que a veces es más conveniente:

$$y = \mu e^{xx} [(A/\mu) \cos \beta x + (B/\mu) \operatorname{sen} \beta x] \quad (\text{C.15})$$

Definamos, a continuación, el ángulo δ (véase figura C-1) tal que

$$\operatorname{sen} \delta = A/\mu; \quad \cos \delta = B/\mu; \quad \operatorname{tg} \delta = A/B \quad (\text{C.16})$$

con lo cual la solución se escribirá

$$\begin{aligned} y &= \mu e^{xx} (\operatorname{sen} \delta \cos \beta x + \cos \delta \operatorname{sen} \beta x) \\ &= \mu e^{xx} \operatorname{sen}(\beta x + \delta) \end{aligned}$$

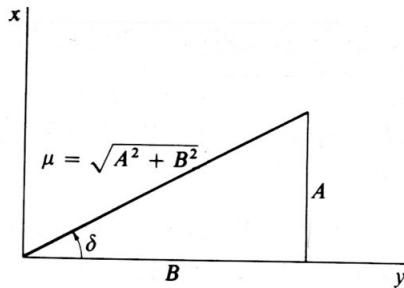


FIG. C-1

Según cual sea la definición exacta dada a la fase δ , podremos escribir alternativamente la solución en la forma

$$y = \mu e^{xx} \operatorname{sen}(\beta x + \delta) \quad (\text{C.17a})$$

$$y = \mu e^{xx} \cos(\beta x + \delta) \quad (\text{C.17b})$$

◆ Ejemplo C.3. Resolver la ecuación:

$$y'' + 2y' + 4y = 0 \quad (1)$$

La ecuación característica es

$$r^2 + 2r + 4 = 0 \quad (2)$$

con

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = -1 \pm i\sqrt{3} \quad (3)$$

De aquí,

$$\alpha = -1; \quad \beta = \sqrt{3} \quad (4)$$

y la integral general será

$$y = e^{-x}(c_1 \cos \sqrt{3}x + c_2 \sin \sqrt{3}x) \quad (5)$$

o sea,

$$y = \mu e^{-x} \operatorname{sen}[(\sqrt{3}x + \delta)] \quad (6)$$

Resumiendo, entonces, tal como se indica en la tabla C.1, existen tres tipos de integral general posible para las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden.

Tabla C.1

Raíces de la ecuación característica	Integral general, $y =$
Reales y distintas ($r_1 \neq r_2$)	$c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$
Reales e iguales ($r_1 = r_2 \equiv r$)	$c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$
Imaginarias ($\alpha \pm i\beta$)	$e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$ o bien $\mu e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x + \delta)$

C.2 Ecuaciones lineales no homogéneas

Para resolver la ecuación diferencial lineal de segundo orden completa (o sea, no homogénea), consideremos lo que sigue. Sea $y = u$ la *integral general* de

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (\text{C.18})$$

e $y = v$ una solución *cualquiera* de

$$y'' + ay' + by = f(x) \quad (\text{C.19})$$

entonces $y = u + v$ será una solución de C.19, ya que

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by &= (u'' + au' + bu) + (v'' + av' + bv) \\ &= 0 + f(x) \end{aligned}$$

Entonces, como u contiene las dos constantes arbitrarias c_1 y c_2 , la combinación $u+v$ satisfará todas las condiciones que ha de verificar la integral general a C.19. La función u es la *integral general a la ecuación homogénea* y v la *integral particular* de la ecuación. Dado que ya hemos visto el método de determinación de u , sólo nos queda determinar, por inspección o por tanteo, alguna función v que satisfaga

$$v'' + av' + bv = f(x) \quad (C.20)$$

Ejemplo C.4. Resolver la ecuación:

$$y'' + 5y' + 6y = x^2 + 2x \quad (1)$$

La ecuación característica es

$$r^2 + 5r + 6 = (r + 3)(r + 2) = 0 \quad (2)$$

$$r_1 = -3; \quad r_2 = -2 \quad (3)$$

con lo que la integral general de la ecuación homogénea será

$$u = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} \quad (4)$$

Como el segundo miembro de la ecuación original es un polinomio de segundo grado, adivinamos que la integral particular puede ser de la forma

$$v = Ax^2 + Bx + C \quad (5)$$

Entonces,

$$v' = 2Ax + B \quad (6)$$

$$v'' = 2A \quad (7)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial, tendremos

$$2A + 5(2Ax + B) + 6(Ax^2 + Bx + C) = x^2 + 2x \quad (8)$$

o sea,

$$(6A)x^2 + (10A + 6B)x + (2A + 5B + 6C) = x^2 + 2x \quad (9)$$

e igualando los coeficientes de las potencias iguales de x :

$$6A = 1$$

$$10A + 6B = 2$$

$$2A + 5B + 6C = 0$$

(10)

Resolviendo este sistema,

$$A = \frac{1}{6}; \quad B = \frac{1}{18}; \quad C = -\frac{11}{108} \quad (11)$$

y, de aquí,

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{18}x - \frac{11}{108} \\ &= \frac{18x^2 + 6x - 11}{108} \end{aligned} \quad (12)$$

Así, pues, la integral general de la ecuación (1) será

$$y = u + v = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + \frac{18x^2 + 6x - 11}{108} \quad (13)$$

El tipo de resolución ilustrado en el ejemplo anterior recibe el nombre de *método de los coeficientes indeterminados*.

◆ **Ejemplo C.5.** Resolver la ecuación:

$$y'' + 4y = 3x \cos x \quad (1)$$

La ecuación característica es

$$r^2 + 4 = (r + 2i)(r - 2i) = 0 \quad (2)$$

cuyas raíces son

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \alpha + i\beta = 0 + 2i \\ r_2 &= \alpha - i\beta = 0 - 2i \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

con lo que

$$\alpha = 0; \quad \beta = 2 \quad (4)$$

y la integral general de la ecuación homogénea será

$$\begin{aligned} u &= e^{zx}(c_1 \cos \beta x + c_2 \operatorname{sen} \beta x) \\ &= c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x \end{aligned} \quad (5)$$

Para determinar la integral particular, observemos que de $x \cos x$ y sus derivadas sólo es posible producir términos que contengan las funciones siguientes:

$$x \cos x; \quad x \operatorname{sen} x; \quad \cos x; \quad \operatorname{sen} x$$

Por consiguiente, como todas estas funciones son linealmente independientes, la integral particular ensayada será

$$v = Ax \cos x + Bx \sin x + C \cos x + D \sin x \quad (6)$$

$$\begin{aligned} v' &= A(\cos x - x \sin x) + B(\sin x + x \cos x) \\ &\quad - C \sin x + D \cos x \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} v'' &= -A(2 \sin x + x \cos x) + B(2 \cos x - x \sin x) \\ &\quad - C \cos x - D \sin x \end{aligned} \quad (8)$$

y, sustituyendo en la ecuación diferencial original,

$$(3D - 2A) \sin x + (2B + 3C) \cos x + 3(A - 1)x \cos x + (3B)x \sin x = 0 \quad (9)$$

El coeficiente de cada uno de los términos deberá anularse (a causa de la independencia lineal de los mismos):

$$3D = 2A; \quad 2B = -3C; \quad A = 1; \quad 3B = 0 \quad (10)$$

de donde,

$$A = 1; \quad B = 0; \quad C = 0; \quad D = \frac{2}{3} \quad (11)$$

Por tanto, la integral general de la ecuación (1) será

$$y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x + x \cos x + \frac{2}{3} x \sin x \quad (12)$$

Cuando el segundo miembro $f(x)$, de la ecuación no homogénea (C.1 o C.19) sea tal que $f(x)$ y sus dos primeras derivadas (sólo estamos considerando ecuaciones de segundo orden) contengan únicamente funciones linealmente independientes, la integral particular ensayada habrá de estar constituida por una combinación lineal de estas funciones. Cuando ocurra que la función ensayada contenga un término que ya aparezca en la integral general de la ecuación homogénea, se utilizará este término multiplicado por x ; cuando la combinación de estos dos aparezca también en la integral general de la ecuación homogénea, se empleará dicho término multiplicado por x^2 . No harán falta potencias de grado superior ya que sólo estamos considerando ecuaciones de segundo orden y únicamente aparecerá $\exp(rx)$ o $x \exp(rx)$ como solución a la ecuación reducida; $(x^2) \exp(rx)$ no aparecerá nunca.

Ejercicios

C-1. Resolver las siguientes ecuaciones homogéneas de segundo orden:

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| (a) $y'' + 2y' - 3y = 0$ | (b) $y'' + y = 0$ |
| (c) $y'' - 2y' + 2y = 0$ | (d) $y'' - 2y' + 5y = 0$ |

C-2. Resolver las siguientes ecuaciones no homogéneas por el método de los coeficientes indeterminados:

- | | |
|--|-------------------------------|
| (a) $y'' + 2y' - 8y = 16x$ | (b) $y'' - 2y' + y = 2e^{2x}$ |
| (c) $y'' + y = \operatorname{sen} x$ | (d) $y'' - 2y' + y = 3xe^x$ |
| (e) $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} + 4 \operatorname{sen} x$ | |

C-3. Obtener la solución de

$$y'' + y^2 = x^2$$

mediante un desarrollo en serie de Taylor, verificándose las condiciones $y(0)=1$ e $y'(0)=0$. (Para obtener las derivadas que aparecen en la serie de Taylor, dérvase la ecuación sucesivamente.)

APÉNDICE D

Fórmulas útiles *

D.1 Desarrollo del binomio

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots + \binom{n}{r}x^r + \cdots, \quad |x| < 1 \quad (\text{D.1})$$

$$(1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^r \binom{n}{r}x^r + \cdots, \quad -|x| < 1 \quad (\text{D.2})$$

donde los *coeficientes* son

$$\binom{n}{r} \equiv \frac{n!}{(n-r)! r!} \quad (\text{D.3})$$

* Una relación extensa puede encontrarse, por ejemplo, en DWIGHT (Dw61).

Algunos casos especialmente útiles de los anteriores son

$$(1 \pm x)^{\frac{1}{2}} = 1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \pm \frac{1}{16}x^3 - \dots \quad (\text{D.4})$$

$$(1 \pm x)^{\frac{1}{3}} = 1 \pm \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 \pm \frac{5}{81}x^3 - \dots \quad (\text{D.5})$$

$$(1 \pm x)^{-\frac{1}{2}} = 1 \mp \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 \mp \frac{5}{16}x^3 + \dots \quad (\text{D.6})$$

$$(1 \pm x)^{-\frac{1}{3}} = 1 \mp \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 \mp \frac{14}{81}x^3 + \dots \quad (\text{D.7})$$

$$(1 \pm x)^{-1} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + \dots \quad (\text{D.8})$$

$$(1 \pm x)^{-2} = 1 \mp 2x + 3x^2 \mp 4x^3 + \dots \quad (\text{D.9})$$

$$(1 \pm x)^{-3} = 1 \mp 3x + 6x^2 \mp 10x^3 + \dots \quad (\text{D.10})$$

Para que todas las series anteriores sean convergentes debe ser $|x| < 1$.

D.2 Relaciones trigonométricas

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B \quad (\text{D.11})$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B \quad (\text{D.12})$$

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A = \frac{2 \operatorname{tg} A}{1 + \operatorname{tg}^2 A} \quad (\text{D.13})$$

$$\cos 2A = 2 \cos^2 A - 1 \quad (\text{D.14})$$

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos A) \quad (\text{D.15})$$

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos A) \quad (\text{D.16})$$

$$\sin^2 A = \frac{1}{2}(1 - \cos 2A) \quad (\text{D.17})$$

$$\sin^3 A = \frac{1}{4}(3 \sin A - \sin 3A) \quad (\text{D.18})$$

$$\sin^4 A = \frac{1}{8}(3 - 4 \cos 2A + \cos 4A) \quad (\text{D.19})$$

$$\cos^2 A = \frac{1}{2}(1 + \cos 2A) \quad (\text{D.20})$$

$$\cos^3 A = \frac{1}{4}(3 \cos A + \cos 3A) \quad (\text{D.21})$$

$$\cos^4 A = \frac{1}{8}(3 + 4 \cos 2A + \cos 4A) \quad (\text{D.22})$$

$$\operatorname{tg}(A + B) = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B} \quad (\text{D.23})$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} \quad (\text{D.24})$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (\text{D.25})$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad (\text{D.26})$$

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x \quad (\text{D.27})$$

D.3 Series trigonométricas

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad (\text{D.28})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad (\text{D.29})$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + \cdots, \quad |x| < \pi/2 \quad (\text{D.30})$$

$$\operatorname{arc sen} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40} x^5 + \cdots, \quad \begin{cases} |x| < 1 \\ |\operatorname{arc sen} x| < \pi/2 \end{cases} \quad (\text{D.31})$$

$$\operatorname{arc cos} x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3}{40} x^5 - \cdots, \quad \begin{cases} |x| < 1 \\ 0 < \operatorname{arc cos} x < \pi \end{cases} \quad (\text{D.32})$$

$$\operatorname{arc tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, \quad |x| < 1 \quad (\text{D.33})$$

D.4 Series exponenciales y logarítmicas

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (\text{D.34})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad |x| < 1; \quad x = 1 \quad (\text{D.35})$$

$$\ln[\sqrt{(x^2/a^2)+1} + (x/a)] = \operatorname{arc senh} x/a \quad (\text{D.36})$$

$$= -\ln[\sqrt{(x^2/a^2)+1} - (x/a)] \quad (\text{D.37})$$

D.5 Funciones hiperbólicas

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (\text{D.38})$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (\text{D.39})$$

$$\operatorname{tgh} x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \quad (\text{D.40})$$

$$\operatorname{sen} ix = i \operatorname{senh} x \quad (\text{D.41})$$

$$\cos ix = \cosh x \quad (\text{D.42})$$

$$\operatorname{senh} ix = i \operatorname{sen} x \quad (\text{D.43})$$

$$\cosh ix = \cos x \quad (\text{D.44})$$

$$\operatorname{arc senh} x = \operatorname{arc tgh} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right] \quad (\text{D.45})$$

$$= \ln[x + \sqrt{x^2 + 1}] \quad (\text{D.46})$$

$$= \operatorname{arc cosh} [\sqrt{x^2 + 1}], \quad \begin{cases} > 0, & x > 0 \\ < 0, & x < 0 \end{cases} \quad (\text{D.47})$$

$$\operatorname{arc senh} x = \pm \operatorname{arc tgh} \left[\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \right], \quad x > 1 \quad (\text{D.48})$$

$$= \pm \ln[x + \sqrt{x^2 - 1}], \quad x > 1 \quad (\text{D.49})$$

$$= \pm \operatorname{arc senh} [\sqrt{x^2 - 1}], \quad x > 1 \quad (\text{D.50})$$

APÉNDICE E

Integrales útiles*†

E.1 Funciones algebraicas

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc \, tg} \left(\frac{x}{a} \right), \quad \left| \operatorname{arc \, tg} \left(\frac{x}{a} \right) \right| < \frac{\pi}{2} \quad (\text{E.1})$$

$$\int \frac{x \, dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{2} \ln(a^2 + x^2) \quad (\text{E.2})$$

$$\int \frac{dx}{x(a^2 + x^2)} = \frac{1}{2a^2} \ln \left(\frac{x^2}{a^2 + x^2} \right) \quad (\text{E.3})$$

$$\int \frac{dx}{a^2 x^2 - b^2} = \frac{1}{2ab} \ln \left[\frac{ax - b}{ax + b} \right] \quad (\text{E.4a})$$

$$= -\frac{1}{ab} \operatorname{arc \, ctgh} \left(\frac{ax}{b} \right) \quad (\text{E.4b})$$

$$= -\frac{1}{ab} \operatorname{arc \, tgh} \left(\frac{ax}{b} \right), \quad a^2 x^2 < b^2 \quad (\text{E.4c})$$

* Recopilaciones sumamente útiles son, por ejemplo, las de PIERCE y FOSTER (Pi57) y DWIGHT (Dw61).

† Esta lista se ha reducido a aquellas integrales (no triviales) que aparecen en el texto y en los problemas.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b} \sqrt{a+bx} \quad (\text{E.5})$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln[x + \sqrt{x^2 + a^2}] \quad (\text{E.6})$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = -\frac{x}{2} \sqrt{(a^2 - x^2)} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arc sen} \frac{x}{a} \quad (\text{E.7})$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln[2\sqrt{a} \sqrt{ax^2 + bx + c} + 2ax + b], \quad a > 0 \quad (\text{E.8a})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arc senh} \left[\frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} \right], \quad \begin{cases} a > 0 \\ 4ac > b^2 \end{cases} \quad (\text{E.8b})$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{arc sen} \left[\frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \right], \quad \begin{cases} a < 0 \\ b > 4ac \\ |2ax + b| < \sqrt{b^2 - 4ac} \end{cases} \quad (\text{E.8c})$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{a} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad (\text{E.9})$$

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{ax^2 + bx + c}} = -\frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{arc senh} \left[\frac{bx + 2c}{|x| \sqrt{4ac - b^2}} \right], \quad \begin{cases} c > 0 \\ 4ac > b^2 \end{cases} \quad (\text{E.10a})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-c}} \operatorname{arc sen} \left[\frac{bx + 2c}{|x| \sqrt{b^2 - 4ac}} \right], \quad \begin{cases} c < 0 \\ b^2 > 4ac \end{cases} \quad (\text{E.10b})$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{c}} \ln \left[\frac{2\sqrt{c}}{x} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{2c}{x} + b \right], \quad c > 0 \quad (\text{E.10c})$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx &= \frac{2ax + b}{4a} \sqrt{ax^2 + bx + c} \\ &\quad + \frac{4ac - b^2}{8a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

E.2 Funciones trigonométricas

$$\int \operatorname{sen}^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x \quad (\text{E.12})$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin 2x \quad (\text{E.13})$$

$$\int \frac{dx}{a + b \sin x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctg \left[\frac{a \cdot \operatorname{tg}(x/2) + b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right], \quad a^2 > b^2 \quad (\text{E.14})$$

$$\int \frac{dx}{a + b \cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctg \left[\frac{(a - b) \operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right], \quad a^2 > b^2 \quad (\text{E.15})$$

$$\int \frac{dx}{(a + b \cos x)^2} = \frac{b \sin x}{(b^2 - a^2)(a + b \cos x)} - \frac{a}{b^2 - a^2} \int \frac{dx}{a + b \cos x} \quad (\text{E.16})$$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln |\cos x| \quad (\text{E.17})$$

$$\int \operatorname{tgh} x \, dx = \ln \cosh x \quad (\text{E.17a})$$

$$\int e^{ax} \sin x \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + 1} (a \sin x - \cos x) \quad (\text{E.18})$$

$$\int e^{ax} \sin^2 x \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + 4} \left(a \sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \frac{2}{a} \right) \quad (\text{E.18a})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \, dx = \sqrt{\pi/a} \quad (\text{E.18b})$$

E.3 Funciones gamma

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} \, dx \quad (\text{E.19a})$$

$$= \int_0^1 [\ln(1/x)]^{n-1} \, dx \quad (\text{E.19b})$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad \text{para } n = \text{entero positivo} \quad (\text{E.19c})$$

$$n\Gamma(n) = \Gamma(n+1) \quad (\text{E.20})$$

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \quad (\text{E.21})$$

$$\Gamma(1) = 1 \quad (\text{E.22})$$

$$\Gamma(1\frac{1}{4}) = 0,906 \quad (\text{E.23})$$

$$\Gamma(1\frac{3}{4}) = 0,919 \quad (\text{E.24})$$

$$\Gamma(2) = 1 \quad (\text{E.25})$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right)} \quad (\text{E.26})$$

$$\int_0^1 x^m (1-x^2)^n dx = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(n+\frac{m+3}{2}\right)} \quad (\text{E.27})$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}, \quad n > -1 \quad (\text{E.27a})$$

E.4 Integrales elípticas*

Integral elíptica de *primera especie*:

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad |k| < 1 \quad (\text{E.28a})$$

$$= \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}, \quad x = \sin \varphi \quad (\text{E.28b})$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \frac{\pi}{2} \left[1 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{9}{64} k^4 + \dots \right] \quad (\text{E.29})$$

Integral elíptica de *segunda especie*:

$$E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad (\text{E.30a})$$

$$= \int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2 x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad x = \sin \varphi \quad (\text{E.30b})$$

** Se dan tablas numéricas muy extensas, por ejemplo, en ADAMS y HIPPISLEY (Ad22); en DWIGHT (Dw61) pueden encontrarse tablas más breves.

APÉNDICE F

Relaciones diferenciales en los distintos sistemas de coordenadas

F.1 Coordenadas rectangulares

$$\mathbf{grad} \ U = \nabla \ U = \sum_i \mathbf{e}_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \quad (\text{F.1})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \sum_i \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \quad (\text{F.2})$$

$$\mathbf{curl} \ \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \quad (\text{F.3})$$

$$\nabla^2 U = \nabla \cdot \nabla U = \sum_i \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} \quad (\text{F.4})$$

F.2 Coordenadas cilíndricas

Véanse figuras F-1 y F-2.

$$x_1 = r \cos \theta; \quad x_2 = r \sin \theta; \quad x_3 = z \quad (\text{F.5})$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}; \quad \theta = \arctan \frac{x_2}{x_1}; \quad z = x_3 \quad (\text{F.6})$$

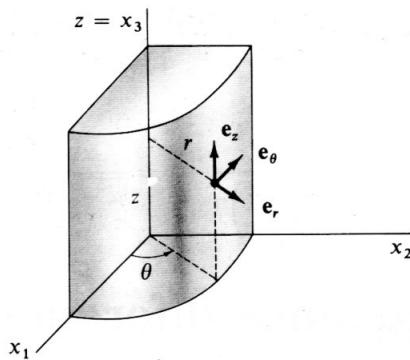


FIG. F-1

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 \quad (\text{F.7})$$

$$dv = r dr d\theta dz \quad (\text{F.8})$$

$$\mathbf{grad} \psi = \mathbf{e}_r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (\text{F.9})$$

$$\operatorname{div} A = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{F.10})$$

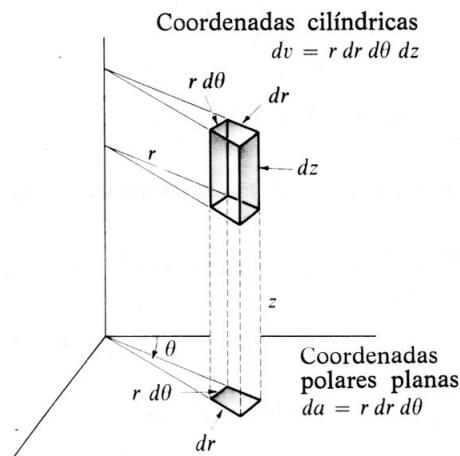


FIG. F-2

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{A} = & \mathbf{e}_r\left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right) + \mathbf{e}_\theta\left(\frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) \\ & + \mathbf{e}_z\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\end{aligned}\quad (\text{F.11})$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (\text{F.12})$$

F.3 Coordenadas esféricas

Véanse figuras F-3 y F-4.

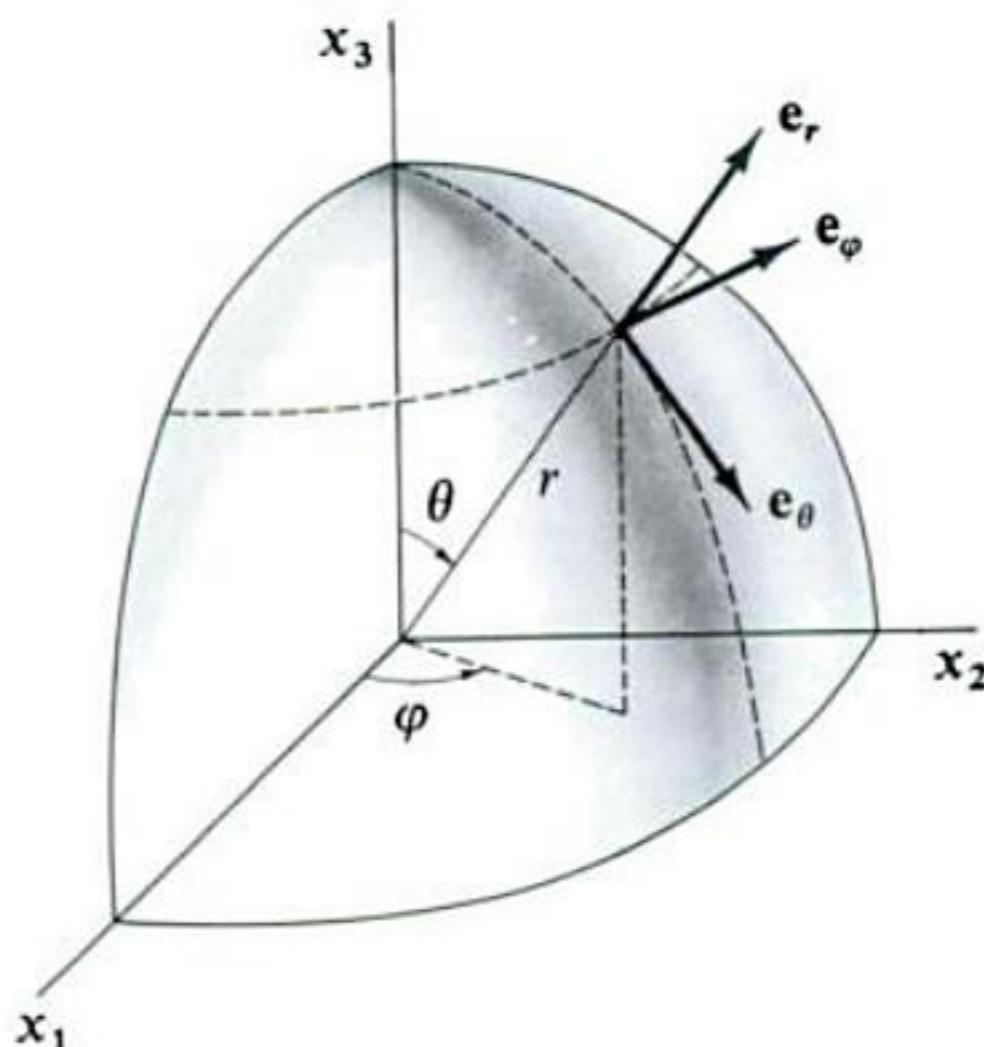


FIG. F-3

$$x_1 = r \sin \theta \cos \varphi; \quad x_2 = r \sin \theta \sin \varphi; \quad x_3 = r \cos \theta \quad (\text{F.13})$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}; \quad \theta = \arccos \frac{x_3}{r}; \quad \varphi = \arctg \frac{x_2}{x_1} \quad (\text{F.14})$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (\text{F.15})$$

$$dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \quad (\text{F.16})$$

$$\operatorname{grad} \psi = \mathbf{e}_r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \quad (\text{F.17})$$

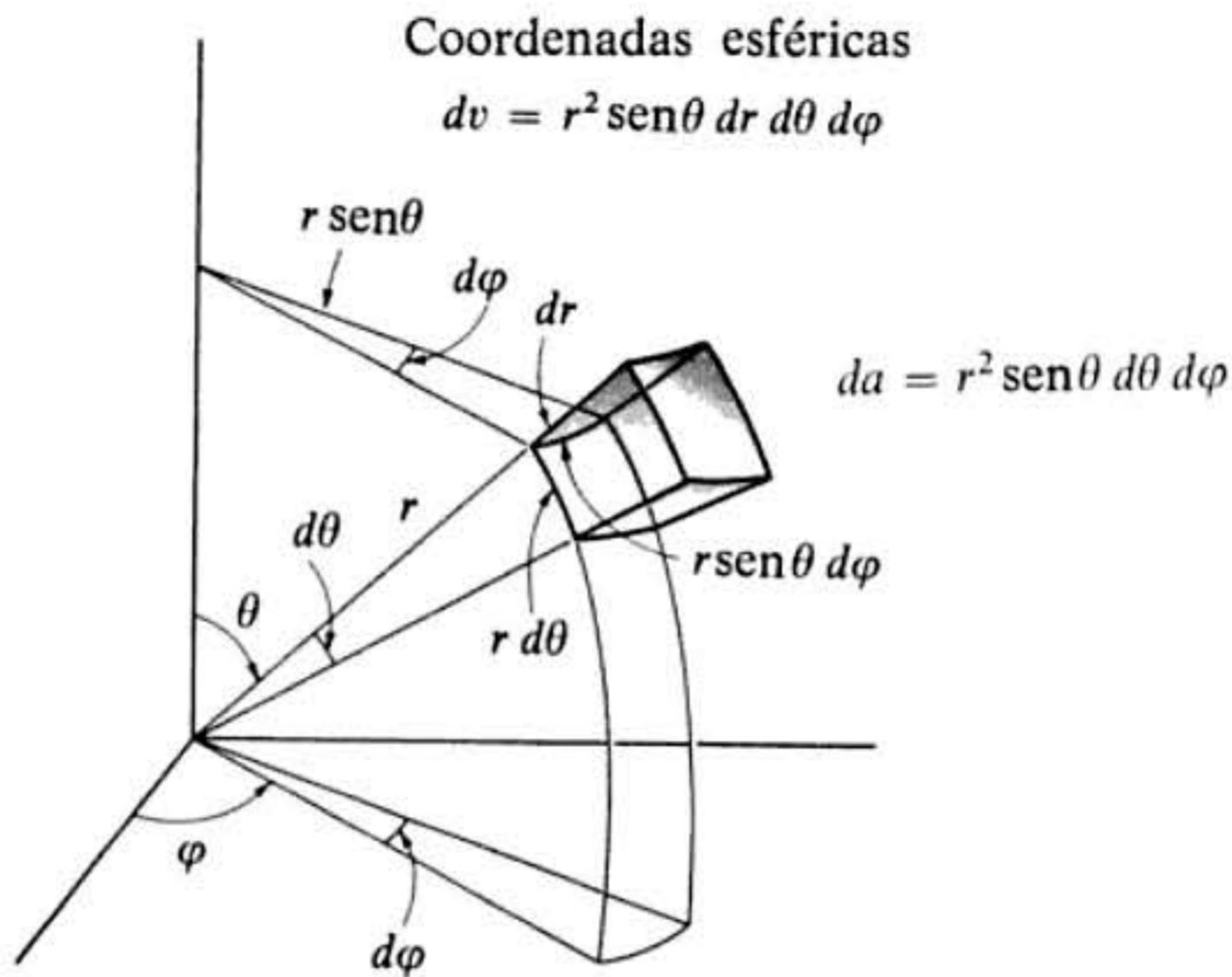


FIG. F-4

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \operatorname{sen} \theta) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \quad (\text{F.18})$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \mathbf{e}_r \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \operatorname{sen} \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \\ &\quad + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \left(\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \operatorname{sen} \theta \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right) \\ &\quad + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (\text{F.19})$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \quad (\text{F.20})$$

APÉNDICE G

Una “demostración” de la relación

$$\sum_{\mu} x_{\mu}^2 = \sum_{\mu} x'^{\mu 2}$$

Consideremos dos sistemas inerciales K y K' que se mueven a una velocidad v relativa entre ellos. En el momento en que los orígenes de ambos coinciden ($t=0$, $t'=0$), se emite un pulso luminoso desde el punto ocupado por los mismos. El segundo postulado de Einstein impone que las ecuaciones que describen la propagación de los frentes de onda en los dos sistemas tengan la misma forma:

$$\sum_j x_j^2 - c^2 t^2 = \sum_{\mu} x_{\mu}^2 \equiv s^2 = 0 \quad \text{en } K \tag{G.1a}$$

$$\sum_j x'^{\mu 2} - c^2 t'^2 = \sum_{\mu} x'^{\mu 2} \equiv s'^2 = 0 \quad \text{en } K' \tag{G.1b}$$

Estas ecuaciones establecen que la anulación del intervalo tetradimensional entre dos sucesos en un sistema inercial implica la anulación del intervalo entre los mismos sucesos en cualquier otro sistema inercial. Pero necesitamos más; de hecho, tenemos que demostrar que, en general, es $s^2 = s'^2$.

Entonces, si imponemos que el movimiento de una partícula, cuando se observa como *lineal* en un sistema K , ha de ser también lineal en el sistema K' , las ecuaciones de cambio de coordenadas que ligan las x_{μ} y las x'^{μ} deberán ser por su

parte también lineales. En tal caso, las formas cuadráticas s^2 y s'^2 podrán estar ligadas, cuando más, por un coeficiente de proporcionalidad:

$$s'^2 = \kappa s^2 \quad (\text{G.2})$$

Podríamos pensar que el coeficiente κ dependa de las coordenadas, del tiempo y de la velocidad relativa de ambos sistemas. Tal como señalamos en la sección 2.3, el espacio y el tiempo asociados a un sistema de referencia inercial son *homogéneos*, por lo que la relación entre s^2 y s'^2 no puede variar de un punto a otro del espacio ni en instantes diferentes; en consecuencia, el coeficiente κ no puede depender de las coordenadas ni del tiempo. No obstante, nos queda como posible una dependencia con v , si bien la *isotropía* del espacio prohíbe toda dependencia con la *dirección* de v . Hemos reducido, por tanto, la posible dependencia de s'^2 con s^2 a un coeficiente que a lo sumo dependerá del módulo de v . Es decir, tendremos

$$s'^2 = \kappa(v) s^2 \quad (\text{G.2a})$$

Haciendo el cambio de K' a K , obtendríamos

$$s^2 = \kappa(-v) s'^2$$

donde aparece $-v$ puesto que la velocidad de K con relación a K' es la opuesta a la de K' con relación a K . Pero, como ya hemos razonado que el coeficiente κ sólo puede depender del *módulo* de v , resultarán las dos ecuaciones

$$s'^2 = \kappa(v) s^2; \quad s^2 = \kappa(v) s'^2 \quad (\text{G.3})$$

cuya combinación nos dará $\kappa^2 = 1$, o sea $\kappa(v) = \pm 1$. Ahora, el valor de $\kappa(v)$ no puede ser función discontinua de v . Es decir, si v varía en cierta cantidad por unidad de tiempo, κ no puede saltar bruscamente desde $+1$ a -1 . Evidentemente, en el límite en que la velocidad se hace cero, los sistemas K y K' se hacen coincidentes, con lo que $\kappa(v=0) = +1$. De aquí,

$$\kappa = +1 \quad (\text{G.4})$$

cualquiera que sea el valor de la velocidad y, finalmente, tendremos

$$s^2 = s'^2 \quad (\text{G.5})$$

Esta importantísima conclusión establece que el intervalo tetradimensional entre dos sucesos es el mismo en todos los sistemas inerciales de referencia.

Referencias seleccionadas

Los textos siguientes se recomiendan especialmente como fuentes de información general de material de lectura complementaria.

A. Física general teórica

BLASS (Bl62), *Theoretical Physics*.

LINDSAY y MARGENAU (Li36), *Foundations of Physics*.

WANGNESS (Wa63), *Introduction to Theoretical Physics*.

B. Mecánica a nivel medio

BECKER (Be54), *Introduction of Theoretical Mechanics*.

LINDSAY (Li61), *Physical Mechanics*.

SLATER y FRANK (Sl47), *Mechanics*.

SYMON (Sy60), *Mechanics*.

C. Mecánica superior

GOLDSTEIN (Go50), *Classical Mechanics*.

LANDAU y LIFSHITZ (La60), *Mecánica*, Editorial Reverté, S. A.

MCCUSKEY (Mc59), *An Introduction to Advanced Dynamics*.

D. Métodos matemáticos

ARFKEN (Ar66), *Mathematical Methods for Physicists*.

CHURCHILL (Ch41), *Fourier series and Boundary Value Problems*.

DAVIS (Da61), *Introduction to Vector Analysis*.

DWIGHT (Dw61), *Tables of Integrals and Other Mathematical Data*.

KAPLAN (Ka52), *Advanced Calculus*.

PIPES (Pi46), *Applied Mathematics for Engineers and Physicists*.

Bibliografía

- Ab50 M. Abraham y R. Becker, *The Classical Theory of Electricity and Magnetism*; trad. de la 14.^a ed. alemana. Hafner, Nueva York, 1950.
- Ad22 E. P. Adams y R. L. Hippisley, *Smithsonian Mathematical Formulae and Tables of Elliptic Functions*. Smithsonian Institution, Washington, D.C., 1922.
- Am63 American Association of Physics Teachers, *Special Relativity Theory Selected Reprints*. American Institute of Physics, Nueva York, 1963.
- An49 A. A. Andronow y C. E. Chaikin, *Theory of Oscillations*, trad. de la ed. rusa de 1937. Princeton Univ. Press, Princeton, Nueva Jersey, 1949.
- Ar66 G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, Nueva York, 1966.
- Ba59 R. H. Baker, *Astronomy*, 7.^a ed. Van Nostrand, Princeton, Nueva Jersey, 1959.
- Ba60 R. M. L. Baker, Jr., y M. W. Makemson, *An Introduction to Astrodynamics*. Academic Press, Nueva York, 1960.
- Ba61 A. Baldin, V. I. Goldanskii e I. L. Rozental, *Kinematics of Nuclear Reactions*. Oxford Univ. Press, Londres y Nueva York, 1961.
- Ba63 R. G. Barnett y J. N. Fujii, *Vectors*. Wiley, Nueva York, 1963.
- Be46 P. G. Bergmann, *Introduction to the Theory of Relativity*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1946.
- Be54 R. A. Becker, *Introduction to Theoretical Mechanics*. McGraw-Hill, Nueva York, 1954.
- Be64 R. Bellman, *Perturbation Techniques in Mathematics, Physics, and Engineering*. Holt, Nueva York, 1964.
- Bl46 G. A. Bliss, *Lectures on the Calculus of Variations*. Univ. of Chicago Press, Chicago, Illinois, 1946.
- Bl61 V. M. Blanco y S. W. McCuskey, *Basic Physics of the Solar System*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1961.

- Bl62 G. A. Blass, *Theoretical Physics*. Appleton-Century-Crofts, Nueva York, 1962.
- Bo64 H. Bondi, *Relativity and Common Sense*. Doubleday, Nueva York, 1964.
- Bo65 D. Bohm, *The Special Theory of Relativity*. Benjamin, Nueva York, 1965.
- Br46 L. Brillouin, *Wave Propagation in Periodic Structures*. McGraw-Hill, Nueva York, 1946; reimpresión de Dover, Nueva York, 1953.
- Br60 L. Brillouin, *Wave Propagation and Group Velocity*. Academic Press, Nueva York, 1960.
- Br61 D. Brauwer y G. M. Clemence, *Methods of Celestial Mechanics*. Academic Press, Nueva York, 1961.
- Br68 T. C. Bradbury, *Theoretical Mechanics*. Wiley, Nueva York, 1968.
- By13 W. E. Byerly, *An Introduction to the Use of Generalized Coordinates in Mechanics and Physics*. Ginn, Boston, Massachusetts, 1913.
- Ca41 H. S. Carslaw y J. C. Jaeger, *Operational Methods in Applied Mathematics*. Oxford Univ. Press, Londres y Nueva York, 1941.
- Ch41 R. V. Churchill, *Fourier Series and Boundary Value Problems*. McGraw-Hill, Nueva York, 1941.
- Ch44 R. V. Churchill, *Operational Methods in Engineering*. McGraw-Hill, Nueva York, 1944.
- Ch58 R. V. Churchill, *Operational Mathematics*, 2.^a ed. McGraw-Hill, Nueva York, 1958.
- Co49 C. A. Coulson, *Waves*. Wiley (Interscience), Nueva York, 1949.
- Co53 R. Courant y D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. 1. Wiley (Interscience), Nueva York, 1953.
- Co54 F. W. Constant, *Theoretical Physics: Mechanics of Particles, Rigid and Elastic Bodies, Fluids, and Heat Flow*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1954.
- Co60 H. C. Corben y P. Stehle, *Classical Mechanics*, 2.^a ed. Wiley, Nueva York, 1960.
- Co62 D. R. Corson y P. Lorrain, *Introduction to Electromagnetic Fields and Waves*. Freeman, San Francisco, California, 1962.
- Cr63 F. H. Crawford, *Heat, Thermodynamics, and Statistical Physics*. Harcourt, Brace y World, Nueva York, 1963.
- Da61 H. F. Davis, *Introduction to Vector Analysis*. Allyn & Bacon, Boston, Massachusetts, 1961.
- Da62 J. M. A. Danby, *Fundamentals of Celestial Mechanics*. Macmillan, Nueva York, 1962.
- Da63 H. F. Davis, *Fourier Series and Orthogonal Functions*. Allyn & Bacon, Boston, Massachusetts, 1963.
- De62 J. W. Dettman, *Mathematical Methods in Physics and Engineering*. McGraw-Hill, Nueva York, 1962.
- Dw61 H. B. Dwight, *Tables of Integrals and Other Mathematical Data*, 4.^a ed. Macmillan, Nueva York, 1961.
- Ed30 Sir A. S. Eddington, *The Nature of the Physical World*. Macmillan, Nueva York, 1930.

- Ei63 R. L. Eisenman, *Matrix Vector Analysis*. McGraw-Hill, Nueva York, 1963.
- Er54 A. Erdélyi, *Tables of Integral Transforms*. Vol. 1. McGraw-Hill, Nueva York, 1954.
- Fe59 N. Feather, *The Physics of Mass, Length, and Time*. Edinburg Univ. Press. Edimburgo, 1959.
- Fe61 N. Feather, *An Introduction to the Physics of Vibrations and Waves*. Edinburgh Univ. Press, Edimburgo, 1961.
- Fo62 G. R. Fowles, *Analytical Mechanics*. Holt, Nueva York, 1962.
- Go50 H. Goldstein, *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1950.
- Go68 R. H. Good, *Basic Concepts of Relativity*. Reinhold, Nueva York, 1968.
- Ha62 J. Haag, *Oscillatory Motions*. Wadsworth, Belmont, California, 1962.
- Ha62a R. L. Halfman, *Dynamics*, 2 vols. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1962.
- Ha64 C. Hayashi, *Nonlinear Oscillations in Physical Systems*. McGraw-Hill, Nueva York, 1964.
- Ha65 W. Hauser, *Introduction to the Principles of Mechanics*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1965.
- Ho48 W. V. Houston, *Principles of Mathematical Physics*, 2.^a ed. McGraw-Hill, Nueva York, 1948.
- Ho64 H. Hochstadt, *Differential Equations—A Modern Approach*. Holt, Nueva York, 1964.
- In27 E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations*. Longmans, Green, Nueva York, 1927; reimpresión de Dover, Nueva York, 1944.
- Ir59 J. Irving y N. Mullineux, *Mathematics in Physics and Engineering*. Academic Press, Nueva York, 1959.
- Ja60 B. Jaffe, *Michelson and the Speed of Light*. Doubleday, Nueva York, 1960.
- Ja62 J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*. Wiley, Nueva York, 1962.
- Je46 H. Jeffreys y B. S. Jeffreys, *Mehods of Mathematical Physics*. Cambridge Univ. Press, London y Nueva York, 1946.
- Jo50 G. Joos y I. M. Freeman, *Theoretical Physics*, 2.^a ed. Hafner, Nueva York, 1950.
- Ka52 W. Kaplan, *Advanced Calculus*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1952.
- Ka63 P. van de Kamp, *Elements of Astrodynamics*. Freeman, San Francisco, California, 1963.
- Ka64 R. Katz, *An Introduction to the Special Theory of Relativity*. Van Nostrand, Princeton, Nueva Jersey, 1964.
- Ka67 C. Kacser, *Introduction to the Special Theory of Relativity*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1967.
- Ke29 O. D. Kellogg, *Foundations of Potential Theory*. Springer, Berlín, 1929, reimpresión de Dover, Nueva York, 1953.
- Ko69 E. J. Konopinski, *Classical Descriptions of Motion*. Freeman, San Francisco, 1969.
- Ku58 Y. H. Ku, *Analysis and Control of Nonlinear Systems*. Ronald Press, Nueva York, 1958.

- La49 C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics*. Univ. de Toronto Press, Toronto, 1949.
- La51 L. D. Landau y E. M. Lifshitz, *Teoría clásica de los campos*. Editorial Reverté, S. A.
- La60 L. D. Landau y E. M. Lifshitz, *Mecánica*, Editorial Reverté, S. A.
- Le59 R. B. Leighton, *Principles of Modern Physics*. McGraw-Hill, Nueva York, 1959.
- Li36 R. B. Lindsay y H. Margenau, *Foundations of Physics*. Wiley, Nueva York, 1936; reimpresión de Dover, Nueva York, 1957.
- Li51 R. B. Lindsay, *Conceps and Methods of Theoretical Physics*. Van Nostrand, Princeton, Nueva Jersey, 1951.
- Li60 R. B. Lindsay, *Mechanical Radiation*. McGraw-Hill, Nueva York, 1960.
- Li61 R. B. Lindsay, *Physical Mechanics*, 3.^a ed. Van Nostrand, Princeton, Nueva Jersey, 1961.
- Li64 B. W. Lindgren, *Vector Calculus*. Macmillan, Nueva York, 1964.
- Lo23 H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minowski, y H. Weylt, *The Principle of Relativity*, traducción y reimpresión en inglés de la edición original, por Dover, Nueva York, 1952.
- Ma35 W.F. Magie, *A Source Book in Physics*. McGraw-Hill, Nueva York, 1935.
- Ma43 H. Margenau y G. M. Murphy, *The Mathematics of Physics and Chemistry*. Van Nostrand, Princeton, Nueva Jersey, 1943.
- Ma50 H. Margenau, *The Nature of Physical Reality*. McGraw-Hill, Nueva York, 1950.
- Ma58 K. B. Mather y P. Swan, *Nuclear Scattering*. Cambridge Univ. Press, London y Nueva York, 1958.
- Ma59 J. B. Marion, T. I. Arnette, y H. C. Owens, «Tables for the Transformation Between the Laboratory and Center-of-mass Coordinate Systems and for the Calculation of the Energies of Reaction Products». Oak Ridge National Lab. Rept. ORNL-2574, 1959.
- Ma60 E. Mach, *The Science of Mechanics*, 6.^a ed. am. Open Court, LaSalle, Illinois, 1960. (Edición original alemana publicada en 1883.)
- Ma65a J. B. Marion, *Principles of Vector Analysis*. Academic Press, Nueva York, 1965.
- Ma65b J. B. Marion, *Classical Electromagnetic Radiation*. Academic Press, Nueva York, 1965.
- Ma65c K. Magnus, *Vibrations*. Blackie, Glasgow y Londres, 1965.
- Mc51 N. W. McLachlan, *Theory of Vibrations*. Dover, Nueva York, 1951.
- Mc59 S. W. McCuskey, *An Introduction to Advanced Dynamics*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1959.
- Mc61 D. B. McLaughlin, *Introduction to Astronomy*. Houghton-Mifflin, Boston, Massachusetts, 1961.
- Mc63 S. W. McCuskey, *Introduction to Celestial Mechanics*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1963.
- Me53 D. H. Menzel, *Mathematical Physics*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1953.

- Mi47 N. Minorsky, *Introduction to Non-linear Mechanics*. Edwards, Ann Arbor, Michigan, 1947.
- Mo48 P. M. Morse, *Vibration and Sound*, 2.^a ed. McGraw-Hill, Nueva York, 1948.
- Mø52 C. Møller, *Theory of Relativity*. Oxford Univ. Press, London y Nueva York, 1952.
- Mo53 P. M. Morse y H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, 2 vols. McGraw-Hill, Nueva York, 1953.
- Mo53a P. Morrison, «A Survey of Nuclear Reactions», en *Experimental Nuclear Physics* (E. Segré, ed.), vol. II. Wiley, Nueva York, 1953.
- Mo58 F. F. Moulton, *An Introduction to Celestial Mechanics*, 2.^a ed. Macmillan, Nueva York, 1958.
- Mo60 J. Monahan, en *Fast Neutron Physics* (J. B. Marion y J. L. Fowler, Parte I, cap. I.B. Wiley (Interscience), Nueva York, 1960.
- Mo62 P. M. Morse, *Thermal Physics*. Benjamin, Nueva York, 1962.
- Mu60 G. M. Murphy, *Ordinary Differential Equations and Their Solutions*. Van Nostrand, Princeton, Nueva Jersey, 1960.
- Ne62 E. P. Ney, *Electromagnetism and Relativity*. Harper, Nueva York, 1962.
- Ow63 G. E. Owen, *Introduction to Electromagnetic Theory*. Allyn & Bacon, Boston, Massachussetts, 1963.
- Pa52 L. Page, *Introduction to Theoretical Physics*, 3.^a ed. Van Nostrand, Princeton, Nueva Jersey, 1952.
- Pa58 W. Pauli, *Theory of Relativity*. Macmillan (Pergamon Press), Nueva York, 1958 (traducción al inglés de la publicación original, 1921).
- Pa62 W. K. H. Panofsky y M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*. Addison-Wesley, Reading, Massachussetts, 1962.
- Pe53 E. R. Peck, *Electricity and Magnetism*. McGraw-Hill, Nueva York, 1953.
- Ph33 H. B. Phillips, *Vector Analysis*. Wiley, Nueva York, 1933.
- Pi46 L. A. Pipes, *Applied Mathematics for Engineers and Physicists*. McGraw-Hill, Nueva York, 1946.
- Pi57 B. O. Pierce y R. M. Foster, *A Short Table of Integrals*, 4.^a ed. Ginn, Boston, Massachussetts, 1957.
- Ra40 A. S. Ramsey, *An Introduction to the Theory of Newtonian Attraction*. Cambridge Univ. Press, Londres y Nueva York, 1940.
- Ra94 J. W. S. Rayleigh, *The Theory of Sound*, 2.^a ed., 2 vols. Macmillan, Londres, 1894; reimpresión de Dover. Nueva York, 1945.
- Re60 J. R. Reitz y F. J. Milford, *Foundation of Electromagnetic Theory*. Addison-Wesley, Reading, Massachussetts, 1960.
- Re68 R. Resnick, *Introduction to Special Relativity*. Wiley, Nueva York, 1968.
- Ro64 W. G. V. Rosser, *An Introduction to the Theory of Relativity*. Butterworth, Londres y Washington, D.C., 1964.
- Ri69 F. K. Richtmyer, E. H. Kennard, y J. N. Cooper, *Introduction to Modern Physics*, 6.^a ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1969.
- Sc55 L. J. Schiff, *Quantum Mechanics*, 2.^a ed. McGraw-Hill, Nueva York, 1955.
- Sc59 W. T. Scott, *The Physics of Electricity and Magnetism*. Wiley, Nueva York. 1959.

- Se58 F. W. Sears, *Mechanics, Wave Motion, and Heath*. Addison-Wesley, Reading, Massachussetss, 1958.
- Sh61 C. W. Sherwin, *Basic Concept of Physics*. Holt, Nueva York, 1961.
- Sh63 R. V. Sharman, *Vibrations and Waves*. Butterworth, Londres y Washington, D.C., 1963.
- Sl47 J. C. Slater y N. H. Frank, *Mechanics*. McGraw-Hill, Nueva York, 1947.
- Sm53 W. M. Smart, *Celestial Mechanics*. Longmans, Green, Nueva York, 1953.
- So50 A. Sommerfeld, *Mechanics*. Academic Press, Nueva York, 1950.
- Sp59 M. R. Spiegel, *Vector Analysis and Introduction to Tensor Analysis*. Schaum, Nueva York, 1959.
- St41 J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*. McGraw Hill, Nueva York, 1941.
- St50 J. J. Stoker, *Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems*. Wiley (Interscience), Nueva York, 1950.
- Sy60 K. R. Symon, *Mechanics*, 2.^a ed. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1960.
- Ta63 E. F. Taylor, *Introductory Mechanics*. Wiley, Nueva York, 1963.
- Ta66 E. F. Taylor y J. A. Wheeler, *Spacetime Physics*. Freeman, San Francisco, 1966.
- Te56 G. Temple y W. G. Bickley, *Rayleigh's Principe and Its Application to Engineering*. Dover, Nueva York, 1956.
- To34 R. C. Tolman, *Relativity, Thermodynamics, and Cosmology*. Oxford Univ. Press, Londres y Nueva York, 1934.
- To38 R. C. Tolman, *The Principles of Statistical Mechanics*. Oxford Univ. Press, Londres y Nueva York, 1938.
- Tu04 H. H. Turner, *Astronomical Discovery*, Arnold, London, 1904; reimpresión de la University of California Press, Berkeley, California, 1963.
- va60 B. van der Pol, *Selected Scientific Papers* (H. Bremmer y C. J. Bouwkamp, editores), 2 vols. North-Holland Publ., Amsterdam, 1960.
- Wa63 R. K. Wangsness, *Introduction to Theoretical Physics*. Wiley, Nueva York, 1963.
- Wa63a R. K. Wangsness, *Introductory Topics in Theoretical Physics*. Wiley, Nueva York, 1963.
- We52 R. Weinstock, *Calculus of Variations*. McGraw-Hill, Nueva York, 1952.
- We61 J. Weber, *General Relativity and Gravitational Waves*. Wiley (Interscience), Nueva York, 1961.
- Wh37 E. T. Whittaker, *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, 4.^a ed. Cambridge Univ. Press, Londres y Nueva York, 1937; reimpresión de Dover, Nueva York, 1944.
- Wh53 E. T. Whittaker, *A History of the Theories of Aether and Electricity; Vol. II: The Modern Theories*. Nelson, Londres, 1953; reimpresión de Harper y Hnos, Nueva York, 1960.
- Wi41 A. Wintner, *The Analytical Foundation of Celestial Mechanics*. Princeton Univ. Press, Princeton, Nueva Jersey, 1941.
- Ye64 N. V. Yefimov, *Quadratic Forms and Matrices*. Academic Press, Nueva York, 1964.
- Yo60 W. Yourgrau y S. Mandelstam, *Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory*. Pitman, Nueva York, 1960.

Índice alfabético

A

Acción, 224 y ss.
mínima, principio de, 224
Aceleración, 32 y ss., 64 y ss.
centrípeta, 393
constante de la, 87, 291, 395 y ss.
en coordenadas cilíndricas, 33
esféricas, 33
polares, 33 y ss.
rectangulares, 33, 35
debida a la gravedad, 55, 59, 86 y ss.,
395 y ss.
fuerza y, 63 y ss.
en sistemas de coordenadas giratorias,
389 y ss.
Adams, J. C., 301
Afelio, 288, 302
Amortiguamiento, 114 y ss., 132 y ss.
por radiación, 136
Anomalía, 292
excéntrica, 295 y ss.
media, 297 y ss.
verdadera, 292 y ss.
Apocentro, 288

Apogeo, 288
Apsidal, ángulo, 300 y ss.
distancia, 287, 290, 300
Apsides, 288
Areolar, velocidad, 279 y ss.
Argand, J. R., 603
diagrama de, 603
Asteroide, 294, 322
Atenuación, 566 y ss., 589
Atwood, G., 269

B

Baden-Powell, 563
Balística, movimiento, 60 y ss., 394 y ss.
tablas, 60
Bernoulli, Daniel, 465, 557, 612
Bernoulli, Jakob, 201
Bernoulli, Johann, 60, 201, 208, 288
Bessel, F. W., 460
Beta, desintegración, 85
Binomio, desarrollo del, 621
Bohnenberger, G. J. Von, 460
Bohr, N., 349

Boltzman, L., 97
 Born, M., 96
 Brahe, Tycho, 279
 Braquistócrona, problema de la, 208 y ss.
 Brillouin, L., 574
 Brown, E. W., 299

C

Cálculo de variaciones con condiciones auxiliares, 213 y ss.
 de distintas variables dependientes, 213 y ss.
 ecuación de Euler, en el, 206 y ss.
 principio de Hamilton, 224 y ss., 231, 256
 problema de la braquistócrona, 208 y siguientes
 significado, 256 y ss.
 símbolo delta, 217 y ss.
 Campbell, G. A., 567
 Campo conservativo, 75
 energía del, 84, 86, 89
 de fuerzas, 75
 gravitatorio, 85 y ss., 89
 Canónicas de movimiento, ecuaciones, 249 y ss.
 Catenaria, 219, 223
 Cauchy, Barón A. L., 252, 444
 Cavendish, H., 85
 Cayley, A., 10
 Centro de ímpetus, sistema, 376 y ss.
 de masa, choques elásticos, 330 y ss.
 ímpetu en el sistema del, 78
 secciones eficaces, 342 y ss.
 sistema de, 75 y ss., 330, 342
 Ceres (asteroide), 294
 Ciclo límite, 179
 Cicloide, 101, 128, 209
 Ciclotrónica, pulsación, 100
 Cidenas de Babilonia, 448
 Clairaut, A. C., 557
 Clausius, R. J. E., 265
 Conservación, teoremas de (*véase Teoremas de conservación*)
 Constante de propagación, 560
 Coordenadas cíclicas, 255 y ss., 278
 cilíndricas, 33, 629 y ss.
 esféricas, 35, 631 y ss.
 relaciones vectoriales, 631 y ss.

Coordenadas esféricas, velocidad, 35
 generalizadas, 227 y ss., 255 y ss. (*véase también Velocidad generalizada*)
 ecuación de Lagrange en las, 230 y ss.
 espacio de configuración, 230, 259
 ignoradas, 255 y ss.
 propiedades, 227, 230 y ss.
 de laboratorio, sistema, 330 y ss., 346, 376 y ss.
 normales, 470, 482, 488 y ss.
 polares, 33 y ss.
 aceleración, 35
 velocidad, 35
 rectangulares, 3 y ss., 35, 629
 sistemas (*véase Sistemas de coordenadas*)
 transformación de, 3 y ss.
 Coriolis, G. G., 392
 fuerza de, 390 y ss.
 Coseno director, 6, 23
 Cotes, R., 326
 Cotes, espirales de, 326
 Coulomb, apantallado, 311
 potencial de, 311
 Covariantes, 358, 362 y ss.
 Cowan, C., 85
 Cuerda discreta, 499 y ss.
 energía, 501, 582 y ss.
 función lagrangiana, 501
 pulsada, vibración, 518 y ss., 562 y ss.
 vibrante, 499 y ss., 515 y ss.
 ecuación de onda, 529 y ss.
 secular, 502
 energía, 520 y ss.
 lagrangiana para la, 501
 método de Rayleigh, 524 y ss.
 modos normales, 506 y ss.
 no uniforme, 530 y ss.
 propagación de la energía, 582 y ss.
 pulsación propia, 503 y ss., 518
 Curl, 73
 en diferentes sistemas de coordenadas, 629 y ss.

CH

Chasles, M., 410
 Choques, ángulos de dispersión, 335 y ss., 376
 en centro de masas, 330 y ss.
 elásticos, 330, 338 y ss.

Choques, masas iguales, 336 y ss., 339 y ss., 379
 parámetro de impacto, 343 y ss.
 relaciones de energía, 338 y ss.
 relativista, 375 y ss.
 secciones eficaces, 342 y ss.
 vector velocidad, 331 y ss.

D

Decibel, 519
 Decremento, 117
 logarítmico, 117
 Degeneración en osciladores acoplados, 484, 495 y ss.
 De Moivre, fórmula de, 605
 Densidad de fase, 261
 Derivación, reglas de, 40
 Derivada direccional, 42
 Derivadas de la función escalar, 30 y ss.
 vectorial, 30 y ss.
 Desintegración beta, 85
 Determinante wronskiano, 612
 Diagonalización, 418 y ss., 432 y ss.
 Diagramas fásicos de los osciladores alienales, 176 y ss.
 armónicos, 107 y ss.
 del péndulo plano, 184 y ss.
 Dicke, R. H., 55
 Dios, sabiduría de, 224
 Dirac, P. A. M., 96
 Dirichlet, P. G. L., 201, 543
 Dispersion, 563, 574
 Distancias apsídicas, 287, 290, 300
 Distribución espectral, 572 y ss.
 de ondas planas amortiguadas, 589 y ss.

E

Eclesiastés, 597
 «Ecuación del cohete», 68 y ss.
 de Euler (*véase* Euler, ecuación de)
 Ecuación de movimiento, 280 y ss. (*véase* también Ecuación de onda)
 de los cuerpos rígidos, 441 y ss.
 de Lagrange (*véase* Lagrange, ecuación de movimiento)
 de una masa variable, 68 y ss.
 en un medio resistente, 60 y ss., 115

Ecuación para cohetes, 68
 para la cuerda discreta, 500 y ss.
 para las oscilaciones amortiguadas, 115
 armónicas forzadas, 132
 eléctricas, 121 y ss., 139 y ss.
 para osciladores acoplados, 466 y ss., 474 y ss., 482 y ss.
 armónicos, 104, 225
 en dos dimensiones, 110 y ss.
 de una partícula, 59 y ss., 170
 para el péndulo plano, 181, 226
 problemas de movimiento de fuerzas centrales, 280 y ss.
 solución aproximada, 64 y ss., 186 y ss., 293, 298 y ss., 303 y ss.
 de Sturm-Liouville, 531 y ss.
 Ecuación de onda, 529 y ss., 551 y ss.
 de onda, 529 y ss., 551 y ss.
 amortiguada, 589 y ss.
 independiente del tiempo, 560
 separación de la, 556 y ss.
 Ecuación secular de un cubo, 421
 para la cuerda vibrante, 502
 para movimientos principales de inercia, 420, 431
 para osciladores armónicos acoplados, 468, 484
 Ecuaciones canónicas de movimiento, 249 y ss.
 diferenciales, 145 y ss., 160, 611
 orbitales, 279 y ss.
 Eddington, Sir Arthur, 53
 Efectos transitorios, 138 y ss.
 Einstein, A., 96, 355 y ss.
 Elasticidad mecánica, 123, 126
 Energía «absoluta», 73
 cinética, 72 y ss., 80 y ss., 241 y ss., 365 y ss., 411 y ss., 419
 conservación de la, 74 y ss., 82 y ss., 242 y ss., 249, 279, 450
 en la cuerda discreta, 501, 582 y ss.
 vibrante, 520 y ss., 524 y ss.
 de los cuerpos rígidos, 411 y ss., 419, 453
 en los choques, 338 y ss.
 electromagnética, 84
 en las fuerzas centrales, 279 y ss., 284 y ss.
 gravitatoria, 89
 de los osciladores acoplados, 479 y ss., 489
 armónicos, 105, 108, 117, 136

Energía potencial, 72 y ss., 82, 87 y ss.
 principio de Rayleigh, 524 y ss.
 propagación de la, 582 y ss.
 relatividad, 365 y ss.
 en reposo, 366 y ss., 375
 para el sistema de partículas, 81 y ss.

Eötvös, barón R. von, 56

Equilibrio estable, 177, 179, 185, 320 y ss.
 inestable, 177, 185

Equipotencial, 90

Eros (asteroide), 294

Escalar, definición, 3, 21 y ss.
 función, 30 y ss., 40
 producto mixto, 46
 triple, 31, 46

Espacio de configuración, 230, 259, 261
 cósmico, 359
 fásico, 107, 259 y ss.
 y teorema de Liouville, 259 y ss.

homogeneidad del, 58, 246, 249, 634

ímpetus, 259
 isotropía del, 58, 246, 249, 288

Estabilidad, 177, 179
 del movimiento de los cuerpos rígidos, 455 y ss.

Euler, L., 184, 201, 207, 250, 410, 414, 418, 438, 442, 447, 455 543 557 607 612
 ángulos de 438 y ss.
 ecuación en análisis complejos, 607
 en el cálculo de variaciones, 206 y ss.
 para el movimiento de los cuerpos rígidos, 441 y ss.
 teorema de funciones homogéneas, 242 y ss.

Euler-Lagrange, ecuación de, 207, 225, 231 y ss.

Excentricidad, 288

F

Fermat, P. de, 223

Fermi, E., 85

Filtro eléctrico, 567 y ss.

Fitzgerald, G. E., 369

Fitzgerald-Lorentz, contracción de longitud de, 369 y ss.

Foucault, J. L., 402, 405
 péndulo de, 402 y ss.

Fourier, J. B. I., 543, 557
 integrales de, 575 y ss.

Fourier, series de, 145 y ss., 540 y ss.

Fuerza alineal, 169 y ss.
 centrífuga, 284 y ss., 392 y ss.
 definición, 52 y ss.
 dependencia de la velocidad, 54, 60 y ss., 76
 disipadora, 53 y ss.
 externa, 76 y ss.
 gravitatoria, 59
 interna, 76
 de las ligaduras, 232 y ss.
 líneas de, 89 y ss.
 relatividad, 365
 resistente, 60 y ss., 102
 de rozamiento, 60 y ss.

Fuerzas centrales, 54, 275
 leyes de Kepler para, 279, 291
 movimiento (*véase* Movimiento de fuerzas centrales)

derivables a partir del potencial, 72, 87 y ss.

pulsantes, 151 y ss.

Función escalón, 151 y ss.
 gamma, 627 y ss.
 de Green, 158 y ss.
 de Hamilton, 240 y ss., 249 y ss.
 relación con la energía, 244
 en la relatividad, 375

de Heaviside, 151 y ss.

hiperbólica, 607, 545

lagrangiana, 225 y ss., 230 y ss.
 en la cuerda discreta, 501
 invariancia de la, 240, 243
 para movimiento de fuerzas centrales, 276 y ss.

relación con la función de Hamilton, 240, 249
 en la relatividad especial, 271 y ss.

de onda en la cuerda no uniforme, 532 y ss.

ondas amortiguadas, 589 y ss.
 estacionarias, 561
 progresivas, 554 y ss.

ortogonal, 531 y ss., 539 y ss.

propia para cuerda no uniforme, 530 y ss.

pulso, 151 y ss.

G

Galileo, 52, 65, 184

Galileo, invariancia de, 57, 356 y ss.
 Gamma, funciones, 627 y ss.
 Gauss, K. E., 224, 291, 603
 Geiger, H., 349
 Geodésicas, 211 y ss., 219
 Gibbs, J. W., 1, 97, 149, 263, 429
 Gradiente, 39
 en diferentes sistemas de coordenadas, 629 y ss.
 Grados de libertad, 227, 261, 478
 Gravedad, aceleración, 87
 Gravitación, 85 y ss.
 aceleración de la, 87
 potencial de, 87 y ss.
 Green, G., 156
 Green, función de, 158 y ss.

H

Hamilton, Sir William R., 10, 42, 201, 224, 252, 571
 Hamilton, función (*véase* Función de Hamilton)
 principio (*véase* Principio de Hamilton)
 Heaviside, O., 1, 567, 594
 Heaviside, función de, 151 y ss.
 Heisenberg, W., 96
 Heisenberg, principio de indeterminación de, 96, 581
 Helmholtz, H. von, 75, 560
 Helmholtz, ecuación de, 560
 Herón de Alejandría, 223
 Hertz, H. R., 224
 Hooke, R., 104, 398
 Hooke, ley de, 104 y ss.
 Huygens, C., 184, 284, 330, 414

I

Indeterminación, principio de, 96, 581
 Inducción mutua, 476 y ss.
 Inductancia, 123
 Impedancia, 141
 Impetu, 53 y ss.
 conservación del, 70, 78 y ss., 245 y ss., 249, 279
 espacio de, 259
 generalizado, 249, 259 y ss.
 lineal en la relatividad, 364 y ss.

Impetu para el sistema de partículas, 78 y ss.
 Inercia, productos de, 414
 tensor de (*véase* Tensor de inercia)
 Inerciales, sistemas de referencia, 356
 Ingalls, Cor. J. M., 60
 Integral general, 132 y ss., 616 y ss.
 particular, 132 y ss., 617 y ss.
 Integrales curvilíneas, 44
 elípticas, 628
 para el péndulo plano, 183
 de superficie, 43 y ss.
 tablas, 621 y ss.
 de volumen, 43 y ss.
 Intermodulación, 194 y ss.
 Invariancia de Galileo, 57, 356 y ss.

J

Júpiter (planeta), 292, 294, 320, 322
 Jacobi, C. G. S., 201, 256, 315
 Joule, J. P., 75

K

Kater, Cap. H., 460
 Kater, péndulo de, 460
 Kelvin, lord (*véase* Thomson, sir Williams)
 Kepler, J., 279, 291, 294
 Kepler, ecuación de, 292 y ss.
 leyes de, 279, 291 y ss.
 solución aproximada a la ecuación de, 298 y ss.
 Kronecker, L., 8

L

Lagrange, J. L., 201, 216, 224, 231, 252, 315, 321, 332, 465, 557
 Lagrange, ecuación de movimiento, 225 y ss.
 multiplicadores indeterminados, 236
 para las coordenadas generalizadas, 231 y ss.
 para la cuerda vibrante, 501
 para los cuerpos rígidos, 441 y ss.
 para el movimiento de fuerzas centrales, 281 y ss.
 para osciladores armónicos, 479 y ss., 489

- Lagrange, ecuación de movimiento, relación con la ecuación de Newton, 238 y ss.
multiplicadores de, 216, 234 y ss.
- Lagrangiana, función (*véase* Función lagrangiana)
- Laplace, P. S., 42, 301, 315
- Laplace, transformada de, 160 y ss.
- Larmor, J. J., 358
- Laser, 136
- Legendre, A. M., 201
- Leibniz, Barón G. W. von, 223, 250
- Le Verrier, U. J. J., 301
- Levi-Civita, densidad (*véase* Permutación, símbolo de)
- Ligaduras, 214 y ss., 221, 227
esclerónomas, 232
fuerza de las, 232 y ss., 235 y ss.
holónomas, 232, 234
reónomas, 232
- Linealmente dependientes, 612
independientes, 612
- Líneas de fuerza, 89 y ss.
- Liouville, J., 97, 263, 531
- Liouville, teorema de, 259 y ss., 263
- Lissajous, J. A., 112
- Lissajous, curvas de, 112
- Longitud de onda, 560
- Lorentz, H. A., 97, 355 y ss., 365, 369, 592
- Lorentz, conformación de, 592
fuerza de, 100
transformaciones de, 358 y ss.
- M
- MacLaurin, C., 600
- MacLaurin, series de, 600
- Mach, E., 52
- Marsden, E., 349
- Masa, 45 y ss.
inerte, 55, 365
pesante, 55
de los planetas, datos, 279
propia, 364 y ss.
reducida, 276, 291
en la relatividad, 364 y ss., 379 y ss.
del Sol, 292, 294
- Matriz, 6 y ss.
columna, 10 y ss.
cuadrada, 10 y ss.
fila, 10 y ss.
- Matriz de giro, 6 y s., 37
inversa de una, 13
relación con el tensor, 430
transformación de semejanza en la, 430
transpuesta, 12, 19
unidad, 12
- Matrices, condición de ortogonalidad, 8
determinantes de, 20
interpretación geométrica, 14 y ss.
productos de, 11 y ss.
suma de, 14
- Maupertuis, P. L. M. de, 223
- Maxwell, J. C., 73, 97
- Mecánica cuántica, 96
estadística, 97, 260
newtoniana, 45 y ss., 221 y ss.
ecuaciones de Lagrange y dinámica hamiltoniana, 22 y ss., 238
limitación de la, 95 y ss.
relación con la relatividad, 355 y ss.
y sistemas de referencia no inerciales, 390 y ss.
- Mercurio (planeta), 294, 301 y ss.
perihelio de, 301 y ss.
- Michelson, A. A., 355, 369
- Michell, Rev. J., 85
- Minkowski, H., 359
- Minkowski, espacio de, 359 y ss., 365
- Momento cinético, 71 y ss., 415 y ss.
conservación del, 71, 79 y ss., 246 y ss., 277 y ss.
de un cuerpo rígido, 415 y ss.
para el sistema de partículas, 79
definición, 71
de inercia, 413 y ss.
de un cubo, 414 y ss., 421
realidad del, 436 y ss.
interno, 80
- Morley, E. W., 355, 369
- Movimiento aperiódico crítico, 118 y ss.
- de los cuerpos rígidos, ángulos de Euler para, 438 y ss.
en un campo de fuerza uniforme, 444
ecuaciones de Euler para, 441 y ss.
elipsoide equivalente para, 444
estabilidad, 455 y ss.
fuerzas exteriores, 441 y ss.
mutación, 454
peonza simétrica, 444 y ss.
precesión en, 446 y s., 453 y ss.

Movimiento de los cuerpos rígidos, tensor de inercia, 410 y ss.
de las fuerzas centrales, 274 y ss. (*véase también Choques*)
ángulo apsidal para, 300 y ss.
apsidales para, 287
diagrama de energía para, 285 y ss.
ecuación de Kepler para, 258 y ss.
de movimiento, 280 y ss.
ecuaciones orbitales para, 281 y s.
estabilidad de las órbitas circulares, 306 y ss.
fuerza centrífuga en, 284
órbitas en el, 282 y s., 287 y ss.
potencial efectivo para, 284 y ss.
precesión en, 301 y ss.
problema de los tres cuerpos, 315 y ss.
integrales del, 277 y ss.
oscilatorio amortiguado, 115 y ss.
planetario (*véase Movimiento de fuerzas centrales*)
de sistemas rígidos, 409 y s.
sobreamortiguado, 119 y s.

N

Neptuno (planeta), 294, 301
Neutrino, 85
Newton, Sir Isaac, 51 y ss., 85, 92, 201, 223, 291, 394, 447, 499
Newton, enunciado de las leyes, 52 y ss.
invariancia de Galileo y leyes de, 57, 356 y s.
ley de la resistencia de, 60
leyes de, 51 y ss.
sistemas de referencia para las leyes de, 57 y ss., 390 y ss.
teoremas de conservación para las leyes de, 70 y ss.
Newtoniana, mecánica (*véase Mecánica newtoniana*)
Niven, C., 429
Número de onda complejo, 565 y s.
Números complejos, 603 y ss.
Nutación, 454 y s.

O

Onda, longitud de, 560

Onda, número de, 560
complejo de, 565 y ss.
plana (*véase Ecuación de onda*)
velocidad de fase, 562 y ss.
Ondas, paquetes de, 570 y ss.
planas amortiguadas, 589 y ss.
reflejadas, 586 y ss.
transmitidas, 586 y ss.
Operador laplaciano, 42 y ss.
en distintos sistemas de coordenadas, 629 y ss.
Órbitas, ángulos apsidales, 300
en campo central, 282 y s., 287 y ss.
circulares, estabilidad, 306 y ss.
dispersión, 345
distancias apsidales, 287
ecuaciones de Kepler, 292 y ss.
efectos relativistas, 302 y ss.
estabilidad, 306 y ss.
excentricidad, 288
para tres cuerpos, 315 y ss.
parámetros, 288 y ss.
períodos, 291 y s., 294
planetarias, datos relativos a las, 294
precesión de las, 301 y s.
punto de inversión, 287
tipos de, 288 y s.
Ortogonalidad, relación con las funciones ortogonales, 542
con las matrices de giro, 8, 19 y ss.
con los vectores propios, 437, 486 y ss.
Oscilaciones alineales, 104, 169 y ss.
amortiguadas, 114 y ss.
eléctricas, 121 y ss., 139 y ss., 567
forzadas, 131 y ss.
Osciladores alineales autolimitantes, 179
diagramas fácicos para, 175 y ss.
intermodulación, 194 y ss.
potencial para, 170 y ss.
solución por integrales elípticas, 183
en el método de perturbaciones, 186 y ss.
subarmónicos, 193 y ss.
términos seculares en las soluciones para, 188 y ss.
Osciladores armónicos, 93 y ss., 131 y ss.
acoplados, 466 y ss.
amortiguamiento, 114 y ss., 132 y ss.
diagrama fásico, 107
en dos dimensiones, 110 y ss.
ecuación de movimiento, 104, 216

Osciladores armónicos, efectos transitorios, 133 y ss.
 eléctricos, 121 y ss., 139 y ss.
 energía, 105, 108, 117, 136
 factor Q , 135, 144, 164
 frecuencia del, 104, 106
 función de Green, 158 y ss.
 isocronos, 106, 128, 184
 ley de fuerza, 104 y ss.
 método de la transformación de Laplace para, 160 y ss.
 oscilaciones forzadas, 131 y ss.
 períodos, 107
 relativistas, 384 y ss.
 resonancia, 135 y ss.
 respuestas pulsantes, 151 y ss.
 sistemas de (véase Sistemas de osciladores)

P

Pauli, W., 85
 Péndulo plano, 179 y ss.
 como oscilador alineal, 179 y ss.
 diagrama físico para el, 184 y ss.
 integral elíptica para, 183
 período del, 182 y ss.
 Péndulos acoplados, fases, 495 y ss.
 Pericentro, 288
 Perigeo, 288
 Perihelio, 288
 desplazamiento relativista del, 305
 precesión, 302 y ss.
 Permutación, propiedades del símbolo alternante, 26, 28, 47
 símbolo de, 26
 Perturbaciones en el movimiento de los cuerpos rígidos, 455 y ss.
 planetario, 301, 308 y ss.
 en las órbitas circulares, 308 y ss.
 en los sistemas acoplados, 531 y ss.
 teoría de las, 186 y ss., 531 y ss.
 Peso, 55 y ss.
 Planetas, algunas propiedades, 294
 Plutón (planeta), 294
 Poincaré, J. H., 97, 179, 315, 355
 Poison, L., 444
 Poisson, S. D., 252, 394
 Poisson, paréntesis de, 272
 Potencia, 585 y ss.
 eléctrica, 142 y ss.

Potencia, factor de, 143
 Potencial, 72 (véase también Potencial efectivo, Energía potencial)
 asimétrico, 175, 186 y ss.
 barrera de, 170, 287
 centrífugo, 285
 de Coulomb, 311
 efectivo, 451 y ss.
 para movimiento de fuerzas centrales, 285 y ss.
 general, 170 y ss.
 gravitatorio, 87 y ss.
 de una esfera hueca, 91 y ss.
 pozo de, 170 y ss.
 relación con la fuerza, 73 y ss.
 simétrico, 176
 en el sistema de partículas, 82 y ss.
 Precisión de los equinoccios, 301, 448
 de Mercurio, 301 y ss.
 en el movimiento de los cuerpos rígidos, 448 y ss., 453 y ss.
 planetario, 301 y ss.
 Principio(s) de la acción mínima, 224
 del camino más corto, 223
 de curvatura mínima, 224
 de equivalencia, 56
 de Hamilton, 222 y ss.
 análisis variacional del, 224, 230, 258
 «modificado», 257 y ss.
 relación con las leyes de Nepton, 239 y ss.
 de indeterminación, 96, 581
 de ligadura mínima, 224
 de Rayleigh, 524 y ss.
 de la relatividad de Newton, 57, 357
 de superposición, 145 y ss., 156, 169, 484, 557 y ss.
 del tiempo mínimo, 223
 Producto escalar, 22 y ss.
 invariancia, 21
 representación del módulo de un vector, 22 y ss.
 de vectores unitarios, 29
 de inercia, 414
 vectorial, 25 y ss.
 forma determinante, 30
 significación geométrica, 27
 vectores unitarios, 29
 Propagación de la energía, 582 y ss.
 Pulsación crítica de corte, 566, 569
 de una cuerda no uniforme, 531 y ss.

Pulsación, método de Rayleigh, 524 y ss.
 de ondas planas, 556 y ss.
 de los osciladores acoplados, 468 y ss.,
 484 y ss.
 alineales, 188 y s., 193 y ss.
 armónicos, 104 y s.
 en las oscilaciones amortiguadas, 115 y s.
 eléctricas, 123
 del péndulo plano, 181 y ss.
 de precesión de la peonza, 452 y ss.
 propia para circuitos eléctricos acoplados, 478
 para la cuerda discreta, 440 y ss.
 no uniforme, 532 y ss.
 vibrante, 518 y s.
 aproximación de Rayleigh, 524 y ss.
 osciladores armónicos acoplados, 468 y ss., 484 y ss.
 realidad de la, 484
 de resonancia, 135 y ss.
 Pupin, M. I., 567

Q

Q del sistema oscilatorio, 135 y s., 144, 164

R

Radio de giro, 459
 Rayleigh, Lord J. W. S., 524, 571
 Rayleigh, principio de, 524 y ss.
 Reactancia, 141
 Reich, F., 398
 Reines, F., 85
 Relatividad, 57, 97, 355 y ss.
 adición de velocidades en la, 372 y s.
 contracción de longitud en la, 369 y s.
 covariantes en la, 358, 362
 cuadrvectores en la, 363 y ss.
 choques en la, 375 y s.
 dilatación del tiempo en la, 371
 energía en la, 365 y ss.
 fuerza en la, 365
 función lagrangiana en la, 374 y s.
 ímpetu en la, 364 y ss.
 de Newton, 57, 357
 postulados, 356
 relación con la teoría de Newton, 97

Relatividad restringida, teoría de la, 355 y ss.
 teoría generalizada de la, 57, 302, 306
 tiempo propio en la, 363
 trabajo en la, 365 y s.
 transformaciones de Lorentz en la, 358 y ss.
 «triángulo relativista», 369
 velocidad en la, 364
 Resonancia en los circuitos eléctricos, 142 y s.
 en los osciladores armónicos, y s.
 Rotación infinitesimal, 37 y ss., 388
 Rutherford, Lord E., 348
 Rutherford, dispersión de, 348 y ss.

S

Saturno (planeta), 294
 Sección eficaz, 342
 en la dispersión de Rutherford, 348 y ss.
 elemental, 343 y ss.
 total, 350 y s.
 Schrödinger, E., 96, 572
 Separación de variables, 557 y ss., 589
 Separatrix, 185
 Series, tablas, 621 y ss.
 Series de Taylor, 599 y ss.
 para órbitas circulares, 308
 para osciladores, 92 y s.
 en el teorema de Liouville, 263
 Simetría, propiedades de, 248, 278
 Sistema de referencia, 10, 56 y ss.
 inercial, 56 y ss., 356, 387
 «absoluto», 57
 definición por las estrellas distantes, 57
 ensayos, 58 y s.
 homogeneidad del, 58 y s.
 invariancia de Galileo en el, 57
 isotropía del, 58 y s.
 propiedades, 58 y s.
 no inercial, 57 y s., 387 y ss.
 fuerza centrífuga en el, 392 y ss.
 de Coriolis en, 390 y ss.
 movimiento en el, 388 y ss.
 la Tierra como, 387
 Sistemas de coordenadas, 3 y ss.
 centro de ímpetus, 376 y ss.
 de masa, 75 y ss., 330 y ss.

Sistemas de coordenadas cilíndricas, 33, 629 y ss.
 divergencias en diferentes, 629 y ss.
 esféricas, 33, 35, 631 y ss.
 inversión, 20 y ss.
 polares, 33 y ss.
 rectangulares, 3 y ss., 35, 629
 rotaciones, 9 y ss., 37 y ss., 388 y ss.
 impropias, 20
 infinitesimal, 37 y ss.
 propias, 20
 transformaciones, 3 y ss.

Sistemas de osciladores, 466 y ss. (*véase también* Osciladores armónicos, Cuerda vibrante)
 armónicos acoplados, 466 y ss.
 circuitos eléctricos acoplados, 476 y ss.
 coordenadas normales, 470, 482, 488 y ss.
 cuerda vibrante, 499 y ss., 515 y ss.
 degeneración, 484, 495 y ss.
 método de las perturbaciones, 531 y ss.
 modos normales, 470 y ss., 556
 péndulos planos acoplados, 495 y ss.
 problemas generales, 478 y ss.
 vibraciones forzadas, 474 y ss.

Sistemas rígidos, movimiento (*véase* Movimiento de sistemas rígidos)

Sol, masa del, 292, 294

Snell, W., 223

Steiner, J., 425

Steiner, teorema de, 424

Stirling, J., 600

Stokes, ley de la resistencia de, 60

Sturm, J. C. F., 531

Sturm-Liouville, ecuación de, 531 y ss.

Subarmónicos, 193 y ss.

Sundman, K. F., 315

Superposición, principio de, 145 y ss., 156, 169, 484, 557 y ss.

Sylvester, J. J., 10

T

Tait, P. G., 249

Taylor, B., 599

Taylor, series (*véase* Series de Taylor)
 teorema de, 599 y ss.

Tensor, definición, 429 y ss.
 de inercia, 410 y ss.

Tensor de un cubo, 414 y ss., 421 y ss., 426 y ss., 430 y ss., 432 y ss.
 diagonalización, 418 y ss., 431 y ss.
 ecuación secular para, 420 y ss., 431
 ejes principales, 418 y ss.
 momentos principales del, 420 y ss.
 para diferentes sistemas de coordenadas, 423 y ss.
 propiedades de transformación, 428 y ss.
 relación con el momento cinético, 415 y ss.
 y la energía cinética de rotación, 411, 419
 ortogonalidad de los vectores propios, 437
 realidad de los valores propios, 437
 traza del, 461

Teorema de Taylor, 599 y ss.

Teoremas de conservación como postulados dentro de la teoría, 84
 para la energía, 74, 84
 para el ímpetu, 70, 78 y ss.
 para el momento cinético, 71, 79 y ss.
 para sistemas de partículas, 75 y ss.

Terrell, J., 370

Thomson, Sir William (Lord Kelvin), 250, 563, 566, 594

Tiempo, dilatación del, 371
 homogeneidad del, 58, 242, 249, 634
 en la mecánica newtoniana, 51, 96, 356
 en la relatividad, 96, 356 y ss., 371

Tierra como sistema de referencia no inercial, 387
 datos para la órbita de la, 294
 masa de la, 294
 movimiento relativo, 394 y ss.
 precesión de los equinoccios, 448

Tonos de combinación, 194 y ss.

Transformación de semejanza, 430

Transformaciones ortogonales, 3 y ss.
 conservación de las distancias, 25, 46
 giros, 9 y ss.
 propiedades del ángulo de conservación, 25
 relaciones para, 8
 representación geométrica, 14 y ss.

Tres cuerpos, problema de los, 315 y ss.

Troyano (asteroide), 322

U

Unidad astronómica, 291, 294
Urano (planeta), 294

V

Valores propios, realidad de los, 437, 484
Van der Pool, B., 178
Van der Pool, ecuación de, 178, 197
Variaciones, cálculo de, 201 y ss.
Vectores, 21 y ss.
 adición, 21
 axiales, 25, 37
 cálculo, 31 y ss.
 componentes de, 21
 coseno director, 23 y s.
 definición, 21 y s.
 derivadas, 31 y ss.
 el espacio tetradimensional, 363 y s.
 gravitatorios, 86
 integración de, 43 y ss.
 módulo de, 22 y s.
 producto escalar, 22 y ss.
 vectorial, 25 y ss.
 propios, ortogonalidad, 437, 486 y ss.
 para osciladores armónicos acoplados, 484 y s.
 transformación de, 21
 unitarios, 29
Velocidad, 32 y ss.
 angular, 36 y ss., 389 y ss., 410 y ss.
 dirección, 37
 módulo, 37
 a partir de la rotación infinitesimal, 37 y ss.

Velocidad en los sistemas de coordenadas giratorios, 389 y ss.
areolar, 279 y ss.
en coordenadas cilíndricas, 35
esféricas, 35
polares, 35
de escape, 101
de fase, 561 y ss.
final, 64
generalizada, 228 y s., 250, 259
de grupo, 570 y ss.
de propagación de la energía, 382 y ss.
en la relatividad, 364, 372 y s.
de señal, 574
Venus (planeta), 294
Versores, 29
Vibraciones forzadas de osciladores acoplados, 474 y ss.
Virial, teoremas del, 264 y ss., 523
Viviani, V., 405
Voight, W., 358

W

Wallis, Rev. J., 330, 603
Weierstrass, K., 201, 491
Wessel, C., 603
Wren, Sir Christopher, 330
Wronskiano, determinante, 612

Z

Zeeman, efecto, 471