Задание к лекции 6

ITMO UNIVERSITY

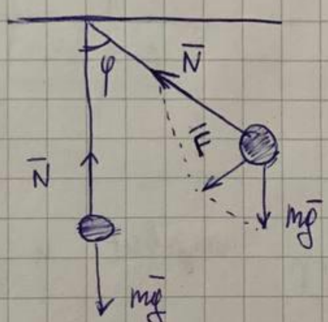
1. Выведите формулу для периода математического и физического маятников.
2. Смоделируйте затухающее колебание, возникающее в LCR контуре (параметры определяются самостоятельно контура и могут меняться). Что будет происходить с формой сигналом при увеличении сопротивления? При заданных L и C определите R, при котором процесс перестает быть периодическим. В задании должны быть представлены зависимости q(T) при различных параметрах.
3. In some diatomic molecules, the force each atom exerts on the other can be approximated by $F = -C/r^2 + D/r^3$, where r is the atomic separation and C and D are positive constants. (*a*) Graph F vs. r from $r = 0.8D/C$ to $r = 4D/C$. (*b*) Show that equilibrium occurs at $r = r_0 = D/C$. (*c*) Let $\Delta r = r - r_0$ be a small displacement from equilibrium, where $\Delta r \ll r_0$. Show that for such small displacements, the motion is approximately simple harmonic, and (*d*) determine the force constant. (*e*) What is the period of such motion? [*Hint*: Assume one atom is kept at rest.]

1.

Математический маятник: на груз действует $\bar{F}$ - возвращ. сила

пусть груз движется по окружности, а ~~во~~ не по дуге.

тогда период колебаний совпадает с периодом канонического движения груза.

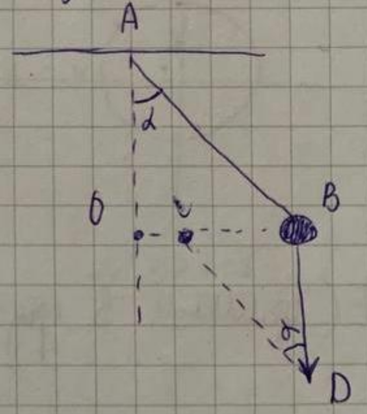


$$T_{канон.} = \frac{\cancel{?}\,L}{v} = \frac{2\pi R}{v} \quad (1)$$

L - длина окружности, по кот. движется груз.

v - скорость движения груза

если φ мало, то $F_1 = \frac{mv^2}{R}$ (2)



▶ Рассмотрим $\triangle AOB$ и $\triangle DBC$
они подобны по ~~углу~~ двум углам

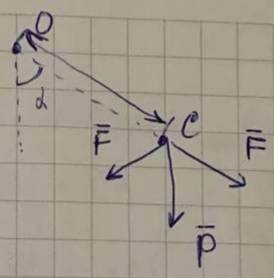
$F_1 = mg \sin\alpha = mg \frac{R}{l}$ (3)

(2) = (3) : $\frac{mv^2}{R} = mg\frac{R}{l}$

$$v = R\sqrt{\frac{g}{l}}$$

подставим в (1) : $\boxed{T = \frac{2\pi R}{R\sqrt{\frac{g}{l}}} = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}}$

физический маятник



пусть вес физ. маятника приложен к центру тяжести в точке C

на груз действует $\bar{F}$ - возвращ. сила

$F = -mg\sin\alpha$

т.к. при ~~ма~~ α малых колебания будут гармонические

$\Rightarrow F = -mg\alpha$

по основному уравнению динамики $J = ml^2$

уравнение колебаний физ маятника: ~~следующее~~,

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgL}{J}\alpha = 0 \qquad (1)$$

сравним (1) и ур-е гармонич. ~~колеб.~~ колебаний

$a_x(t) + \omega^2 x(t) = 0$

$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{mgL}{J}}$

тогда $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgL}}$

№2

LCR - контур:

Уравнение колебаний: $L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = 0 \quad \Big| : L \qquad i = \dot{q}$

$\Rightarrow \quad \ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$

т.к. $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ и пусть $\beta = \frac{R}{2L}$

$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$

решение этого дифф. уравнения: $q = q_{m_0} e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \alpha)$

- разделим на C, получим ~~напряж~~ напряжение:

$U = \frac{q_{m_0}}{C} e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha) = \underbrace{U_{m_0} e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha)}$

- продифф. по t, получим ~~силу тока~~ силу тока:

$i = \dot{q} = q_{m_0} e^{-\beta t}\Big(-\beta\cos(\omega t + \alpha) - \omega\sin(\omega t + \alpha)\Big) \Big| \cdot \frac{\omega_0}{\omega_0}$

$i = \omega_0 q_{m_0} e^{-\beta t}\left(\frac{-\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}}\cos(\omega t + \alpha) - \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}}\sin(\omega t + \alpha)\right)$

Введем ψ, такой что $\cos\psi = \frac{-\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} = -\frac{\beta}{\omega_0}$

$\sin\psi = \frac{\omega}{\omega_0}$

ITsMOre than a UNIVERSITY

$i = w_0 q_{m_0} e^{-\beta t} \cos(wt + \alpha + \varphi)$

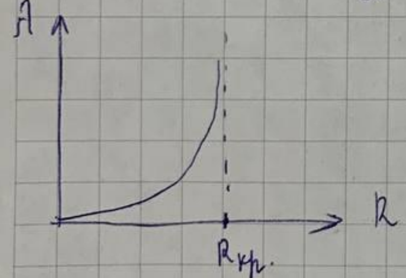
• $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}$ (1) – период затухающих колебаний

$\lambda = \beta T$ – логарифмический декремент затухание

если $\beta \ll w_0 \Leftrightarrow \frac{R}{2L} \ll \frac{1}{\sqrt{LC}}$, тогда λ зависит от R почти линейно

$\lambda \approx \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}$

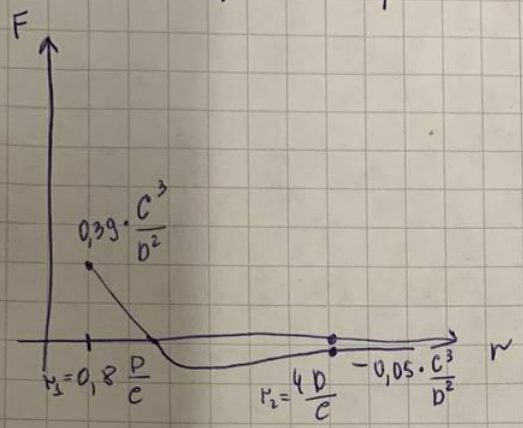
при $R \to R_{критич.}$ ($R_{критич} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ из (1)
$\lambda \to \infty$ тогда $T \to \infty$)



чем больше λ, тем быстрее затухает => сигнал быстрее убывает по амплитуде

$\boxed{№3}$ $F = \dfrac{-C}{r^2} + \dfrac{D}{r^3}$

а)



$r_1 = \dfrac{0{,}8D}{C}$

$r_2 = \dfrac{4D}{C}$

$$F(r_1) = \frac{-C\cdot C^2}{0{,}64D^2} + \frac{D\cdot C^3}{0{,}512D^3} = \frac{-C^3}{0{,}64D^2}\,\backslash 0{,}8 + \frac{C^3}{0{,}512D^2} =$$

$$= \frac{C^3 - 0{,}8C^3}{0{,}512D^2} = \frac{0{,}2C^3}{0{,}512D^2}$$

$$F(r_2) = \frac{-C\cdot C^2}{16D^2} + \frac{D\cdot C^3}{64D^3} = \frac{C^3}{64D^2} - \frac{C^3}{16D^2}\,\backslash 4 =$$

$$\frac{-3C^3}{64D^2}$$

б) $F(r_0) : \dfrac{-C}{r_0^2} + \dfrac{D}{r_0^3} = 0$

$$\frac{D}{r_0^3} = \frac{C}{r_0^2}$$

$$r = \frac{D}{C}$$

c) $\Delta r = r - r_0$

$\Delta r \ll r_0$

$$F(\Delta r + r_0) = \frac{-C}{(\Delta r + r_0)^2} + \frac{D}{(\Delta r + r_0)^3} = \cancel{\frac{-C}{\Delta r^2 + 2\Delta r r_0 + r_0^2}} + \cancel{D}$$

$$-\frac{C}{r_0^2}\left(1 - \frac{2\Delta r}{r_0}\right) + \frac{D}{r_0^3}\left(1 - \frac{3\Delta r}{r_0}\right) =$$

$$= \frac{C}{r_0^3}\left(-r_0\left(1 - \frac{2\Delta r}{r_0}\right) + \frac{D}{C}\left(1 - \frac{3\Delta r}{r_0}\right)\right) = \frac{C}{r_0^3} \cdot$$

$$\cdot \left(-r_0 + 2\Delta r + r_0 - 3\Delta r\right) = \frac{-C}{r_0^3} \cdot \Delta r$$

прямо пропорциональная зависимость от Δr
и противоположна по направлению
=> simple harmonic

d) F - simple harmonic motion for spring. => $F = -kx$

здесь $F = -\frac{C}{r_0^3}\Delta r$

$\Rightarrow k = \frac{C}{r_0^3}$

и $r_0 = \frac{D}{C}$

подставим, $k = \frac{C}{D^3} \cdot C^3 = \boxed{\frac{C^4}{D^3}}$

e) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ for spring, $k = \frac{C^4}{D^3}$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{mD^3}{C^4}}$