Функція багатьох змінних (ФБЗ)

Тема 4.2 Диференціальне числення функції багатьох змінних (аргументів)

Розглянемо узагальнення понять і методів диференціального числення у випадку залежності функцій від багатьох аргументів (змінних), а саме від двох або трьох змінних.

Змінна величина $\boldsymbol{U}$ буде функцією багатьох незалежних змінних (**ФБЗ**) $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ (або аргументів, в економіці – факторів), якщо кожній множині значень $\boldsymbol{(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ цих змінних з наданої області за деяким правилом, законом поставлено у відповідність одно чи кілька значень величини $\boldsymbol{U}$.

Позначення ФБЗ:

$\boldsymbol{U = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ або $\boldsymbol{U = U(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$.

У випадку функції трьох змінних зазвичай пишуть

$$\boldsymbol{U = f(x,y,z)},$$

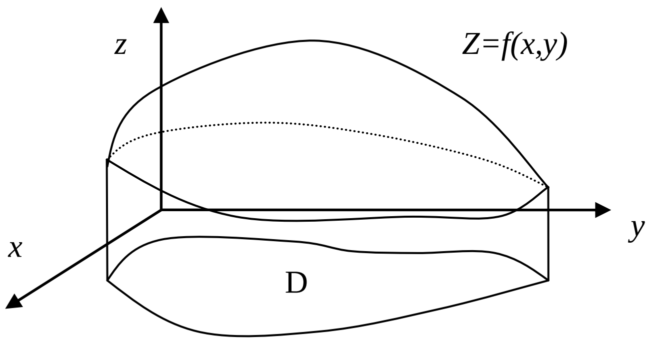
а у випадку функції двох змінних –

$$\boldsymbol{U = f(x,y)} \text{ або } \boldsymbol{Z = f(x, y), Z = Z(x, y)}.$$

Сукупність n чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називають **точкою** у n-вимірному просторі зміни аргументів $x_1, x_2, \ldots, x_n$ і кажуть про значення функції $\boldsymbol{U}$ у цій **точці**.

Якщо функція задана аналітичним виразом (формулою) без будь-яких додаткових умов, то її **область допустимих значень** (ОДЗ) – область існування її аналітичного виразу, тобто сукупність усіх точок, де цей вираз визначений і приймає лише дійсні та скінченні значення.

Наприклад, область допустимих значень функції $Z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ визначається як $R^2-x^2-y^2 \geq 0$, тобто $x^2+y^2 \leq R^2$ - круг радіусу R з центром у початку координат.



В теорії ФБЗ основну увагу звернемо до функції двох змінних, традиційні позначення $Z= f(x, y)$, $Z= Z(x, y)$. Геометричний сенс такого рівняння – поверхня у тривимірному просторі.

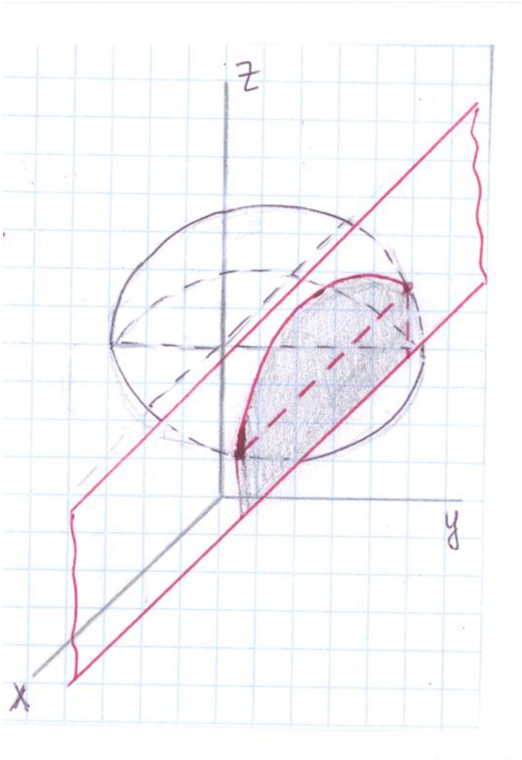
Для функції багатьох змінних справедливі майже всі поняття та твердження, що відповідають функції однієї змінної.

Дійсно, якщо фіксувати всі аргументи ФБЗ, крім одного, то вона буде функцією цього нефіксованого одного аргументу.

Застосуємо цю дію (фіксування усіх змінних, крім однієї), наприклад, до функції двох змінних: нехай $y=y_0=const$;

Тоді $Z=f(x, y_0)$ буде функцією тільки від x.

! В геометричному сенсі це перетин поверхні $Z=f(x, y)$ площиною $y=y_0$, у якій розташовано лінію $Z=f(x, y_0)$.



Лінія перетину має рівняння

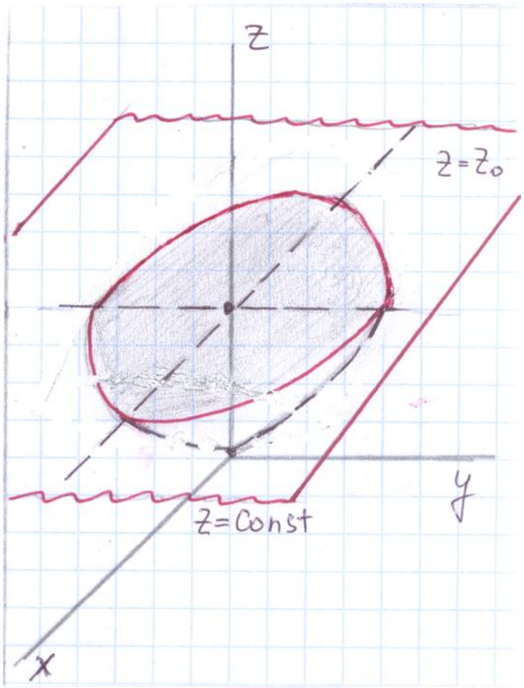
$$\begin{cases} Z=f(x;y_0) \\ y=y_0 \end{cases}$$

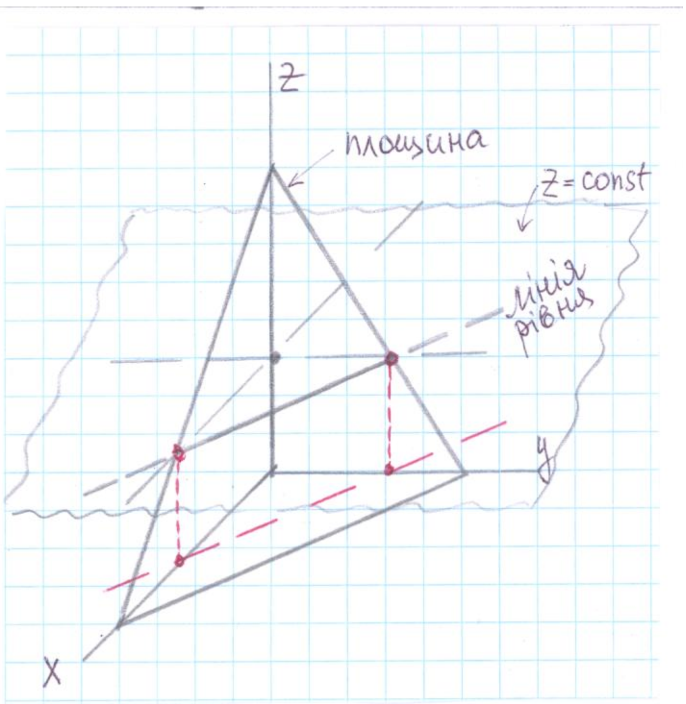
Аналогічно можна звести ФБЗ до функції однієї змінної у, задавши $x=x_0=const$

Найбільше застосування мають лінії, що з'являються при перетині поверхні $Z=f(x, y)$ будь-якою площиною $Z=const$. *У кожній точці такої лінії ФБЗ Z буде мати однакові значення, що = заданій const.*

Вони називаються ***лініями рівня***, а також ізолініями, горизонталями, ізоквантами.

Наприклад, для площини у трьохвимірному просторі лініями рівня є паралельні прямі, так як рівняння площини $Z=const$ буде мати вигляд:
$Z=ax+by+c$ і $ax+by+c=const$ – сімейство паралельних прямих з нормалями $\vec{n}=(a;b)$.





Диференціювання функцій багатьох змінних

Частинні похідні. Повний (перший) диференціал

Справа у колонці надаються пам'ятки про відповідні поняття функції однієї змінної.

$U= U\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - ФБЗ

Нехай функція $U= U\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ визначена у деякій області D и точка $M_0(x_1^o, x_2^o, \ldots, x_n^o)$ - внутрішня точка області D. Якщо існує границя (скінченна або нескінченна) відношення частинного приросту

$\Delta_{x_k} U = U\,(x_1^{\text{o}}, \ldots, x_{\text{k}}^{\text{o}}+\Delta x_k, \ldots, x_{\text{n}}^{\text{o}}) - U\,(x_1^{\text{o}}, \ldots x_{\text{k}}^{\text{o}}, \ldots x_{\text{n}}^{\text{o}})$

функції U в точці M_0 до відповідного приросту змінної x_k при $\Delta x_k \to 0$, то ця границя називається ***частинною похідною функції*** $U = U\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ у точці M_0 за змінною x_k і позначається

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial x_k}} \text{ або } \boxed{U'_{x_k}.}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_{x_k} U}{\Delta x_k} (k = \overline{1,n}).$$

$y=f(x)$

Границя відношення приросту функції до НМ приросту аргументу в точці $x=x_0$ називається ***похідною функції*** у цій точці.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

З визначення частинних похідних видно, що вони знаходяться за звичайними правилами диференціювання, із застосуванням таблиці похідних основних елементарних функцій. Але треба пам'ятати, що усі змінні, **крім указаної в нижньому індексі**, фіксовані, тобто розглядаються як сталі.

ПРИКЛАД. Знайти частинні похідні ФБЗ : $U = Z^{\frac{x}{y}}$.

$U'_x = Z^{\frac{x}{y}} \cdot \ln Z \cdot \frac{1}{y}$ - як показова функція, що залежить від змінної *x*.

$U'_y = Z^{\frac{x}{y}} \cdot \ln Z \cdot \frac{-x}{y^2}$ - як показова функція, що залежить від змінної *y*.

$U'_z = \frac{x}{y} \cdot Z^{\frac{x}{y}-1}$ - як степенева функція, що залежить від змінної *z*.

Перший (повний) диференціал ФБЗ

У ФБЗ, подібно ф-ції однієї змінної, існують диференціали усіх змінних, що співпадають з їх НМ приростами, тобто $\Delta x_j = dx_j\ (j = \overline{1,n})$, і також частинні диференціали функції, що

U= U (x₁, x₂, ... , xₙ) - ФБЗ	***y=f(x)***
Диференціали усіх аргументів співпадають з їх НМ приростами, тобто $\Delta x_j = dx_j\ (j = \overline{1,n})$. *Частинний приріст* ФБЗ – приріст, що знайдений за умови фіксування всіх змінних, крім однієї, за якою і обчислюють цей приріст: $\Delta_{x_k} U (k = \overline{1,n})$. Відповідно існують частинні диференціали $d_{x_k} U = U'_{x_k} \cdot dx_k$	Диференціал аргументу – це НМ приріст аргументу: $\Delta x = dx$, *якщо* $\Delta x \to 0$. *Приріст* значення функції: $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$. А перший диференціал функції - головна частина її НМ приросту: $dy = y'_x \cdot dx$

На відміну від функції однієї змінної, у ФБЗ є поняття ПОВНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛУ, під яким розуміють ПЕРШИЙ диференціал, до якого «зібрані» всі частинні диференціали.

Можна довести, що ПОВНИЙ диференціал ФБЗ є сумою всіх її частинних диференціалів.

U= U (x₁, x₂, … , xₙ)	***y=f(x)***
Повним (першим) диференціалом функції U в точці M_0 називається головна частина її нескінченно малого повного приросту в цій точці, лінійна відносно приростів Δx_1, Δx_2, …, Δx_n. $$dU = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_j} dx_j.$$	*Першим диференціалом* функції називають головну, лінійну відносно приросту аргументу, частину нескінченно малого повного приросту функції. $$dy = y'_x \cdot dx$$

Наприклад, для функції трьох змінних:

$$\boxed{dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz} \text{ або } \boxed{dU = U'_x dx + U'_y dy + U'_z dz}.$$

Для функції двох змінних:

$$\boxed{dZ = \frac{\partial Z}{\partial x}dx + \frac{\partial Z}{\partial y}dy} \text{ або } \boxed{dZ = Z'_x dx + Z'_y dy}.$$

Похідні та диференціали вищих порядків

Частинні похідні ФБЗ є функціями тих самих змінних, що сама функція, тому можна находить похідні від похідних різних порядків.

U= U (x₁, x₂, … , xₙ)	***y=f(x)***
Частинна похідна будь-якого порядку (якщо вона існує) це похідна від похідної на порядок менше. $$U^{(n)}_{x_j} = (U^{(n-1)})'_{x_j}$$	Похідна будь-якого порядку (якщо вона існує) це похідна від похідної на порядок менше. $$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$$
Диференціал будь-якого порядку (якщо він існує) це диференціал від диференціалу на порядок менше. $$d^n U = d(d^{n-1}U)$$	Диференціал будь-якого порядку (якщо він існує) це диференціал від диференціалу на порядок менше. $$d^n y = d(d^{n-1}y)$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & & & (Z'_x)'_x = Z''_{xx} \arrow[r] \arrow[r, shift right] & \ldots \\
 & Z'_x \arrow[urr] \arrow[drr] & & & \\
 & & & (Z'_x)'_y = Z''_{xy} \arrow[r] \arrow[r, shift right] & \ldots \\
Z = Z(x,\, y) \arrow[uur] \arrow[ddr] & & & & \\
 & & & (Z'_y)'_x = Z''_{yx} \arrow[r] \arrow[r, shift right] & \ldots \\
 & Z'_y \arrow[urr] \arrow[drr] & & & \\
 & & & (Z'_y)'_y = Z''_{yy} \arrow[r] \arrow[r, shift right] & \ldots
\end{tikzcd}
$$

Для ФБЗ вводять поняття *змішаної похідної* – якщо послідовне диференціювання проходить по різним змінним.

Наприклад, $(Z'_x)'_y = Z''_{xy}$ – змішана похідна другого порядку.

<u>*Теорема*</u> (Шварца).

Якщо функція $U = U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ має у деякій області D можливі частинні похідні до m-го порядку включно, причому всі вони неперервні у цій області, то значення будь-якої змішаної похідної m-го порядку не залежить від послідовності диференціювань.

Наприклад: $Z''_{xy} = Z''_{yx}$, $Z''_{xy} = Z''_{yx}$; $U'''_{xyz} = U'''_{zyx} = U'''_{yzx}$.

Тобто: РЕЗУЛЬТАТ ОБЧИСЛЕННЯ ЗМІШАННОЇ ПОХІДНОЇ НЕ ЗАЛЕЖИТЬ ВІД ПОРЯДКУ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ.

Приклад. Показати, що $Z''_{xy} = Z''_{yx}$, якщо $Z(x; y) = x^3\sqrt{y} - \cos(2x + 3y)$

Знайдемо частинні похідні: $Z'_x = 3x^2\sqrt{y} - (-\sin(2x+3y)\cdot 2)$

$$Z'_y = x^3\frac{1}{2\sqrt{y}} - (-\sin(2x+3y)\cdot 3)$$

Далі знайдемо змішану похідну при двох різних порядках диференціювання.

$$Z''_{xy} = (Z'_x)'_y = (3x^2\sqrt{y} + 2\sin(2x+3y))'_y = 3x^2\frac{1}{2\sqrt{y}} + 6\cos(2x+3y)$$

$$Z''_{yx} = (Z'_y)'_x = (x^3\frac{1}{2\sqrt{y}} + 3\sin(2x+3y))'_x = 3x^2\frac{1}{2\sqrt{y}} + 6\cos(2x+3y)$$

Показано.

Для диференціалів вищих порядків можна записати так званий оператор обчислення диференціалів будь-якого порядку (m) від функції будь-якої кількості змінних (n):

$$d^mU = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^m U.$$

Тобто обчислення диференціалів будь-якого порядку подібно піднесенню до степеня.

Наприклад, для функції двох змінних $Z=f(x,y)$ отримаємо:

$$\boxed{d^2Z=(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy)^2 Z=Z''_{xx}dx^2+2Z''_{xy}dxdy+Z''_{yy}dy^2},$$

$d^3Z=d(d^2Z)$, або

$$d^3Z=(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy)^3 Z=Z'''_{xxx}dx^3+3Z'''_{xxy}dx^2dy+3Z'''_{xyy}dxdy^2+Z'''_{yyy}dy^3$$

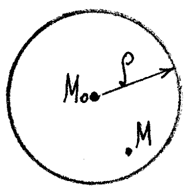
Для функції трьох змінних:

$$d^2U=(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy+\frac{\partial}{\partial z}dz)^2U=$$
$$=U''_{xx}dx^2+U''_{yy}dy^2+U''_{zz}dz^2+2U''_{xy}dxdy+2U''_{yz}dydz+2U''_{xz}dxdz$$

Дослідження функції багатьох змінних на екстремум

Безумовний (локальний) екстремум ФБЗ

Нехай функція $U=U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ визначена у деякій точці $M_0(x_1^o, x_2^o, \dots, x_n^o)$ та її малому ρ-околі. В точці M_0 існує локальний екстремум, якщо для будь-якого значення $U=U(M)$, де M належить ρ-околу, виконується одна з нерівностей:



$U(M)-U(M_0)>0$ => в точці M_0 знаходиться U_{min}

або

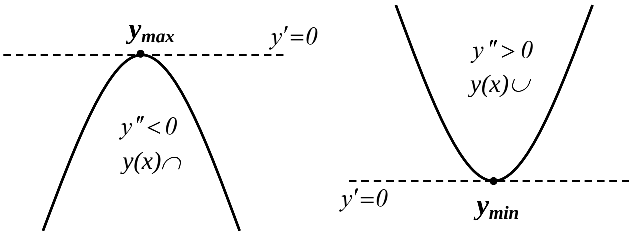
$U(M)-U(M_0)<0$ => в точці M_0 знаходиться U_{max}

Інакше кажучи, екстремальне значення ФБЗ є найбільшим (максимум) або найменшим (мінімум) в деякому малому околі точки M_0.

Схема дослідження функції на безумовний (локальний) екстремум

Згадаємо, як досліджується на екстремум функція однієї змінної.

Точки можливих екстремумів - *критичні точки*	*Необхідні ознаки існування екстремуму функції у точці.* Критичні точки – точки, де $y'=0$ (*стаціонарні*), або $y' \to \pm\infty$, або y' не існує. Критичні точки і точки розривів розділяють інтервали монотонності функції (спадання / росту).



Екстремуми (max / min)	*Достатні ознаки існування екстремуму функції у точці.* Теорема 1. Екстремум у будь-якій критичній точці існує, якщо перша похідна функції змінює знак при переході крізь цю точку. Теорема 1 НЕ ВИКОРИСТОВУЄТЬСЯ у теорії ФБЗ! ! Теорема 2. Екстремум у стаціонарній точці існує, якщо друга похідна функції зберігає знак в цій точці. *Знак похідної і відповідний екстремум – на рис.нижче.*

Тепер наведемо ***Схему дослідження функції на безумовний екстремум ФБЗ***

I етап: визначення точок можливого екстремуму – критичних, в нашому випадку тільки стаціонарних точок. (будемо розглядати тільки ті точки, що належать області допустимих значень ФБЗ).

Необхідна умова існування екстремуму: все частинні похідні першого порядку даної функції в точках екстремуму дорівнюють нулю.

$$\boxed{\begin{cases} U'_{x_j} = 0; \\ j = \overline{1,n} \end{cases}}$$

Дорівнявши всі похідні нулю, отримують систему рівнянь, розв’язком якої будуть координати критичних (стаціонарних) точок.

II етап: перевірка виконання достатніх умов існування екстремуму в отриманих на *I* етапі стаціонарних точках.

Достатня умова існування екстремуму: якщо другий диференціал ФБЗ, обчислений в стаціонарній точці, є знаковизначеною квадратичною формою диференціалів $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, то екстремум в стаціонарній точці існує, причому

$$\boxed{\begin{array}{l} d^2U(M_0) > 0 \;=>\; U(M_0) = U_{min} \\ d^2U(M_0) < 0 \;=>\; U(M_0) = U_{max} \end{array}}$$

Далі описано послідовність перевірки знаковизначеності $d^2U(M_0)$**.**

Якщо функція U має другі похідні у деякому околі стаціонарної точки M_0 і всі частинні похідні другого порядку неперервні в цій точці, то обчислюємо їх значення в M_0. Тоді другий диференціал, наприклад, функції двох змінних, буде мати вигляд:

$$d^2Z(M_0) = Z''_{xx}(M_0)dx^2 + 2Z''_{xy}(M_0)dxdy + Z''_{yy}(M_0)dy^2.$$

Але це не число, знак якого визначається дуже просто, а так звана **квадратична форма** диференціалів незалежних змінних dx, dy. Другі похідні у точці M_0 – це числа, коефіцієнти квадратичної форми.

Щоб зрозуміти, чи є вона знаковизначеною, треба з коефіцієнтів квадратичної форми скласти визначник такого виду:

$$\Delta = \left.\begin{vmatrix} Z''_{xx} & Z''_{xy} \\ Z''_{yx} & Z''_{yy} \end{vmatrix}\right|_{M_0}$$ для функції двох змінних,

$$\Delta = \left.\begin{vmatrix} U''_{xx} & U''_{xy} & U''_{xz} \\ U''_{yx} & U''_{yy} & U''_{yz} \\ U''_{zx} & U''_{zy} & U''_{zz} \end{vmatrix}\right|_{M_0}$$ для функції трьох змінних і т.п.

Визначники будуть симетричними за теоремою Шварца.

I. По критерію Сильвестра-Якобі квадратична форма визначена ***додатно*** і в стаціонарній точці $\boldsymbol{M_0}$ знаходиться $\boldsymbol{U_{min}}$, якщо всі головні діагональні мінори визначника невід'ємні. Тобто:

$$\Delta_1 = Z''_{xx} > 0; \;\; \Delta_2 = Z''_{xx}Z''_{yy} - (Z''_{xy})^2 > 0$$ – для функції двох змінних,

$$\Delta_1 = U''_{xx} > 0; \;\; \Delta_2 = \begin{vmatrix} U''_{xx} & U''_{xy} \\ U''_{yx} & U''_{yy} \end{vmatrix} > 0; \;\; \Delta_3 = \begin{vmatrix} U''_{xx} & U''_{xy} & U''_{xz} \\ U''_{yx} & U''_{yy} & U''_{yz} \\ U''_{zx} & U''_{zy} & U''_{zz} \end{vmatrix} > 0$$ – для функції трьох змінних.

II. По критерію Сильвестра-Якобі квадратична форма визначена ***від'ємно*** і в стаціонарній точці $\boldsymbol{M_0}$ находиться $\boldsymbol{U_{max}}$, якщо її головні діагональні мінори визначника чергуються за знаком, починаючи з від'ємного. Тобто:

$$\Delta_1 = Z''_{xx} < 0 \quad ; \; \Delta_2 = Z''_{xx} Z''_{yy} - (Z''_{xy})^2 > 0$$ – для функції двох змінних,

$$\Delta_1 = U''_{xx} < 0; \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} U''_{xx} & U''_{xy} \\ U''_{yx} & U''_{yy} \end{vmatrix} > 0; \; \Delta_3 = \begin{vmatrix} U''_{xx} & U''_{xy} & U''_{xz} \\ U''_{yx} & U''_{yy} & U''_{yz} \\ U''_{zx} & U''_{zy} & U''_{zz} \end{vmatrix} < 0$$ – для функції трьох змінних.

III. Інші варіанти сполучення знаків головних діагональних мінорів, а також рівність нулю деяких з них означають, що екстремуму в точці M_0 *не існує,* або потрібне додаткове дослідження. Якщо $d^2U(M_0) = 0$, то потрібне дослідження по третьому диференціалу.

ПРИКЛАД 1

Перевірити другий диференціал на знаковизначеність у довільній точці, якщо відомі значення всіх других похідних у цій точці. Дано:

$$d^2U = dx^2 + 4dy^2 + 3dz^2 + 2dxdy.$$

Очевидно, що тут $U''_{xx} = 1, U''_{yy} = 4, U''_{zz} = 3, U''_{xy} = U''_{yx} = 2/2 = 1$. Решта других похідних дорівнює нулю. Визначник цієї квадратичної форми

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} U''_{xx} & U''_{xy} & U''_{xz} \\ U''_{yx} & U''_{yy} & U''_{yz} \\ U''_{zx} & U''_{zy} & U''_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Головні діагональні мінори:

$\Delta_1 = 1;$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 3 > 0;$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (4-1) = 9 > 0;$ всі додатні. По критерію Сильвестра-Якобі ця квадратична форма визначена додатно.

ПРИКЛАД 2

Перевірити другий диференціал на знаковизначеність у довільній точці, якщо відомі значення всіх других похідних у цій точці.

Дано: $d^2U = 2dx^2 + 3dy^2 - dz^2 + 3dxdy - 6dxdz + 10dydz$.

Очевидно, що тут $U''_{xx} = 2, U''_{yy} = 3, U''_{zz} = -1,$ змішані похідні
$U''_{xy} = U''_{yx} = 3/2 = 1{,}5;\ U''_{xz} = U''_{zx} = -6/2 = 3;\ U''_{zy} = U''_{yz} = 10/2 = 5.$

Визначник цієї квадратичної форми

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} U''_{xx} & U''_{xy} & U''_{xz} \\ U''_{yx} & U''_{yy} & U''_{yz} \\ U''_{zx} & U''_{zy} & U''_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1{,}5 & 3 \\ 1{,}5 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}.$$

Обчислюємо головні діагональні мінори:

$\Delta_1 = 2 > 0;$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1{,}5 \\ 1{,}5 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 - 1{,}5\cdot 1{,}5 = 3{,}75 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1{,}5 & 3 \\ 1{,}5 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -125{,}75 < 0$$

Мінор третього порядку обчислений за правилом трикутників:
$\Delta_3 = 2\cdot 3\cdot(-1) + 1{,}5\cdot 5\cdot 3 + 1{,}5\cdot 5\cdot 3 - 3\cdot 3\cdot 3 - 1{,}5\cdot 1{,}5\cdot(-1) - 5\cdot 5\cdot 2 = -125{,}75$

Таким чином, ця квадратична форма не є знаковизначеною, тому що знаки головних діагональних мінорів не відповідають ні I, ні II частині критерію Сильвестра-Якобі.

❢ - Можна зауважити, що головний діагональний мінор другого порядку у разі існування екстремуму (min и max) повинен бути більше нуля. Тому іноді перевірку починають саме з нього, і якщо одержують від'ємне число, то роблять висновок про те, що екстремум не існує.

❢ - У випадку $y=y(x)$ – функції однієї незалежної змінної: $d^2y = y''\cdot dx^2$, і, очевидно, знак другого диференціала в стаціонарній точці визначається знаком другої похідної у цій точці, тобто $y''_{xx} > 0$ – умова мінімуму, $y''_{xx} < 0$ – умова максимуму.

Умовний екстремум ФБЗ

Це екстремум, що шукають не на всій області визначення ФБЗ, а в деякій області, межі якої визначаються рівняннями:

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}, \qquad m < n$$

Ці рівняння називаються ***рівняннями (умовами) зв'язку,*** тому що вони «зв'язують», не дають змінюватися незалежно змінним $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Поставимо задачу: знайти екстремуми функції

$U = U(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow extr$ (функція цілі),

при наступних умовах, що зв'язують змінні $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$\{ g_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, k = \overline{1, m}; \qquad m < n.$$

Якщо такі екстремуми існують, вони називаються ***умовними***.

Розглянемо два способи вирішення такої задачі, причому обмежимося функціями двох або трьох змінних.

Перший спосіб – зведення до задачі про безумовний екстремум. Його застосовують, якщо *умови зв'язку* лінійні. Тоді одна зі змінних виражається з умови зв'язку і підставляється у функцію цілі, що потім досліджується на безумовний екстремум.

Приклад. $Z = x^2 + y^2 \to extr$

$x + y = 1$ – умова зв'язку

Якщо немає ніяких умов, то

$Z_{min}(0;0) = 0$.

(Видно з рис.)

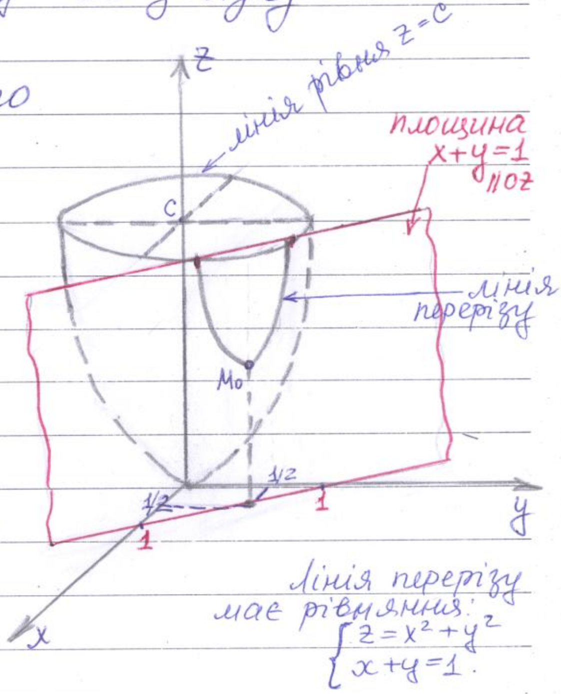
Зведення до безумовного extr.

Перший спосіб.

Виразимо з умови зв'язку, наприклад, x:

$x = 1 - y$

і підставимо у ф-цію цілі Z.



$Z = (1-y)^2 + y^2$ – ф-ція однієї змінної.

Н.у. $Z'_y = 0$; $Z'_y = -2(1-y) + 2y = 0 \Rightarrow y = 1/2$

стаціонарна т-ка,

відповідний $x = 1 - y = 1/2$. $M_0\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Д.у. $Z''_{yy} = 2 + 2 = 4 > 0 \Rightarrow Z(M_0) = Z_{min}$.

$Z_{min} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

Відповідь: $Z_{min}\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Другий спосіб – метод невизначених множників Лагранжа. Він універсальний, можна використовувати у випадках будь-яких умов зв'язку.

Треба скласти функцію Лагранжа (L), що поєднує функцію цілі (U) і умови зв'язку ($\{g_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, k = \overline{1,m};\ m < n$) за допомогою невизначених множників Лагранжа λ_k:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = U(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot g_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to extr$$

Функція Лагранжа досліджується на безумовний екстремум.

I етап. Необхідна умова існування екстремуму: все частинні похідні першого порядку функції Лагранжа в точках екстремуму дорівнюють нулю. Мають на увазі як похідні по основним змінним $x_1, x_2, \dots, x_n$, так і по множникам Лагранжа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$.

Отримаємо систему $(n+m)$ рівнянь

$$\boxed{\begin{cases} L'_{x_j} = 0;\ j = \overline{1,n} \\ L'_{\lambda_k} = 0; k = \overline{1,m} \end{cases}},$$

що при розв'язанні дає стаціонарні точки і відповідні їм множники Лагранжа λ_k.

Можна відзначити, що похідні по λ_k будуть повторювати умови зв'язку, тому та сама система може бути записана у такому вигляді:

$$\boxed{\begin{cases} L'_{x_j} = 0;\ j = \overline{1,n} \\ g_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; k = \overline{1,m} \end{cases}}.$$

II етап. *Достатня умова існування екстремуму*: якщо другий диференціал функції Лагранжа, обчислений в стаціонарній точці ($d^2L\ (M_0)$), є знаковизначеною квадратичною формою, за умови, що змінні $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ зв'язані залежностями

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_k}{\partial x_j} \cdot dx_j = 0; k = \overline{1,m}, \end{cases}$$

що є наслідками умов зв'язку, то екстремум в стаціонарній точці існує, причому

$$\boxed{\begin{array}{l} d^2L(M_0) > 0 \ \Rightarrow\ U(M_0) = U_{min} \\ d^2L(M_0) < 0 \ \Rightarrow\ U(M_0) = U_{max} \end{array}}$$

Зверніть увагу – перевіряється знаковизначеність другого диференціалу функції Лагранжа, а висновок про екстремум робиться для функції цілі.

Існують теореми, що доводять збіг стаціонарних точок и видів екстремумів у них для цих двох функцій – цілі (U) і Лагранжа (L). В нашому курсі не розглядаються.

❢ - Існує вид другого диференціалу, коли нема сумнівів у його знаку:

$d^2L\ (M_0) = Adx^2 + Bdy^2 + Cdz^2 > 0$, якщо $A, B, C > 0$

$d^2L\ (M_0) = Adx^2 + Bdy^2 + Cdz^2 < 0$, якщо $A, B, C < 0$

Таким чином, відповідь у задачах про умовний екстремум повинна містити: значення координат стаціонарних точок, відповідні значення множників Лагранжа, вид і екстремальне значення функції цілі у точках, де таке значення існує.

Приклад. Другий спосіб – метод Лагранжа.

Складаємо ф-цію Лагранжа:

$$L(x;y;\lambda) = Z(x,y) + \lambda\cdot g(x;y), \text{ де } g(x,y) = x+y-1.$$

$$L(x,y,\lambda) = x^2+y^2+\lambda(x+y-1) \to extr. \text{ / безумовний!}$$

НУ.
$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+\lambda=0 \\ 2y+\lambda=0 \\ x+y-1=0 \end{cases}$$
$(g(x,y)=0)$

З системи знайти: x, y, λ!

Варіанти розв'язку системи

1) Виразити з 1-го і 2-го рівняння λ:	2) Виразити з 1-го і 2-го рівняння x і y:
$\lambda = -2x$, $\lambda = -2y$ $\Rightarrow -2x = -2y$, $x = y$	$x = -\frac{\lambda}{2}$, $y = -\frac{\lambda}{2}$ → підставити в останнє.
підставити у третє: $x+y-1=0$	$-\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} - 1 = 0$; $\lambda = -1$.
Тоді $x+x-1=0$; $x = \frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{2}$; $\lambda = -2x = -1$.	Тоді $x = +\frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{2}$
Відповідь: $M_0\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$; $\lambda = -1$	Відповідь: така ж, як в 1).

ДУ. Щоб перевірити ДУ існування extr у знайденій стаціонарній точці, потрібний

$$d^2L = L''_{xx}dx^2 + 2L''_{xy}dx\cdot dy + L''_{yy}dy^2,$$

обчислений у т. M_0.

$L''_{xx} = (2x+\lambda)'_x = 2$	
$L''_{xy} = (2x+\lambda)'_y = 0$	$d^2L(M_0) = 2dx^2 + 2dy^2 > 0 \Rightarrow$
$L''_{yy} = (2y+\lambda)'_y = 2$	

$$\Rightarrow \quad Z(M_0) = Z_{min}\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Якби $L''_{xy} \neq 0$?