III $f(x)=\cos x$. – парна ф-ція ⇒ парні степені x у ряду.

За властивістю степеневих рядів одержимо ряд для $\cos x$ за допомогою диференціювання ряду для $\sin x$.

$$(\sin x)' = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7} + \cdots\right)'$$

$$\cos x = \left(1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \cdots\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)$$

$1 = f(0) = \cos 0$

$$\boxed{\cos x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}}$$

обл. збіжності $x \in R$ (як у диф-го ряду)

IV. $f(x) = \operatorname{arctg} x$ – непарна ф-ція

За властивістю степеневих рядів.

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^x = \operatorname{arctg} x \quad (\operatorname{arctg} 0 = 0)$$

$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\qquad S = \dfrac{a}{1-q}$ – сума нескінч. геом. прогресії $a\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$

зіставимо:

$a = 1; \quad q = -x^2$

$$S = a\sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n} = f(x)$$

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \int_0^x x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^x$$

$$\operatorname{arctg} x = \underset{n=0}{x} - \underset{n=1}{\frac{x^3}{3}} + \underset{n=2}{\frac{x^5}{5}} - \underset{n=3}{\frac{x^7}{7}} + \cdots$$

$$\boxed{\operatorname{arctg} x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}};$$

область збіжності $x \in (-1; 1)$

V

$$f(x) = \ln(1+x)$$

ф-ція загального виду.

$$\ln(1+x)\Big|_0^x = \int_0^x \frac{dx}{1+x}; \quad f(x) = \frac{1}{1+x} \quad S = \frac{a}{1-q}$$

$$\Rightarrow a = 1; \ q = -x.$$

$$\ln(1+x) = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}}$$

$x \in (-1; 1)$ – обл. збіжності

VI Біноміальний ряд: $f(x) = (1+x)^m$ $\quad m$ – будь-яка

$$\boxed{f(x) = (1+x)^m = \underset{n=0}{1} + \underset{n=1}{\frac{m}{1!}x} + \underset{n=2}{\frac{m(m-1)}{2!}x^2} + \dots + \underset{n}{\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n} + \dots}$$

$x \in (-1; 1)$ – обл. збіжн.