Тема 3 ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРНОГО АНАЛІЗУ

ЛЕКЦІЯ 3.1 Основні комбінаторні структури

План лекції

1. Основні правила комбінаторики.
2. Розміщення із повтореннями.
3. Розміщення без повторень.
4. Перестановки.
5. Комбінації без повторень.

Література. *1. Конспект лекцій.*
2. Балога С.І. Дискретна математика*. Навчальний посібник. – Ужгород: ПП «АУТДОР-. ШАРК», 2021. – 124 с.*
3. Новотарський М. А. Дискретна математика: навч. посіб. для студ. спеціальності 123 «Комп'ютерна інженерія». Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. 278 с.

3.1. Основні правила комбінаторики

Комбінаторика – розділ математики, присвячений розв'язанню задач вибору та розташування елементів деякої, зазвичай, скінченної множини відповідно до заданих правил. Кожне таке правило визначає спосіб побудови деякої конструкції із елементів вихідної множини, що зветься *комбінаторною конфігурацією*. Тому на меті комбінаторного аналізу стоїть дослідження комбінаторних конфігурацій, алгоритмів їх побудови, оптимізація таких алгоритмів, а також розв'язання задач переліку.

Комбінаторна математика або комбінаторика чапає області багатьох розділів математики і ця обставина ускладнює формальне визначення. В основному вона має справу з розташуванням елементів у множинах .

Розглядаються 2 типи проблем:

– проблема існування певних конфігурацій на множинах та

– проблема визначення кількості конфігурацій, їх класифікація (перелічувальна задача).

Приклад проблеми першого типу. Є множина підмножина цілих позитивних чисел від 1 до 16. Можливо розташувати ці числа у квадратній матриці 4 ×4 елементи так, щоб сума чисел у кожному рядку та у кожному стовпцю була та сама. Така конфігурація (розташування елементів) має назву – латинський квадрат. Колись служила головоломкою для розваг, тепер має відношення до теорії оптимального планування.

У завданнях іншого типу комбінаторної ситуації чи комбінаторної моделі треба поставити у відповідність формулу для обчислення кількості конфігурацій.

Працюючи з множинами часто виникає таке завдання: визначити кількість різних підмножин, які можна утворити вибіркою елементів за певними правилами. Це завдання вирішує комбінаторика.

Def. Комбінаторика - математична наука, що вирішує завдання, пов'язані з перерахуванням, розбиттям та розподілом множин об'єктів різної природи.

Def. Розміщення з n елементів по r – це вибірка r різних елементів із n заданих з урахуванням порядку їхнього розміщення (позначається A_n^r).

Def. Перестановка з n елементів – це розміщення з n елементів n (позначається P_n).

Def. Комбінація (сполучення, сполука) з n елементів по r – це вибірка r різних елементів з n заданих без урахування порядку їхнього розміщення (позначається C_n^r, іноді застосовується таке позначення - $\binom{r}{n}$).

Кортежі – порядок розміщення суттєвий, підмножини – розміщення у будь-якому порядку.

Приклад отримання r розміщень та комбінацій.

Дана множина із 4 елементів - M = {a, b, c, d}. З неї вибираються три елементи: a, b, c. Тоді 6 вибірок abc, acb, bac, bca, cab, cba є прикладом декількох різних розміщень з 4 елементів по 3. У той же час всі ці 6 вибірок є різним записом однієї і тієї ж комбінації з 4 елементів по 3.

Вибірки можуть допускати повторення вибраних елементів. У цьому випадку вихідну множину можна розглядати як множину, що складається з різних елементів, але після вибірки деякого елемента він відновлюється в цій множині. Така вибірка називається вибіркою із поверненням чи вибіркою із необмеженими повтореннями.

Найчастіше під час роботи з елементами множин у комбінаториці застосовуються два правила.

Правило суми. Якщо об'єкт a може бути обраний p методами, а об'єкт b – іншими q способами, то вибір "або a, або b" може бути здійснений p + q способами. Слід зазначити, що вибори a і b мають бути взаємно виключними. Інакше кажучи, необхідно стежити, щоб жоден із способів вибору об'єкта не збігався з яким-небудь способом вибору об'єкта b. За наявності таких збігів правило суми не застосовується і результат дорівнює p + q - k, де k - число збігів.

Приклад 1. Нехай задані дві множини :

$$A = \{i |\ i = \overline{1,10}\};$$

$$B = \{j |\ j = \overline{20,29}\}.$$

Скільки способами можна вибрати з цих множин просте число?

Так як $A \cap B = \varnothing$, то у цих множинах не міститься однакових простих чисел. Множина A містить 4 простих числа (2, 3, 5, 7), множина B – 2 простих числа (23, 29), тому вибір простого числа може бути здійснений 4 + 2 = 6 способами.

Приклад 2. Те саме питання для множин:

A = {i| } (прості числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19);
B = {j| } (прості числа 11, 13, 17, 19, 23, 29).

Оскільки $A \bigcap B \neq \varnothing$, а перетин множин містить 4 простих числа (11, 13, 17, 19), правило суми застосувати не можна, а число способів дорівнює 8 + 6 – 4 = 10.

Правило добутку. Якщо об'єкт а може бути обраний р способами і після кожного з таких виборів об'єкт b, у свою чергу, може бути обраний q способами, то вибір "а і b" у зазначеному порядку можна здійснити pq способами. Це правило використовується лише у випадках, коли вибори a та b незалежні.

Приклад 3. Є 3 типи тканини для пошиття чотирьох фасонів костюмів. Скільки можливо різних варіантів костюмів?

Оскільки аналізовані вибори (тип тканини, фасон костюма) незалежні, число варіантів дорівнює $3 \cdot 4 = 12$.

3.2. Розміщення з повтореннями

Відмінною особливістю даного даної комбінаторної структури є повторення, але не більше r разів кожного елемента множини X у кожній вибірці.

Число розміщень з n елементів r з повторенням визначається за формулою:

$$\tilde{A}_n^r = n^r,$$

де n – число елементів у множині, з якої беремо елементи; r – число чарунок розміщення.

Приклад. Нехай X = {a, b}.Скільки є різних варіантів розміщення елементів цієї множини по чотирьох чарунках $Y=\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$?

Число розміщень з двох елементів по чотирьох чарунках з повторенням дорівнює $2^4=16$, а множина комбінаторних об'єктів є такою:

{(a, a, a, a); (a, a, a, b); (a, a, b, a); (a, a, b, b); (a, b, a, a); (a, b, a, b);
(a , b , b , a); (a , b , b , b); (b , a , a , a), (b , a , a , b); (b , a , b , a);
(b , a , b , b); (b , b , a , a); (b , b , a , b); (b , b , b , a); (b , b , b , b)}.

Якщо a=0, b=1, ця процедура формує чотирирозрядні двійкові коди, тобто {(0000); (0001); (0010); (0011); (0100); (0101); (0110); (0111); (1000); (1001); (1010); (1011); (1100); (1101); (1110); (1111)}.

3.3. Розміщення без повторень

Розміщенням без повторень з n різних елементів по r елементів називається будь-яка впорядкована r-елементна підмножина деякої заданої основної n-елементної множини.

Визначимо число розміщень з *різних* елементів по *r* без повторень. Перший член перестановки можна вибрати з *n* елементів *n* різними способами. Оскільки елементи не повинні повторюватися, то вибір другого елемента здійснюється (n – 1) способом, таким чином дійдемо до r-го члена, який можна вибрати $n - r + 1$ способами. Застосовуючи послідовно правило *добутку*, отримаємо:

$$A_n^r = n \cdot (n - 1) \cdot \ldots \cdot (n - r + 1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Приклад 1 . З чотирьох цифр 1, 2, 3, 4 можна скласти 12 ($A_4^2 = \frac{4!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12$) різних двоцифрових чисел, що не мають однакових цифр: 12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41 , 42, 43.

Приклад 2 . 8 спортивних команд змагаються з метою посісти перше, інше та третє призові місця. Скільки існує варіантів розподілу призових місць, якщо кожне місце може посісти лише одна команда?

Розв'язок. Множина команд має потужність m = 8, кортеж призових місць має довжину n = 3. Кількість можливих варіантів розподілу місць дорівнює

$$A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336.$$

3.4. Перестановки

Це граничний випадок розміщення (k = n) коли число чарунок, стелажів, дорівнює числу куль, книг, файлів тощо. Ця процедура має велике застосування при підстановці, перестановці, сортуванні та індексації даних.

Перестановки P_n складаються з однакових елементів і розрізняються лише порядком їхнього прямування. Використовуючи формулу для розрахунку розміщень, отримаємо:

$$P_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!.$$

З урахуванням отриманого співвідношення записується зв'язок розміщень та перестановок

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{P_n}{P_{n-r}}.$$

Приклад. На полиці розміщено 10 книжок (різних). Скільки існує варіантів їх розташування?

Розв'язок. $P_{10} = 10! = 3628800$.

Зауважимо, що переставлення є взаємно однозначним відображенням множини на собі.

3.5. Комбінації без повторень

Визначимо число r комбінацій із n різних елементів.

Підмножина так само, як і розміщення, не має повторень елементів. Кількість кортежів-розміщень перевершує кількість підмножин за рахунок переставлень елементів кортежу, яких маємо n!. Звідси кількість комбінацій без повторень

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m!}{(m-n)!n!}$$

перевіримо формулу для множини S = {a, b, c, d}, якщо потужність підмножини n = 2. Є такі варіанти підмножин: {a,b}, {a,c}, {a,d}, {b,c}, {b,d}, {c,d}. Формула дає кількість варіантів – 6.

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 2\cdot 1} = 6.$$

З кожної комбінації можна утворити r ! різних r - перестановок, тому кількість поєднань та розміщень пов'язане співвідношенням $C_n^r \cdot P_r = A_n^r$, тобто

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{P_r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}.$$

З формули розрахунку числа поєднань очевидно, що

$$C_n^r = C_n^{n-r}.$$

Приклад. Скількома способами можна вибрати 2 деталі з ящика, в якому є 8 різних деталей?

Маємо: $C_8^2 = \frac{8!}{6!\,2!} = \frac{8\cdot 7}{2} = 28$ (способів).

Приклад. Під час передачі двійкових даних 8-розрядна кодова комбінація може мати зміни у деяких розрядах (або помилки) внаслідок дії перешкод. Якщо помилки відбулися у двох розрядах, то це двократна помилка. Скільки існує варіантів двократної помилки?

Розв'язок. Надамо номери розрядам кодової комбінації. Множина номерів розрядів A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} має потужність |A| = 8. Кожен варіант дворазової помилки можна описати як підмножину потужності 2 у множині A. Наприклад, підмножина {3, 1} може означати, що помилки відбулися у розрядах з номерами 3 та 1. Тоді для m = 8 та n = 2 всього існує 28 варіантів двократних помилок, оскільки

$$C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8\cdot 7}{2} = 28.$$