ДР - 1

1. $y' = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+1}}$. тип 1

Нехай $y \neq 0$, відокремлюємо змінні: $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$. Інтегруємо

$$ln|y| = ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + ln|c|.$$

$y = C\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ (загальний розв'язок рівняння).

Розв'язок $y = 0$ міститься у загальному при $C = 0$.

2. $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$; $x(y^2+1)dx + y(1-x^2)dy = 0$; тип 1.

$\displaystyle\int \frac{x \cdot dx}{x^2-1} = \int \frac{y \cdot dy}{y^2+1}$; $\frac{1}{2}\ln|x^2-1| = \frac{1}{2}\ln|y^2+1| + \underline{\frac{1}{2}\ln C} \rightarrow$ можна додавати з будь-якої сторони

$(x^2-1) \cdot C = y^2+1$. загальний інтеграл.

3. $y' + \frac{1}{y}\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$; Тип 1. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\sqrt{1-y^2}}{y} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $\dfrac{y \cdot dy}{\sqrt{1-y^2}} = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

$-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{-2y\,dy}{\sqrt{1-y^2}} = -\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; $-2\sqrt{1-y^2} = -\arcsin x - C$;

$2\sqrt{1-y^2} = \arcsin x + C$. загальний інтеграл.

4. $y' = e^{x+y}$; $y' = e^x \cdot e^y$ – Тип 1. $\displaystyle\int \frac{dy}{e^y} = \int e^x \cdot dx$

$\displaystyle\int e^{-y} dy = e^x + C$; $-e^{-y} = e^x + C$ загальний інтеграл.

$e^{-y} = C - e^x$; $-y = \ln(C - e^x)$

$y = \ln \dfrac{1}{C - e^x}$ – загальний розв'язок.

5. $y'\operatorname{tg}x - y = a$; $y' = \frac{a+y}{\operatorname{tg}x}$; $\int \frac{dy}{y+a} = \int \frac{dx}{\operatorname{tg}x}$;

$\ln|y+a| = \int \operatorname{ctg}x \cdot dx$; $\ln|y+a| = \ln|\sin x| + \ln C$

$y + a = C \cdot \sin x$;

$y = C\sin x - a$ заг. розв'язок.

6. $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$ при $y|_{x=0} = 1$ - з-ча Коші.

$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$; $\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2}$; $\operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} x + C$

Знайдемо C з початкової умови:

$\operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} 0 + C$; $\frac{\pi}{4} = C$

$\operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{4}$ - частинний інтеграл.

7. $y' = \frac{a^2}{(x+y)^2}$. Заміна $u = x+y$ приводить до ДР-1 1-го типу

$y = u - x$; $y' = u' - 1$.

$u' - 1 = \frac{a^2}{u^2}$; $\frac{du}{dx} = \frac{a^2}{u^2} + 1$; $\frac{du}{dx} = \frac{a^2+u^2}{u^2}$

$\int \frac{u^2 du}{u^2+a^2} = \int dx$; $\int \frac{(u^2+a^2)-a^2}{u^2+a^2} du = \int du - a^2 \int \frac{du}{u^2+a^2} =$

$= u - a^2 \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a}$.

$(x+y) - a \cdot \operatorname{arctg} \frac{x+y}{a} = x + C$ загальн. інтеграл.