Тема 5. Графи

Лекція 5.1

План

1. Визначення графа.
2. Типи скінченних графів.
3. Способи задання графів.
4. Маршрути та підграфи.

Література. *1. Конспект лекцій.*
2. Олійник Л.О. Дискретна математик: Навч. посібник. 2015.256с..
3 Балога С.І. Дискретна математика. *Навчальний посібник. Ужгород: ПП «АУТДОР-ШАРК», 2021. 124 с.*

5.1. Визначення графа

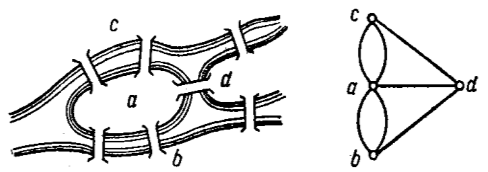
Теорія графів надає винятково зручний апарат для моделювання структур різних систем та відносин між об'єктами найрізноманітнішої природи. Завдяки наочності та простоті цей апарат останнім часом завоював широке визнання та часто використовується при дослідженні та моделюванні різних економічних систем.

Багато завдань зводяться до розгляду сукупності об'єктів, суттєві властивості яких описуються зв'язками поміж них. Наприклад, дивлячись на карту автомобільних доріг, можна цікавитись лише тим, чи є зв'язок між деякими населеними пунктами, відволікаючись від конфігурації та якості доріг, відстаней та інших подробиць. При проектуванні газопроводу, що з'єднує свердловини з центральною приймальною станцією, на перший план зазвичай виходить завдання вибору проекту прокладання труб, в якому витрати на будівництво газопроводу будуть мінімальними. Інтерес можуть представляти різні зв'язки та відносини між людьми, подіями, станами та взагалі між будь-якими об'єктами.

У подібних випадках об'єкти, що розглядаються, зручно зображати точками, що звуться, а зв'язки між ними – лініями (довільної конфігурації), що звуться *ребрами*.

Def. *Множина вершин V, зв'язки між якими зв'язки визначені множиною ребер E називають **графом** та позначають G = (V, E).*

Перша робота з графів була опублікована двадцятирічним німецьким вченим Леонардом Ейлером в 1736 г. Вона містила рішення задачі про кенігсберзькі мости (рис. 5.1, а):



а б

Рис. 5.1. Задача про мости:
а – план міста; б – граф

чи можна здійснити прогулянку таким чином, щоб вийшовши з будь-якого місця міста, повернутися в нього, пройшовши точно один раз по кожному мосту?

Ясно, що за умовою завдання не має значення, як проходити шлях частинами суші a, b, c, d, на яких розташоване місто, тому їх можна уявити вершинами. Оскільки зв'язки між цими частинами здійснюються лише через сім мостів, то кожен з них зображується ребром, що з'єднує відповідні вершини. В результаті одержуємо граф, зображений на рис. 5.1 б. Ейлер дав негативну відповідь на поставлене запитання. Більше того, він довів, що подібний маршрут є лише для такого графа, кожна з вершин якого пов'язана з парним числом ребер.

З того часу потік завдань із застосуванням графів наростав подібно до снігової лавини. Поряд із численними головоломками та іграми на графах, розглядалися важливі практичні проблеми, багато з яких вимагали тонких математичних методів. Вже в середині XIX століття Кірхгоф застосував графи для аналізу електричних ланцюгів, а Келі досліджував важливий клас графів для виявлення та перерахування ізомерів, насичених вуглеводнем. Проте теорія графів як математична дисципліна сформувалася лише у середині тридцятих років XX століття завдяки роботам багатьох дослідників, найбільша заслуга серед яких належить Д. Кенігу.

Теорія графів має у своєму розпорядженні потужний апарат вирішення прикладних завдань із найрізноманітніших галузей науки і техніки. Сюди відносяться, наприклад, аналіз та синтез економічних систем, проектування каналів зв'язку та дослідження процесів передачі інформації, дослідження операцій, вибір оптимальних маршрутів та потоків у мережах, моделювання життєдіяльності та нервової системи живих організмів, дослідження випадкових процесів та багато інших завдань. Теорія графів тісно пов'язана з такими розділами математики, як теорія множин, теорія матриць, математична логіка та теорія ймовірностей. У всіх цих розділах графи застосовують уявлення різних математичних об'єктів, й те водночас сама теорія графів широко використовує апарат багатьох розділів математики.

Часто зв'язки між об'єктами характеризуються цілком певною орієнтацією. Наприклад, на деяких вулицях допускається тільки односторонній автомобільний рух, транспортування газу газопроводом може бути спрямоване тільки в один бік, відносини між людьми можуть визначатися підпорядкованістю або старшинством і т.п. Орієнтовані зв'язки характеризують перехід системи з одного стану до іншого, результати зустрічей між командами у спортивних змаганнях, різні відносини між числами (нерівність, подільність).

Def. Для зазначення напряму зв'язку між вершинами графа відповідне ребро відзначається стрілкою. Орієнтоване таким чином ребро називають ***дугою***, а граф із орієнтованими ребрами – ***орієнтованим графом*** чи коротше *орграфом* (рис. 5.2, а).

Якщо пара вершин з'єднується двома чи більшим числом дуг, такі дуги називають *паралельними* . При цьому дві дуги, однаково спрямовані по відношенню до даної вершини, називають ***строго паралельними***, а по-різному спрямовані - ***нестрого паралельними***. Нестрого паралельні дуги, що відображають орієнтацію зв'язку в обох напрямках, еквівалентні неорієнтованому зв'язку і можуть бути замінені ребром. Провівши таку заміну в орграфі, прийдемо до *змішаного* графа, який має ребра і дуги (рис. 5.2, б). А будь-який неорієнтований або змішаний граф можна перетворити на орієнтований заміною кожного ребра парою нестрого паралельних дуг.

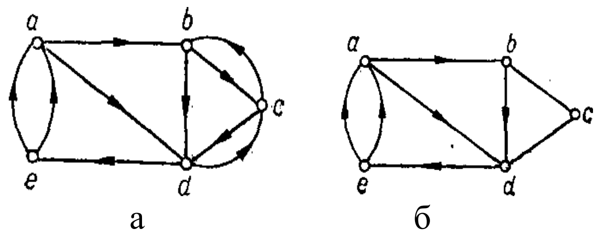


Рис. 5.2. Орієнтований (а) та змішаний (б) графи

Def. ***Вага*** – деяке кількісне значення, якісна ознака або характерна властивість ребра або вершини.

Граф, у якого задана вага кожного ребра чи дуги, називається ***зваженим***. У найпростішому випадку це може бути порядкова нумерація ребер та дуг, що вказує на черговість під час їх розгляду. Вага ребра або дуги може означати довжину (шляхи сполучення), пропускну спроможність (трубопроводу), кількість набраних очок (турніри), кількість рядів руху (автомобільні дороги), характер відношення між людьми (начальник, підлеглий) тощо.

Вагу можна приписувати не тільки ребрам та дугам, а й верши нам. Наприклад , вершини, що відповідають населеним пунктам на карті автомобільних доріг, можуть характеризуватись кількістю місць у кемпінгах, пропускною спроможністю станцій техобслуговування .

5.2. Типи скінченних графів

Def. *Якщо множина вершин графа скінченна, то він називається* ***скінченним графом***. *Скінченний граф* $G = (V, E)$, *що містить рівно* p *вершин і* q *ребер, називається* **(*p, q*) - *графом***.

Нехай $V = \{v_1, v_2, ... v_p\}$ и $E = \{e_1, e_2, ...e_q\}$ - відповідно, множини вершин і ребер (p, q) - графа. Кожне ребро $e_k \in E$ з'єднує пару вершин $v_i, v_j \in V$, котрі є його ***кінцями***.

Def. Для орієнтованого ребра (дуги) розрізняють ***початкову вершину*** , з якої виходить дуга, і ***кінцеву вершину***, в яку дуга заходить (граничні вершини).

Def. Ребро, граничні вершини якого співпадають, тобто є однією і тією ж вершиною, називається **петлею**.

Def. Ребра з однаковими граничними вершинами є паралельними і частіше називаються **кратними**.

У загальному випадку граф може містити і ***ізольовані вершини***, які не є кінцями ребер і не пов'язані ні між собою, ні з іншими вершинами.

Def. Число ребер, пов'язаних з вершиною v_i (петля враховується двічі), називають ***степенем вершини*** і позначають через $\delta(V_i)$.

Def. Степінь ізольованої вершини дорівнює нулю. Вершина ступеня одиниці називається *кінцевою* або ***висячою вершиною***.

Теорема. У будь-якому графі сума степенів всіх вершин дорівнює подвоєній кількості ребер, а кількість вершин непарного степеня завжди парна.

В орграфі розрізняють додатні $\delta^+(v_i)$ та від’ємні $\delta^-(v_i)$ степені вершин, які рівні відповідно числу дуг, що виходять з $_i$ і заходять в v_i. Очевидно, суми додатних та від’ємних степенів усіх вершин орграфа рівні між собою і дорівнюють числу всіх дуг.

Приклад. Для скінченного (5, 6) – графа на рис. 5.3, а:
множина вершин $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$;
множина ребер $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$;
ребра e_2 та e_3 параллельні (кратні);
ребро e_6 є петлею;
v_4 - ізольована вершина, її степінь дорівнює 0 ($\delta(v_4) = 0$);
v_1 - висяча вершина, її степінь дорівнює 1 ($\delta(v_1) = 1$);
решта вершин графа мають такі степені: $\delta(v_2) = 4$, $\delta(v_3) = 3$, $\delta(v_5) = 4$.

Приклад. Для вершини d орграфа на рис. 2, а маємо додатню ($\delta^+(d) = 2$) та від'ємну ($\delta^-(d) = 3$) степені.

Def. ***Простий*** *або звичайний граф - це граф без петель та кратних ребер.*

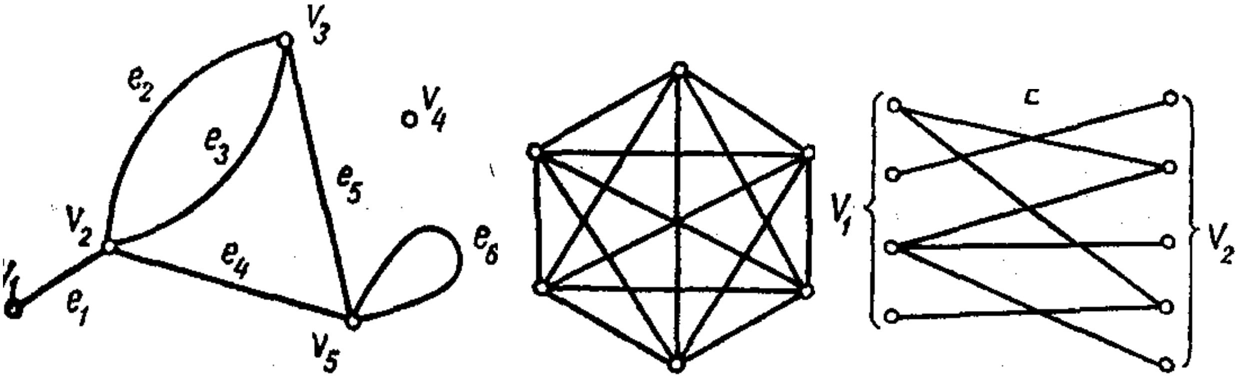
Def. ***Повний*** *граф – це простий граф, у якому будь-які дві вершини з'єднані ребром (рис. 5.3, б).*

Def. ***Мультиграф*** *– це граф, що не містить петель, але має кратні ребра.*

Def. ***Псевдограф*** *– це граф, що допускає петлі і кратні ребра (найбільш загальний випадок графа) (рис. 5.3, а).*

Def. ***Пустий*** *або нуль-граф – це граф, що не має ребер ($E = \varnothing$, всі його вершини ізольовані).*

Якщо множина вершин V простого графа допускає таке розбиття на два підмножини, що не перетинаються, V_1 і V_2 ($V_1 \cap V_2 = \varnothing$), тобто немає ребер, що з'єднують вершини однієї й тієї ж підмножини, він називається *дводольним* чи *біграфом (рис. 5.3, в)*.



а б в

Рис. 5.3. Типи графів: а – псевдограф; б – повний граф; в – біграф

Орієнтований граф вважається *простим*, якщо він не має строго паралельних дуг та петель.

Граф, степені всіх вершин якого однакові і рівні r, називається ***однорідним*** (*регулярним*) r -го *степеня.*

Повний граф з n вершинами є однорідним графом степеня $n - 1$, а порожній граф – однорідний граф ступеня 0. Граф третього степеня називають *кубічним графом*. Він має низку цікавих властивостей і, зокрема, завжди має парне число вершин.

Приклади. На рис. 5.3 а показаний псевдограф з петлею e_6 і кратними ребрами e_2 і e_3 .

Граф на рис. 5.1 б - це мультиграф з двома парами кратних ребер.

Біграф з двома непересічними підмножинами вершин V_1 і V_2 *показаний на* рис. 5.3, в - це простий граф.

На рис.5.3 б показаний повний граф ступеня 5, а на рис. 5.4 – повний (орієнтований) та неповний кубічні графи.

Орграф, показаний на рис.5.2, а, не є простим.

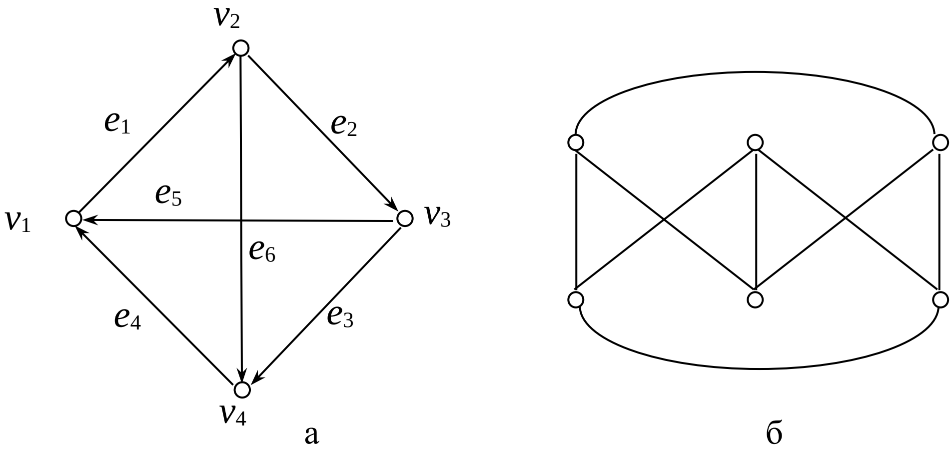


Рис. 5.4. Кубічні графи: а – повний, б – неповний

5.3. Способи задання графів

*5.3.1 . **Геометричні подання** – рисунок. Використовують для ілюстрації та як робочий документ (карти, схеми). Незручний з підвищенням кількості вершин.*

*5.3.2 . **Матриця суміжності графа (орграфа).***

Def. *Дві вершини v_i та $v_j \in V$ графа $G = (V, E)$ називаються **суміжними**, якщо вони є граничними вершинами ребра $e_k \in E$.*

Відношення суміжності на множині вершин графа можна визначити, представивши кожне ребро як пару суміжних вершин, тобто

$$e_k = (v_i, v_j), \; k = 1, 2, \ldots q.$$

Для *неорієнтованих графів такі* пари *неупорядковані* , тобто

$$e_k = (v_i, v_j) = (v_j, v_i),$$

а для орграфів, навпаки, пари упорядковані, причому перша вершина є початковою вершиною дуги e_k , а друга — кінцевою вершиною дуги $e\backslash_k$.

Петля при вершині *vi* представляється парою (v_i, v_i).

Множина вершин *V* разом із заданим на ньому відношенням суміжності повністю визначає граф.

Граф можна визначити *матрицею суміжності*.

Рядки та стовпці цієї квадратної матриці відповідають вершинам графа, а її (ij)-елемент дорівнює числу кратних ребер, що зв'язують вершини v_i і v_j

(або спрямованих від вершини v_i до вершини v_j для орграфа).

Матриця суміжності неорієнтованого графа завжди симетрична, а орграфа - несиметрична.

Неорієнтованим ребрам відповідають пари ненульових елементів, симетричних щодо головної діагоналі матриці, дугам - ненульові елементи матриці, а петлям - ненульові елементи головної діагоналі. У стовпцях і рядках, що відповідають ізольованим вершинам, усі елементи дорівнюють нулю. Елементи матриці простого графа завжди дорівнюють *0* або *1* , причому всі елементи головної діагоналі нульові.

Приклад . Графи, що наведені на рис. 5.2, а і 5.3,а описуються такими матрицями суміжності V_1 і V_2 :

$$V_1 = \begin{array}{ccccc|c} a & b & c & d & e & \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & d \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{array} \; ; \quad V_2 = \begin{array}{ccccc|c} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & v_1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & v_2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & v_5 \end{array} .$$

Для зваженого графа, що не містить кратних ребер, можна узагальнити матрицю суміжності таким чином, що кожен її ненульовий елемент дорівнює вазі відповідного ребра або дуги.

Зворотньо, будь-яка квадратна матриця n-го порядку може бути представлена орграфом з n вершинами, дуги якого з'єднують суміжні вершини і мають ваги, рівні відповідним елементам матриці. Якщо матриця симетрична, вона відповідає неорієнтованому графові.

*5.3.3. **Матриця інцидентності графа (орграфа).***

Def. *Якщо вершина v_i є кінцем ребра e_k, то кажуть, що вони <u>інцидентні</u>: вершина v_i інцидентна ребру e_k і ребро e_k інцидентно вершині e_k.*

Якщо суміжність є відношенням між однорідними об'єктами (вершинами), то інцидентність – це відношення між різнорідними об'єктами (вершинами і ребрами). При розгляді орграфів розрізняють *додатну інцидентність* (дуга виходить з вершини) і *від'ємну інцидентність* (дуга заходить у вершину).

Для (p, q) – графа можна побудувати *матрицю інцидентності* розміру $p\times q$, рядки якої відповідають вершинам, а стовпці – ребрам. Для неорієнтованого графа елементи цієї матриці визначаються за таким правилом:

ij -елемент дорівнює *1* якщо вершина v_i інцидентна ребру e_j , і дорівнює нулю, якщо v_i і e_j не інцидентні.

У разі орграфа ненульовий ij-елемент дорівнює 1 , якщо v_i – начальна вершина дуги e_j , і дорівнює -1, якщо v_i – кінцева вершина дуги e_j .

Приклад. Матриці інцидентності графів, наведених на рис. 5.3,а і 5.4, а мають відповідно такий вигляд:

$$A_1 = \begin{array}{cccccc|c} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & v_2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & v_5 \end{array} ; \quad A_2 = \begin{array}{cccccc|c} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & v_1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & v_2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & v_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & v_4 \end{array} .$$

Кожен стовпець матриці інцидентності містить обов'язково не більше двох одиничних елементів. Кількість одиниць у рядку дорівнює ступеню відповідної вершини (для орграфа кількість позитивних одиниць визначає позитивний ступінь, а кількість від'ємних одиниць - негативний ступінь). Нульовий рядок відповідає ізольованій вершині, а стовпець з двійкою – петлі.

Отже, у матриці інцидентності не більше двох елементів рядка є відмінні від нуля. Такий спосіб завдання графів є універсальним, але не є економічним щодо пам'яті ЕОМ.

Def. *Графи, для яких зберігається відношення інцидентності, називаються* ***ізоморфними***.

Приклад. Графи, зображені на рис. 5.5 мають однакові матриці інцидентності (A_2), як і граф на рис. 5.4, а, проте з геометричної точки зору вони зовсім різні, хоча по суті різняться лише накресленням, а відношення інцидентності (при відповідному значенні вершин і ребер) однакові.

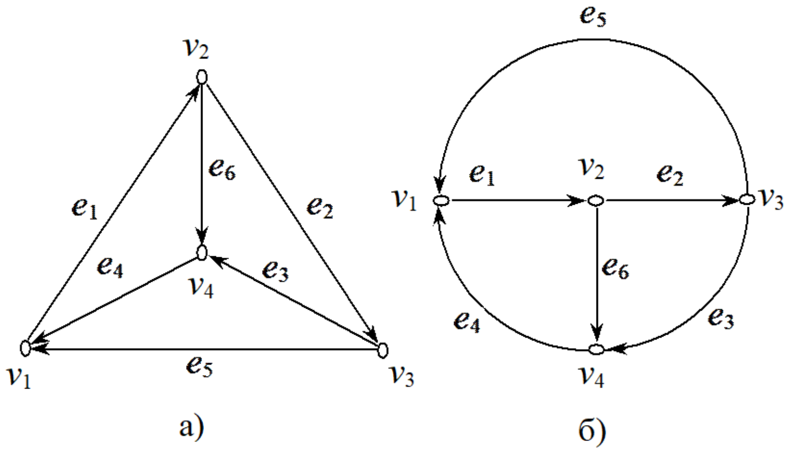


Рис. 5.5. Ізоморфні графи

Зрозуміло, що матриця інцидентності визначає граф без петель із точністю до ізоморфізму.

Зазвичай на її основі можна зобразити різні у геометричному відношенні, але ізоморфні між собою графи, кожен із яких називають *геометричною реалізацією*.

Якщо істотні характеристики графа не пов'язані із методом його зображення на площині або нумерацією вершин і ребер, то ізоморфні графи, як правило, не розрізняють між собою.

5 .3 .4 . ***Список ребер*** *(дуг). Тут у кожному рядку є відповідні номери дуги та вершин, що їй інцидентні. Це також універсальний але набагато більш економічний спосіб щодо пам'яті ЕОМ.*

5 .3.5. ***Матриця досяжності орграфа*** *. Це також квадратна матриця, де номери рядків та стовпців – це номери вершин орграфа. Елементи матриці набувають значення одиниці лише тоді, коли існує шлях з вершини, що має номер рядка, у вершину, що має номер стовпця матриці. Цей спосіб завдання не дозволяє розрізнити зв'язні графи. Для кожного орграфа можна задати матрицю досяжності. Але не всяка довільна матриця є матрицею досяжності орграфа, бо віднайти за її допомогою інші варіанти завдання іноді неможливо (орграф не існує).*

ч***Приклад.*** *Для орграфа G4 (рис. 5.6) сформувати матриці суміжності, досяжності та список дуг.*

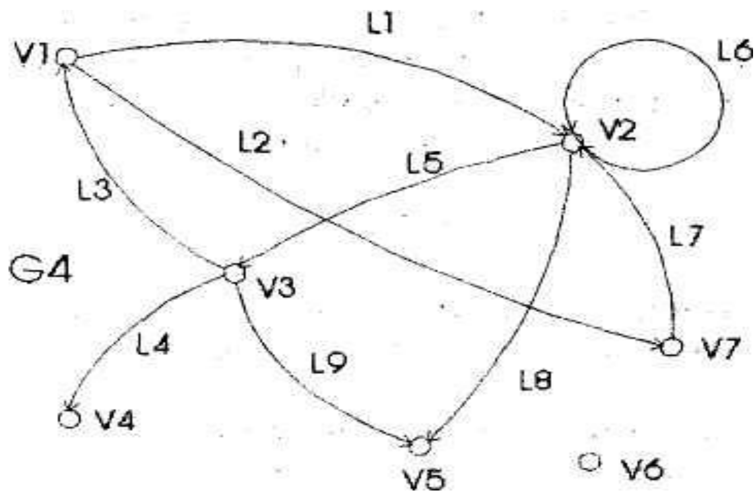


Рис. 5.6. Орграф G4

1) Матриця суміжності орграфа G4:

	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7
V1	0	1	0	0	0	0	1
V2	0	1	1	0	1	0	0
V3	1	0	0	1	1	0	0
V4	0	0	0	0	0	0	0
V5	0	0	0	0	0	0	0
V6	0	0	0	0	0	0	0
V7	0	1	0	0	0	0	0

$$I(G4) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

2) Матриця досяжності орграфа G4.

Така матриця інформативна саме для орграфа, бо для зв'язного графа всі елементи матриці є одиниці, а для графа з декількома областями зв'язності у матриці буде декілька квадратних підматриць суцільно з одиницями, у цих підматриць головна діагональ розташована на головній діагоналі матриці досяжності. Для орграфа все інакше:

$$\begin{array}{c|ccccccc} & V1 & V2 & V3 & V4 & V5 & V6 & V7 \\ \hline V1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ V2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ V3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ V4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V7 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \qquad M(G4) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

3) Список дуг виглядає так:

L1	*V1*	*V2*
L2	*V1*	*V7*
L3	*V3*	*V1*
L4	*V3*	*V4*
L5	*V2*	*V3*
L6	*V2*	*V2*
L7	*V7*	*V2*
L8	*V2*	*V5*
L9	*V3*	*V5*

Зауважимо, що завдання мультиграфа у такий спосіб проблем не поставити, а ось ізольована вершина тут ніяк не позначена.

5.3.6. ***Матриця ваг.*** *Протяжність ребра чи витрати часу на переміщення транспортної чи інформаційної одиниці формує реберно-зважений граф.*

Елементи *матриці ваг* такого графа визначаються співвідношенням:

$$r_{ij} = \begin{cases} 0\text{ , якщо } i = j\text{ ;} \\ m_{i,\,j}\text{, якщо відповідні вершини суміжні і вага ребра між ними } m_{i,\,j}\text{ ;} \\ \infty\text{, якщо вершина } x_i \text{ несуміжна вершині } x_j\text{ .} \end{cases}$$

Граф (орграф) дає наочне геометричне зображення відносин на множинах, їх властивостей.

Рефлексивність *виглядає як наявність петель на всіх вершинах орграфа (графа).*

Антирефлексивність *– відсутність петель.*

Симетричність *виглядає як наявність ребер графа, або наявність двох зустрічних дуг, що поєднують суміжні вершини.*

Антисиметричність *– цілковита відсутність зустрічних дуг між суміжними вершинами.*

Транзитивність *виглядає як обов'язкова наявність для кожних двох* *послідовних дуг (ребер) однієї дуги (ребра), що поєднує ті ж конечні вершини.*

Якщо на орграфі є вершини, які можна розглядати як пари за принципом досяжності *(тобто друга досяжна з першої), то сукупність таких пар складає відношення еквівалентності, якщо на графі вони створюють контур. Якщо створюють єдиний шлях без самоперетинів то багато пар складе відношення строгого порядку, а за наявності петель на всіх вершинах – відношення нестрогого порядку.*

5.4. Маршрути та підграфи

Def. ***<u>Маршрут</u>*** *довжини m на графі – це послідовність m ребер графа (не обов'язково різних), таких, що граничні вершини двох з сусідніх ребер збігаються. Маршрут проходить і через всі вершини, інцидентні ребрам, що входять до нього.*

<u>Замкнений маршрут</u> – це маршрут, який приводить у ту саму вершину, з якої він почався.

Маршрут, все ребра якого різні, називається ***<u>ланцюгом</u>*** , а маршрут, у котрого різні всі вершини, називається ***<u>простим ланцюгом</u>***.

Замкнений ланцюг називається ***<u>циклом</u>***, а простий замкнутий ланцюг – ***<u>простим циклом</u>***.

Орієнтовані маршрути на орграфі визначаються аналогічно з тією різницею, що початкова вершина кожної наступної дуги маршруту повинна співпадати з кінцевою вершиною попередньої дуги. Інакше висловлюючись, рух маршрутом допускається лише у напрямах, зазначених стрілками.

<u>Шлях</u> – це маршрут, що не містить повторюваних дуг.

<u>Простий шлях</u> – це шлях, що не містить повторюваних вершин (за винятком, можливо, начала і кінця маршруту).

Замкнений шлях називається ***<u>контуром</u>*** , а простий замкнутий шлях – ***<u>простим контуром</u>*** .

Граф (орграф) називається ***<u>циклічним</u>*** *(контурним)* , якщо він містить хоча б один цикл (контур), інакше він називається ***<u>ациклічним</u>*** *(безконтурним)*.

Якщо існує шлях $\mu[a, b]$, то кажуть, що
– вершина b є досяжна (достижима) з вершини a, або
– вершина a досягає (достигает) вершини b.

Орграф є сильнозв'язний, якщо для будь-якої пари вершин кожна з них досяжна з іншої.

Приклади. Розглянемо граф, показаний на рис. 5.3, а. На цьому графі:

(e_1, e_3, e_2, e_3, e_5) - маршрут, що проходить *через послідовність вершин* (v_1, v_2, v_3, v_2, v_3, v_5) і з'єднує вершини v_1 і v_5;

(e_5, e_6, e_4, e_4) - маршрут, що проходить *через послідовність вершин* (v_3, v_5, v_5, v_2, v_5), з'єднуючи v_3 и v_5;

(e_1, e_3, e_5, e_4, e_1) - замкнутий маршрут;

(e_2, e_5, e_6) - ланцюг;

(e_1, e_2, e_5) - простий ланцюг;

(e_2, e_3, e_4, e_5) – цикл;

(e_2, e_4, e_5) - простий цикл.

На орграфі рис. 5.5 (а) маршрут **(e_1, e_2, e_5)** – простий шлях, що є контуром, а маршрут **(e_1, e_2, e_3)** – простий неконтурний шлях.

Цикл, який містить усі ребра графа, називається ***ейлеровим циклом*** (завдання про кенігсберзькі мости зводиться до з'ясування існування такого циклу), а граф, в якому є такий цикл, називається ейлеровим графом.

Простий цикл, який проходить через усі вершини графа, називають ***гамільтоновим циклом***.

Якщо критерій існування ейлерового циклу дуже простий (необхідно, щоб степені всіх вершин були парними), то для гамільтонових циклів жодного загального правила не знайдено.

Граф $G' = (V', E')$ є *частиною графа* $G = (V, E)$, якщо $V' \subset V$ і $E' \subset E$, тобто. граф містить вершини та ребра будь-якої його частини.

Def. Підграф - *це частина графа, яка, поряд з деяким підмножиною ребер графа, містить і всі інцидентні їм вершини.*

Def. *Суграф - це частина графа, яка поряд з деяким підмножиною ребер графа, містить всі вершини графа* $(V' = V, E' \subset E)$.

Сукупність усіх ребер графа, що не належать його підграфу (разом з інцидентними вершинами), утворить *доповнення* підграфа . Кажуть, що під - графи одного графа $G' = (V', E)$ та $G'' = (V'', E'')$ *розділені ребрами*, якщо вони не мають спільних ребер $(E' \cap E'' = \varnothing)$ і *розділені вершинами*, якщо вони не мають спільних вершин $(V' \cap V'' = \varnothing)$.

Приклад. На рис. 5.7 показані різні частини кубічного орграфа G: підграфи G', G_1 и G_2; суграф G''. Підграфи G_1 и G_2 розділені ребрами та розділені вершинами.

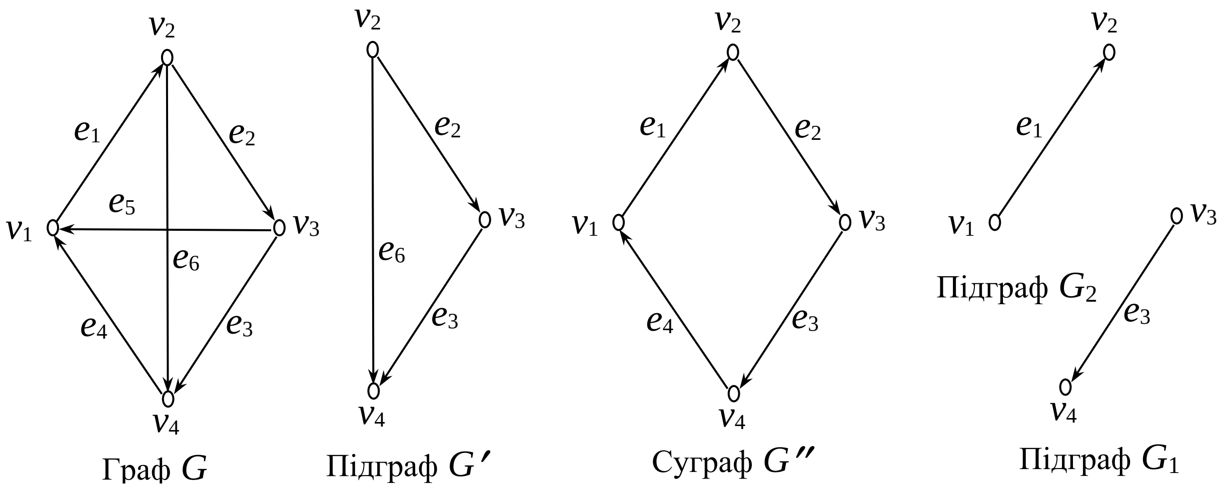


Рис. 5.7. Частини графа G