Навчальна дисципліна:
Дискретна математика

Лектор:

професор Кучук Георгій Анатолійович

E-mail: kuchuk56@ukr.net

3 семестр навчання на бакалавраті

Наприкінці семестру - іспит

Тема 5. Графи

Лекція 5.2

Питання лекції

1. Зв'язність та роздільність.
2. Характеристики графів.
3. Дерева та ліс.
4. Планарні або плоскі графи

Рекомендована література

1. *Конспект лекцій.URL:* *https://drive.google.com/drive/folders/12QYRD4L8kQr0g48DJVN386FrISDuyPwQ?usp=sharing*

2. Олійник Л.О. Дискретна математика: Навч. посібник. 2015. 256 с. URL:: https://www.dstu.dp.ua/Portal/Data/3/17/3-17-b2.pdf

3. Балога С.І. Дискретна математика*. Навчальний посібник. – Ужгород: ПП «АУТДОР-. ШАРК», 2021. – 124 с.* *https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/bitstream/lib/3415/1/%D0%BD%D0%B0%D0%B2%D1%87%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE-%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D0%B8%D1%87%D0%BD%D0%B8%D0%B9%20%D0%BF%D0%BE%D1%81%D1%96%D0%B1%D0%BD%D0%B8%D0%BA.pdf*

1. Зв'язність та роздільність

Def. Дві вершини графа називають **зв'язаними**, якщо є маршрут, що з'єднує ці вершини. Граф, будь-яка пара вершин якого пов'язана, називають **зв'язним графом**.

Незв'язний граф є сукупністю окремих частин (підграфів), які називаються ***компонентами графа.***

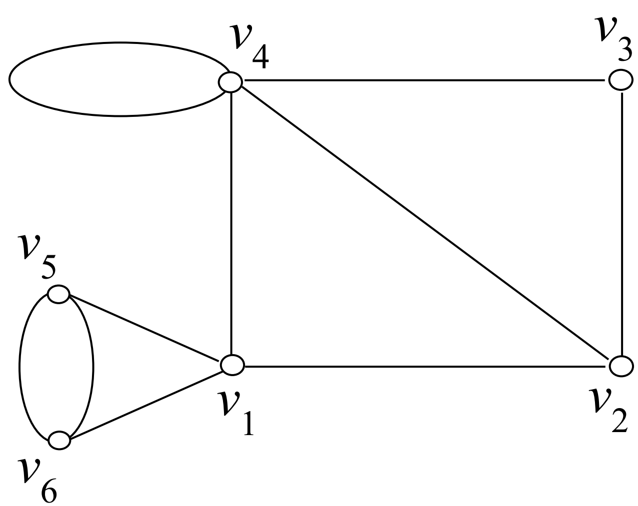


Рис. 1. Зв'язний граф

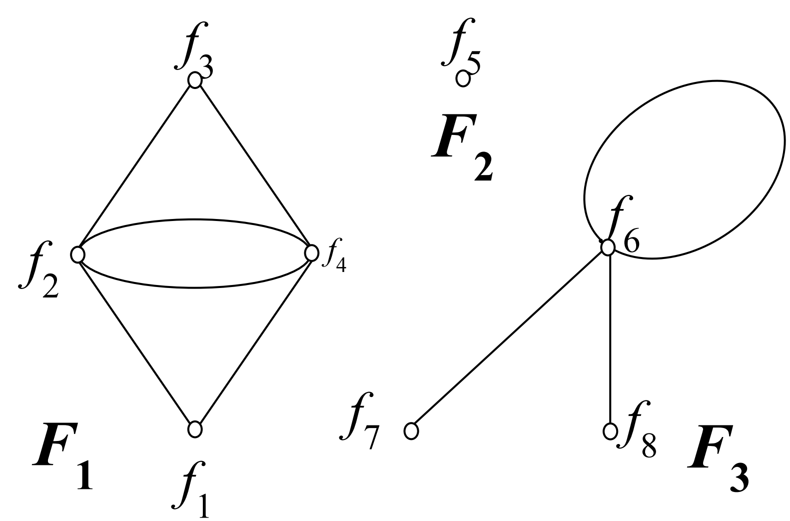


Рис..2. Незв'язний граф F

Def. Граф називають ***циклічно зв'язним***, якщо будь-які дві різні вершини містяться в циклі.

Def. Граф називають ***k-зв'яз****ним*, якщо будь-яка пара різних вершин пов'язана, принаймні k ланцюгами, які не мають спільних вершин (крім начальної і кінцевої).

Def. Орграф називають ***сильно зв'язним***, якщо для будь-якої пари його вершин v_i, v_j існує шлях з v_i до v_j і з v_j до v_i.

Def. Якщо існує така вершина, видалення якої перетворює зв'язний граф (або компоненту незв'язного графа) на незв'язний, то вона називається ***точкою зчленування.*** Ребро з тими самими властивостями називаєтьс*я* ***мостом.***

Def. Граф називається ***нероздільним***, якщо він зв'язний і не має точок зчленування.

Def. Граф, що має хоча б одну точку зчленування, є роздільним і називається ***сепарабельним***.

Def. Підграф орграфа, який має одну начальну (вхідну) та одну кінцеву вершину має назву **"*гамак*".**

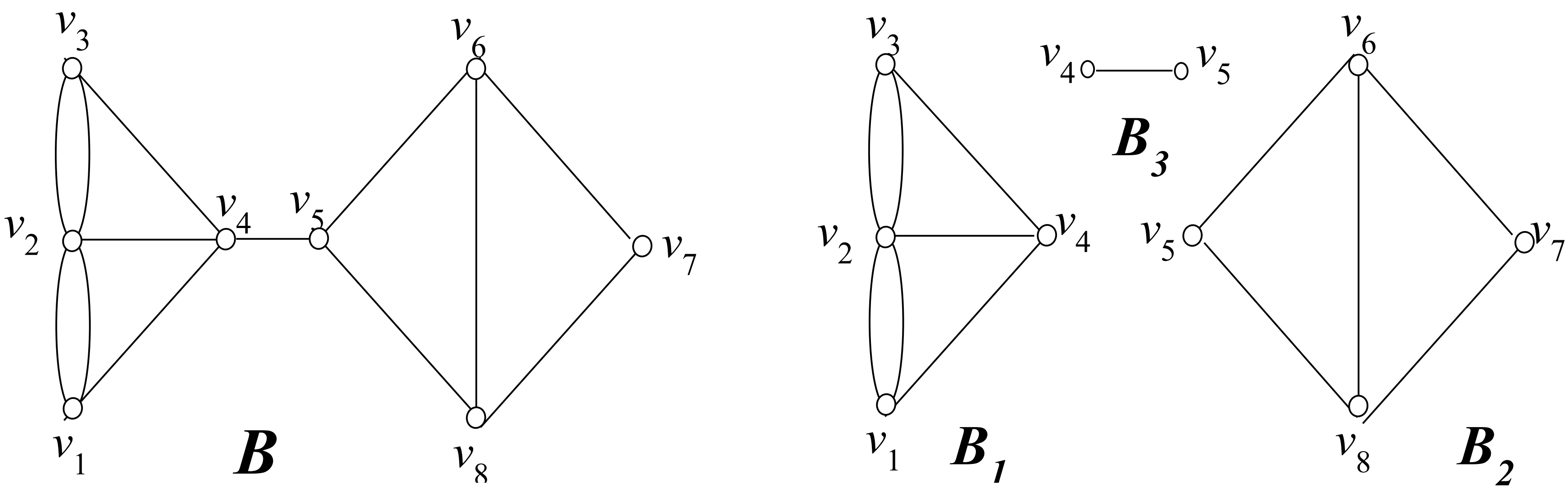


Рис. 3. Компоненти роздільного графа *B* з мостом

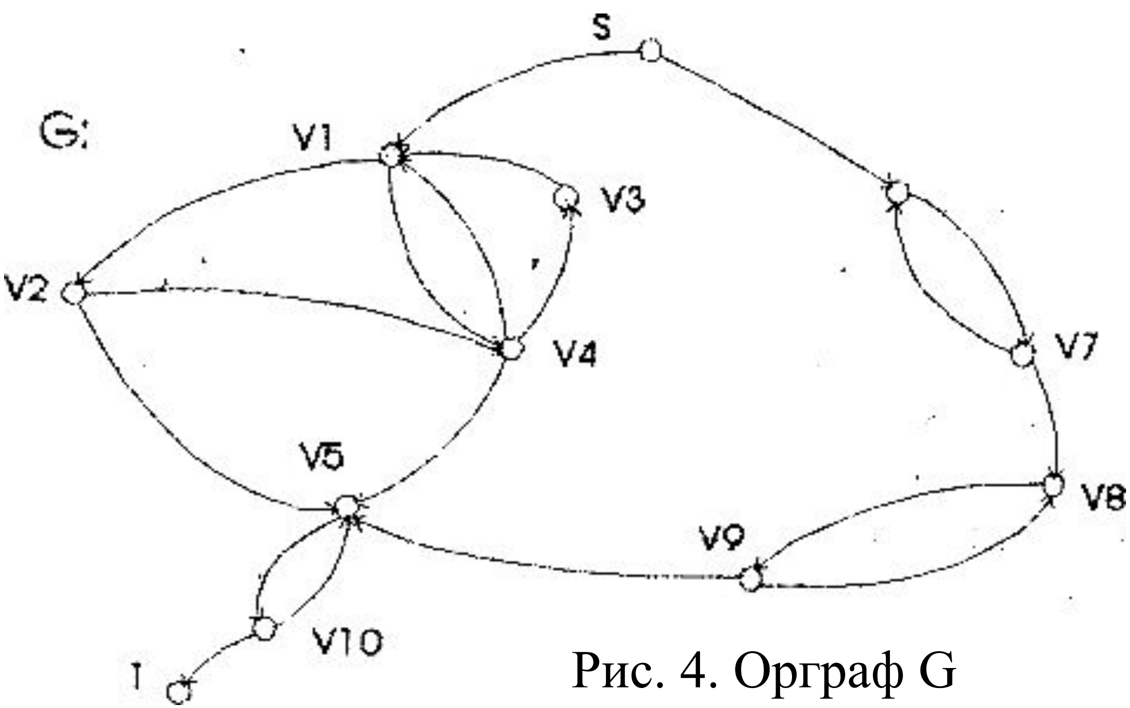


Рис. 4. Орграф G

Гамаки:

S, V6, V7, V8, V9, V5;
S, V1, V3, V4, V2, V5, V10, T.

Лінійний компонент орграфа:

V5, V10, T.

2. Характеристики графа

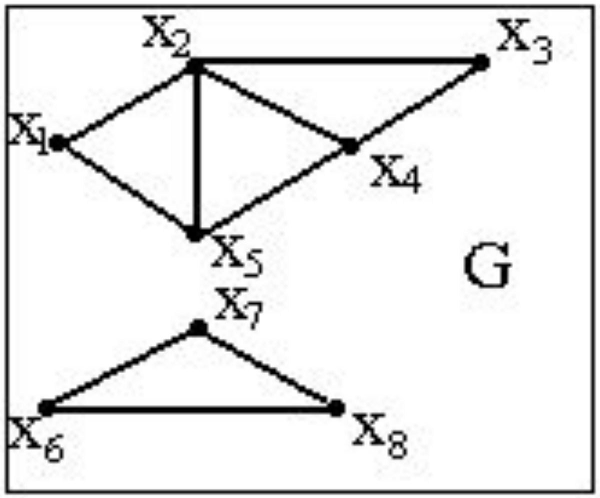
Маємо граф G = (*V, E*). Нехай це буде (p, q) – граф.

1. **Число вершин** – p.
2. **Число ребер** – q.
3. **Степені вершин** - δ_i (або δ_i^{+} / δ_i^{-}).
4. **Число компонент зв'язності графа** k(G).
5. **Цикломатичне число графа** λ(G):

$$\lambda(G) = q - p + k(G).$$

6. **Хроматичне число графа** γ(G).

Приклад. Визначити характеристики заданого графа.



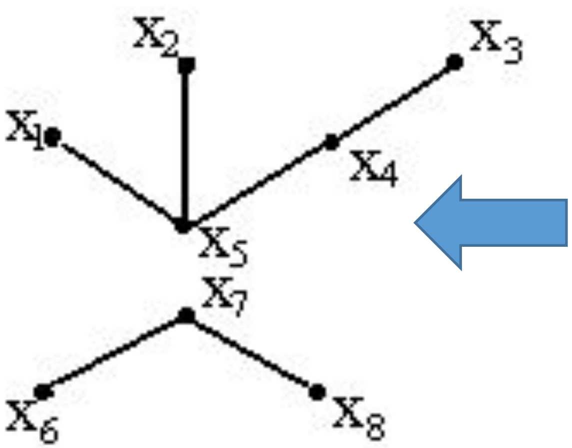
1. **Число вершин:** p = 8.
2. **Число ребер:** q = 10.
3. **Степені вершин:** $x_1 - 2$; $x_2 - 4$; $x_3 - 2$; $x_4 - 3$; $x_5 - 3$; $x_6 - 2$; $x_7 - 2$; $x_8 - 2$.
4. **Число компонент зв'язності графа:**

$$k(G) = 2.$$

5. **Цикломатичне число графа**:

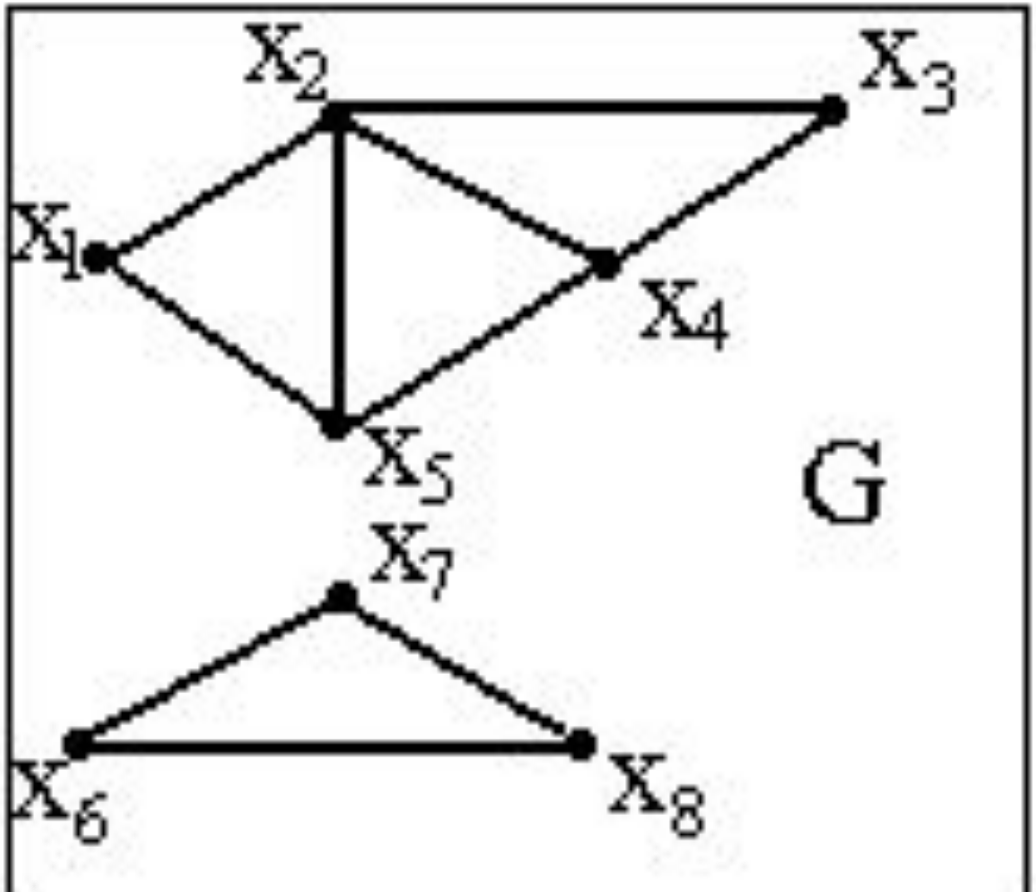
$$\lambda(G) = q - p + k(G) =.10 - 8 + 2 = 4,$$

тобто треба видалити мінімум 4 ребра, щоб не було циклів, наприклад на рисунку ліворуч.

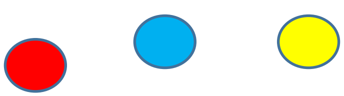


6. **Хроматичне число графа:** $\gamma(G) = 3$.

Приклад. Визначити характеристики заданого графа.



Хроматичне число графа: γ(G) = 3.



3. Дерева та ліс

Def. ***<u>Дерево</u>*** – це зв'язний ациклічний граф.

Дерево це зв'язний неорієнтований граф без циклів або

– граф, де будь-які дві вершини з'єднані простим ланцюгом, або

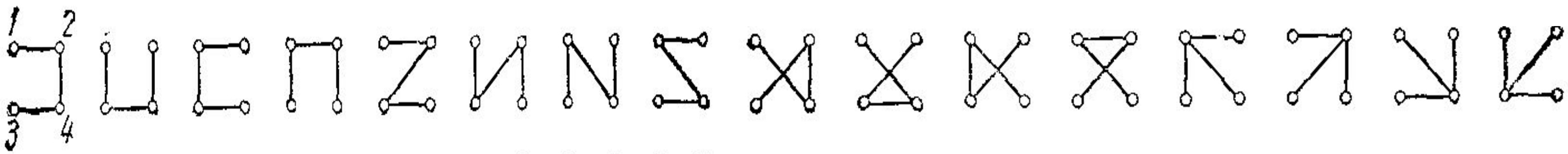
– граф зв'язний і має $q = p – 1$ ребро , або

– граф не має циклів і має $q = p – 1$ ребро , або

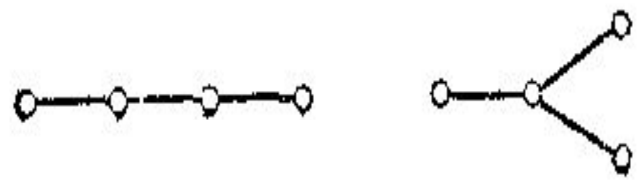
– граф не має циклів, але додання ребра між будь-якими двома вершинами призводить до появи одного циклу, або

– граф зв'язний, але втрачає цю властивість після видалення будь- якого ребра.

Приклад. Визначити всі дерева на множині чотирьох вершин.

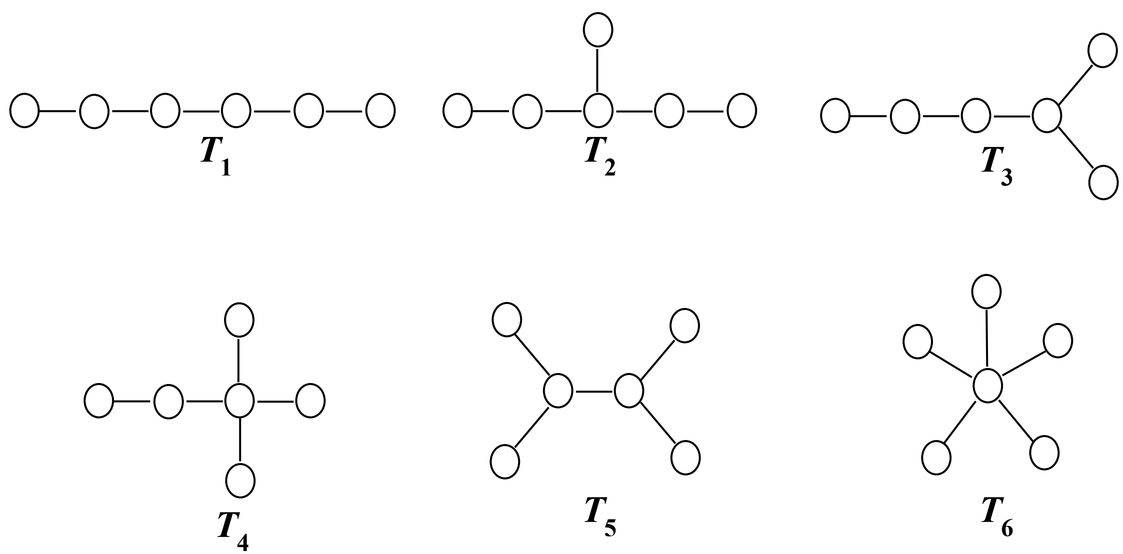


Всі можливі 16 варіантів дерев



Але тільки 2 неізоморфних дерева

Приклад. Побудувати всі суттєво різні дерева на множині шести вершин.



Послідовне дерево - T_1
Зіркове дерево - T_6.

Def. *Незв'язний граф, компоненти якого є деревами, називається* ***лісом***.

Ліс з *k* дерев, що містить *p* вершин, має в точності *p - k ребер*.

Будь-яке дерево має не менше ніж дві **висячі вершини.**

Відстань від вершини x до найвіддаленої вершини називають ексцентриситетом **вершини** x і позначають як ε(x), ε(x) = max μ[x, y].

Найменший ексцентриситет вершин є **радіус** дерева T, це позначають як r(T). Найбільший ексцентриситет вершин є **діаметр** дерева T, це позначають як d(T)

Центральна вершина дерева – це вершина, у якої ексцентриситет дорівнює радіусу.

Центр дерева – це множина центральних вершин, C(T).

Приклад. Сформувати матрицю відстаней заданого дерева (використовуючи властивість її симетричності). Розрахувати: цикломатичне та хроматичне числа; степені та ексцентриситети всіх вершин; радіус, діаметр та центр дерева, перелік всіх висячих вершин, побудувати ярусну структуру дерева відносно центра.

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9
V_1	0	2	1	2	2	3	4	3	4
V_2	2	0	1	2	2	3	4	3	4
V_3	1	1	0	1	1	2	3	2	3
V_4	2	2	1	0	2	3	4	3	4
V_5	2	2	1	2	0	1	2	1	2
V_6	3	3	2	3	1	0	3	2	3
V_7	4	4	3	4	2	3	0	1	2
V_8	3	3	2	3	1	2	1	0	1
V_9	4	4	3	4	2	3	2	1	0

$\lambda(T) = 8 - 9 + 1 = 0$

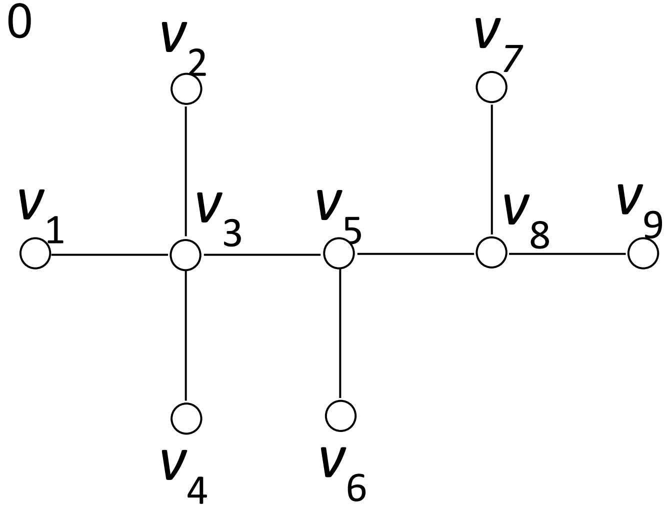
$\gamma(T) = 2$

$r(T) = 2$

$d(T) = 4$

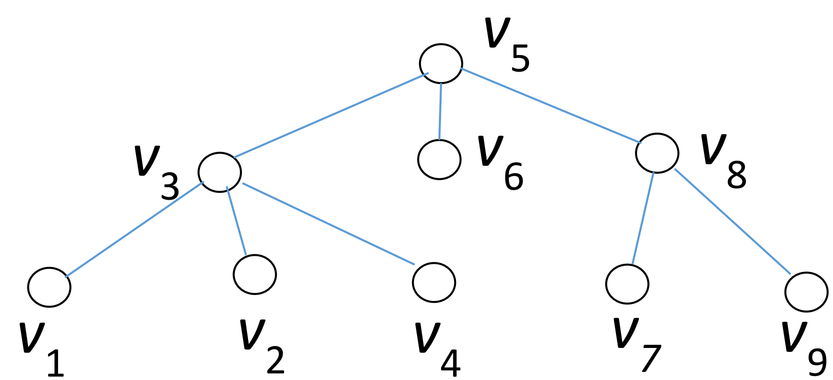
$C(T) = \{v_5\}$

$V(T) = \{v_1, v_2, v_4, v_6, v_7, v_9\}$



Ексцентриситети та степені всіх вершин

V_i	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9
ε_i	4	4	3	4	2	3	4	3	4
δ_i	1	1	3	1	3	1	1	3	1



Приклад. Сформувати матрицю відстаней заданого дерева (використовуючи властивість її симетричності). Розрахувати: цикломатичне та хроматичне числа; степені та ексцентриситети всіх вершин; радіус, діаметр та центр дерева, перелік всіх висячих вершин, побудувати ярусну структуру дерева відносно центра.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
v_1	0	2	1	2	2	3	4	3	4
v_2	2	0	1	2	2	3	4	3	4
v_3	1	1	0	1	1	2	3	2	3
v_4	2	2	1	0	2	3	4	3	4
v_5	2	2	1	2	0	1	2	1	2
v_6	3	3	2	3	1	0	3	2	3
v_7	4	4	3	4	2	3	0	1	2
v_8	3	3	2	3	1	2	1	0	1
v_9	4	4	3	4	2	3	2	1	0

$\lambda(T) = 8 - 9 + 1 = 0$

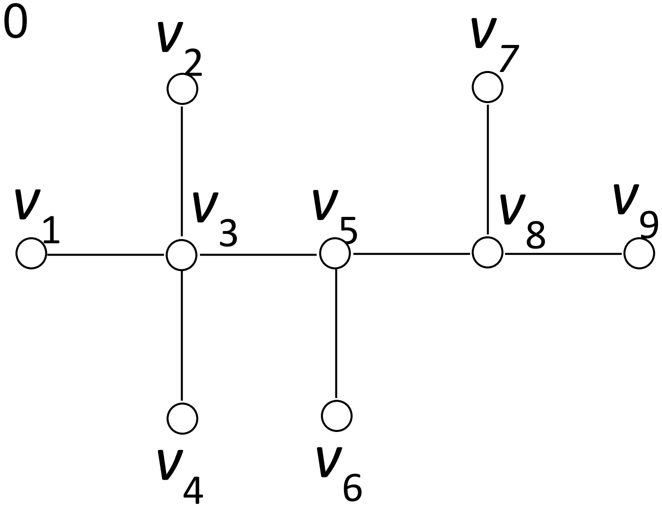
$\gamma(T) = 2$

$r(T) = 2$

$d(T) = 4$

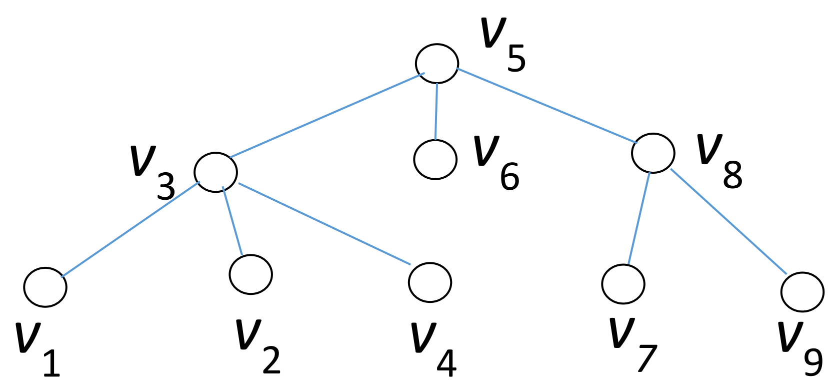
$C(T) = \{v_5\}$

$V(T) = \{v_1, v_2, v_4, v_6, v_7, v_9\}$



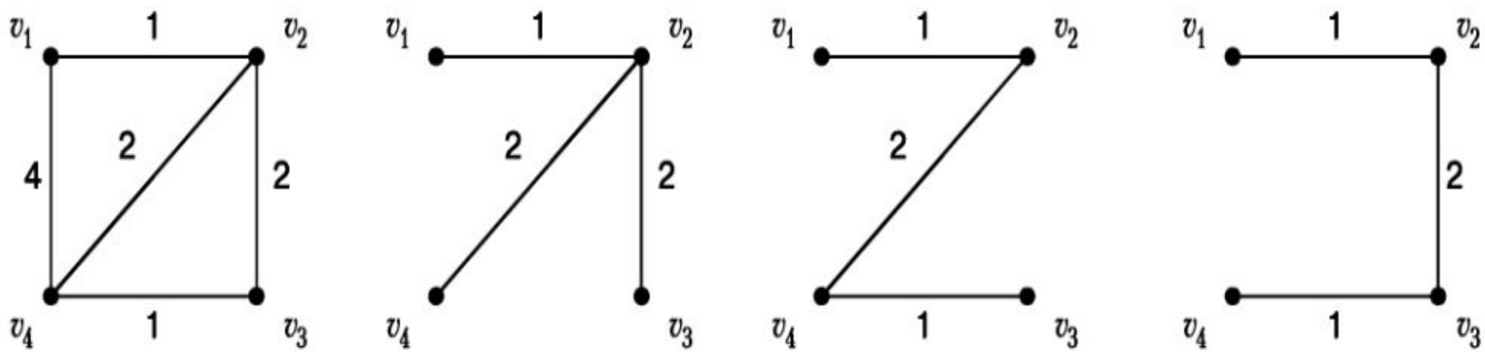
Ексцентриситети та степені всіх вершин

v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
ε_i	4	4	3	4	2	3	4	3	4
δ_i	1	1	3	1	3	1	1	3	1

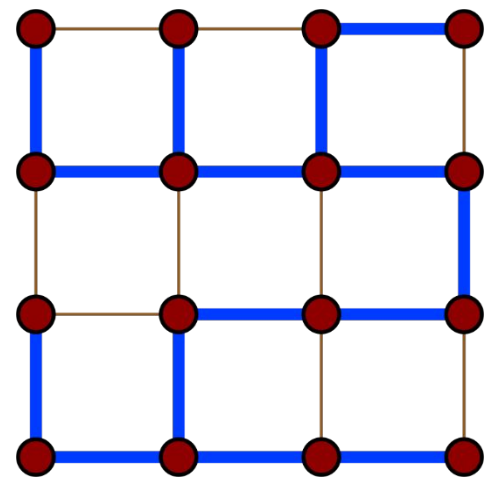


Def. Будь-яка зв'язна сукупність ребер, що не містить контурів, разом з інцидентними їм вершинами утворює ***дерево графа***.

Def. Якщо дерево графа є суграфом (містить усі вершини графа), то воно називається <u>***кістяковим деревом або остовом***</u>.

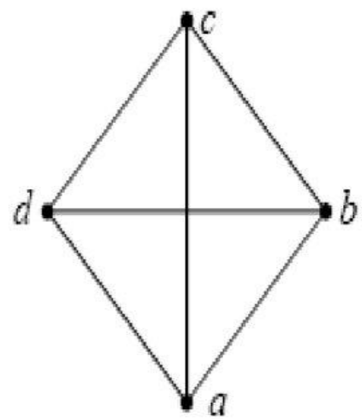


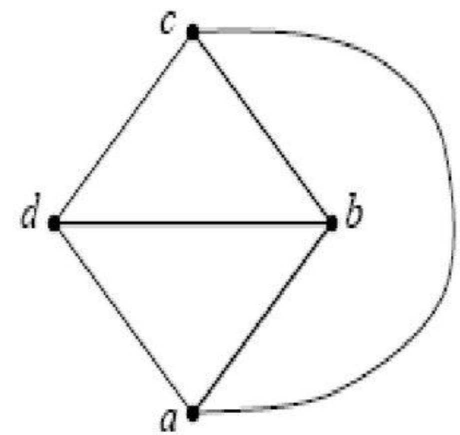
Ребра графа, що належать його дереву, називають <u>***гілками***</u>.
Множина ребер графа розбивається на два підмножини: підмножина гілок і підмножина ребер *доповнення гілок*, які називаються <u>***хордами.***</u>

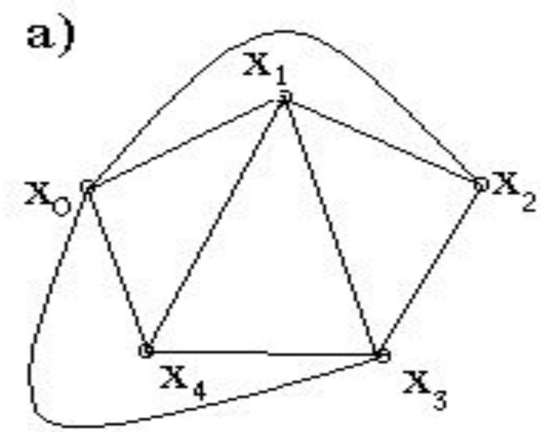


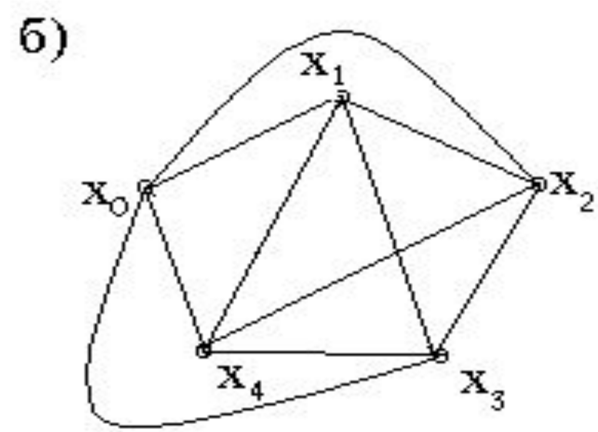
4. Планарні або плоскі графи

Def. Граф називають ***<u>плоским (планарним)</u>*** , якщо існує ізоморфний йому граф (геометрична реалізація), який може бути зображений на площині без перетину ребер.



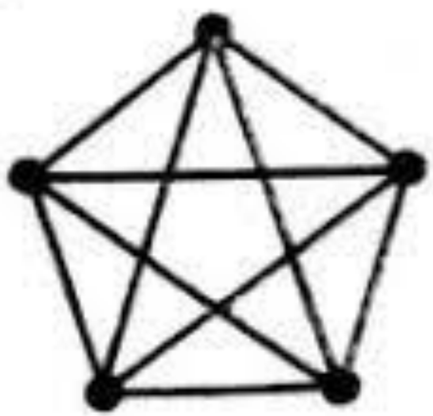




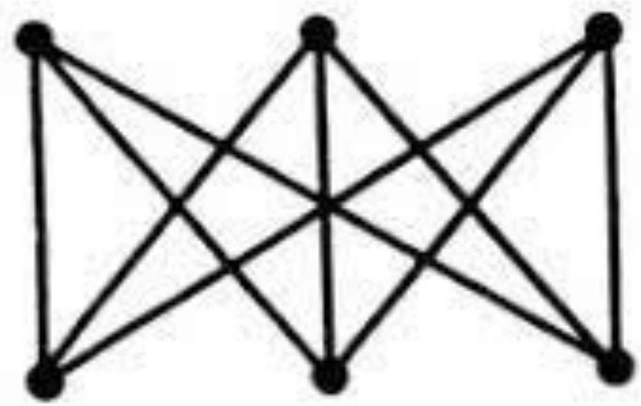


Властивості планарності не порушуються, якщо деяке ребро розбити на два введенням нової вершини другого ступеня або замінити два ребра, інцидентні вершині другого ступеня, одним ребром, вилучивши цю вершину.

Теорема. Граф є плоским тоді й тільки тоді, коли він не містить підграфа, гомеоморфного одному з графів Понтрягіна – Куратовського: (повний п’ятивершинний граф K_5 та дводольний граф $K_{3,3}$).



K_5



$K_{3,3}$

Видалення з цих графів хоча б одного ребра перетворює їх на плоскі графи.