ВІДНОШЕННЯ МІЖ МНОЖИНАМИ

План

1. Відношення як окремий випадок відповідності.
2. Способи завдання відношень.
3. Операції над відношеннями.
4. Властивості відношень.
5. Приклади відношень.
6. Види відношень.
7. Упорядковані множини
8. Гомоморфізм

1. ВІДНОШЕННЯ ЯК ОКРЕМИЙ ВИПАДОК ВІДПОВІДНОСТІ

Бінарне відношення **-** відповідність, задана на одній і тій же множині X

Між елементами цієї множини можуть існувати певні логічні зв'язки, або, інакше кажучи, елементи знаходяться у певних стосунках один з одним.

Той факт, що елемент $x_1 \in X$ знаходиться у відношенні R до елемента $x_2 \in X$ записується таким чином:

$$x_1 R x_2 \text{ або } \left(x_1, x_2\right) \in R,$$

читається «x_1знаходиться у відношенні R до x_2».

Відношення між двома елементами називається бінарним, між трьома – тернарним, відношення між n елементами називається n-арним (ен-арним).

Таблиця множення чисел, скажімо, від 1 до 4 може бути подана як тернарне відношення на множині $X = \{x|(x \in Z) \wedge(x \geq 1) \wedge(x \leq 16) \}$ *, але замість рядків*

$1 \cdot 1 = 1$ $2 \cdot 1 = 2$ $3 \cdot 1 = 3$ $4 \cdot 1 = 4$

$1 \cdot 2 = 2$ $2 \cdot 2 = 4$ $3 \cdot 2 = 6$ $4 \cdot 2 = 8$

$1 \cdot 3 = 3$ $2 \cdot 3 = 6$ $3 \cdot 3 = 9$ $4 \cdot 3 =12$

$1 \cdot 4 = 4$ $2 \cdot 4 = 8$ $3 \cdot 4 = 12$ $4 \cdot 4 = 16$

маємо $\Gamma \subseteq X^n$ *де* $\Gamma = \{(1, 1, 1), (1, 2, 2), (1, 3, 3), (1, 4, 4), (2, 1, 2), (2, 2, 4) , (2, 3, 6), (2, 4, 8), (3, 1 , 3), (3 , 2 , 6), (3 , 3, 9), (3, 4 , 12), (4, 1, 4) , (4, 2, 8), (4, 3, 12), (4, 4, 16)\}$.

Властивості відношень та операції над відношеннями вивчає алгебра відношення або реляційна алгебра. Реляційна алгебра послуговує теоретичною основою для побудови реляційних баз даних, широковживаних комп'ютерних інформаційних технологій. Зберігання табличної інформації у вигляді множин кортежів дає можливість економити пам'ять комп'ютера, а операції пошуку та оновлення інформації часто зведені до теоретико- множинних операцій над множинами кортежів.

Ми розглядатимемо лише бінарні відносини. Еквівалентом поняття відносини можуть бути вирази «бути рівним», «бути менше (більше)», «бути братом», «бути мешканцем одного міста» і т.д.

2. СПОСОБИ ЗАВДАННЯ ВІДНОШЕНЬ

Відношення задаються також як і відповідності: перерахуванням пар елементів, що входять у відношення, таблицею (матрицею) або графічним зображенням.

Приклад 1. На множині $M=\{1,5,6,30\}$ розглядається відношення R - «бути більше». Представити його різними способами.

Перерахуванням дане відношення представляється у вигляді

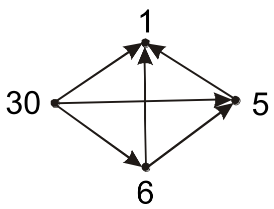
$$R=\{(5,1),(6,1),(6,5),(30,1),(30,5),(30,6)\}.$$

У вигляді таблиці відношення виглядає так

2-й / 1-й.	1	5	6	30
1	0	0	0	0
5	1	0	0	0
6	1	1	0	0
30	1	1	1	0

Оскільки ставлення задається одному й тому безлічі, то таблиці зазначено, де розташовані перші та другі координати відносини. Нижче це відношення представлено матрицею та графом

$$R=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



3. ОПЕРАЦІЇ НАД ВІДНОШЕННЯМИ

Так як відношення є окремим випадком відповідностей, то над ними виконуються ті ж операції, що і над множинами та відповідностями:

1) інверсія відносин;
2) композиція відносин.

Інверсією відношення R називається відношення R^{-1}, утворене інверсіями пар відносини R; R^{-1} ще називають **оберненим відношенням** .

Приклад 2. На множині $M = \{1,3,6\}$ задано відношення R- «менше чи дорівнює»: $R = \{(1,1),(1,3),(1,6),(3,3),(3,6),(6,6)\}$, обернене відношення $R^{-1} = \{(1,1),(3,1),(6,1),(3,3),(6,3),(6,6)\}$, можна задати як "більше або дорівнює".

Композицією відношень R та S називається відношення $Q = R \circ S$, утворене композиціями пар.

Приклад 3. На множині $M = \{1,3,6\}$ задані відношення R- "більше" та S - "рівно". Записати композицію цих відношень.

$$R = \{(3,1),(6,1),(6,3)\} \qquad S = \{(1,1),(3,3),(6,6)\}$$

$$Q = R \circ S = \{(3,1),(6,1),(6,3)\}.$$

Відношення R та S можуть бути задані на різних множинах. Наприклад, відношення R- «більше» задано на множині $M = \{1,3,6\}$, а відношення S - «рівно» на множині $N = \{8,9,6\}$, тобто. $R = \{(3,1),(6,1),(6,3)\}$, $S = \{(8,8),(9,9),(6,6)\}$. Тоді $R \circ S = \varnothing$, $S \circ R = \{(6,1),(6,3)\}$.

Оскільки відносини є множинами, то над відносинами виконуються самі операції, як і множинами: об'єднання, перетин, доповнення, різницю, сума за mod 2 тощо

Об'єднанням (перетином, різницею, симетричною різницею) відносин R і S називається об'єднання (перетин, різницю, сума по mod 2) відповідних їм множин.

Приклад 4. На множині $M = \{1,3,6\}$ задані відношення R- "більше чи одно" і S- "рівно". Виконати з цих відносин операції об'єднання, перетину, різниці, суми по mod 2.

$R = \{(1,1),(3,1),(6,1),(3,3),(6,3),(6,6)\}$

$S = \{(1,1),(3,3),(6,6)\}$

$R \cup S = \{(1,1),(3,1),(6,1),(3,3),(6,3),(6,6)\}$

$R \cap S = \{(1,1),(3,3),(6,6)\}$

$R \setminus S = \{(3,1),(6,1),(6,3)\}$

$S \setminus R = \varnothing$

$R \oplus S = \{(3,1),(6,1),(6,3)\}$

Доповненням відношення $R \subset M \times M$ (до $M \times M$) називається різниця $(M \times M) \setminus R$.

Приклад 5. На множині $M=\{1,3,6\}$ задане відношення R - «більше чи одно». Записати доповнення відношення R.

$M\times M=\{(1,1),(3,1),(6,1),(3,3),(6,3),(6,6),(1,3),(3,6),(1,6)\}$

$R=\{(1,1),(3,1),(6,1),(3,3),(6,3),(6,6)\}$

$(M\times M)\setminus R=\{(1,3),(3,6),(1,6)\}$

4. ВЛАСТИВОСТІ ВІДНОШЕНЬ

Основними властивостями відносин є:

- рефлексивність
- антирефлексивність
- симетричність
- антисиметричність
- транзитивність

Рефлексивність

Відношення *R* називається рефлексивним, якщо кожний елемент множини *M*, на якій задано відношення *R*, знаходиться у цьому відношенні сам із собою, тобто. $\forall x\in M:(x,x)\in R$.

На графі рефлексивного відношення кожна вершина має петлю.

Приклад 6. Відношення R – «менше чи дорівнює», задане на множині $M=\{1,2,3\}$ є рефлексивним.

$$R=\{(1,1),(2,2),(1,3),(3,3),(1,2),(2,3)\} \qquad R=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Антирефлексивність

Відношення R називається антирефлексивним, якщо жоден елемент множини M, у якому задано відношення R, не знаходиться у цьому відношенні сам із собою, тобто. $\forall x\in M:(x,x)\notin R$.

На графі антирефлексивного відношення жодна вершина не має петлі.

Приклад 7. Відношення R – «менше», задане на множині $M=\{1,2,3\}$ є антирефлексивним:

$$R=\{(1,3),(1,2),(2,3)\} \qquad R=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Відношення, на графі якого в одних вершин є петлі, а в інших немає, не є ні рефлексивним, ні антирефлексивним.

Симетричність

Відношення R називається симетричним, якщо для будь-якої пари, $(x,y) \in R$, де $x,y \in M$, одночасно виконується умова $(y,x) \in R$.

Граф симетричного відношення містить лише подвійні ребра, а петлі можуть бути чи не бути.

Приклад 8. Відношення R – «бути братом», задане на багатьох людях, зокрема на множині $M = \{x,y,z,w\}$ є симетричним. Нехай x,y,z – між собою брати, а w – нікому не брат: $R = \{(x,y),(y,x),(x,z),(z,x),(y,z),(z,y)\}$.

Антисиметричність

Відношення R називається антисиметричним, якщо ні для якої пари <u>різних</u> елементів $x,y \in M$, $(x,y) \in R$ одночасно не виконується умова $(y,x) \in R$. Граф антисиметричного відношення містить лише одинарні ребра, а петлі можуть бути чи не бути.

Приклад 9. Відношення R – «бути дільником», задане на множині $M = \{1,2,3,9,15\}$ є антисиметричним.

$$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(9,9),(15,15),(1,2),(1,3),(1,9),(1,15),(3,9),(3,15)\}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Якщо на графі є і одинарні і подвійні ребра, то відношення, задане цим графом, не є ні симетричним, ні антисиметричним.

Транзитивність

Відношення R називається транзитивним, якщо з того, що одночасно виконуються умови xRy і yRz випливає і умова xRz.

На графі транзитивного відношення якщо є два послідовні ребра одного напрямку, то має бути замикаюче ребро, що йде з початку першого ребра до кінця другого.

Приклад 10. Відношення R – «менше», задане на множині $M = \{1,2,3,4\}$ є транзитивним.

$$R = \{(1,2),(2,3),(1,3),(1,4),(2,4),(3,4)\} \qquad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Антитранзитивної властивості немає.

5. ПРИКЛАДИ ВІДНОШЕНЬ

1) Треба побудувати матрицю бінарного відношення „ $x_i \geq x_j$ ” на підмножині цілих чисел X = {1, 2, 3, 5, 6, 4 }та визначити властивості відношення. Розв'язок у наступному. Маємо відношення R = (X, Q), де Q = {(2, 1), (3, 1), (5, 1), (4, 1), (6, 1), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2), (4, 3), (5, 3), (6, 3), (5, 4), (6, 4), (6, 5), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6) }. У кожному кортежі множини Q перший елемент більший або дорівнює іншому. На матриці (рисунок 2-9) одиниці розташовані у клітинах, де перший елемент кортежу взято з елементів множини X, якими позначені рядки матриці, а другий елемент кортежу взято з елементів множини X, якими позначені стовпці матриці.

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
2	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*
3	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*
4	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*
5	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*
6	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*

Матриця бінарного відношення $x_i \geq x_j$

Відношення має такі властивості:

рефлексивність – тому, що у множині Q є всі кортежі з $X \times X$ *, з однаковими першими та іншими елементами; на матриці це виглядає як наявність одиниць у всіх клітинах головної діагоналі;*

несиметричність – тому, що є приклад, коли кортеж (хай це буде кортеж (4,1)) є у складі множини Q, а симетричний кортеж (це буде кор теж (1,4) там відсутній (на матриці клітина, симетрична щодо головної) діагоналі міститиме 0);

антисиметричність – тому, що немає жодного прикладу, симетричних щодо головної діагоналі одиниць на матриці та кортежів у множині Q, у яких елементи є переставлені (це підсилена несиметричність, коли вона є, про несиметричність іноді не згадують, бо несиметричність присутня обов'язково);

транзитивність – тому, що немає жодного опровергающего прикладу цепочки з двох кортежів у множині Q, таких, у яких однакові інший -

елемент першого та перший елемент іншого кортежу, для яких ***був би відсутній*** *у множині Q кортеж, що складається з першого елемента першого кортежу та іншого елемента іншого кортежу. Це тому, що якщо* $a \geq b$ *, а* $b \geq c$ *, то завжди* $a \geq c$ *.*

2) Треба побудувати матрицю бінарного відношення „мати однаковий залишок від ділення на 3” на підмножині цілих чисел X = {1, 2, 3, 4, 5} та визначити властивості відношення. Розв'язок такий. Матрицю показано на рис. 2 – 10.

	1	2	3	4	5
1	1	0	0	1	0
2	0	1	0	0	1
3	0	0	1	0	0
4	1	0	0	1	0
5	0	1	0	0	1

Матриця бінарного відношення
„мати однаковий залишок від ділення на 3”

Властивості відношення – рефлексивність, симетричність, транзитивність.

3) Треба побудувати матрицю бінарного відношення „мати спільний дільник, відмінний від 1” на підмножині цілих чисел X = { 1, 2, 3, 4, 5, 6} та визначити властивості відношення. Розв'язок – матрицю показано на рис. 2 – 11.

	3	2	5	6	4	1
3	1	0	0	1	0	0
2	0	1	0	1	1	0
5	0	0	1	0	0	0
6	1	1	0	1	1	0
4	0	1	0	1	1	0
1	0	0	0	0	0	0

Матриця бінарного відношення
„мати спільний дільник, відмінний від 1”

Властивість відношення – симетричність і тільки. Транзитивність порушена наявністю спростовуючого прикладу: кортеж (2,6) присутній у множині кортежів, бо числа 2 та. 6 дбають спільний дільник 2, кортеж (6,3) створює цепочку з кортежем (2,3) і теж присутній у множині кортежів, бо у чисел є спільний дільник 3. Але кортеж, який будуємо з цепочки (2,3) відсутній у множині кортежів, бо числа 2 та 3 не мають спільного дільника, відмінного від 1.

6 . ВИДИ ВІДНОШЕНЬ

Найчастіше зустрічаються такі види відносин:

- еквівалентність
- частковий (нестрогий) порядок
- суворий порядок

Еквівалентність ($\Leftrightarrow$)

Еквівалентністю називається відношення *R*, що володіє властивостями рефлексивності, симетричності та транзитивності.

Приклади відношення еквівалентності:
відношення рівності на будь-яких множинах,
відношення паралельності на множині прямих ліній на площині,
відношення подібності на множині трикутників,
відношення „мати однаковий залишок при діленні на 3 на множині натуральних чисел” та таке інше.

Як побачити, що це відношення еквівалентності ? Розглянемо відношення на множині паралельних прямих. Шкіра пряма лінія паралельна сама собі – це рефлексивність. Якщо пряма лінія АВ паралельна прямій ВС, то пряма ВС теж паралельна прямій АВ – це симетричність у відношенні. Якщо пряма АВ паралельна прямій нд, а пряма ВС паралельна прямій DE, то пряма АВ паралельна прямій DE – це транзитивність! Вимоги до відношення до еквівалентності виконано.

Приклад. Відношення R - «бути у рівному званні», задане на множині військовослужбовців $M = \{C, B, Б, Д, П, Р\}$, де C - майор, $B, Б, Д$ - лейтенанти, $П, Р$ - сержанти, є еквівалентністю.

$$R = \begin{Bmatrix} (C,C),(B,B),(Б,Б),(Д,Д),(B,Б),(Б,B),(B,Д), \\ (Д,B),(Б,Д),(Д,Б),(П,П),(Р,Р),(П,Р),(Р,П) \end{Bmatrix}$$

Це ставлення рефлексивно, симетрично, і транзитивно, отже – це еквівалентність.

Відношення-еквівалентність розбиває множину M , на якій воно задано, на підмножини, що не перетинаються, які називаються класами еквівалентності.

Еквівалентність «бути в рівному званні» здійснює розбиття множини військовослужбовців $M = \{C, B, Б, Д, П, Р\}$ на три класи еквівалентності: $M_1 = \{C\}$ - підмножина майорів, $M_2 = \{B, Б, Д\}$ - підмножина лейтенантів, $M_3 = \{П, Р\}$ - підмножина сержантів, причому $M_1 \cap M_2 \cap M_3 = \varnothing$.

Частковий порядок ($\leq, \geq$)

Частковим порядком називається відношення R, що має властивості рефлексивності, антисиметричності і транзитивності.

Приклад. Відношення R- «менше чи дорівнює», задане на множині $M = \{1,3,6\}$ є частковим порядком.

Лінійним частковим порядком називається такий частковий порядок, при якому для кожної пари елементів з множини M виконуються умови xRy або yRx.

Приклад. Відношення R- «бути дільником», задане на множині $M = \{1,3,6\}$ є лінійним частковим порядком. Це ж відношення, але задане на безлічі $M = \{1,3,6,5\}$ - частковим порядком є, але не відноситься до лінійного порядку, так як між деякими елементами, наприклад 5 і 6, не виконується умова $5R6$, ні умова $6R5$.

Строгий порядок ($<, >$)

Строгим порядком називається відношення R, що має властивості антирефлексивності, антисиметричності і транзитивності.

Приклад. Відношення R – «менше», задане на множині $M = \{1,3,6\}$ є строгим порядком.

Спільним для відносин порядку (строгого та часткового) є володіння властивостями антисиметричності та транзитивності.

Відношення домінування

Властивості відношення, антирефлексивність, несиметричність. Транзитивності немає.

7. УПОРЯДКОВАНІ МНОЖИНИ

Множина M із заданим у ній частковим порядком R називається частково упорядкованою. Говорять також, що множина M частково впорядковано відношенням R.

Приклад. Відношення R- «бути дільником», задане на множині $M = \{1,3,6,7,8\}$ є частковим порядком (рефлексивно, антисиметрично, транзитивно). Сама множина $M = \{1,3,6,7,8\}$, на якій задано відношення часткового порядку «бути дільником», називається частково упорядкованою.

Множина M із заданим на ньому лінійним порядком R називається лінійно впорядкованою.

Множина M у попередньому прикладі не є лінійно впорядкованою, тому що існують пари елементів, наприклад 5 і 6, не пов'язані відношенням R ($(6,7)\notin R$ і $(7,6)\notin R$).

Приклад 2. Відношення R- «бути дільником», задане на множині $B=\{1,3,6\}$ є лінійним частковим порядком, тому що для будь-яких двох елементів $x, y \in B$ виконується або умова xRy, або умова yRx. Таким чином, множина $B=\{1,3,6\}$ лінійно впорядковано відношенням R.

8. ГОМОМОРФІЗМ

Нехай X і Y - частково впорядковані (відношенням R) множини. Нехай між множинами X і Y встановлена функціональна, всюди визначена відповідність (відображення) $f: X \rightarrow Y$, тобто. задана всюди визначена функція $y=f(x),\ y \in Y,\ x \in X$.

Гомоморфізмом частково впорядкованих множин X і Y називається відображення f, що зберігає порядок, тобто. для будь-яких $x_i, x_j \in X$, таких, що $x_i R x_j$ має виконуватися умова $f(x_i) R f(x_j)$.

Приклад. Між множинами $X=\{1,2,3\}$ і $Y=\{1,2,4,6,8\}$, частково упорядкованими відношенням R- «менше чи дорівнює», задано відображення $y=2x$. Чи є $y=2x$ гомоморфізмом?

Відображення $y=2x$ зберігає порядок. Дійсно, наприклад, $(x_1=1)\leq(x_2=2)$ маємо $(f(x_1)=2)\leq(f(x_2)=4)$. Для всіх можливих пар елементів множини X також виконується умова $f(x_i)\leq f(x_j)$. Таким чином, відображення $y=2x$ є гомоморфізмом множин X і Y частково упорядкованих ставленням «менше або дорівнює».

Залежно від властивостей відображення f розглядають такі гомоморфізми:

- **мономорфізм** , якщо f - ін'єктивне відображення
- **епіморфізм** , якщо f - сюр'єктивне відображення
- **ізоморфізм** , якщо f - бієктивне відображення (тобто f - взаємно-однозначне відображення)

Частково впорядковані множини X і Y називаються **ізоморфними**, якщо між ними встановлено взаємно-однозначне відображення (бієктивне відображення) f .

У наведеному вище прикладі $y=2x$ перестав бути ізоморфізмом ($y=2x$ - мономорфізм). Таким чином, множини $X=\{1,2,3\}$ і $Y=\{1,2,4,6,8\}$ не ізоморфні.