ЛДР. Спеціальна права частина.

① $2y'' + y' - y = 2e^{x} + e^{-x}$

A. $2y'' + y' - y = 0$; $2k^2 + k - 1 = 0$, корені $k_1 = -1$
$k_2 = \frac{1}{2}$

Розв'язок ЛОДР: $\underline{\underline{y_0(x) = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 e^{1/2 x}}}$

B. права ч. спец. виду, хар-ки α, β

$f_1(x) = 2e^{x}$ $\qquad$ $f_2 = e^{-x}$

$\alpha = 1;\ \beta = 0$ $\qquad$ не однакові. $\qquad$ $\alpha = -1;\ \beta = 0$.

$\Rightarrow$ для кожної

$N = 0$ $\qquad$ $f_1(x); f_2(x)$ – окремо. $\qquad$ $N = 0$

число $\alpha + i\beta = 1 \Rightarrow r = 0$ (немає коренів хар. рівн., що $= 1$) $\qquad$ число $\alpha + i\beta = -1 \Rightarrow r = 1$ (є один корінь характ. рівн. $= -1$.)

Запишемо вид, у якому шукаємо $\varphi_1(x)$

$\varphi_1(x) = A \cdot e^{x} \to$ ДР з $f_1(x)$ $\quad$ ($\sin 0 = 0$; $\cos 0 = 1$).

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1(x) = Ae^{x} \\ \varphi_1'(x) = Ae^{x} \\ \varphi_1''(x) = Ae^{x} \end{array}\right| \begin{array}{l} 2 \\ 1 \\ -1 \end{array} \qquad 2Ae^{x} + \cancel{Ae^{x}} - \cancel{Ae^{x}} = 2e^{x} \Rightarrow$$

$\Rightarrow A = 1$.

$\underline{\underline{\varphi_1(x) = e^{x}}}$

$\varphi_2(x) = B \cdot e^{-x} \cdot x \to$ ДР з $f_2(x)$ $\quad$ ($r = 1$).

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_2(x) = Be^{-x} \cdot x \\ \varphi_2'(x) = B(-e^{-x})x + Be^{-x} = Be^{-x}(-x+1) \\ \varphi_2''(x) = B(-e^{-x})(1-x) + Be^{-x}(-1) \end{array}\right| \begin{array}{l} 2 \\ 1 \\ -1 \end{array}$$

$\cancel{2Be^{-x}x} + \cancel{B(-e^{-x})x} + Be^{-x} + \underline{Be^{-x}(1-x)} + Be^{-x} = e^{-x}$

$3Be^{-x} = e^{-x}$; $B = \frac{1}{3}$.

$\underline{\underline{\varphi_2(x) = \frac{1}{3} e^{-x} \cdot x}}$

$y(x) = y_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x} + e^{x} + \frac{1}{3} e^{-x} x$.

② $y'' - 3y' + 2y = 3x\cdot e^{2x} + 5\sin 2x$

A. $y'' - 3y' + 2y = 0$; $k^2 - 3k + 2 = 0$; $k_1 = 1$; $k_2 = 2$

$y_0(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ – розв'язок ЛОДР

B. $f_1(x) = 3x e^{2x}$ $\qquad$ $f_2(x) = 5\sin 2x$

$\alpha = 2$; $\beta = 0$ $\qquad$ $\alpha = 0$; $\beta = 2$

$N = 1$ $\qquad$ $N = 0$

$\lambda = 2 \Rightarrow r = 1$. $\qquad$ $\lambda = 2i \Rightarrow r = 0$.

$$\varphi_1(x) = (Ax + B)e^{2x}\cdot x = (Ax^2 + Bx)e^{2x}$$

$$\varphi_1(x) = (Ax^2 + Bx)e^{2x} \quad \Big| \, 2$$

$$\varphi_1'(x) = (2Ax + B)e^{2x} + (Ax^2 + Bx)e^{2x}\cdot 2 \quad \Big| -3$$

$$\varphi_1''(x) = (2A)e^{2x} + (2Ax + B)\cdot 2e^{2x} + (2Ax + B)e^{2x}\cdot 2 + (Ax^2 + Bx)e^{2x}\cdot 4 \quad \Big| \, 1$$

$$\varphi''(x) - 3\varphi'(x) + 2\varphi(x) = 3x\cdot e^{2x}$$

e^{2x} – загальний множник, скоротимо, бо $e^{2x} \neq 0$.
Приводимо подібні

$$x^2(\cancel{2A} - 6A + \cancel{4A}) + x(\cancel{2B} - 6A - \cancel{6B} + 4A + 4A + \cancel{4B}) + (-3B + 2A + 2B + 2B) = 3x$$

$x \;|\; 2A = 3$; $A = \frac{3}{2}$

$x^0 \;|\; 2A + B = 0$, $B = -2A = -3$

$$\varphi_1(x) = \left(\frac{3}{2}x^2 - 3x\right)\cdot e^{2x}$$

$f_2(x) = 5\sin 2x$, $N = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $\alpha + i\beta = 2i \Rightarrow r = 0$

$\varphi_2(x) = C\cos 2x + D\sin 2x$! якщо $\beta \neq 0$, то обидва доданки!

$$
\begin{array}{l|l}
\varphi_2(x) = C\cos 2x + D\sin 2x & 2 \\
\varphi_2'(x) = -2C\sin 2x + 2D\cos 2x & -3 \\
\varphi_2''(x) = -4C\cos 2x - 4D\sin 2x & 1
\end{array}
\quad \rightarrow \varphi'' - 3\varphi' + 2 = 5\sin 2x
$$

$$
\begin{array}{l|l}
\cos 2x & 2C - 6D - 4C = 0 \\
\sin 2x & 2D + 6C - 4D = 5
\end{array}
\qquad
\begin{cases} -2C - 6D = 0 & \Big| \cdot 3 \\ 6C - 2D = 5 & \Big| + \end{cases}
$$

$$-20D = 5,\ D = -\frac{1}{4}$$

$$\varphi_2(x) = \frac{3}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x \qquad C = -3D = \frac{3}{4}$$

$$y(x) = y_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) = C_1e^{x} + C_2e^{2x} + \left(\frac{3}{2}x^2 - 3x\right)e^{2x} +$$
$$+ \frac{3}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x$$

(3) $y'' + 4y' + 5y = \sin 2x + \cos 2x$

A. $k^2 + 4k + 5 = 0 \quad D = 16 - 20 = -4; \quad k_{1,2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i$

$\alpha = -2;\ \beta = 1.$

$$y_0 = C_1e^{-2x}\cos x + C_2e^{-2x}\sin x$$

B. $f(x) = \sin 2x + \cos 2x, \quad N = 0;\ \alpha = 0;\ \beta = 2$

$\alpha + i\beta = 2i \Rightarrow r = 0$

$$\varphi(x) = A\,e^{0}\cos 2x + B\,e^{0}\sin 2x$$

$$
\begin{array}{l|l}
\varphi(x) = A\cos 2x + B\sin 2x & 5 \\
\varphi'(x) = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x & 4 \\
\varphi''(x) = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
\cos 2x & 5A + 8B - 4A = 1 \\
\sin 2x & 5B - 8A - 4B = 1
\end{array}
\qquad
\begin{cases} A + 8B = 1 \\ -8A + B = 1 \end{cases}
$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ -8 & 1 \end{vmatrix} = 65; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -7 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -8 & 1 \end{vmatrix} = 9$$

$$A = -\frac{7}{65};\ B = \frac{9}{65}; \quad \varphi(x) = \frac{1}{65}(-7\cos 2x + 9\sin 2x)$$

$$y(x) = e^{-2x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + \frac{1}{65}(-7\cos 2x + 9\sin 2x)$$