Пр4 Ряд

ОБЛАСТЬ збіжності функціональних рядів.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$.

За ознакою порівняння. Ряд збігається для всіх дійсних x, тому що $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$, а числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,(p=2>1)$ збігається. <u>Відповідь</u> $x \in (-\infty;\infty)$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 27^n x^{3n} arctg\,\frac{3x}{2n+3}$

За ознакою Даламбера ряд збігається для будь-якого x , що задовольняє нерівність

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|<1;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{27^{n+1}x^{3(n+1)}arctg\,\frac{3x}{2(n+1)+3}}{27^n x^{3n} arctg\,\frac{3x}{2n+3}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{27x^3\,\frac{3x}{2n+5}}{\frac{3x}{2n+3}}\right| = 27|x|^3<1.$$

$$27|x|^3<1$$

При $|x|<\frac{1}{3}$ або $x \in (\frac{-1}{3};\frac{1}{3})$ ряд збігається. Перевіримо збіжність на кінцях інтервалу.

1) При $x=-\frac{1}{3}$ одержимо числовий ряд, знакозмінний:

$$\sum_{n=1}^{\infty}27^n\frac{(-1)^n}{27^n}arctg\,\frac{(-1)}{2n+3}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}arctg\,\frac{1}{2n+3}.$$

АР – НО виконується $\lim\limits_{n\to\infty} arctg\,\frac{1}{2n+3}=0$. ДО: за ознакою порівняння з рядом $\frac{1}{n}$, АР розбігається. ($arctg\,\frac{1}{2n+3} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2n+3} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1/2}{n}$)

ЗР – збігається за теоремою Лейбниця (виконується НО збіжності АР).

При $x=-\frac{1}{3}$ ряд збігається умовно.

2) При $x=\frac{1}{3}$ маємо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} arctg\frac{1}{2n+3}$.

Це АР з попереднього пункту, він розбіжний.

Отже, відповідь: область збіжності ряду: $\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

$u_n=\frac{x^n}{1+x^{2n}}$; $u_{n+1}=\frac{x^{n+1}}{1+x^{2(n+1)}}$.

За ознакою Даламбера $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{1+x^{2n+2}}\cdot\frac{1+x^{2n}}{x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x+x^{2n+1}}{1+x^{2n+2}}\right|$=?

При $|x|<1$: $\lim_{n\to\infty} x^{2n+1}=0$, $\lim_{n\to\infty} x^{2n+2}=0$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=|x|<1\Rightarrow$$ ряд збігається.

При $|x|=1$: $|u_n|=1$, ряд розбігається.

При $|x|>1$, $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{x^{2n+2}}\right|=\frac{1}{|x|}<1$, тобто $|x|>1\Rightarrow$ ряд збігається.

Отже, ряд збігається всюди, окрім $x=\pm 1$.