Визначений і невласний інтеграли

Визначений інтеграл

Задача, що приводить до поняття визначеного інтегралу – *задача про обчислення площі криволінійної трапеції*.

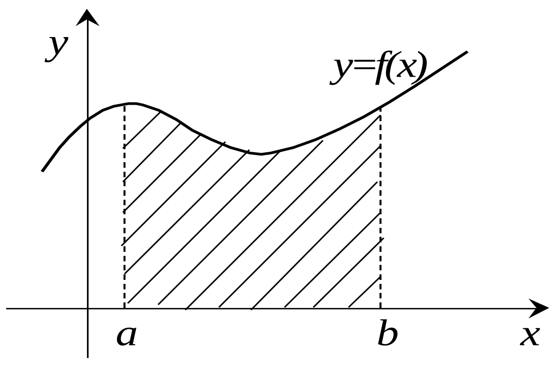
Нехай на відрізку $[a;b]$ задана неперервна функція $y = f(x)$, для визначеності $f(x) > 0$.

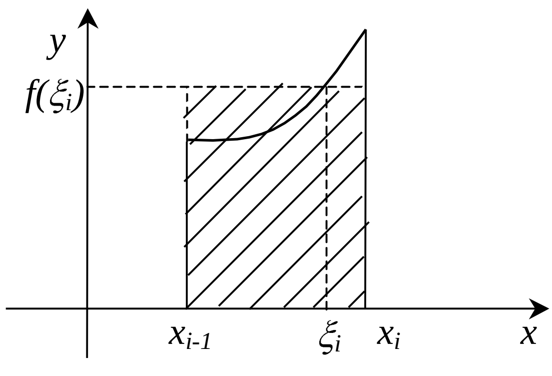
Знайдемо площу, що обмежена

- віссю *OX*,
- прямими $x = a; x = b$ і
- лінією $y = f(x)$.

Можна також говорити про площу *під* кривою $y = f(x)$ або про площу криволінійної трапеції.

Для цього розіб'ємо трапецію *довільним чином* на *частинні* трапеції лініями, паралельними *OY*: $x = x_i; i = \overline{1,n}$, а потім замінимо кожну таку трапецію прямокутником зі стороною $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ і висотою $f(\xi_i)$, де $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ – *довільно обрана* на частинному відрізку точка.





Складемо суму площ всіх прямокутників, вона буде приблизно дорівнювати площі усієї криволінійної трапеції:

$$S_n \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \,.$$

Така сума називається **інтегральною**.

Очевидно, S_n буде тим точніше визначати площу криволінійної трапеції, чим на більшу кількість частинних трапецій буде розбита вихідна криволінійна трапеція. А при $n\to\infty$ або, що теж ж саме, $\lambda=\max\{\Delta x_i\}\to 0$, ми одержимо точний результат.

Якщо існує скінчена границя інтегральної суми S_n при $\lambda=\max\{\Delta x_i\}\to 0$, що не залежить від способу розбиття відрізку $[a;b]$ на частинні відрізки і вибору точок ξ_i, то вона називається ***визначеним інтегралом*** функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ і записується як

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Тут a – нижня , b – верхня границя інтегрування.

❢ – Незважаючи на подібність у позначеннях і термінології, визначений та невизначений інтеграли істотно різні поняття:

якщо $\int f(x)dx=F(x)+C$ – представляє сімейство функцій,

то $\int_a^b f(x)dx=S$ – **визначене число**. **!**

! – Зауважимо, що не має значення, якою буквою позначена змінна інтегрування визначеного інтегралу, тому що зміна позначень не впливає на інтегральну суму.

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(y)dy=\int_a^b f(t)dt=S$$

Властивості визначеного інтегралу.

$\boxed{1}$ $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$ – якщо поміняти місцями верхню і нижню границю інтегрування, визначений інтеграл змінює знак.

$\boxed{2}$ $\int_a^a f(x)dx=0$ – інтеграл з однаковими границями інтегрування дорівнює нулю по визначенню.

$\boxed{3}$ $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx;$

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx, \quad k - const.$$

Аналогічні властивості є і у невизначеного інтегралу. Вони показують, що інтегрування – лінійна операція і може бути поширена на будь-яку скінченну кількість доданків: $\int_a^b (\sum_{i=1}^{n} k_i f_i(x))dx = \sum_{i=1}^{n} k_i \int_a^b f_i(x)dx.$

$\boxed{4}$ Властивість *адитивності*. Якщо $f(x)$ - функція, що інтегрується на $[a,c]$ і $[c,b]$, де $c \in (a,b)$, то вона інтегрується на $[a,b]$ і

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Іншими словами, відрізок інтегрування можна розділити на части деякою точкою та інтеграл по всьому відрізку замінити сумою інтегралів по двом одержаним відрізкам.

$\boxed{5}$ Властивість *алгебраїчної площі*. Визначений інтеграл є число того ж знаку, що і підінтегральна функція. Тобто при обчисленні площ за допомогою визначеного інтегралу можна одержати від'ємну площу.

<u>Теорема</u> про середнє значення функції на відрізку.

Якщо $f(x)$ неперервна на відрізку ($\forall x \in [a,b]$), то на цьому відрізку існує хоча б одна точка ($\exists \xi \in (a,b)$), така, що функція приймає у ній своє

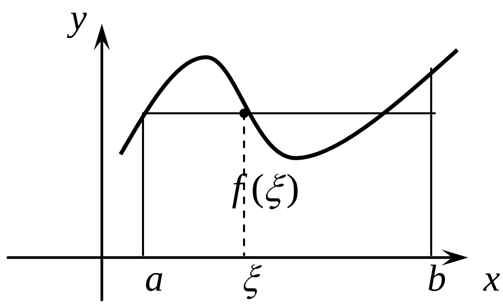
середнє значення, що обчислюється за формулою:

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}.$$

Геометричний зміст теореми.

Нехай $f(x) \geq 0 \;\; \forall x \in [a,b]$, тоді існує принаймні одна точка $\xi \in (a,b)$, така, що площа криволінійної трапеції, обмеженої зверху неперервною кривою $y = f(x)$, буде дорівнювати площі прямокутника з тією ж основою і <u>висотою, що дорівнює</u> $f(\xi)$:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$



Обчислення визначених інтегралів.
Формула Ньютона–Лейбниця

Якщо для підінтегральної функції можна знайти первісну, то визначений інтеграл можна обчислити по формулі Ньютона-Лейбниця.

Формула Ньютона-Лейбниця дозволяє обчислити визначений інтеграл як різницю первісних на верхній і нижній границях інтегрування, не обчислюючи границі інтегральної суми.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

Можна виділити два етапи обчислення визначеного інтегралу.

- ✓ Одним з методів інтегрування знайти первісну.
- ✓ Обчислити різницю значень первісної функції на верхній і нижній границях інтегрування.

! - Спочатку у первісну підставляють верхню границю.

Особливості обчислення визначеного інтегралу методами:

Підстановка

Підстановка (або заміна змінної інтегрування), на відміну від невизначеного інтегралу, передбачає не тільки заміну усього підінтегрального виразу, а і *заміну границь інтегрування*.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt;$$

де нові границі інтегрування визначають, як корені рівнянь:

$$\varphi(t) = a \Rightarrow t_1 = \alpha;$$

$$\varphi(t) = b \Rightarrow t_2 = \beta.$$

Інтегрування по частинах

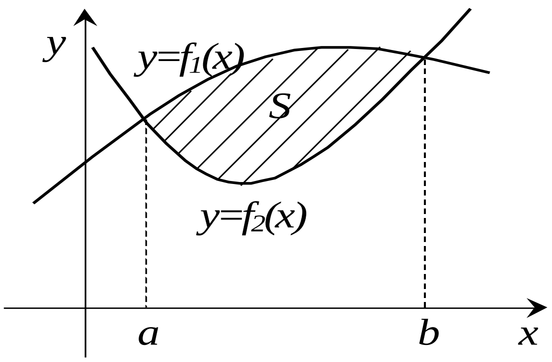
Не слід забувати, що визначений інтеграл – це *число*, при інтегруванні по частинах границі інтегрування підставляють у *всі* знайдені функції.

$$\int_a^b U \cdot dV = U \cdot V \Big|_a^b - \int_a^b V \cdot dU$$

Обчислення площ криволінійних фігур

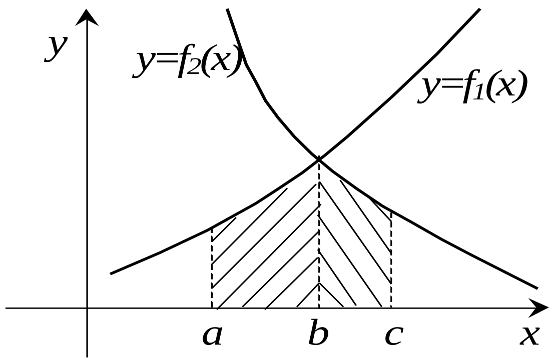
Із задачі, що розглянута на початку теми 5 і приводить до поняття визначеного інтегралу, ясно, що за його допомогою можна обчислювати площі плоских криволінійних фігур. При цьому слід розрізняти два випадки.

Площа укладена між заданими лініями.



Тоді, визначивши точки перетину ліній, тобто границі інтегрування,

Площа лежить під (над) заданими лініями (між лініями і віссю *OX*).



По рисунку видно, що у даному разі загальна площа складається з площ можна знайти площу, як різницю площ під лінією, що знаходиться вище і лінією, що знаходиться нижче.

$$S = \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx;$$

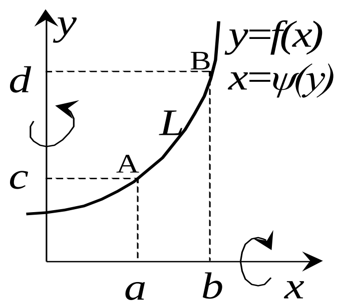
За властивістю лінійності

$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx$$

під лініями $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$.

$$S = \int_a^b f_1(x)dx + \int_b^c f_2(x)dx$$

Серед геометричних додатків визначеного інтегралу можна ще відзначити :



Обчислення довжини дуги кривої від точки A до точки B :

$$L_{AB} = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,dx.$$

Обчислення об'ємів тіл обертання: $V_{ox} = \pi \int_a^b f^2(x)dx$, якщо обертання части дуги функції $y = f(x)$ відбувається відносно осі OX,

$$V_{oy} = \pi \int_c^d \psi^2(y)dy,$$

якщо обертання відбувається відносно осі оси OY, де $x = \psi(y)$, або

$$V_{oy} = 2\pi \int_a^b xydx$$

Об'єм тіла, одержаного при обертанні фігури, обмеженої лініями $y = y_2(x)$ і $y = y_1(x)$ $(y_1 \le y_2)$, дорівнює

$$V_{ox} = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2)dx, \quad V_{oy} = 2\pi \int_a^b x(y_2 - y_1)dx.$$