Лінійні диференціальні рівняння (ЛДР) з постійними коефіцієнтами

Лінійне диференціальне рівняння будь-якого порядку можна одержати з найпростіших міркувань:

ЛДР-1 $y' + p(x) \cdot y = f(x)$

ЛДР-2 $y'' + p_1(x) \cdot y' + p_2(x) \cdot y = f(x)$

ЛДР-3 $y''' + p_1(x) \cdot y'' + p_2(x) \cdot y' + p_3(x) \cdot y = f(x)$ і т.д.

Якщо функції – коефіцієнти при похідних – постійні (сталі), то одержимо частинний випадок такого виду рівнянь – із сталими коефіцієнтами (a,b,c – $const$):

ЛДР-1 $y' + a \cdot y = f(x)$

ЛДР-2 $y'' + a \cdot y' + b \cdot y = f(x)$

ЛДР-3 $y''' + a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = f(x)$ і т.д.

Принцип розв'язку буде показаний на прикладі ЛДР другого порядку, але аналогічно так розв'язуються ЛДР будь-якого порядку із сталими коефіцієнтами.

Якщо $f(x) \equiv 0$, то рівняння називається лінійним *однорідним* рівнянням.

Якщо $f(x) \neq 0$, то маємо лінійне *неоднорідне* рівняння.

У розширеному курсі ВМ розглядають доведення кількох теорем, що визначають вид, *структуру* розв'язку ЛДР.

Далі наведені основні положення без доведення, і маються на увазі рівняння другого порядку – ЛДР-2.

✎ ***Теорема.*** Загальне рішення ЛДР – функція $y=y(x)$ – може бути представлена як сума таких функцій:

$y_0(x)$ – загального розв'язку ЛДР без правої частини ($f(x) = 0$, однорідного) і

$\varphi(x)$ - частинного розв'язку ЛДР з правою частиною ($f(x) \neq 0$, неоднорідного).

Тобто, $y(x) = y_0(x) + \varphi(x)$, де $y_0'' + a \cdot y_0' + b \cdot y_0 = 0$ і

$\varphi'' + a \cdot \varphi' + b \cdot \varphi = f(x)$.

Розв'язання лінійних однорідних диференціальних рівнянь (ЛОДР)

<u>*NB*</u>**.** Диференціальні рівняння виду (ЛОДР будь-якого порядку)

$$y^{(n)}+a_1\cdot y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}\cdot y'+a_n\cdot y=0,\ (\textbf{\textit{ОДНОРІДНЕ !}})$$

де $a_i\ (i=\overline{1,n})$ – $const$, мають <u>фундаментальну систему розв'язків</u>.

<u>Фундаментальною системою розв'язків ЛОДР-*n*</u> називають будь-які n лінійно незалежних розв'язків наданого ЛОДР.

Нехай $y_1(x),y_2(x),\ldots y_n(x)$ – розв'язки ЛОДР n-го порядку. Визначник

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

називається визначником *Вронського*.

Якщо $W(x)$ розв'язків $y_1(x),y_2(x),\ldots y_n(x)$ тотожно дорівнює нулю, то ці розв'язки лінійно залежні.

Якщо $W(x)$ не нуль ні в якій точці деякого відрізку, то це означає, що розв'язки лінійно незалежні.

✏ <u>***Теорема***</u>**.** Якщо $y_1(x),y_2(x),\ldots y_n(x)$ – фундаментальна система розв'язків ЛОДР, то його загальний розв'язок можна представити у вигляді лінійної комбінації лінійно незалежних розв'язків даного ЛОДР:

$$\boxed{y_0(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\ldots+C_ny_n(x)},$$

де $C_1, C_2, \ldots C_n$ – довільні сталі.

✏Та ж <u>***Теорема***</u>**.** для ЛОДР-2:

Загальний розв'язок ЛДР-2 без правої частини (ЛОДР) – функція $y_0=y_0(x)$ – може бути представлена у вигляді лінійної комбінації лінійно незалежних розв'язків даного ЛОДР: $\boxed{y_0(x)=C_1\cdot y_1(x)+C_2\cdot y_2(x)}$.

Отже, загальний розв'язок ЛДР-2 із сталими коефіцієнтами:

$$\boxed{y(x)=y_0(x)+\varphi(x)=C_1\cdot y_1(x)+C_2\cdot y_2(x)+\varphi(x)}.$$

Розділимо розв'язання ЛДР на два етапи:	**A** – розв'язання ЛДР без правої частини (ЛОДР), результат – функція $y_0(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$ **B** – розв'язання ЛДР з правою частиною, результат – функція $\varphi(x)$.

A Розв'яжемо рівняння $y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0$ (А)

Розв'язок будемо шукати у виді $y = e^{kx}$, де k - дійсне або комплексне число. Пам'ятаємо, що всі похідні цієї функції відрізняються тільки сталим множником, тобто похідна n-ого порядку: $y^{(n)} = k^n e^{kx}$.

Підставив e^{kx} у рівняння, одержимо

$$e^{kx}(k^2 + ak + b) = 0.$$

Відомо, що $e^{kx} \neq 0$, а коефіцієнти $a, b - const$, тоді знаходження фундаментальної системи розв'язків рівняння (А) зводиться до розв'язку алгебраїчного рівняння:

$$k^2 + ak + b = 0.$$

Це рівняння називається *характеристичним* рівнянням ЛДР-2.

Характеристичне рівняння, як алгебраїчне рівняння *2*-го степеню, завжди має *2* кореня (дійсних або комплексних).

При розв'язку характеристичного рівняння *2*-го степеню можливі такі випадки:

$k_1 \neq k_2$	Корені характеристичного рівняння $k_1 \neq k_2$ - *дійсні і різні*, тоді ЛОДР (А) має *2* лінійно незалежних частинних розв'язки $$y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}.$$ Загальний розв'язок ЛОДР (А) : $$\boxed{y_0(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}}.$$
$k_1 = k_2$	Корені характеристичного рівняння *дійсні, кратні*, тобто $k = k_1 = k_2$ - дійсний корінь кратності 2. Тоді дійсному кореню k кратності 2 відповідає *2* лінійно незалежних розв'язки ЛОДР (А): $$y_1 = e^{kx}, y_2 = x \cdot e^{kx}.$$ Загальний розв'язок ЛОДР (А) : $$\boxed{y_0(x) = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}}.$$
$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	Корені характеристичного рівняння – *комплексно – сполучені*. Нехай $k_1 = \alpha + i\beta, k_2 = \alpha - i\beta$. Тоді комплексно-сполученим кореням відповідають два частинних лінійно незалежних розв'язки ЛОДР (А): $$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$$ Загальний розв'язок ЛОДР (А) : $$\boxed{y_0(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x}.$$

Зауваження. Якщо розв'язують ЛОДР більш високих порядків, то різниця буде у кількості коренів характеристичного рівняння і функцій у фундаментальній системі.

ПРИКЛАД

Записати загальний розв'язок ЛОДР, якщо відомі корні характеристичного рівняння:

$k_1 = k_2 = 1 + i$, $k_3 = k_4 = 1 - i$, $k_5 = k_6 = k_7 = 2$, $k_8 = 0$.

Корені характеристичного рівняння 1-4 комплексно-сполучені другої кратності $(\alpha = 1, \beta = 1)$. Відповідні лінійно незалежні розв'язки:

$$y_1 = e^x \cos x, y_2 = e^x \sin x, y_3 = xe^x \cos x, y_4 = xe^x \sin x.$$

Корні характеристичного рівняння 5-7 дійсні 3-й кратності. Лінійно незалежні розв'язки:

$$y_5 = e^{2x}, y_6 = xe^{2x}, y_7 = x^2 e^{2x}.$$

Корінь характеристичного рівняння 8 дійсній, не кратний.

$$y_8 = e^{0x} = 1$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y_0(x) = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x + x(C_3 e^x \cos x + C_4 e^x \sin x) +$$

$$+ C_5 e^{2x} + C_6 x e^{2x} + C_7 x^2 e^{2x} + C_8.$$

В Розв'яжемо рівняння $y'' + a \cdot y' + b \cdot y = f(x)$ (В)

Тепер нас цікавить частинний розв'язок даного ЛДР-2 з правою частиною – функція $\varphi(x)$.

Метод її пошуку залежить від виду функції $f(x)$ - правої частини ЛДР.

В1. Якщо $f(x)$ має спеціальний вид, то частинний розв'язок $\varphi(x)$ знаходять **методом невизначених коефіцієнтів**.

Права частина спеціального виду:

$$\boxed{f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x + Q_m(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x}$$

Тут $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – поліноми відповідно n і $m - го$ порядків, α і β - числа.

На прикладах буде показано, що під визначення правої части спеціального виду підходить велика кількість функцій.

Схема розв'язку:

- ✓ Знайти корені характеристичного рівняння і записати розв'язок ЛОДР (без правої частини) $y_0(x)$ (випадок (А)).
- ✓ Визначити і записати характеристики правої часті спеціального виду. До них відносяться три числа: $N=max\{n, m\}$; α; β.
- ✓ Скласти число $\lambda=\alpha+i\beta$ і порівняти його з коренями характеристичного рівняння.

  Якщо немає коренів $k=\lambda$, то задати число $r=0$,

  Якщо є один корінь $k=\lambda$, то задати $r=1$,

  Якщо коренів $k=\lambda$ два, то $r=2$ і т.д.

  Іншими словами, число r - це кратність кореню виду $\alpha+i\beta$.
- ✓ Розв'язок $\varphi(x)$ будемо шукати у виді, подібному виду правої части.

$$\boxed{\varphi(x) = (S_N(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x + T_N(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x) \cdot x^r}$$

Тут $S_N(x)$ і $T_N(x)$ – повнії поліноми з невизначеними коефіцієнтами. Якщо вид для $\varphi(x)$ складений, то у ньому залишається знайти тільки невідомі/невизначені коефіцієнти поліномів, всі інші параметри вже визначені. ❢

ПРИКЛАДИ правих частин спеціального виду і відповідних частинних розв'язків.

$$\varphi(x) = (S_N(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x + T_N(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x) \cdot x^r$$

① $f(x) = 12$; характеристики правої часті: $N=0$; $\alpha=0$; $\beta=0$.

Число $\lambda=\alpha+i\beta$ $=0$.

Дійсно, поліном нульового порядку це число, $e^{0x} = 1$; $cos0x=1$.

Другого доданку немає, тому що $\sin 0x = 0$.

За знайденими характеристиками складаємо:

$\varphi(x) = (\mathrm{A} \cdot e^{0x} \cdot \cos 0x + \mathrm{B} \cdot e^{\alpha x} \cdot 0) \cdot x^r$, тобто $\varphi(x) = A \cdot x^r$,

степінь r залежить від існування і кратності коренів характеристичного рівняння.

$$\varphi(x) = (S_N(x)\cdot e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x + T_N(x)\cdot e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x)\cdot x^r$$

② $f(x) = 12x$; характеристики правої часті: $N=1$; $\alpha=0$; $\beta=0$.

Число $\lambda=\alpha+i\beta$ =0.

Маємо неповний поліном першого порядку, решта – як у прикладі ①.

По знайденим характеристикам складаємо:

$$\varphi(x) = (S_N(x)\cdot e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x + T_N(x)\cdot e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x)\cdot x^r$$

$\varphi(x) = \big((Ax+B)\cdot e^{0x}\cdot\cos 0x + (Cx+D)\cdot e^{\alpha x}\cdot 0\big)\cdot x^r$,

тобто $\varphi(x) = (Ax+B)\cdot x^r$.

❢Незважаючи на те, що права частина ЛДР – неповний поліном, у розв'язку обов'язково брати повні поліноми відповідного порядку.

$$\varphi(x) = (S_N(x)\cdot e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x + T_N(x)\cdot e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x)\cdot x^r$$

③ $f(x) = 3e^{-x}$; характеристики правой части $N=0$; $\alpha=-1$; $\beta=0$.

Число $\lambda=\alpha+i\beta$ =-1.

$\varphi(x) = (A\cdot e^{-x}\cdot\cos 0x + B\cdot e^{-x}\cdot 0)\cdot x^r$, або $\varphi(x) = (\mathrm{A}\cdot e^{-x})\cdot x^r$.

④ $f(x) = x^2\cos 2x$, характеристики правої части $N=2$; $\alpha=0$; $\beta=2$.

Число $\lambda=\alpha+i\beta$ =2i.

$$\varphi(x) = (S_N(x)\cdot e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x + T_N(x)\cdot e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x)\cdot x^r$$

$\varphi(x) = \big((Ax^2+Bx+C)\cdot e^{0x}\cdot\cos 2x + (Dx^2+Ex+F)\cdot e^{0x}\cdot\sin 2x\big)\cdot x^r$, або

$\varphi(x) = \big((Ax^2+Bx+C)\cdot\cos 2x + (Dx^2+Ex+F)\cdot\sin 2x\big)\cdot x^r$.

❢ - Зверніть увагу – Якщо характеристика $\beta\neq 0$, то у розв'язку зберігаються обидва доданки.

Невизначені коефіцієнти знаходять, підставивши розв'язок $\varphi(x)$ і його похідні у задане ЛДР виду (В).

☛ ***Теорема***. Якщо права частина ЛДР складається з суми правих частин спеціального виду (з різними характеристиками), то його розв'язок можна знайти як суму розв'язків, де кожний відповідає одному з доданків.

Тобто якщо $f(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i(x)$, то у силу лінійності рівняння,

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x)$$

ПРИКЛАДИ

① Нехай $f(x)=\sin 3x - x\cos x$, ця права частина спеціального виду складається з двох доданків.

Розглянемо характеристики кожного доданку окремо.

$$\varphi(x)=(S_N(x)\cdot e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x+T_N(x)\cdot e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x)\cdot x^r$$

$f_1(x)=\sin 3x$ $\quad$ $N=0;\ \alpha=0;\ \beta=3.$ $\quad$ $\varphi_1(x)=(A\cos 3x+B\sin 3x)x^{r_1}$

$f_2(x)=-x\cos x$ $\quad$ $N=1;\ \alpha=0;\ \beta=1.$ $\quad$ $\varphi_2(x)=\big((Cx+D)\cos x+(Ex+F)\sin x\big)x^{r_2}$

Якщо характеристики α і β не однакові, треба розв'язувати ЛДР окремо для кожного доданку: $f_1(x)=\sin 3x$ і $f_2(x)=-x\cos x$, потім одержані розв'язки додати.

② $f(x)=x\cdot e^x-2\cdot e^x$.

Розглянемо характеристики кожного доданку окремо.

$$\varphi(x)=(S_N(x)\cdot e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x+T_N(x)\cdot e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x)\cdot x^r$$

$f_1(x)=xe^x$ $\quad$ $N=1;\ \alpha=1;\ \beta=0.$

$f_2(x)=-2e^x$ $\quad$ $N=0;\ \alpha=1;\ \beta=0.$

$\varphi(x)=(Ax+B)e^x x^r$

α і β однакові, а $N=max\{n,\ m\}=1$, тому треба розв'язувати ЛДР для об'єднаної правої частини спеціального виду $f(x)=(x-2)e^x$.

В2. Якщо $f(x)$ має неспеціальний вид, то частинний розв'язок $\varphi(x)$ може бути знайдений **методом варіації довільних сталих**.

На відміну від випадку **В1** це універсальний метод, який можна застосувати для правої частини будь-якого виду.

Схема розв'язку:

- ✓ Знайти корені характеристичного рівняння і записати розв'язок ЛОДР (без правої частини) $y_0(x)$ (випадок (А)).
- ✓ Загальний розв'язок даного ЛДР-2 $\varphi(x)$ будемо шукати у виді, подібному виду $y_0(x)$, але вважаємо, що $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$ – функції (тимчасово).

  Отже,

$$y(x) = C_1(x) \cdot y_1 + C_2(x) \cdot y_2,$$

  де y_1, y_2 – фундаментальна система розв'язків ЛДР виду (А).

- ✓ Функції $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$ визначаються через їх похідні.

  Для похідних C_1'; C_2' можна одержати таку систему:

$$\begin{cases} C_1'y_1 + & C_2'y_2 = & 0 \\ C_1'y'_1 + & C_2'y'_2 = & f(x) \end{cases}$$

  Система має єдиний розв'язок, тому що її визначник - визначник Вронського ($W \neq 0$).

- ✓ Після розв'язку системи одержимо ДР-1, з відокремлюваними змінними:

$$C_1' = \frac{dC_1}{dx} = F_1(x) \quad \text{і} \quad C_2' = \frac{dC_2}{dx} = F_2(x),$$

  з яких визначимо функції $C_1(x)$, $C_2(x)$.

- ✓ Підставимо у розв'язок $y(x) = C_1(x) \cdot y_1 + C_2(x) \cdot y_2$ знайдені функції $C_1(x)$; $C_2(x)$. У такому розв'язку можна буде виділити $y_0(x)$ і $\varphi(x)$.

❢ - Зверніть увагу – метод **В1** – **невизначених коефіцієнтів** – набагато простіший, ніж **В2** – **варіації довільних сталих**, тому, що **В1** не пов'язаний з інтегруванням.

Тому не треба для правої частини спеціального виду використовувати **В2**, незважаючи на його універсальність.

Зауваження. Розв'язок ЛДР більш високих порядків приводить до системи більшого розміру для визначення C_1'; $C_2' \dots C_n'$:

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 + \cdots + C_n'y_n = 0 \\ C_1'y'_1 + C_2'y'_2 + \cdots + C_n'y'_n = 0 \\ C_1'y''_1 + C_2'y''_2 + \cdots + C_n'y''_n = 0 \\ \dots \\ C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n'y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

ПРИКЛАД. Знайти загальний розв'язок ЛДР: $y'' + \frac{y'}{x} = \frac{1}{x^2} (x \neq 0)$

1. Знайдемо загальний розв'язок ЛОДР: $y'' + \frac{y'}{x} = 0$;

   ДР-2, немає у, тому заміна $y' = z(x)$; тоді $z' + \frac{z}{x} = 0$ ДР-1, тип 1.

   Відокремлюємо змінні $\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x}$; і інтегруємо $\ln|z| = -\ln|x| + \ln c$

$$y'(x) = \frac{C_1}{x}$$

Звідси знову відокремлювання змінних і інтегрування

$y(x) = C_1 \ln|x| + C_2$ - одержуємо загальний розв'язок ЛОДР.

2. Загальний розв'язок ЛДУ шукаємо у виді (метод **варіації довільних сталих)**

$$y(x) = C_1(x) \ln|x| + C_2(x),$$

   де $C_1(x)$ і $C_2(x)$- невідомі функції, які треба визначити.

3. Для визначення цих функцій складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1' \cdot \ln x + C_2' \cdot 1 = 0 \\ C_1' \frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x^2} \end{cases}$$

З неї знаходимо: $C_1'(x) = \frac{1}{x}$, $C_2'(x) = -\frac{1}{x} \ln x$.

Проінтегруємо ДР-1 для функцій $C_1(x)$, $C_2(x)$:

$$C_1(x)=\ln|x|+\tilde{C}_1; \quad C_2(x)=-\int\frac{\ln x}{x}dx=-\frac{\ln^2|x|}{2}+\tilde{C}_2$$

4. Підставимо $C_1(x)$ і $C_2(x)$ у загальний розв'язок:

$$y(x)=C_1(x)\ln|x|+C_2(x)$$

Та одержимо загальний розв'язок ЛДР:

$$y(x)=(\ln|x|+\tilde{C}_1)\cdot\ln|x|+\left(-\frac{\ln^2|x|}{2}+\tilde{C}_2\right)$$

Або, після перетворень,

$$y(x)=\tilde{C}_1\cdot\ln|x|+\tilde{C}_2+\frac{1}{2}\ln^2|x|,$$

де $y(x)=\tilde{C}_1\ln|x|+\tilde{C}_2$ - загальний розв'язок ЛОДУ,

$\varphi(x)=\frac{1}{2}\ln^2|x|$ - частинний розв'язок ЛДР.