Навчальна дисципліна:
Дискретна математика

Лектор:
професор Кучук Георгій Анатолійович
E-mail: kuchuk56@ukr.net

2 семестр навчання на бакалавраті
Наприкінці семестру - іспит

Рекомендована література

1. *Конспект лекцій.URL: https://drive.google.com/drive/folders/1ZyA3u4y8ZqiAVgu_YeL2XdTk9vp4y9VS?usp=sharing*

2. Балога С.І. Дискретна математика*. Навчальний посібник. – Ужгород: ПП «АУТДОР-. ШАРК», 2012. – 124 с. URL : https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/bitstream/lib/3415/1/%D0%BD%D0%B0%D0%B2%D1%87%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE-%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D0%B8%D1%87%D0%BD%D0%B8%D0%B9%20%D0%BF%D0%BE%D1%81%D1%96%D0%B1%D0%BD%D0%B8%D0%BA.pdf*

3. Новотарський М. А. Дискретна математика: навч. посіб. для студ. спеціальності 123 «Комп'ютерна інженерія». Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. 278 с. URL : https://ela.kpi.ua/handle/123456789/37806

4. Тмєнова Н. П.. Дискретна математика. Теорія множин і відношень. Київ : ВПЦ «Київський університет», 2018. 103 с. URL : http://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2020/Tmenova_2018_103.pdf

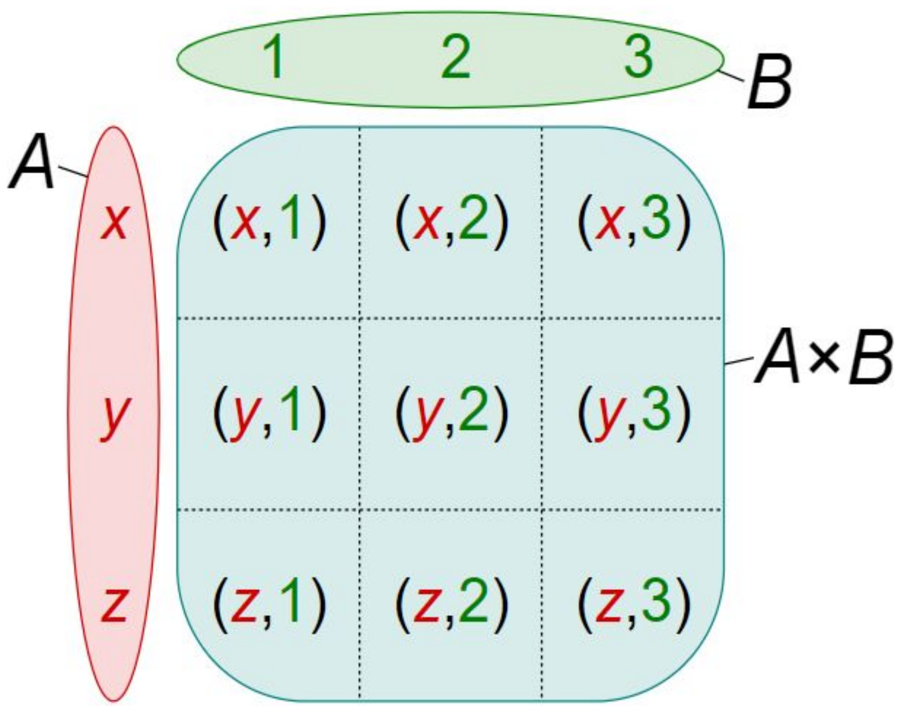
Тема 1. Відповідності між множинами
(рос. соответствия, англ. correspondence)

Питання лекції

1. Декартів добуток двох множин.
2. Визначення відповідності.
3. Способи задання відповідностей.
4. Операції з відповідностями.
5. Властивості відповідностей.
6. Види функціональних відповідностей.
7. Кардинальні числа.

1. Декартів добуток двох множин

Def. ***<u>Декартів добуток</u>*** множин A і B (позначається як A×B) є множиною всіх можливих упорядкованих пар елементів (a, b), з яких перший елемент (a) належить множині A, а другий елемент (b) належить множині B.

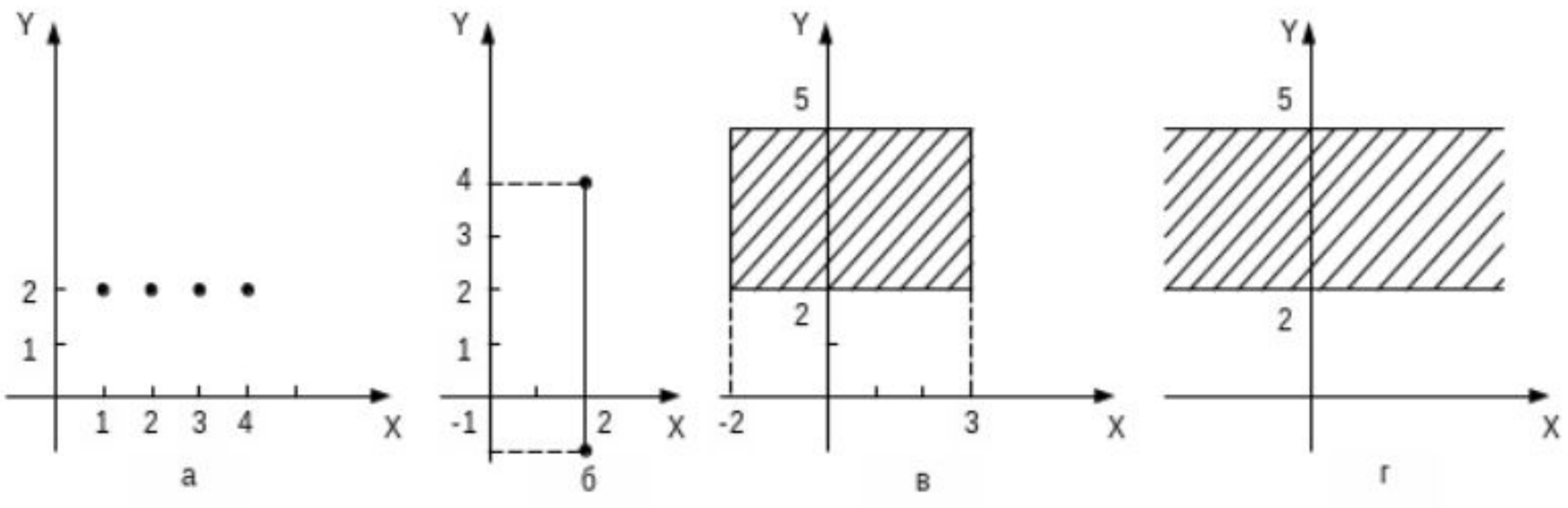


Приклад 1. Нехай A = (a_1, a_2, a_3, a_4) и B = (b_1, b_2).
Тоді A × B = {(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_1), (a_3, b_2), (a_4, b_1), (a_4, b_2)}.

Приклад 2. Нехай задані 2 множини: *A* = {1, 2, 3, 4}, *B* = {2}.
C = A × B = { (1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2) }.
D = B × A = { (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4) }. C ≠ D.

Приклад 3. Нехай задані 2 множини: *X* = [-2, 3], *Y* = [2, 5].
A × B = { (x, y) ∈ P}, P – прямокутник.

Ілюстративне зображення у декартовій системі координат:



2. Визначення відповідності

Def. **<u>Відповідністю</u>** (рос. **соответствие**, англ. **correspondence**) називається якийсь зв'язок між елементами однієї множини або елементами різних множин.

Відповідність – це будь-яка підмножина декартова добутку.
Декартів добуток – це універсум відповідностей.

Приклад 4. Нехай *A* = {1, 2, 3, 4, 5} і *B* = {a, b, c, d}. Тоді

G = {(1,a), (1,d), (2,c), (2,d), (3,b), (5,a), (5,b)} –

одна із 2↑(5+4)=512 можливих відповідностей на цих множинах.

Приклад 5. Між елементами множин $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ та $Y = \{y_1, y_2\}$ задана відповідність:

$$G = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1)\}$$

Def. **<u>Областю визначення</u>** $D_1(G)$ відповідності $G \subset X \times Y$ є множина його перших координат, $D_1(G) \subseteq X$.
Область визначення відповідності називають **<u>множиною прообразів</u>**.

Def. **<u>Областю значень</u>** $D_2(G)$ відповідності $G \subset X \times Y$ є множина його других координат, $D_2(G) \subseteq Y$
Область визначення відповідності називають **<u>множиною образів</u>**.

Прикладі 4, відповідність G = {(1,a), (1,d), (2,c), (2,d), (3,b), (5,a), (5,b)}.

$D_1(G) = \{1, 2, 3, 5\} \subset A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$D_2(G) = \{a, b, c, d\} \subset B = \{a, b, c, d\}$

Прикладі 5, відповідність $G = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1)\}$.

$D_1(G) = \{x_1, x_2\} \subset X = \{x_1, x_2 , x_3\}$

$D_2(G) = \{y_1, y_2\} \subset Y = \{y_1, y_2\}$

3. Способи задання відповідностей

1. ***Перерахування*** всіх елементів (пар) відповідності:

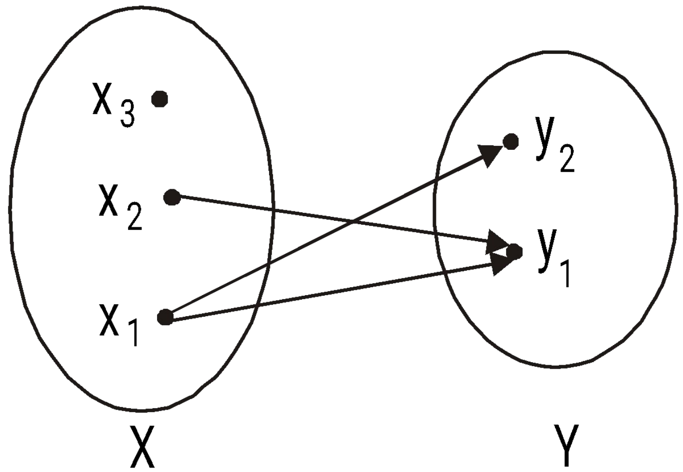
Приклад 5. На множинах $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$ задамо відповідність:

$$G = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1)\}$$

2. ***Табличний чи матричний спосіб***:

X \ Y	y_1	y_2
x_1	1	1
x_2	1	0
x_3	0	0

3. ***Графічний спосіб***:



4. ***Кортеж із трьох множин***

$$q = (X, Y, G)$$

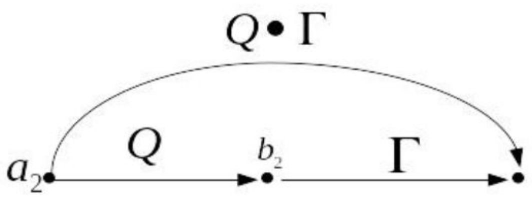
4. Операції з відповідностями

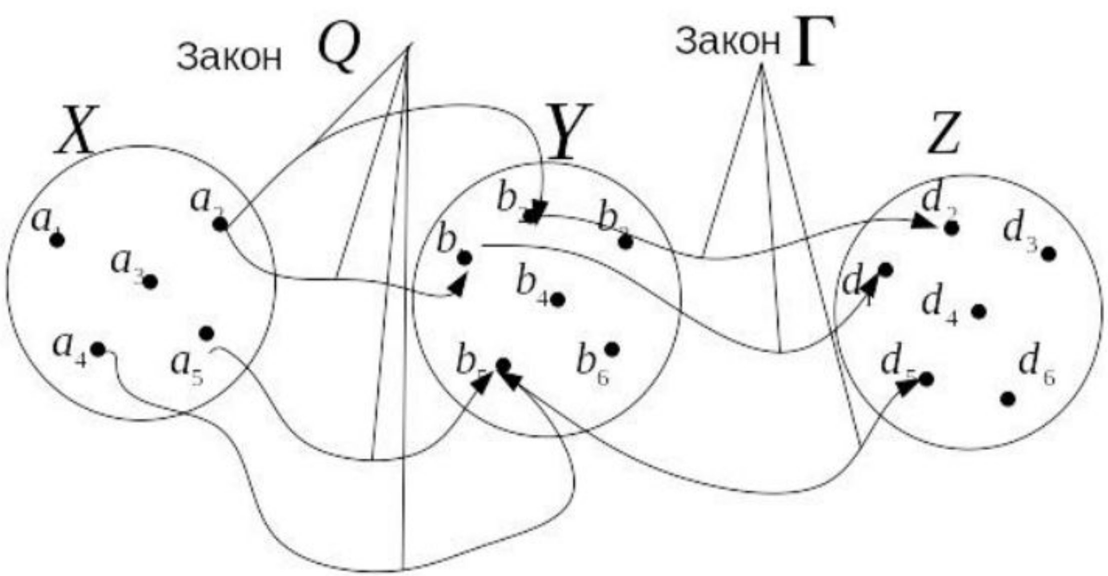
1. Інверсія відповідності – перестановка її координат.

Приклад 6. $G = \{(x_1, y_2), (x_3, y_1), (x_3, y_2), (x_4, y_2)\}$ $\qquad G \subseteq X \times Y$

$$G^{-1} = \{(y_2, x_1), (y_1, x_3), (y_2, x_3), (y_2, x_4)\} \qquad G^{-1} \subseteq Y \times X$$

2. Композиція відповідностей



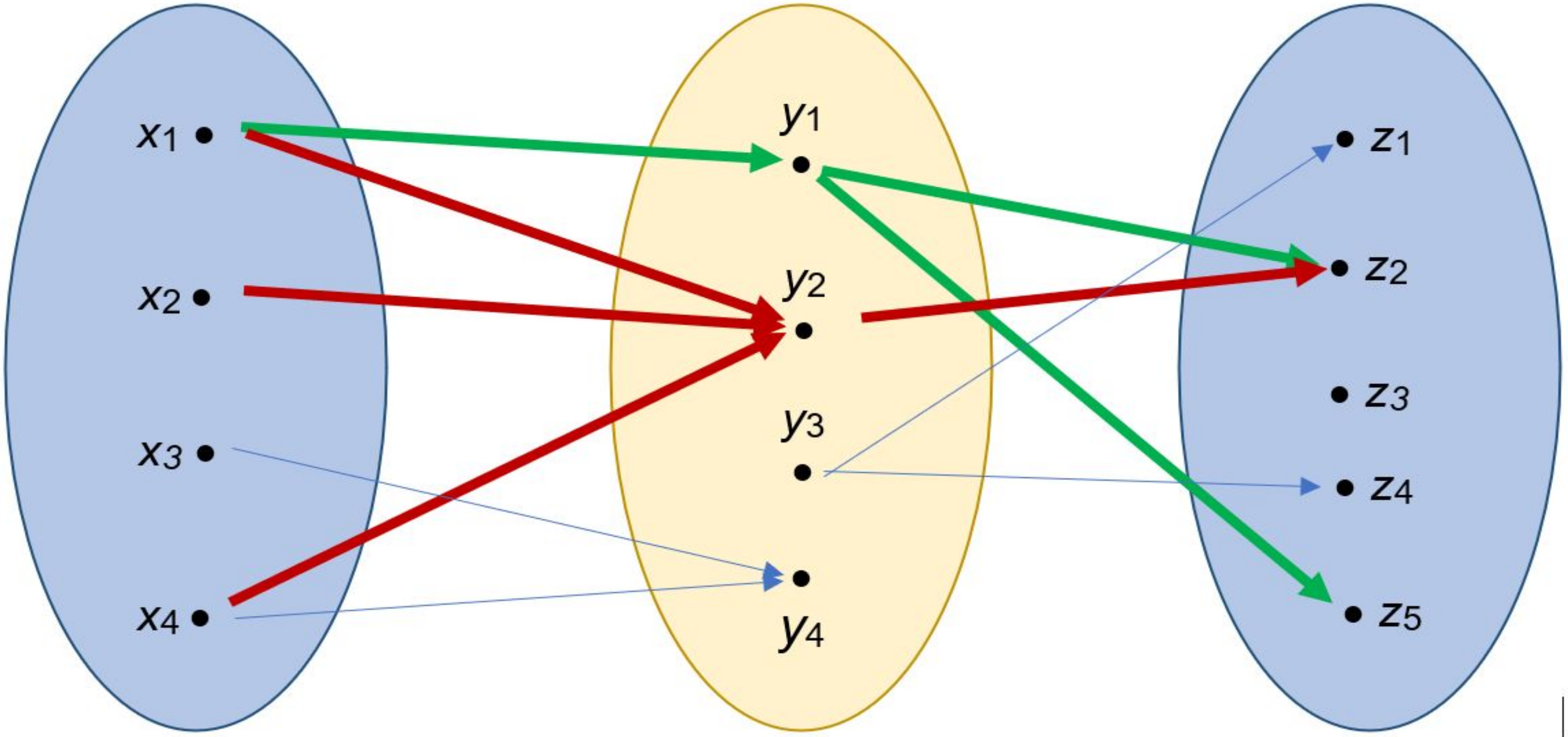


Приклад 7. $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ $Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4\}$ $Z=\{z_1,z_2,z_3,z_4,z_5\}$

$$G=\{(x_1,y_1),(x_1,y_2),(x_2,y_2),(x_4,y_2),(x_3,y_4),(x_4,y_4)\}$$

$$H=\{(y_1,z_2),(y_1,z_5),(y_2,z_2),(y_3,z_4),(y_3,z_1)\}$$ F = G ° H = ?

Рішення. $F=\{(x_1,z_2),(x_1,z_5),(x_2,z_2),(x_4,z_2)\}$



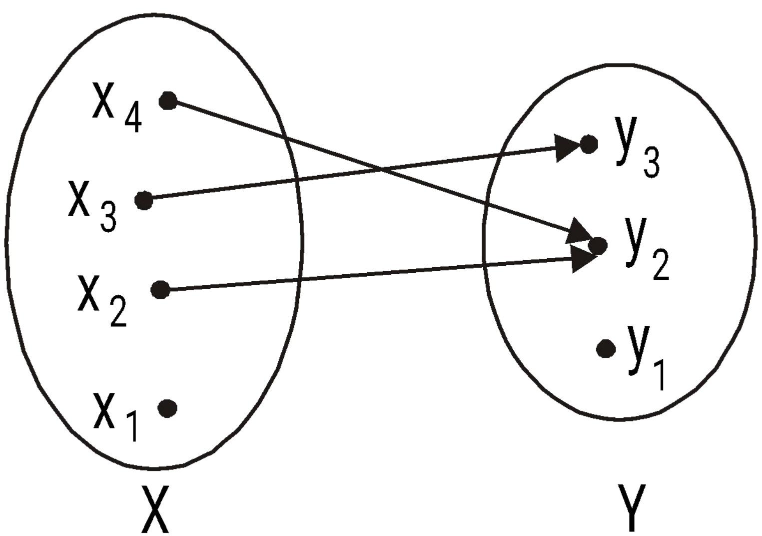
5. Властивості або характер відповідностей

1. Функціональність (*fun*)

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

$$Y = \{y_1, y_2, y_3\}$$

$$G = \{(x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_2)\}$$

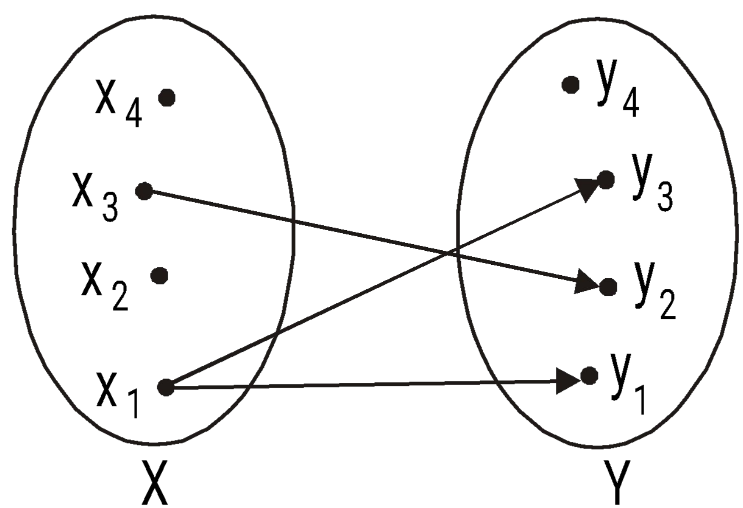


2. Ін’єктивність (*in*);

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

$$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$$

$$G = \{(x_1, y_1), (x_1, y_3), (x_3, y_2)\}$$



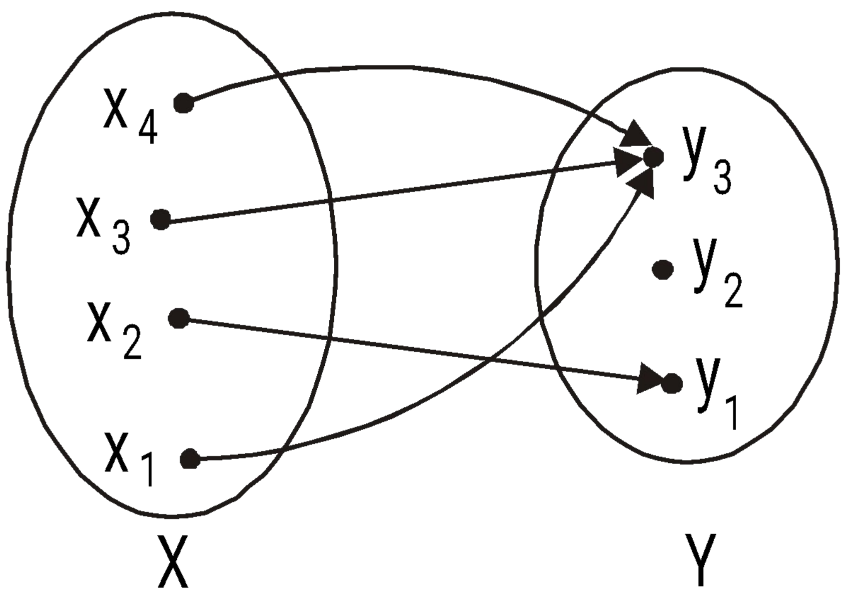
3. Всюди визначеність (*def*)

.

$$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$$

$$Y=\{y_1,y_2,y_3\}$$

$$G=\{(x_2,y_1),(x_1,y_3),(x_3,y_3),(x_4,y_3)\}$$

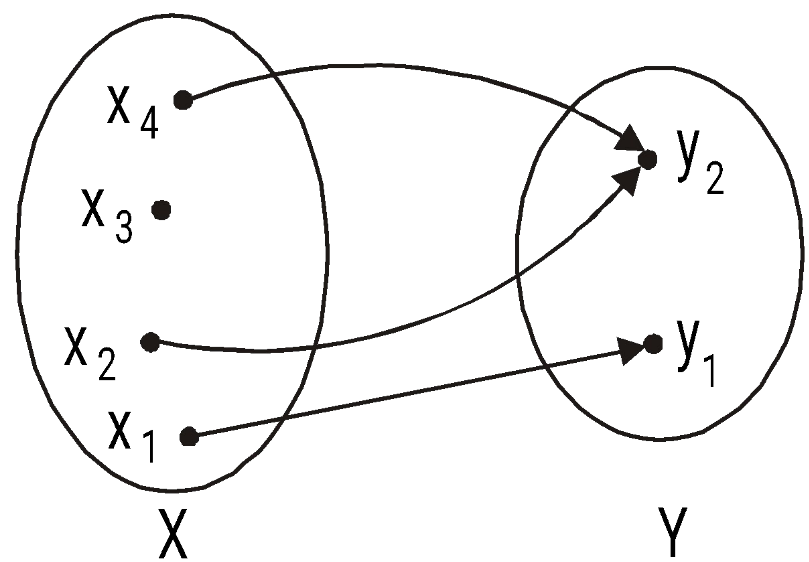


4. Сюр'єктивність (*sur*)

$$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$$

$$Y=\{y_1,y_2\}$$

$$G=\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_4,y_2)\}$$

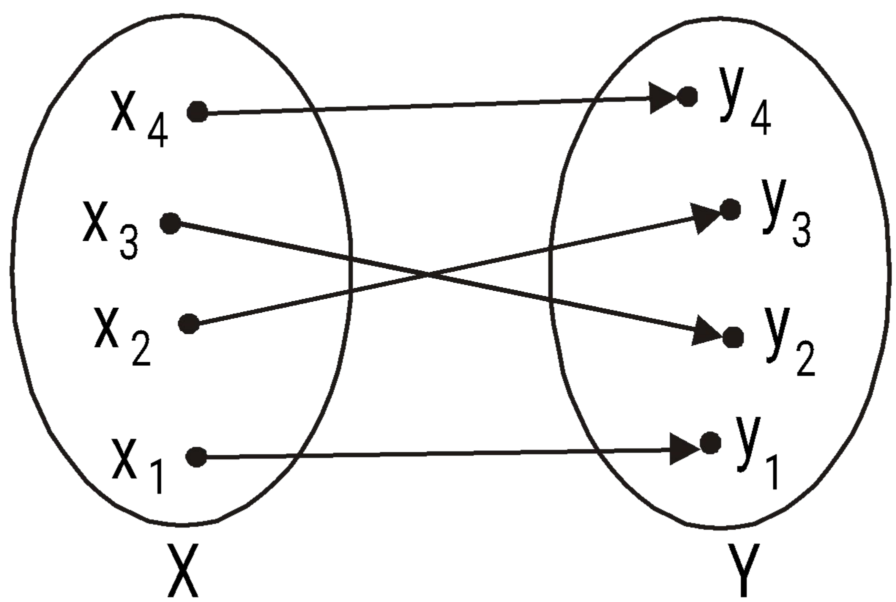


5. Бієктивність (*bi*) або взаємно однозначність

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

$$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$$

$$G = \{(x_1, y_1), (x_2, y_3), (x_3, y_2), (x_4, y_4)\}$$



6. Види функціональних відповідностей

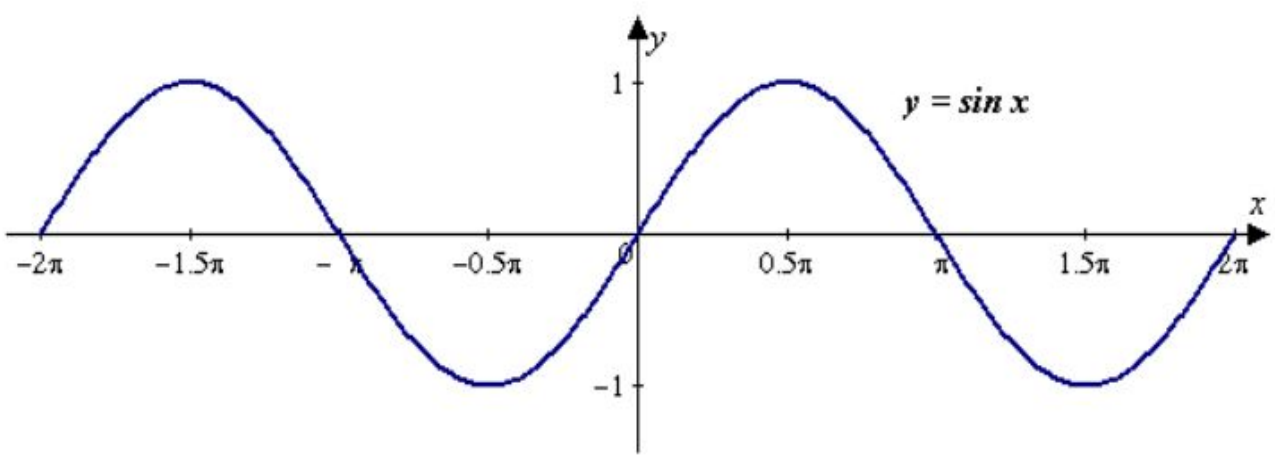
Всюди визначена функціональна відповідність:

функція: числова множина → числова множина
функціонал: множина функцій → числова множина
оператор: множина функцій → множина функцій

Приклади функціональних відповідностей

Приклад 8: $y = \sin(x)$.

1. Вид відповідності – функція.
2. Область визначення - $D_1(G) = \{x \in (-\infty; +\infty)\}$
3. Область значень – $D_2(G) = [-1; +1]$



Приклади функціональних відповідностей

Приклад 9: $y = \int_0^1 f(x)dx$

1. Вид відповідності – функціонал.
2. Область визначення - $D_1(G) = \{ f(x) \}$
3. Область значень – $D_2(G) = (-\infty; +\infty)$

Приклад 10: $y = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$

1. Вид відповідності – оператор.
2. Область визначення - $D_1(G) = \{ f(x,y) \in \mathrm{D}^1(x) \}$
3. Область значень – $D_2(G) = \{ f(x) \}$

7. Кардинальні числа

Def. Дві множини називаються **<u>рівносильними</u>** , якщо між елементами цих множин можна встановити взаємно однозначну відповідність.

Def. ***Кардинальне число*** – клас рівносильних множин.

Множина, котра рівносильна множині натуральних чисел, називається ***<u>зліченою</u>*** множиною, тобто елементи зліченної множини можна пронумерувати натуральними числами.

Всі злчені множини мають одне кардинальне число, яке позначають через $\aleph_0$ (читається «алеф-нуль»).