Пр5_ Ряд

Знайти область збіжності функціональних рядів

Три способи.

1) $u_n = \ln^n x$

1) Озн. порівн. - з $\sum q^n$.

де $q = |\ln x| < 1$, $\rightarrow\leftarrow$

$-1 < \ln x < 1$

$\ln e^{-1} < \ln x < \ln e$; $\frac{1}{e} < x < e$

2) Озн. Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\ln x)^{n+1}}{(\ln x)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|\ln x| = |\ln x| < 1;$$

3) Озн. радик. Коши.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\ln x)^n} = |\ln x| < 1.$$

Відповідь $x \in (\frac{1}{e}; e)$.

$x > 0$ - ОДЗ!

Перевірка збіжності на кінцях інтервалу.

$x = \frac{1}{e}$; $\sum_{n=0}^{\infty} \ln^n(\frac{1}{e}) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \ln e = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ не існує скінчен. суми; $\leftarrow\rightarrow$

$x = e$; $\sum_{n=0}^{\infty}(\ln e)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1^n = 1 + 1 + 1 + \dots \to \infty$. нескінчена сума. $\leftarrow\rightarrow$

Отже, обл. збіжн.: $x \in (\frac{1}{e}; e)$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

Озн. Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{x^n}\right| = |x| < 1,$$

$-1 < x < 1$. На кінцях інтервалу:

$x = -1$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$; $\rightarrow\leftarrow$ абсолютно т.як АР $\rightarrow\leftarrow$

$x = 1$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ $\rightarrow\leftarrow$ Відп. $x \in [-1; 1]$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$. За ознакою Даламбера: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}(n+\sqrt{n})}{(n+1+\sqrt{n+1})x^n}\right| = |x|$

Щоб ряд збігався: $|x| < 1$.

$-1 < x < 1$. На кінцях знайденого інтервалу: $x = -1$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}$ - ЗР

АР: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+\sqrt{n}}$; НО виконується. ДО: порівняння $\frac{1}{n+\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n}$; $\leftarrow\rightarrow$.

АР розбігається, але ЗР збігається за т. Лейбниця, тому що НО для АР виконується. Отже, ЗР збігається умовно

$x = 1$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+\sqrt{n}}$ розбігається, як АР з попереднього пункту.

Відповідь: $x \in [-1; 1)$.

4) $f_n(x) = e^{-nx}$

За радик. озн. Коши $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{e^{-nx}} = e^{-x}$ ($e^{\dots} > 0$!) модуль не потрібний ← будь-яка

$e^{-x} < 1$ - тоді ряд збігається $\Rightarrow x > 0$.

$x = 0$ $\sum_{n=0}^{\infty} 1 \to \infty$, ряд $\leftarrow\rightarrow$. Відповідь $x \in (0; +\infty)$.

Можно було порівняти з геометр. прогр. $q = e^{-x}$ і т.д $(e^{-x})^n$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 10^n}$. За ознакою Даламбера: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^n\cdot n\cdot 10^n}{(n+1)\,10^{n+1}\cdot x^{n+1}}\right| =$

$= \frac{|x|}{10} < 1$ - щоб ряд $\to\leftarrow$. Рішення нерівності: $-10 < x < 10$.

Перевірка на кінцях: $x=10$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n\cdot 10^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - відомий ряд $\leftarrow\to$

$x=-10$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-10)^n}{n\cdot 10^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ - ЗР. Його АР $\leftarrow\to$ (див. $x=10$). Т-ма Лейбниця виконується - НО АР викон. $\Rightarrow$ ЗР $\to\leftarrow$ умовно.

Отже, $x\in[-10;10)$

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\cdot x^{2(n-1)}$. За ознакою Даламбера: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{2^n\cdot x^{2n}}{2^{n-1}\cdot x^{2(n-1)}}\right| =$

$= 2x^2 < 1$ - щоб ряд $\to\leftarrow$. Рішення нерівності: $2x^2<1$; $2x^2-1<1$;

$(\sqrt{2}x-1)(\sqrt{2}x+1)<0$ $\quad x_{1,2}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$x\in\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Перевірка на кінцях: $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1=\infty$ $\leftarrow\to$;

$x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1-1+1-1\ldots$ Немає скінч. границі $\leftarrow\to$.

Отже, $x\in(-1/\sqrt{2};\,1/\sqrt{2})$.

7) $f_n(x)=\frac{\sin nx}{n^2}\le\frac{1}{n^2}$; $\frac{1}{n^2}$ $\to\leftarrow$ (відомо) $\Rightarrow$

$|\sin nx|\le 1$. $\Rightarrow$ за ознакою порівняння $\to\leftarrow$ при $x\in R$.

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-5)^n}{3^n\cdot n}$; За ознакою Даламбера:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(x-5)^{n+1}\cdot 3^n\cdot n}{3^{n+1}(n+1)\cdot(x-5)^n}\right| = \left|\frac{(x-5)}{3}\right| < 1$; $|x-5|<3$.

$-3<x-5<3$; $2<x<8$. $x\in(2;8)$. Перевірка на кінцях:

$x=2$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(-3)^n}{3^n\cdot n} = \sum\frac{(-1)^{n+2}\cdot\cancel{3^n}}{\cancel{3^n}\cdot n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{n} = -\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ розбігається

$\boxed{(-1)^{2n-1}=-1}$

$x=8$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cancel{3^n}}{\cancel{3^n}\cdot n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ - ЗР, збігається умовно.

Отже $x\in(2;8]$.