Навчальна дисципліна:
Дискретна математика

Лектор:
професор Кучук Георгій Анатолійович
E-mail: kuchuk56@ukr.net

3 семестр навчання на бакалавраті

Наприкінці семестру - іспит

Тема 3. Елементи комбінаторного аналізу

Лекція 3.1. Основні комбінаторні структури

Питання лекції

1. Основні правила комбінаторики.
2. Розміщення із повтореннями.
3. Розміщення без повторень.
4. Перестановки без повторень.
5. Комбінації без повторень.

Рекомендована література

1. *Конспект лекцій.URL:* *https://drive.google.com/drive/folders/12QYRD4L8kQr0g48DJVN386FrlSDuyPwQ?usp=sharing*

2. *Балога С.І.* Дискретна математика*. Навчальний посібник. – Ужгород: ПП «АУТДОР-. ШАРК», 2021. – 124 с.* *https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/bitstream/lib/3415/1/%D0%BD%D0%B0%D0%B2%D1%87%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE-%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D0%B8%D1%87%D0%BD%D0%B8%D0%B9%20%D0%BF%D0%BE%D1%81%D1%96%D0%B1%D0%BD%D0%B8%D0%BA.pdf*

3. *Новотарський М. А. Дискретна математика: навч. посіб. для студ. спеціальності 123 «Комп’ютерна інженерія». Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. 278 с.* *https://ela.kpi.ua/handle/123456789/37806*

1. Основні правила комбінаторики

Def. Комбінаторика - математична наука, що вирішує завдання, пов'язані з перерахуванням, розбиттям та розподілом множин об'єктів різної природи.

Def. Правило суми. Якщо об'єкт a може бути обраний p методами, а об'єкт b – іншими q способами, то вибір "**або** a, **або** b" може бути здійснений p **+** q способами. Слід зазначити, що вибори a і b мають бути взаємно виключними.

Приклад 1. Нехай задані 2 множини: *A* = {i | i=1..10}, *B* = {j | j=20, 29}. Скільки способами можна вибрати з цих множин просте число?

Рішення. Так як A ∩ B = ∅, то у цих множинах не міститься однакових простих чисел. Множина A містить 4 простих числа (2, 3, 5, 7), множина B – 2 простих числа (23, 29), тому вибір простого числа може бути здійснений 4 + 2 = 6 способами.

Приклад 2. Нехай задані 2 множини: *A* = {i | i=1..20}, *B* = {j | j=10, 29}. Скільки способами можна вибрати з цих множин просте число?

Рішення. *A* = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}; *B* = {11, 13, 17, 19, 23, 29}. Оскільки A □ B≠ ∅, а перетин множин містить 4 простих числа (11, 13, 17, 19), правило суми застосувати не можна, а число способів дорівнює 8 + 6 – 4 = 10.

Def. Правило добутку. Якщо об'єкт a може бути обраний p способами і після кожного з таких виборів об'єкт b, у свою чергу, може бути обраний q способами, то вибір "a **i** b" у зазначеному порядку можна здійснити p · q способами.

Приклад 3. Є 3 типи тканини для пошиття чотирьох фасонів костюмів. Скільки можливо різних варіантів костюмів?

Рішення. Оскільки аналізовані вибори (тип тканини, фасон костюма) незалежні, число варіантів дорівнює 3 · 4 = 12.

Def. **Впорядкованою** множиною називається множина з фіксованим порядком елементів. Кожному елементу присвоюється певний номер.

Def. Розміщення з n елементів по r – це вибірка r різних елементів із n заданих з урахуванням порядку їхнього розміщення (позначається A_n^r).

Def. Перестановка з n елементів – це розміщення з n елементів n (позначається P_n).

Def. Комбінація (сполучення, сполука) з n елементів по r – це вибірка r різних елементів з n заданих без урахування порядку їхнього розміщення (позначається C_n^r , іноді застосовується таке позначення $\binom{r}{n}$.

Приклад отримання r розміщень та комбінацій.
Дана множина із 4 елементів

$$M = \{a, b, c, d\}.$$

З неї вибираються три елементи: a, b, c.
Тоді 6 вибірок abc, acb, bac, bca, cab, cba є прикладом декількох різних розміщень з 4 елементів по 3.
У той же час всі ці 6 вибірок є різним записом однієї і тієї ж комбінації з 4 елементів по 3.

2. Розміщення з повтореннями

Розміщенням з повтореннями з n різних елементів базової множини по r елементів називається впорядкований рядок довжиною r будь-яких елементів базової множини.

Відмінною особливістю даної комбінаторної структури є повторення, але не більше r разів кожного елемента у кожній вибірці.

Кількість розміщень з n елементів r з повторенням визначається за формулою:

$$\tilde{A}_n^r = n^r,$$

Приклад 4. Нехай X = {a, b}. Скільки є різних варіантів розміщення елементів цієї множини по чотирьох чарунках Y = $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$?

Рішення. З умови n = 2, r = 4, тому кількість розміщень з двох елементів по чотирьох чарунках з повторенням дорівнює $2^4 = 16$, а множина комбінаторних об'єктів є такою:

{(a, a, a, a); (a, a, a, b); (a, a, b, a); (a, a, b, b); (a, b, a, a); (a, b, a, b); (a , b , b , a); (a , b , b , b); (b , a , a , a), (b , a , a , b); (b , a , b , a); (b , a , b , b); (b , b , a , a); (b , b , a , b); (b , b , b , a); (b , b , b , b)}.

Приклад 5. 15 занумерованих більярдних куль розмістили у 6 луз. Скількома способами це можна зробити?

Рішення. Поставимо у відповідність кожному числу від 1 до 15 номер лузи, у якій знаходиться куля. Одержимо впорядковану вибірку довжиною 15, яка складається із чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 (номер відповідної лузи). Кількість таких вибірок дорівнює

$$\tilde{A}_6^{15} = 6^{15} = 470\,184\,984\,576.$$

Приклад 6. Скільки трицифрових чисел можна записати, використовуючи цифри 2,4,5,7?

Рішення. Оскільки мова йде про розміщення з повтореннями з 4 елементів по 3, то n = 4, r = 3, отже кількість чисел буде такою:

$$\tilde{A}_4^3 = 4^3 = 64.$$

3. Розміщення без повторень

Розміщенням без повторень з n різних елементів по r елементів називається будь-яка впорядкована r-елементна підмножина деякої заданої основної n-елементної множини.
Визначимо кількість розміщень з n різних елементів по r без повторень (обов'язково n ≥ r):

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} .$$

Приклад 7. На зборах присутні 25 студентів. Скількома способами можна обрати голову зборів, його заступника і секретаря?

Рішення. Кількість способів обрання дорівнює числу розміщень без повторень з 25 по 3. Отже, кількість способів така:

$$A_{25}^3 = \frac{25!}{(25-3)!} = \frac{25!}{22!} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22!}{22!} = 25 \cdot 24 \cdot 23 = 13800$$

Приклад 8. 8 спортивних команд змагаються з метою посісти перше, інше та третє призові місця. Скільки існує варіантів розподілу призових місць, якщо кожне місце може посісти лише одна команда?

Рішення. Кількість можливих варіантів розподілу місць дорівнює

$$\mathrm{A}_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5!} = 8\cdot 7\cdot 6 = 336$$

Приклад 9. Скільки двоцифрових чисел можна записати, використовуючи цифри 2,4,5,7 не більше, ніж один раз (тобто числа, у яких всі цифри різні) ?

Рішення. Оскільки мова йде про розміщення без повторень з 4 елементів по 2, то n = 4, r = 2, отже кількість чисел буде такою:

$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2!}{2!} = 12.$$

Це такі числа: 12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41 , 42, 43.

4. Перестановки без повторень

Перестановкою без повторень з n різних елементів базової мноини називається впорядкована множина, яка складається з всіх елементів деякої заданої основної n-елементної множини.

Це граничний випадок розміщення (r = n), тому кількість перестановок з n різних елементів розраховується як:

$$P_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

З урахуванням отриманого співвідношення записується зв'язок розміщень та перестановок

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{P_n}{P_{n-r}}$$

Рекурентна формула для обчислення числа перестановок:

$$\mathrm{P}_n = n \cdot \mathrm{P}_{n-1}$$

Приклад 10. На полиці розміщено 10 книжок (різних). Скільки існує варіантів їх розташування?

Рішення. P_{10} = 10 ! = 3628800.

Приклад 11. Скількома способами можна утворити всі можливі тризначні числа з цифр 1, 2, 3 при умові, що цифри в записі числа не повторювалися?

Рішення. $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Це такі числа: 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Приклад 12. Скількома способами можна утворити всі можливі тризначні числа з цифр 0, 1, 2 при умові, що цифри в записі числа не повторювалися?

Рішення. $P_3 - P_2 = 3! - 2! = 6 - 2 = 4$. Це такі числа: 120, 102, 210, 201.

Зауважимо, що переставлення є взаємно однозначним відображенням множини на собі.

5. Комбінації без повторень

Комбінацією без повторень (рос. сочетанием, додатково укр. сполученням, сполукою) з n різних елементів базової множини по r елементів називається називається будь-яка її r-елементна підмножина базової множини.

Підмножина так само, як і розміщення, не має повторень елементів. Кількість кортежів-розміщень перевершує кількість підмножин за рахунок переставлень елементів кортежу, яких маємо n!. Звідси кількість комбінацій без повторень:

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{P_r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Кількість поєднань та розміщень пов'язане співвідношенням:

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{P_r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

Приклад 13. Скількома способами можна вибрати 2 деталі з ящика, в якому є 8 деталей?

Рішення. Маємо: $C_8^2 = \frac{8!}{6!\,2!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ (способів).

Приклад 14. На зборах присутні 25 студентів. Скількома способами можна обрати президію зборів у складі 3-х осіб ?

Рішення. $C_{25}^3 = \frac{25!}{3!(25-3)!} = \frac{25!}{3!22!} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22!}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 22!} = 2300$ (способів).

Приклад 15. Під час передачі двійкових даних 8-розрядна кодова комбінація може мати зміни у деяких розрядах (або помилки) внаслідок дії перешкод. Якщо помилки відбулися у двох розрядах, то це дворазова помилка. Скільки існує варіантів двократної помилки?

Рішення. Надамо номери розрядам кодової комбінації. Множина номерів розрядів A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} має потужність |A| = 8. Кожен варіант дворазової помилки можна описати як підмножину потужності 2 у множині A:

$$C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$