Диференційні рівняння (ДР)

Розділ «Диференційні рівняння» є важливою частиною курсу ВМ. Дійсно, при вивченні багатьох фізичних явищ, технологічних процесів, процесів, що спостерігаються в економіці, екології, соціальних науках, можна установити закони, що пов'язують не саме величини що вивчаються, а швидкість або темп змін, що і приводить до зв'язку похідних або диференціалів.

Основні поняття і визначення

☛ Диференціальним рівнянням (ДР) називають рівняння, у яке входять: невідома функція, її похідні різних порядків і незалежна змінна/змінні для ФБЗ.

☛ Якщо функція у ДР, залежить від однієї незалежної змінної, то рівняння називається ***звичайним диференціальним рівнянням*.**

Зауваження. Якщо функція у ДР, залежить від декількох незалежних змінних (ФБЗ), то рівняння називається ***диференціальним рівнянням у частинних похідних***.

☛ Порядок старшої похідної у ДР називається ***порядком*** рівняння.

Звичайне диференціальне рівняння n-го порядку має вид:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

☛ **Будь-яка функція $y = \varphi(x)$, що задовольняє диференціальному рівнянню, тобто перетворює його на тотожність, називається *розв'язком* цього рівняння.**

☛ **Вираз** $\Phi(x, y) = 0$, що неявно задає розв'язок ДР, називається ***інтегралом*** **цього рівняння**.

☛ Графік **функції** розв'язку ДР називається його ***інтегральною кривою***.

☛ Процес знаходження розв'язку ДР називається ***інтегруванням*** **.**

Далі буде ясно, що інтегрування виконується стільки разів, якого порядку рівняння.

Тому ***загальний розв'язок*** або ***інтеграл*** ДР буде містити стільки довільних констант, якого порядку рівняння.

Якщо задані **початкові умови** (значення функції і її похідних у деякій точці), то можна знайти ***частинний розв'язок*** або ***частинний інтеграл*** , якщо обчислити довільні константи за початковими умовами. Задача з початковими умовами називається задачею Коші.

Приклад задачі, математична модель якої − ДР

Розглянемо задачу, що приводить до ДР, і на прикладі пояснимо основні поняття, що наведені вище.

Нехай $y(t)$ – кількість продукції, яка випускається за час t; p – ціна одиниці такої продукції. Сума інвестицій (коштів для розширення виробництва) $I(t)$ пропорційна доходу з коефіцієнтом пропорційності m ($m=const$, $0<m<1$). Зростання швидкості випуску продукції пропорційно зростанню інвестицій з коефіцієнтом пропорційності η. Потрібно знайти кількість продукції, що випускається за час t, якщо у начальний момент часу $t=t_0$ кількість продукції $y=y_0$.

Доход можна визначити як ціну одиниці продукції, поможену на кількість продукції: $p\cdot y(t)$.

У відповідності з умовою, інвестиції пропорційні доходу

$$I(t)=m\cdot p\cdot y(t),$$

а швидкість випуску продукції пропорційна інвестиціям:

$$y'=\eta\cdot I(t), \text{ або } y'=\eta\cdot m\cdot p\cdot y(t).$$

Позначимо сталу величину $k=\eta\cdot m\cdot p$. Тоді рівняння прийме вид:

$$y'=k\cdot y.$$

Це ДР першого порядку (ДУ-1).

Воно містить функцію y, що залежить від незалежної змінної t, та її першу похідну y'.

Щоб визначити саму функцію, застосуємо найбільш розповсюджений прийом розв'язання ДР: розділимо змінні. Для цього перед усім треба представити похідну у диференціальному вигляді:

$$y' = \frac{dy}{dt}.$$

$$\text{Тоді маємо: } \frac{dy}{dt} = k \cdot y,$$

Потім переносимо у ліву частину все, що залежить від змінної y, а у праву – від змінної t (можна і навпаки):

$$\frac{dy}{y} = k\,dt,$$

тепер можна інтегрувати:

$$\int \frac{dy}{y} = k \int dt \;; \qquad \ln|y| = kt + \ln|C|,$$

або $\boldsymbol{y=Ce^{kt}}$. ***Загальний розв'язок ДР***

Врахуємо, що $y\big|_{t=t_0} = y_0$, тоді $y_0 = Ce^{kt_0}$, $C = y_0 e^{-kt_0}$

Тоді, з урахуванням початкової умови,

$$y = y_0 e^{k(t-t_0)}.$$ ***Частинний розв'язок ДР***

Знайдена функція, що задає закон зміни об'єму випуску продукції від часу, причому це ***частинний розв'язок*** складеного нами ДР.

Інтегральні криві – сімейство кривих виду $\boldsymbol{y=Ce^{kt}}$, що відрізняються тільки const C. Частинному розв'язку відповідає та з них, що приходить через точку, задану початковою умовою.

Типи ДР першого порядку (ДР-1)

У ДР першого порядку можуть входити: незалежна змінна, функція, перша похідна. В загальному вигляді

$$F(x, y, y') = 0.$$

У більшості випадків зручніше розглядати ДР-1 у виді, де виражена перша похідна: $y' = f(x; y).$

Перед розв'язанням треба визначити ТИП диференціального рівняння першого порядку, далі розв'язувати за наведеними схемами.

Розглянемо чотири типи ДУ–1.

При розв'язанні ДР-1 найпершим (і принциповим) кроком є визначення типу рівняння. Від цього у великій мірі залежить можливість розв'язання диференціального рівняння. Тому слід запам'ятати основні типи ДР-1, які класифіковано у наступній таблиці:

№	***Вид рівняння***	***Назва диференціального рівняння***
1	$y' = f(x)$	Найпростіше рівняння
1	$y' = f(x)\cdot\varphi(y)$	Рівняння з відокремлюваними змінними
2	$y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$	Однорідне рівняння
3	$y' + p(x)\cdot y = q(x)$	Лінійне рівняння
4	$y' + p(x)\cdot y = q(x)\cdot y^n$	Рівняння Бернуллі

Зручно звести диференціальне рівняння першого порядку до виду $y' = f(x)$, а потім за даною класифікацією визначити тип рівняння і тільки після цього розв'язувати його відповідним методом.

Диференціальне рівняння може належати одночасно до кількох типів. Наприклад, рівняння $y' = \dfrac{y}{x}.$ відноситься до усіх типів, крім першого. Але найпростіше його розв'язувати як диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними.

Щодо найпростішого ДР $y' = f(x)$.

Для одержання функції *y(x)* треба після відокремлення змінних

$$\frac{dy}{dx} = f(x); \qquad dy = f(x)dx;$$

проінтегрувати таке рівняння:

$$\int dy = \int f(x)dx$$

$$y(x) = F(x) + C \text{ - відповідь.}$$

ТИП 1 – *ДР-1 з відокремлюваними змінними*

1)

$$y' = f(x)\cdot\varphi(y)$$

Похідна може бути виражена як добуток функцій так, що кожна залежить тільки від x або тільки від y.

2)

$$f_1(x)\cdot\varphi_1(y)\cdot dx + f_2(x)\cdot\varphi_2(y)\cdot dy = 0$$

Диференціальний вид. При кожному диференціалі також знаходиться добуток функцій так, що кожна залежить тільки від x або тільки від y.

Схема розв’язку:

- ✓ записати похідну через диференціали;
- ✓ відокремити змінні і проінтегрувати рівняння.

ПРИКЛАД 1 ***ДР-1 з відокремлюваними змінними***

$y' = \dfrac{y}{x^2+1}$ ДР-1, тип 1.

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x^2+1}$; $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x^2+1}$ - відокремлення змінних.

$\int \dfrac{dy}{y} = \int \dfrac{dx}{x^2+1}$; $\underline{\ln|y| = \operatorname{arctg} x + C}$ інтеграл ДР

$y = e^{\operatorname{arctg} x + C}$; $\underline{y = C\cdot e^{\operatorname{arctg} x}}$ розв'язок ДР

$e^C \to C$

ПРИКЛАД 2 ***ДР-1 з відокремлюваними змінними***

$$x(y+1)\,dx = (x^2+1)\,y\,dy\,;$$

$$\frac{x\cdot dx}{x^2+1} = \frac{y\,dy}{y+1}$$ відокремлення змінних.

$$\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \int \frac{y+1-1}{y+1}\,dy\,;$$

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+1) = \int dy - \int \frac{d(y+1)}{y+1}\,;$$

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+1) = y - \ln|y+1| + \underset{\sim}{C} \rightarrow \ln C$$

$$\ln(x^2+1)^{1/2} + \ln|y+1| + \ln C = y$$

$$y = \ln\left(\sqrt{x^2+1}\cdot(y+1)\cdot C\right)$$ – інтеграл. ДР

У якості прикладу також можна представити **Приклад задачі, математична модель якої – ДР.**

ТИП 2 – ***Однорідні ДУ-1.***

Похідна може бути виражена як функція,що залежить від виразу $\frac{y}{x}$.

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Схема розв'язку: вводиться заміна, що приводить до рівняння **типу 1.**

- ✓ виконати заміну: ввести функцію $t = t(x)$, як $\boxed{t = \frac{y}{x}}$;
- ✓ тоді $y = u\cdot x$ і $\boxed{y' = t'\cdot x + t}$. Така заміна приводить до ДУ першого типу;
- ✓ відокремити змінні і проінтегрувати;
- ✓ перейти до старих змінних.

Докладніше - початок

ДР $y' = f(x;y)$ називається однорідним, якщо $f(x;y)$ - є однорідною функцією.

* Функція $f(x,y)$ - називається однорідною функцією $n-$го степеню, якщо виконується тотожність $f(\alpha x,\alpha y)=\alpha^k f(x;y)$.

Наприклад, $f(x;y)=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}-$однорідна функція з показником однорідності $k=-1$, тому що $f(\alpha x,\alpha ty)=\dfrac{\alpha x+\alpha y}{\alpha^2x^2+\alpha^2y^2}=\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{x+y}{x^2+y^2}=\alpha^{-1}f(x;y)$.

Функція $f(x;y)=x^2y+3xy^2+8y^3$ однорідна 3-го степеню, функція $f(x;y)=\dfrac{y}{x}\sin\dfrac{y}{x}$- однорідна нульового степеню.

Якщо функція $f(x;y)$ є однорідною функцією нульового степеню, то вона задовольняє тотожності

$$f(\alpha x,\alpha y)=f(x;y)$$

і її завжди можна представити як функцію відношення $\dfrac{y}{x}$.

Дійсно, положив у тотожності $\alpha=\dfrac{1}{x}$, одержимо

$$f\left(1,\frac{y}{x}\right)=f(x;y).$$

Ліва частина цієї рівності залежить тільки від $\dfrac{y}{x}\Rightarrow f(x;y)=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Рівняння прийме вид: $y'=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

За допомогою заміни змінної це рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\boxed{\frac{y}{x}=t(x)\Rightarrow y=x\cdot t,\ y'=t+x\cdot t'}.$$

Підставив ці вирази у рівняння, знайдемо

$$t+xt'=\varphi(t)\ \text{або}\ xt'=\varphi(t)-t.$$

Відокремлюючи змінні, інтегруючи, одержимо загальний інтеграл ДР

$$\int \frac{dt}{\varphi(t)-t} = \ln|x| + \ln|C| = Cx.$$

Докладніше-кінець

ПРИКЛАДИ ***Однорідні ДУ-1***

1)

$y' = \dfrac{xy - y^2}{x^2 - 2xy} \begin{array}{l} |:x^2 \\ |:x^2 \end{array}$ однорідне ДР, тип 3.

$y' = \dfrac{\frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}}{1 - 2\frac{y}{x}}$; заміна $t = \dfrac{y}{x}$; $y = x\cdot t$, $\underline{t = t(x)}$

$y' = (x\cdot t)' = t + x\cdot t'$

$t + x\cdot t' = \dfrac{t - t^2}{1 - 2t}$; виразимо t'.

$t' = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{t - t^2}{1 - 2t} - t\right)$; $t' = \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\cancel{t} - t^2 - \cancel{t} + 2t^2}{1 - 2t}$

$t' = \dfrac{1\cdot t^2}{x(1 - 2t)}$; $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{t^2}{1 - 2t}$; $\dfrac{(1 - 2t)dt}{t^2} = \dfrac{dx}{x}$

$\int\left(\dfrac{1}{t^2} - \dfrac{2}{t}\right)dt = \ln|x| + \ln C$;

$-\dfrac{1}{t} - 2\ln|t| = \ln Cx$

$-\dfrac{x}{y} = \ln\dfrac{C\cdot t^2}{x}$; $-\dfrac{x}{y} = \ln\dfrac{Cy^2}{x^3}$ – відповідь.

2) $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$. Тип 2.

$f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$ - однорідна функція нульового степеню.

Вводимо $t(x)=\dfrac{y}{x} \Rightarrow y=xt, \quad y'=t+xt'$.

У нових змінних рівняння має вид: $x\cdot t'+t=\dfrac{2t}{1-t^2}$; $x\cdot t'=\dfrac{2t-t+t^3}{1-t^2}=\dfrac{t(1+t^2)}{1-t^2}$

Розділимо змінні і проінтегруємо:

$$\frac{1-t^2}{t\cdot(1+t^2)}dt=\frac{dx}{x}$$

$$\ln|t|-\ln(1+t^2)=\ln|x|+\ln|C|$$

$$\frac{t}{1+t^2}=Cx.$$

Підставимо $t=\dfrac{y}{x}$, одержимо загальний інтеграл рівняння $\underline{x^2+y^2=Cy}$.

ТИП 3 – *Лінійні ДР-1.*

Лінійне ДУ-1 може бути приведено до виду:

$$\boxed{y'+p(x)\cdot y=q(x)}$$

Схема розв'язку називається «метод Бернуллі-Фур'є».

- ✓ Розв'язок рівняння – функція *y=y(x)* - представимо як добуток двох функцій:

$$y=R(x)\cdot S(x)$$

- ✓ Шляхом підстановки у вихідне рівняння для визначення кожної з них можна одержати формули

$$\boxed{R(x)=e^{-\int p(x)dx}}; \qquad \boxed{S(x)=\int\frac{q(x)}{R(x)}dx+C}.$$

- ✓ Записати розв'язок у вигляді добутку знайдених функцій.

$$y=R(x)\cdot S(x)=e^{-\int p(x)dx}\cdot(\int\frac{q(x)}{R(x)}dx+C)$$

ПРИКЛАДИ ***Лінійні ДР-1***

1)

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}; \qquad y|_{x=\pi} = 1.$$

$y' + p(x)\cdot y = q(x)$ лінійне ДР, тип 3.

$p = \frac{1}{x}$; $q = \frac{\sin x}{x}$.

За формулами Бернулі-Фур'є

$$y(x) = R(x)\cdot S(x).$$

$$R(x) = e^{-\int p(x)dx} = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = e^{-\ln|x|};$$

$$R(x) = e^{\ln|x|^{-1}} = \frac{1}{x}$$

$$S(x) = \int \frac{q(x)}{R(x)}dx + C = \int \frac{\sin x}{\cancel{x}}\cdot\frac{\cancel{x}}{1}dx =$$

$$= -\cos x + C;$$

$$y(x) = \frac{1}{x}\cdot(C - \cos x)$$ розв'язок ДР

2)

$$(x^2+1)y' + xy = x(x^2+1) \text{ або } y' + \frac{x}{x^2+1}y = x. \text{ Тип 3.}$$

Тут $p(x) = \frac{x}{x^2+1}$; $q(x) = x$.

$$\boxed{R(x) = e^{-\int p(x)dx}}; \qquad \boxed{S(x) = \int \frac{q(x)}{R(x)}dx + C}.$$

Знайдемо $R(x)$: $\int -\frac{x}{x^2+1}dx = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$; $R(x) = \exp(-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$;

Тепер знайдемо *S(x)*: $S(x) = \int x\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int\sqrt{x^2+1}\,d(x^2+1)$

$$S(x) = \frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2} + C.$$

Розв'язок вихідного рівняння : $y = \left(\frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2} + C\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ або

$$y=\frac{1}{3}(x^2+1)+\frac{C}{\sqrt{x^2+1}}$$

ТИП 4 – *ДР Бернуллі*

Рівняння Бернуллі відрізняється від лінійного рівняння тільки правою частиною:

$$\boxed{y'+p(x)\cdot y=q(x)\cdot y^n},\ n\neq 0,\ n\neq 1.$$

Схема розв'язку: вводиться заміна, що приводить до рівняння **типу 3.**

- ✓ Введемо заміну – замість функції *y=y(x)* вводимо функцію *z=z(x)*, вони пов'язані співвідношенням

  $z=y^{1-n}$, тоді $y=z^{1/(1-n)}$.
- ✓ Підставимо до рівняння Бернуллі і одержимо лінійне рівняння для функції *z(x)* наступного виду:
- ✓

$$\boxed{z'+(1-n)\cdot p(x)\cdot z=(1-n)\cdot q(x)}$$

  Тут *(1-n)* – сталий коефіцієнт.
- ✓ Схема розв'язку такого рівняння приведена у попередньому пункті.
- ✓ Перейти до вихідної функції.

ПРИКЛАД *ДУ Бернуллі*

1)

$$xy'+y=y^2\ln x \text{ або } y'+\frac{1}{x}y=y^2\ln x. \text{ Тип 4}$$

$$p(x)=\frac{1}{x};\ q(x)=\ln x;\ n=2;\ 1-n=-1$$

заміна $z=y^{-1}$. Для ф-ції Z одержуємо ДР 3-го типу: $z'-\frac{1}{x}z=-\frac{\ln x}{x}$.

У ньому $\tilde{p}(x)=-\frac{1}{x};\ \tilde{q}(x)=-\frac{\ln x}{x}$.

$$\boxed{R(x)=e^{-\int p(x)dx}};\qquad \boxed{S(x)=\int\frac{q(x)}{R(x)}dx+C}$$

Знайдемо $R(x)$: $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|$; $R(x) = \exp(\ln|x|) = x$;

Тепер знайдемо $S(x)$: $S(x) = -\int \frac{\ln x}{x^2}dx = \left| \begin{matrix} U = \ln x & dU = \frac{dx}{x} \\ dV = \frac{-dx}{x^2} & V = \frac{1}{x} \end{matrix} \right| = \frac{1}{x}\ln x - \int \frac{1}{x^2}dx$

$$S(x) = \frac{\ln x + 1}{x} + C.$$

Розв'язок вихідного рівняння : $z = x \cdot \left(\frac{\ln x + 1}{x} + C \right)$ або $z = \ln x + 1 + Cx$; тоді

$$\underline{y = \frac{1}{z} = \frac{1}{\ln x + 1 + Cx}}$$

2)

$$x\,dx = \left(\frac{x^2}{y} - y^3 \right) dy$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{\frac{x^2}{y} - y^3} = \frac{xy}{x^2 - y^4} \quad ?$$

$$x'_y = \frac{dx}{dy} = \frac{x^2 - y^4}{xy}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\frac{x^2}{y} - y^3}{x} = \frac{x}{y} - \frac{y^3}{x}$$

$x'_y - \frac{1}{y}\cdot x = -y^3 \cdot x^{-1}$

Шаблони ДР Бернуллі

$y'_x + p(x) y = q(x)\cdot y^n \;\Big|\; x'_y + p(y)\cdot x = q(y)\cdot x^n$

$\Rightarrow$ ДР Бернуллі, 4 тип.

$p(y) = -\frac{1}{y}$; $q(y) = -y^3$

$n = -1$; $\underline{1-n = 2}$

ДР (лінійне) для $z = z(y)$.

Заміна $z = x^{1-n} = x^2$; $x = \pm\sqrt{z}$

$z'_y + (1-n)\cdot\frac{z}{y} = (1-n)\, q(y)$.

$z'_y - \frac{2z}{y} = -2y^3 \qquad \tilde{p}(y) = -\frac{2}{y}$; $\tilde{q}(y) = -2y^3$

$z(y) = R(y)\cdot S(y) = e^{-\int \tilde{p}(y)dy} \cdot \left(\int \frac{\tilde{q}(y)}{R(y)} dy + C\right)$.

$R(y) = e^{-\int -\frac{2}{y}dy} = e^{2\ln|y|} = y^2$

$S(y) = 2\int \frac{-y^3}{y^2} dy = -y^2 + C$

$z(y) = y^2(C - y^2)$; $\quad x(y) = \pm\sqrt{y^2(C-y^2)}$