Розкладення ф-ції у степеневий ряд (Тейлора/Маклорена). – це представлення $f(x)$ у вигляді нескінченої суми

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

Нехай $f(x)$ – нескінчене число разів диф-ма в околі т. x_0.

Тоді треба знайти невідомі коефіцієнти a_n $(n=\overline{0,\infty})$.

$$\begin{array}{ll|l} & & \text{нехай } x=x_0. \\ f(x) = & a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \ldots & = a_0 \\ f'(x) = & a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \ldots & = a_1 \\ f''(x) = & 2a_2 + 3\cdot 2 a_3 (x-x_0) + \ldots & = 2a_2 \\ f'''(x) = & 3\cdot 2\cdot a_3 + \ldots & = 3\cdot 2 a_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f^{(n)}(x) = & & = n\cdot(n-1)\ldots 3\cdot 2 a_n \end{array}$$

Висновки: $a_0 = f(x_0)$; $a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}$; $a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}$ ...

$$\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}}$$

→ Розкладення ф-ції у ряд Тейлора в околі т. x_0.

→ — " — " — " — " — по степеням $(x-x_0)$

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n}$$

Якщо $x_0=0$, одержимо ряд Маклорена, або розкладення ф-ції по степеням x, в околі т. $x=0$.

$$\boxed{f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n}$$

Стандартні степеневі ряди (для елементарних ф-цій).

I. $f(x)=e^x$; $x_0=0$ (для усіх стандарт. рядів).

Ця ф-ція загального виду, тому у ряду будуть присутні всі степені x.

$$\begin{array}{l|l} f(x)=e^x & =1 \leftarrow x=0 \\ f'(x)=e^x & =1 \\ f''(x)=e^x & =1 \\ \dots & \dots \\ f^{(n)}(x)=e^x & =1 \end{array}$$

$$\boxed{e^x=1+\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{n!}x^n}=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots$$

Інтервал збіжності - за ознакою Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right|=\frac{|x|}{n+1}=0<1 \text{ для } x\in R, \Rightarrow$$

$(x-const)$

$\Rightarrow$ ряд збігається $x\in(-\infty;\infty)$

$$\boxed{f(x)=f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}$$

II. $f(x)=\sin x$

Це ф-ція непарна, тому у ряду - тільки непарні степені

$$\begin{array}{l|ll} f(x)=\sin x & f(0)=0 & n=0 \\ f'(x)=\cos x & f'(0)=1 & n=1 \\ f''(x)=-\sin x & f''(0)=0 & n=2 \\ f'''(x)=-\cos x & f'''(0)=-1 & n=3 \\ f^{IV}(x)=\sin x & f^{IV}(0)=0 & n=4 \\ \dots & \dots & \end{array}$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\dots$$

$$\boxed{\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}}$$

Інт-л збіжності: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2(n+1)-1}}{(2(n+1)-1)!}\cdot\frac{(2n-1)!}{x^{2n-1}}\right|=\left|\frac{x^2}{2n(2n+1)}\right|=0<1$; $x\in R$