Лекція №3

АРИФМЕТИЧНІ ОСНОВИ КОМП'ЮТЕРІВ

Рекомендована література

ОСНОВНА

1. Кравчук С.О., Шонін В.О. Основи комп' ютерної техніки. – Киев: Політехніка, 2005. – 344 с.

2. Войтюшенко Н.М., Інформатика і комп’ютерна техніка: навч. Пос./ Н.М. Войтюшенко, А.І. Остапець. – К.: Центр учбової літератури, 2009. – 564 с.

3. Рзаєв Д.О., Шарапов О.Д., Ігнатенко В.М., Дибкова Л.М. Інформатика та комп’ютерна техніка: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. – К.: КНЕУ, 2002. —486 с.

4. Кравчук С.О., Шонін В.О. Основи комп’ютерної техніки. Компоненти, системи, мережі: Навч.-метод. посібник – К.: Каравела, 2006. – 344 с

5. Методичні вказівки до виконання практичних занять з дисципліни «Основи комп’ютерної інженерії» для студентів усіх форм навчання за спеціальністю 123 «Комп’ютерна інженерія». / уклад. С.М. Порошин, А.М. Носик, В.В. Онищенко – Харків: НТУ «ХПІ», 2021. – 154 с..

Рекомендована література

ДОДАТКОВА

1. Ярмуш О.В., Редько М.М. Інформатика і комп'ютерна техніка: Навч. посібник. - К.: Вища освіта, 2006. - 359 с.

2. Дибкова Л.М. Інформатика та комп'ютерна техніка: Посібник для студентів вищих навчальних закладів. - К.: «Академвидав», 2002. – 320 с.

3. Наливайко Н. Я. Інформатика. Навч. посіб. – К.: Центр учбової літератури, 2011. – 576 с

ПЛАН ЛЕКЦІЇ

1 Загальні відомості про системи числення

2 Системи числення, що застосовуються в комп’ютерах

3 Формальні правила двійкової арифметики

4 Переведення чисел з однієї позиційної системи числення в іншу

5 Подання даних в комп’ютерах

1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ

В історії систем числення виділяють кілька етапів: початкова стадія рахунку, непозиційні системи числення, алфавітні системи нумерації, позиційні системи числення. Початкова стадія рахунку "характеризується зображенням рахувати множини за допомогою частин тіла, особливо пальців рук і ніг, паличок, вузлів мотузки і т.д.

Саме в цей початковий період було зроблено одне з найбільших відкриттів античної математики. Мова йде про позиційний принцип представлення чисел "першою відомою нам системою числення, заснованою на позиційному принципі, є шістдесяткова система древніх вавілонян, що виникла приблизно за 2000 років до н.е.".

Поява позиційної системи позначення чисел вважається однією з основних віх в історії матеріальної культури. У її створенні брали участь цілі народи. У 6 ст. н.е. подібна система виникла у племені майя. Найбільш поширена думка, що основою системи числення майя є число 20, що має "пальцеве" походження.

Ми для повсякденних обчислень використовуємо десяткову систему числення попередницею якої є індуська десяткова система, що виникла приблизно в XII-му столітті нашої ери. Відомий французький математик Лаплас (1749-1827) висловив своє захоплення позиційним принципом і десятковою системою у таких словах: "Думка висловлювати всі числа дев'ятьма знаками, надаючи їм, крім значення за формою, ще значення за місцем, настільки проста, що саме через цю простоту важко зрозуміти, наскільки вона дивовижна".

У сучасній науці з розвитком комп'ютерної техніки на перші ролі вийшла двійкова система числення. Її зачатки спостерігаються у багатьох народів. Наприклад, у стародавніх єгиптян широке поширення одержали методи множення і ділення, засновані на принципі подвоєння. Винахід двійкового способу нумерації приписують китайському імператору Фо Гі, життя якого відноситься до 4-го тисячоліття до нової ери. Виявляється, до відкриття двійкової системи числення були причетні декілька математиків, зокрема, Фібоначчі. Але автор двійкової арифметики в історії науки достеменно відомий: це німецький математик Лейбніц (1646-1716), який в 1697 р. розробив правила двійкової арифметики.

2 СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ, ЩО ЗАСТОСОВУЮТЬСЯ В КОМП’ЮТЕРАХ

В області сучасних комп'ютерів проявився великий інтерес до способів подання чисел та комп'ютерної арифметики. Вся справа в тому, що **класична двійкова система числення має ряд принципових недоліків**, головними з яких є: проблема представлення від'ємних чисел і "нульова" надмірність класичного двійкового способу представлення чисел. Особливо неприємний другий недолік. "Нульова" надмірність двійкового представлення означає, що в системі числення відсутній механізм виявлення помилок, які, на жаль, неминуче виникають в комп'ютерних системах під впливом зовнішніх і внутрішніх факторів. В умовах, коли людство все більше стає заручником комп'ютерної революції і все частіше покладається на комп'ютер при вирішенні складних завдань управління ракетами, літаками, атомними реакторами, питання про ефективні механізми виявлення помилок висувається на передній план. Проте не всі комп'ютери, засновані на двійковій системі числення, не завжди ефективно вирішують цю проблему.

Будь-яка інформація (числа, команди, алфавітно-цифрові записи і т. ін.) подається в комп'ютері у вигляді двійкових кодів. Окремі елементи двійкового коду, що набувають значення 0 чи 1, називають розрядами чи **бітами**. Мінімальною одиницею інформації, оброблюваною в сучасному комп'ютері, є **байт**, що складається з восьми двійкових розрядів (бітів). Кожен байт, розміщений у пам'яті комп'ютера, має свою адресу, що визначає його місцезнаходження і задається відповідним кодом.

У сучасних комп'ютерах застосовують дві форми подання чисел: з фіксованою точкою (комою) і з плаваючою точкою (комою).

У числової інформації в персональних комп'ютерах є такі характеристики:

1. Система числення - двійкова, десяткова та інші;
2. Вигляд числа – дійсні, комплексні та масиви;
3. Тип числа – змішані, комплексні цілі та дробові;
4. Форма представлення числа (місце розташування коми) – з природною (змінною), з фіксованою та з плаваючою комами;
5. Розрядна сітка та формат числа;
6. Діапазон – точність подання числа;
7. Спосіб кодування від'ємних чисел – прямий , обернений чи доповняльний код;
8. Алгоритм виконання арифметичних операцій.

Система числення - це сукупність прийомів та правил для запису чисел цифровими знаками. Запис числа в деякій системі числення часто називають **кодом числа.**

Елементи (символи) алфавіту, які використовуються для запису чисел в деякій системі числення, називають **цифрами.** Кожній цифрі даного числа однозначно співставляється її **кількісний (числовий) еквівалент**.

Розрізняють позиційні та непозиційні системи числення.

Непозиційна система числення - це система, для якої значення символу, тобто цифри, не залежить від його положення в числі. До таких систем належать римська система, в якій, наприклад, символ V завжди означає п'ять незалежно від місця його появи в запису числа. Є й інші сучасні непозиційні системи.

Позиційна система числення - це система, в якій значення кожної цифри залежить від її числового еквіваленту та від її місця (позиції) в числі, тобто один символ (цифра) може приймати різні значення.

Найбільш відомою позиційною системою числення є десяткова система числення. Наприклад, в десятковому числі 555 перша цифра праворуч означає 5 одиниць, сусідня з нею - 5 десятків, а крайня ліва - 5 сотень.

В зв'язку з тим, що в цифрових автоматах (комп'ютерах) в основному використовуються позиційні системи числення, то надалі будемо розглядати лише такі системи.

Будь-яка позиційна системи числення характеризується основою.

Основа або базис *q* природньої позиційної системи числення - це кількість знаків або символів, використовуваних для зображення числа в даній системі.

Тому, можлива безліч позиційних систем, оскільки за основу можна прийняти будь - яке число, утворюючи нову систему числення (СЧ).

Коли ми представляємо деяке число в позиційній СЧ, ми розташовуємо відповідні цифри числа по окремих потрібних позиціях, які називають **розрядами числа** в даній позиційній СЧ. Кількість розрядів у запису числа називається **розрядністю числа** і співпадає з його **довжиною**.

У позиційній СЧ правильною є рівність:

$$A_{(q)} = \sum_{i=-m}^{i=n} a_i q^i = a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \ldots + a_1 q^1 + a_0 q^0 + a_{-1} q^{-1} + \ldots + a_{-m} q^{-m}, \qquad (1)$$

де *A(q)* - довільне число, записане в СЧ з основою *q*; a_i - коефіцієнти ряду, тобто цифри числа; *n, m* - кількість цілих та дробових розрядів відповідно.

Наприклад, згідно (1):

$\mathbf{1961{,}32_{10} = 1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2}}$,

$\mathbf{124{,}537_8 = 1 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^\circ + 5 \cdot 8^{-1} + 3 \cdot 8^{-2} + 7 \cdot 8^{-3}}$,

$\mathbf{1001{,}1101_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4}}$.

Номери розрядів в позиційній СЧ відраховуються в цілій частині ліворуч від коми, а в дробовій - праворуч від коми. Причому, нумерація розрядів починається з 0.

Величина основи позиційної СЧ визначає її назву: для десяткової системи це буде 10, для вісімкової - 8, для двійкової - 2 і т.д. Як вже зазначалось, замість назви системи числення використовують термін "**код числа**". Наприклад, під поняттям "**двійковий код**" мається на увазі число, представлене в двійковій системі числення, під поняттям "**десятковий код**" - в десятковій системі числення і т.д.

Для запису числа у десятковій системі використовуються 10 різних цифр від 0 до 9:

a_{10} = (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9),

у *шістнадцятковій* - 16:

a_{16} = (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F),

де $A = 10$, $B = 11$, $C = 12$, $D = 13$, $E = 14$, $F = 15$,

у *вісімковій* - 8:

a_8= (0,1,2,3,4,5,6,7),

у *двійковій* - 2:

a_2 = (0,1).

Приклади представлення чисел в різних системах числення:

- $10_{10} = 1010_2 = 12_8 = A_{16}$;
- $16_{10} = 10000_2 = 20_8 = 10_{16}$;
- $255_{10} = 11111111_2 = 377_8 = FF_{16}$.

Кількість тригерів, тобто двійкових розрядів у регістрі або комірці пам'яті визначає **довжину слова**, характерну для даного комп'ютера, а сукупність цих двійкових розрядів називається **розрядною сіткою**. Номер розряду такої сітки, відведеної для зображення цілого числа у двійковій СЧ, співпадає з відповідним показником степеня двійки.

Таким чином, **довжина числа** - це кількість позицій (або розрядів) у запису числа. Для різних СЧ характерною є різна довжина розрядної сітки, необхідна для запису одного числа. Наприклад, $96_{10} = 140_8 = 1100000_2$, тобто чим меншою є основа системи числення, тим більшою є довжина числа.

У будь-яких цифрових автоматах довжина розрядної сітки обраної СЧ фіксована, що принципово обмежує точність та діапазон представлення чисел.

Діапазон представлення чисел в заданій системі числення - це інтервал числової вісі між максимальним та мінімальним числами, значення яких, як бачимо, залежить від довжини розрядної сітки.

Вага розряду P_i числа в позиційній системі числення - це відношення $P_i = q^i / q^0 = q^i$, де i - номер розряду справа наліво, а q^0 - перший розряд: його номер дорівнює 0, а значення дорівнює 1.

Якщо в даному розряді накопичилось значення одиниць рівне або більше q, то повинна відбуватись передача одиниці в сусідній старший розряд. При додаванні чисел, представлених в будь-якій позиційній системі числення, такі передачі інформації називають **переносами**, а при відніманні – **займами.**

При виборі основи *q* цих систем враховують такі показники:

1) наявність фізичних елементів для зображення цифр системи у вигляді одного з *q* станів, наприклад, різниці напруг. Зменшення кількості станів спрощує фізичний елемент, тому найбільш прийнятною є двійкова система;

2) економічність системи числення. Система з великою основою *q* забезпечує представлення певного числа меншою кількістю розрядів. Однак при цьому ускладнюється побудова фізичного елементу з великою кількістю станів. Найбільш економічною є система з основою q = 2,73... ≈ 3. Двійкова система по економічності поступається трійковій на 5,8%, проте має більш надійні фізичні елементи. Крім того, для запам'ятовування цифр трійкової системи 0,1,2 використовують два двійкових фізичних елементи. З цього випливає, що найефективнішою є двійкова система числення.

3) трудомісткість та швидкодія виконання арифметичних операцій. Чим менша основа *q,* тим менше цифр приймають участь у обчисленні даних і тим вища швидкодія комп'ютера. Наприклад, швидкодія машини в двійковій системі перевищує швидкодію в трійковій на 26,2%, а в десятковій — в 2,7 рази.

4) наявність формального математичного апарату для аналізу та синтезу цифрових схем. Таким апаратом для двійкових елементів є булєва алгебра.

Таким чином, з перерахованих показників видно, що найприйнятнішою для застосування в комп'ютерах є однорідна позиційна двійкова система числення.

3 ФОРМАЛЬНІ ПРАВИЛА ДВІЙКОВОЇ АРИФМЕТИКИ

В загальному випадку процедури **додавання та віднімання** двох чисел A + B = C в будь-якій позиційній системі числення **починаються з молодших розрядів.**

Код суми кожного *i*-того розряду c_i одержується в результаті додавання $a_i + b_i + 1$, де одиниця відповідає переносу з молодшого (*i* - 1) - го розряду в *i* -тий, якщо в молодшому розряді код суми вийшов більше або рівним основі системи числення.

Код різниці кожного *i* -того розряду одержується в результаті віднімання $a_i - b_i - 1$, де одиниця відповідає займу, якщо він був, у молодші розряди величини, рівної основі системи числення.

Додавання двох чисел виконується порозрядно, починаючи з молодшого розряду. В кожному розряді виконується додавання двох цифр доданків та одиниці переносу з сусіднього молодшого розряду:

0 + 0 = 0

0 + 1 = 1

1 + 0 = 1

1 + 1 = 10 *і здійснюється перенос 1 в старший сусідній розряд.*

Наприклад:

$$\begin{array}{r} 0101_2 = 5_{10} \\ +\underline{0011_2 = 3_{10}} \\ 1000_2 = 8_{10}. \end{array}$$

Віднімання також проводиться порозрядно, починаючи з молодшого розряду. При відніманні в даному розряді з нуля одиниці необхідно зайняти одиницю з сусіднього старшого розряду, яка рівна двом одиницям даного розряду:

0 - 0 = 0;

1 - 0 = 1;

1 - 1 = 0;

0 - 1 =1 *після займу одиниці з сусіднього старшого розряду.*

Наприклад:

$$\begin{array}{r} 0110_2 = 6_{10} \\ \underline{-0011_2 = 3_{10}} \\ 0011_2 = 3_{10} \end{array}$$

Множення двійкових чисел проводиться шляхом утворення проміжних (часткових) добутків та наступного їх додавання. При додаванні проміжних добутків кожен наступний добуток зсувається на 1 розряд ліворуч. Проміжні порозрядні добутки формуються за наступними правилами:

0 x 0 = 0

1 x 0 = 0

1 x 1 = 1

0 x 1 = 0

$$\begin{array}{r} 011 \\ \underline{11} \\ 011 \\ \underline{+011} \\ 1001 \end{array}$$

5_{10} x 3_{10} = 15_{10}

Ділення чисел в двійковій системі відбувається за правилами множення та віднімання.

Приклад

110: 11 = 10 $6_{10} : 3_{10} = 2_{10}$

-11

00

-00

0

Крім арифметичних операцій у цифрових автоматах реалізуються також логічні операції, які розглядались раніше.

Крім цих операцій у цифрових автоматах, комп'ютерах, виконується ще одна операція над двійковими числами - це **зсув** числа по розрядній сітці ліворуч або праворуч.

В комп'ютерах часто використовується циклічний зсув, при виконанні якого розрядна сітка, відведена для операнду, представляється замкненою у кільце. Тоді при зсуві ліворуч вміст старшого розряду потрапляє у молодший розряд операнду, а при зсуві праворуч – навпаки.

4 ПЕРЕВЕДЕННЯ ЧИСЕЛ З ОДНІЄЇ ПОЗИЦІЙНОЇ СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ В ІНШУ

Для того, **щоб перейти з двійкової системи в вісімкову або шістнадцяткову,** необхідно, рухаючись від коми ліворуч та праворуч, розбити на групи по 3 або 4 розряди відповідно, доповнюючи при потребі нулями (0) крайню ліву або крайню праву групи.

1010000111,10111 (2) = 1207,56 (8)

$$\underbrace{001}_{1}\ \underbrace{010}_{2}\ \underbrace{000}_{0}\ \underbrace{111}_{7}\ ,\ \underbrace{101}_{5}\ \underbrace{110}_{6}$$

1010000111,10111 (2) = 287, B8 (16)

$$\underbrace{0010}_{2}\ \underbrace{1000}_{8}\ \underbrace{0111}_{7}\ ,\ \underbrace{1011}_{11}\ \underbrace{1000}_{8}$$

Для того, щоб перейти з вісімкової або шістнадцяткової системи числення в двійкову, необхідно здійснити переведення кожноївісімкової або шістнадцяткової цифри в двійкову систему числення.

75621,3 (8) = 111101110010001,011 (2)

$$\overbrace{111}^{7}\ \overbrace{101}^{5}\ \overbrace{110}^{6}\ \overbrace{010}^{2}\ \overbrace{001}^{1}\ ,\ \overbrace{011}^{3}$$

A3ED,6 (16) = 1010001111101101,011 (2)

$$\overbrace{1010}^{A}\ \overbrace{0011}^{3}\ \overbrace{1110}^{E}\ \overbrace{1101}^{D}\ ,\ \overbrace{0110}^{6}$$

Переведення цілих десяткових чисел у двійкову, вісімкову та шістнадцяткову системи здійснюється послідовним діленням на основу тієї системи, у яку перекладається число, та записом залишків ділення в зворотньому напрямку.

759 (10) = 1011110111 (2)

759	/	1
379	/	1
189	/	1
94	/	0
47	/	1
23	/	1
11	/	1
5	/	1
2	/	0
1		

759 (10) = 1367 (8)

759	/	7
94	/	6
11	/	3
1		

759 (10) = 2F7 (16)

759	/	7
47	/	15
2		

Для переведення правильного десяткового дробу цей дріб необхідно послідовно перемножити на основу нової системи. При цьому перемножуються лише дробові частини, а у відповідний код записуються одержані після множення цілі частини у прямому напрямку.

0,129 (10) = 0,00100001… (2)

	129 x 2
0	258
0	516
1	032
0	064
0	128
0	256
0	512
1	024
…	

0,129 (10) = 0,1020304 (8)

	129 x 8
1	032
0	256
2	048
0	384
3	072
0	576
4	608
…	

0,129 (10) = 0,2106 (16)

	129 x16
2	064
1	024
0	384
6	144
…	

Для переведення двійкового, вісімкового та шістнадцяткового коду в десяткову систему числення необхідно скласти поліном за основою тієї системи, із якої здійснюється переведення числа.

$$10011010101{,}0110(2) = 1237{,}375\ (10)$$

$$10011010101{,}0110(2) = 1\cdot 2^{10} + 0\cdot 2^{9} + 0\cdot 2^{8} + 1\cdot 2^{7} + 1\cdot 2^{6} + 0\cdot 2^{5} + 1\cdot 2^{4} + 0\cdot 2^{3} + 1\cdot 2^{2} + 0\cdot 2^{1} +$$
$$+1\cdot 2^{0} + 0\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-2} + 1\cdot 2^{-3} + 0\cdot 2^{-4} = 1024 + 0 + 0 + 128 + 64 + 0 + 16 + 0 + 4 + 0 + 1 + 0{,}25 + 0{,}125 =$$
$$= 1237{,}375$$

$$3764{,}235(8) = 2036{,}306\ (10)$$

$$3764{,}235(8) = 3\cdot 8^{3} + 7\cdot 8^{2} + 6\cdot 8^{1} + 4\cdot 8^{0} + 2\cdot 8^{-1} + 3\cdot 8^{-2} + 5\cdot 8^{-3} = 3\cdot 512 + 7\cdot 64 + 6\cdot 8 + 4\cdot 1 + 0{,}25 +$$
$$+0{,}047 + 0{,}009 = 2036{,}306$$

$$A4E{,}12\ (16) = 2638{,}0703(10)$$

$$A4E{,}12(16) = 10\cdot 16^{2} + 4\cdot 16^{1} + 14\cdot 16^{0} + 1\cdot 16^{-1} + 2\cdot 16^{-2} = 10\cdot 256 + 4\cdot 16 + 14\cdot 1 + 0{,}0625 + 0{,}0078 =$$
$$= 2638{,}0703$$

5 ПОДАННЯ ДАНИХ В КОМП’ЮТЕРІ

ОСНОВНІ ВИЗНАЧЕННЯ

Двійковий розряд (0 або 1) призначений для зберігання значення однієї цифри двійкового числа називається бітом. Група сусідніх двійкових розрядів називається складом. Група з 8 сусідніх двійкових розрядів, тобто 8-бітний склад, називається байтом.

Машинне слово - склад, що може бути зчитаний або записаний в оперативну пам'ять комп’ютера за одне звертання до неї.
У більшості сучасних комп’ютерів використовуються наступні машинні слова:

- *байт* = 8 біт;
- *слово* = 2 байти = 16 біт;
- *подвійне слово* = 2 слова = 4 байти = 32 біта;
- зчетверене слово = два подвійних слова = 4 слова = 8 байтів = 64 біта.

«Апаратно підтримувані» означає те, що послідовності біт об’єднані у *машинні слова* зазначеної вище довжини, можуть брати участь у якості *операндів* в операціях, що виконуються комп’ютером.

Об’єднання послідовності біт/байт у машинні слова пов’язане з такими поняттями, як *ширина розрядної сітки* і *діапазон подання*.

Під *розрядною сіткою комп’ютера* розуміють кількість розрядів, необхідних для розміщення в осередках оперативної пам'яті повного машинного слова.

Для кожного типу комп’ютера розрядна сітка має певно визначену *кількість розрядів (ширину)* і є однієї з найважливіших характеристик комп’ютера. *Ширина розрядної сітки* співпадає з розрядністю одного з вище розглянутих машинних слів і її фіксована ширина накладає обмеження на діапазон подання чисел, що обумовлює особливості комп’ютерної арифметики такі, як *похибки подання чисел*, *поняття машинного нуля*, *переповнення розрядної сітки*, тощо.

Під машинним поданням числа розуміють спосіб (структуру, порядок) розміщення бітів числа в розрядній сітці комп’ютера.

Діапазоном подання чисел $D = \frac{|X|_{max}}{|X|_{min}}$, називають відношення максимально та мінімально можливих для даного подання абсолютних значень чисел.

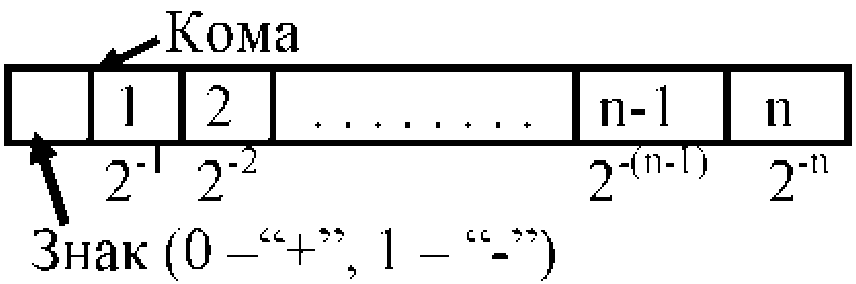
Число, абсолютне значення якого менше мінімального машинного слова для даного подання називають машинним нулем. *Таке число буде записано в розрядну сітку комп’ютера у вигляді 0, тому що для його подання не вистачає довжини розрядної сітки, хоча воно насправді і не дорівнює 0.*

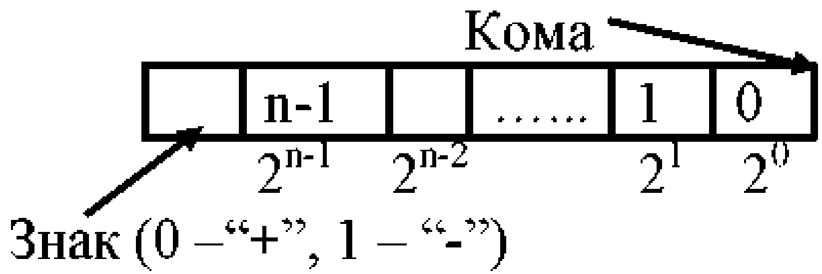
Якщо число, отримане в результаті обчислень перевищує за абсолютним значенням максимальне машинне слово для заданого подання, то відбувається так називане переповнення розрядної сітки комп’ютера.

ПОДАННЯ ДВІЙКОВИХ ЧИСЕЛ

Існують три форми подання чисел: *природна*, *з фіксованою комою*, *із плаваючою комою*.

ПОДАННЯ ЧИСЕЛ У КОМП’ЮТЕРАХ З ФІКСОВАНОЮ КОМОЮ





При даній формі подання положення коми в розрядній сітці фіксується схемо технічно, тобто апаратними засобами.
Якщо кома фіксується перед старшим (лівим) розрядом, то числа в комп’ютерах представляються, як *правильні дроби*; якщо після молодшого (правого) - *як цілі числа*.

ПОДАННЯ ДВІЙКОВИХ ЧИСЕЛ

Зауваження. Від положення коми залежить *логічна інтерпретація типів* даних програми й результатів її роботи, яка важлива для розробника/користувача й він може їх трактувати або як цілі числа, або як правильні дроби.

Максимальне по абсолютній величині машинне число (тобто без урахування знака) при фіксації коми після старшого розряду дорівнює $|X|_{max}$= 0,1...1...1=1-2^{-n}, а мінімальне $|X|_{min}$= 0,0...0...01=2^{-n}, де n - кількість числових розрядів у розрядній сітці.

Значення всіх можливих величин чисел визначається нерівністю

$$2^{-n}<=|X|<=1-2^{-n}.$$

Для чисел представлених у формі з фіксацією коми після молодшого розряду $|X|_{max}$= 1...1...1=2^{n}-1, $|X|_{min}$= 0...0...01=1 і 1<=|X|<= 2^{n}-1.

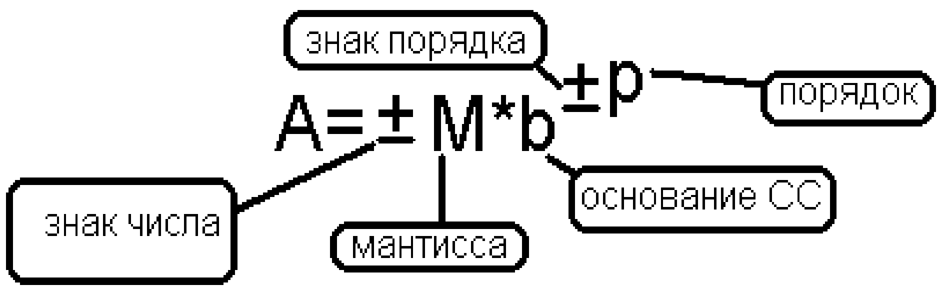
Діапазон подання чисел з фіксованою комою невеликий і дорівнює

$$D=\frac{|X|_{max}}{|X|_{min}}=\frac{1-2^{-n}}{2^{-n}}=\frac{2^{n}-1}{1}=2^{n}-1\approx 2^{-n}$$

ПОДАННЯ ЧИСЕЛ У КОМП'ЮТЕРАХ ІЗ ПЛАВАЮЧОЮ КОМОЮ

Форма із плаваючою комою застосовується для *розширення діапазону* й зменшення *відносної похибки подання чисел* в комп'ютерах.

Число зображується у вигляді добутку деякого ступеня основи системи числення й цифрової частини, що має як правило, вид правильного дробу:



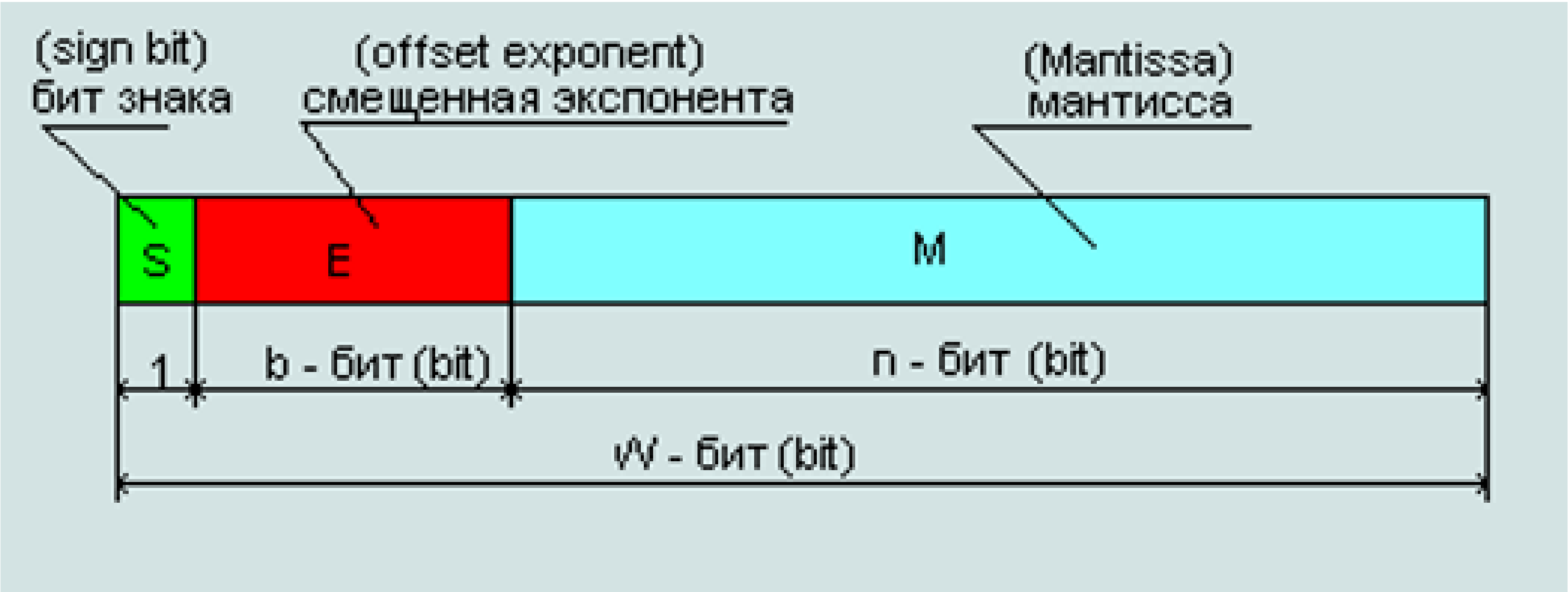
де М - мантиса числа

$b^{\pm p}$ - характеристика числа А;

b - основа системи числення;

р - ціле, яке називається порядком числа X.

ФОРМАЛЬНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ЧИСЕЛ ІЗ ПЛАВАЮЧОЮ КОМОЮ



S - біт знака, якщо S=0 - позитивне число; S=1 - від'ємне число
E - зміщена експонента двійкового нормалізованого числа з плаваючою комою, тобто. $(2^{(b-1)} -1)$ - задане зміщення експоненти
M - залишок мантиси двійкового нормалізованого числа з плаваючою комою

ФОРМАЛЬНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ЧИСЕЛ

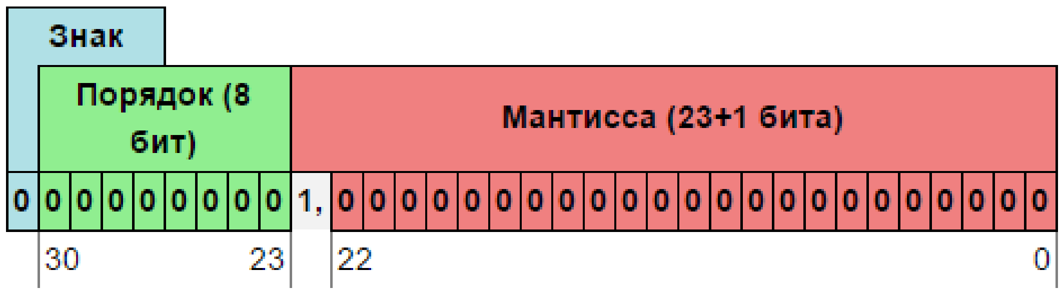
32 біта

64 біта

Подання чисел у розрядній сітці

Число одинарної точності (Single precision)

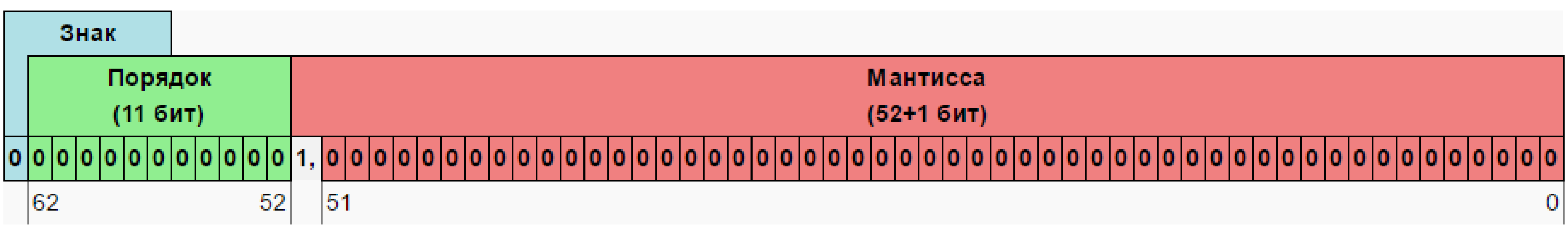
(комп'ютерний формат уявлення чисел, що займає в пам'яті одне машинне слово (32 біти))



Порядок записаний зі зрушенням 127

Число подвійної точності (Double precision)

(комп'ютерний формат уявлення чисел, що займає в пам'яті два машинних слова (34 біти))



Порядок записаний зі зрушенням 1023

Приведемо десяткове число 888,888 в експоненціальну форму з нормалізованою мантисою:

$$888{,}888 = 0{,}888888 \times 10^3$$

Нормализована мантиса m = 0,888888, порядок n = 3.

Число в формі з плаваючою комою займає в пам'яті комп'ютера чотири байта *(число звичайної точності* або вісім байтів *(число подвійної точності).*

При запису числа з плаваючою комою виділяють розряди для зберігання знака мантиси, знака порядку, порядку і мантиси.

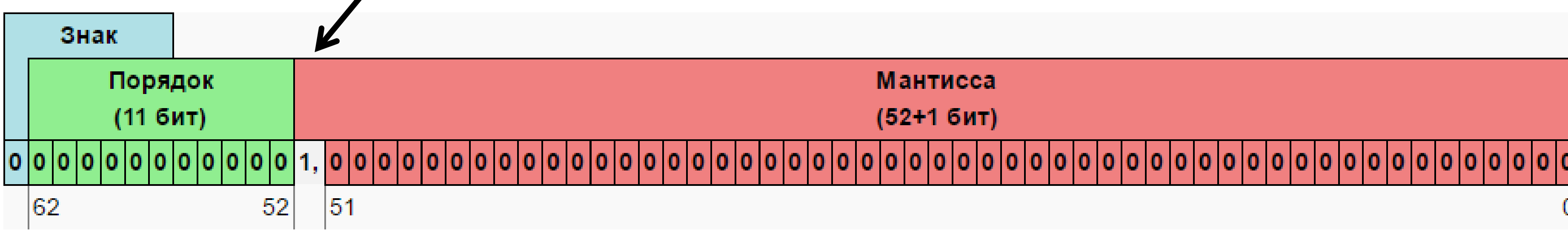
Діапазон зміни чисел визначається кількістю розрядів, відведених для зберігання порядку числа, а точність (кількість значущих цифр) визначається кількістю розрядів, відведених для зберігання мантиси.

АЛГОРИТМ ЗАПИСУ ЧИСЛА У КОМП’ЮТЕРАХ ІЗ ПЛАВАЮЧОЮ КОМОЮ

1. Перевести модуль числа в двійкову систему числення
2. Нормалізувати двійкове число
3. Додати до порядку зміщення та перевести зміщений порядок у двійкову систему числення
4. Враховуючи знак заданого числа (0 - позитивне; 1 - негативне), виписати його подання в старший розряд числа

Приклад. Перетворити число **-312,312510** представлене у пам'яті комп'ютера у величині типу Double

1. Двійковий запис числа **$-312{,}312510_{10}$ = $-100111000{,}0101_2$**
2. Число за модулем **$100111000{,}0101_2$**
3. Нормалізуємо двійкове число **100111000,0101 = 1,001110000101*2^8**
4. Визначимо зміщений порядок (порядок - **11** разрядів для типу ***Double***)
   Зсув **1023_{10}** = 1111111111_2
   $8_{10} + 1023_{10} = 1031_{10} = 10000000111_2$
5. Враховуючи знак заданого числа 'негативне" записати **1** в 63 розряд.
6. Записати число **1,001110000101 в мантису**



1 10000000111 0011100001010000000000000000000000000000000000000000

Формати, використовувані в процесорах (арифметичних співпроцесорах) фірми Intel:

- *короткий*: біт 31 — знак мантиси, біти 30 - 23 — 8-бітна експонента + 127, біти 22 - 0 — 23-бітна мантиса без першої цифри;
- *довгий*: біт 63 — знак мантиси, біти 62 - 52 — 11-бітна експонента + 1024, біти 51 - 0 — 52-бітна мантиса без першої цифри;
- *розширений:* біт 79 — знак мантиси, біти 78 - 64 — 15-бітна експонента + 16 383, біти 63 - 0 — 64-бітна мантиса з першою цифрою (тобто біт 63 дорівнює 1).

Арифметичний співпроцесор виконує всі обчислення в *80-бітному розширеному форматі*, а 32- і 64-бітні числа використовуються для обміну даними з основним процесором і пам'яттю.

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ