Приклади виконання обов'язкових завдань за темою 6 (4.2)

Завдання 4. Виконати вказані дії. Наведено два приклади.

ПРИКЛАД 1

$U=(x-2y)^{lnz}$, знайти $dU\ (1;-1;e^2\ )$, тобто знайти повний диференціал ФБЗ $U=(x-2y)^{lnz}$ у точці з координатами $(1;-1;e^2\ )$.

Розв'язання завдання 4, приклад 1

$$dU=U'_x dx+U'_y dy+U'_z dz$$

Відома формула для визначення повного диференціала, конкретно для функції трьох змінних.

$$U'_x=\ln z\cdot(x-2y)^{\ln z-1}\Big|_{(1;-1;e^2)}=$$
$$=2\cdot(1+2)^{2-1}=6;$$

Знаходимо частинні похідні і обчислюємо їх у заданій точці.
Враховуємо, що $ln\ e^2=2$.

$$U'_y=\ln z\cdot(x-2y)^{\ln z-1}\cdot(-2)\Big|_{(1;-1;e^2)}=$$
$$=2\cdot(1+2)^{2-1}\cdot(-2)=-12;$$

$$U'_z=(x-2y)^{\ln z}\cdot\ln(x-2y)\cdot\frac{1}{z}\Big|_{(1;-1;e^2)}=$$
$$=(1+2)^2\ ln\ (1+2)\ /\ e^2=ln3^9\ /\ e^2$$

$$dU\Big|_{(1;-1;e^2)}=6dx-12dy+\frac{\ln 3^9}{e^2}dz$$

Повний диференціал у заданій точці знайдено.

❢ - Повний диференціал не є числом, це лінійна форма змінних *dx, dy, dz*.

ПРИКЛАД 2

$z=arcsin\frac{x}{y}$. Показати, що $\frac{x}{y}\cdot z'_x+z'_y=0$.

Розв'язання завдання 4, приклад 2

$$z'_x=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}}\cdot\frac{1}{y};\quad z'_y=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}}\cdot\frac{-x}{y^2}.$$

Знаходимо частинні похідні для підстановки у заданий вираз.

$$\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}}\cdot\frac{1}{y}+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}}\cdot\frac{-x}{y^2}=0$$

Зробимо підстановку. Що і треба було показати.

Завдання 5. Дослідити функцію на безумовний (локальний) екстремум. Наведено три приклади.

ПРИКЛАД 1

$z=2x^3+xy^2+5x^2+y^2$

Дослідити на екстремум функцію двох змінних $z=z(x,y)$.

Розв'язання завдання 5, приклад 1

I етап: визначення точок можливого екстремуму - критичних, у нашому випадку тільки стаціонарних точок.

$\begin{cases} z'_x=0 \\ z'_y=0 \end{cases}$; $\begin{cases} 6x^2+y^2+10x=0 \\ 2xy+2y=0 \end{cases}$;

За необхідною умовою існування екстремуму знаходимо частинні похідні першого порядку і дорівнюємо їх нулю.

$\begin{cases} 2x(3x+5)=-y^2 \\ 2y(x+1)=0 \end{cases}$;

Розв'язуємо одержану систему рівнянь. З другого рівняння або y=0, або x=-1. Підставляючи послідовно ці значення в перше рівняння, одержимо чотири варіанти рішення системи.

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-5/3 \\ y=0 \end{cases}$;

$\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$

$M_1(0;0)$; $M_2(-5/3;0)$; $M_3(-1;2)$; $M_4(-1;-2)$.

Тобто чотири стаціонарних точки.

II етап: перевірка виконання достатніх умов існування екстремуму в знайдених на *I* етапі стаціонарних точках.

$z''_{xx}=12x+10$;
$z''_{xy}=2y$;
$z''_{yy}=2x+2$.

Знайдемо частинні похідні другого порядку. Далі для перевірки знака d^2z у кожній стаціонарній точці обчислимо значення других похідних.

$\underline{M_1(0;0)}$

$z''_{xx}=10$; $z''_{xy}=0$; $z''_{yy}=2$,

$d^2z(M_1)=10\cdot dx^2+2\cdot dy^2>0$,

$\underline{z_{min}=z(0;0)=0}$.

Другий диференціал в точці M_1 має вид суми невід'ємних доданків, тобто є невід'ємним, виконується достатня умова існування локального мінімуму.

<u>Зауваження.</u> Можна використати і критерій Сильвестра, що в даному випадку буде виглядати так: $\Delta_1=10>0$; $\Delta_2=\begin{vmatrix}10 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=20>0$; усі головні діагональні мінори невід'ємні, $d^2z(M_1)>0$, у точці $M_1(0,0)$ функція має мінімум, що дорівнює 0.

$\underline{M_2(-5/3;0)}$

$z''_{xx}=-10$; $z''_{xy}=0$; $z''_{yy}=-4/3$,

$d^2z(M_2)=-20\cdot dx^2-(4/3)\cdot dy^2<0$,

$\underline{z_{max}=z(-5/3;0)}=2\cdot(-5/3)^3+5\cdot(-5/3)^2$

$\underline{z_{max}=125/27}$.

Очевидно, другий диференціал у точці M_2 від'ємний, виконується достатня умова існування локального максимуму.

$\underline{M_3(-1;2)}$

$z''_{xx}=-2$; $z''_{xy}=4$; $z''_{yy}=0$.

$\Delta_1=-2<0$; $\Delta_2=\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 4 & 0\end{vmatrix}_{M_3}=-16<0$

У точці M_3 для визначення знаку d^2z запишемо головні діагональні мінори. Другий диференціал в точці по правилу Сильвестра-Якобі не визначений по знаку, екстремум не існує.

$\underline{M_4\ (-1;-2)}$

$z''_{xx}=-2;\ z''_{xy}=-4;\ z''_{yy}=0.$

$\Delta_1=-2<0;$

$\Delta_2=\begin{vmatrix}-2 & -4\\ -4 & 0\end{vmatrix}\Bigg|_{M_4}=-16<0$

Також, як і у точці M_3, екстремум не існує і в точці M_4.

ПРИКЛАД 2

$u=x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z$

Дослідити на екстремум функцію трьох змінних $u=u(x,y,z)$.

Розв'язання завдання 5, приклад 2

I етап: визначення точок можливого екстремуму - критичних, у нашому випадку тільки стаціонарних точок.

$u_x'=2x+2=0;$

$u_y'=2y+4=0;\ \Rightarrow M(-1;-2;3)$

$u_z'=2z-6=0$

Одержана система має єдине рішення, одна стаціонарна точка.

II етап: перевірка виконання достатньої умови існування екстремуму в точці M

$u_{xx}''=2,\ u_{yy}''=2,\ u_{zz}''=2,$

$u_{xy}''=0,\ u_{xz}''=0,\ \ u_{yz}''=0.$

$d^2u(M)=2(\cdot dx^2+dy^2+dz^2)>0,$

$\underline{u_{min}=u(-1;-2;3)=-14.}$

Знайдемо другі частинні похідні і обчислимо їх значення у точці M. (Зауважимо, що у цієї задачі їх значення не залежать від координат точки).

Отже, другий диференціал є знакододатна квадратична форма. Тому у точці $M(-1,-2,3)$ функція має мінімум.

Зауваження. Можна використати і критерій Сильвестра, що у даному випадку буде мати такий вигляд:

$\Delta_1=2>0;\ \ \Delta_2=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4>0;\ \ \Delta_3=\begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=8>0$, всі головні діагональні мінори додатні, $d^2u(M)>0$, в точці $M(-1,-2,3)$ функція має мінімум.

ПРИКЛАД 3

$z=e^{3y}(x^2+4x+4+y^2)$

Дослідити на екстремум функцію двох змінних.

Розв'язання завдання 5, приклад 3

$z_x'=e^{3y}(2x+4)=0;$

$z_y'=3e^{3y}(x^2+4x+4+y^2)+e^{3y}\cdot 2y=0;$

I етап: Із системи, що висловлює необхідну умову існування екстремуму, знаходимо стаціонарні точки.

$\begin{cases} x=-2; \\ 3y^2+2y=0 \end{cases}$

Так як $e^{3y} \neq 0$, скорочуємо на нього обидва рівняння. Одержаний з першого рівняння x підставимо у друге рівняння, одержимо два значення y.

$M_1(-2;\ 0)$; $M_2(-2;\ -2/3)$;

Отже, маємо дві стаціонарні точки.

$z''_{xx}=2e^{3y}$; $z''_{xy}=3e^{3y}(2x+4)$;

$z''_{yy}=3e^{3y}(3(x^2+4x+4+y^2)+2y)+e^{3y}(6y+2)$.

II етап: знаходимо похідні другого порядку.

$\underline{M_1(-2;\ 0);}$

$z''_{xx}=2$; $z''_{xy}=0$; $z''_{yy}=2$;

$d^2z(M_1)=2\cdot dx^2+2\cdot dy^2>0$,

$\underline{z_{min}=z(-2;0)=0.}$

Другий диференціал є знакододатна квадратична форма. Тому у точці $M_1(-2;\ 0)$ функція має мінімум.

$\underline{M_2(-2;\ -2/3);}$

$z''_{xx}=2e^{-2}$; $z''_{xy}=0$; $z''_{yy}=-2e^{-2}$;

$\Delta_1=2e^{-2}>0$; $\Delta_2=\begin{vmatrix} 2e^{-2} & 0 \\ 0 & -2e^{-2} \end{vmatrix}=-4e^{-4}<0$;

по правилу Сильвестра-Якобі другий диференціал не визначений по знаку у точці M_2, тому у точці M_2 екстремуму нема.

Завдання 6.

Знайти умовний екстремум функції $z=ax^2+by^2$ при $cx+dy=1$ двома способами:

а) за допомогою функції Лагранжа ;

б) зведенням задачі до задачі про безумовний екстремум.

ПРИКЛАД

№	*a*	*b*	*c*	*d*	*k*
*	2	1	5	-3	7

$z=2x^2+y^2$ при $5x-3y=1$.

Розв’язання завдання 6

$L=2x^2+y^2+\lambda\,(5x-3y-1)$;

$L'_x=4x+5\lambda=0$;
$L'_y=2y-3\lambda=0$;
$L'_\lambda=5x-3y-1=0$;

а) Складемо функцію Лагранжа і запишемо систему необхідних умов існування екстремуму.

$x=-5\lambda/4$;
$y=3\lambda/2$;
$-25\lambda/4-9\lambda/2-1=0$; $\lambda=-4/43$

Рішення системи можна знайти, наприклад, одержавши з перших двох рівнянь невідомі x і y через λ, далі підставив їх в останнє рівняння.

$x=-5\lambda/4=5/43$;
$y=3\lambda/2=-6/43$;
$M(5/43;\ -6/43)$; $\lambda=-4/43$

Стаціонарна точка і відповідний їй параметр λ визначені .

$L''_{xx}=4$; $L''_{yy}=2$; $L''_{xy}=0$;

Для перевірки достатньої умови знай-

$d^2L(M)=4\cdot dx^2+2\,dy^2>0,$
$\Rightarrow min$
$\underline{z_{min}=z(5/43;\ -6/43)=2/43.}$

демо похідні другого порядку. В точці *M* знаходиться мінімум.

$z=2x^2+y^2$
при $5x-3y=1;$

$y=(5x-1)/3;$
$z^*=2x^2+(5x-1)^2/9$

б) Якщо умова зв'язку задана лінійною залежністю, або функцією, з якої неважко одержати одну змінну через інші, то можна звести задачу про умовний екстремум до задачі про безумовний екстремум. Для цього одержимо з умови зв'язку, наприклад, змінну *y* і підставимо у функцію цілі z.

$(z^*)'_x=4x+2\cdot 5(5x-1)/9=0$
$86x=10;\ x=5/43$
$M^*(5/43),$
но $M(5/43;\ -6/43)$

Нова функція z* залежить від однієї змінної, досліджується на безумовний екстремум. Знаходимо одну похідну (по *x*) і дорівнюємо її до нуля. Одержимо єдину стаціонарну точку.

$(z^*)''_{xx}=4>0$
$d^2z^*(M)=4\cdot dx^2>0,\ \Rightarrow\ min$
$\underline{z_{min}=z(5/43;\ -6/43)=86/43^2=2/43.}$

Перевіримо виконання достатньої умови. В знайденій точці знаходиться мінімум.

Завдання 7.

Сумарний прибуток підприємства залежить від витрат двох видів ресурсів *x* і *y* та висловлюється функцією z= *z(x,y).* Знайти витрати ресурсів *x* і *y*, що забезпечує максимальний прибуток підприємства, і знайти цей максимальний прибуток.

ПРИКЛАД

$$z(x,y)=-1600-x^2-3y^2-60x+150y+3xy$$

Розв'язання завдання 7

З точки зору математики треба розв'язати задачу про визначення максимального значення функції двох змінних, тобто знайти значення змінних, при яких функція приймає максимальне значення.

$z'_x=-2x-60+3y=0;$ або $\quad -2x+3y=60; \qquad x=30$
$z'_y=-6y+150+3x=0; \qquad x-2y=-50; \ \Rightarrow \ y=40$
$M(30;\ 40);$

Із системи, що висловлює необхідну умову існування екстремуму, знаходимо стаціонарну точку.

$z''_{xx}=-2;\ z''_{xy}=3;\ z''_{yy}=-6;$ $\Delta_1 = -2 < 0;$ $\Delta_2 = \left.\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}\right\|_M = 12-9>0$ $z_{max} = z(30;40) = -1600-900-4800-$ $-1800+6000+3600=500$	Перевіряємо достатню умову існування екстремуму в одержаній точці. Відповідно правилу Сильвестра-Якобі в точці M знаходиться максимум функції прибутку.

Витрати ресурсів $x=30$ гр.од., $y=40$ гр.од. забезпечать підприємству максимальний прибуток $z_{max}=500$ гр.од.