Невласні інтеграли першого і другого родів

Щоб існував визначений інтеграл, тобто існувала границя інтегральної суми, повинні виконуватися дві умови:

1. Відрізок (інтервал) інтегрування скінченний.	2. Підінтегральна функція $f(x)$ на відрізку інтегрування $[a;b]$ не має розривів другого роду.

Довідка. В точці $x=c$ існує розрив другого роду, якщо хоча б одна з односторонніх границь функції у цій точці нескінченна або не існує.

Наприклад, $f(x) \underset{x \to c \pm 0}{\to} \pm\infty$ (схема класифікації розривів).

На практиці для визначення точки розриву треба знайти точки, що не входять в область допустимих значень, наприклад, ті, у яких знаменник дорівнює нулю.

Якщо не виконується лише одна з умов (<u>але не обидві</u>), визначений інтеграл не існує і вводиться поняття *невласного інтеграла* (НІ).

1. Відрізок (інтервал) інтегрування нескінченний, але підінтегральна функція $f(x)$ на ньому неперервна.	2. Підінтегральна функція $f(x)$ на відрізку інтегрування $[a;b]$ має хоча б один розрив другого роду, але відрізок інтегрування скінченний.
$\Downarrow$	$\Downarrow$
Невласний інтеграл **першого** роду – по нескінченному відрізку (НІ-1)	Невласний інтеграл **другого** роду – від розривної функції (НІ-2)

Невласні інтеграли визначаються як границі, до яких прагнуть відповідні визначені інтеграли при умовах, що записані нижче.

НІ-1

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)dx \qquad (A)$$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{R\to-\infty}\int_R^a f(x)dx \qquad (B)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = (A)+(B)$$

Третій випадок (для НІ і першого і другого роду) зводиться до суми випадків (А) і (В).

НІ-2

$$\int_a^{[b]} f(x)dx = \lim_{\beta\to 0}\int_a^{b-\beta} f(x)dx \qquad (A^1)$$

$$\int_{[a]}^{b} f(x)dx = \lim_{\alpha\to 0}\int_{a+\alpha}^{b} f(x)dx \qquad (B^1)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\beta\to 0}\int_a^{c-\beta} f(x)dx + \lim_{\alpha\to 0}\int_{c+\alpha}^{b} f(x)dx$$

У третьому випадку c – точка розриву. Квадратними дужками відзначені точки розривів підінтегральної функції.

Якщо у правих частинах рівнянь, що визначають невласні інтеграли, всі границі **існують і скінченні**, то невласні інтеграли ***збігаються***, в протилежному випадку ***розбігаються*** (границя не існує або нескінченна).

І це визначення не залежить від роду НІ !

Невласні інтеграли, що ***збігаються,*** володіють всіма властивостями визначених інтегралів.

Розглянемо два способи визначення збіжності/розбіжності невласних інтегралів.

1.

(спосіб визначення збіжності/розбіжності невласних інтегралів)

Питання про збіжність невласних інтегралів можна вирішити безпосереднім обчисленням інтегралу.

Якщо визначити первісну, то можна обчислити визначений інтеграл, потім знайти його границю при поставлених умовах і зробити висновок:

- ✓ якщо при обчисленні невласного інтегралу будь-якого роду одержано *будь-яке число*, то він ***збігається*** (до цього числа);
- ✓ якщо при обчисленні одержана $\pm\infty$ або границя не існує, то невласний інтеграл ***розбігається***.

ПРИКЛАДИ

① $\int\limits_0^{\infty} e^{-x}dx = \lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_0^{R} e^{-x}dx =$

По визначенню невласного інтегралу першого роду.

$= \lim\limits_{R\to\infty}(-e^{-x})\Big|_0^R = \lim\limits_{R\to\infty}(-e^{-R}+e^0) = 1$

Знайдена первісна і підставлені границі інтегрування.

При обчисленні границі первісної врахуємо, що $e^0 = 1$ і $e^{-\infty} = 0$. При обчисленні одержуємо число, значить невласний інтеграл ***збігається***.

② $\int\limits_{[1]}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_{1+\alpha}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2} =$

За визначенням невласного інтегралу другого роду.

$= \lim\limits_{\alpha\to 0}\left(-\frac{1}{x-1}\right)\Bigg|_{1+\alpha}^{2} = \lim\limits_{\alpha\to 0}\left(-1+\frac{1}{\alpha}\right) = \infty$

Враховано, що границя $\left|\frac{1}{0}\right| = \infty$.

При обчисленні границі первісної одержана нескінченість, тому невласний інтеграл ***розбігається.***

2.

(спосіб визначення збіжності/розбіжності невласних інтегралів)

Застосування ознаки порівняння. Не наводячи теореми про ознаку порівняння, обмежимося тільки висновком з неї – практичним способом дослідження невласних інтегралів на збіжність.

Порівнюють підінтегральну функцію з функцією, що визначена заздалегідь для невласних інтегралів першого і другого роду.

Для НІ-1	Для НІ-2
$\boxed{g(x)=\dfrac{C}{x^p}}$	$\boxed{g(x)=\dfrac{C}{(b-x)^p}}$ або $\boxed{\tilde{g}(x)=\dfrac{C}{(x-a)^p}}$

$C-const; p>0$. Про невласні інтеграли від цих функцій відомо:

$\boxed{C\int_a^{\infty}\dfrac{dx}{x^p}=\begin{matrix} p>1, & \textit{збігається} \\ p\le 1, & \textit{розбігається}\end{matrix}}$	$\boxed{C\int_a^{[b]}\dfrac{dx}{(b-x)^p}=\begin{matrix} p<1, & \textit{збігається} \\ p\ge 1, & \textit{розбігається}\end{matrix}}$ аналогічно для $\tilde{g}(x)$

Порівняння відбувається шляхом визначення функції, *еквівалентної* підінтегральній при умовах:

✓ для НІ-1: $\boxed{x\to\infty}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$;

✓ для НІ-2 $\boxed{x\to b}$ (або $x\to a$) – до точки розриву функції, $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$.

ПРИКЛАД

Порівняйте дослідження на збіжність двох інтегралів з однаковими підінтегральними функціями, але різними границями інтегрування.

① $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}\sqrt[3]{x^2-1}}$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^3}\sqrt[3]{x^2-1}} \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{x^{3/2}\cdot x^{2/3}} = \frac{1}{x^{13/6}},$$

виділення головної частини.

Порівнюємо з $g(x)=\frac{C}{x^p}$.

$p=\frac{13}{6}>1 \Rightarrow$ НІ-1 ***збігається***.

② $\int\limits_{[1]}^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}\sqrt[3]{x^2-1}}$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^3}\sqrt[3]{x^2-1}} \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{(x-1)\cdot 2}} =$$

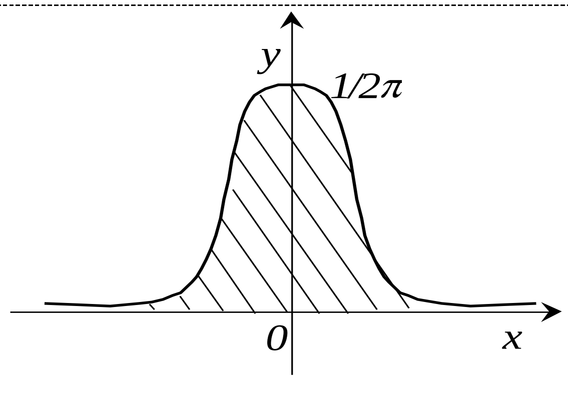
$$=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot(x-1)^{1/3}},$$

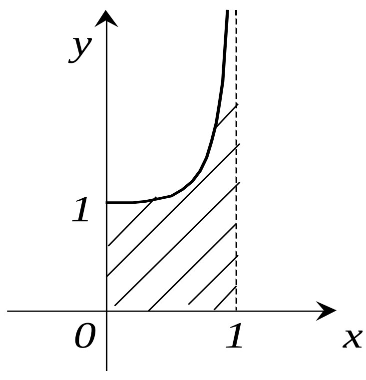
заміна множників, що, не дорівнюють нулю, відповідними числами.

Порівнюємо з $\tilde{g}(x)=\frac{C}{(x-a)^p}$, $a=1$.

$p=\frac{1}{3}<1 \Rightarrow$ НІ-2 ***збігається***.

Застосування невласних інтегралів дозволяє надати сенс такому поняттю, як скінченна площа нескінченної фігури.

<table>
<tr><th>НІ-1</th><th>НІ-2</th></tr>
<tr><td>В теорії ймовірностей і математичній статистці значну роль грає інтеграл Пуассона – Ейлера, причому доказано, що він збігається:
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi}.$$
Це означає, що площа під кривою Гауса: $f(x)=\frac{1}{2\pi}e^{\frac{-x^2}{2}}$ дорівнює 1.</td><td>Розглянемо НІ-2
$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}=-2\sqrt{1-x}\Big|_0^1=2.$$
Не зупиняючись у подробицях на обчисленні, відзначимо, що він збігається, а це значить, що існує скінченна площа 2 кв.од. у фігури, що розташована під кривою на рисунку нижче.</td></tr>
<tr><td>

Крива Гауса</td><td>
</td></tr>
</table>