Навчальна дисципліна:
Дискретна математика

Лектор:

професор Кучук Георгій Анатолійович

E-mail: kuchuk56@ukr.net

2 семестр навчання на бакалавраті

Наприкінці семестру - іспит

Рекомендована література

1. *Конспект лекцій.URL: https://drive.google.com/drive/folders/1ZyA3u4y8ZqiAVgu_YeL2XdTk9vp4y9VS?usp=sharing*

2. Балога С.І. Дискретна математика*. Навчальний посібник. – Ужгород: ПП «АУТДОР-. ШАРК», 2012. – 124 с. URL : https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/bitstream/lib/3415/1/%D0%BD%D0%B0%D0%B2%D1%87%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE-%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D0%B8%D1%87%D0%BD%D0%B8%D0%B9%20%D0%BF%D0%BE%D1%81%D1%96%D0%B1%D0%BD%D0%B8%D0%BA.pdf*

3. Новотарський М. А. Дискретна математика: навч. посіб. для студ. спеціальності 123 «Комп'ютерна інженерія». Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. 278 с. URL : https://ela.kpi.ua/handle/123456789/37806

4. Тмєнова Н. П.. Дискретна математика. Теорія множин і відношень. Київ : ВПЦ «Київський університет», 2018. 103 с. URL : http://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2020/Tmenova_2018_103.pdf

Тема 2. Відношення між множинами
(рос. **отношения,** англ. **relation)**

Питання лекції

1. Відношення як окремий випадок відповідності.
2. Способи завдання відношень.
3. Операції над відношеннями.
4. Властивості відношень.
5. Приклади відношень.
6. Види відношень.
7. Упорядковані множини
8. Гомоморфізм

1. Відношення як окремий випадок відповідності.

***Def. Бінарне відношення* –** відповідність, задана на одній і тій же множині.

Універсум відношень – декартів добуток двох однакових множин.

Відношення між двома елементами називається ***бінарним***, між трьома – ***тернарним***, відношення між n елементами називається ***n-арним***.

Якщо між двома елементами x і y існує відношення R, то пишуть :

$$(x, y) \in R \qquad \text{или} \qquad x\,R\,y$$

2. Способи завдання відношень

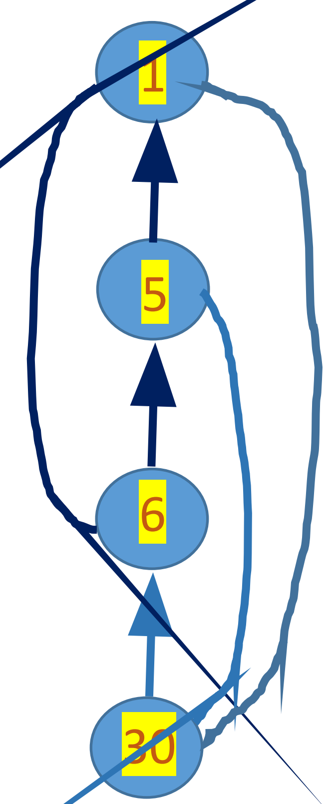
1. Перерахуванням пар елементів:

$$M = \{1, 5, 6, 30\} \qquad R = \{(5,1), (6,1), (6,5), (30,1), (30,5), (30,6)\}$$

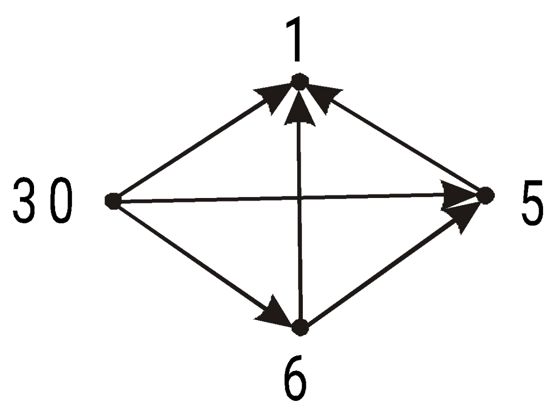
2. Табличний або матричний спосіб:

2-й / 1-й	1	5	6	30
1	0	0	0	0
5	1	0	0	0
6	1	1	0	0
30	1	1	1	0

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



3. Графічний спосіб:



3. Операції над відношеннями

1. Інверсія відношення – переставлення координат.

<u>Приклад:</u> На множині $M = \{1,3,6\}$ задано відношення R - «менше або дорівнює»:

$$R = \{(1,1),(1,3),(1,6),(3,3),(3,6),(6,6)\}$$

$$R^{-1} = \{(1,1),(3,1),(6,1),(3,3),(6,3),(6,6)\}$$

2. Композиція відношень.

<u>Приклад:</u> На множині $M = \{1,3,6\}$ задані такі відношення R - «менше або дорівнює» та S - «рівні».

$$R = \{(3,1),(6,1),(6,3)\} \qquad S = \{(1,1),(3,3),(6,6)\}$$

$$Q = R \circ S = \{(3,1),(6,1),(6,3)\}$$

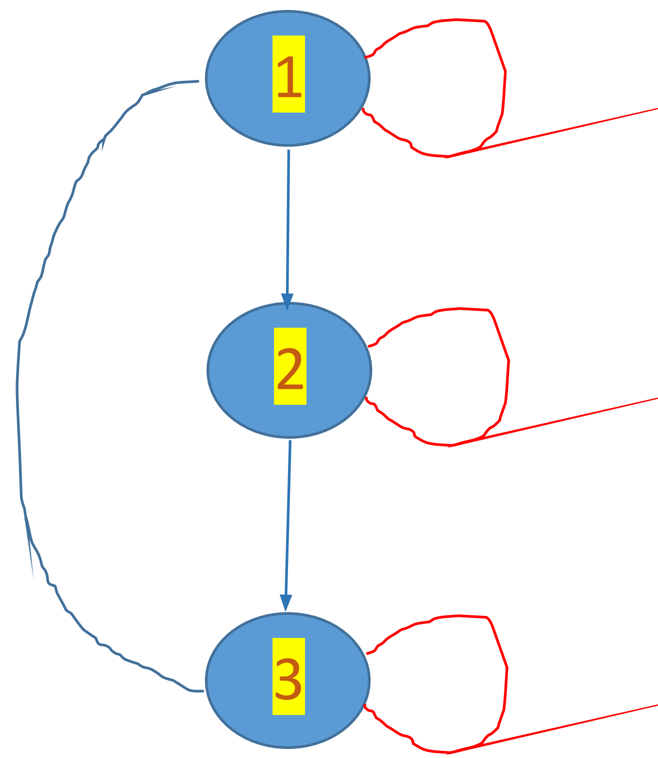
4. Властивості відношень (1)

1. ***Рефлексивність.*** Відношення *R* називається рефлексивним, якщо кожний елемент множини *M*, на якій задано відношення *R*, знаходиться у цьому відношенні сам із собою, тобто $\forall x \in M : (x, x) \in R$

Приклад. Відношення *R* «менше або дорівнює», задане на множині $\mathrm{M} = \{1,2,3\}$ є рефлексивним.

$$\mathrm{R} = \{(1,1),(2,2),(1,3),(3,3),(1,2),(2,3)\}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



У кожної вершини обов’язково є петля.

4. Властивості відношень (2)

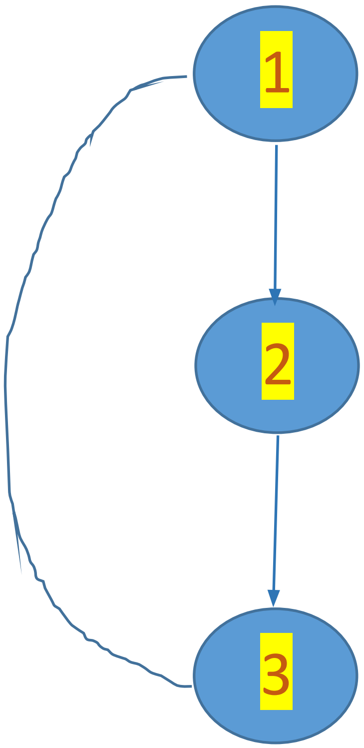
2. ***Антирефлексивність.*** Відношення *R* називається антирефлексивним, якщо жодний елемент множини *M*, на якій задано *R*, не знаходиться у цьому відношенні сам із собою, тобто

$$\forall x \in M : (x, x) \notin R$$

Приклад. Відношення *R* «менше», задане на множині $\mathrm{M} = \{1,2,3\}$ є антирефлексивнмм.

$$R = \{(1,3),(1,2),(2,3)\}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Граф без петель.

4. Властивості відношень (3)

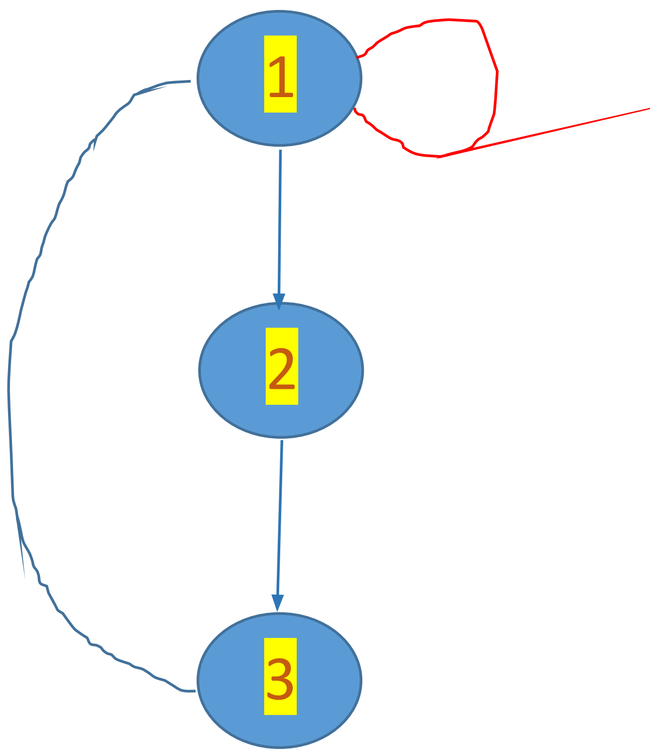
Приклад відношення,
яке не є ні рефлексивним, ні антирефлексивним, тобто

$$\left(\exists x \in M : (x,x) \in R\right) \& \left(\exists x \in M : (x,x) \notin R\right)$$

Приклад. Розглянемо відношення *R,* задане на множині $\mathrm{M} = \{1,2,3\}$ такими 4 елементами:

$$R = \{(1,1),(1,3),(1,2),(2,3)\}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

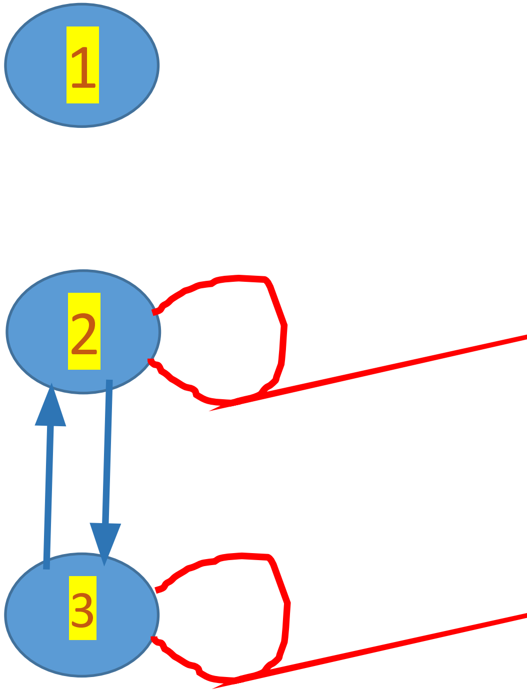


Хоча б у одної вершини є петля,
хоча б одна вершини не має петлі.

4. Властивості відношень (4)

3. ***Симетричність.*** Відношення R називається симетричним, якщо для будь-якої пари $(x, y) \in R$, де $x, y \in M$, одночасно виконується умова $(y, x) \in R$.

Приклад. Відношення R «обидва числа – прості», задане на множині $\mathrm{M} = \{1,2,3\}$ є симетричним.



$$R = \{(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Граф симетричного відношення містить лише подвійні ребра, а петлі можуть бути чи не бути.

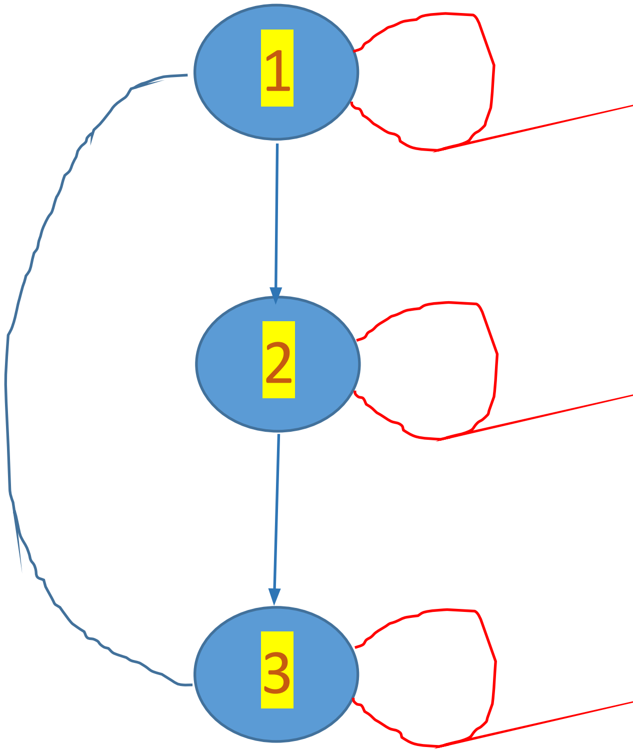
4. Властивості відношень (5)

4. ***Антисиметричність.*** Відношення R називається антисиметричним, якщо ні для якої пари різних елементів $(x, y) \in R$, де $x, y \in M$, одночасно не виконується умова $(y, x) \in R$.

Приклад. Відношення R «менше чи дорівнює», задане на множині $M = \{1,2,3\}$ є антисиметричним.

$$R = \{(1,1),(2,2),(1,3),(3,3),(1,2),(2,3)\}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Граф антисиметричного відношення містить лише одинарні ребра, а петлі можуть бути чи не бути.

4. Властивості відношень (6)

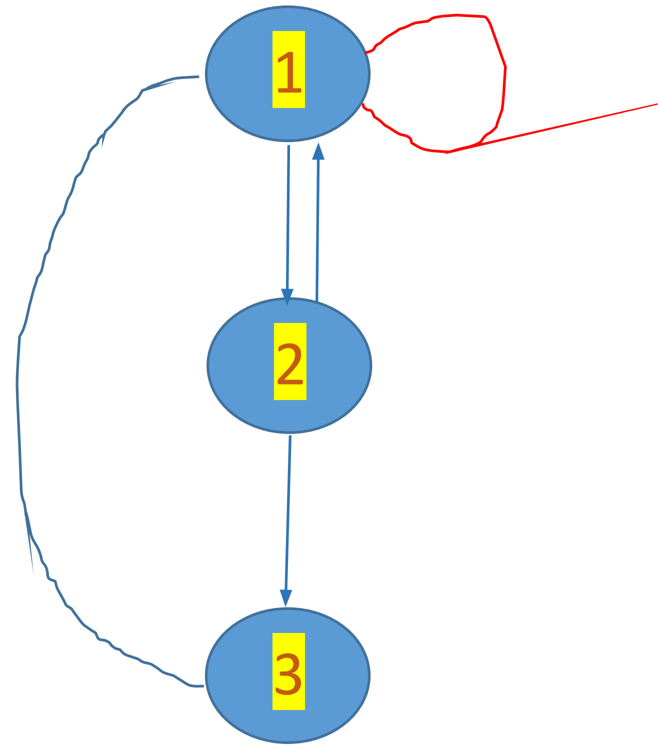
Приклад відношення,
яке не є ні симетричним, ні антисиметричним

Приклад. Розглянемо відношення *R*, задане на множині $M = \{1,2,3\}$ такими 5 елементами:

$$R = \{(1,1),(1,3),(1,2),(2,1),(2,3)\}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Хоча б одна пара вершин має парні ребра,
хоча б одна пара вершин не має парних ребер.



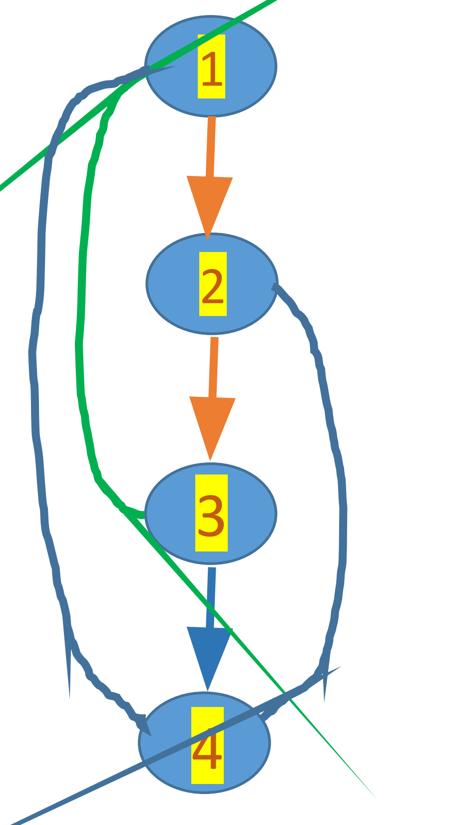
4. Властивості відношень (7)

5. ***Транзитивність.*** Відношення *R* називається транзитивним, якщо з того, що одночасно виконуються умови $(x, y) \in R$ *та* $(y, z) \in R$, де $x, y, z \in M$, одночасно виконується умова $(x, z) \in R$.

Приклад. Відношення *R* «менше», задане на множині $M = \{1,2,3,4\}$ є транзитивним.

$$R = \{(1,2),(2,3),(1,3),(1,4),(2,4),(3,4)\}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{matrix} 1 < 2 \\ 2 < 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 1 < 3$$



На графі транзитивного відношення якщо є два послідовні ребра одного напрямку, то має бути замикаюче ребро, що йде з початку першого ребра до кінця другого..

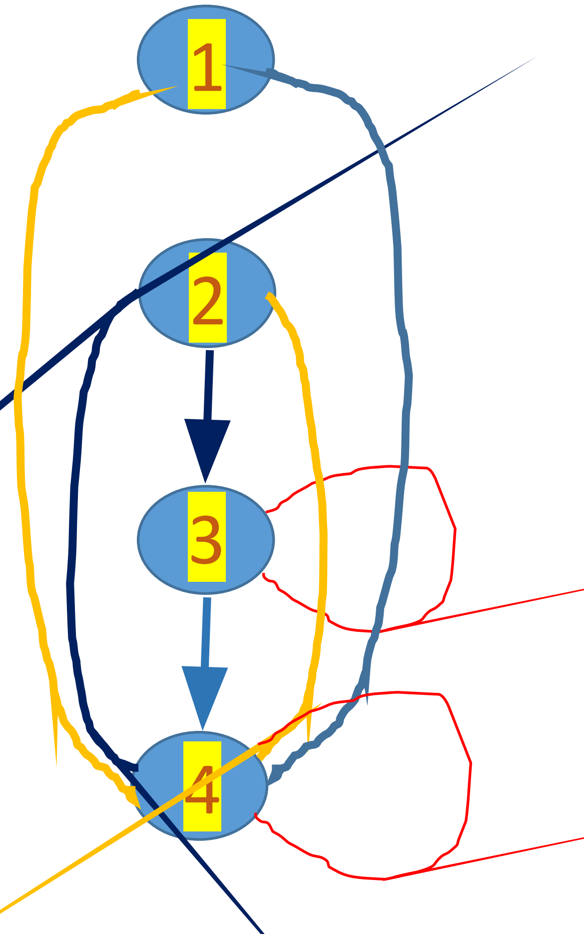
4. Властивості відношень (8)

Приклад відношення, яке не є транзитивним

Приклад. Розглянемо відношення *R* «сума більше чотирьох», задане на множині $M=\{1,2,3,4\}$. Воно не є транзитивним.

$$R=\left\{\begin{matrix}(1,4),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),\\(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\end{matrix}\right\}$$

$$R=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\quad\left.\begin{matrix}2R4\\4R1\end{matrix}\right\}\Rightarrow\quad ?2R1?$$



<u>Антитранзитивної властивості немає!</u>

5. Приклад аналізу відношення

Приклад: *Треба побудувати матрицю бінарного відношення „мати однаковий залишок від ділення на 3” на підмножині цілих чисел X = {1, 2, 3, 4, 5}   та визначити властивості відношення.*

	1	2	3	4	5
1	1	0	0	1	0
2	0	1	0	0	1
3	0	0	1	0	0
4	1	0	0	1	0
5	0	1	0	0	1

рефлексивність +
антирефлексивність -
симетричність +
антисиметричність -
транзитивність +

6. Види відношень (1)

1. ***Еквівалентністю***
називається відношення *R*, що володіє властивостями рефлексивності, симетричності та транзитивності.

Приклади відношень еквівалентності:

відношення рівності на будь яких множинах,

відношення паралельності на множині прямих ліній на площині,

відношення подібності на множині трикутників,

відношення „мати однаковий залишок при діленні на 3 на множині натуральних чисел”.

6. Види відношень (2)

2. ***Частковим порядком***
називається відношення R, що має властивості рефлексивності, антисиметричності і транзитивності.

Це, наприклад, відносини на множині чисел: «менше чи дорівнює», «більше чи дорівнює».

3. ***Строгим порядком***
називається відношення R, що має властивості антирефлексивності, антисиметричності і транзитивності.

Це, наприклад, відносини на множині чисел: «менше», «більше».