① $3y'' - 2y' - 8y = 0$

Теорія: **А** – розв'язання ЛДР без правої частини (ЛОДР).

$3k^2 - 2k - 8 = 0$

Складаємо і розв'язуємо характеристичне рівняння.

$k_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+96}}{6};$

Тут корені краще знаходити за допомогою дискримінанта.

$k_1 = 2; \;\; k_2 = -\frac{4}{3}.$

$y_1 = e^{2x}; \;\; y_2 = e^{-\frac{4}{3}x}$

Випадок $k_1 \neq k_2$; запишемо відповідні лінійно незалежні розв'язки.

$$\boxed{y_0(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-\frac{4}{3}x}}$$

Їх лінійна комбінація буде розв'язком ЛОДР із сталими коефіцієнтами (без правої частини).

② $y'' - 2\sqrt{2}y' + 2y = 0$

Теорія: **А** – розв'язання ЛДР без правої частини (ЛОДР).

$k^2 - 2\sqrt{2}k + 2 = 0$

$\left(k - \sqrt{2}\right)^2 = 0;$

Немає необхідності обчислювати дискримінант, тому що маємо повний квадрат різниці.

$k_1 = k_2 = \sqrt{2}.$

$y_1 = e^{\sqrt{2}x}; \;\; y_2 = xe^{\sqrt{2}x}$

Випадок $k_1 = k_2$, запишемо відповідні лінійно незалежні розв'язки.

$$\boxed{y_0(x) = C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 x e^{\sqrt{2}x}}$$

Їх лінійна комбінація буде розв'язком ЛОДР із сталими коефіцієнтами (без правої частини).

③ $y'' + 6y' + 13y = 0$

Теорія: **А** – розв'язання ЛДР без правої частини (ЛОДР).

$k^2 + 6k + 13 = 0$

$k_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-52}}{2};$

$k_{1,2} = -3 \pm 2i.$

$\alpha = -3; \;\; \beta = 2$

$y_1 = e^{-3x}\cos 2x; \;\; y_2 = e^{-3x}\sin 2x$

Випадок $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$; запишемо відповідні лінійно незалежні розв'язки.

$$\boxed{y_0(x) = C_1 e^{-3x}\cos 2x + C_2 e^{-3x}\sin 2x}$$

Загальний розв'язок

④ ❢ - Порівняємо розв'язок двох, на перший погляд *майже* однакових, рівнянь.

a) $y^{(4)} - y' = 0$	b) $y^{(4)} - y = 0$
$k^4 - k = 0$	$k^4 - 1 = 0$
$k(k^3 - 1) = 0$	$(k^2 + 1)(k^2 - 1) = 0$
$k(k-1)(k^2 + k + 1) = 0$	$(k^2 + 1)(k - 1)(k + 1) = 0$
$k_1 = 0;\ \ k_2 = 1$	$k_{1,2} = \pm i$
$k_{3,4} = \frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}.$	$k_3 = 1;\ \ k_4 = -1$

Алгебраїчні рівняння четвертого порядку мають рівно по чотири кореня. Вони записані у тому ж порядку, що і множники, на які розкладені рівняння.

$y_1 = 1;\ y_2 = e^x;$	$y_1 = \cos x\,; y_2 = \sin x\,;$
$y_3 = e^{-\frac{1}{2}x} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x; y_4 = e^{-\frac{1}{2}x} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x.$	$y_3 = e^x; y_4 = e^{-x}$

$y_0(x) = C_1 + C_2e^x +$ $+e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_3 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_4 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$	$y_0(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x +$ $+C_3e^x + C_4e^{-x}$

⑤ $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

$k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = 0$ Алгебраїчне рівняння третього порядку можна рішати методом групування, як показано нижче, але в даному випадку очевидно, що має місце формула куба різниці.

$(k^3 - 1) - 3k(k - 1) = 0;$
$(k - 1)(k^2 + k + 1) - 3k(k - 1) = 0;$
$(k - 1)(k^2 - 2k + 1) = 0;$

$(k - 1)^3 = 0.$ Маємо три однакових кореня або трьохкратний корінь $k = 1$.

$$\boxed{y_0(x) = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x}$$

⑥ $y^{(4)} + 3y'' - 4y = 0$

$k^4 + 3k^2 - 4 = 0$ Біквадратне алгебраїчне рівняння.

$(k^2)_1 = 1;\ \ (k^2)_2 = -4$ Корені визначені по теоремі Віета.

$k_1 = 1;\ k_2 = -1;$
$k_3 = 2i;\ k_4 = -2i;$ Маємо чотири кореня, всі різні. Відповідно складаємо загальний розвязок.

$$\boxed{y_0(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x}$$

$$y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$$

$$y^{\mathrm{V}} - 3y^{\mathrm{IV}} + 2y''' = 0$$

$$y^{\mathrm{IV}} + 2y''' + 4y'' - 2y' - 5y = 0$$

$$(\lambda^4 - 1) + (2\lambda^3 - 2\lambda) + (4\lambda^2 - 4) = 0;$$

$$(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) + 2\lambda(\lambda^2 - 1) + 4(\lambda^2 - 1) = 0;$$

$$(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 5) = 0$$

$$\lambda_1 = -1 + 2i, \lambda_2 = -1 - 2i (\alpha = -1, \beta = 2), \lambda_3 = 1, \lambda_4 = -1$$

$$y^{\mathrm{IV}} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0$$

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda^2 - 2\lambda + 2)^2 = 0$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 + i$ и $\lambda_3 = \lambda_4 = 1 - i$