ДУ-2

1) $y'' = \ln x$

$y' = \int y''dx =$

$= \int \ln x dx = x\ln x - x + C_1$

$y = \int (x\ln x - x + C_1)dx =$

$= \int x(\ln x - 1)dx + C_1x + C_2 =$

$y' = z(x)$; $z'(x) = \ln x$, ДР-1 тип 1.

$\int dz = \int \ln x \cdot dx$

$z = \int \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{vmatrix} =$

$= x\ln x - \int dx = x \cdot \ln x + C_1$

Тепер

$z = y'$; $\frac{dy}{dx} = x \cdot \ln x + C_1$

і т.д.

$= \begin{vmatrix} u = \ln x - 1 & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = xdx & v = \frac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2}(\ln x - 1) - \int \frac{x}{2}dx + C_1x + C_2 =$

$= \frac{x^2}{2}(\ln x - 1) - \frac{x^2}{4} + C_1x + C_2$

$\underline{y(x) = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{3}{4}x^2 + C_1x + C_2}$

2) $y'' = y' + x$ — немає y $\Rightarrow$ $y' = z(x)$, $y'' = z'_x$

$z' = z + x$ ДУ-1, тип 3. $z' - z = x$

$p(x) = -1$; $q(x) = x$

$z = R(x) \cdot S(x)$; $R = e^{-\int -1dx} = e^x$

$S(x) = \int \frac{x}{e^x}dx = \int e^{-x}xdx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{-x}dx & v = -e^{-x} \end{vmatrix} =$

$= -(x \cdot e^{-x} + \int e^{-x}dx) = x \cdot e^{-x} + e^{-x} + C_1$

$z = e^x(e^{-x}(x+1) + C_1$; $y' = (x+1) + C_1e^x$

$\int dy = \int ((x+1) + C_1e^x)dx$; $\underline{y = \frac{(x+1)^2}{2} + C_1e^x + C_2}$

3) $2xy'y'' = (y')^2 + 1$ немає y $\Rightarrow$ $z = z(x) = y'$

$2x \cdot z \cdot z' = z^2 + 1$ тип 1, ДУ-1

$\frac{dz}{dx} = \frac{z^2+1}{2x \cdot z}$; $\int \frac{z\,dz}{z^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x}$; $\frac{1}{2}\ln(z^2+1) = \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}\ln C$

$z^2+1 = x\cdot C_1$; $(y')^2 = C_1x-1$; $y'=\sqrt{C_1x-1}$

⊛ Увага! $\sqrt{\dots}$ беремо тільки з ⊕

$\frac{dy}{dx} = \sqrt{Cx-1}$; $\int dy = \int \sqrt{Cx-1}\,dx$, $y = \frac{1}{C_1}\cdot\frac{2}{3}(C_1x-1)^{3/2}+C_2$

$\underline{y = \frac{2}{3C_1}(C_1x-1)^{3/2}+C_2}$ загальн. розв'язок

4) $2y'' = 3y^2$; $y|_{x=2} = 1$; $y'|_{x=2} = -1$ - початкові умови.

немає $x \Rightarrow y' = p(y)$; $y'' = p\cdot p'_y$.

$2\,p\cdot p'_y = 3y^2$;

$p\cdot\frac{dp}{dy} = \frac{3y^2}{2}$, $\int p\cdot dp = \frac{3}{2}\int y^2 dy$; $\underline{\frac{p^2}{2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{y^3}{3}+C_1}\,\Big|\times 2$

! C_1 - знайти з початкових умов : $p^2 = y^3+C_1$

або $(y')^2 = y^3+C_1 \Rightarrow (-1)^2 = 1+C_1 \Rightarrow C_1 = 0$

$y' = \sqrt{y^3}$; $y' = y^{3/2}$ (див. ⊛)

$\frac{dy}{dx} = y^{3/2}$; $\int y^{-\frac{3}{2}}dy = \int dx$; $-2\cdot y^{-\frac{1}{2}} = x+C_2$

$\frac{-2}{\sqrt{y}} = x+C_2$. Знайдемо C_2 : $-2 = 2+C_2$; $C_2 = -4$

$-\frac{2}{\sqrt{y}} = x-4$; $\underline{y = \frac{-2}{x-4}}$ частинний розв'язок

<u>Інший спосіб розв'язку 4) прикладу</u>

Помітимо, що $(y^3)' = 3y^2\cdot y'_x$

і $((y')^2)'_x = 2y'_x\cdot(y'_x)'_x = 2y'y''$

$2y'' = 3y^2 \,|\cdot y' \Rightarrow 2y'\cdot y'' = 3y^2\cdot y'$

$\underline{((y')^2)' = (y^3)'}$ згортка

Якщо = похідні, то функції відрізняються на Const

$(y')^2 = y^3 + C_1 \rightarrow$ з початкових умов $C_1 = 0$

$y' = \sqrt{y^3}$ – далі, як у попередньому розв'язку.

5) $3y' \cdot y'' = y + (y')^3 + 1 \qquad y|_{x=0} = -2; \; y'|_{x=0} = 0$

немає $x \Rightarrow y' = p(y); \; y'' = p \cdot p'_y$

$3p \cdot p \cdot p'_y = y + p^3 + 1 \quad | : 3p^2$

$p'_y = \frac{y+1}{3p^2} + \frac{p^3}{3p^2}; \quad p'_y - \frac{p}{3} = \frac{y+1}{3p^2} \longleftrightarrow$ ДР-1, тип 4

$\boxed{y' + r(x)y = q(x) \cdot y^n}$

$n = -2; \; z = p^{1-n} = p^3$ – заміна $\qquad z = z(y), p(y)$

$1 - n = 3$

$z'_y + (1-n) \cdot r(y) \cdot p = (1-n) q(y)$

$z'_y - \cancel{3} \frac{1}{\cancel{3}} z = \cancel{3} \cdot \frac{y+1}{\cancel{3}}$

$r(y) = -1; \quad q(y) = y + 1$

$z(y) = R(y) \cdot S(y); \quad R(y) = e^{-\int r(y)dy} = e^{+\int dy} = e^y$

$S(y) = \int \frac{q(y)}{R(y)} dy = \int \frac{(y+1)}{e^y} dy = \int e^{-y}(y+1)dy = \begin{vmatrix} u = y+1 & du = dy \\ dv = e^{-y}dy & v = -e^{-y} \end{vmatrix} =$

$= -e^{-y}(y+1) - \int -e^{-y}dy = -e^{-y}(y+1) - e^{-y} + C_1$

$z(y) = p^3 = (y')^3 = e^y(-e^{-y}(y+1) - e^{-y} + C_1)$

$\underline{(y')^3 = -(y+2) + C_1 \cdot e^y}$

Знайдемо C_1: $0^3 = -0 + C_1 e^{-2}, \Rightarrow C_1 = 0$

$y' = -\sqrt[3]{y+2}; \quad \int \frac{dy}{\sqrt[3]{y+2}} = -\int dx$

$\rightarrow -x = \frac{3}{2}(y+2)^{2/3} + C_2$

знайдемо C_2:

$0 = \frac{3}{2} \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$

$\underline{\underline{x = -\frac{3}{2}(y+2)^{2/3}}}$

частинний розв'язок