

Навчальна дисципліна: **Дискретна математика**

Лектор:

професор Кучук Георгій Анатолійович

E-mail: kuchuk56@ukr.net

2 семестр навчання на бакалавраті

Наприкінці семестру - іспит

Тема 5. Графи

Лекція 5.4. Планарні графи

Питання лекції

- 1 Планарні графи
- 2 Умови планарності
- 3 Грані плоского графа
- 4 Алгоритм побудови плоского зображення графа

Рекомендована література

1. Конспект лекцій.URL:

<https://drive.google.com/drive/folders/12QYRD4L8kQr0g48DJVN386FrISDuyPwQ?usp=sharing>

2. Олійник Л.О. Дискретна математика: Навч. посібник. 2015. 256 с.

URL.: <https://www.dstu.dp.ua/Portal/Data/3/17/3-17-b2.pdf>

3. Балога С.І. Дискретна математика. Навчальний посібник. – Ужгород: ПП «АУТДОР-. ШАРК», 2021. – 124 с.

<https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/bitstream/lib/3415/1/%D0%BD%D0%B0%D0%B2%D1%87%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE-%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D0%B8%D1%87%D0%BD%D0%B8%D0%B9%20%D0%BF%D0%BE%D1%81%D1%96%D0%B1%D0%BD%D0%B8%D0%BA.pdf>

1. Планарні графи

Планарний граф – це граф, допускає укладання площині, тобто. він може бути зображений на площині так, що жодні ребра не мають спільних точок, крім своїх вершин.

Зображення графа на площині з дотриманням цієї умови називається **плоским графом**.

Мінімальне число ребер, яке треба видалити для отримання плоского зображення, називається **числом планарності графа** та позначається $\theta(G)$.

Для повних графів K_n з числом вершин $n \geq 4$:

$$\theta(K_n) = (n - 3) (n - 4) / 2.$$

Мінімальне число площин, при якому граф розбивається на плоскі частини, називається **товщиною графа** та позначається $t(G)$.

Товщина довільного графа задовольняє нерівності

$$t(G) \geq \frac{[q + 3p - 7]}{[3p - 6]}$$

$[x]$ - ціла частина x , p - число вершин, q - число ребер.

Товщина повних графів задовольняє рівності

$$t(K_n) = \frac{[n + 7]}{6}$$

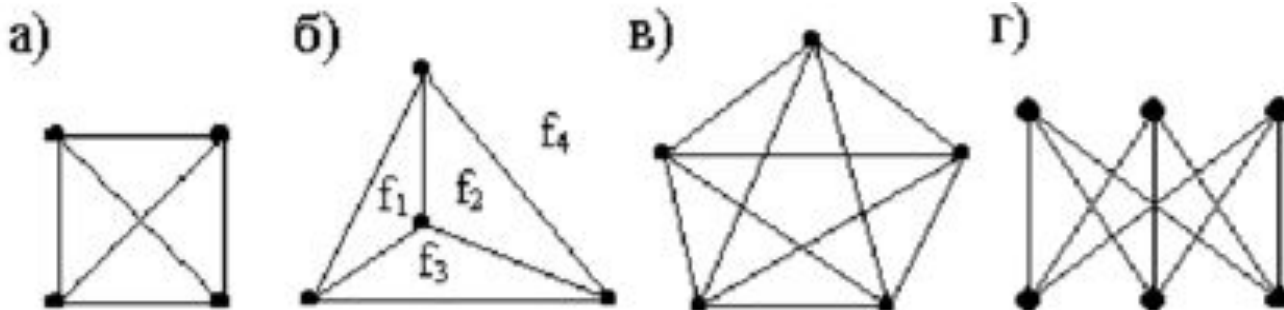
за винятком $n = 9, 10$, для яких товщина дорівнює 3.

2. Умови планарності

У зв'язного плоского графа з числом вершин $p \geq 3$ число ребер q задовольняє умові

$$q \leq 3p - 6.$$

У зв'язного плоского дводольного графа $q \leq 2p - 4.$



а) $p = 4, q = 6$ $6 \leq 3 \cdot 4 - 6 = 6.$ - **можливо планарний**

б) варіант плоского зображення графа а);

в) $p = 5, q = 10$ $10 \leq 3 \cdot 5 - 6 = 9.$ - **не планарний** K_5

г) $p = 6, q = 9$ $9 \leq 2 \cdot 6 - 4 = 8.$ - **не планарний** $K_{3,3}$

Теорема. У тривимірному просторі без перетину ребер може бути зображений будь-який кінцевий граф.

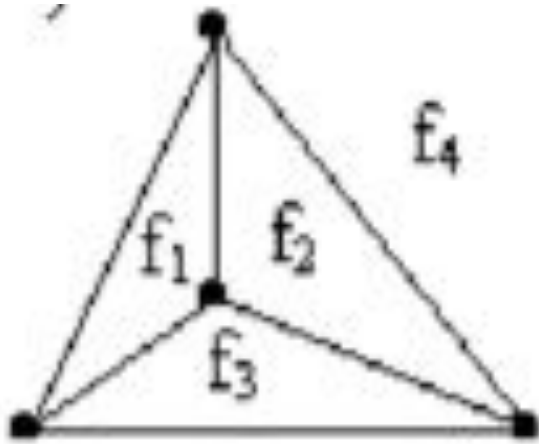
Непланарність графів K_5 і $K_{3,3}$ використовується для оцінки планарності великих графів:

Теорема Понтрягіна-Куратовського: граф планарний тоді і тільки тоді, якщо він не містить підграфи виду K_5 або $K_{3,3}$, або зведені до них.

3. Грані плоского графа

Область площини, обмежена ребрами зв'язкового плоского графа і містить у собі ні ребер, ні вершин, називається його **гранню**.

Зовнішня необмежена грань називається **нескінченною гранню**.



Граф на рис. 1, б має 4 грані: f_1, f_2, f_3, f_4
де f_4 - нескінченна грань

У графа без циклів одно грань – нескінченна.
Вона якась виняткова. При укладанні графа
на сферу ця грань нічим не відрізнятиметься
від інших.

Число граней f у зв'язному плоскому графі визначається як

$$f = q - p + 2,$$

де p – число вершин, q - число ребер.