Подвійні інтеграли

Перед тим, як розглядати подвійний інтеграл від функції двох змінних, рекомендується повторити положення ***теми про визначений інтеграл,*** тому що будь-який *кратний інтеграл* (подвійний, потрійний і т.д.), є аналогом, узагальненням визначеного інтегралу для функції відовідного числа змінних.

Задача, що приводить до поняття подвійного інтеграла

Задача, що приводить до поняття визначеного інтеграла – *задача про обчислення* ***площі*** *криволінійної трапеції.*	Задача, що приводить до поняття подвійного інтеграла – *задача про обчислення* ***об'єму*** *циліндричного тіла.*

Циліндричне тіло: циліндр, що має у якості «дна» деяку замкнуту, обмежену область *D,* що розташована на площині *XOY*, а у якості «даху» - поверхню, задану рівнянням $Z=f(x;\ y)$. Функція $f(x;\ y)$ обмежена в області *D*.

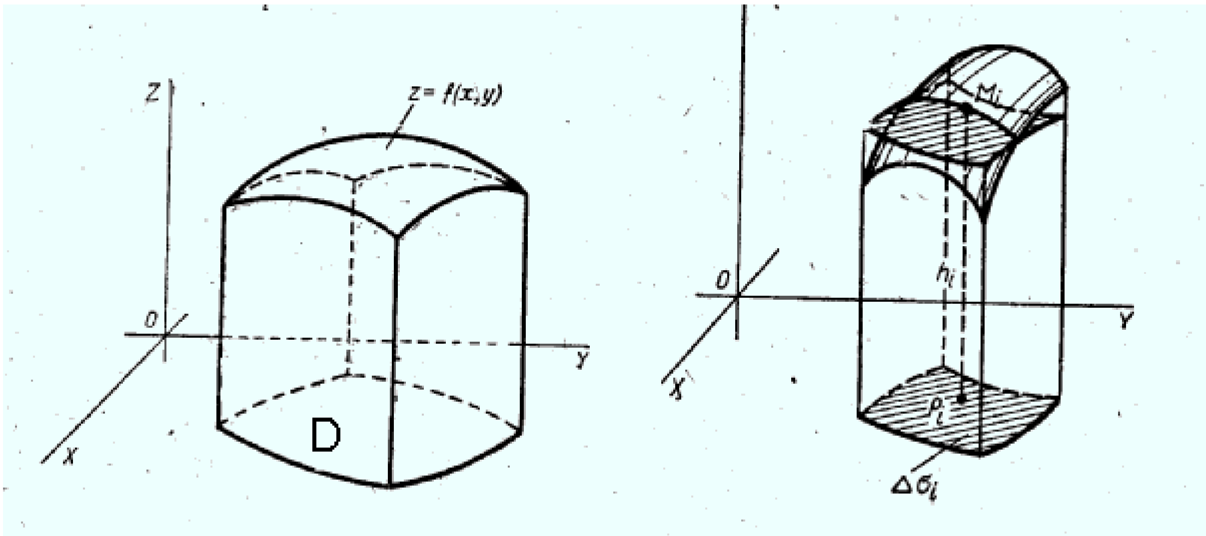


Рис.1 Рис.2

Поставимо собі задачу – обчислити об'єм такого тіла. Подальші дії подібні діям, що виконувались при обчисленні площі криволінійної трапеції.

Розіб'ємо область D на n елементарних підобластей, площі яких позначимо $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, ... \Delta\sigma_n$. На кожній з них «стоїть» частинне циліндричне тіло, об'єм якого приблизно замінимо об'ємом циліндру.

Площа основи циліндра дорівнює $\Delta\sigma_i$, а висота обчислюється як значення функції-«даху» у довільно обраній точці $(\xi_i, \eta_i) \in \Delta\sigma_i$, $f(\xi_i, \eta_i) = h_i$.

Тоді сума об'ємів таких частинних циліндрів приблизно буде дорівнювати об'єму усього циліндричного тіла:

$$V \cong \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

Така сума називається **<u>інтегральною</u>**.

Очевидно, об'єм буде знайдений тим точніше, чим більша кількість частинних циліндрів буде складати тіло, тобто якщо $n \to \infty$, одержимо точний об'єм циліндричного тіла.

Під діаметром області $\Delta\sigma_i$ розуміють найбільшу відстань між двома точками цієї області. Позначимо через λ найбільший з діаметрів елементарних областей $\lambda = max\{\Delta\sigma_i\} \to 0$ $(i = \overline{1,n})$ – ця умова ставиться при обчисленні границі у визначенні подвійного інтегралу нижче.

☛*Визначення* Якщо існує <u>границя</u> інтегральної суми

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

при $\lambda \to 0$, що не залежить від способу розбиття області D на елементарні частини і вибору точок $(\xi_i, \eta_i) \in \Delta\sigma_i$, то вона називається ***подвійним інтегралом*** від функції двох змінних $f(x,y)$ по області D:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = \iint_D f(x,y) d\sigma.$$

Основні *властивості подвійного інтегралу* аналогічні відповідним властивостям визначеного інтегралу. З найбільш важливих підкреслимо наступні:

* лінійні властивості,
* властивості адитивності,
* властивість алгебраїчного об’єму,

а також:

* площу області D можна знайти як $\boxed{S_D = \iint\limits_D d\sigma}$

(при $f(x,y)=1$ в області D).

❢ - подвійний інтеграл – це **стала, визначене число** ❢

Обчислення подвійних інтегралів у декартових координатах

В декартових координатах елемент площі (прямокутник) $\boxed{d\sigma = dx \cdot dy}$.

Обчислення подвійного інтегралу складається з послідовного обчислення двох визначених інтегралів – внутрішнього і зовнішнього при розкладі на *повторні інтеграли*:

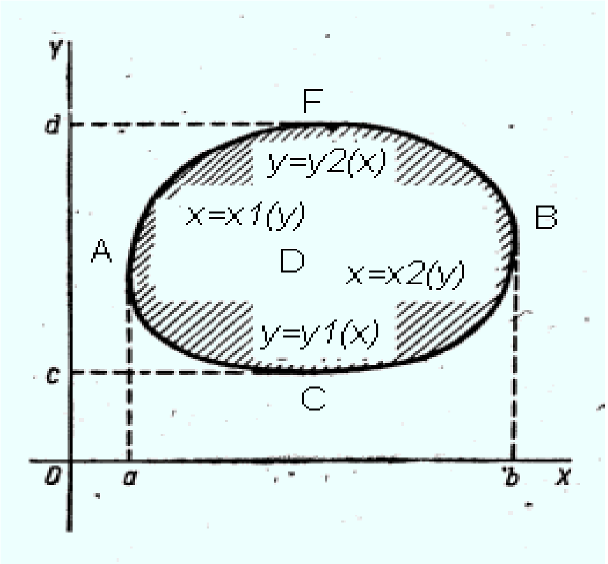
✐ $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$	**2** $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$

Обидві формули абсолютно «рівноправні», вибір залежить від виду області інтегрування D.

Якщо необхідно, область інтегрування D можна розбити на підобласті і, за властивістю *адитивності*, обчислити інтеграл як суму інтегралів по кожній з таких підобластей.

Пояснення позначень і правила розташування границь у повторних інтегралах

Перед обчисленням подвійного інтеграла треба зобразити область інтегрування на кресленні і визначити точки – границі проекцій області на координатні вісі – a, b, c, d (див. рисунок).



1) Припущення. Припустимо, що область інтегрування D перетинається будь-якою прямою, що паралельна осі ОУ (або ОХ), не більш ніж у двох точках.

Нехай на границі області крайня ліва точка А, а крайня права В. Позначимо їх абсциси через a, b. Точки А и В ділять контур області інтегрування на нижню частину/дугу АСВ, що має рівняння $y=y_1(x)$ і верхню частину/дугу AFB, що має рівняння $y=y_2(x)$.

N.B.Увага! Мається на увазі, що уся верхня/нижня дуга може бути описана <u>одним рівнянням!</u> Якщо хоча б одна з них складається з двох (або більше) частин різних ліній, то треба область розділяти на під області і застосовувати властивість адитивності.

У такому випадку, якщо функцію $f(x,y)$ можна інтегрувати в області D, то подвійний інтеграл зведеться до повторного по формулі:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \quad \textbf{(1)}.$$

2) Позначимо проекцію області на ось ОУ через $[c,d]$. Нехай $x=x_1(y)$ є рівнянням лівої частини/дуги границі CAF, а $x=x_2(y)$ - є рівнянням правої частини/дуги границі CBF.

Якщо функцію $f(x,y)$ можна інтегрувати в області D, то подвійний інтеграл зведеться до повторного по формулі:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \quad \textbf{(2)}.$$

Вибір осі, на яку проектується область інтегрування визначає ПОРЯДОК інтегрування подвійного інтегралу. Тобто визначає ЗМІННІ інтегрування внутрішнього і зовнішнього інтегралів та їх границі.

При обчисленні повторного інтеграла важливим моментом є правильне розташування границь інтегрування в обох інтегралах, при цьому рекомендується додержуватися наступної схеми:

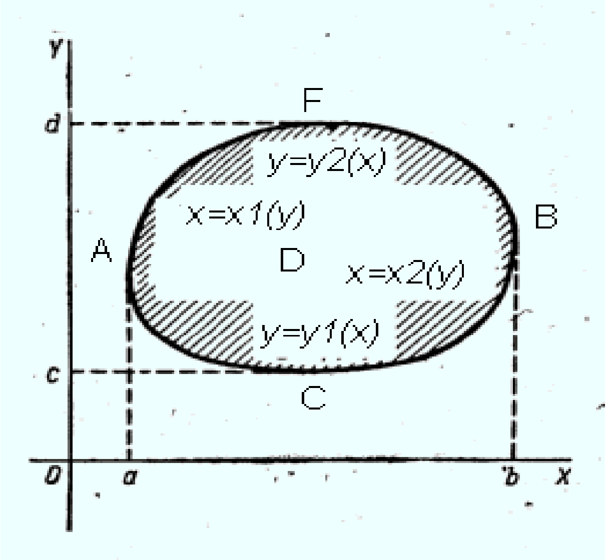
1. Область D проектується на одну з осей, наприклад OX (залежить від зручності). Вибір проектування на OX означає вибір формули **(1)**, порядок інтегрування x-y. Не забувайте про N.B.!

Далі визначається відрізок $[a,b]$: $a \le x \le b$. Числа a и b будуть відповідно нижньою і верхньою границями для зовнішнього інтеграла в формулі **(1)**.

Якщо область D проектується на вісь OY, то обирається формула **(2)**, порядок інтегрування y-x. Не забувайте про N.B.!

Визначається відрізок $[c,d]$. Ці числа будуть відповідно нижньою і верхньою границями для зовнішнього інтеграла в формулі **(2)**.

Тобто **границі зовнішнього інтеграла завжди є сталими величинами**, і визначаються проекцією області інтегрування на відповідну вісь координат.

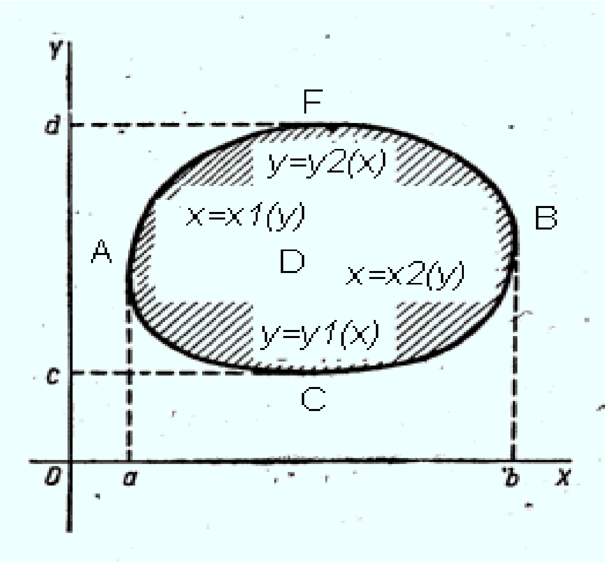


N.B.Увага! Мається на увазі, що уся верхня/нижня дуга (або ліва і права) може бути описана одним рівнянням! Якщо хоча б одна з них складається з двох (або більше) частин різних ліній, то треба область розділяти на підобласті і застосовувати властивість адитивності.

2. Для визначення границь інтегрування внутрішнього інтеграла **(1)** проводимо через будь-яку точку відрізка $x \in [a,b]$ пряму, паралельну осі OY(перпендикулярну осі OX).

Така пряма за припущенням (див.рис.) перетинає границю області D у двох точках, позначимо їх M_1 и M_2. Причому точка входу M_1 лежить на дузі нижньої границі ACB, а точка виходу M_2 на дузі верхньої границі AFB області D.

Рівняння цих дуг повинні бути записані у вигляді : $y=y_1(x)$ і $y=y_2(x)$. А функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ на відрізку $[a,b]$ неперервні, однозначні і зберігають аналітичний вираз.



N.B.Увага! Мається на увазі, що уся верхня/нижня дуга (або ліва і права) може бути описана одним рівнянням! Якщо хоча б одна з них складається з двох (або більше) частин різних ліній, то треба область розділяти на підобласті і застосовувати властивість адитивності.

Якщо обрана формула **(2)**, для визначення границь внутрішнього інтеграла проводять пряму, паралельну осі OX (перпендикулярну ОУ), аналогічно попередньому випадку, точка входу N_1 лежить на дузі лівої границі CAF, а точка виходу N_2 на дузі правої границі CBF області D. Рівняння цих дуг повинні бути записані у вигляді : $x=x_1(y)$ і $x=x_2(y)$.

Границі інтегрування внутрішнього інтегралу у загальному випадку (за деякими виключеннями) **є функціями змінної, по якій обчислюється зовнішній інтеграл** і яка при обчисленні внутрішнього інтегралу вважається сталою.

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \quad \mathbf{(1)}.$$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \quad \mathbf{(2)}.$$

❢ - Спочатку обчислюється внутрішній інтеграл, за умови, що змінна зовнішнього інтеграла є **сталою** величиною.

❢ - Якщо функція *f(x,y)* неперервна в області *D*, то **значення повторного інтеграла не залежить від порядку інтегрування**. Тоді для зменшення об'єму обчислювань краще обрати, якщо це можливо, такий порядок інтегрування, при якому не треба розбивати область інтегрування на частини.

ПРИКЛАД

Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D ydxdy$, якщо область інтегрування *D* обмежена прямою $y=4-x$ і параболою $y^2=2x$.

Зробимо рисунок і за ним легко знайдемо точки перетину заданих ліній *A(2;2)* і *B(8;-4)*.*(або такі точки можна знайти аналітичним способом)*

1) Спроектуємо область *D* на вісь ОУ, вона проектується у відрізок *[-4;2]*. Тим самим ми обрали обчислення подвійного інтегралу $\iint\limits_D ydxdy$ через повторний інтеграл:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \quad \textbf{(2)}.$$

Якщо через будь-яку точку цього відрізка провести пряму, паралельну осі ОХ: $y=const,\ y\in[-4,2]$, то вона перетне область тільки у двох точках: N_1 кривої $y^2=2x$ *(ліва границя обл.)* і N_2 прямої $y=4-x$ *(права границя обл.).*

Виразимо з рівнянь ліній змінну x: $x_1=\frac{y^2}{2}$, $x_2=4-y$.

(індекс 1 – для лівої границі, 2 – для правої).

Подвійний інтеграл зводиться до повторного: $I=\iint\limits_D ydxdy=\int\limits_{-4}^{2} ydy\int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{4-y} dx$

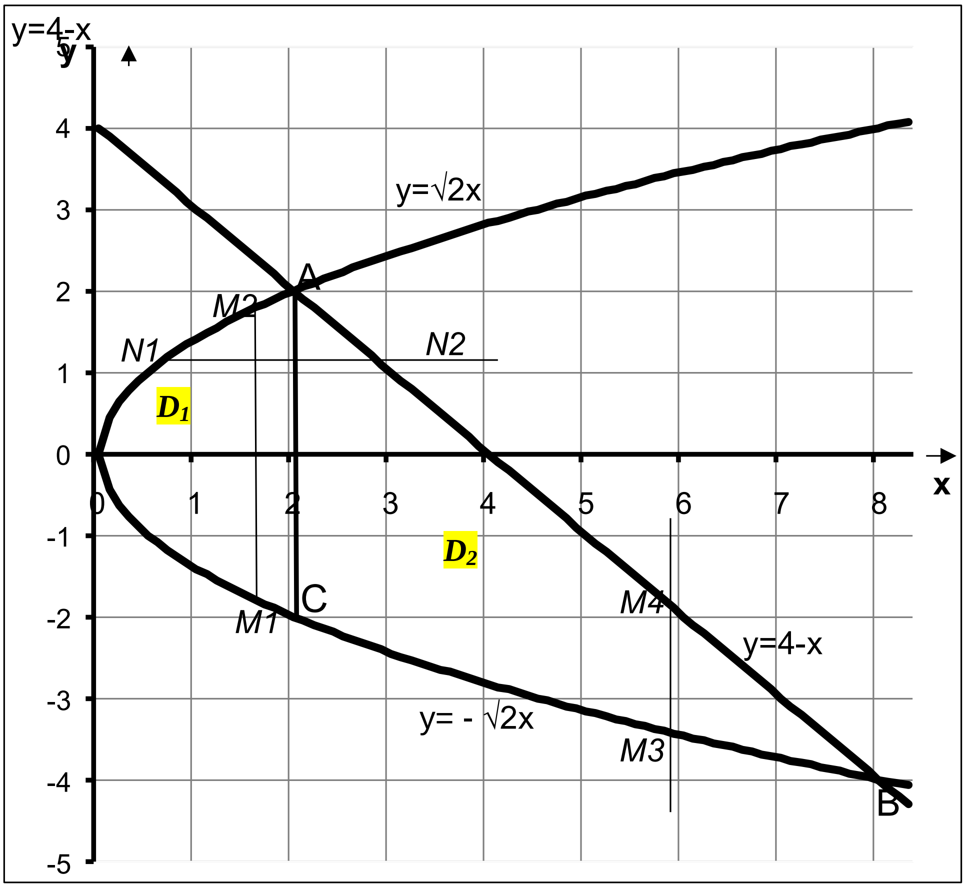
Саме обчислення повторного інтеграла почнемо з обчислення внутрішнього інтеграла, для якого *x* – є змінною інтегрування, *y* – сталою величиною.

Після визначення первісної границі внутрішнього інтеграла підставляємо (формула Ньютона-Лейбниця) замість змінної *x*. В результаті ми приходимо до визначеного інтегралу по змінній *y*. Таким чином:

$$I = \int_{-4}^{2} y dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{4-y} dx = \int_{-4}^{2} (x \Big|_{\frac{y^2}{2}}^{4-y}) y dy = \int_{-4}^{2} (4 - y - \frac{y^2}{2}) y dy = \int_{-4}^{2} \left(4y - y^2 - \frac{y^3}{2} \right) dy =$$

$$= 2y^2 - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{8} \Big|_{-4}^{2} = -18.$$

Об'єм менше 0! Що це означає у геометричному сенсі?



2) Обчислимо інтеграл, проектуючи область D на вісь ОХ.

Тим самим ми обрали обчислення подвійного інтегралу $\iint\limits_D ydxdy$ через повторний інтеграл:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \quad \textbf{(1)}.$$

Тепер розглядаємо не ліву і праву границю, а верхню і нижню.

У цьому випадку необхідно розбити область інтегрування відрізком АС на дві частини D_1 і D_2, тому що верхня границя області складається з частин двох ліній, що мають різні рівняння:

$y = \sqrt{2x}$ (дуга ОА) і $y=4-x$ (пряма АВ).

Інтеграл по області D представимо у виді суми інтегралів по областям D_1 і D_2:

$$\iint\limits_D ydxdy = \iint\limits_{D_1} ydxdy + \iint\limits_{D_2} ydxdy.$$

Проекція D_1 (0АС) на вісь ОХ є відрізком [0;2]

і будь-яка пряма $x=const$, $x \in [0;2]$, перетинає область у двох точках:

M_1 кривої $y = -\sqrt{2x}$ і M_2 кривої $y = \sqrt{2x}$.

Тому $\iint\limits_{D_1} ydxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} ydy = 0$ (перевірте самостійно).

Аналогічно, проекція області D_2 (АСВ) на вісь Ох є відрізком [2;8]

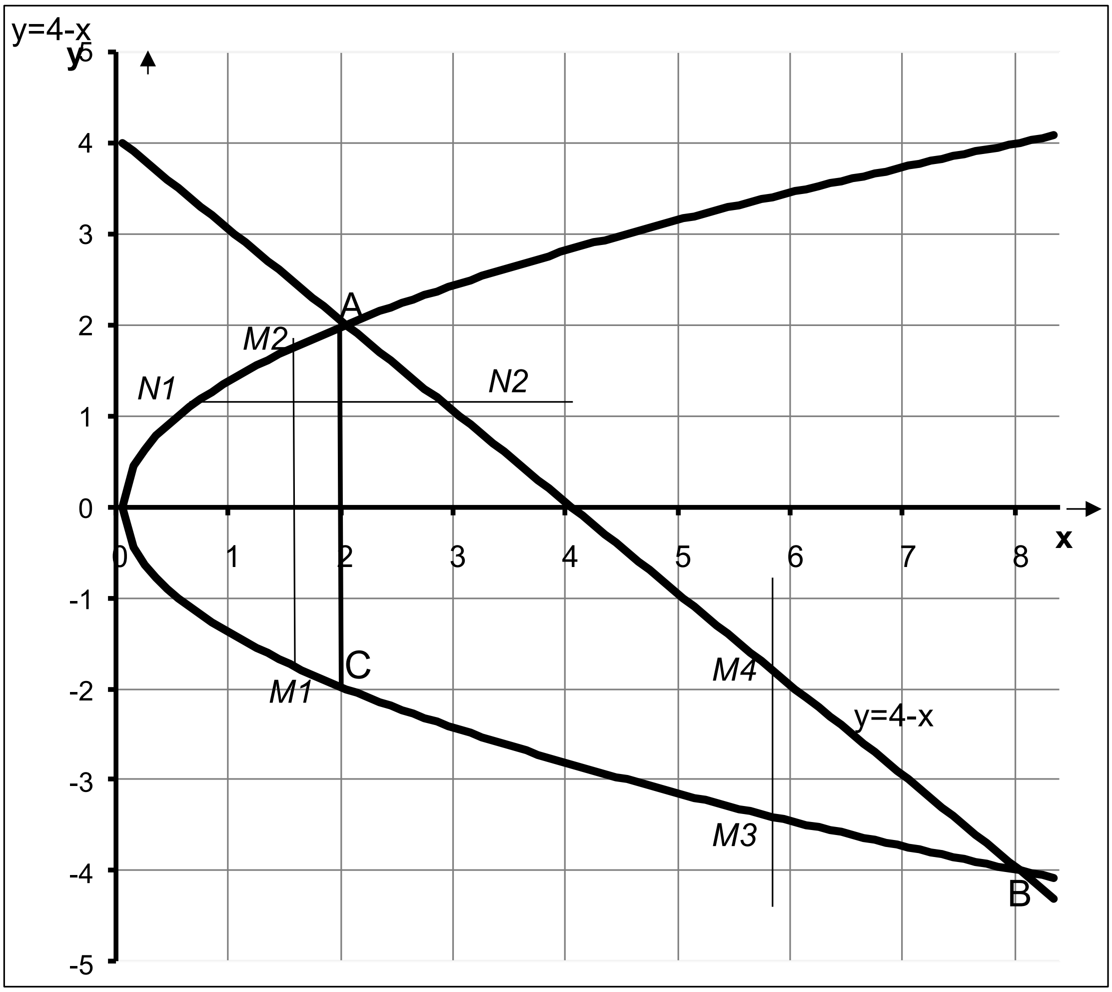
і будь-яка пряма $x=const$, $x \in [2;8]$ перетинає область у двох точках:

M_3 кривої $y = -\sqrt{2x}$ і M_4 прямої $y=4-x$.

Тому $\iint\limits_{D_2} ydxdy = \int\limits_2^8 dx \int\limits_{-\sqrt{2x}}^{4-x} ydy = \int\limits_2^8 \frac{y^2}{2}\Big|_{-\sqrt{2x}}^{4-x} dx = \frac{1}{2}\int\limits_2^8 (16-8x+x^2-2x)dx =$

$$= \frac{1}{2}(16x - 5x^2 + \frac{x^3}{3})\Big|_2^8 = -18.$$

Як ви бачите, $I = -18$ незалежно від способу обчислення.


y=4-x
y
x
A
B
C
M1
M2
M3
M4
N1
N2
y=4-x
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
0
1
2
3
4
5
6
7
8