Тема 5. Інтегральне числення функції одного аргументу

Невизначений інтеграл. Первісна

Якщо основною задачею диференціального числення є пошук похідної (або диференціалу) функції,
то інтегральне числення вирішує зворотне завдання: відновлює функцію по заданій похідної або диференціалу.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Функція $F(x)$ називається *первісною* для функції $f(x)$ на даному проміжку, якщо у кожній точці цього проміжку:

$$F'(x) = f(x) \text{ або, що теж же саме, } dF(x) = f(x)\,dx.$$

Сукупність всіх первісних функції $f(x)$, що відрізняються тільки довільними сталими ($C=const$), називається невизначеним інтегралом функції і записується як:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Тут $f(x)\,dx$ - підінтегральний вираз, *диференціал первісної*; $dF(x) = f(x)\,dx$

$f(x)$ – підінтегральна функція, *похідна первісної*; $F'(x) = f(x)$.

Нагадування: диференціал будь-якої функції це $dF(x) = F'(x)\,dx$, а $F'(x) = f(x)$ за означенням. Тобто при інтегруванні

$$\boxed{\int f(x)dx = \int F'(x)dx = \int d(F(x)) + C = F(x) + C}$$

❢ - В результаті обчислення невизначеного інтегралу ми знаходимо функцію по її диференціалу, звідси спосіб перевірки – якщо знайти диференціал (або похідну) первісної, то треба одержати підінтегральний вираз (або підінтегральну функцію).

Властивості невизначеного інтегралу

$\boxed{1}$ $\left(\int f(x)dx\right)_x' = f(x)$; і $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$

$\boxed{2}$ З визначення випливає: $\int f'(x)dx = f(x) + C$.

Властивості $\boxed{1}$ и $\boxed{2}$ підтверджують, що інтегрування і диференціювання – взаємно обернені операції.

$\boxed{3}$ $\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$;

$\boxed{4}$ $\int k \cdot f(x)dx = k \int f(x)dx, \quad k - const$.

Властивості $\boxed{3}$ і $\boxed{4}$ показують, що інтегрування – лінійна операція. Третя і четверта властивості можуть бути поширені на будь-яке скінченне число доданків:

$$\int (\sum_{i=1}^{n} k_i f_i(x))dx = \sum_{i=1}^{n} k_i \int f_i(x)dx .$$

$\boxed{5}$ Властивість ***інваріантності*** невизначеного інтегралу (наслідок з властивості інваріантності диференціалу функції, см. тему 4).

Якщо

$$\int f(x)dx = F(x) + C \text{ і } x = \varphi(t),$$

то

$$\int f(\varphi(t))d\varphi(t) = F(\varphi(t)) + C .$$

Іншими словами, вид первісної не залежить від того, що є змінною інтегрування: функція $\varphi(t)$ чи незалежна змінна (x).

❢ - Зверніть увагу! Ця властивість буде основою при обчисленні невизначених інтегралів методом внесення під знак диференціалу.

Таблиця основних невизначених інтегралів

(обов'язкова для запам'ятовування)

Підінтегральна функція			*Невизначений інтеграл*
1	Степенева	$x^n, n \neq -1$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
	Частинні випадки	$n=0$	$\int dx = x + C$
		$n=1$	$\int x \cdot dx = \frac{x^2}{2} + C$
		$\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$
		$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$	$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$

2	Показова	a^x	$\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C$
	Експонента	e^x	$\int e^x dx = e^x + C$
3	Логарифмічна	$\frac{1}{x},\ n=-1$	$\int \frac{dx}{x} = ln\lvert x\rvert + C$
4	Тригонометричні		$\int sinx\,dx = -cosx + C$
			$\int cosx\,dx = sinx + C$
			$\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + C$
			$\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C$
5	Обернені тригонометричні		$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcsin\frac{x}{a} + C$
			$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$
6	Ареасинус або "довгий логарифм"		$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$

Наступні інтеграли для запам'ятовування не обов'язкові, тому що можуть бути одержані за допомогою основної таблиці і методів інтегрування, що показано далі.

7	$\int tgx\,dx = -ln\lvert cosx\rvert + C$
8	$\int ctgx\,dx = ln\lvert sinx\rvert + C$
9	$\int \frac{dx}{sinx} = ln\left\lvert tg\frac{x}{2}\right\rvert + C$
10	$\int \frac{dx}{cosx} = ln\left\lvert tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
11	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} ln\left\lvert \frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$

Будь-який інтеграл з таблиці можна перевірити диференціюванням. Наприклад, 9 $\int \frac{dx}{sinx} = ln\left\lvert tg\frac{x}{2}\right\rvert + C$:

$$\left(ln\left(tg\frac{x}{2}\right)+C\right)' = \frac{1}{tg\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{cos\frac{x}{2}}{sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2sin\frac{x}{2}\cdot cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{sin x}.$$

Похідна первісної дорівнює підінтегральній функції.

Використовуючи властивості невизначених інтегралів и таблицю, можна *безпосередньо інтегрувати* багато функцій.

ПРИКЛАДИ

Безпосереднє інтегрування.

Самостійно визначте табличні інтеграли, що використані при розв'язанні прикладів.

① $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$

② $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}} = \int x^{-4/3}dx = \frac{x^{-1/3}}{-1/3} + C = \frac{-3}{\sqrt[3]{x}} + C$

③ $\int \frac{dx}{x^2+5} = \frac{1}{\sqrt{5}} arctg \frac{x}{\sqrt{5}} + C$

❢ - Зверніть увагу на знаки під коренями у прикладах 4 и 5.

④ $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2} + C$

⑤ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right| + C$

1	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
	$\int dx = x + C$
	$\int x\cdot dx = \frac{x^2}{2} + C$
	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$
	$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$
2	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
	$\int e^x dx = e^x + C$
3	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
4	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$
5	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$
	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$

7	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right\rvert + C$
8	$\int tgx\, dx = -\ln \lvert \cos x \rvert + C$
9	$\int ctgx\, dx = \ln \lvert \sin x \rvert + C$
10	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left\lvert tg\frac{x}{2} \right\rvert + C$
11	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left\lvert tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right\rvert + C$
12	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + C$

Будь-який інтеграл з таблиці можна перевірити диференціюванням. Наприклад, 9:

$$\left(\ln\left(tg\frac{x}{2}\right) + C\right)' = \frac{1}{tg\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x}.$$

Похідна первісної дорівнює підінтегральній функції.

Наступні приклади ілюструють спільне використання властивостей $\boxed{3}$ і $\boxed{4}$ (інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює сумі інтегралів від цих функцій, сталу можна винести за знак інтегралу) і безпосереднього інтегрування.

⑥ $\int\left(5x^3 - \frac{8}{x} - \sin x\right)dx = 5\int x^3 dx - 8\int\frac{dx}{x} - \int \sin x dx = 5\frac{x^4}{4} - 8\ln\lvert x\rvert + \cos x + C$

⑦ $\int \frac{dx}{x^2(9+x^2)} = \frac{1}{9}\int\frac{9+x^2-x^2}{x^2(9+x^2)}dx = \frac{1}{9}\left(\int\frac{dx}{x^2} - \int\frac{dx}{9+x^2}\right) = \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{3}arctg\frac{x}{3}\right) + C$

⑧ $\int \sin^2\frac{x}{2}dx = \frac{1}{2}\int(1-\cos x)dx = \frac{1}{2}\left(\int dx - \int\cos x dx\right) = \frac{1}{2}(x - \sin x) + C$

Правило. ***Інтеграли від парних степенів синуса і косинуса обчислюються по тригонометричній формулі зниження степеню.***

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos x)$$
$$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos x)$$

Використання властивості *інваріантності.*

⑨ $\int tg^2x\,d(tgx)=\frac{tg^3x}{3}+C$

⑩ $\int\frac{d(\ln x)}{\cos^2(\ln x)}=tg(\ln x)+C$

Функції, що інтегруються безпосередньо, не вичерпують навіть основних елементарних функцій, не кажучи вже про складні. Наприклад, між табличних нема інтегралів від трансцендентних функцій *lnx, arcsinx* і т.п.

Задача інтегрування у принципі більш складна, ніж задача диференціювання. У диференціальному численні є конструктивне визначення похідної і ряд правил диференціювання (суми, добутку, частки, складних і обернених функцій). Знаючи ці правила і таблицю похідних, можна знайти похідну будь-якої функції.

В інтегральному численні інтеграл визначається не конструктивно, правил для інтегрування добутку, частки, і т. п. немає. Є лише окремі прийоми (методи), що дозволяють інтегрувати окремі класи функцій. Такі методи ми розглянемо нижче.

Методи інтегрування

❢ - Запам’ятайте! Завжди, при використанні будь-якого, скільки завгодно складного метода інтегрування, конечною ***метою*** є ***приведення даного інтегралу до відомого табличного*** інтегралу. Усі дії, перетворення при обчисленні невизначених інтегралів підпорядковані саме цій меті, тому основну таблицю інтегралів треба знати напам’ять (щоб знати, до чого треба прийти).

1. Заміна змінної інтегрування (підстановка)

1.1. Внесення під знак диференціалу

Допустимо, що з деяких міркувань ми помітили, що заданий інтеграл обчислюється легше (легше приводиться до табличного), якщо замінити змінну інтегрування (x) новою функцією:

$$x=\varphi(t), \text{ причому } t=\psi(x).$$

Тоді $dx=d\varphi(t)=\varphi_t^{/}\,dt$ (за визначенням диференціалу, см. тему 4) і невизначений інтеграл буде виглядати наступним чином:

$$\int f(x)dx=\{x=\varphi(t)\}=\int f(\varphi(t))d\varphi(t)=\int f(\varphi(t))\varphi_t^{/}dt=F(\varphi(t))+C=F(x)+C$$

Ця формула показує, як робиться заміна змінної інтегрування або, що теж саме, підстановка.

Після визначення первісної треба зробити обернену заміну (повернутися до старої змінної x).

Часто заміна змінної здійснюється у оберненому порядку:

$$\int f(\varphi(x))\varphi_x^{/}dx=\{\varphi(x)=t\}=\int f(t)dt,$$

тоді її називають ***"внесення під знак диференціалу"***.

Дійсно, $\varphi_x^{/}dx=d\varphi(x)=dt$, тобто похідна $\varphi_x^{/}$ вноситься під знак диференціалу – букву d. При цьому під знаком диференціалу одержують ту функцію, похідна якої вносилась.

У зв'язку з цим корисно записати таку таблицю, що можна одержати з таблиці похідних (диференціалів):

$n\cdot x^{n-1}\cdot dx=dx^n$	$e^x dx=d(e^x)$	$\frac{1}{\cos^2 x}dx=d(tgx)$
$2\cdot x\cdot dx=dx^2$	$\frac{1}{x}dx=d(\ln x)$	$\frac{-1}{\sin^2 x}dx=d(ctgx)$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=d(\sqrt{x})$	$\cos x dx=d(\sin x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=d(\arcsin x)$
$\frac{-1}{x^2}dx=d\left(\frac{1}{x}\right)$	$-\sin x dx=d(\cos x)$	$\frac{1}{1+x^2}dx=d(arctgx)$

ПРИКЛАДИ

Внесення під знак диференціалу і використання властивості *інваріантності*.

① $\int\frac{dx}{x+1}=\begin{Bmatrix}\varphi(x)=x+1\\ d\varphi(x)=d(x+1)=dx\end{Bmatrix}=\int\frac{d(x+1)}{x+1}=\ln|x+1|+C$,

Тут використано правило диференціювання: $\boxed{d(x+C)=dx}$,

висновок: під знаком диференціалу можна додавати (віднімати) будь-яку сталу величину.

② $\int\sin 2x\cdot dx=\begin{Bmatrix}\varphi(x)=2x\\ d\varphi(x)=d(2x)=2dx\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\int\sin 2x\, d(2x)=-\frac{1}{2}\cos 2x+C$,

Тут використано правило диференціювання: $\boxed{d(C\cdot x)=C\cdot dx}$,

висновок: під знаком диференціалу можна множити на будь-яке число (поділив на це число весь інтеграл).

③ Порівняйте два приклади:

а) $\int\frac{x\,dx}{x^2+5}=\begin{Bmatrix}\varphi(x)=x^2\\ d\varphi(x)=2xdx\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{x^2+5}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+5)}{x^2+5}=\frac{1}{2}\ln|x^2+5|+C$,

та

б) $\int\frac{x\,dx}{x^4+5}=\begin{Bmatrix}\varphi(x)=x^2\\ d\varphi(x)=2xdx\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{x^4+5}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2)}{(x^2)^2+5}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{x}{\sqrt{5}}+C$.

❢ **Висновок:** будьте уважні і правильно визначайте табличний інтеграл.

④ $\int\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}=\{\cos xdx=d(\sin x)\}=\int\frac{d(\sin x)}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin x}+C.$

⑤ $\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{arctgx}}=\{\frac{dx}{1+x^2}=d(arctgx)\}=\int\frac{d(arctgx)}{\sqrt{arctgx}}=2\sqrt{arctgx}+C.$

⑥ $\int\frac{dx}{x\cdot\ln x}=\{\frac{dx}{x}=d(\ln x)\}=\int\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\ln|\ln x|+C.$

⑦ $\int\frac{e^x dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}=\{e^x dx=d(e^x)\}=\int\frac{d(e^x)}{\sqrt{2^2-(e^x)^2}}=\arcsin\frac{e^x}{2}+C.$

⑧ $\int\frac{3dx}{x^2-4x-5}$. Виділимо повний квадрат у знаменнику:

$$x^2-4x-5=(x^2-4x+4)-4-5=(x-2)^2-9.$$

Тоді $\int\frac{3dx}{x^2-4x-5}=3\int\frac{d(x-2)}{(x-2)^2-3^2}=\frac{3}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{(x-2)-3}{(x-2)+3}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-5}{x+1}\right|+C$

1.2. Рекомендована тригонометрична підстановка

У ряді випадків заміна змінної цілком визначена.

Зупинимося на випадку *рекомендованих тригонометричних підстановок.* Вони дозволяють інтеграл, що містить квадратні корені нижче наведеного виду, привести до інтегралу від тригонометричних функцій, що не містить коренів. Ці стандартні заміни зведені до таблиці.

	Вихідний інтеграл	*Рекомендована тригонометрична підстановка*	*За тригонометричними формулами*
1	$\int R(x;\sqrt{a^2-x^2})dx$	$x=a\sin t; dx=a\cos t dt;$ $t=\arcsin\frac{x}{a}$	$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$
2	$\int R(x;\sqrt{x^2-a^2})dx$	$x=\frac{a}{\sin t};\ dx=\frac{-a\cos t dt}{\sin^2 t};$ $t=\arcsin\frac{a}{x}$	$\sqrt{x^2-a^2}=a\,ctgt$
3	$\int R(x;\sqrt{x^2+a^2})dx$	$x=a\,tgt;\ dx=\frac{a\,dt}{\cos^2 t};$ $t=arctg\frac{x}{a}$	$\sqrt{x^2+a^2}=\frac{a}{\cos t}$

Приклади використання рекомендованої тригонометричної підстановки см. у розділі ***Приклади виконання обов'язкових завдань по темі 5.***

У других випадках для позбавлення від коренів іноді достатньо замінити підкоренений вираз степеневою функцією у такому степеню, щоб всі корені витягувалися.

ПРИКЛАД

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}=\left\{\begin{matrix}x=t^4;\quad t=\sqrt[4]{x}\\ dx=4t^3\end{matrix}\right\}=$$

Для підстановки оберемо таку степеневу функцію, щоб усі корени витягувалися.

$$=\int\frac{4t^3dt}{t^2-t}=4\int\frac{t^3}{t(t-1)}dt=$$

Спростимо підінтегральний вираз.

$$=4\int\frac{t^2-1+1}{t-1}dt=4\int\frac{(t-1)(t+1)}{t-1}dt+4\int\frac{dt}{t-1}=$$

Додамо і віднімемо у чисельнику одиницю і розіб'ємо інтеграл на суму двох інтегралів.

$= 4\int(t+1)dt + 4\int\frac{dt}{t-1} = 4\frac{(t+1)^2}{2} + 4\ln|t-1| + C =$ Використаємо "внесення під знак диференціалу".

$= 2(\sqrt[4]{x}+1)^2 + 4\ln\left|\sqrt[4]{x}-1\right| + C$ Переходимо до змінної x .

Методи інтегрування

1.3. По частинах

$\boxed{\int U\cdot dV = U\cdot V - \int V\cdot dU}$ - формула інтегрування по частинах.

Основна ***ідея*** метода інтегрування по частинах: розбити підінтегральний вираз вихідного інтегралу на ***частини*** U і dV таким чином, щоб інтеграл $\int V\cdot dU$ виявився ***проще*** вихідного.

Існує клас функцій, для якого метод інтегрування по частинах наперед визначений. Це добуток трансцендентних функцій на многочлен.

Нехай $P_n(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x + a_0$ - многочлен n-го порядку. Наприклад, $P_1(x)=a_1x+a_0$ - лінійний, $P_2(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$ - квадратний, і т. д. Відзначимо, що при диференціюванні ступінь многочлену знижується на одиницю. Розбиття на частини відбувається залежно від виду трансцендентних функцій, що представлено у таблицях нижче.

У *першому випадку* для експоненти та тригонометричних функцій ($\sin ax$, $\cos ax$, де a – const) у якості частини U треба обирати многочлен $P_n(x)$, тому що при диференціюванні його порядок знижується на одиницю.

Вихідний інтеграл	*Розбиття на частини*	*За формулою інтегрування по частинах*
$\int P_n(x)e^{ax}dx$	$U=P_n(x)$ $dV=\left\langle\begin{array}{l} e^{ax}dx \\ \sin ax\cdot dx \\ \cos ax\cdot dx \end{array}\right.$	$dU=P_{n-1}(x)dx$ – ступінь многочлену знижується на одиницю. $V=\int dV$
$\int P_n(x)\cdot\sin ax\cdot dx$		
$\int P_n(x)\cdot\cos ax\cdot dx$		

Після однократного інтегрування по частинах одержують інтеграл того же виду, але з більш низьким степенем многочлену. Після n-кратного інтегрування по частинах одержують інтеграли виду

$$\int e^{ax}dx,$$

$$\int \sin ax\cdot dx,$$

$$\int \cos ax\cdot dx.$$

Вони зводяться до табличних множенням на $a-const$ під знаком диференціалу.

У *другому випадку* враховується, що указані нижче трансцендентні функції при диференціюванні переходять у степеневі, і не зважаючи на зростання степеню многочлену при інтегруванні, інтеграл $\int V\cdot dU$ буде інтегралом від раціональної функції.

Таким чином, ми добиваємося того, що диференціювання приводить до функцій, що не вміщують трансцендентності.

Вихідний інтеграл	*Розбиття на частини*	*За формулою інтегрування по частинах*
$\int P_n(x)\cdot \ln ax\cdot dx$	$U=\left\langle \begin{matrix} \ln ax \\ \arcsin ax \\ \operatorname{arctg} ax \end{matrix}\right.$	$dU=\left\langle \begin{matrix} \frac{1}{x}dx \\ \frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}dx; \\ \frac{a}{1+a^2x^2}dx \end{matrix}\right.$
$\int P_n(x)\cdot \arcsin ax\cdot dx$		
$\int P_n(x)\cdot \operatorname{arctg} ax\cdot dx$ (та інші обернені тригонометричні функції).	$dV=P_n(x)\cdot dx$	$V=\int dV=P_{n+1}(x)$

ПРИКЛАДИ

$$\boxed{\int U\cdot dV=U\cdot V-\int V\cdot dU}$$ - формула інтегрування по частинах.

① $\int (x-1)\cdot e^{-x}dx=$

Розбиваємо інтеграл на частини відповідно до рекомендацій *(перший випадок*).

$$=\left\{\begin{matrix} U=x-1 & dU=dx \\ dV=e^{-x}dx & V=\int e^{-x}dx=-e^{-x} \end{matrix}\right\}=$$

$$V=\int e^{-x}dx=-\int e^{-x}d(-x)=-e^{-x}$$

$=-(x-1)e^{-x}-\int(-e^{-x})dx=$

По формулі інтегрування по частинам.

$=-xe^{-x}+e^{-x}-e^{-x}+C=-xe^{-x}+C.$

Алгебраїчні перетворення приводять до остаточної відповіді.

② $\int arcctg\,2x\cdot dx=$

$$=\begin{Bmatrix} U=arcctg\,2x & dU=\dfrac{-2}{1+4x^2}dx \\ dV=dx & V=\int dx=x \end{Bmatrix}=$$

Розбиваємо інтеграл на частини відповідно до рекомендацій (*другий випадок*).

$$=x\cdot arcctg\,2x-\int\frac{-2x}{1+4x^2}dx=$$

По формулі інтегрування по частинам.

$$=x\cdot arcctg\,2x+\frac{1}{4}\int\frac{d(1+4x^2)}{1+4x^2}=$$

$$=x\cdot arcctg\,2x+\frac{1}{4}\ln(1+4x^2)+C$$

Для обчислення інтегралу використаємо "внесення під знак диференціалу":

$$d(1+4x^2)=8x\cdot dx$$

③ Метод інтегрування по частинам можна застосовувати сумісно з методом заміни змінних.

$$\int\sin^2(\sqrt{x})dx=\begin{Bmatrix} x=t^2;t=\sqrt{x} \\ dx=2tdt \end{Bmatrix}=$$

Змінюємо змінну інтегрування.

$sin^2 t$ – розкладуємо за формулою зниження степеню.

$$=2\int t\,sin^2 t\,dt=2\int t\cdot\frac{1-cos\,2t}{2}dt=$$

$$=\frac{t^2}{2}-\int t\,cos\,2tdt=$$

Одержаний інтеграл розбиваємо на суму двох інтегралів. Перший – табличний: $\int t\cdot dt$, другий обчислюємо по частинах.

$$=\begin{Bmatrix} U=t,\ dU=dt \\ dV=cos\,2tdt,\ V=\dfrac{sin\,2t}{2} \end{Bmatrix}=$$

Розбиваємо інтеграл на частини відповідно до рекомендацій.

$$=\frac{t^2}{2}-t\frac{\sin 2t}{2}+\frac{1}{2}\int\sin 2tdt=\frac{t^2}{2}-t\frac{\sin 2t}{2}-$$

$$-\frac{1}{4}\cos 2t+C=\frac{\sqrt{x}}{2}(\sqrt{x}-\sin 2\sqrt{x})-\frac{1}{4}\cos 2\sqrt{x}+C$$

По формулі інтегрування по частинам.