## Знайти область збіжності функціонального ряду.

**Увага!** При використанні будь-яких достатніх ознак збіжності для визначення області збіжності функціонального ряду треба пам'ятати, що вони справедливі тільки для невід'ємних рядів.

Тому обов'язково брати $u_n$ ПО МОДУЛЮ при обчисленні відповідних границь.

***ПРИКЛАДИ***

① $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{|\sin^3 nx|}{9^n}$ Для визначення області збіжності скористуємося **2** – ознакою порівняння. Врахуємо, що $\sin^3 n \leq 1$.

$\frac{|\sin^3 nx|}{9^n} \leq \frac{1}{9^n} = \left(\frac{1}{9}\right)^n$ Модуль загального члена ряду не перевершує *при будь-яких значеннях змінної* $x$ загального члена збіжної геометричної прогресії ($q = \frac{1}{9} < 1$).

Це означає, що ряд збігається, причому абсолютно на всій числовій осі: $x \in (-\infty; \infty)$ є областю збіжності.

❢ - Будьте уважні, якщо ряд **не** знакозмінний, то для нього **немає** понять абсолютної і умовної збіжності.

② $u_n = \frac{(x-3)^n n^2}{(n^2+1)2^n}$ Для визначення області збіжності скористуємося **3** – ознакою Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}(n+1)^2}{((n+1)^2+1)\cdot 2^{n+1}}\cdot\frac{(n^2+1)2^n}{(x-3)^n n^2}\right| =$$

Модуль потрібен, бо ознака Даламбера справедлива тільки для невід'ємних рядів.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)n^2}{n^2\cdot 2}\cdot\frac{n^2}{n^2}\right| = \frac{|x-3|}{2}$$

Виділяємо головну частину і скорочуємо. Модуль залишаємо на тому виразі, який може змінювати знак ($x$ при обчисленні границі вважається const).

$\frac{|x-3|}{2} < 1$

За ознакою Даламбера для збіжності ряду повинно бути $q < 1$.

$|x-3| < 2$

$-2 < x-3 < 2$

$1 < x < 5$

Розв'язок нерівності з модулем дає область збіжності ряду.

Далі ОБОВ'ЯЗКОВО треба перевірити збіжність ряду на кінцях інтервалу.

$x=5$ тоді $u_n=\frac{(5-3)^n n^2}{(n^2+1)2^n}=\frac{n^2}{(n^2+1)}$ Невід'ємний ряд.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n^2+1)}=1$, ряд розбігається Не виконується необхідна ознака збіжності ряду.

$x=1$ тоді $u_n=\frac{(1-3)^n n^2}{(n^2+1)2^n}=\frac{(-1)^n n^2}{(n^2+1)}$ Тут $(-2)^n=(-1)^n 2^n$. Ряд знакозмінний.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n^2+1)}=1$, ряд розбігається Не виконується умова теореми Лейбниця – модуль загального члена ряду не прямує до нуля при $n\to\infty$.

Відповідь: Остаточно область (інтервал) збіжності даного ряду:

$1<x<5$ або $x\in(1;5)$

③ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)+\sqrt{n+1}}\cdot\frac{n+\sqrt{n}}{x^n}\right|=$ Для визначення області збіжності скористуємося **3** – ознакою Даламбера.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n}\cdot\frac{n}{x^n}\right|=|x|$ Виділяємо головну частину і скорочуємо.

$|x|<1$

$-1<x<1$ Розв'язок нерівності з модулем дає область збіжності ряду.

Перевіряємо збіжність на кінцях одержаного інтервалу.

$x=1$, тоді

$u_n=\frac{1}{n+\sqrt{n}}$ Невід'ємний ряд. Для дослідження його збіжності використаємо **2** – ознаку порівняння.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n+\sqrt{n})}=0$ Необхідна ознака збіжності виконується.

$\frac{1}{n+\sqrt{n}}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{n}$, p=1 Порівнюємо з узагальненим гармонічним рядом. При $x=1$ ряд розбігається.

$x=-1$ тоді $u_n = \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}$ Знакозмінний ряд. Ряд з абсолютних величин (АР) вже досліджений при $x=1$ і відомо, що він розбігається.

Розбіжність (АР) веде до перевірки виконання умов теореми Лейбниця:

1) монотонне спадання за абсолютною величиною $\frac{1}{n+\sqrt{n}} > \frac{1}{n+1+\sqrt{n+1}}$ виконується,

2) модуль загального члена ряді прямує до нуля при $n \to \infty$ - виконується, тому що виконується необхідна ознака збіжності АР.

| (АР) розбігається | $\Rightarrow$ при $x=-1$ ряд збігається умовно. |
|---|---|
| Теорема Лейбниця виконується, знакозмінний ряд збігається. | |

Відповідь: Остаточно область (інтервал) збіжності даного ряду:

$$-1 \le x < 1 \text{ або } x \in [-1;1)$$