Ряди

☛ Ряд – це сума нескінченого числа доданків.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

Членами суми або членами ряду можуть бути

числа – тоді одержимо *числовий* ряд або

функції – одержимо *функціональний* ряд.

☛ Ряд вважається заданим, якщо заданий закон, за яким можна знайти будь-який член ряду залежно від його номера n.

Наприклад, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{n}{n+1} + \cdots$.

Тут **загальний член ряду** $u_n = \frac{n}{n+1}$ заданий формулою, тобто залежністю від його номера.

Числові ряди. Основні поняття

Сума n перших членів ряду називається *n-ой частинною сумою* ряду:

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

Виникає закономірне питання – чи існує скінчена сума нескінченого числа доданків?

☛ Ряд називається *збіжним*, якщо існує скінчена границя послідовності його частинних сум: $\lim_{n\to\infty} S_n = S$.

Число S називається ***сумою*** ряду.

Якщо границя послідовності частинних сум дорівнює нескінченості або зовсім не існує, то ряд *розбігається*.

При розгляді числових рядів практично вирішується задача дослідження ряду на збіжність.

Наприклад, для суми ***нескінченої геометричної прогресії*** (q – знаменник прогресії) будемо вважати відомим, що цей ряд:

<table>
<tr><td rowspan="2">$a+aq+aq^2+...+aq^n+...(a\neq 0)$</td><td>збігається при $|q|<1$
і його сума $S=\dfrac{a}{1-q}$;</td></tr>
<tr><td>розбігається при $|q|\geq 1$.</td></tr>
</table>

Часткова сума ряду геометричної прогресії $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ дорівнює

$$S_n = 1+q+q^2+...+q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Якщо $|q|<1$, то $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1-q}$.

Якщо $|q|>1$, то послідовність $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ є нескінченно великою.

При $q=-1$: $S_n = \begin{cases} 0, \text{ якщо } n=2k; \\ 1, \text{ якщо } n=2k-1. \end{cases}$ Границя такої послідовності не існує.

При $q=1$: $S_n = 1+1+...+1 = n$, $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$. Таким чином, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ збігається при $|q|<1$ і розбігається при $|q|\geq 1$.

✒ ***<u>Теорема</u>***. *Необхідна ознака збіжності ряду*.

Якщо ряд збігається, то його загальний член прямує до нуля, тобто

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = 0}$$

Звідси наслідок: якщо $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд розбігається.

❢ - <u>Зверніть увагу</u>! З виконання умови $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ <u>не випливає збіжність ряду</u>!
Ряд може збігатися, а може і розбігатися.

Далі це буде показано при дослідженні *узагальненого гармонічного ряду :* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}(p>0)$, незважаючи на те, що теорема про необхідну ознаку збіжності виконується: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0$.

Таким чином, виникає необхідність у *достатніх ознаках* збіжності рядів, з виконання яких буде витікати збіжність ряду.

Достатні ознаки збіжності невід'ємних числових рядів

Всі ознаки, що розглянуті у цьому розділі, можна використовувати тільки для ***знакосталих*** числових рядів, тобто всі члени ряду повинні бути тільки додатними або тільки від'ємними (взагалі – одного знаку).

1 – Інтегральна ознака Коши

Оснований на аналогії між рядами і невласними інтегралами 1 роду. Застосується в основному у тих випадках, коли збіжність/розбіжність НІ-1 легко показати обчисленням.

✐ - Схема застосування:

Перевірити *необхідну ознаку збіжності ряду*. Якщо вона:

Виконується, тобто $\lim_{n\to\infty}u_n=0$.	Не виконується
Замість дослідження ряду на збіжність дослідимо на збіжність відповідний НІ-1. Ряд і інтеграл збігаються/розбігаються одночасно.	Можна відразу зробити висновок про <u>розбіжність</u> ряду.

Правила заміни ряду на НІ-1.

Границі НІ-1 – це границі зміни індексу додавання ряду;

підінтегральна функція одержується заміною n на x у виразі для загального члену ряду.

ПРИКЛАДИ

① Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$

Перевірка необхідної ознаки збіжності ряду:

$\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n\ln n}=\left|\dfrac{1}{\infty}\right|=0}$ - виконується.

Порівняйте!

Розглянемо невласний інтеграл $\boxed{\int\limits_{2}^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln x}dx}$,

для перевірки збіжності обчислимо його.

$$\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\lim_{R\to\infty}\int\limits_{2}^{R}\frac{1}{x\ln x}dx=\lim_{R\to\infty}\int\limits_{2}^{R}\frac{d\ln x}{\ln x}=\lim_{R\to\infty}\left(\ln(\ln x)\Big|_{2}^{\infty}\right)=\infty;$$

так як $\ln x\xrightarrow[x\to\infty]{}\infty$.

З розбіжності невласного інтеграла $\Rightarrow$ *розбіжність* заданого ряду.

② Дослідимо на збіжність наступний ряд і далі будемо користуватися результатами без доведення.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}(p>0)$ - ***узагальнений гармонічний ряд***.

Очевидно, необхідна ознака збіжності виконується:

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n^p}=\left[\frac{1}{\infty}\right]=0$, при p>0.

Розглянемо невласний інтеграл $(p\neq 0)$.

$$\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{1}^{R}\frac{dx}{x^p}=\lim_{A\to+\infty}\frac{x^{-p+1}}{1-p}\Bigg|_{1}^{R}=\begin{cases}\dfrac{1}{p-1}=const, p>1\\ \infty, p<1\end{cases}.$$

При $p=1$ маємо $\int\limits_{1}^{\infty}\dfrac{dx}{x}=\lim\limits_{R\to+\infty}\int\limits_{1}^{R}\dfrac{dx}{x}=\lim\limits_{R\to+\infty}\ln x\Big|_{1}^{R}=\infty$.

Отже, ряд $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}-\begin{cases}\text{збігається при } p>1\\ \text{розбігається при } p\le 1\end{cases}}$.

узагальнений гармонічний ряд

2 – Ознака порівняння

Також основана на аналогії між рядами і невласними інтегралами 1 роду.

Обмежимося висновками з теореми про ознаку порівняння – практичним способом дослідження рядів на збіжність.

2 - Схема застосування:

Перевірити *необхідну ознаку збіжності ряду*. Якщо вона:

Виконується, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0.$	Не виконується
Загальний член ряду порівнюють (при $n\to\infty$) із загальним членом ряду, про який точно відомо, збігається він або розбігається. Якщо загальний член заданого ряду (при $n\to\infty$) еквівалентний загальному члену відомого збіжного ряду, то заданий ряд збігається, а еквівалентність загальному члену відомого розбіжного ряду означає розбіжність заданого ряду.	Можна відразу зробити висновок про розбіжність ряду.

Зазвичай в ознаці порівняння використовують один з двох відомих рядів:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} (p>0)$ - ***узагальнений гармонічний ряд;***

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} - \begin{cases} \text{збігається при } p>1 \\ \text{розбігається при } p\le 1 \end{cases}$$

або

$a\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots (a \ne 0)$ - ***суму нескінченої геометричної прогресії,*** *що*

$$a\sum_{n=0}^{\infty} q^n - \begin{cases} \text{збігається при } |q|<1, \quad S=\dfrac{a}{1-q} \\ \text{розбігається при } |q|\ge 1 \end{cases}$$

Ознаку порівняння можна використовувати у граничному вигляді.

Припустимо, що порівнюємо невід'ємні ряди з членами a_n і b_n, про один з яких відомо, збіжний він, чи розбіжний.

Тоді, якщо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = const \neq 0$$

ряди збігаються/розбігаються одночасно.

ПРИКЛАД

Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} sin\frac{\pi}{n^2+1}$

Необхідна ознака збіжності ряду: $\lim_{n\to\infty} sin\frac{\pi}{n^2+1} = |sin 0| = 0$ - виконується.

Знайдемо ряд, що еквівалентний даному при $n \to \infty$ на основі понять НМ (нескінченно малих) і НВ (нескінченно великих) величин; таблиці еквівалентних НМ. Дивись ***Тема 3. Границя і неперервність функції.***

$$sin\frac{\pi}{n^2+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\pi}{n^2+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\pi}{n^2}$$

Загальний член заданого ряду еквівалентний загальному члену *збіжного* узагальненого гармонічного ряду $\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(p=2>1)$, отже, заданий ряд *збігається*.

Теж саме у граничному вигляді:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{sin\frac{\pi}{n^2+1}}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{n^2}}{\frac{1}{n^p}} = \left|\begin{matrix}\text{щоб вийшла } const \neq 0\\ \text{треба } \mathrm{p} = 2\end{matrix}\right| = \pi\ (const \neq 0)$$

3 – Ознака Даламбера

Основана на порівнянні заданого ряду із сумою нескінченої геометричної прогресії. Він є одночасно необхідною і достатньою ознакою збіжності числового ряду. Тому окремо необхідна ознака збіжності числового ряду не перевіряється.

3 - Схема застосування:

Перевіряти *необхідну ознаку збіжності ряду* не обов’язково.

Обчислюється границя відношення наступного члена ряду до попереднього:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q\begin{cases} q<1,\ ряд\ збігається \\ q>1,\ ряд\ розбігається \\ q=1,\ не\ можна\ робити\ висновки\end{cases}}$$ *,потрібно шукати іншу ознаку*

(в геометричній прогресії це відношення дорівнює знаменнику прогресії q).

Так як розглядаємо знакосталі ряди, $q>0$.

Ряд збігається/розбігається в залежності від величини q так, як збігається/розбігається сума нескінченої геометричної прогресії в залежності від її знаменника q.

❢ - Зверніть увагу! Якщо границя = 1, треба шукати іншу достатню ознаку збіжності ряду.

За ознакою Даламберу досліджуються на збіжність ряди, загальні члени яких містять **факторіали, показникові функції**.

ПРИКЛАД

Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n(\sqrt[3]{n}+1)}$

Складаємо $n+1$ член ряду, замінивши в u_n n на $n+1$: $\frac{(n+1)!}{2^{n+1}(\sqrt[3]{n+1}+1)}$

Обчислюємо границю

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{2^{n+1}(\sqrt[3]{n+1}+1)}\cdot\frac{2^n(\sqrt[3]{n}+1)}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2}=\infty>1$$

Пояснення по обчисленню. Скорочення факторіалів: $\frac{(n+1)!}{n!}=\frac{n!\cdot(n+1)}{n!}=n+1$.

Виділення головної частини: $\sqrt[3]{n}+1\sim\sqrt[3]{n};\quad \sqrt[3]{n+1}+1\sim\sqrt[3]{n}$

при $n\to\infty$. Скорочення головних частин дає 1.

Ряд *розбігається*, так як $q>1$.

4 – Радикальна ознака Коши

(Радикал – у математиці корінь)

Аналогічно ознаці Даламбера, ця ознака теж основана на порівнянні ряду з сумою нескінченої геометричної прогресії.

Він є одночасно необхідною і достатньою ознакою збіжності числового ряду.

4 - Схема застосування:

Перевіряти *необхідну ознаку збіжності ряду* не обов'язково.

Обчислюється границя кореню n-ого степеню з n-го члена ряду

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=q\begin{cases} q<1, \text{ ряд збігається}\\ q>1, \text{ ряд розбігається}\\ q=1, \text{ не можна робити висновки}\end{cases}}$$ *потрібно шукати іншу ознаку*

(в геометричній прогресії цей корінь дорівнює знаменнику прогресії q).

Так як розглядаємо невід'ємні ряди, $q>0$.

Ряд збігається/розбігається в залежності від величини q так, як збігається/розбігається сума нескінченої геометричної прогресії в залежності від її знаменника q.

❢ - Зверніть увагу! Якщо границя = 1, треба шукати іншу достатню ознаку збіжності ряду.

За радикальною ознакою Коши досліджуються на збіжність ряди, загальні члени яких стоять у степеню, що залежить від номера члену ряду n.

ПРИКЛАД

Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} ln^{n-1}\left(1+\frac{2}{n}\right)$

Обчислимо границю

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{ln^{n-1}\left(1+\frac{2}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\left(ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\right)^{1-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}\right)^{1} = 0 < 1$$

Пояснення по обчисленню.

Еквівалентні НМ величини: $\ln(1+\alpha)\sim\alpha$ при $\alpha\to 0$.

Тут $\alpha=\frac{2}{n}\to 0$ при $n\to\infty$. У степеню: $1-\frac{1}{n}\sim 1;$ при $n\to\infty$.

Ряд *збігається*, так як $q<1$

Знакозмінні ряди. Теорема Лейбниця

У знакозмінних рядах будь-які два сусідніх члена мають різні знаки, тобто чергуються додатний і від'ємний члени.

Чергування знаків можна врахувати у запису загального члену ряду за допомогою (-1) у степеню, що залежить від n, Наприклад:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_1-u_2+u_3-\ldots(-1)^{n+1}u_n+\ldots,\text{ де } u_i>0; i=\overline{1,\infty}$$

У даному розділі позначення u_n теж саме, що і $|u_n|$.

Для знакозмінних рядів **справедлива <u>необхідна</u> ознака збіжності**, але **не можна застосовувати розглянуті вище <u>достатні</u> ознаки збіжності**.

Достатню ознаку збіжності знакозмінних рядів дає теорема Лейбниця.

✎ ***<u>Теорема Лейбниця</u>.*** Якщо члени знакозмінного ряду монотонно спадають за абсолютною величиною, причому $lim_{n\to\infty} u_n = 0$, то знакозмінний ряд *збігається*.

Для знакозмінних рядів вводять поняття **абсолютної** і **умовної** збіжності. Пов'язано це з тим, що **абсолютно** збіжні ряди володіють властивостями скінчених сум (наприклад, переміщувальною властивістю додавання: при зміні місць доданків сума не зміниться), а **умовно** збіжні можуть і не володіти.

ПРИКЛАД

Розглянемо ***узагальнений гармонічний ряд,*** який ще і знакозмінний.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\ldots=$$

Поміняємо місцями доданки так, щоб за кожним непарним членом слідували два парних і додамо підкреслені:

$$=\underline{1-\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}+\underline{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}-\frac{1}{8}+\frac{1}{7}-\ldots=\ \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\ldots=$$

Тепер можна винести загальний множник ½.

Сума, що у дужках, і є сума вихідного ряду

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{7}-\ldots\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}.$$

Цей дивний результат – при зміні місць доданків сума зменшилася удвічі – одержаний тому, що даний ряд *збігається* **умовно,** що можна показати за схемою, що наведена нижче.

Схема дослідження знакозмінного ряду на абсолютну/умовну збіжність

Досліджується на абсолютну/умовну збіжність заданий ряд: (ЗР) -

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$$

Складемо ряд з абсолютних величин (модулів) членів ряду: (АР) - $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$

АР – невід'ємний, дослідимо на збіжність за необхідним і одним з чотирьох достатніх ознак. Можливі два варіанти результатів дослідження:

⇙ АР – збігається ⇩ ЗР – *збігається* **абсолютно**

⇘ АР – розбігається ⇩ Перевіряється виконання умов теореми Лейбниця

⇙ виконуються ⇩ ЗР – *збігається* **умовно**

⇘ не виконуються ⇩ ЗР – *розбігається*

ПРИКЛАД

Досліджуємо ряд (ЗР) - $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$.

Складемо (АР) - $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Цей ряд *розбігається,* як відомий - ***узагальнений гармонічний ряд*** з $p=1$.

Умови теореми Лейбниця очевидно виконані: $\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}$ і $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$,

отже ЗР – *збігається* **умовно.**

Функціональні ряди. Степеневі ряди та їх властивості

☛ Ряд, членами якого є функції змінної x, називається *функціональним* рядом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$$

Будемо вважати, що заданий закон, за яким можна знайти будь-який член ряду в залежності від його номера n.

Наприклад: $f_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{3}$.

Також припустимо, що існує область (ОДЗ), у якій визначені всі функції $f_n(x)$.

☛ Множина значень змінної $x \in$ ОДЗ, при яких ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *збігається*, називається ***областю збіжності*** функціонального ряду.

В області збіжності ряду його сума є функцією від x: $S = S(x)$.

Визначення області збіжності функціональних рядів – одна з основних задач при роботі с рядами.

Розглянемо ***степеневі функціональні ряди***.

Степеневим рядом називається ряд виду (1):

$$a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \quad (1)$$

$a_i = const,\ x_0 = const$. Якщо $x_0 = 0$, то маємо ряд виду (2):

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (2)$$

Ряд (1) приводиться до ряду (2) заміною $x - x_0 = y$.

Степеневі функціональні ряди володіють рядом важливих ***властивостей***, що полегшують роботу з ними.

Властивість 1. За теоремою Абеля степеневі ряди ***збігаються, причому абсолютно,*** в інтервалах, симетричних відносно : точки $x = x_0$ - для (1) або точки $x = 0$ для (2).

Звідси: існує **інтервал збіжності** степеневого ряду виду (2) : $(-R;R)$, де R – радіус збіжності ряду.

Ряд (2) збігається при $|x| < R$, розбігається при $|x| > R$.

В точках $x = \pm R$ (крайніх точках інтервалу) обов'язково потрібне додаткове дослідження збіжності.

Інтервал збіжності може вироджуватися до точки $R = 0$ або збігатися зі всією віссю OX: $R = \infty$.

Радіус збіжності степеневого ряду знаходиться по формулі

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{або} \quad R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

(див. достатні ознаки збіжності невід'ємних рядів – Даламбера і радикальну ознаку Коши).

Властивість 2. Всередині інтервалу збіжності сума степеневого ряду неперервна.

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ – неперервна у інтервалі збіжності.

Властивість 3. Степеневий ряд можна почленно інтегрувати і диференціювати будь-яке число разів всередині інтервалу збіжності.

При цьому радіус збіжності одержаних степеневих рядів не змінюється.

$$\int_a^в\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^в f_n(x)dx = \int_a^в S(x)dx$$

$[a;в] \in$ інтерв. збіжності

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right)'_x = \sum_{n=0}^{\infty}\left(f_n(x)\right)'_x = S'_x(x)$$

! якщо $S'(x)$ – збігається рівномірно (правильно)

$S'(x)$ – ряд з похідних членів заданого ряду.

NB. При інтегруванні/диференц. одержуємо теж степеневий ряд.

Розкладення функцій у степеневі ряди
Ряди Тейлора і Маклорена

Теорема. Нехай функція $f(x)$ нескінчене число разів диференційована в околі точки x_0. Тоді для неї можна побудувати лише один степеневий ряд – ряд Тейлора, що збігається до значення функції у точці x_0.

Ряд Тейлора має вид

$$\boxed{f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots}$$

А при $x_0=0$ маємо *ряд Маклорена*

$$\boxed{f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots}$$

Також існують терміни: «розкладення функції в ряд в околі точки x_0 (або нуля)»,
або «розкладення по степеням ($x-x_0$) (або x)»

Розкладення основних елементарних функцій в ряд Маклорена і інтервали збіжності таких рядів – назвемо їх *стандартними степеневими рядами*.

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\quad x\in R.$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\quad x\in R$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,\quad x\in R$$

$$ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+...,\quad x\in(-1;1]$$

$$arctg\,x=x-\frac{x^3}{3}+...+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)}+...,\quad x\in[-1;1]$$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+...+\frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n+...,\qquad |x|<1.$$

Стандартні степеневі ряди використовують у наближених обчисленнях. Вони запрограмовані у якості підпрограм у різних мовах програмування для обчислення основних елементарних та інших функцій.