ЛДР-1, тип 3.

1) $x^2 \cdot y' + (1-2x)y = x^2 \quad | : x^2$

$y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1$ тип 3.

$p(x) = \frac{1-2x}{x^2}$; $q(x) = 1$.

Ф-ли Б-Ф: $y(x) = R(x) \cdot S(x)$.

$R(x) = e^{-\int p(x)dx}$; $-\int p(x)dx = \int \frac{2x-1}{x^2}dx = 2\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2} = 2\ln|x| + \frac{1}{x}$.

$R(x) = e^{2\ln|x|} \cdot e^{\frac{1}{x}} = x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}$; $S(x) = \int \frac{q(x)}{R(x)}dx = \int \frac{1}{x^2 e^{\frac{1}{x}}}dx = \int e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}dx =$

$= -\int e^{-\frac{1}{x}} d\left(\frac{1}{x}\right) = -e^{-\frac{1}{x}} + C$; $y(x) = x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}\left(-e^{-\frac{1}{x}} + C\right)$

$\underline{y(x) = -x^2 + Cx^2 e^{\frac{1}{x}}}$

2) $2x\,dy + (x^2 - 6y)dx = 0 \quad | : dx$; $y' = \frac{dy}{dx}$

$2x \cdot y' + (x^2 - 6y) = 0 \quad | : 2x$

$y' + \frac{1}{2}x - 3\frac{y}{x} = 0$ тип 3.

$y' - y \cdot \frac{3}{x} = -\frac{1}{2}x$ $p(x) = -\frac{3}{x}$; $q(x) = -\frac{1}{2}x$

$y' + y \cdot p(x) = q(x)$

$y = R(x) \cdot S(x)$; $R(x) = e^{-\int p(x)dx} = e^{3\int \frac{dx}{x}} = e^{3\ln|x|} = x^3$

$S(x) = \int \frac{q(x)}{R(x)}dx = \int -\frac{x}{2 \cdot x^3} = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2}dx = +\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + C$

$\underline{y(x) = x^3\left(\frac{1}{2x} + C\right)}$ загальний розв'язок

Знайти частинний розв'язок за початк. умовою: $y|_{x=1} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + C$; $C = 0$.

$y(x) = \frac{x^2}{2}$ – частин. розв'язок.

3) $y' = 3x^2 y + x^2 + x^5$

$y' - 3x^2 \cdot y = x^2 + x^5$ лін 3; $P(x) = -3x^2$; $q(x) = x^2 + x^5$

$y(x) = R(x) \cdot S(x)$; $R(x) = e^{-\int -3x^2 dx} = e^{x^3}$

$$S(x) = \int \frac{q(x)}{R(x)} dx = \int \frac{x^2(1+x^3)}{e^{x^3}} dx = \int e^{-x^3} \cdot \underline{x^2(1+x^3)} dx =$$

$d(x^3) = 3x^2 dx$

$$= \frac{1}{3} \int e^{-x^3} (1+x^3)\, d(x^3) = \left| t = x^3 \right| = \frac{1}{3} \int e^{-t} \cdot (1+t)\, dt =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = 1+t & du = dt \\ dv = e^{-t} dt & v = e^{-t} \end{matrix} \right| = \left(-e^{-t}(1+t) + \int \underset{-e^{-t}}{e^{-t} dt} \right) \frac{1}{3} =$$

$$= -\frac{1}{3} e^{-t} (1+t+1) = -\frac{1}{3} e^{-x^3} (t+2) + C.$$

$$\underline{y(x)} = e^{x^3} \left(-\frac{1}{3} e^{-x^3} (x^3+2) + C \right) = \underline{-\frac{1}{3}(x^3+2) + C e^{x^3}}.$$

4) $y' + 2y \operatorname{ctg} x = \cos x$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ з-ча Коші

лін 3, $P(x) = 2 \operatorname{ctg} x$; $q(x) = \cos x$.

$y = R(x) \cdot S(x)$; $R(x) = e^{-\int 2 \operatorname{ctg} x dx} = e^{-2 \ln |\sin x|} = (\sin x)^{-2}$

$$S(x) = \int \frac{q(x)}{(\sin x)^{-2}} dx = \int \cos x \cdot \sin^2 x\, dx = \int \sin^2 x \cdot d(\sin x) =$$

$d(\sin x) = \cos x\, dx$

$$= \frac{1}{3} \sin^3 x + C.$$

$$\underline{y(x)} = \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \left(\frac{1}{3} \sin^3 x + C \right) = \underline{\frac{1}{3} \sin x + \frac{C}{\sin^2 x}}$$ загальн. розв'яз.

З початкової умови: $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

$1 = \frac{1}{3} + C$; $C = \frac{2}{3}$.

$\underline{y(x) = \frac{1}{3} \sin x + \frac{2}{3 \sin^2 x}}$ – частинний розв'язок