ДР-2, що допускають зниження порядку

Розглянемо частинні типи диференціальних рівнянь другого порядку

$$F(x, y, y', y'') = 0.$$

♦ **1.** Рівняння не містить явно функції $y(x)$:

$$F(x, y', y'') = 0.$$

Зниження порядку такого рівняння досягається введенням нової функції

$$z(x) = y', \; z' = y''.$$

Тоді рівняння приймає вид $F(x, z, z') = 0$. Це вже рівняння I порядку.

♦ **2.** Рівняння не містить явно незалежної змінної x:

$$F(y, y', y'') = 0.$$

У такому випадку за нову функцію приймають

$$P(y) = y',$$

а за нову незалежну змінну приймають функцію y.

Тоді $y'' = \dfrac{dP}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dP}{dy} \cdot P$.

Така заміна змінних приводить до ДР першого порядку:

$$F\left(y, P, \frac{dP}{dy} \cdot P\right) = 0 \quad \text{де} \quad \frac{dP}{dy} = P'_y.$$

Приклад 1. $$y'' - \frac{y'}{x} = xe^x.$$

ДР-2 не містить функції y.

Тому $y' = z(x)$, $y'' = z'$, тоді $z' - \dfrac{z}{x} = xe^x$.

Це лінійне ДР-1. Функція Z із нього: $z = xe^x + C_1 x$. (перевірте самостійно)

Замінимо z на y' і знов прийдемо до ДР-1: $y' = xe^x + C_1 x$,

Це найпростіше ДР, інтегруємо його і знаходимо $y = xe^x - e^x + C_1 \dfrac{x^2}{2} + C_2$.

Приклад 2. $$yy'' - 2(y')^2 = 0.$$

Рівняння не містить явно x.

Заміна $y' = P(y),\quad y'' = P\dfrac{dP}{dy} \Rightarrow y \cdot P\dfrac{dP}{dy} - 2P^2 = 0$.

а) $P \neq 0$. $y\dfrac{dP}{dy} = 2P$. Це ДР-1 типу 1.

$$\frac{dP}{P} = 2\frac{dy}{y} \Rightarrow p = C_1 y^2.$$

Змінимо P на y' і знов прийдемо до ДР-1 типу 1:

$$y' = C_1 y^2.$$

Загальний розв'язок :

$$\frac{dy}{y^2} = C_1 dx \Rightarrow y = \frac{-1}{C_1 x + C_2}.$$

б) $P = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C$, але цей розв'язок міститься у загальному (при $C_1 = 0$).