Тема 5. Графи

Лекція 5.2

План

1. Зв'язність та роздільність.
2. Характеристики графів.
3. Дерева та ліс.
4. Планарні або плоскі графи.

Література *1. Конспект лекцій.*
2. Олійник Л.О. Дискретна математика: Навч. посібник. 2015. 256 с.
3 Балога С.І. Дискретна математика. *Навчальний посібник. Ужгород: ПП «АУТДОР-ШАРК», 2021. 124 с.*

1. Зв'язність та роздільність

Def. *Дві вершини графа називають* ***зв'язаними****, якщо є маршрут, що з'єднує ці вершини. Граф, будь-яка пара вершин якого пов'язана, називають* ***зв'язним графом***.

У зв'язному графі між будь-якими двома вершинами існує простий ланцюг, оскільки з маршруту, що їх зв'язує, завжди можна видалити циклічну ділянку, що проходить через деяку вершину більше одного разу.

Якщо граф не зв'язний, то множину його вершин можна єдиним чином розділити на непересічні підмножини, кожна з яких містить всі пов'язані між собою вершини і разом з інцидентними їм ребрами утворює зв'язний підграф. Таким чином, незв'язний граф є сукупністю окремих частин (підграфів), які називаються ***компонентами*** .

Часто відношення зв'язності ускладнюється додатковими умовами.

Def. Граф називають ***циклічно зв'язним***, якщо будь-які дві різні вершини містяться в циклі.

Def. Граф називають ***k-зв'яз****ним*, якщо будь-яка пара різних вершин пов'язана, принаймні k ланцюгами, які не мають спільних вершин (крім начальної і кінцевої).

Зв'язність орієнтованих графів визначається таким чином, як й у неорієнтованих (не враховуючи напрямів дуг). Специфічним для орграфа (або змішаного графа) є поняття сильної зв'язності.

Def. Орграф називають ***сильно зв'язним***, якщо для будь-якої пари його вершин v_i , v_j існує шлях з v_i до v_j і з v_j до v_i .

Приклади. На рис. 5.1 показаний зв'язковий граф. Граф F на рис.5.2 - незв'язний, що складається з трьох компонент F_1 , F_2 , ${}_3$ (ізольована вершина вважається компонентом). Компонента F_1 графа F циклічно зв'язна (однозв’язна), а зв'язна компонента ${}_3$ циклічно зв'язний не є, так як вершини f_7 і f_8 не міститься в жодному циклі з іншими вершинами.

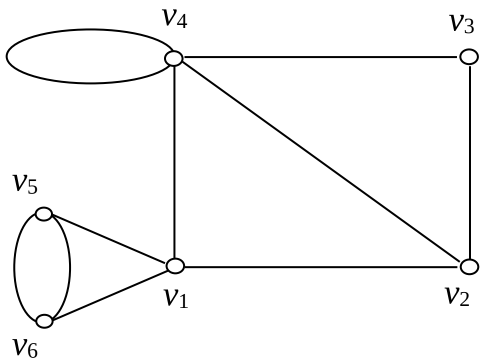


Рис. 5.1. Роздільний зв’язний граф

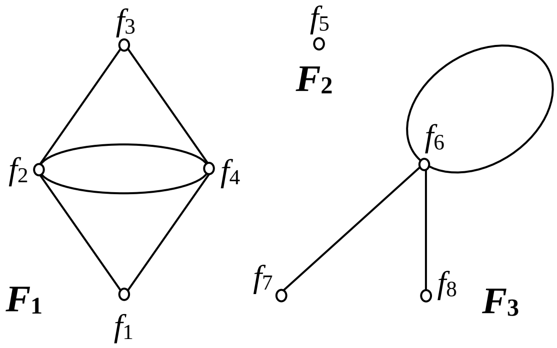


Рис. 5.2. Незв'язний граф F

Сильно зв'язним завжди повинен бути граф, який представляє план міста з одностороннім рухом деякими вулицями, оскільки в іншому випадку знайшлися б вершини (площі і перехрестя), між якими не можна було б проїхати містом без порушення правил руху.

Зв'язний граф може бути розділений на незв'язні підграфи видаленням з нього деяких вершин і ребер (при видаленні вершин виключаються і всі інцидентні їм ребра, а при видаленні ребер вершини зберігаються).

Def. *Якщо існує така вершина, видалення якої перетворює зв'язний граф (або компоненту незв'язного графа) на незв'язний, то вона називається* ***точкою зчленування.*** *Ребро з тими самими властивостями називається* ***мостом.***

Зрозуміло, що за наявності моста в графі є принаймні дві точки зчленування.

Def. Граф називається ***нероздільним***, якщо він зв'язний і не має точок зчленування.

Def. Граф, що має хоча б одну точку зчленування, є роздільним і називається ***сепарабельним***. Він розбивається на блоки, кожен з яких є максимальним нероздільним підграфом. Кожне ребро графа, як і кожна вершина (за винятком точок зчленування), належать лише одному з його блоків. Понад те, лише одному блоку належить і кожен простий цикл. Звідси випливає, що сукупність блоків графа є розбиттям множин ребер і простих циклів на підмножини, що не перетинаються.

Приклади. Компонент F_1 графа F на рис. 5.2 є нероздільним. Зв'язний граф представлений на рис. 5.1, має дві точки зчленування - v_1 і v_4, проте його ребро (v_1, v_4) мостом не є.

Граф на *рис.5.3* має дві точки зчленування – v_4 і v_5, причому ребро (v_4, v_5), що з'єднує ці точки, є мостом, який розбиває даний граф на три компоненти (компоненти B_1, B_2 і B_3 на цьому ж рисунку праворуч). Кожен з цих компонентів є нероздільним підграфом.

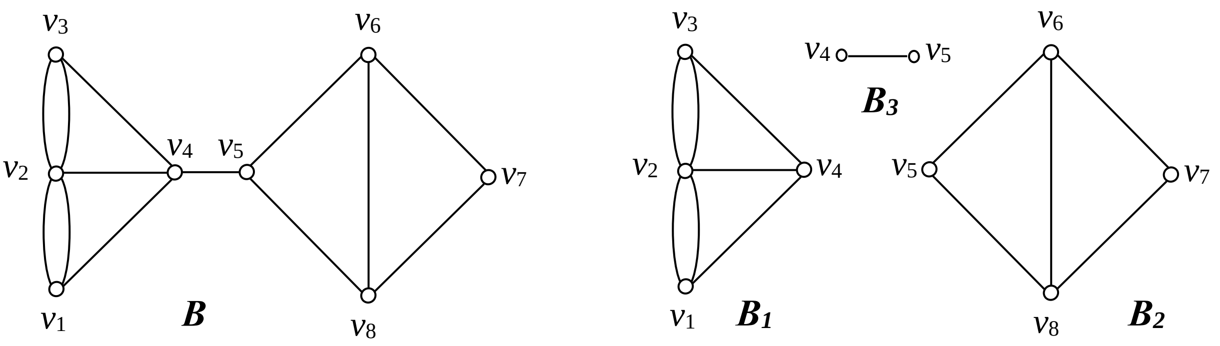


Рис. 5.3. Компоненти роздільного графа B з мостом

Def. Підграф орграфа, який має одну начальну (вхідну) та одну кінцеву вершину має назву "***гамак***"**.** На рис. 5.4 підграфи з вершинами S, V6, V7, V8, V9, V5 та S, V1, V3, V4, V2, V5, V10, T є гамаки.

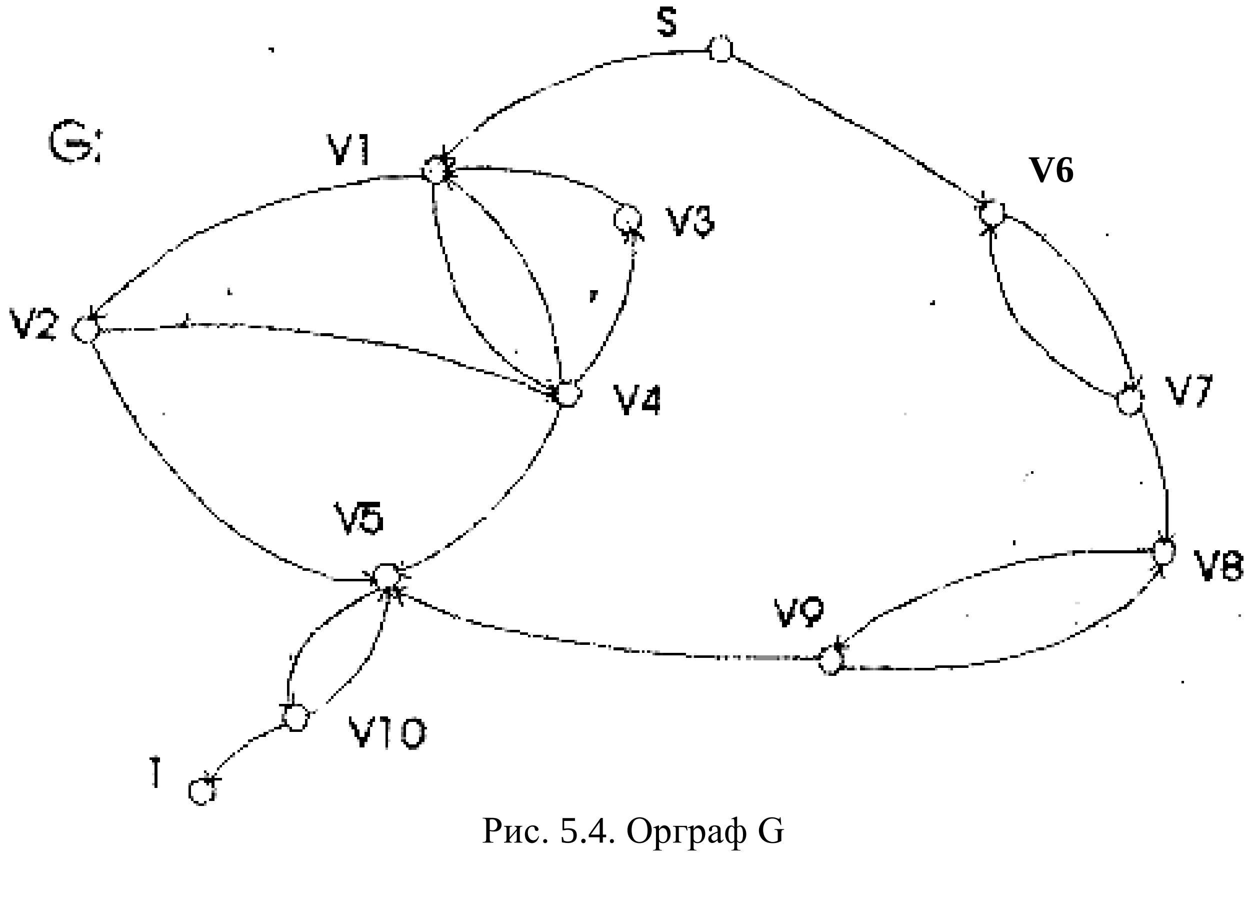


Рис. 5.4. Орграф G

Def. Гамак, має назву **"лінійний компонент орграфа"**, якщо він відповідає таким умовам:

– начальна s та вихідна t вершина гамака лежать на кожному шляху з начальної до кінцевої вершини орграфа (тобто орграфа з одним входом та з одним виходом),

- начальна вершина недосяжна з виходу гамака,

- не існує іншого гамака, що відповідає двом попереднім умовам і є у складі цього гамака.

На рис. 5.4 підграф орграфа G з вершинами V5, V10, T – є лінійний компонент орграфа G.

2. Характеристики графів

Ідеться про числові параметри графів.

Функції, задані на багатьох графах $\{G = (V, E)\}$ і значення, що приймають на множині цілих чисел, називають ***числовими характеристиками*** графа. Найбільш очевидними і простими характеристиками є такі:

1. **Число вершин** – p.
2. **Число ребер** – q.
3. **Степені вершин** - δ_i (або δ_i^+ / δ_i^-).
4. **Число компонент зв'язності графа** $G = (V, E)$, яке позначають k(G).

Інші числа графа вимагають обчислення їх значень.

5. **Цикломатичне число графа** G = = (V, E) – це найменше число ребер, видалення яких призводить до графа без циклів і петель, позначають λ(G).

Цикломатичне число можна визначити за формулою

$$\lambda(G) = q - p + k(G).$$

Для графа на рис. 5/5 маємо p = 8, q = 10, к(G) = 2 та λ(G) = 10 – 8 + 2 = 4.

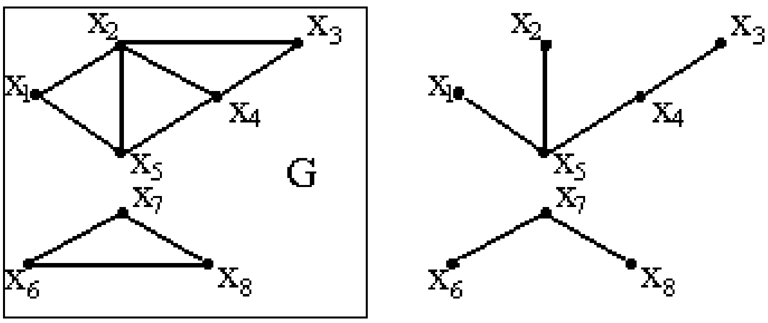


Рис. 5.5. Формування підграфа без циклів

Отже, для усунення циклів у даному графі потрібно видалити щонайменше чотири ребра. Наприклад, $\{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_6, x_8)\}$ або $\{(x_1, x_5), (x_4, x_5), (x_3, x_4), (x_6, x_7)\}$..

6. **Хроматичне число графа** G – γ(G). Ідеться про таке "розфарбовування" вершин графа, коли суміжні вершини мали б різні кольори.

Найменша кількість кольорів р має назву – хроматичне число графа, а граф є р-хроматичним, тобто γ(G) = р.

Якщо γ(G) =2, то граф є **біхроматичним.** Достатня умова біхроматичності графа – наявність циклів лише парної довжини.

Визначення хроматичного числа не завжди є легким завданням.

Проте, можна оцінити це число. Так хроматичне число повного n-вершинного графа дорівнює n, порожнього графа - 1, графа з циклом парної довжини - 2, графа з циклом непарної довжини - 3, графа без циклів - 2.

В окремих випадках може бути рекомендована оцінка за такою формулою: $\gamma(G) \le \max_i \{\delta_i + 1\}$.

Теорема про 5 фарб стверджує, що р = 5 достатньо для будь-яких плоских графів.

3. Дерева та ліс

Нехай множина V містить р вершин, які пронумеровані порядковими числами від 1 до р, тобто. V = {1, 2, ..., р}. Зв'язавши ці вершини ребрами так, щоб були відсутні цикли, отримаємо деякий граф, що покриває цю множину вершин.

Def. ***<u>Дерево</u>*** – це зв'язний ациклічний граф.

Дерево це зв'язний неорієнтований граф без циклів або

– граф, де будь-які дві вершини з'єднані простим ланцюгом, або

– граф зв'язний і має q = р – 1 ребро , або

– граф не має циклів і має q = р – 1 ребро , або

– граф не має циклів, але додання ребра між будь-якими двома вершинами призводить до появи одного циклу, або

– граф зв'язний, але втрачає цю властивість після видалення будь- якого ребра.

При *р = 2* дерево єдине і складається з однієї гілки. Зі збільшенням р *число* різних дерев t_p швидко зростає і виражається з відношенням $t_p = p^{p-2}$ (рис. 5.6).

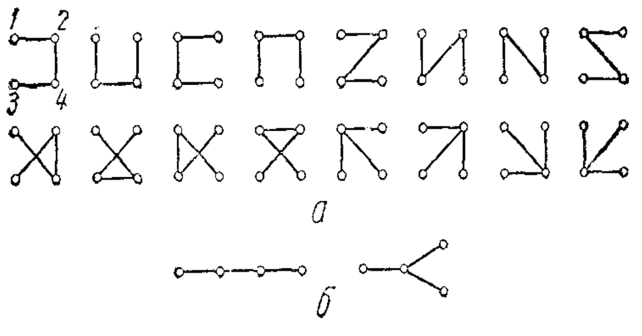


Рис. 5.6. Дерева на множині чотирьох вершин (а) та неізоморфні дерева (б)

Зі збільшенням числа вершин кількість різних дерев різко зростає (наприклад, при $p = 20$ їх налічується близько мільйона).

При додаванні в дерево ребра утворюється цикл, а при видаленні хоча б одного ребра дерево розпадається на компоненти, кожна з якої являє собою дерево або ізольовану вершину.

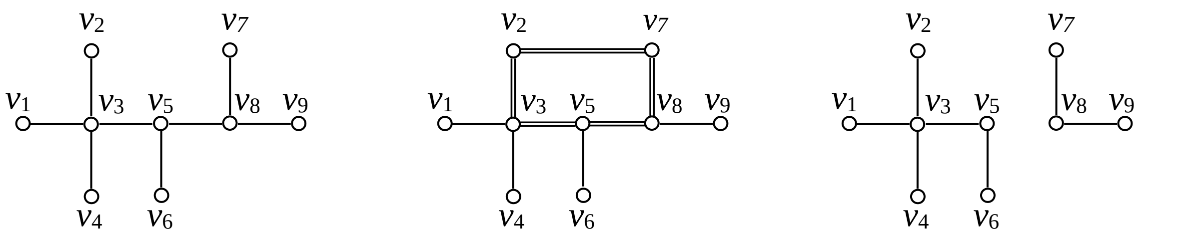
Дерева вважаються *суттєво різними*, якщо вони не ізоморфні.

Def. *Незв'язний граф, компоненти якого є деревами, називається* ***лісом***. Ліс з дерев, що містить p вершин, має в точності p - k *ребер*.

Серед різних дерев виділяються два важливі окремі випадки: ***послідовне дерево***, що є простим ланцюгом, і ***зоряне дерево***, в якому одна з вершин (центр) суміжна з усіма іншими вершинами.

Розглядаються також дерева з орієнтованими ребрами (дугами). Орієнтоване дерево називається *прадеревом* з коренем v_0 якщо існує шлях між вершиною v_0 і будь-якою іншою його вершиною. Зрозуміло, що прадерево має єдиний корінь (вершину, до якої не входить жодна дуга).

Приклади. Дерево T на рис. 5.7 має 9 вершин та 8 ребер.



Дерево $\boldsymbol{T}$ Граф $\boldsymbol{T_ц}$ Дерево $\boldsymbol{T_a}$ Дерево $\boldsymbol{T_b}$

Рис.5.7. Дерево T и варіанти його зміни

Введення додаткового ребра (v_2, v_7) порушує ациклічність дерева і перетворює його на зв'язковий граф $T_ц$, в якому цикл (v_2, v_7, v_8, v_5, v_3, v_2) виділено подвійною лінією.

Видалення ребра (v_5, v_8) перетворює дерево T на ліс, що складається з двох дерев – T_a і T_b.

На рис.5.8 показані всі суттєво різні шестивершинні дерева (T_1 – T_6), серед яких є послідовне дерево - T_1 і зіркове дерево - T_6.

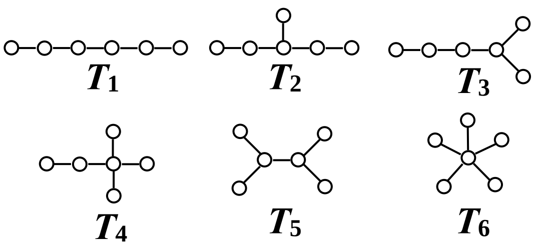


Рис. 5.8. Шестивершинні дерева

На рис. 5.9 показано дерево з орієнтованими ребрами, яке, очевидно, є пррадеревом з коренем *v0*.

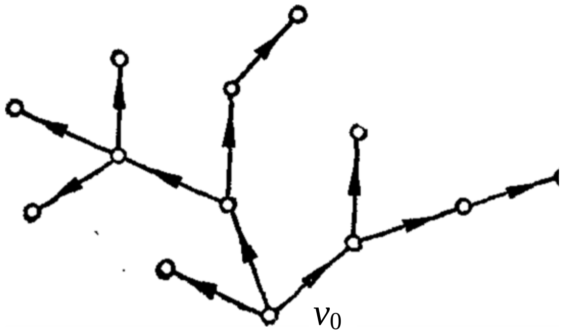


Рис. 5.9. Прадерево з коренем v_0

Досі розглядалися дерева як мінімальні зв'язкові графи на множині *p* вершин. Важливе значення має й інша думка, коли дерева чи ліс є частинами деякого графа, тобто. утворюються з його ребер.

Будь-яка зв'язна сукупність ребер, що не містить контурів, разом з інцидентними їм вершинами утворює *дерево графа*.

Якщо таке дерево є суграфом (містить усі вершини графа), то воно називається ***покриваючим деревом* або *остовом***. Так як петля є найпростішим циклом, що складається з єдиного ребра, то вона не може входити до складу будь-якого дерева графа (рис. 5.10).

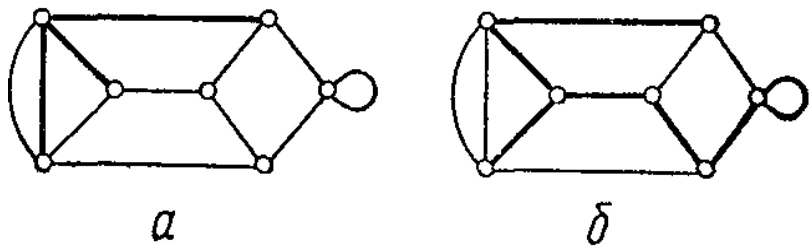


Рис. 5.10. Дерево як частина графа (виділено жирними лініями:
а – дерево; б – остов (покриваюче дерево)

Ребра графа, що належать його дереву, називають ***гілками***.

Якщо дерево покриває граф, то множина ребер графа розбивається на два підмножини: підмножина гілок і підмножина ребер *доповнення гілок*, які називаються ***хордами***. При цьому зв'язковий *(p, q)* – граф містить $\nu = p - 1$ гілок і $\sigma = q - \rho + 1$ хорд. Якщо граф незв'язний, то сукупність основ k *його* компонент утворює *покриває* ліс. У цьому випадку $\nu = \rho - k$ і $\sigma = q - \rho + k$.

Дерева відіграють важливу роль у різних прикладних задачах, коли, наприклад, йдеться про зв'язок будь-яких об'єктів мінімальним числом каналів (ліній зв'язку, доріг, комунікації) з певними властивостями. За допомогою дерева визначається система координат при моделюванні ланцюгів і систем різної фізичної природи. Дерева використовуються як моделі при розгляді ієрархічних систем об'єктів, структурних формул органічних з'єднань і т.п.

Будь-яке дерево має не менше ніж дві **висячі вершини.**

Відстань від вершини x до найвіддаленої вершини називають ексцентриситетом **вершини** x і позначають як e(x), e(x) = max μ[x, y].

Найменший ексцентриситет вершин є **радіус** дерева Т, це позначають як r (Т).

Центральна вершина дерева – це вершина, у якої ексцентриситет дорівнює радіусу.

Центр дерева – це множина центральних вершин.

Упорядковане дерево – встановлено порядок переліку піддерев.

Бінарне ордерево – з вершини виходити не більше двох дуг, m-арне дерево – виходити не більше m дуг.

Дерево може покривати інший граф, якщо всі вершини дерева належать графу та дереву. Лише зв'язні графи мають покриваючі дерева і тільки дерево має єдине покриття деревом.

Приклад. Є граф – дерево Т (рис. 5.11). Завдання – визначити радіус та центр дерева Т.

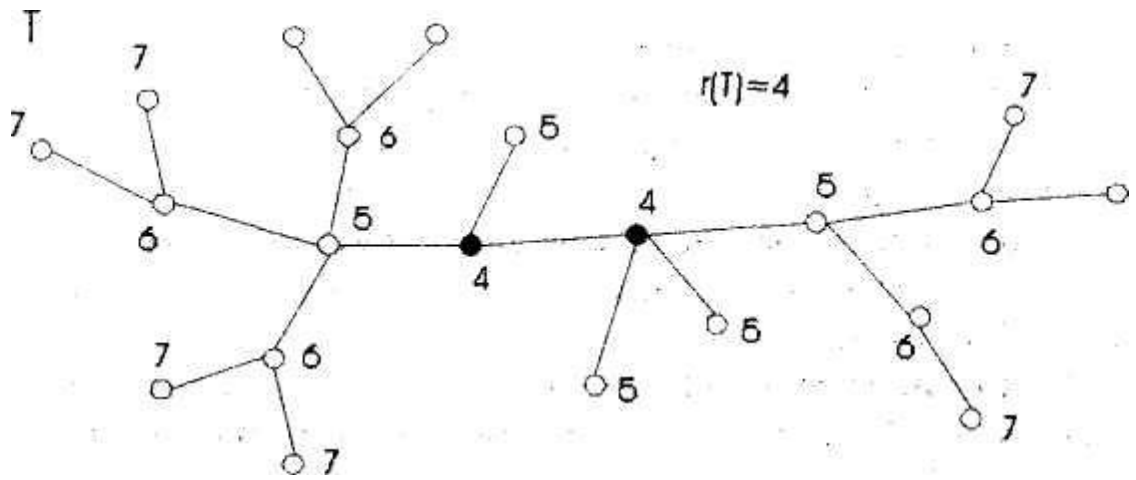


Рис. 5.11. Дерево Т

Розв'язок. Після визначення ексцентриситетів вершин дерева знайдено мінімальний ексцентриситет, тобто радіус дерева r (Т) = 4; центр дерева Т це дві вершини, позначені чорним кольором.

5.8. Планарні або плоскі графи

Def. Граф називають ***<u>плоским (планарним)</u>*** , якщо існує ізоморфний йому граф (геометрична реалізація), який може бути зображений на площині без перетину ребер.

На рис. 5.11 наведені планарний та непланарний графи.

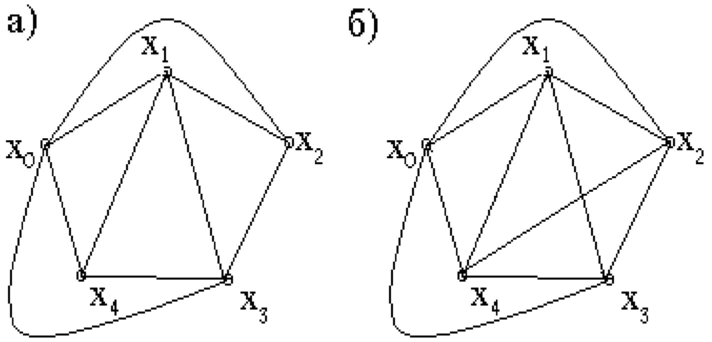


Рис. 5.11. Планарний (а) та непланарний (б) графи

Приклад. Хоча в одному із графів на рис. 5.12 ребра перетинаються, ізоморфні йому не мають перетинів, отже , він плоский.

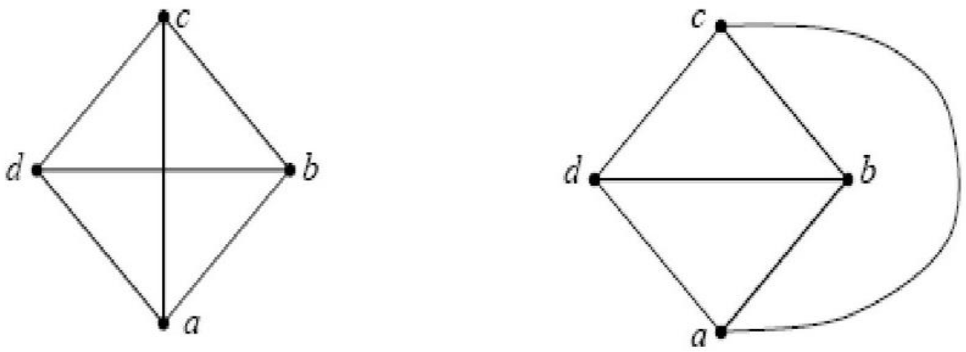


Рис. 5.12. Ізоморфні графи (підтвердження планарності)

На рис. 5.13 показані два неплоскі графи, що грають фундаментальну роль у теорії планарності і звані графами Понтрягіна-Куратовського. Повний п'ятивершинний граф К5 є простим неплоским графом з мінімальним числом вершин (повний граф із чотирма вершинами - плоский, а видалення з цього графа хоча б одного ребра також перетворює його на плоский граф).

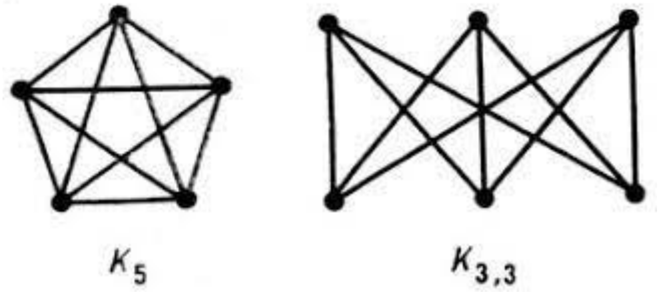


Рис. 5.13. Графи Понтрягіна-Куратовського

Дводольний граф $K_{3,3}$ є моделлю відомої задачі про три будинки і три колодязя: чи можна прокласти від будинків до кожного колодязя дороги так, щоб вони не перетиналися (ворожі сусіди повинні мати можливість користуватися всіма колодязями, але не хочуть зустрічатися на дорогах)?

Властивості планарності не порушуються, якщо деяке ребро розбити на два введенням нової вершини другого ступеня або замінити два ребра, інцидентні вершині другого ступеня, одним ребром, вилучивши цю вершину.

Два графи називають *гомеоморфними* (ізоморфними з точністю до вершин другого ступеня), якщо після видалення з них вершин другого ступеня та об'єднання інцидентних цим вершинам ребер, вони виявляються ізоморфними (рис. 5.12). Очевидно, граф, гомеоморфний плоскому графу, є також плоским.

Строго доводиться, що граф є плоским тоді й тільки тоді, коли він не містить підграфа, гомеоморфного одному з графів Понтрягіна - Куратовського.

Планарність є істотною властивістю графів, які моделюють комунікації та зв'язки між об'єктами на плоскості (дороги між населеними пунктами, водопровідні та газопровідні мережі, лінії передач електроенергії, міжз'єднання на друкованих платах електронних пристроїв і кристалах інтегральних схем). Плоскими графами представлені різні карти, з якими, зокрема, пов'язана відома *проблема чотирьох фарб*: чи завжди можна розфарбувати області, на які плоский граф ділить поверхню, так, щоб жодні дві суміжні області не були пофарбовані в однаковий колір і щоб при цьому було використано не більше чотирьох кольорів? Доведено, що для такого забарвлення в будь-якому випадку досить п'яти фарб, але ніхто ще не навів прикладу, коли п'ять фарб дійсно необхідні. Проблема залишається невирішеною, незважаючи на величезні зусилля багатьох видатних математиків, які штурмують її понад сторіччя.