***Приклади виконання обов'язкових завдань за темою 5***

**Завдання 1.** Знайти невизначені інтеграли.

***Розв'язання завдання 1***

Обчислення невизначених інтегралів №№ 1, 2 опирається на метод "внесення під знак диференціалу". У теоретичній частині приведена таблиця основних варіантів таких внесень. У поясненнях до прикладів приводяться формули для конкретних випадків.

***ПРИКЛАДИ* №№ 1, 2**

1 $\int \frac{x}{\sqrt{x+3}}dx = \int \frac{x+3-3}{\sqrt{x+3}}dx =$

Для приведення до табличних інтегралів виконується тотожне перетворення: $\pm 3$ у чисельнику підінтегральної функції.

$= \int \frac{x+3}{\sqrt{x+3}}dx - 3\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}} =$

Розбиваємо на суму двох інтегралів і вносимо під знак диференціалу $d(x+3) = dx$.

$= \int \sqrt{x+3}dx - 3\int \frac{d(x+3)}{\sqrt{x+3}} =$

$= \frac{2}{3}(x+3)^{3/2} - 6\sqrt{x+3} + C$

Одержуємо табличні степеневі інтеграли виду $\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C$, з $n = \frac{1}{2}$ і $n = -\frac{1}{2}$.

2

$\int \frac{3-\ln(x+2)}{x+2}dx = 3\int \frac{dx}{x+2} - \int \frac{\ln(x+2)}{x+2}dx =$

Розбиваємо на суму двох інтегралів.

$= 3\int \frac{d(x+2)}{x+2} - \int \ln(x+2)d\ln(x+2) =$

Вносимо під знак диференціалу $d(x+2) = dx$ у першому інтегралі та $d\ln(x+2) = \frac{dx}{x+2}$

$= 3\ln(x+2) - \frac{\ln^2(x+2)}{2} + C$

у другому. Одержуємо табличні інтеграли: логарифмічний і степеневий, при $n = 1$.

3 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}} = 2\int \frac{d\sqrt{x}}{\cos^2\sqrt{x}} = 2tg\sqrt{x} + C$

Тут вносимо під знак диференціалу $d\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$.

**4** $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}} = \int \frac{de^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}} = \arcsin(e^x) + C$

Вносимо під знак диференціалу $de^x = e^x dx$, що приводить до інтегралу виду арксинус.

**5** $\int \frac{x^3}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{x^2+4-4}{x^2+4} d(x^2) =$

$= \frac{1}{2} \int d(x^2) - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+4)}{x^2+4} = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(x^2+4) + C$

Вносимо під знак диференціалу $d(x^2) = 2xdx$. Розбиваємо на суму двох інтегралів.

**6** $\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin^3 x} dx = \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx - \int \frac{dx}{\sin^2 x} =$

$= \int \frac{d \sin x}{\sin^3 x} - \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \frac{-1}{2\sin^2 x} + ctgx + C$

Розбиваємо на суму двох інтегралів. Вносимо під знак диференціалу $d \sin x = \cos x \cdot dx$.

Перший інтеграл – степеневий, $n=-3$, другий тригонометричний, виду котангенс.

**7** $\int \frac{\arccos 3x + x}{\sqrt{1-9x^2}} dx = \int \frac{\arccos 3x}{\sqrt{1-9x^2}} dx + \int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{1-9x^2}} =$

Розбиваємо на суму двох інтегралів.

$= -\frac{1}{3} \int \arccos 3x \cdot d(\arccos 3x) - \frac{1}{18} \int \frac{d(1-9x^2)}{\sqrt{1-9x^2}} =$

Вносимо під знак диференціалу в першому інтегралі

$= \frac{-(\arccos^2 3x)}{3 \cdot 2} - \frac{1}{18} 2\sqrt{1-9x^2} + C$

$= = \frac{-1}{3} \left( \frac{\arccos^2 3x}{2} + \frac{\sqrt{1-9x^2}}{3} \right) + C$

$d(\arccos 3x) = \frac{-3 \cdot dx}{\sqrt{1-9x^2}}$, у другому:

$d(1-9x^2) = -18x \cdot dx.$

Обидва одержаних інтеграли є степеневими.

**8** $\int \frac{3\sin x - 2\cos x}{(3\cos x + 2\sin x)^4} dx = -\int \frac{d(3\cos x + 2\sin x)}{(3\cos x + 2\sin x)^4} =$

У чисельнику стоїть похідна знаменника з оберненим знаком:

$d(3\cos x + 2\sin x) = (-3\sin x + 2\cos x)dx.$

$= -\frac{(3\cos x + 2\sin x)^{-3}}{-3} + C =$

$= \frac{1}{(3\cos x + 2\sin x)^3} + C$

Після внесення під знак диференціалу одержуємо степеневий інтеграл, $n=-4$.

9 $\int\frac{x\cdot\cos x^2}{\sin x^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d(\sin x^2)}{\sin x^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\sin x^2\right|+C$ | Врахуємо, що $d(\sin x^2)=\cos x^2\cdot 2xdx$

і внесемо похідну під знак диференціалу. Одержали логарифмічний інтеграл.

❢ – При виконанні завдання слід повторити правила обчислення похідних, особливо – похідних складних функцій.

Невизначені інтеграли №№ 3,4 обчислюються методом інтегрування по частинам, № 4 – разом із підстановкою.

Нагадуємо, $\boxed{\int U\cdot dV=U\cdot V-\int V\cdot dU}$ – формула інтегрування по частинам.

***ПРИКЛАДИ*** №№ 3, 4

1 $\int(2x-1)e^{-3x}dx=\left\{\begin{matrix} U=2x-1; & dU=2dx \\ dV=e^{-3x}dx; & V=\int e^{-3x}dx=\frac{-e^{-3x}}{3}\end{matrix}\right\}=$ | У відповідності до рекомендацій, що приведені у теоретичній частині,

$=\frac{-e^{-3x}}{3}(2x-1)+\frac{2}{3}\int e^{-3x}dx=\frac{-e^{-3x}}{3}(2x-1)-\frac{2}{9}e^{-3x}+C=$ | розбиваємо інтеграл на частини $U$ і $dV$,

$=\frac{-e^{-3x}}{3}\left(2x-\frac{1}{3}\right)+C$ | робимо алгебраїчні перетворення і одержуємо відповідь.

❢ – Зверніть увагу на обчислення інтегралу ("внесення під знак диференціалу"):

$$\int e^{-3x}dx=\frac{-1}{3}\int e^{-3x}d(-3x)=\frac{-e^{-3x}}{3},$$

довільна стала додається тільки один раз.

2 $\int(1-3x)\cos 5xdx=\left\{\begin{matrix} U=1-3x; & dU=-3dx \\ dV=\cos 5xdx; & V=\int\cos 5xdx=\frac{\sin 5x}{5}\end{matrix}\right\}=$

$=\frac{\sin 5x}{5}(1-3x)+\frac{3}{5}\int\sin 5xdx=\frac{\sin 5x}{5}(1-3x)-\frac{3}{25}\cos 5x+C$ | Аналогічно попередньому інтегралу.

❢ – Зверніть увагу на обчислення інтегралу ("внесення під знак диференціалу"):

$$\int \cos 5x dx = \frac{1}{5}\int \cos 5x \cdot d(5x) = \frac{\sin 5x}{5},$$

або $$\int \sin 5x dx = \frac{1}{5}\int \sin 5x \cdot d(5x) = \frac{-\cos 5x}{5},$$

довільна стала додається тільки один раз.

3 $$\int \ln(2x^2+1)dx = \left\{\begin{matrix} U=\ln(2x^2+1); & dU=\dfrac{4x\cdot dx}{2x^2+1} \\ dV=dx; & V=\int dx = x \end{matrix}\right\} =$$

У відповідності до рекомендацій, що приведені у теоретичній частині, розбиваємо інтеграл на частини. Додаємо $\pm 1$ у чисельнику одержаного інтегралу.

$$= x\cdot\ln(2x^2+1) - \int\frac{4x^2}{2x^2+1}dx = x\cdot\ln(2x^2+1) - 2\int\frac{2x^2+1-1}{2x^2+1}dx =$$

Розбиваємо на два інтеграли.

$$= x\cdot\ln(2x^2+1) - 2\int dx + 2\int\frac{dx}{2x^2+1} = x\cdot\ln(2x^2+1) - 2x + \int\frac{dx}{x^2+1/2} =$$

$$= x\cdot\ln(2x^2+1) - 2x + \sqrt{2}arctg(\sqrt{2}\cdot x) + C$$

4 $$\int\frac{x+1}{\cos^2 2x}dx = \left\{\begin{matrix} U=x+1; & dU=dx \\ dV=\dfrac{dx}{\cos^2 2x}; & V=\dfrac{1}{2}tg2x \end{matrix}\right\} =$$

У відповідності до рекомендацій, розбиваємо інтеграл на частини.

$$= \frac{x+1}{2}tg2x - \frac{1}{2}\int tg2x dx = \frac{x+1}{2}tg2x + \frac{1}{4}ln|\cos 2x| + C$$

Одержаний інтеграл – з неосновної таблиці.

❢ – Зверніть увагу на обчислення інтегралів ("внесення під знак диференціалу"):

$$\int\frac{dx}{\cos^2 2x} = \frac{1}{2}\int\frac{d(2x)}{\cos^2 2x} = \frac{tg2x}{2},$$

і $$\int tg2x dx = \frac{1}{2}\int tg2x\cdot d(2x) = \frac{-\ln|\cos 2x|}{2}.$$

5 $$\int arcsin 2x\cdot dx = \left\{\begin{matrix} U=arcsin 2x; & dU=\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}dx \\ dV=dx; & V=x \end{matrix}\right\} =$$

У відповідності до рекомендацій, розбиваємо інтеграл на частини.

$$= x\cdot\arcsin 2x - \int\frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx = x\cdot\arcsin 2x + \frac{1}{4}\int\frac{d(1-4x^2)}{\sqrt{1-4x^2}} =$$

$d(1-4x^2) = -8x\cdot dx$ і

$$=x\cdot arcsin\,2x+\frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}+C$$

$$\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=2\sqrt{t}+C.$$

**6** $\int sin\,2x\cdot ln\,sin\,x\cdot dx=\left\{\begin{array}{c} sin\,2x=2\cdot sin\,x\cdot cos\,x \\ d\,sin\,x=cos\,x\cdot dx\end{array}\right\}=$

Розкладемо синус подвійного кута і внесемо під знак диференціалу.

$$=2\int\sin x\cdot\ln\sin x\cdot d\sin x=\{\sin x=t\}=2\int t\cdot\ln t\cdot dt=$$

Змінимо змінну інтегрування.

$$=\left\{\begin{array}{ll} U=ln\,t; & dU=\frac{dt}{t} \\ dV=t\cdot dt; & V=\frac{t^2}{2}\end{array}\right\}=2\left(\frac{t^2}{2}ln\,t-\frac{1}{2}\int t\cdot dt\right)=$$

$$=t^2\ln t-\frac{t^2}{2}+C=\frac{\sin^2 x}{2}(2\cdot\ln\sin x-1)+C$$

Інтегруємо по частинам, переходимо до старої змінної.

**7** $\int e^{2x}\cdot arcctg\,e^x\cdot dx=\left\{\begin{array}{c} e^{2x}=e^x\cdot e^x \\ de^x=e^x\cdot dx\end{array}\right\}=$

Внесемо під знак диференціалу $de^x=e^x\cdot dx$.

$$=\int e^x\cdot arcctg\,e^x\cdot de^x=\{e^x=y\}=\int y\cdot arcctg\,y\cdot dy=$$

Змінимо змінну інтегрування.

$$=\left\{\begin{array}{ll} U=arcctg\,y; & dU=\frac{-dy}{1+y^2} \\ dV=y\cdot dy; & V=\frac{y^2}{2}\end{array}\right\}=$$

Інтегруємо по частинам. Табличний інтеграл:

$$\int\frac{dy}{1+y^2}=\left\langle\begin{array}{c} arctg\,y \\ -arcctg\,y\end{array}\right.+C.$$

$$=\frac{y^2}{2}arcctg\,y+\frac{1}{2}\int\frac{y^2+1-1}{1+y^2}dy=\frac{y^2}{2}arcctg\,y+\frac{1}{2}\int dy-\frac{1}{2}\int\frac{dy}{1+y^2}=$$

$$=\frac{y^2}{2}arcctg\,y+\frac{y}{2}+\frac{1}{2}arcctg\,y+C=$$

$$=\frac{arcctg\,e^x}{2}(e^{2x}+1)+\frac{e^x}{2}+C$$

У даному випадку краще обрати другий варіант табличного інтегралу.

Переходимо до старої змінної.

**8** $\int sin\sqrt{x}\cdot dx=\left\{\begin{array}{c} \sqrt{x}=z;\,x=z^2 \\ dx=2z\cdot dz\end{array}\right\}=2\int z\cdot sin\,z\cdot dz=$

Змінимо змінну інтегрування.

$$=\left\{\begin{array}{ll} U=z; & dU=dz \\ dV=\sin z\cdot dz; & V=-\cos z\end{array}\right\}=2(z\cdot\cos z+\int\cos z\cdot dz)=$$

Інтегруємо по частинам.

$$=2(z\cdot\cos z+\sin z)+C=2(\sqrt{x}\cdot\cos\sqrt{x}+\sin\sqrt{x})+C$$ Переходимо до старої змінної.

❢ – Аналогічно прикладам 6-8 обчислюються, наприклад, такі інтеграли:

$$\int\frac{\arccos\ln x}{x}\cdot dx=\left\{\ d\ln x=\frac{dx}{x}\ \right\}=\int\arccos\ln x\cdot d\ln x=\{\ln x=z\};$$

$$\int\frac{arctg\,\frac{1}{x}}{x^2}\cdot dx=\left\{\ d\,\frac{1}{x}=-\frac{dx}{x^2}\ \right\}=-\int arctg\,\frac{1}{x}\cdot d\,\frac{1}{x}=\left\{\ \frac{1}{x}=y\ \right\};$$ і далі – по частинам.

При обчисленні інтегралу № 5 застосовують прийом:

***виділення повного квадрату.***

За його допомогою можна обчислювати інтеграли виду:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\ \text{або}\ \int\frac{dx}{ax^2+bx+c},$$

тобто з квадратним трьохчленом у знаменнику. Якщо позначити $y^2=(\alpha x\pm\beta)^2$ – виділений повний квадрат ; $a,b,c,\alpha,\beta,\xi-const$, то можливо звести такі інтеграли до наступних табличних:

| | |
|---|---|
| $\int\frac{dy}{\sqrt{\xi^2-y^2}}=\arcsin\frac{y}{\xi}+C;$ | $\int\frac{dy}{\sqrt{y^2\pm\xi^2}}=\ln\left\|y+\sqrt{y^2\pm\xi^2}\right\|+C;$ |
| $\int\frac{dy}{y^2+\xi^2}=\frac{1}{\xi}arctg\,\frac{y}{\xi}+C;$ | $\int\frac{dy}{y^2-\xi^2}=\frac{1}{2\xi}\ln\left\|\frac{y-\xi}{y+\xi}\right\|+C;$ |

***ПРИКЛАДИ № 5***

1 $$\int\frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{3-(3x+1)^2}}=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{d(3x+1)}{\sqrt{3-(3x+1)^2}}=\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x+1}{\sqrt{3}}+C$$

Виділення повного квадрату:

$$-(9x^2+6x+1-1-2)=-(3x+1)^2+3.$$

Внесення під знак диференціалу:

$$d(3x+1)=3dx$$

2 $\int\frac{dx}{2-6x-9x^2}=-\int\frac{dx}{(3x+1)^2-3}=\frac{-1}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{3x+1-\sqrt{3}}{3x+1+\sqrt{3}}\right|+C.$

Розгляньте самостійно, чим приклад 1 відрізняється від прикладу 2.

3 $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+2}}=$

$=\ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2+2}\right|+C$

Виділення повного квадрату:

$$(x^2+2x+1-1+3)=(x+1)^2+2.$$

Внесення під знак диференціалу:

$$d(x+1)=dx.$$

4 $\int\frac{dx}{x^2+2x+3}=\int\frac{dx}{(x+1)^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$

Самостійно порівняйте з попереднім прикладом.

Невизначені інтеграли № 6 обчислюються за допомогою рекомендованих тригонометричних підстановок, замін змінної інтегрування (таблиця наведена у теоретичній частині).

***ПРИКЛАДИ*** № 6

1 $\int\sqrt{7-x^2}dx=\left\{\begin{array}{c} x=\sqrt{7}\,sint \\ dx=\sqrt{7}\,cost\cdot dt \end{array}\right\}=$

$=7\int\cos^2 t\cdot dt=\frac{7}{2}\int(1+\cos 2t)dt=\frac{7}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C=$

$=\left\{\ t=arcsin\frac{x}{7}\ \right\}=\frac{7}{2}\left(arcsin\frac{x}{7}+\frac{1}{2}sin\left(2arcsin\frac{x}{7}\right)\right)+C$

Заміна змінної. Врахуємо,що

$$7-x^2=7(1-sin^2 t)=7cos^2 t.$$

Інтеграли від парних степенів синуса і косинуса – по формулам зниження степеню

Повертаємося до старої змінної.

2 $\int\frac{\sqrt{x^2+9}}{x^4}dx=\left\{\begin{array}{c} x=3tgt \\ dx=\dfrac{3dt}{cos^2 t} \end{array}\right\}=\int\frac{3^2 dt}{3^4 tg^4 t\cdot cos^3 t}=$

Робимо заміну змінної.

$=\frac{1}{9}\int\frac{cost\cdot dt}{sin^4 t}=\frac{1}{9}\int\frac{d\,sint}{sin^4 t}=\frac{1}{9}\cdot\frac{sin^{-3}t}{-3}+C=$

Врахуємо, що $x^2+9=9(tg^2 t+1)=\frac{9}{cos^2 t}.$

| | |
|---|---|
| $=\frac{-1}{27}\cdot\frac{1}{\sin^3\left(arctg\frac{x}{3}\right)}+C$ | Після внесення під знак диференціалу: $d\sin t=\cos t\cdot dt$, одержимо степеневий інтеграл з $n=-3$, обчислюємо його та повертаємося до старої змінної: $t=arctg\frac{x}{3}$. |