Навчальна дисципліна:
Дискретна математика

Лектор:

професор Кучук Георгій Анатолійович

E-mail: kuchuk56@ukr.net

3 семестр навчання на бакалавраті

Наприкінці семестру - іспит

Тема 5. Графи

Лекція 5.1.

Питання лекції

1. Визначення графа.
2. Типи скінченних графів.
3. Способи задання графів.
4. Маршрути та підграфи.

Рекомендована література

1. *Конспект лекцій.URL: https://drive.google.com/drive/folders/12QYRD4L8kQr0g48DJVN386FrISDuyPwQ?usp=sharing*

2. *Олійник Л.О. Дискретна математика: Навч. посібник. 2015. 256 с. URL:: https://www.dstu.dp.ua/Portal/Data/3/17/3-17-b2.pdf*

3. *Балога С.І.* Дискретна математика*. Навчальний посібник. – Ужгород: ПП «АУТДОР-. ШАРК», 2021. – 124 с. https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/bitstream/lib/3415/1/%D0%BD%D0%B0%D0%B2%D1%87%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE-%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D0%B8%D1%87%D0%BD%D0%B8%D0%B9%20%D0%BF%D0%BE%D1%81%D1%96%D0%B1%D0%BD%D0%B8%D0%BA.pdf*

1. Визначення графа

Def. Множина вершин V, зв'язки між якими зв’язки визначені множиною ребер E називають **графом** та позначають G = (V, E).

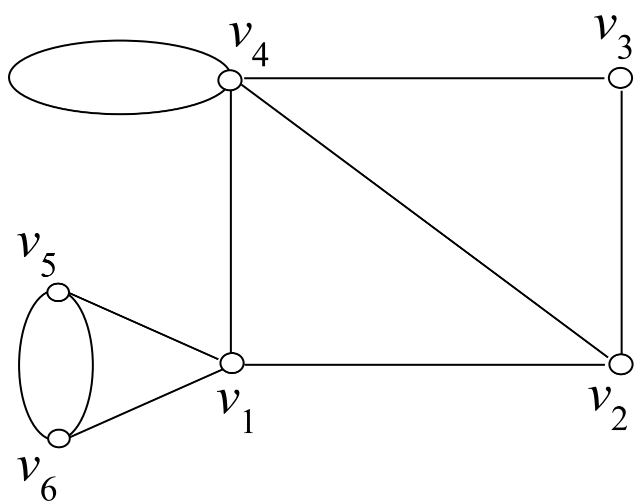


Рис. 1. Неорієнтований граф

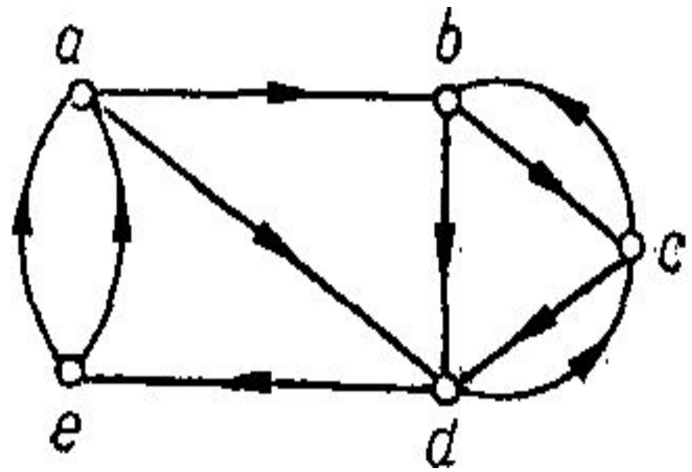


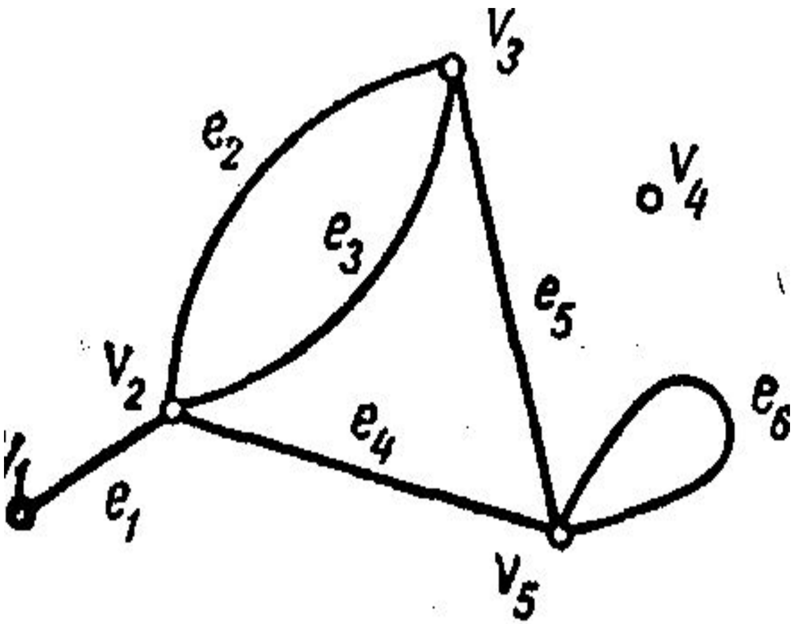
Рис. 2. Орієнтований граф

2. Типи скінченних графів

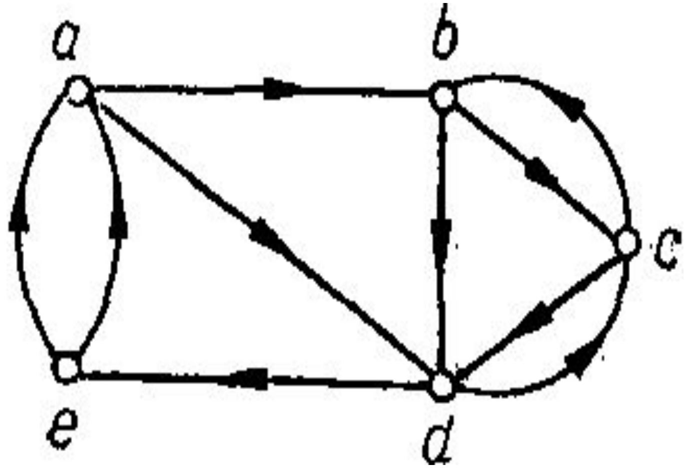
Def. Для орієнтованого ребра (дуги) розрізняють ***початкову вершину***, з якої виходить дуга, і ***кінцеву вершину***, в яку дуга заходить (граничні вершини).
Def. Ребро, граничні вершини якого співпадають, тобто є однією і тією ж вершиною, називається **петлею**.
Def. Ребра з однаковими граничними вершинами є паралельними і частіше називаються **кратними**.

У загальному випадку граф може містити і ***ізольовані вершини***, які не є кінцями ребер і не пов'язані ні між собою, ні з іншими вершинами.

Def. Число ребер, пов'язаних з вершиною v_i (петля враховується двічі), називають ***степенем вершини*** і позначають через $\delta(V_i)$.
Def. Степінь ізольованої вершини дорівнює нулю. Вершина ступеня одиниці називається *кінцевою* або ***висячою вершиною***.
Теорема. У будь-якому графі сума степенів всіх вершин дорівнює по двоєній кількості ребер, а кількість вершин непарного степеня завжди парна.

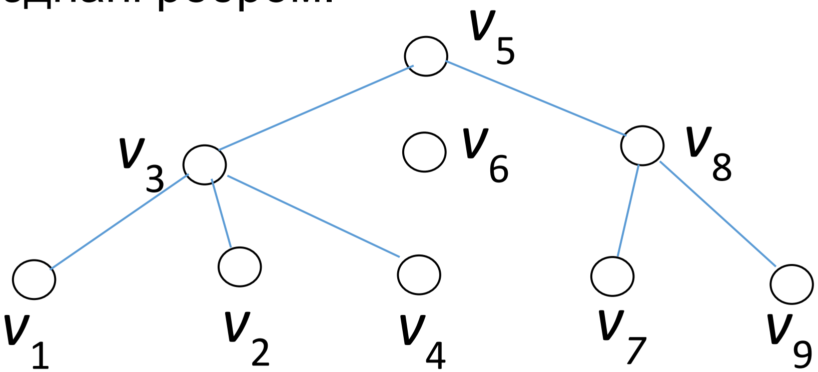


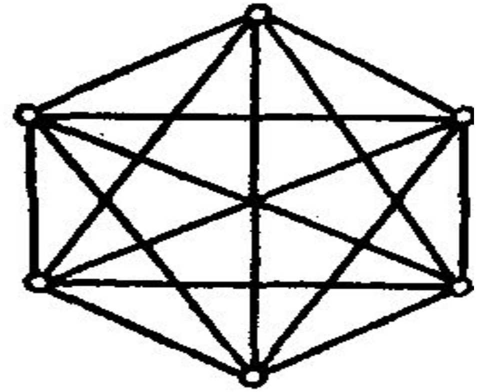
Множина вершин $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$;
множина ребер $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$;
ребра e_2 та e_3 параллельні (кратні);
ребро e_6 є петлею;
v_4 - ізольована вершина,
її степінь дорівнює 0 ($\delta(v_4) = 0$);
v_1 - висяча вершина,
її степінь дорівнює 1 ($\delta(v_1) = 1$);
решта вершин графа мають такі степені: $\delta(v_2) = 4$, $\delta(v_3) = 3$, $\delta(v_5) = 4$.



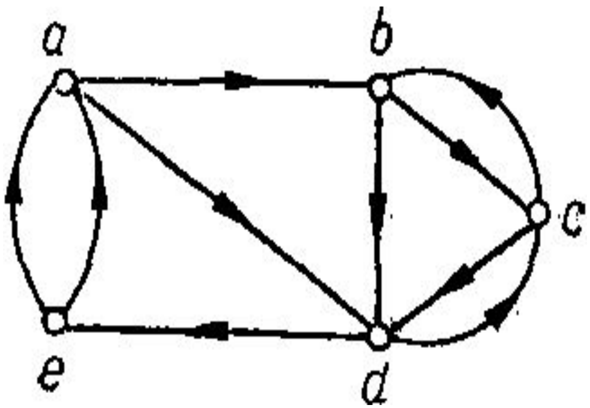
Для вершини d орграфа маємо:
додатню ($\delta^+(d) = 2$) та
від'ємну ($\delta^-(d) = 3$) степені.

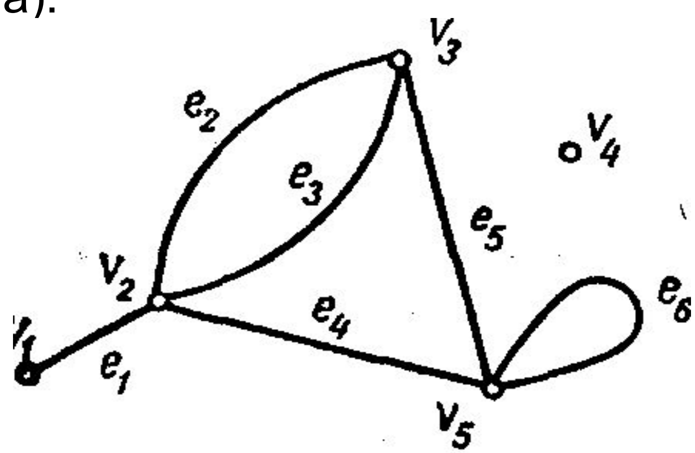
Def. **Простий** або звичайний граф - це граф без петель та кратних ребер.
Def. **Повний** граф – це простий граф, у якому будь-які дві вершини з'єднані ребром.





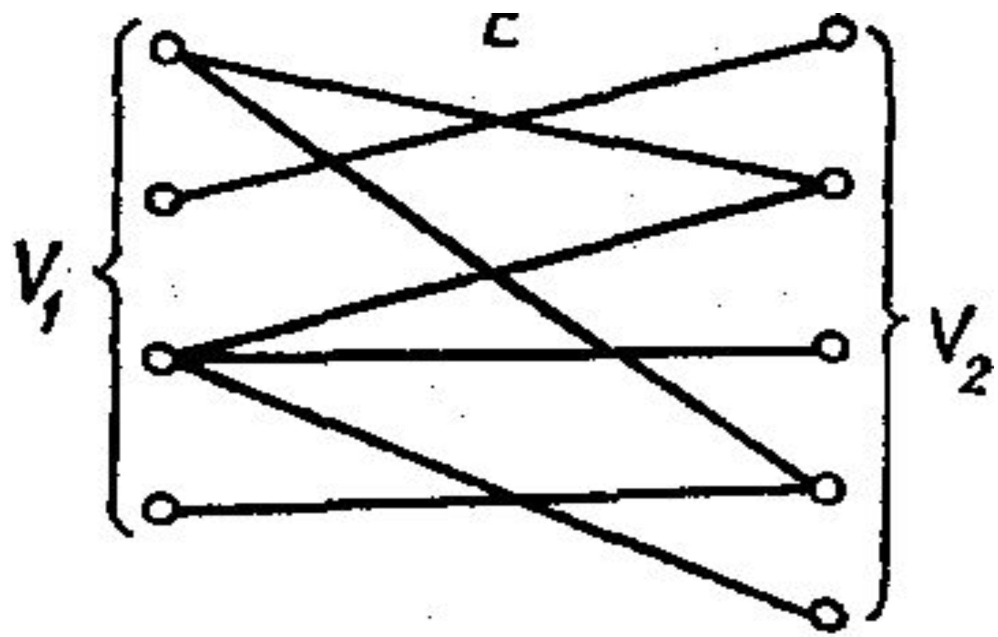
Def. **Мультиграф** – це граф, що не містить петель, але має кратні ребра.
Def. **Псевдограф** – це граф, що допускає петлі і кратні ребра (найбільш загальний випадок графа) (рис. 5.3, а).





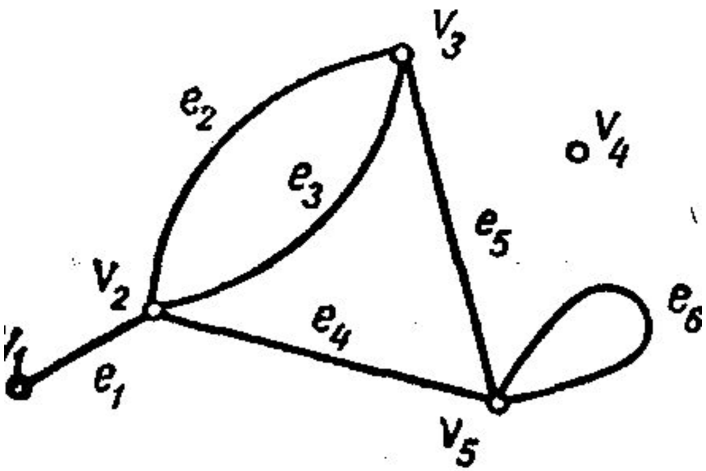
Def. **Пустий** або нуль-граф – це граф, що не має ребер ($E = \varnothing$, всі його вершини ізольовані).

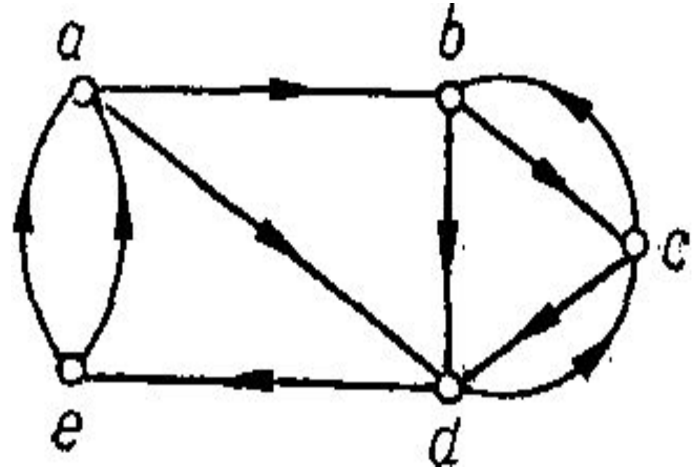
Def. *Якщо* множина вершин V простого графа допускає таке розбиття на два підмножини, що не перетинаються, V_1 і V_2 ($V_1 \cap V_2 = \varnothing$), тобто немає ребер, що з'єднують вершини однієї й тієї ж підмножини, він називається *дводольним* чи *біграфом*



3. Способи задання графів

3.1. ***Геометричні подання*** *– рисунок.*
3.2. ***Матриця суміжності графа (орграфа).***

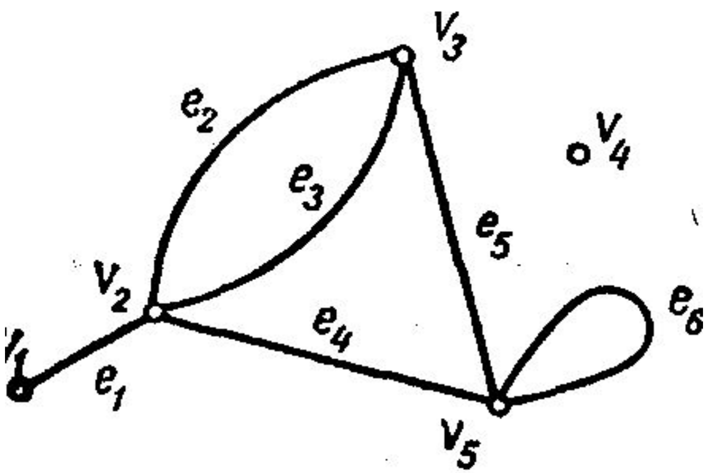


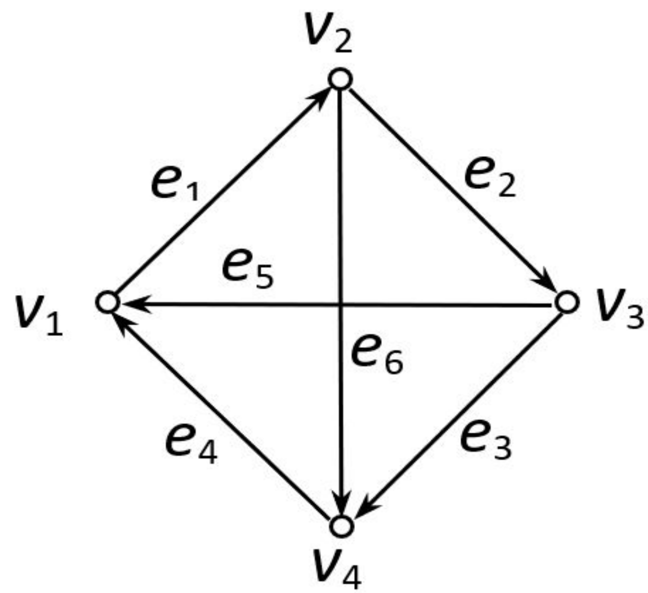


v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	
0	1	0	0	0	v_1
1	0	2	0	1	v_2
0	2	0	0	1	v_3
0	0	0	0	0	v_4
0	1	1	0	1	v_5

a	b	c	d	e	
0	1	0	1	0	a
0	0	1	1	0	b
0	1	0	1	0	c
0	0	1	0	1	d
2	0	0	0	0	e

3.3. ***Матриця інцидентності графа (орграфа).***

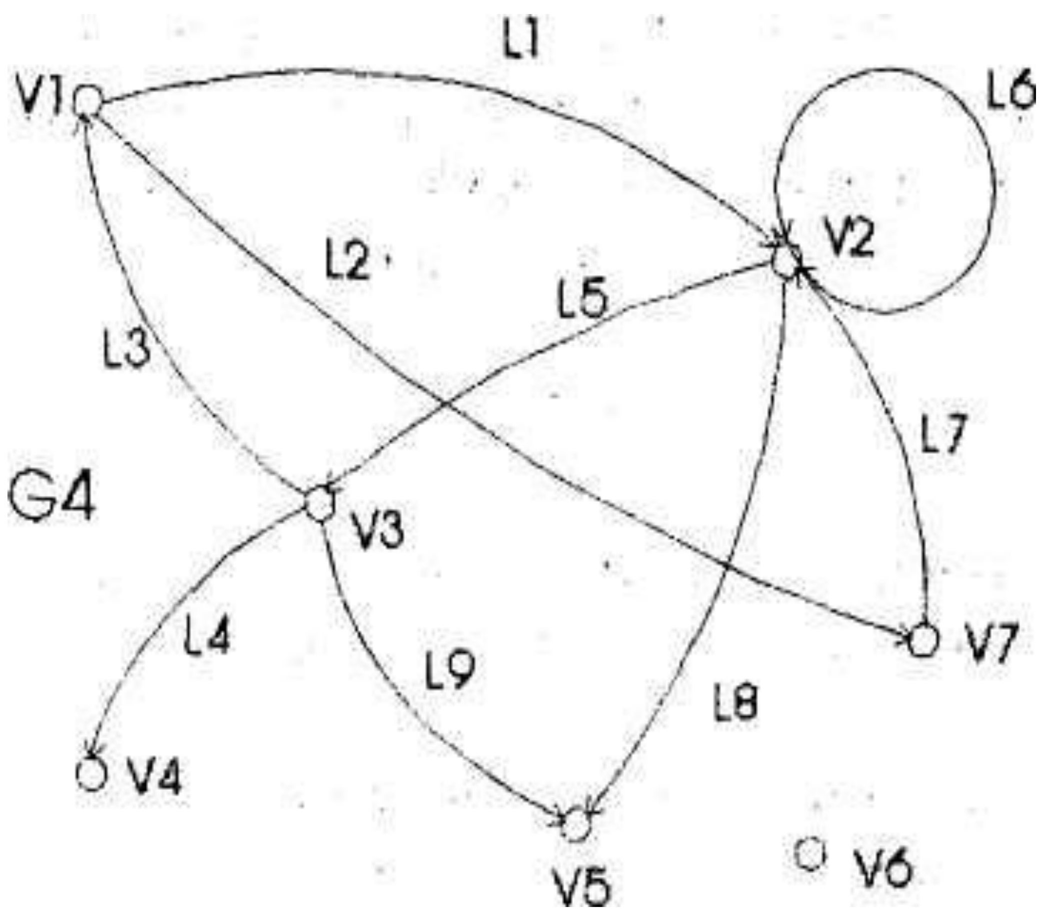




e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	
1	0	0	0	0	0	v_1
1	1	1	1	0	0	v_2
0	1	1	0	1	0	v_3
0	0	0	0	0	0	v_4
0	0	0	1	1	2	v_5

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	
1	0	0	-1	-1	0	v_1
-1	1	0	0	0	1	v_2
0	-1	1	0	1	0	v_3
0	0	-1	1	0	-1	v_4

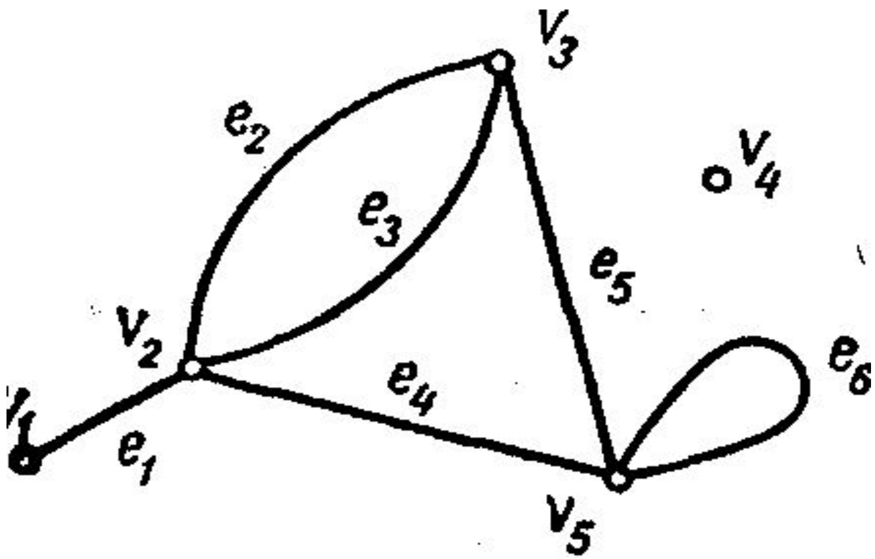
3.4. ***Список ребер*** *(дуг).*
3.5. ***Матриця досяжності орграфа.***



	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7
V1	1	1	1	1	1	0	**1**
V2	1	1	1	1	1	0	**1**
V3	1	1	1	1	1	0	**1**
V4	0	0	0	0	0	0	**0**
V5	0	0	0	0	0	0	**0**
V6	0	0	0	0	0	0	**0**
V7	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**

L1	**V1**	**V2**
L2	V1	**V7**
L3	V3	**V1**
L4	V3	**V4**
L5	V2	**V3**
L6	V2	**V2**
L7	V7	**V2**
L8	V2	**V5**
L9	**V3**	**V5**

4. Маршрути та підграфи



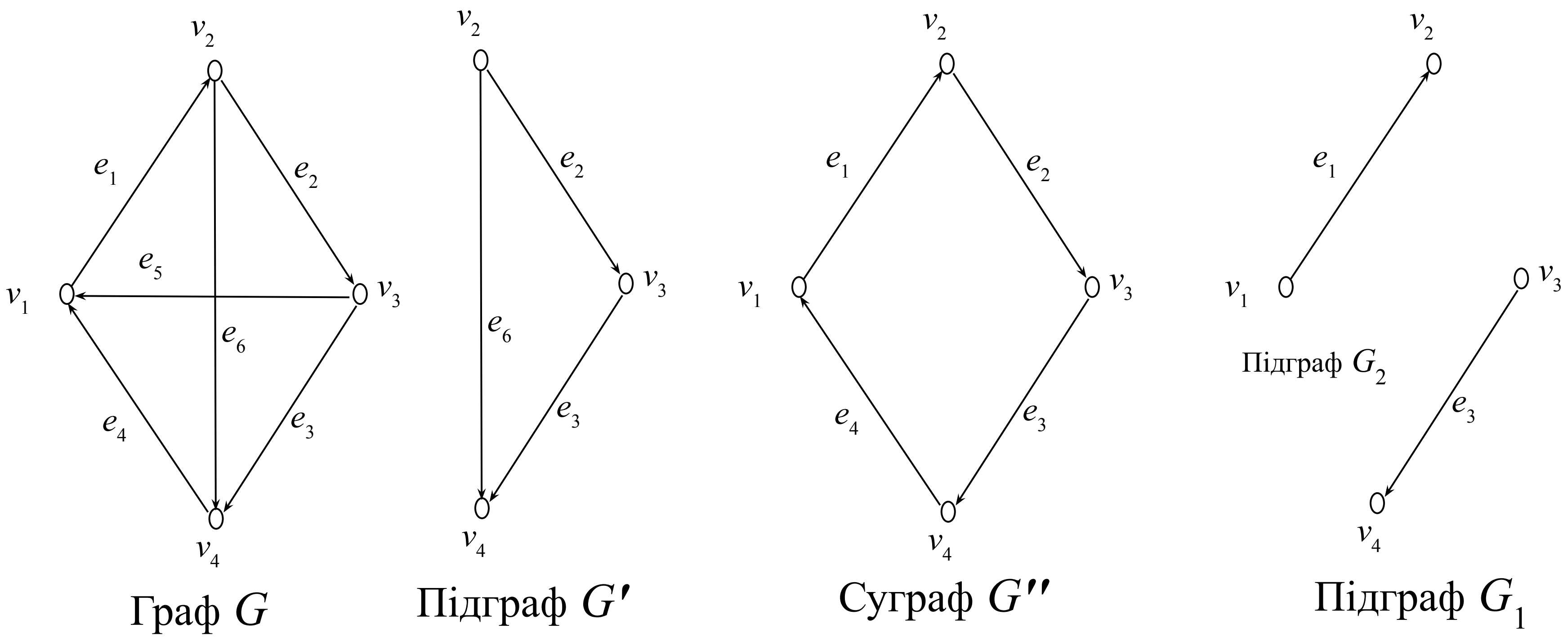
(e_1, e_3, e_2, e_3, e_5) - маршрут, що проходить *через послідовність вершин* (v_1, v_2, v_3, v_2, v_3, v_5) і з'єднує вершини v_1 і v_5;

(e_5, e_6, e_4, e_4) - маршрут, що проходить *через послідовність вершин* (v_3, v_5, v_5, v_2, v_5), з'єднуючи v_3 и v_5;

(e_1, e_3, e_5, e_4, e_1) - замкнутий маршрут;

(e_2, e_5, e_6) - ланцюг; **(e_1, e_2, e_5)** - простий ланцюг;

(e_2, e_3, e_4, e_5) – цикл; **(e_2, e_4, e_5)** - простий цикл



Частини графа G